

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
CENTRO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

**HELENO PONTES BEZERRA NETO**

**DESEMPENHO DE ELEMENTOS FINITOS DE VIGA COM FORMULAÇÃO  
COMPLETA E SIMPLIFICADA NA ANÁLISE DINÂMICA DE *RISERS***

**Maceió**

**2014**

HELENO PONTES BEZERRA NETO

**DESEMPENHO DE ELEMENTOS FINITOS DE VIGA COM FORMULAÇÃO  
COMPLETA E SIMPLIFICADA NA ANÁLISE DINÂMICA DE *RISERS***

Dissertação apresentada ao Colegiado da  
Pós-Graduação em Engenharia Civil da  
Universidade Federal de Alagoas, como parte  
dos requisitos para obtenção do título de  
Mestre em Engenharia Civil

Área de Concentração: Estruturas

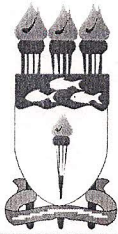
Orientador: Prof. Dr. Eduardo Nobre Lages

**Maceió**

**2014**

**Catlogação na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**  
**Bibliotecário Responsável: Valter dos Santos Andrade**

B574d	<p>Bezerra Neto, Heleno Pontes. Desempenho de elementos finitos de viga com formulação completa e simplificada na análise dinâmica de Risers / Heleno Pontes Bezerra Neto. – Maceió, 2014. 115 f. : il., grafs. e tabs.</p> <p>Orientador: Eduardo Nobre Lages. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil: Estruturas) – Universidade Federal de Alagoas. Centro de Tecnologia. Maceió, 2014.</p> <p>Bibliografia: f. 80-83. Apêndices: f. 84-115.</p> <p>1. Linhas de ancoragem e riser. 2. Dinâmica da estrutura. 3. Método dos elementos finitos. 4. Elemento com massa concentrada. 5. Formulação corrotacional. I. Título.</p> <p style="text-align: right;">CDU: 624.07:531-142.36</p>
-------	--



ATA DA 46ª DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DO PROGRAMA DE  
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL/ESTRUTURAS

Em sessão pública, 09:40h do dia vinte e cinco do mês de agosto do ano de dois mil e quatorze, no prédio do LCCV, foi iniciada a defesa da dissertação de mestrado do aluno **Heleno Pontes Bezerra Neto** tendo como tema: “**Desempenho de elementos finitos de viga com formulação completa e simplificada na análise dinâmica de risers**”, como requisito parcial para obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL**, na área de concentração de **ESTRUTURAS**. A Banca Examinadora foi constituída pelos seguintes membros: Prof. Dr. Eduardo Nobre Lages (Orientador - UFAL), Prof. Dr. Eduardo Toledo de Lima Junior (PPGEC - UFAL) e Prof. Dr. Evandro Parente Junior (UFC). O candidato fez a apresentação da dissertação em (55) minutos. A defesa foi encerrada às 13 horas e 20 minutos. Após o encerramento da defesa, em reunião confidencial, a Banca Examinadora, com base no Regimento Interno, decidiu por APROVAR a dissertação de mestrado, condicionada à realização das correções apresentadas pela Banca Examinadora e entrega da versão final da dissertação, no prazo máximo de 60 dias, a contar da data da defesa, de acordo com o Termo de Compromisso assinado pelo candidato.

Maceió/AL, 25 de agosto de 2014.

Prof. Dr. Eduardo Nobre Lages (Orientador)  
PPGEC/UFAL

Eduardo Nobre Lages

Prof. Dr. Eduardo Toledo de Lima Junior  
PPGEC/UFAL

Eduardo Toledo de Lima Jr.

Prof. Dr. Evandro Parente Junior  
UFC

Evandro Parente Jr.



Eduardo Toledo de Lima Junior  
Prof. Dr. Eduardo Toledo de Lima Junior  
Coordenador do PPGEC/UFAL



Aos meus irmãos, Fernandes Júnior e  
Gustavo, e aos meus avós, Zacarias e  
Cícera, por sempre me apoiarem.

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente a Deus, por ter me guiado por toda essa jornada e pelas conquistas.

Aos meus irmãos, Fernandes e Gustavo, e aos meus avós, Cícera e Zacarias, pelo apoio, compreensão e ensinamentos.

A minha família, que sempre me incentivou e acreditou no desenvolvimento deste trabalho.

Ao orientador Eduardo Nobre, que sempre esteve presente, apoiando e contribuindo para obtenção dos melhores resultados.

Aos professores Eduardo Toledo Lima Junior e João Carlos Cordeiro Barbirato, do PPGEC/CTEC/UFAL, pelos comentários e sugestões para a construção desta dissertação, durante o meu Exame de Qualificação de Mestrado.

Aos amigos e companheiros de pesquisa Michele e Fábio, pelo apoio e incentivo.

Aos amigos Lucas, Hevânio, Cledson, Rafael, Marcos Diego e aos amigos feitos no mestrado, Thabatta e Roberto, pelo compartilhamento de conhecimentos durante o período de curso.

Aos amigos de graduação, em especial Ketson e Ynaê, que, mesmo distantes, conseguimos trocar informações.

Aos amigos e professores do LCCV, em particular Ricardo Fernandes, Catarina Nogueira, Tiago Lobo, José Wellington, Esdras Honorato, Romildo Escarpini, Diogo Cintra, William Wagner, Adeildo Ramos Júnior, Eduardo Toledo e Débora Assis, pelo apoio.

À CAPES e à FUNDEPES, pelo apoio financeiro através da concessão da bolsa de mestrado.

A todos que me ajudaram direta ou indiretamente.

## RESUMO

O uso de sistemas computacionais para resolução de problemas de engenharia é prática cada vez mais presente nos escritórios de projeto. O Método dos Elementos Finitos é uma das técnicas numéricas utilizadas em muitos desses sistemas, a exemplo do DOOLINES, um *framework* desenvolvido em linguagem orientada a objetos, que possibilita a análise dinâmica, no domínio do tempo, de linhas de ancoragem e *risers*. No DOOLINES, até então, as linhas de ancoragem e os *risers* eram discretizados em elementos finitos unidimensionais que utilizam uma formulação simplificada com seis graus de liberdade (translacionais) por elemento, com a consideração apenas das rigidezes axial e à flexão, quando desejável, sendo essa de maneira indireta. Neste trabalho, incorpora-se à estrutura de classes do DOOLINES um novo tipo de elemento com formulação completa de viga que utiliza a teoria corrotacional, com doze graus de liberdade (translacionais e rotacionais) por elemento, capaz de representar diretamente as rigidezes axial, à flexão e à torção. Em ambas as formulações considera-se a matriz de massa concentrada, onde se faz um estudo comparativo desses elementos no que se referem à qualidade da resposta e ao tempo de processamento necessário para simulação.

**Palavras-chave:** *Linhas de ancoragem e risers. Dinâmica da estrutura. Método dos elementos finitos. Elemento com massa concentrada. Formulação corrotacional.*

## ABSTRACT

The use of computational systems to solve engineering problems is increasingly present practical in the design offices. The Finite Element Method is one of the numerical techniques used in many of these systems, like the DOOLINES, a framework developed in object-oriented language, that allows a time domain dynamic analysis of the mooring lines and risers. In DOOLINES, until this work, the mooring lines and risers were discretized in one-dimensional finite elements using a simplified formulation with six degrees of freedom (translational) element, with the consideration of only the axial and bending stiffness, when desirable, being this indirectly. This work incorporates into the DOOLINES class structure a new complete formulation element type that uses the co-rotational theory, with twelve degrees of freedom (translational and rotational) element, able to represent the axial, bending and torsional stiffness. The lumped-mass matrix is used in both formulations. This paper makes a comparative study of these elements about the quality of the response and the time required for simulation.

**Keywords:** *Mooring lines and risers. Structural dynamics. Finite element method. Lumped-mass element. Co-rotational formulation.*



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Segmento de um <i>riser</i> com os eixos de ações das forças .....	27
Figura 2 - Elementos orientados adjacentes ao nó de cálculo da curvatura e vetor binormal..	31
Figura 3 - Configuração dos elementos para encontrar a expressão da curvatura proposta por Escarpini Filho e Lages (2007).....	32
Figura 4 - Razão entre as estimativas de curvatura em função da inclinação relativa entre os elementos adjacentes .....	33
Figura 5 - Graus de liberdade globais do elemento BTruss.....	34
Figura 6 - Disposição do elemento para o cálculo dos componentes da matriz de massa do elemento BTruss .....	36
Figura 7 - Configuração para o cálculo do momento torsor.....	38
Figura 8 - Configuração de <i>riser</i> .....	39
Figura 9 - Distribuição do momento de flexão ao longo do <i>riser</i> para a configuração de equilíbrio estático.....	41
Figura 10 - Configuração final do <i>riser</i> no equilíbrio estático .....	42
Figura 11 - Envoltória de momentos fletores .....	43
Figura 12 - Configurações inicial ( <b>CO</b> ), corrotacionada ( <b>CR</b> ) e deformada ( <b>C</b> ) do elemento de viga (3D).....	45
Figura 13 - Esforços resultantes e convenções de sinais positivos.....	49
Figura 14 - Disposição do elemento para o cálculo dos componentes da matriz de massa do elemento BeamCR .....	50
Figura 15 - Diagrama de classe de BeamCR .....	54
Figura 16 - Comparação do deslocamento ao longo do tempo para a viga biapoiada .....	56
Figura 17 - Comparação do deslocamento ao longo do tempo para viga engastada livre .....	57
Figura 18 - Esquema da viga engastada e livre nas configurações inicial e deformada com uma carga momento aplicada .....	58
Figura 19 - Configuração final da viga para diferentes momentos fletores .....	59
Figura 20 - Modelo de viga biapoiada para comparação entre BeamCR e BTruss .....	60
Figura 21 - Configuração final da viga no plano <b>xy</b> .....	61
Figura 22 - Configuração final da viga no plano <b>xz</b> .....	62
Figura 23 - Configuração final da viga no plano <b>yz</b> .....	62
Figura 24 - Configuração final do elemento proposto com a variação do GJ no plano <b>xz</b> .....	63
Figura 25 - Configuração final do elemento BeamCR com a variação do GJ no plano <b>xz</b> ....	63
Figura 26 - Comparação da torção na extremidade livre ao longo do tempo para viga engastada.....	65
Figura 27 - Deslocamento do nó central ao longo do tempo.....	67
Figura 28 - Análise do erro percentual do deslocamento com o aumento da discretização .....	68
Figura 29 - Gráfico comparativo entre BeamCR e BTruss.....	70
Figura 30 - Gráfico do custo computacional com o aumento da discretização.....	72
Figura 31 - Configuração do <i>riser</i> rígido em catenária .....	73
Figura 32 - Erro percentual para o elemento BeamCR.....	75
Figura 33 - Erro percentual utilizando o elemento BTruss.....	75
Figura 34 - Configuração final do <i>riser</i> rígido utilizando os elementos BeamCR e BTruss.	76
Figura 35 - Custo computacional para análise do <i>riser</i> rígido .....	77
Figura 36 - Diagrama de classes UML do DOOLINES .....	85
Figura 37 - Modelagem numérica de uma situação real.....	87
Figura 38 - Algoritmo do Método de Relaxação Dinâmica Explícito.....	88
Figura 39 - Fluxograma de uma análise estática de modo iterativo .....	88

Figura 40 - Algoritmo do Método de integração de Euler.....	89
Figura 41 - Algoritmo do Método das Diferenças Centrais (Variante de Newmark) .....	91
Figura 42 - Exemplificação do uso de uma diretiva de OpenMP.....	94
Figura 43 - Modelagem do guincho com variação do comprimento.....	95
Figura 44 - Modelagem do guincho com variação da força normal.....	96
Figura 45 - Esquema do fluxo passando por um nó .....	97
Figura 46 - Efeito do fluxo de fluido interno .....	98
Figura 47 - Método da Classe <code>IntAlg</code> para calcular a curvatura.....	99
Figura 48 - Declaração da classe <code>Adaptivity</code> responsável por gerenciar os algoritmos adaptativos .....	100
Figura 49 - Variação da força de atrito .....	101
Figura 50 - Esquema da atualização do ponto alvo .....	102
Figura 51 - Definição da geometria do obstáculo do tipo <b>Bloco</b> .....	104
Figura 52 - Distância com sinal de um ponto qualquer no espaço a um plano .....	105
Figura 53 - Extensão de validade para diferentes teorias de ondas .....	107
Figura 54 - Diagrama de UML atual do DOOLINES .....	113

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Parâmetros do modelo do <i>riser</i> em catenária .....	40
Tabela 2 - Parâmetros do modelo de viga biapoiada .....	55
Tabela 3 - Parâmetros utilizados na viga engastada e livre com carga momento aplicada na extremidade .....	59
Tabela 4 - Deslocamentos horizontal e vertical na extremidade livre da viga para os vários percentuais da carga momento .....	60
Tabela 5 - Parâmetros do modelo de viga biapoiada sujeita a dois carregamentos .....	61
Tabela 6 - Parâmetros do modelo de viga engastada livre com torsor aplicado .....	64
Tabela 7 - Erros percentuais com a utilização do elemento <i>BeamCR</i> .....	68
Tabela 8 - Erros percentuais com a utilização do elemento <i>BTruss</i> .....	69
Tabela 9 - Elemento <i>BeamCR</i> : variação do tempo com o nível de discretização .....	71
Tabela 10 - Elemento <i>BTruss</i> : variação do tempo com o nível de discretização .....	71
Tabela 11 - Parâmetros do modelo do <i>riser</i> rígido .....	73
Tabela 12 - Perfil de correnteza utilizado na análise do <i>riser</i> rígido .....	74

## LISTA DE ABREVIACOES

<b>CTEC</b>	Centro de Tecnologia
<b>CR</b>	Corrotacional
<b>Dynasim</b>	<i>Dynamic Simulator</i>
<b>DOOLINES</b>	<i>Dynamics Of Offshore LINES</i>
<b>EICR</b>	<i>Element Independent Corotational Formulation</i>
<b>JONSWAP</b>	<i>Joint North Sea Wave Observation Project</i>
<b>LT</b>	Lagrangeana Total
<b>LA</b>	Lagrangeana Atualizada
<b>LCCV</b>	Laboratrio de Computao Cientfica e Visualizao
<b>MEF</b>	Mtodo dos Elementos Finitos
<b>MEG – <math>\alpha</math></b>	Mtodo Explcito Generalizado – $\alpha$
<b>MPI</b>	<i>Message Passing Interface</i>
<b>OpenMP</b>	<i>Open Multi-Processing</i>
<b>POO</b>	Programao Orientada a Objetos
<b>PPGEC</b>	Programa de Ps-Graduao em Engenharia Civil
<b>UFAL</b>	Universidade Federal de Alagoas

## LISTA DE SÍMBOLOS

$A$	Sistema nodal do elemento corrotacional
$A_0$	Sistema nodal do elemento corrotacional na configuração inicial
$A_0$	Área da seção transversal
$A_\gamma$	Parâmetro definido em função de $\gamma$
$a$	Área da seção transversal
$B$	Sistema nodal do elemento corrotacional
$B_0$	Sistema nodal do elemento corrotacional na configuração inicial
$\hat{b}$	Vetor binormal
$\hat{b}_i$	Vetor binormal no nó inicial
$\hat{b}_j$	Vetor binormal no nó final
$C_{an}$	Coefficiente de massa adicional na direção normal
$C_{at}$	Coefficiente de massa adicional na direção tangencial
$C_D$	Coefficiente de arrasto
$C_{dn}$	Coefficientes de arrasto na direção normal
$C_{dt}$	Coefficiente de arrasto na direção tangencial
$C_M$	Coefficiente de inércia
$C_0$	Configuração inicial do elemento corrotacional
$D_b$	Diâmetro equivalente
$D_{crit}$	Distância crítica
$D_h$	Diâmetro hidrodinâmico
$d$	Vetor deslocamento
$\dot{d}$	Vetor velocidade
$\ddot{d}$	Vetor aceleração
$E$	Módulo de elasticidade longitudinal
$EA$	Rigidez axial

$EA_0$	Rigidez axial
$EI$	Rigidez à flexão
$\mathbf{F}$	Vetor de forças
$\mathbf{F}_c$	Força centrífuga
$\mathbf{F}_{co}$	Força de Coriolis
$\mathbf{F}_{int}$	Vetor de forças internas do elemento
$f$	Vetor genérico
$f_{n+1}^{des}$	Vetor de forças desequilibradas
$f_{n+1}^{ext}$	Vetor de forças externas
$f_{n+1}^{int}$	Vetor de forças internas
$G$	Módulo de elasticidade na transversal
$GJ$	Rigidez à torção
$g$	Aceleração da gravidade
$H$	Altura da onda
$H_s$	Altura significativa dos componentes de onda
$h$	Profundidade da lâmina de água
$\mathbf{I}$	Matriz Identidade
$I$	Momento de inércia da seção transversal
$I_x$	Momento de inércia associado à torção de Saint Venant
$I_y$	Momento de inércia associados à flexão na direção $y$
$I_z$	Momento de inércia associados à flexão na direção $z$
$\mathbf{i}_{1_0}$	Vetor unitário que define o sistema local na configuração inicial
$\mathbf{i}_{2_0}$	Vetor unitário que define o sistema local na configuração inicial
$\mathbf{i}_{3_0}$	Vetor unitário que define o sistema local na configuração inicial
$K$	Energia cinética
$k$	Número de onda

$k_s$	Rigidez tangencial
$L$	Comprimento do elemento
$L_k$	Comprimento do elemento adjacente $k$ , anterior ao nó analisado
$L_l$	Comprimento do elemento adjacente $l$ , posterior ao nó analisado
$\mathbf{M}$	Vetor momento fletor
$M$	Momento fletor
$\mathbf{M}_M$	Matriz de massa
$\mathbf{M}_i$	Vetor momento fletor no nó inicial
$M_i$	Momento fletor no nó inicial
$\mathbf{M}_j$	Vetor momento fletor no nó final
$M_j$	Momento fletor no nó final
$\vec{M}_s$	Momento interno resultante na seção inicial
$\vec{M}_{s+\Delta s}$	Momento interno resultante na seção final
$M_y$	Momento fletor
$M_z$	Momento fletor
$N$	Esforço normal
$\hat{n}$	Vetor normal
$\mathbf{p}$	Vetor posição
$\vec{Q}$	Esforço cortante resultante
$Q_b$	Esforço cortante na direção normal binormal
$\mathbf{Q}_i$	Vetor esforço cortante no nó inicial
$Q_{ik}$	Componentes do vetor de esforço cortante $\mathbf{Q}_i$ , $k$ variando de 1 a 3
$\mathbf{Q}_j$	Vetor esforço cortante no nó final
$Q_{jk}$	Componentes do vetor de esforço cortante $\mathbf{Q}_j$ , $k$ variando de 1 a 3
$Q_n$	Esforço cortante na direção normal principal
$R$	Força de contato

$\tilde{\mathbf{R}}$	Vetor de resíduos
$\vec{R}_s$	Força interna resultante na seção inicial
$\vec{R}_{s+\Delta s}$	Força interna resultante na seção final
$\mathbf{R}_{\theta 1}$	Matriz de rotação do sistema nodal
$\mathbf{R}_{\theta 2}$	Matriz de rotação do sistema nodal
$r$	Vazão mássica
$r_n$	Velocidade da estrutura na direção normal
$\dot{r}_n$	Aceleração da estrutura na direção normal
$r_t$	Velocidade da estrutura na direção tangencial
$\dot{r}_t$	Aceleração da estrutura na direção tangencial
$\mathbf{r}_0$	Vetor posição
$S_j(\omega)$	Espectro de JONSWAP
$\mathbf{S}_{ku}$	Vetor secante unitário do elemento $k$
$\mathbf{S}_{lu}$	Vetor secante unitário do elemento $l$
$S_{PM}(\omega)$	Espectro de Pierson-Moskowitz
$s$	Seção inicial do <i>riser</i>
$s_f$	Velocidade do fluido interno
$s_{fe}$	Velocidade de entrada do fluido interno
$s_{fs}$	Velocidade de saída do fluido interno
$\mathbf{T}$	Sistemas de eixo local do elemento corrotacional
$T$	Momento torsor
$\mathbf{T}_0$	Sistemas de eixo local do elemento corrotacional na configuração inicial
$t$	Tempo
$\hat{\mathbf{t}}$	Vetor tangente unitário
$\hat{\mathbf{t}}_i$	Vetor tangente unitário no nó inicial
$\hat{\mathbf{t}}_j$	Vetor tangente unitário no nó final



$\dot{U}$	Vetor de deslocamento
$u_e$	Direção de entrada do fluido interno
$u_i$	Deslocamento nodal
$u_i^c$	Deslocamento corrotacional do $i$ -ésimo nó
$u_s$	Direção de saída do fluido interno
$V_y$	Esforço cortante
$V_z$	Esforço cortante
$v$	Vetor contido no plano local $x_0y_0$
$v_n$	Velocidade do fluido na direção normal
$\dot{v}_n$	Aceleração do fluido na direção normal
$v_t$	Velocidade do fluido na direção tangencial
$\dot{v}_t$	Aceleração do fluido na direção tangencial
$v_1$	Velocidade nodal
$v_2$	Velocidade nodal
$w$	Vetor diferença
$X_i$	Posição do $i$ -ésimo nó no sistema global
$x_i$	Posição do $i$ -ésimo nó no sistema local
$x_i^c$	Posição corrotacional do $i$ -ésimo nó
$xyz$	Sistema de eixos global do elemento corrotacional
$x_0y_0$	Plano local
$\alpha$	Porcentagem de amortecimento crítico
$\beta$	Profundidade de penetração
$\Gamma$	Período da onda
$\Gamma_p$	Período da onda
$\gamma$	Parâmetro de forma
$\Delta M$	Variação do momento fletor

$\Delta N$	Variação da força normal
$\Delta Q_n$	Variação da força cortante na direção normal
$\Delta T$	Variação do momento torsor
$\Delta t$	Incremento de tempo
$\delta$	Distância do ponto ao plano
$\varepsilon$	Deformação de engenharia
$\zeta$	Superfície de elevação da onda
$\eta$	Coefficiente de viscosidade axial do material
$\theta(s)$	Rotação para uma seção de comprimento de arco $s$
$\theta_{1x}^e$	Ângulo de rotação do nó inicial do elemento co-rotacional na direção $x$
$\theta_{1y}^e$	Ângulo de rotação do nó inicial do elemento co-rotacional na direção $y$
$\theta_{1z}^e$	Ângulo de rotação do nó inicial do elemento co-rotacional na direção $z$
$\theta_{2x}^e$	Ângulo de rotação do nó final do elemento co-rotacional na direção $x$
$\theta_{2y}^e$	Ângulo de rotação do nó final do elemento co-rotacional na direção $y$
$\theta_{2z}^e$	Ângulo de rotação do nó final do elemento co-rotacional na direção $z$
$\kappa$	Curvatura
$\kappa_G$	Curvatura proposta por Ghadimi (1988)
$\lambda$	Comprimento de onda
$\Xi$	Tensor genérico de segunda ordem
$\xi$	Vetor genérico
$\mu$	Coefficiente de atrito
$\rho$	Densidade de massa do material
$\rho_w$	Densidade da água
$\sigma$	Parâmetro de desvio padrão
$\sigma(t)$	Tensão avaliada no instante ( $t$ )
$\tau$	Torção

$\phi$	Potencial
$\omega$	Frequência angular
$\omega_p$	Frequência angular de pico do espectro

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>20</b>
1.1	Motivação .....	21
1.2	Revisão Bibliográfica .....	21
1.3	Objetivos .....	24
1.4	Estrutura do Trabalho .....	24
<b>2</b>	<b>ELEMENTOS DE TRELIÇA COM INCORPORAÇÃO DAS RIGIDEZES À FLEXÃO E À TORÇÃO .....</b>	<b>26</b>
2.1	Equações Diferenciais de Equilíbrio .....	26
2.2	Força Cortante Equivalente para o Elemento de Treliza com Rigidez à Flexão .....	30
2.3	Graus de Liberdade e Vetor de Forças Internas .....	33
2.4	Matriz de Massa .....	35
2.5	Elemento de Treliza com Rigidezes à Flexão e à Torção .....	37
2.6	Aplicação da Formulação .....	38
2.6.1	Exemplo 1: Análise estática de um <i>riser</i> em catenária .....	39
2.6.2	Exemplo 2: Análise dinâmica de um <i>riser</i> em catenária .....	42
<b>3</b>	<b>TEORIA CORROTACIONAL .....</b>	<b>44</b>
3.1	Descrição Cinemática .....	44
3.2	Esforços Resultantes .....	48
3.3	Matriz de Massa .....	50
3.4	Implementação Computacional .....	53
3.5	Aplicação da Formulação .....	54
3.5.1	Exemplo 1: viga biapoiada .....	55
3.5.2	Exemplo 2: viga engastada livre .....	57
3.5.3	Exemplo 3: viga engastada e livre com carga momento na extremidade livre .....	58
3.5.4	Exemplo 3: viga biapoiada sujeita a duas cargas concentradas .....	60
3.5.5	Exemplo 4: viga engastada livre com tursor aplicado na extremidade livre .....	64
<b>4</b>	<b>COMPARAÇÃO BTRUSS - BEAMCR .....</b>	<b>66</b>
4.1	Exemplo 1: Viga Biapoiada com Carga Transversal no Meio do Vão .....	66
4.1.1	Análise de convergência .....	66
4.1.2	Custo computacional .....	70

4.2	Exemplo 2: Análise de um <i>Riser</i> Submerso .....	72
4.2.1	Análise de convergência.....	74
4.2.2	Custo computacional .....	76
4.3	Análise dos Resultados.....	77
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>78</b>
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>80</b>
	<b>APÊNDICE A – DOOLINES.....</b>	<b>84</b>
A.1	Incorporação das Rotinas Clássicas de Catenária, Análise Estática e de Relaxação Dinâmica .....	86
A.2	Algoritmos de Integração Numérica .....	89
A.3	Modelos Constitutivos.....	91
A.4	Versão Paralela .....	92
A.5	Guinchos.....	94
A.6	Fluido Interno .....	96
A.7	Adaptatividade no Tempo.....	99
A.8	Modelos de Contato/Atrito Linha-Solo .....	100
A.9	Consideração de Obstáculos.....	103
A.10	Consideração do Efeito de Ondas .....	106
A.10.1	Teoria de Airy ou Teoria de Onda Linear .....	107
A.10.2	Teoria de Stokes .....	109
A.10.3	Espectro de Pierson-Moskowitz.....	109
A.10.4	Espectro de JONSWAP .....	110
A.10.5	Forças Hidrodinâmicas.....	111
A.10.6	Implementação Computacional.....	112
A.11	Diagrama de Classes UML.....	112
	<b>APÊNDICE B – ALGORITMO DE SPURRIER.....</b>	<b>114</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Elementos estruturais classificados como barras, onde uma de suas dimensões, a do eixo, se sobressai em relação às outras duas, da seção transversal, podem ser encontrados nos mais variados arranjos estruturais nas diversas áreas da engenharia, como no sistema viga-pilar de estruturas prediais, em cabos de pontes estaiadas, nas barras de torres de transmissão de energia, assim como em linhas de ancoragem e nos *risers* de sistemas *offshore*. As linhas de ancoragem têm a função de amarração das unidades flutuantes (plataformas e embarcações) e os *risers* são dutos que conduzem o óleo do poço, no solo marinho, até a superfície onde se encontram essas unidades flutuantes.

O desenvolvimento de *softwares* de engenharia voltados para a indústria do petróleo tem crescido nos últimos anos, a exemplo do DOOLINES (*Dynamics Of Offshore LINES*) (SILVEIRA *et al.*, 2012), um sistema computacional para análise dinâmica, no domínio do tempo, de linhas de ancoragem e *risers*, concebido por Ferreira (2005) em sua dissertação de mestrado, no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PPGEC), do Centro de Tecnologia (CTEC), da Universidade Federal de Alagoas (UFAL).

A história desse sistema inicia-se com Silveira (2001), em sua tese de doutorado, no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio), que propôs um sistema integrado para análise dinâmica não linear de linhas de ancoragem e *risers*, através do qual foram disponibilizados recursos de pré-processamento, análise numérica interativa-adaptativa e de pós-processamento. Por entender que o núcleo principal do módulo de análise desse sistema poderia ser incorporado em outros sistemas computacionais que envolvessem esse tipo de análise, esse foi posteriormente reformulado para um *framework* em linguagem orientada a objetos por Ferreira (2005), possuindo a capacidade de reuso, extensão e manutenção.

Para simulação de linhas de ancoragem ou *risers* utilizando o DOOLINES, a etapa inicial consiste na modelagem numérica de todo o cenário *offshore* e domínio do problema. No caso específico, as linhas de ancoragem e os *risers* são discretizados em elementos finitos unidimensionais, pois esse simulador utiliza o Método dos Elementos Finitos (MEF) para discretização espacial das equações diferenciais governantes.

Nesse cenário, modelam-se numericamente a reação do solo marinho, a influência da corrente marítima, o peso próprio das linhas de ancoragem e dos *risers*, a influência da onda oceânica e prescrições de movimentos induzidos, por exemplo, por embarcações e fundações. Até então, na discretização das linhas de ancoragem e dos *risers* era utilizado um elemento de treliça espacial com três graus de liberdade translacionais em cada nó e que incorpora indiretamente a rigidez à flexão (ESCARPINI FILHO e LAGES, 2007), a exemplo do que foi proposto por Ghadimi (1988).

### 1.1 Motivação

No cenário da engenharia *offshore*, configurações não planas das linhas de ancoragem e dos *risers* podem ser mobilizadas, por exemplo, na presença de correntes marítimas com direções variadas ao longo da profundidade, bem como na presença de forças hidrodinâmicas geradas por ondas, principalmente nos casos de estruturas próximas à superfície da água, como é caso dos mangotes. Para essas configurações não planas, e até mesmo pelas condições de engastamento dos *risers* a unidades flutuantes, quando a seção estrutural do elemento apresenta rigidez à torção não desprezível, o correspondente esforço de torção pode se manifestar de maneira significativa, sendo necessária a sua consideração nas simulações dos modelos associados às mesmas.

Como esse efeito ainda não é considerado no elemento simplificado disponível no *framework* DOOLINES, investe-se no desenvolvimento de um elemento de viga que atende a essa demanda, além de permitir a análise de configurações que envolvam o engastamento da estrutura, como pode acontecer na conexão dos *risers* com as unidades flutuantes.

### 1.2 Revisão Bibliográfica

O DOOLINES utiliza o Método dos Elementos Finitos (MEF) na discretização espacial do objeto estrutural de análise. Existem formulações completas em MEF que consideram a flexão e a torção em uma estrutura tridimensional. Segundo Chai *et al.* (2002), Seyed *et al.* (1987) usaram 12 graus de liberdade na análise de um elemento de viga e O'Brien *et al.* (1992) utilizaram 14 graus em um elemento híbrido, requerendo, para ambos os casos, significativos esforço computacional e armazenamento de memória.

Estruturas esbeltas sujeitas a fenômenos de instabilidade se comportam, em sua maioria, elasticamente, de modo que ocorrem apenas não linearidades geométricas (grandes deslocamentos e rotações, acompanhadas por pequenas deformações), o que permite admitir hipóteses simplificadoras de que as deformações sejam pequenas ou mesmo infinitesimais, usualmente dentro do regime elástico.

Com essa simplificação, vários benefícios são conseguidos na construção dos modelos de elementos finitos para análise de instabilidade. Um deles consiste em separar a resposta deformacional dos movimentos de corpo rígido. Dentre as formulações existentes, a corrotacional, utilizada na análise geometricamente não linear, é baseada nessa separação (MENIN, 2006).

Em análises geometricamente não lineares utilizando MEF, três diferentes tipos de descrições cinemáticas têm sido amplamente utilizadas, a Lagrangeana Total (LT), a Lagrangeana Atualizada (LA) e a Corrotacional (CR).

Segundo Felippa (2001), na descrição LT as equações do MEF são formuladas em relação a uma configuração de referência fixa, em geral, a própria configuração inicial assumida pela estrutura. Porém, em casos especiais, pode-se escolher uma configuração de base, que não é efetivamente assumida pela estrutura.

Na descrição LA, a configuração de referência é mantida fixa durante o processo iterativo, dentro de um mesmo passo de carga e, uma vez atingido o equilíbrio, todas as tensões e deformações da estrutura passam a ser definidas em função da nova configuração de equilíbrio (MENIN, 2006).

Na descrição CR, as equações do MEF de cada um dos elementos são definidas em relação a dois sistemas distintos: uma configuração de base, que permanece fixa ao longo de toda a análise, semelhante à LT, sendo utilizada para medir os deslocamentos de corpo rígido e uma configuração corrotacional que acompanha cada um dos elementos, a partir da qual são obtidos, exclusivamente, os deslocamentos deformacionais, em função dos quais são definidas as tensões e deformações (MENIN, 2006). Normalmente o sistema fixo é o mesmo para todos os elementos, já o corrotacional varia de elemento para elemento (FELIPPA, 2001).



Wempner (1969) introduziu inicialmente o conceito da descrição cinemática corrotacional e desenvolveu uma formulação para o estudo de cascas submetidas a pequenas deformações e grandes deslocamentos. Já Belytschko e Hsieh (1973) estudaram elementos finitos de viga submetidos a grandes rotações e propuseram um método baseado em um sistema de coordenadas curvilíneas denominado *convected coordinates*.

A teoria corrotacional vem se desenvolvendo desde então. Fraeijns de Veubeke (1976) desenvolveu uma formulação voltada para a solução analítica do problema utilizando um único sistema de eixo corrotacional, denominada *shadow element*. Rankin e Brogan (1986) introduziram a formulação EICR (*Element Independent Corotational Formulation*), que foi posteriormente refinada por Rankin e Nour-Omid (1988) e por Nour-Omid e Rankin (1991) (MENIN, 2006).

Em contrapartida aos elementos com formulação completa, o uso de elementos com massa concentrada tem sido adotado por muitos pesquisadores no estudo de problemas com linhas de ancoragem e *risers*. Walton e Polachek (1960) analisaram as forças nas linhas de ancoragem que eram utilizadas em navios para testes de explosão nuclear utilizando uma análise bidimensional. Nakajima *et al.* (1982) utilizaram um sistema de massas concentradas e molas lineares sem massa, considerando as não linearidades do amortecimento viscoso nas linhas de ancoragem. Van den Boom *et al.* (1987) analisaram linhas de ancoragem realizando uma análise tridimensional. Ghadimi (1988) desenvolveu um elemento com 3 graus de liberdade por nó que incorpora a rigidez à flexão de forma indireta. Chen e Wang (1991) consideraram a ação de fluido interno no *riser*.

Chai *et al.* (2002) desenvolveram um elemento para resolver o problema de *riser* em catenária com a combinação de rigidezes à flexão e à torção e a interação com o solo irregular, com uma formulação que usava 3 graus de liberdade translacionais e uma variável de torque independente.

Recentemente, Barnes *et al.* (2013) desenvolveram um elemento que usa somente 3 graus de liberdade translacionais por nó e que considera torção e flexão para o cálculo de estruturas tridimensionais curvas.

### 1.3 Objetivos

Desde a reformulação do DOOLINES para *framework*, apresentada por Ferreira (2005), várias funcionalidades têm sido incorporadas com o objetivo de torná-lo mais robusto. Nesse contexto, este trabalho tem o objetivo geral de estender a estrutura de classes do DOOLINES para disponibilizar um elemento que incorpore, também, a rigidez à torção. Inicialmente, investiga-se a possibilidade de extensão do elemento preexistente, que já considera as rigidezes axial e à flexão, incorporando, também indiretamente, a rigidez à torção, em uma estratégia semelhante à proposta recentemente por Barnes *et al.* (2013). No entanto, após uma análise crítica dessa extensão, buscou-se uma alternativa através do estudo de uma formulação de elementos finitos que utiliza a teoria corrotacional para um elemento de viga, implementando-a no *framework* DOOLINES e realizando testes comparativos com o elemento finito existente para verificação da formulação aplicada.

Também como objetivo deste trabalho, tem-se o registro das atualizações ocorridas no DOOLINES desde sua reformulação em *framework* por Ferreira (2005). No Apêndice A, faz-se uma descrição geral do DOOLINES, além de uma explicação das atualizações, ressaltando onde essas funcionalidades estão incorporadas e o que havia anteriormente à sua criação.

### 1.4 Estrutura do Trabalho

A seguir, apresenta-se um resumo dos próximos capítulos deste trabalho:

O Capítulo 2 apresenta a descrição do elemento especial de treliça `BTruss` existente no DOOLINES, um elemento finito que incorpora de maneira indireta a rigidez à flexão. Inicialmente mostram-se as equações diferenciais de equilíbrio que regem o problema, em seguida, apresentam-se algumas simplificações utilizadas. Apresenta-se, também, um aperfeiçoamento desse elemento que adiciona a rigidez à torção. Finaliza-se o Capítulo 2 com a aplicação do elemento `BTruss` em dois exemplos que simulam *risers*.

No Capítulo 3 é apresentada a formulação corrotacional para um elemento finito de viga, onde os esforços internos são deduzidos. Para viabilizar a análise dinâmica no DOOLINES, deduz-se a matriz de massa concentrada utilizada. Apresentam-se, também, as interferências feitas no código computacional DOOLINES para incorporação desse elemento, assim como testes para verificação da formulação.

O Capítulo 4 apresenta a comparação entre os dois tipos de elementos. Como comparação, analisam-se a convergência e o custo computacional, sendo explorados exemplos que tratam da análise de viga e da análise de um *riser* submerso.

No Capítulo 5 são abordadas as considerações finais do trabalho, onde se faz um resumo dos resultados obtidos com o desenvolvimento do novo elemento e apresentam-se sugestões para trabalhos futuros.

Além da listagem das Referências, apresenta-se ainda o Apêndice A, com o objetivo de atualizar o registro do DOOLINES como ambiente de desenvolvimento de dissertações no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PPGEC), do Centro de Tecnologia (CTEC), da Universidade Federal de Alagoas (UFAL), fazendo-se uma descrição geral desse *framework*, além de uma explicação das novas funcionalidades, ressaltando onde essas estão incorporadas e o que havia anteriormente à sua criação.

Apresenta-se, também, o Apêndice B, onde é mostrado o algoritmo de Spurrier, que consiste em um roteiro de cálculo da rotação de um sistema de eixos, utilizado na implementação computacional desenvolvida no Capítulo 3.

## 2 ELEMENTOS DE TRELIÇA COM INCORPORAÇÃO DAS RIGIDEZES À FLEXÃO E À TORÇÃO

Baseado no modelo proposto por Ghadimi (1988), Escarpini Filho e Lages (2007) desenvolveram um módulo computacional em MATLAB utilizando um elemento de massa concentrada que incorpora, de maneira simplificada, a rigidez à flexão. Segundo Escarpini Filho e Lages (2007), esse elemento contrapõe-se ao emprego de elementos de viga, que requer um armazenamento significativo da memória assim como um esforço computacional elevado. No DOOLINES esse módulo denomina-se `BTruss`, que substitui o elemento `Truss` inicialmente implementado, que consistia em um elemento clássico de treliça de massa concentrada e que considerava somente a rigidez axial.

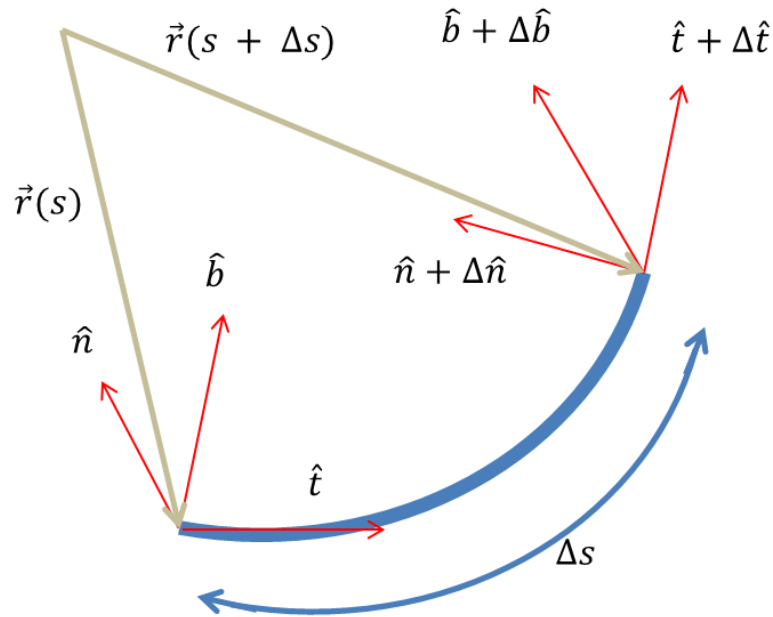
Neste capítulo, apresentam-se as equações diferenciais de equilíbrio de elementos unifilares que possibilitam formular, de maneira simplificada, elementos finitos que permitem incorporar rigidezes, além da axial, trabalhando-se apenas com graus de liberdade translacionais.

Revisa-se a formulação do elemento `BTruss`, já existente, além da tentativa de desenvolvimento de uma expansão desse elemento, visando-se incorporar a rigidez à torção.

### 2.1 Equações Diferenciais de Equilíbrio

A Figura 1 mostra um pequeno segmento deformado de comprimento  $\Delta s$ , representativo de um elemento estrutural unifilar, originalmente retilíneo em sua configuração indeformada, a exemplo de *riser*, assim como os eixos das ações internas atuantes nas seções extremas desse segmento. Esses esforços internos solicitantes são definidos segundo as direções do triedro de Frenet (KREYSZIG, 2010), tais que  $\hat{\mathbf{t}}$  é o vetor tangente unitário,  $\hat{\mathbf{n}}$  é o vetor normal principal e  $\hat{\mathbf{b}}$  é o vetor binormal.

Figura 1 - Segmento de um *riser* com os eixos de ações das forças



Fonte: Autor (2014)

As ações internas atuantes na seção inicial, de coordenada de comprimento de arco  $s$ , são:

$$\vec{R}_s = -N\hat{t} + Q_n\hat{n} + Q_b\hat{b} \quad (2.1)$$

$$\vec{M}_s = -T\hat{t} + M\hat{b} \quad (2.2)$$

onde  $\vec{R}_s$  e  $\vec{M}_s$  representam, respectivamente, a força interna e o momento interno resultante nessa seção. Os componentes dessas ações internas são tais que  $N$  é o esforço normal,  $Q_n$  e  $Q_b$  são esforços cortantes,  $T$  é o momento torsor e  $M$  é o momento fletor. Como o elemento indeformado é considerado retilíneo e como qualquer eixo centroidal da seção transversal é principal de inércia, por ser considerada seção transversal circular, só se tem momento fletor na direção binormal da configuração deformada.

Na seção final, de coordenada de comprimento de arco  $s + \Delta s$ , essas ações internas são dadas por:

$$\vec{R}_{s+\Delta s} = (N + \Delta N)(\hat{t} + \Delta\hat{t}) - (Q_n + \Delta Q_n)(\hat{n} + \Delta\hat{n}) - (Q_b + \Delta Q_b)(\hat{b} + \Delta\hat{b}) \quad (2.3)$$

$$\vec{M}_{s+\Delta s} = (T + \Delta T)(\hat{t} + \Delta\hat{t}) - (M + \Delta M)(\hat{b} + \Delta\hat{b}) \quad (2.4)$$

onde  $\vec{R}_{s+\Delta s}$  representa a força interna resultante na seção final,  $\vec{M}_{s+\Delta s}$  o momento interno resultante na seção final,  $\Delta N$  o incremento do esforço normal,  $\Delta Q_n$  o incremento do esforço cortante na direção normal principal,  $\Delta Q_b$  o incremento do esforço cortante na direção binormal,  $\Delta T$  o incremento do momento torsor e  $\Delta M$  o incremento do momento fletor. Os incrementos dos versores do triedro de Frenet nesta seção final são dados por  $\Delta \hat{\mathbf{t}}$ ,  $\Delta \hat{\mathbf{n}}$  e  $\Delta \hat{\mathbf{b}}$ , respectivamente nas direções tangente, normal principal e binormal.

No diagrama de corpo livre associado a esse segmento, forças distribuídas atuam ao longo do comprimento do segmento, a exemplo da força de arrasto e do peso submerso. No entanto, como o objetivo aqui é determinar as equações de equilíbrio à rotação, essas ações são consideradas termos de ordem superior, por conta da magnitude de suas resultantes e os respectivos braços de alavanca estarem associados ao valor de  $\Delta s$ , sendo desprezadas.

Ainda em relação às equações de equilíbrio à rotação, os momentos inerciais distribuídos devidos à flexão e à torção também são considerados desprezíveis, possibilitando formular simplificadaamente elementos finitos com as respectivas rigidezes através do acompanhamento apenas de graus de liberdade translacionais.

Impondo-se o equilíbrio de momentos em relação à seção final do segmento da barra, tem-se:

$$\vec{M}_s + \vec{M}_{s+\Delta s} - \Delta \vec{r} \times \vec{R}_s = \vec{0} \quad (2.5)$$

ou ainda

$$-T \hat{\mathbf{t}} + M \hat{\mathbf{b}} + (T + \Delta T)(\hat{\mathbf{t}} + \Delta \hat{\mathbf{t}}) - (M + \Delta M)(\hat{\mathbf{b}} + \Delta \hat{\mathbf{b}}) - \Delta \vec{r} \times \vec{R}_s = \vec{0} \quad (2.6)$$

onde  $\Delta \vec{r}$  é o vetor diferença entre as posições das seções final  $\vec{r}(s + \Delta s)$  e inicial  $\vec{r}(s)$ .

Simplificando e desprezando os termos de ordem superior obtém-se

$$\Delta T \hat{\mathbf{t}} + T \Delta \hat{\mathbf{t}} - \Delta M \hat{\mathbf{b}} - M \Delta \hat{\mathbf{b}} - \Delta \vec{r} \times \vec{R}_s = \vec{0} \quad (2.7)$$

Sabendo-se que

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial s} \Delta s \quad (2.8)$$

onde  $f$  é uma variável escalar ou vetorial qualquer, obtém-se

$$T_{,s} \Delta s \hat{\mathbf{t}} + T \hat{\mathbf{t}}_{,s} \Delta s - M_{,s} \Delta s \hat{\mathbf{b}} - M \hat{\mathbf{b}}_{,s} \Delta s - \Delta \vec{r} \times \vec{R}_s = \vec{0} \quad (2.9)$$

ou

$$(T \hat{\mathbf{t}} - M \hat{\mathbf{b}})_{,s} \Delta s - \Delta \vec{r} \times \vec{R}_s = \vec{0} \quad (2.10)$$

ou

$$(T \hat{\mathbf{t}} - M \hat{\mathbf{b}})_{,s} - \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \times \vec{R}_s = \vec{0} \quad (2.11)$$

No limite, quando  $\Delta s \rightarrow 0$ , tem-se

$$(T \hat{\mathbf{t}} - M \hat{\mathbf{b}})_{,s} - \hat{\mathbf{t}} \times \vec{R}_s = \vec{0} \quad (2.12)$$

Substituindo-se  $\vec{R}_s$  em função de seus componentes tem-se

$$(T \hat{\mathbf{t}} - M \hat{\mathbf{b}})_{,s} - \hat{\mathbf{t}} \times (-N \hat{\mathbf{t}} + Q_n \hat{\mathbf{n}} + Q_b \hat{\mathbf{b}}) = \vec{0} \quad (2.13)$$

ou

$$(T \hat{\mathbf{t}} - M \hat{\mathbf{b}})_{,s} - \hat{\mathbf{t}} \times (Q_n \hat{\mathbf{n}} + Q_b \hat{\mathbf{b}}) = \vec{0} \quad (2.14)$$

que pode ser simplificado na forma

$$(T \hat{\mathbf{t}} - M \hat{\mathbf{b}})_{,s} - \hat{\mathbf{t}} \times \vec{Q} = \vec{0} \quad (2.15)$$

sendo  $\vec{Q}$  o esforço cortante resultante na seção transversal.

Para desmembrar as equações escalares de equilíbrio resultantes da Eq. ( 2.15 ), retorna-se à Eq. ( 2.14 ) de posse das fórmulas de Frenet-Serret (LAL e ARORA, 1989), dadas por

$$\hat{\mathbf{t}}_{,s} = \kappa \hat{\mathbf{n}} \quad (2.16)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_{,s} = -\kappa \hat{\mathbf{t}} + \tau \hat{\mathbf{b}} \quad (2.17)$$

$$\hat{\mathbf{b}}_{,s} = -\tau \hat{\mathbf{n}} \quad (2.18)$$

onde  $\kappa$  e  $\tau$  são, respectivamente, a curvatura circular, ou simplesmente curvatura, como denominada neste trabalho, e a curvatura de torção, ou simplesmente torção, obtendo-se

$$T_{,s} = 0 \quad (2.19)$$

$$Q_b = -(T \kappa + M \tau) \quad (2.20)$$

$$Q_n = -M_{,s} \quad (2.21)$$

## 2.2 Força Cortante Equivalente para o Elemento de Treliça com Rigidez à Flexão

Na formulação simplificada proposta por Ghadimi (1988), o elemento estrutural unifilar encontra-se discretizado espacialmente por segmentos de retas correspondentes a elementos finitos de treliça espacial, só com graus de liberdade translacionais nos nós associados.

Em sua formulação, não se considera a rigidez à torção do elemento, conseqüentemente o momento torsor em qualquer seção transversal é nulo. Com isso, aproxima-se por diferenças finitas a Eq. ( 2.15 ), chegando-se a

$$\frac{-M_j \hat{\mathbf{b}}_j + M_i \hat{\mathbf{b}}_i}{L} - \hat{\mathbf{t}} \times \vec{Q} = \vec{0} \quad (2.22)$$

onde os índices  $i$  e  $j$  identificam, respectivamente, os nós inicial e final do elemento, com os respectivos momentos fletores  $M_i$  e  $M_j$ , atuando ao longo das direções binormais  $\hat{\mathbf{b}}_i$  e  $\hat{\mathbf{b}}_j$ , sendo  $L$  o comprimento deformado do elemento.

Assim sendo, chegam-se aos vetores dos esforços cortantes nas seções extremas do elemento através de

$$\mathbf{Q}_j = \hat{\mathbf{t}} \times \frac{(M_j - M_i)}{L} \quad (2.23)$$

e

$$\mathbf{Q}_i = -\mathbf{Q}_j \quad (2.24)$$



sendo  $\mathbf{Q}_i$  e  $\mathbf{Q}_j$ , respectivamente, os vetores esforço cortante nas extremidades inicial e final do elemento, bem como  $\mathbf{M}_i$  e  $\mathbf{M}_j$  os respectivos vetores momento fletor nesses nós extremos.

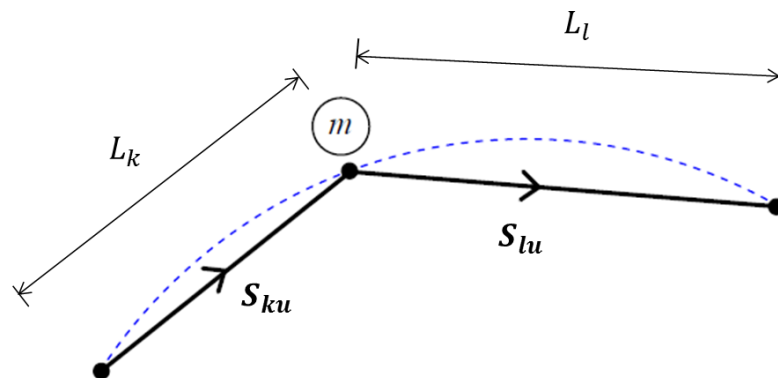
A partir da teoria de vigas, o vetor momento em uma seção qualquer pode ser calculado como

$$\mathbf{M} = EI \kappa \hat{\mathbf{b}} \quad (2.25)$$

onde  $EI$  representa a rigidez à flexão,  $\kappa$  a curvatura e  $\hat{\mathbf{b}}$  o vetor binormal nessa seção transversal.

Na formulação de Ghadimi (1988), em cada nó de extremidade do elemento, de acordo com a Figura 2, esse vetor binormal pode ser gerado a partir da normalização do vetor resultante do produto vetorial entre os vetores unitários  $\mathbf{S}_{ku}$  e  $\mathbf{S}_{lu}$  dos segmentos associados aos dois elementos adjacentes ao nó corrente.

**Figura 2 - Elementos orientados adjacentes ao nó de cálculo da curvatura e vetor binormal**



Fonte: Autor (2014)

Da Eq. ( 2.16 ) verifica-se que a curvatura é dada pela norma da derivada do vetor tangente unitário em relação ao comprimento de arco, que por sua vez foi aproximada por Ghadimi (1988), em diferenças finitas, considerando-se os vetores unitários  $\mathbf{S}_{ku}$  e  $\mathbf{S}_{lu}$  nos comprimentos médios dos respectivos elementos (Figura 2), sendo obtida a seguinte expressão:

$$\kappa_G = 2 \frac{\|\mathbf{S}_{lu} - \mathbf{S}_{ku}\|}{L_k + L_l} \quad (2.26)$$

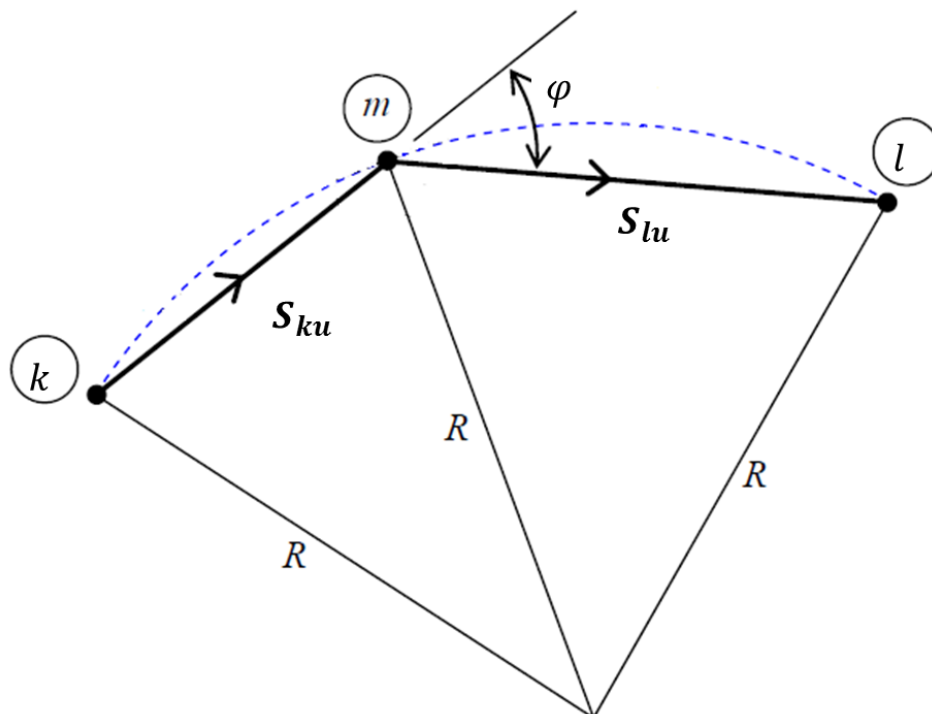
Escarpini Filho e Lages (2007), considerando-se uma interpolação de um arco de circunferência através dos três nós dos dois elementos adjacentes ao nó  $m$  de interesse (Figura 3), propuseram uma nova expressão para o cálculo da curvatura, dada por

$$\kappa_{EFL} = 2 \sqrt{\frac{1 - (\cos \varphi)^2}{L_k^2 + L_l^2 + 2 L_k L_l \cos \varphi}} \quad (2.27)$$

onde  $\varphi$  representa o ângulo relativo entre os elementos adjacentes ao nó  $m$  de interesse, calculado por

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{S}_{ku} \cdot \mathbf{S}_{lu}}{L_k L_l} \quad (2.28)$$

**Figura 3 - Configuração dos elementos para encontrar a expressão da curvatura proposta por Escarpini Filho e Lages (2007)**



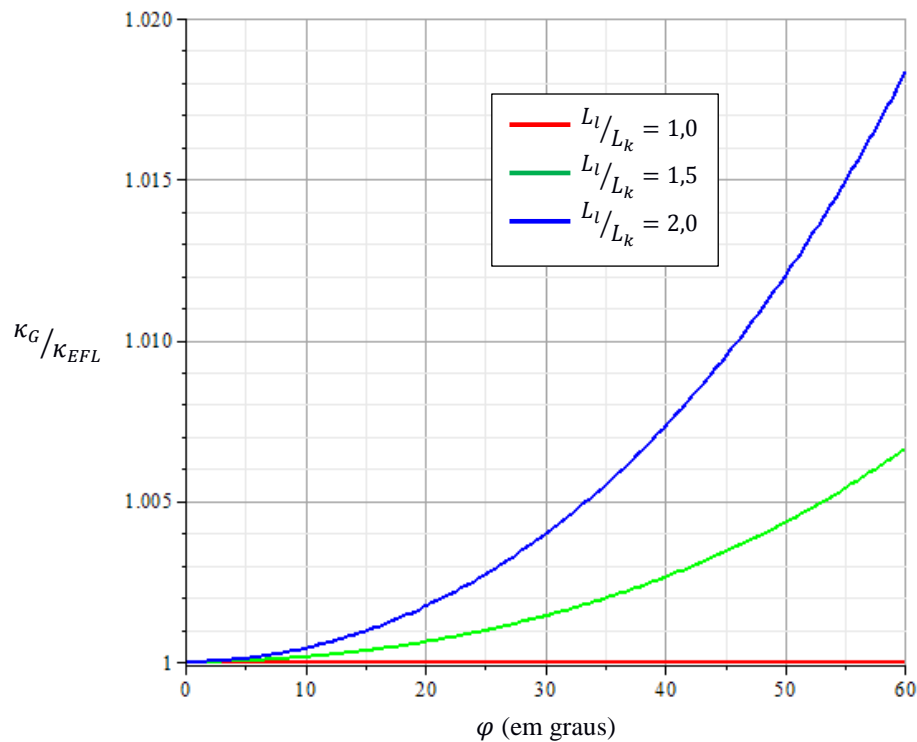
Fonte: Adaptada de Escarpini Filho e Lages (2007)

Na Figura 4 tem-se representada a razão entre a estimativa de curvatura proposta por Ghadimi (1988) e a de Escarpini Filho e Lages (2007) em função das inclinações relativas e para algumas razões entre os comprimentos deformados dos elementos adjacentes.

Os resultados encontrados demonstram uma semelhança dessas estimativas de curvatura para as várias inclinações relativas entre esses elementos adjacentes, havendo a coincidência das mesmas sempre que os comprimentos deformados dos elementos adjacentes são iguais.

Em sendo assim, a expressão da curvatura proposta por Ghadimi (1988), cuja expressão é mais simples de ser avaliada, é a adotada na implementação deste tipo de elemento no DOOLINES.

**Figura 4 - Razão entre as estimativas de curvatura em função da inclinação relativa entre os elementos adjacentes**

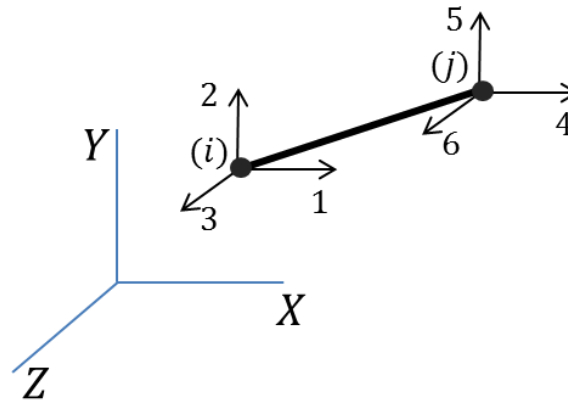


Fonte: Autor (2014)

### 2.3 Graus de Liberdade e Vetor de Forças Internas

O elemento analisado possui apenas graus de liberdade translacionais, conforme mostra a Figura 5, portanto, os esforços gerados no elemento são transformados em forças nessas direções.

Figura 5 - Graus de liberdade globais do elemento BTruss



Fonte: Autor (2014)

Mostrou-se, na seção anterior, a transformação dos momentos fletores em esforços cortantes. Somados a esses esforços, consideram-se os esforços normais gerados, constituindo, assim, as forças internas do elemento. O vetor de forças internas do elemento  $\mathbf{F}_{int}$  é construído como

$$\mathbf{F}_{int} = \begin{Bmatrix} Q_{ix} + N_{ix} \\ Q_{iy} + N_{iy} \\ Q_{iz} + N_{iz} \\ Q_{jx} + N_{jx} \\ Q_{jy} + N_{jy} \\ Q_{jz} + N_{jz} \end{Bmatrix} \quad (2.29)$$

onde  $Q_{ix}$ ,  $Q_{iy}$  e  $Q_{iz}$  são os componentes globais do vetor de esforços cortantes no nó inicial do elemento ( $\mathbf{Q}_i$ ),  $Q_{jx}$ ,  $Q_{jy}$  e  $Q_{jz}$  são os componentes globais do vetor de esforços cortantes no nó final do elemento ( $\mathbf{Q}_j$ ),  $N_{ix}$ ,  $N_{iy}$  e  $N_{iz}$  são os componentes globais do vetor de esforço normal no nó inicial do elemento ( $\mathbf{N}_i$ ),  $N_{jx}$ ,  $N_{jy}$  e  $N_{jz}$  são os componentes globais do vetor de esforço normal no nó final do elemento ( $\mathbf{N}_j$ ).

O vetor de esforço normal no nó final do elemento ( $\mathbf{N}_j$ ) é dado por

$$\mathbf{N}_j = EA \frac{(L - L_0)}{L_0} \hat{\mathbf{t}} \quad (2.30)$$

onde  $EA$  representa a rigidez axial do elemento e  $L_0$  o comprimento indeformado do elemento.

O vetor de esforço normal no nó inicial do elemento é definido como

$$N_i = -N_j \quad (2.31)$$

## 2.4 Matriz de Massa

O DOOLINES utiliza algoritmos explícitos de integração temporal, desse modo é necessária a definição de uma matriz de massa para o elemento. Admite-se uma matriz de massa concentrada, que apresenta a característica de ser diagonal, o que facilita a integração numérica temporal no instante em que se faz necessária sua inversão.

Para o cálculo dos componentes da matriz de massa, considera-se que os graus de liberdade de cada nó mobilizam, como corpo rígido e desacoplado dos demais graus de liberdade, metade do elemento finito, conforme Figura 6.

A energia cinética para cada grau de liberdade translacional é dada por

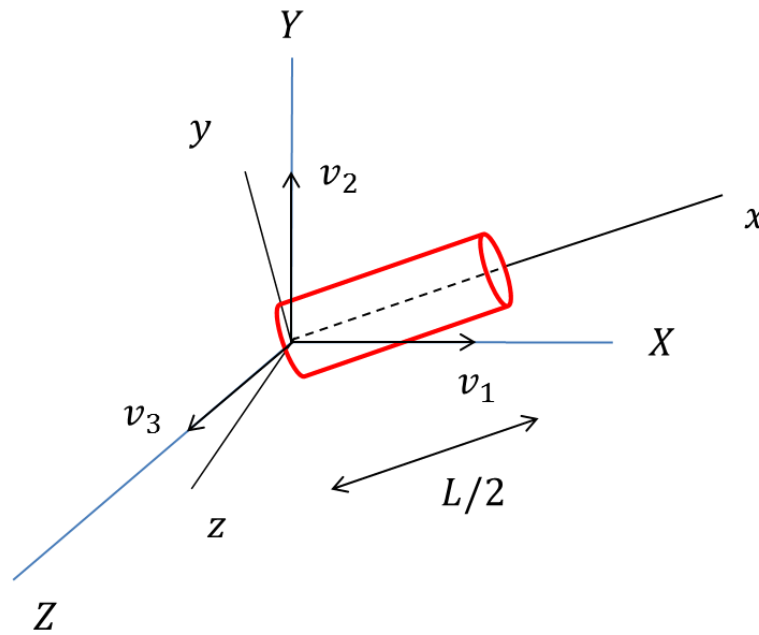
$$K_{v_1} = \int_V \rho \frac{v_1^2}{2} dV \quad (2.32)$$

$$K_{v_2} = \int_V \rho \frac{v_2^2}{2} dV \quad (2.33)$$

$$K_{v_3} = \int_V \rho \frac{v_3^2}{2} dV \quad (2.34)$$

sendo  $K$  a energia cinética,  $v_1$ ,  $v_2$  e  $v_3$  as velocidades nos eixos globais  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ , respectivamente,  $\rho$  a densidade de massa do material e  $V$  o domínio espacial de integração.

**Figura 6 - Disposição do elemento para o cálculo dos componentes da matriz de massa do elemento BTruss**



Fonte: Autor (2014)

Desenvolvendo-se as expressões ( 2.30 ), ( 2.31 ) e ( 2.32 ), tem-se

$$K_{v_1} = \frac{v_1^2}{2} \rho \int_0^{L/2} \int_A dA dx \quad (2.35)$$

$$K_{v_2} = \frac{v_2^2}{2} \rho \int_0^{L/2} \int_A dA dx \quad (2.36)$$

$$K_{v_3} = \frac{v_3^2}{2} \rho \int_0^{L/2} \int_A dA dx \quad (2.37)$$

sendo  $A$  a área da seção transversal e  $L$  o comprimento do elemento.

Analisando-se os termos relativos à massa nessas expressões das energias cinéticas translacionais, obtém-se

$$M_{M1} = M_{M2} = M_{M3} = \frac{\rho AL}{2} \quad (2.38)$$

sendo  $M_{M1}$ ,  $M_{M2}$  e  $M_{M3}$  os componentes de massa relativos aos graus de liberdade translacionais.

Dessa forma, tem-se a matriz de massa diagonal ( $\mathbf{M}_M$ ) dada por:

$$\mathbf{M}_M = [M_{M1} \quad M_{M2} \quad M_{M3}] \quad (2.39)$$

## 2.5 Elemento de Treliça com Rigidezes à Flexão e à Torção

Com o objetivo de expandir a capacidade de modelagem do elemento finito descrito na seção anterior, faz-se uma tentativa de incorporação da rigidez à torção a esse elemento. As equações diferenciais de equilíbrio são as mesmas apresentadas na Seção 2.1, que resultou na expressão (2.15).

Pela teoria de vigas, o momento torsor é dado por

$$T = -GJ \tau \quad (2.40)$$

sendo  $GJ$  a rigidez à torção e  $\tau$  a torção.

Em um elemento finito de interpolação linear, a torção pode ser calculada como a razão entre o ângulo formado pelos vetores binormais nas extremidades e o comprimento do elemento, ou seja,

$$\tau = \frac{\text{acos}(\hat{\mathbf{b}}_i \cdot \hat{\mathbf{b}}_j)}{L} \quad (2.41)$$

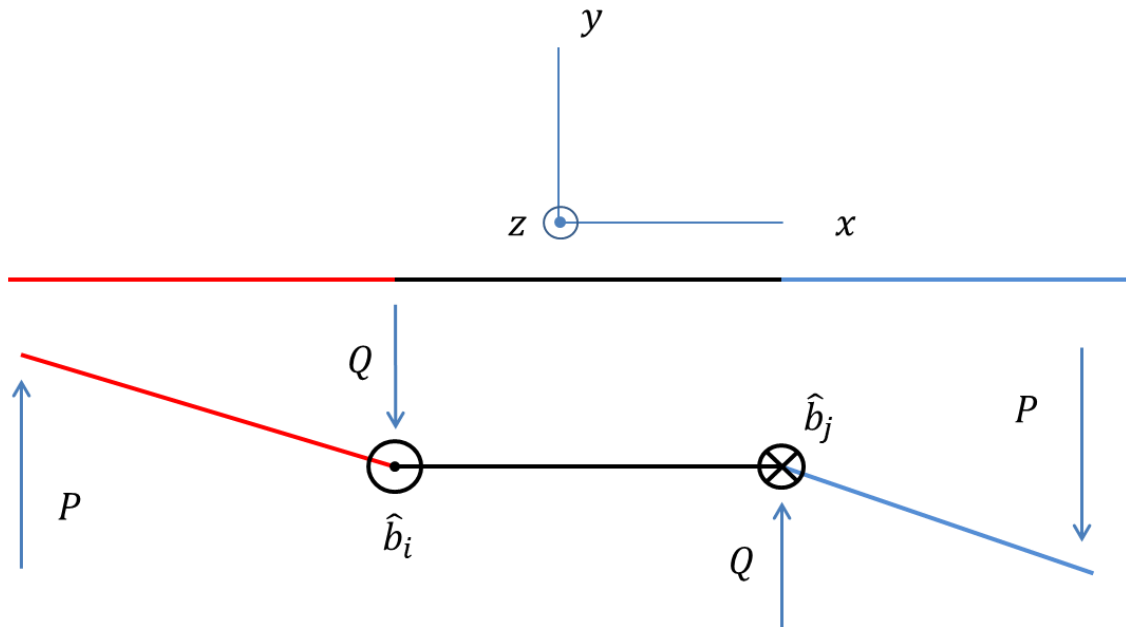
sendo  $\hat{\mathbf{b}}_i$  e  $\hat{\mathbf{b}}_j$  os vetores binormais dos nós inicial e final do elemento.

Como o elemento finito em pauta só considera graus de liberdade translacionais, o vetor binormal de um nó é estimado através da normalização do vetor resultante do produto vetorial entre os vetores tangentes unitários dos elementos adjacentes ao nó de interesse.

Uma limitação inicial dessa forma de se estimar o vetor binormal é que não é possível capturar a torção pura em uma barra retilínea, já que os vetores unitários são todos colineares, anulando os respectivos produtos vetoriais. Além disso, em determinadas situações (Figura 7),

a estimativa da torção pela expressão ( 2.41 ) gera momento tursor em uma configuração deformada onde não deveria existir.

**Figura 7 - Configuração para o cálculo do momento tursor**



Fonte: Autor (2014)

Na Figura 7, percebem-se três elementos inicialmente colineares que, após ação forças  $P$  e  $Q$ , assumem posições não colineares, entretanto, no mesmo plano. Essa nova configuração permite o surgimento de vetores binormais em sentidos opostos, e, por consequência, de momento tursor. No entanto, sabe-se que a ação dessas forças não faria surgir momento tursor. Esse caso especial mostra um dos problemas que podem surgir ao se utilizar esse tipo de elemento.

Na formulação desenvolvida no trabalho recente de Barnes *et al.* (2013) esses problemas não foram levantados, possivelmente por se considerar estruturas tridimensionais inicialmente curvas.

A aplicação da formulação desenvolvida para esse elemento será feita no Capítulo 3.

## 2.6 Aplicação da Formulação

Como aplicação da formulação utilizada pelo elemento BTruss, simulam-se exemplos utilizados por Escarpini Filho e Lages (2007) e por Lages *et al.* (2008), comparando os

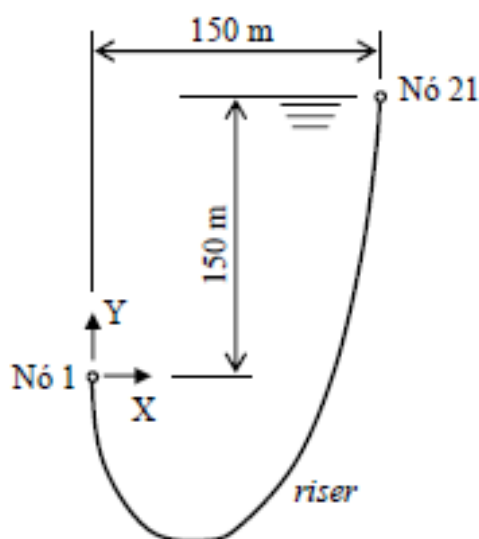


resultados obtidos. A formulação utilizada por esse elemento consiste na formulação desenvolvida por Escarpini Filho e Lages (2007) com o cálculo da curvatura feito pela expressão proposta por Ghadimi (1988), conforme visto na Seção 2.2. Durante a análise e discussão dos resultados, os dados referentes a essa formulação é denominado de Presente Estudo.

### 2.6.1 Exemplo 1: Análise estática de um *riser* em catenária

Analisa-se a formulação proposta no arranjo estático de um *riser* em catenária (Figura 8), comparando com os modelos de Escarpini Filho e Lages (2007), Ghadimi (1988), McNamara *et al.* (1986) e McNamara e Hibbitt (1986). McNamara *et al.* (1986) utilizaram elementos finitos híbridos viga-pilar para incluir a condição de inextensibilidade em um modelo bidimensional. Por outro lado, McNamara e Hibbitt (1986) utilizaram elementos tridimensionais usando elementos viga-pilar considerando esforços axiais, torcionais, de flexão e de cisalhamento.

**Figura 8 - Configuração de *riser***



Fonte: Escarpini Filho e Lages (2007)

Trata-se de um *riser* submerso em catenária, com o nó inicial a uma profundidade de 150 m do nível da água e distante 150 m na horizontal do nó final. Em sua discretização, utilizam-se 20 elementos, sendo os dois elementos iniciais de cada extremidade com 5 m e 10 m e os 16 elementos centrais com 20 m de comprimento cada, discretização semelhante à utilizada por Escarpini Filho e Lages (2007). Os parâmetros utilizados para geração do modelo mostrado

na Figura 8 estão listados na Tabela 1. Para realização da análise estática, utiliza-se o método de relaxação dinâmica do DOOLINES, descrito no item A.1 do Apêndice A deste trabalho.

**Tabela 1 - Parâmetros do modelo do *riser* em catenária**

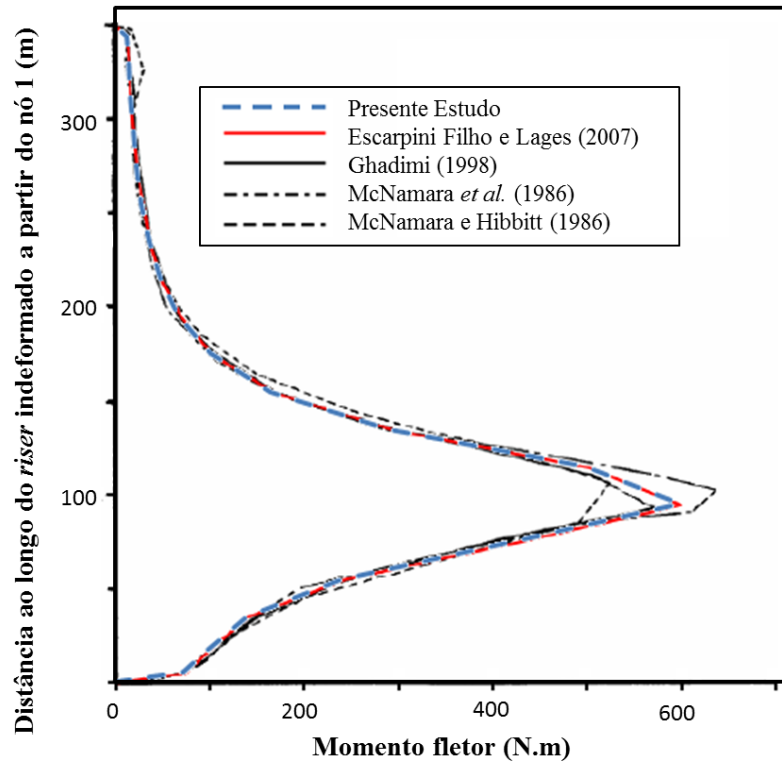
Parâmetro	Valor
Densidade da água do mar	1.025,00 kg/m <sup>3</sup>
Diâmetro externo do <i>riser</i>	0,26 m
Diâmetro interno do <i>riser</i>	0,20 m
Rigidez à flexão do <i>riser</i> ( $EI$ )	20,96 kN·m <sup>2</sup>
Rigidez axial do <i>riser</i> ( $EA$ )	1.538.000 kN
Massa no ar por unidade de comprimento (vazio)	89,70 kg/m
Peso aparente do <i>riser</i> (cheio de água)	0,34611 kN/m
Comprimento total indeformado	350 m
Número de elementos	20
Coefficiente de arrasto ( $C_D$ )	1,0
Coefficiente de inércia ( $C_m$ )	2,0

Fonte: Adaptada de Escarpini Filho e Lages (2007)

Na Figura 9 apresenta-se o gráfico de comparação da distribuição dos momentos fletores ao longo do *riser* do presente estudo com os modelos de Escarpini Filho e Lages (2007), Ghadimi (1988), McNamara *et al.* (1986) e McNamara e Hibbitt (1986). Percebe-se a boa concordância dos resultados, além da proximidade com a formulação proposta por Escarpini Filho e Lages (2007).

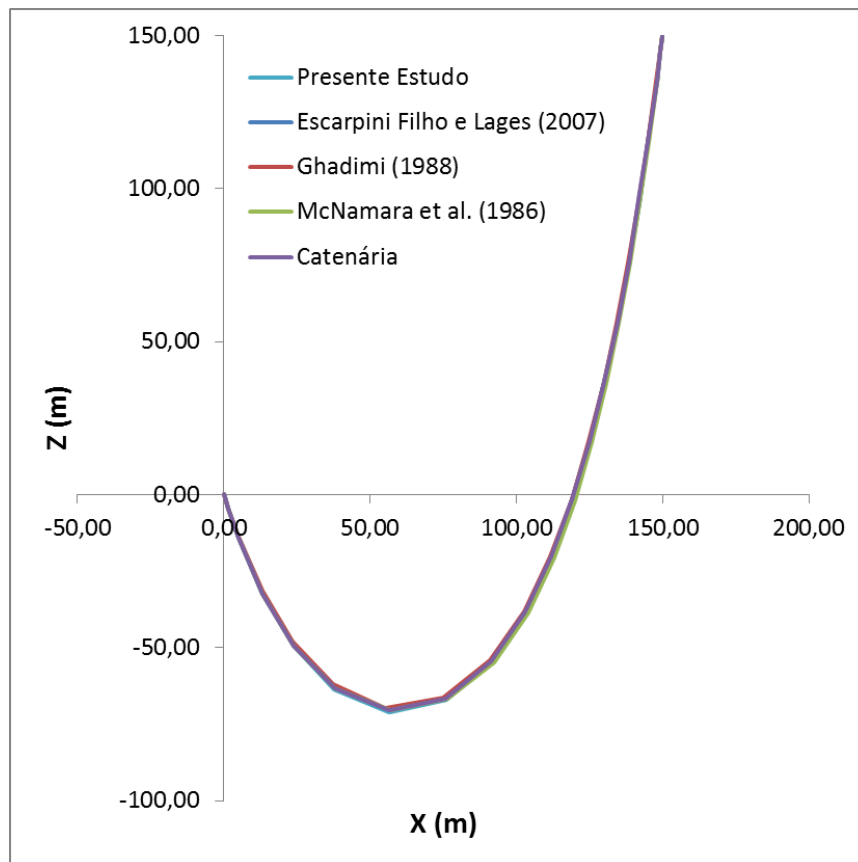
Realiza-se, também, a comparação da configuração final do *riser* com as configurações obtidas por Escarpini Filho e Lages (2007), Ghadimi (1988), McNamara *et al.* (1986) e o valor teórico, utilizando a equação da catenária mostrada em Ghadimi (1998). Utilizam-se os dados gerados por Escarpini Filho e Lages (2007) para comparação. A Figura 10 mostra a equivalência das configurações finais obtidas pelas diferentes formulações.

Figura 9 - Distribuição do momento de flexão ao longo do *riser* para a configuração de equilíbrio estático



Fonte: Autor (2014)

**Figura 10 - Configuração final do *riser* no equilíbrio estático**

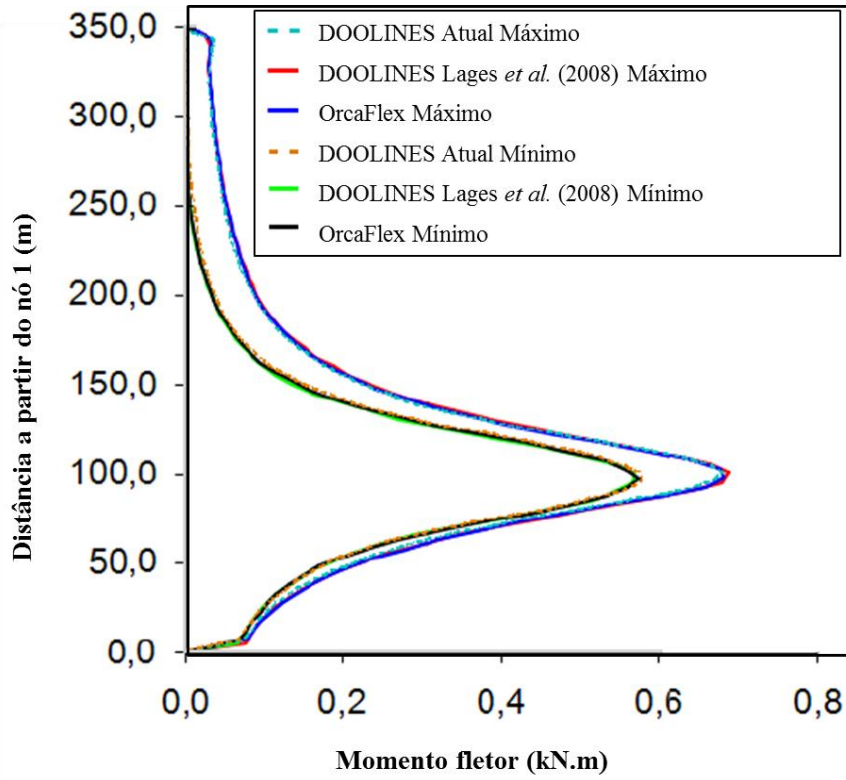


Fonte: Autor (2014)

### 2.6.2 Exemplo 2: Análise dinâmica de um *riser* em catenária

Visando analisar comportamento dinâmico global da linha, realiza-se um estudo semelhante ao de Lages *et al.* (2008), onde se modela um *riser* com características semelhantes às do Exemplo 1 (Seção 2.6.1), diferenciando pelo fato de serem utilizados 70 elementos de mesmo tamanho e haver a prescrição de um movimento harmônico horizontal na extremidade superior da linha com amplitude de 2,01 m e período de 14 s. Como algoritmo de integração, utiliza-se o Método Explícito Generalizado –  $\alpha$  (MEG –  $\alpha$ ), com um passo de integração de 0,000485 s, durante um tempo de simulação de 400 s.

Comparam-se os resultados obtidos com os de Lages *et al.* (2008) e os resultados do programa comercial OrcaFlex (ORCINA, 2014). A Figura 11 mostra a envoltória de momentos fletores, onde é possível observar excelente concordância entre os resultados.

**Figura 11 - Envoltória de momentos fletores**

Fonte: Autor (2014)

### 3 TEORIA CORROTACIONAL

Atualmente o DOOLINES disponibiliza o elemento finito `BTruss` que, como explicado no Capítulo 2, consiste em um elemento especial de treliça de massa concentrada com a consideração indireta da rigidez à flexão, possuindo 3 graus de liberdade translacionais por nó. Neste capítulo descreve-se e desenvolve-se o `BeamCR`, um elemento de viga completo, com 6 graus de liberdade por nó, e que utiliza a teoria corrotacional. A formulação desta teoria é semelhante à desenvolvida por Menin (2006) em sua tese de doutorado, de onde se herdou o cálculo do vetor de forças internas, cabendo ainda o desenvolvimento da matriz de massa desse elemento, posto que o trabalho de Menin (2006) focou em análises estáticas.

#### 3.1 Descrição Cinemática

Monteiro (2004) desenvolveu uma formulação corrotacional para pórticos espaciais baseada na formulação EICR desenvolvida por Nour-Omid e Rankin (1991), na qual os movimentos de corpo rígido são separados dos movimentos deformacionais. Menin (2006) aplicou a teoria desenvolvida por Monteiro (2004) a outros sistemas estruturais, tais como treliças, pórticos planos, cascas, além de pórticos espaciais.

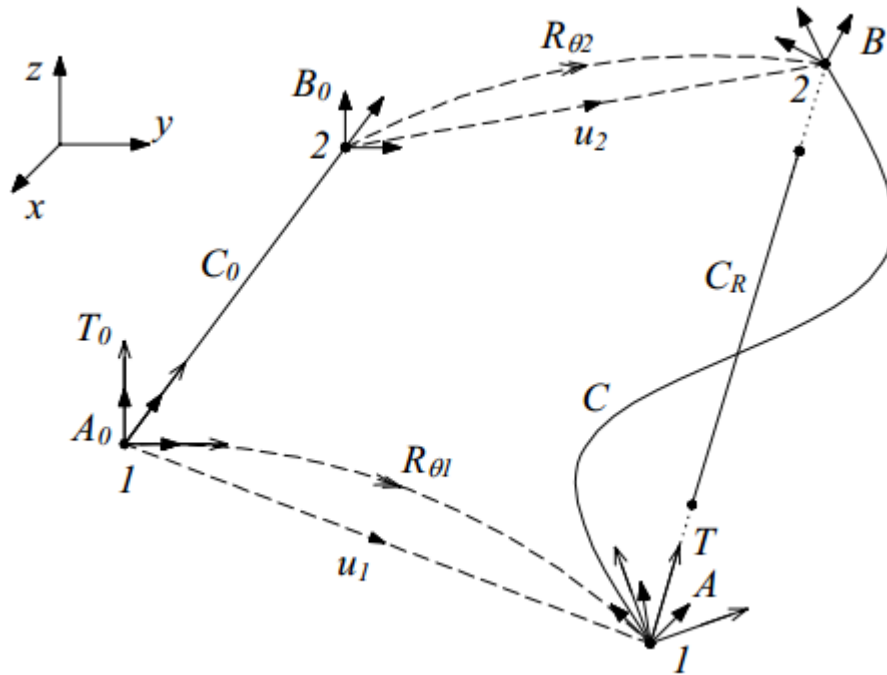
Segundo Menin (2006), nesta abordagem não são necessárias modificações internas em rotinas lineares de elementos finitos já existentes, uma vez que a separação de movimentos é obtida através da utilização dos chamados operadores de projeção ou projetores, que podem ser usados como pré e pós-processadores nas rotinas computacionais, conferindo assim o grande poder e a facilidade de implementação da referida formulação.

Menin (2006) utilizou três sistemas distintos de eixos cartesianos ortogonais, da mesma forma que o empregado por Rankin e Brogan (1986), que descrevem o movimento de um elemento genérico (Figura 12):

- Sistema global –  $xyz$  utilizado para definir a conectividade entre os elementos.
- Sistema local  $T$  que sofre translações e giros ao acompanhar o elemento, sendo, em geral, conhecido na literatura como sistema corrotacional.

- Sistemas nodais  $A$  e  $B$  que estão atrelados, respectivamente, aos nós inicial (1) e final (2) de cada elemento.

Figura 12 - Configurações inicial ( $C_0$ ), corrotacionada ( $C_R$ ) e deformada ( $C$ ) do elemento de viga (3D)



Fonte: Menin (2006)

O sistema local de eixos  $T$ , definido na configuração inicial  $C_0$  como  $T_0$ , pode ser expresso como

$$T_0 = \begin{bmatrix} i_{1,0}^T \\ i_{2,0}^T \\ i_{3,0}^T \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

onde  $i_{1,0}$ ,  $i_{2,0}$  e  $i_{3,0}$  representam vetores unitários que definem o sistema local na configuração inicial, escritos na forma de vetor coluna e calculados como

$$i_{1,0} = \frac{X_{21}}{\|X_{21}\|} \quad (3.2)$$

$$i_{3,0} = \frac{i_{1,0} \times v}{\|i_{1,0} \times v\|} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{i}_{2_0} = \mathbf{i}_{3_0} \times \mathbf{i}_{1_0} \quad (3.4)$$

sendo  $\mathbf{X}_{21} = \mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1$ , tal que o vetor  $\mathbf{X}_i$  representa a posição do nó  $i$  na configuração  $C_0$  e  $v$  é um vetor contido no plano local  $x_0y_0$  do elemento. Menin (2006) localizou a origem do sistema local no nó 1 e o posicionamento dos eixos locais coincidindo com as direções principais de inércia do elemento.

As orientações iniciais dos sistemas nodais  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  na configuração inicial  $C_0$ , denominadas  $\mathbf{A}_0$  e  $\mathbf{B}_0$ , respectivamente, são escolhidas iguais à do sistema de eixos locais, ou seja,

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{B}_0 = \mathbf{T}_0^T \quad (3.5)$$

O movimento do pórtico pode ser dividido em translações e rotações. Nas translações ocorrem os movimentos de corpo rígido e a deformação axial, e nas rotações dos eixos  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  aparecem as curvaturas no elemento. A posição final é expressa por

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{X}_i + \mathbf{u}_i \quad (3.6)$$

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i^r + \mathbf{u}_i^d \quad (3.7)$$

sendo  $\mathbf{x}_i$  a posição final nodal,  $\mathbf{u}_i$  o deslocamento,  $\mathbf{u}_i^r$  a parcela de corpo rígido e  $\mathbf{u}_i^d$  a parcela deformacional.

Os eixos  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , na configuração corrente  $C$ , são obtidos respectivamente por

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3] = \mathbf{R}_{\theta_1} \mathbf{A}_0 \quad (3.8)$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{b}_3] = \mathbf{R}_{\theta_2} \mathbf{B}_0 \quad (3.9)$$

sendo  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$  e  $\mathbf{a}_3$  os vetores coluna que compõem o eixo  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}_1$ ,  $\mathbf{b}_2$  e  $\mathbf{b}_3$  os vetores coluna que compõem o eixo  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{R}_{\theta_1}$  e  $\mathbf{R}_{\theta_2}$  as matrizes de rotação dos eixos  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , respectivamente.

Ao se considerar grandes rotações no espaço, alguns problemas são encontrados quando essas rotações são tratadas como vetores. Monteiro (2004) mostra em detalhes essa problemática.

Segundo Rankin e Nour-Omid (1988), o sistema corrotacional  $\mathbf{T}$  é definido por



$$T = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1^T \\ \mathbf{i}_2^T \\ \mathbf{i}_3^T \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

onde  $\mathbf{i}_1$ ,  $\mathbf{i}_2$  e  $\mathbf{i}_3$  são vetores unitários que definem o sistema corrotacional na configuração corrente, calculados como

$$\mathbf{i}_1 = \frac{\mathbf{x}_{21}}{\|\mathbf{x}_{21}\|} \quad (3.11)$$

$$\mathbf{i}_3 = \frac{\mathbf{i}_1 \times \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{i}_1 \times \mathbf{a}_2\|} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_3 \times \mathbf{i}_1 \quad (3.13)$$

sendo  $\mathbf{x}_{21} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ , tal que o vetor  $\mathbf{x}_i$  representa a posição do nó  $i$  na configuração corrente  $C$

Definidos os eixos corrotacionais, faz-se a mudança das coordenadas globais para as locais. Sendo  $\xi$  um vetor e  $\Xi$  um tensor de segunda ordem, a relação entre os sistemas local e global são expressas por:

$$\xi^e = T\xi \quad (3.14)$$

$$\Xi^e = T\Xi T^T \quad (3.15)$$

onde o índice  $e$  sobrescrito indica os valores no sistema local.

A posição corrotacional do  $i$ -ésimo nó ( $\mathbf{x}_i^c$ ) é dada por

$$\mathbf{x}_i^c = T(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1) = T\mathbf{x}_{i1} \quad (3.16)$$

O deslocamento corrotacional do  $i$ -ésimo nó ( $\mathbf{u}_i^c$ ) é dado por

$$\mathbf{u}_i^c = T(\mathbf{X}_{i1} + \mathbf{u}_{i1}) - \mathbf{X}_i^c \quad (3.17)$$

A posição inicial local é dada por

$$\mathbf{X}_i^c = T_0(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_1) = T_0\mathbf{X}_{i1} \quad (3.18)$$

### 3.2 Esforços Resultantes

Os elementos de pórtico espacial proposto por Menin (2006) estão submetidos a seis esforços resultantes em cada um dos nós, representados na configuração atual por  $N$ ,  $V_y$ ,  $V_z$ ,  $T$ ,  $M_y$  e  $M_z$ , totalizando doze esforços por elemento. O esforço normal  $N$ , os cortantes  $V_y$  e  $V_z$  e o momento torsor  $T$  são constantes ao longo de todo o elemento, ao passo que os momentos fletores  $M_y = M_y(x^e)$  e  $M_z = M_z(x^e)$  variam linearmente ao longo do elemento, admitindo-se tratar de um modelo Hermitiano. Admitindo comportamento elástico linear, esses esforços, com as respectivas convenções de sinais, são mostrados na onde  $\boldsymbol{\theta} = \text{rot}(\mathbf{R}_\theta)$  representa a operação de obtenção dos componentes de rotação  $\boldsymbol{\theta}$  a partir de  $\mathbf{R}_\theta$ .

Figura 13, sendo obtidos a partir das respectivas deformações de acordo com as seguintes equações apresentadas por Harrison (1973):

$$N = EA_0 \varepsilon = \frac{EA_0}{L_0} (L - L_0) \quad (3.19)$$

$$T = \frac{GI_x}{L} \theta_x^c \quad (3.20)$$

$$M_{1y} = \frac{2EI_y}{L_0} (2\theta_{1y}^c + \theta_{2y}^c) \quad (3.21)$$

$$M_{2y} = \frac{2EI_y}{L_0} (\theta_{1y}^c + 2\theta_{2y}^c) \quad (3.22)$$

$$M_{1z} = \frac{2EI_z}{L_0} (2\theta_{1z}^c + \theta_{2z}^c) \quad (3.23)$$

$$M_{2z} = \frac{2EI_z}{L_0} (\theta_{1z}^c + 2\theta_{2z}^c) \quad (3.24)$$

$$V_{1y} = \frac{M_{1z} + M_{2z}}{L} \quad (3.25)$$

$$V_{2y} = -\frac{M_{1z} + M_{2z}}{L} \quad (3.26)$$

$$V_{1z} = -\frac{M_{1y} + M_{2y}}{L} \quad (3.27)$$

$$V_{2z} = \frac{M_{1y} + M_{2y}}{L} \quad (3.28)$$

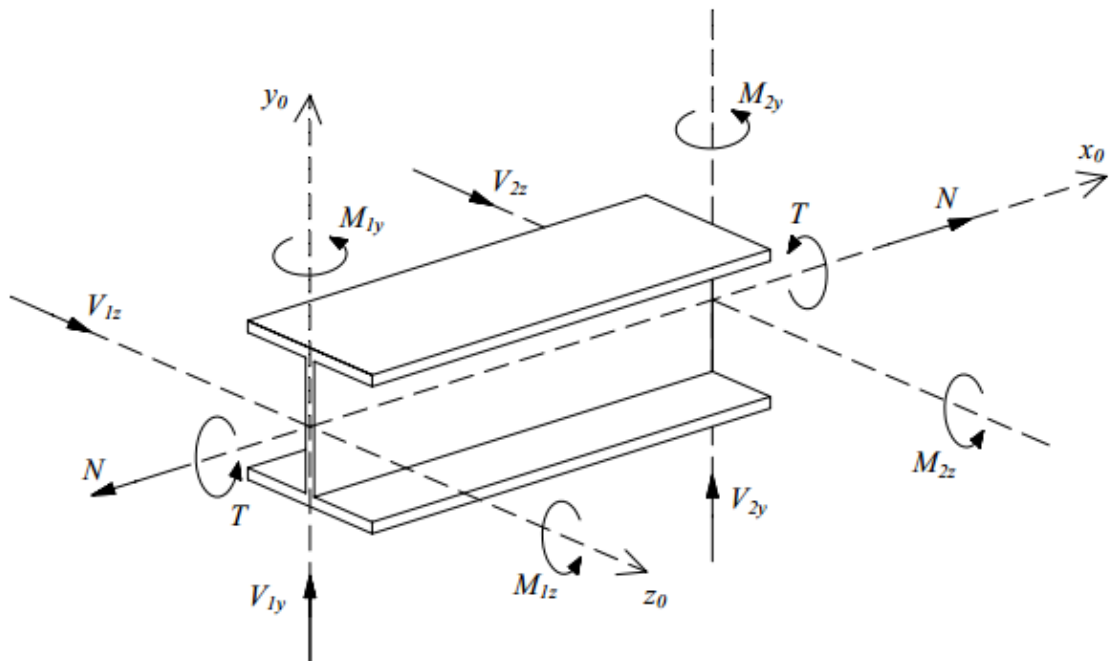
sendo  $E$  e  $G$  os módulos de elasticidade longitudinal e transversal, respectivamente,  $A_0$  a área da seção transversal,  $I_x$  o momento de inércia associado à torção de Saint Venant e  $I_y$  e  $I_z$  os momentos de inércia associados à flexão nas direções  $y$  e  $z$ , respectivamente,  $\varepsilon$  a deformação de engenharia,  $\theta_x^c$  dado por  $\theta_{2x}^c - \theta_{1x}^c$ , e os ângulos de rotação corrotacional  $(\theta_{1x}^c, \theta_{1y}^c, \theta_{1z}^c) = \theta_1^c$  e  $(\theta_{2x}^c, \theta_{2y}^c, \theta_{2z}^c) = \theta_2^c$  definidos por

$$\theta_1^c = \text{rot}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{A}) \quad (3.29)$$

$$\theta_2^c = \text{rot}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{B}) \quad (3.30)$$

onde  $\theta = \text{rot}(\mathbf{R}_\theta)$  representa a operação de obtenção dos componentes de rotação  $\theta$  a partir de  $\mathbf{R}_\theta$ .

Figura 13 - Esforços resultantes e convenções de sinais positivos



Fonte: Menin (2006)

### 3.3 Matriz de Massa

Para o cálculo dos componentes da matriz de massa, utiliza-se uma estratégia semelhante à utilizada na Seção 2.4. A Figura 14 mostra a disposição do elemento e dos graus de liberdade translacionais e rotacionais para o cálculo dos componentes da matriz de massa.

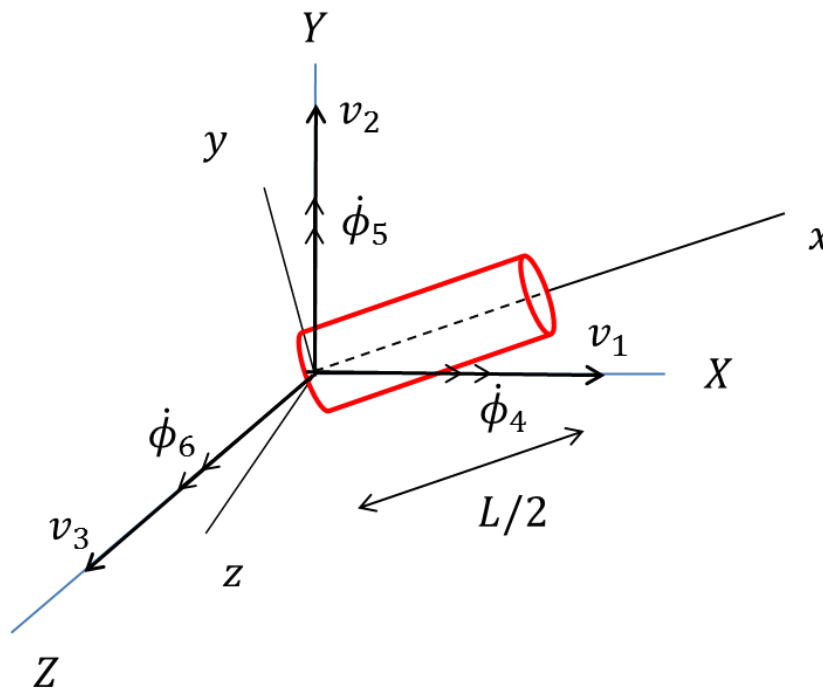
Para cada grau de liberdade translacional, a energia cinética é dada por

$$K_{v_1} = \int_V \rho \frac{v_1^2}{2} dV \quad (3.31)$$

$$K_{v_2} = \int_V \rho \frac{v_2^2}{2} dV \quad (3.32)$$

$$K_{v_3} = \int_V \rho \frac{v_3^2}{2} dV \quad (3.33)$$

Figura 14 - Disposição do elemento para o cálculo dos componentes da matriz de massa do elemento BeamCR



Desenvolvendo-se as expressões ( 3.31 ), ( 3.32 ) e ( 3.33 ), tem-se

$$K_{v_1} = \frac{v_1^2}{2} \rho \int_0^{L/2} \int_A dA dx \quad (3.34)$$

$$K_{v_2} = \frac{v_2^2}{2} \rho \int_0^{L/2} \int_A dA dx \quad (3.35)$$

$$K_{v_3} = \frac{v_3^2}{2} \rho \int_0^{L/2} \int_A dA dx \quad (3.36)$$

Analisando-se os termos relativos à massa nessas expressões das energias cinéticas translacionais, obtém-se

$$M_{M1} = M_{M2} = M_{M3} = \frac{\rho AL}{2} \quad (3.37)$$

Repetindo-se o procedimento, só que agora para os graus de liberdade rotacionais, as respectivas energias cinéticas são dadas por

$$K_{\dot{\phi}_4} = \int_V \frac{\rho}{2} (\sqrt{Y^2 + Z^2} \dot{\phi}_4)^2 dV \quad (3.38)$$

$$K_{\dot{\phi}_5} = \int_V \frac{\rho}{2} (\sqrt{X^2 + Z^2} \dot{\phi}_5)^2 dV \quad (3.39)$$

$$K_{\dot{\phi}_6} = \int_V \frac{\rho}{2} (\sqrt{X^2 + Y^2} \dot{\phi}_6)^2 dV \quad (3.40)$$

sendo  $\dot{\phi}_4$ ,  $\dot{\phi}_5$  e  $\dot{\phi}_6$  as velocidades de rotação nos eixos globais  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ , respectivamente, e  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  as coordenadas globais.

Desenvolvendo-se as expressões ( 3.38 ), ( 3.39 ) e ( 3.40 ), retirando os termos constantes no volume, tem-se:

$$K_{\dot{\phi}_4} = \frac{\dot{\phi}_4^2}{2} \rho \int_V (Y^2 + Z^2) dV \quad (3.41)$$

$$K_{\dot{\phi}_5} = \frac{\dot{\phi}_5^2}{2} \rho \int_V (X^2 + Z^2) dV \quad (3.42)$$

$$K_{\dot{\phi}_6} = \frac{\dot{\phi}_6^2}{2} \rho \int_V (X^2 + Y^2) dV \quad (3.43)$$

As coordenadas globais  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  estão relacionadas com as coordenadas locais  $x$ ,  $y$  e  $z$  da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} iX & jX & kX \\ iY & jY & kY \\ iZ & jZ & kZ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (3.44)$$

onde cada coluna da matriz dessa transformação linear representa os componentes do respectivo vetor unitário da direção local descrito em relação ao sistema global.

Analisando-se os termos relativos à massa nas expressões ( 3.41 ), ( 3.42 ) e ( 3.43 ), obtêm-se

$$M_{M4} = \rho \left[ \frac{1}{24} (iY^2 + iZ^2) AL^3 + \frac{1}{2} IL (jY^2 + jZ^2 + kY^2 + kZ^2) \right] \quad (3.45)$$

$$M_{M5} = \rho \left[ \frac{1}{24} (iX^2 + iZ^2) AL^3 + \frac{1}{2} IL (jX^2 + jZ^2 + kX^2 + kZ^2) \right] \quad (3.46)$$

$$M_{M6} = \rho \left[ \frac{1}{24} (iX^2 + iY^2) AL^3 + \frac{1}{2} IL (jX^2 + jY^2 + kX^2 + kY^2) \right] \quad (3.47)$$

onde  $I$  representa o momento de inércia da seção transversal, que é considerado igual para qualquer eixo centroidal.

Dessa forma, tem-se a seguinte matriz de massa diagonal:

$$M_M = [M_{M1} \quad M_{M2} \quad M_{M3} \quad M_{M4} \quad M_{M5} \quad M_{M6}] \quad (3.48)$$

### 3.4 Implementação Computacional

Por se tratar de um *framework* orientado a objetos, as modificações no DOOLINES ocorrem de modo que não alteram sua organização. A estrutura de classes desse *framework* pode ser encontrada no Apêndice A. Implementa-se, então, a classe `BeamCR`, classe derivada de `Element`, que tem como principais operações o cálculo da matriz de massa (`ComputeMass`) e das forças internas (`ComputeForce`). Desenvolvem-se, também, outros métodos que complementam esses dois métodos principais:

- `InitializeLocalAxis`: método que inicializa o eixo local do elemento;
- `ComputeNodalRotations`: método que calcula a rotação dos eixos nodais utilizando o algoritmo de Spurrier (1978) (Apêndice B).
- `RotateNodalAxis`: método que rotaciona os eixos nodais, onde a matriz de rotação utilizada ( $\mathbf{R}_{\Delta\theta}$ ) é definida por:

$$\mathbf{R}_{\Delta\theta} = \mathbf{I} + \mathbf{S}_{\Delta\theta} \quad (3.49)$$

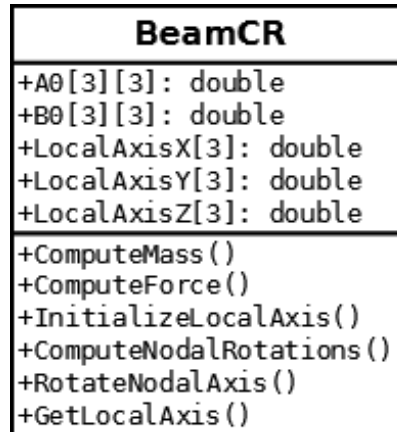
onde  $\mathbf{I}$  representa a matriz identidade e  $\mathbf{S}_{\Delta\theta}$  consiste em uma matriz que contém os componentes de rotação ( $r_1$ ,  $r_2$  e  $r_3$ ) associada ao nó, sendo a matriz definida por:

$$\mathbf{S}_{\Delta\theta} = \begin{bmatrix} 0 & -r_3 & r_2 \\ r_3 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

- `GetLocalAxis`: método que tem como parâmetro de retorno o eixo local do elemento.

A Figura 15 mostra os principais atributos e métodos da classe `BeamCR`.

**Figura 15 - Diagrama de classe de BeamCR**



Fonte: Autor (2014)

Alteram-se outras classes e métodos para incorporação desse elemento, dentre eles o método responsável pela integração numérica temporal (`ComputeStep`), pertencente à classe `IntAlg`. Nesse método, até então, estavam sendo considerados apenas os graus de liberdade translacionais. Dessa forma, adapta-se o método para consideração dos seis graus de liberdade por nó, resultando no cálculo dos respectivos deslocamentos e rotações.

A criação do modelo para simulação no DOOLINES é feita via arquivo de dados por meio de palavras-chave. Para consideração desse elemento, fazem-se alterações na classe `Read`, classe responsável pela leitura do arquivo. Cria-se o método `ReadBeamCR`, que recebe o número de elementos desse tipo e, para cada elemento, o comprimento do mesmo, os identificadores dos nós inicial e final, o identificador do material, o identificador do fluido interno. Adaptam-se, também, para criação de instâncias do elemento de viga, os métodos `CreateModel_Geometry` e `CreateModel_Mesh` responsáveis pela criação do modelo por geometria e malha, respectivamente.

Por ser modificado o método `CreateModel_Geometry`, necessita-se a modificação do método `GenerateModel`, pertencente à classe `GeometryModel` e responsável pela geração do modelo por geometria.

### 3.5 Aplicação da Formulação

Para validação da formulação, nesta seção faz-se um confronto com problemas com solução analítica.



### 3.5.1 Exemplo 1: viga biapoiada

Inicialmente simula-se uma viga biapoiada, de seção circular, com carga concentrada no meio do vão. As informações sobre o modelo estão listadas na Tabela 2.

**Tabela 2 - Parâmetros do modelo de viga biapoiada**

Parâmetro	Valor
Diâmetro externo	0,20 m
Diâmetro interno	0,00 m
Rigidez à flexão ( $EI$ )	56,25 kN·m <sup>2</sup>
Rigidez axial ( $EA$ )	22.500,00 kN
Densidade do material ( $\rho$ )	15,92 kg/m <sup>3</sup>
Vão da viga ( $L$ )	6,00 m
Carga aplicada ( $P$ )	10,00 kN

Fonte: Autor (2014)

Para uma análise estática, utiliza-se o algoritmo de relaxação dinâmica do DOOLINES (descrito no item A.1 do Apêndice A) e uma malha com 30 elementos. A quantidade de elementos utilizada é definida de acordo com a convergência do modelo. A análise de convergência será discutida no item 4.1.1.

Para essa discretização, obtém-se uma flecha no meio do vão de 0,78 m. De acordo com a teoria clássica de vigas, fundamentada na Resistência dos Materiais, a flecha máxima ocorre no meio do vão e é dada por

$$\Delta_{max} = \frac{PL^3}{48EI} \quad (3.51)$$

Com essa expressão, obtém-se uma flecha de 0,80 m, valor esse bem próximo do calculado pelo DOOLINES, visto que para essa magnitude de flecha mantém-se a hipótese de pequenos deslocamentos, rotações e deformações. A flecha apresentada pelo DOOLINES é ligeiramente menor devido à contribuição do esforço normal que se manifesta no encurvamento do eixo da peça.

Também se verifica a qualidade dos resultados quanto à análise dinâmica. Para análise dinâmica, considera-se um tempo de análise de 50 segundos, utiliza-se o algoritmo de integração o Método Explícito Generalizado –  $\alpha$  (MEG –  $\alpha$ ), método descrito em detalhes por Ferreira (2005), com um incremento de tempo de  $9,43 \cdot 10^{-5}$  s, modificando-se a carga para

$$P = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \quad (3.52)$$

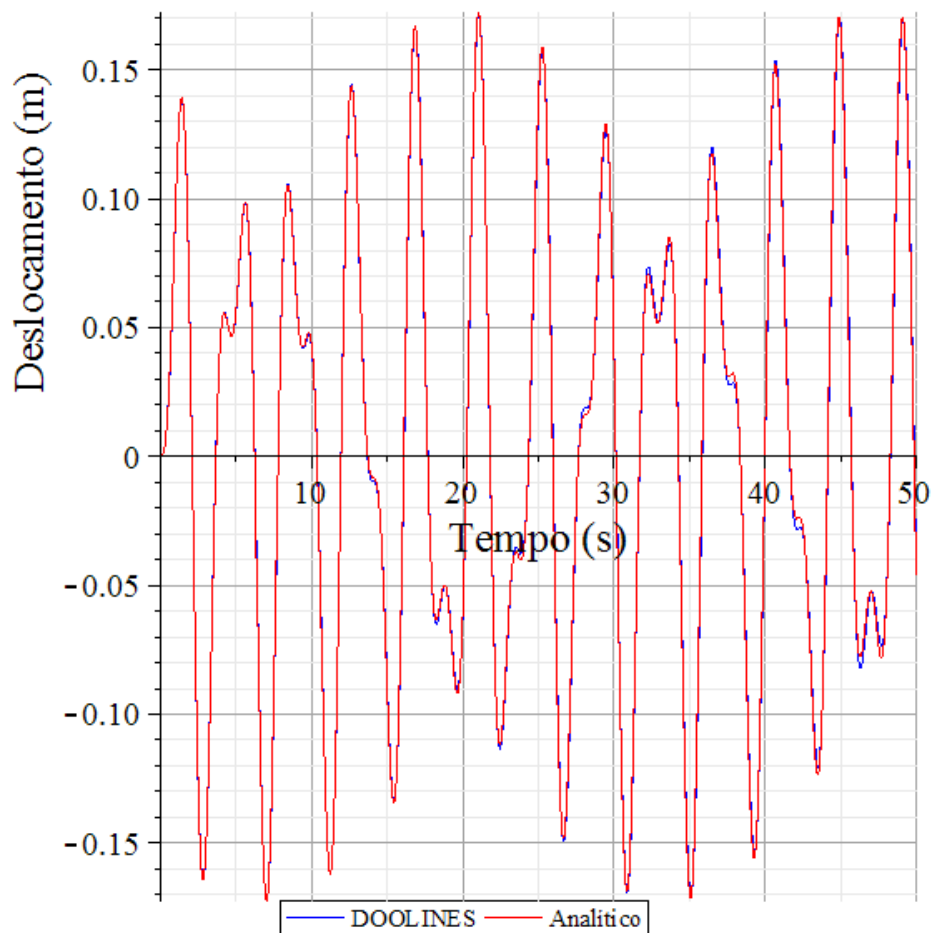
sendo  $t$  o tempo.

Os resultados obtidos estão na Figura 16 onde, mais uma vez, é possível observar concordância com a resposta analítica. Neste caso, utiliza-se como resposta analítica a solução da equação de movimento que considera apenas a parcela inercial translacional da seção transversal, dada por

$$EI \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3.53)$$

sendo  $v(x, t)$  o campo de deslocamento do eixo da viga ao longo do tempo e do espaço.

**Figura 16 - Comparação do deslocamento ao longo do tempo para a viga biapoiada**



Fonte: Autor (2014)

### 3.5.2 Exemplo 2: viga engastada livre

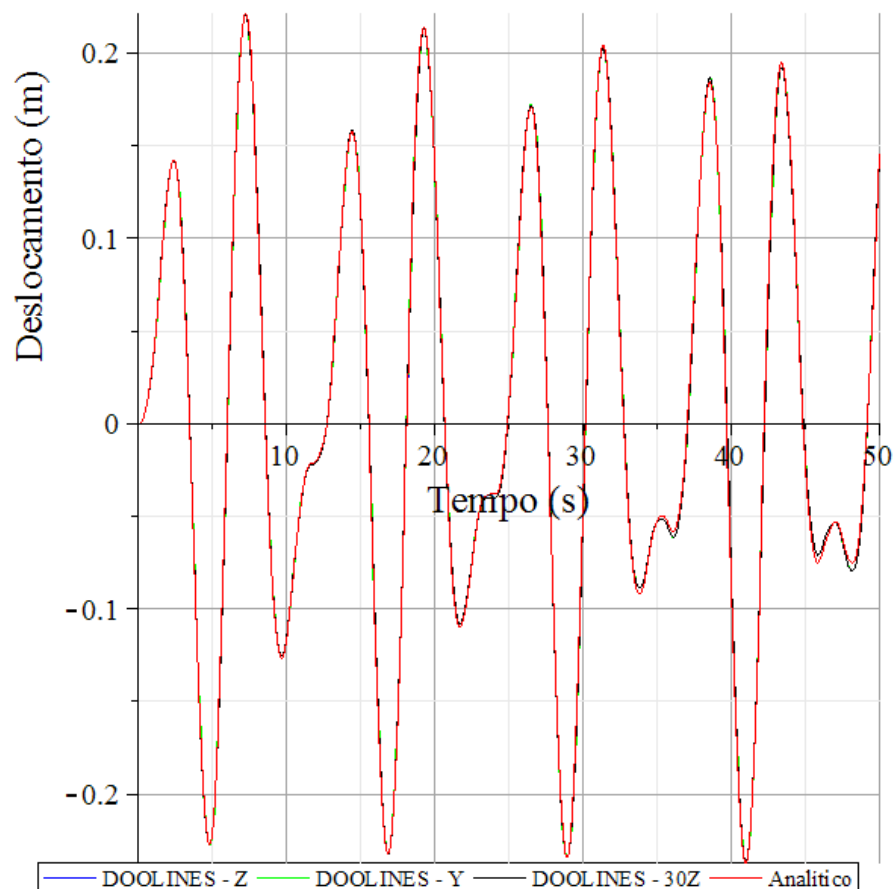
Outro exemplo analisado consiste de uma viga com uma extremidade engastada e outra livre, sob ação de uma carga transversal na extremidade livre. Para este exemplo, realiza-se somente a análise dinâmica. Os dados para geração deste modelo são semelhantes aos da viga biapoiada, com exceção da carga aplicada, sendo esta

$$P = 0,1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \quad (3.54)$$

Para verificação da consistência do código, varia-se a direção da carga aplicada, sendo considerada na direção Z, na direção Y e no plano YZ com uma inclinação de  $30^\circ$  em relação ao eixo Z, denotados no gráfico como DOOLINES - Z, DOOLINES - Y e DOOLINES - 30Z, respectivamente. A resposta analítica consiste na equação do movimento (3.53).

Os resultados obtidos com essa análise estão dispostos na Figura 17.

**Figura 17 - Comparação do deslocamento ao longo do tempo para viga engastada livre**



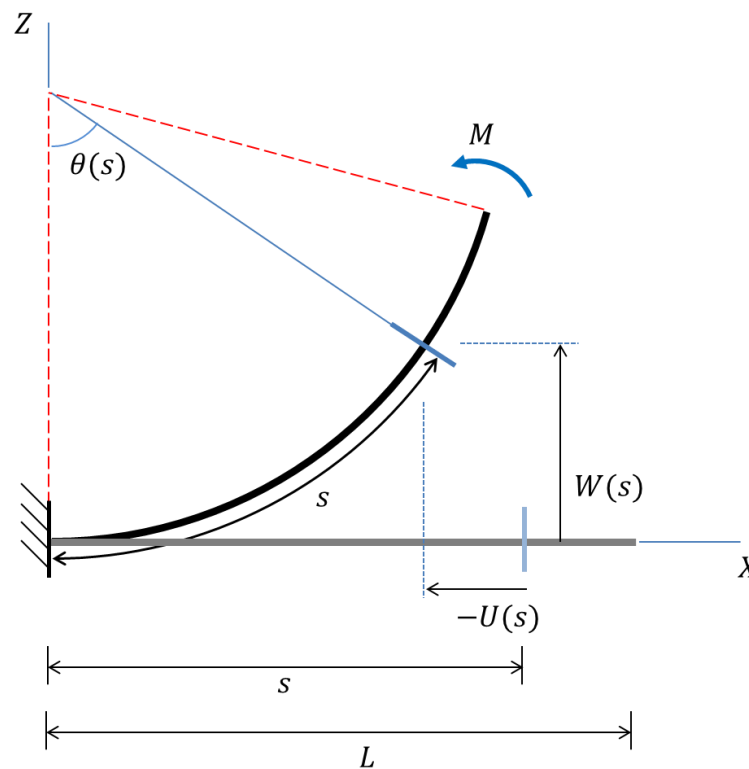
Fonte: Autor (2014)

Analisando-se a Figura 17, percebe-se, mais uma vez, boa concordância entre os resultados. Embora os Exemplos 1 e 2 estejam relacionados à análise da flexão, o Exemplo 2 mostra a possibilidade da consideração do engastamento para esse elemento de viga. Esse tipo de condição de contorno está presente na modelagem de *risers*.

### 3.5.3 Exemplo 3: viga engastada e livre com carga momento na extremidade livre

Para realização da análise de um exemplo com grandes deslocamentos e rotações, simula-se uma viga engastada e livre com uma carga momento aplicada na extremidade livre, conforme esquema ilustrado na Figura 18.

**Figura 18 - Esquema da viga engastada e livre nas configurações inicial e deformada com uma carga momento aplicada**



Fonte: Autor (2014)

Para uma seção de comprimento de arco  $s$  ao longo do eixo deformado da viga, a rotação  $\theta(s)$  (Figura 18) é dada por

$$\theta(s) = \frac{Ms}{EI} \quad (3.55)$$

onde  $M$  é a carga momento aplicada e  $EI$  é a rigidez à flexão da viga.

Os deslocamentos horizontal  $U(s)$  e vertical  $W(s)$  são dados por

$$U(s) = s \left( \frac{\sin(\theta)}{\theta} - 1 \right) \quad (3.56)$$

$$W(s) = s \frac{1 - \cos(\theta)}{\theta} \quad (3.57)$$

Para simulação desse modelo, utiliza-se uma viga de seção circular com os parâmetros mostrados na Tabela 3. Discretiza-se uniformemente a viga com 10 elementos, onde as várias configurações deformadas são obtidas utilizando-se o algoritmo de Relaxação Dinâmica.

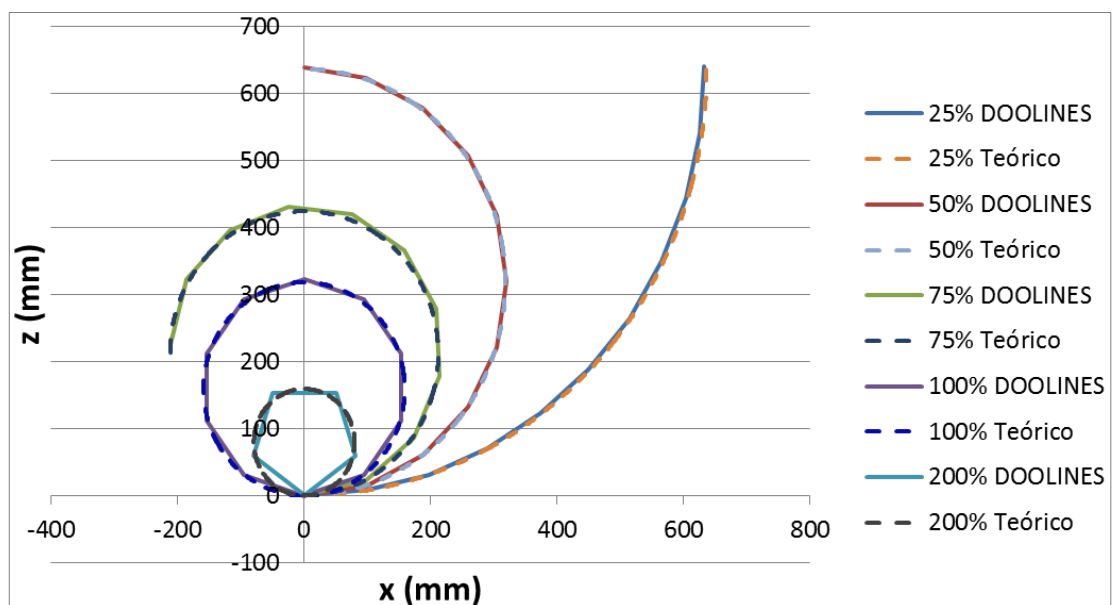
**Tabela 3 - Parâmetros utilizados na viga engastada e livre com carga momento aplicada na extremidade**

Parâmetro	Valor
Diâmetro externo	1,128 mm
Rigidez à flexão ( $EI$ )	2.387.324,15 N·mm <sup>2</sup>
Rigidez axial ( $EA$ )	30.000.000,00 N
Vão da viga ( $L$ )	1000 mm
Carga momento de referência ( $M$ )	150000,00 N·m

Fonte: Autor (2014)

A carga momento é aplicada em etapas, verificando-se a configuração deformada da viga e comparando-a com a analítica. Na Figura 19 encontram-se sobrepostas essas configurações deformadas para vários percentuais da carga momento de referência.

**Figura 19 - Configuração final da viga para diferentes momentos fletores**



Fonte: Autor (2014)

De acordo com a Figura 19, percebe-se uma boa concordância visual entre as configurações deformadas, endossada pela comparação numérica dos deslocamentos na extremidade livre da viga, resumida na Tabela 4.

**Tabela 4 - Deslocamentos horizontal e vertical na extremidade livre da viga para os vários percentuais da carga momento**

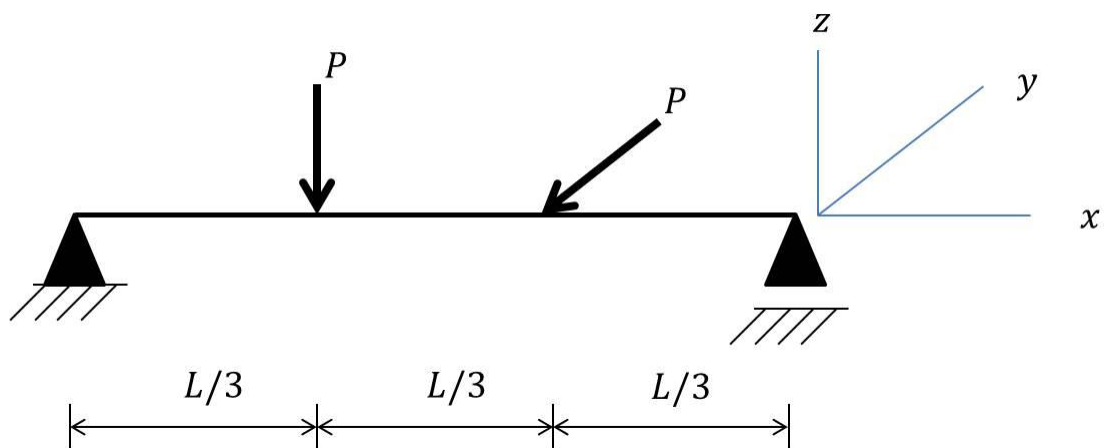
Percentual da Carga Momento de Referência	U (mm)		W (mm)	
	Analítico	DOOLINES	Analítico	DOOLINES
25%	-363,38	-367,30	636,62	640,46
50%	-1000,00	-1000,13	636,62	639,20
75%	-1212,21	-1212,26	212,21	226,83
100%	-1000,00	-999,52	0,00	-0,20
200%	-1000,00	-1000,00	0,00	0,00

Fonte: Autor (2014)

### 3.5.4 Exemplo 3: viga biapoiada sujeita a duas cargas concentradas

Com o objetivo de verificar que as respostas obtidas pelos dois tipos de elementos do DOOLINES, faz-se a análise comparativa entre eles. Para essa análise, considera-se uma viga biapoiada com uma carga aplicada na direção  $z$  e outra aplicada na direção  $y$ , conforme mostrado na Figura 20. O apoio do primeiro gênero utilizado permite somente o deslocamento na direção  $x$ .

**Figura 20 - Modelo de viga biapoiada para comparação entre BeamCR e BTruss**



Fonte: Autor (2014)

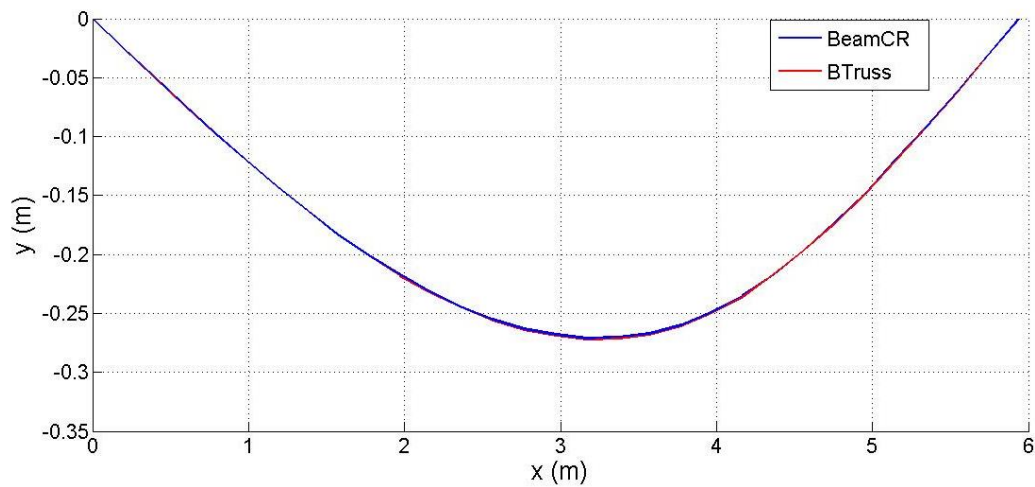
Os parâmetros utilizados para geração desse modelo estão listados na Tabela 5.

**Tabela 5 - Parâmetros do modelo de viga biapoiada sujeita a dois carregamentos**

Parâmetro	Valor
Diâmetro externo	0,20 m
Diâmetro interno	0,00 m
Rigidez à flexão ( $EI$ )	140,00 kN·m <sup>2</sup>
Rigidez axial ( $EA$ )	22.500,00 kN
Densidade do material ( $\rho$ )	15,92 kg/m <sup>3</sup>
Vão da viga ( $L$ )	6,00 m
Carga aplicada ( $P$ )	10,00 kN

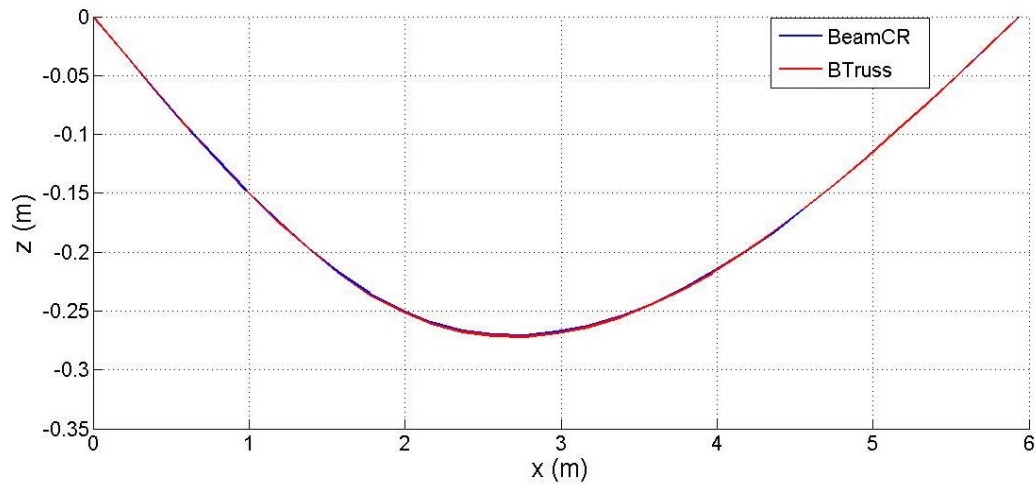
Fonte: Autor (2014)

Para comparação dos dois tipos de elementos finitos, considera-se apenas a configuração estática de equilíbrio, determinada com o uso do método da relaxação dinâmica para uma malha com 30 elementos. De acordo com uma inspeção visual das projeções dessa configuração deformada nos plano cartesianos  $xy$  (Figura 21),  $xz$  (Figura 22) e  $yz$  (Figura 23), percebe-se boa proximidade entre os resultados obtidos.

**Figura 21 - Configuração final da viga no plano  $xy$** 

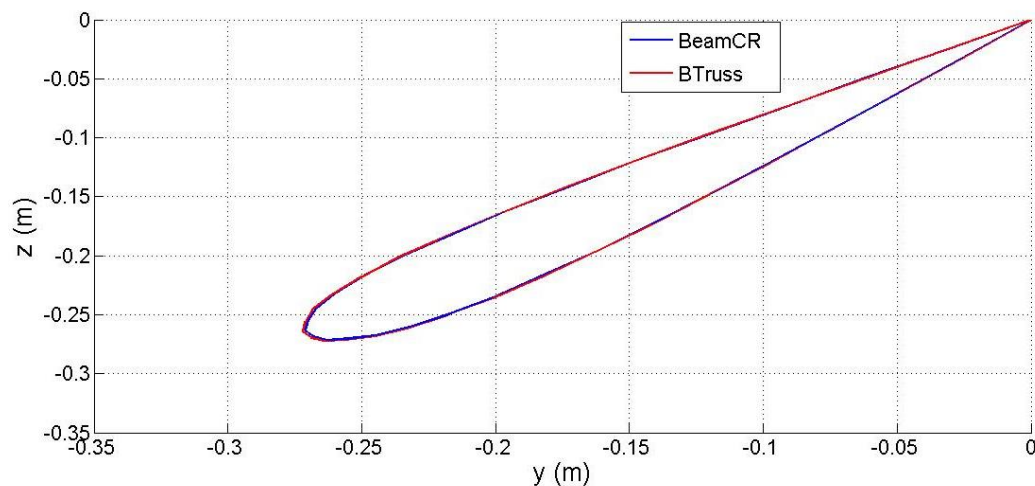
Fonte: Autor (2014)

**Figura 22 - Configuração final da viga no plano  $xz$**



Fonte: Autor (2014)

**Figura 23 - Configuração final da viga no plano  $yz$**

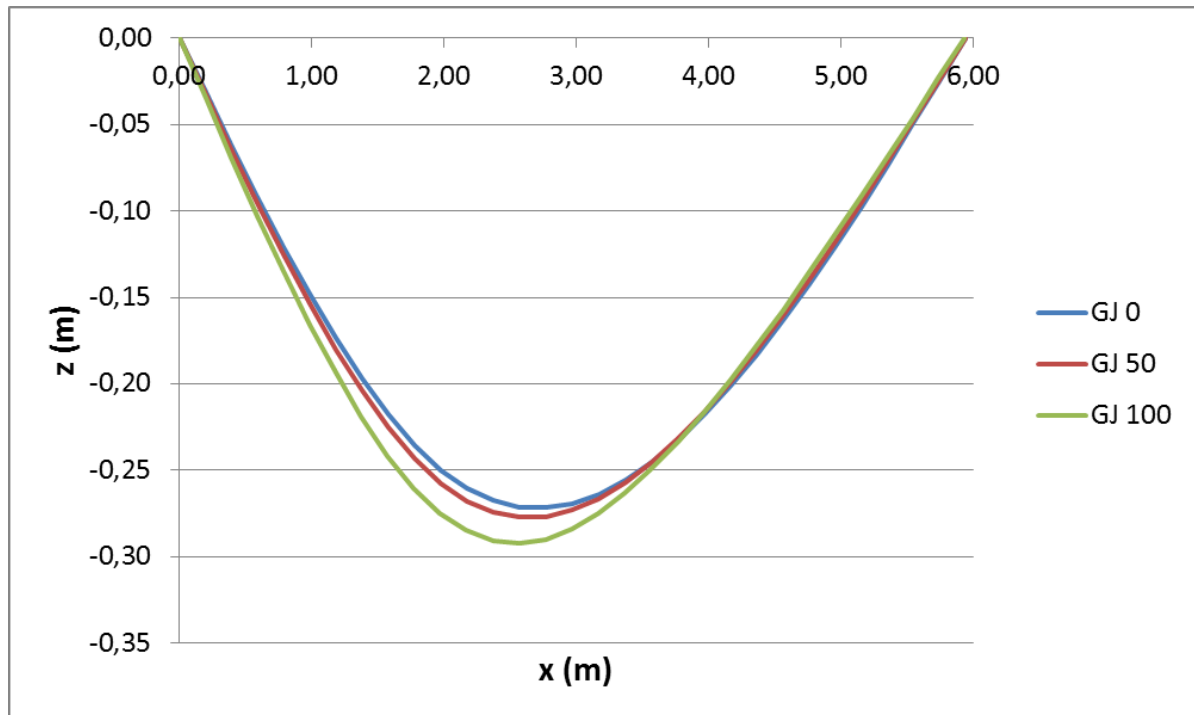


Fonte: Autor (2014)

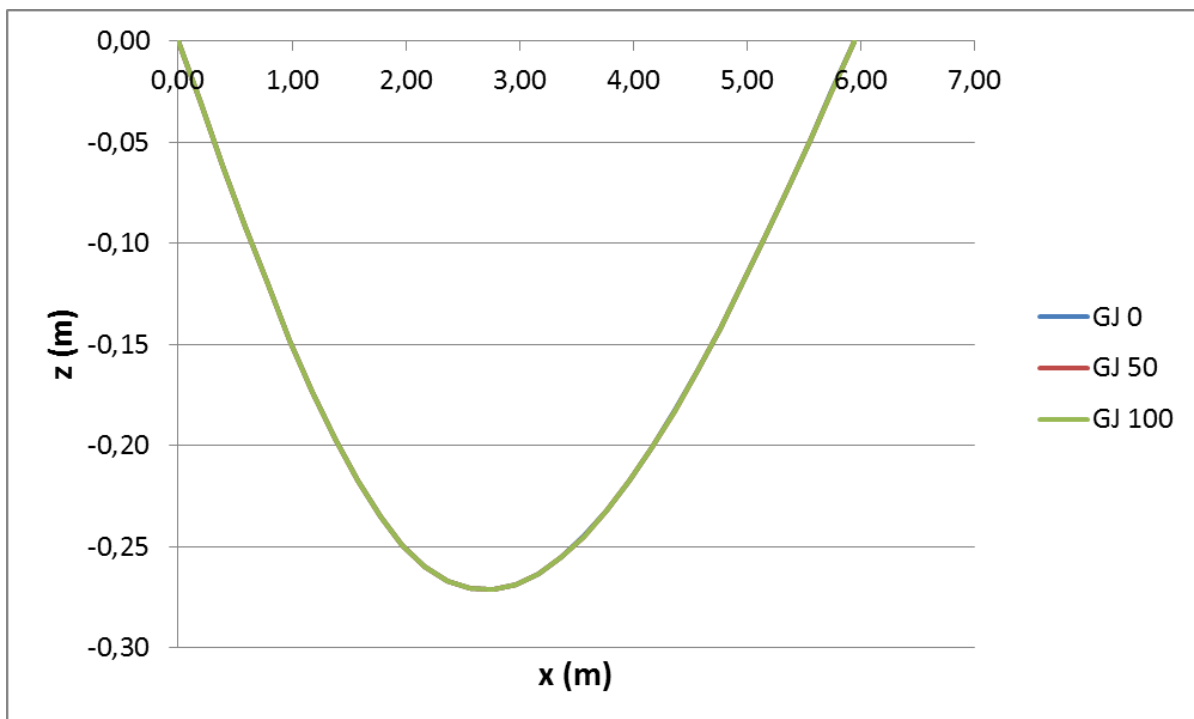
Comparam-se, também, o elemento `BeamCR` e o desenvolvido na Seção 2.3, elemento de treliça com rigidezes à flexão e à torção. Nesta análise, varia-se a rigidez à torção da viga e visualiza-se a configuração final na análise estática.

Analisando-se a Figura 24, que mostra a configuração final no plano  $xz$  utilizando o elemento de treliça com rigidez à torção, percebe-se que há uma mudança da configuração com a variação da rigidez à torção. Entretanto, ao ser utilizado o elemento `BeamCR`, percebe-se que a modificação da rigidez não alteraria a configuração final (Figura 25), ou seja, não há mobilização de momento torsor neste modelo.



**Figura 24 - Configuração final do elemento proposto com a variação do GJ no plano  $xz$** 

Fonte: Autor (2014)

**Figura 25 - Configuração final do elemento BeamCR com a variação do GJ no plano  $xz$** 

Fonte: Autor (2014)

### 3.5.5 Exemplo 4: viga engastada livre com tursor aplicado na extremidade livre

Como aplicação para verificação do cálculo do ângulo de torção e do esforço de torção, faz-se a análise de uma viga engastada e livre, com a aplicação de um momento tursor na extremidade livre e comparam-se os resultados obtidos com a resposta obtida pela teoria clássica de vigas.

Inicialmente, simula-se uma estrutura com comprimento total de 6,0 m, utilizando-se 3 elementos de viga do mesmo comprimento. As propriedades mecânicas são mostradas na Tabela 6.

**Tabela 6 - Parâmetros do modelo de viga engastada livre com tursor aplicado**

Parâmetro	Valor
Rigidez à flexão ( $EI$ )	3.000 kN·m <sup>2</sup>
Rigidez axial ( $EA$ )	300.000 kN
Rigidez à torção ( $GJ$ )	1.200 kN·m <sup>2</sup>

Fonte: Autor (2014)

De acordo com a teoria de viga, tem-se que o ângulo de torção é dado por

$$\phi = \frac{TL}{GJ} \quad (3.58)$$

Aplicando-se um momento tursor de 33 kN·m, obtém-se um ângulo de torção de 0,165 radiano. Com a utilização do elemento `BeamCR` obtém-se a torção e o esforço de torção por trecho. Faz-se, então, a análise estática da viga ao longo do eixo  $x$  e verificam-se os resultados obtidos em cada trecho.

Constata-se que a torção na extremidade livre, correspondente à soma do ângulo de torção em cada trecho, possui magnitude de 0,165 radiano e o esforço de torção a 33 kN·m, conforme descrito na teoria.

Faz-se então a análise dinâmica da viga estudada, comparando-se o resultado com um modelo analítico. Para realização dessa análise, altera-se a quantidade de elementos utilizada na discretização para 60, considera-se um tempo de análise de 10 segundos e utiliza-se como algoritmo de integração o Método Explícito Generalizado –  $\alpha$  (MEG –  $\alpha$ ) com um incremento de tempo de 0,0001 s, modificando-se o momento tursor para

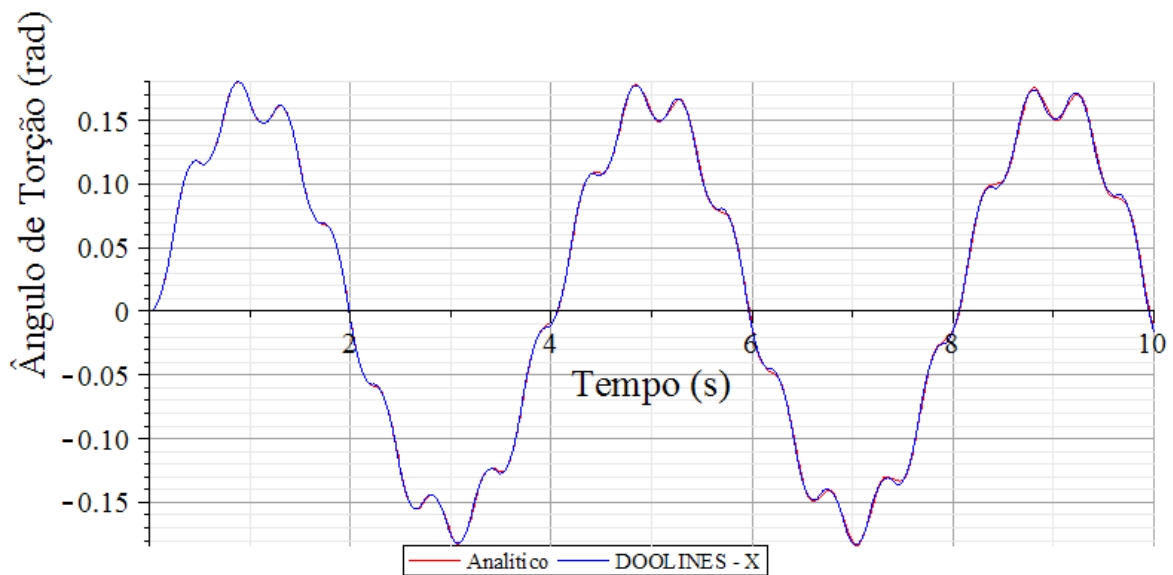
$$T = 33 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \quad (3.59)$$

Utiliza-se como resposta analítica a solução da equação de movimento dada por

$$\rho \frac{\partial^2 \tau(x, t)}{\partial t^2} = G \frac{\partial^2 \tau(x, t)}{\partial x^2} \quad (3.60)$$

A Figura 26 mostra o gráfico do ângulo de torção ao longo do tempo comparando a resposta analítica com a obtida pelo DOOLINES, onde se percebe a boa concordância entre os resultados.

**Figura 26 - Comparação da torção na extremidade livre ao longo do tempo para viga engastada**



Fonte: Autor (2014)

## 4 COMPARAÇÃO BTRUSS - BEAMCR

Verificada a consistência dos dois elementos pertencentes ao DOOLINES, BTruss e BeamCR, analisa-se a viabilidade da utilização de cada um deles, sendo comparados a qualidade da resposta e o tempo de processamento obtidos em uma análise dinâmica. Para realização dessas análises, selecionam-se dois exemplos: viga biapoiada com carga no meio do vão e a análise de um *riser*.

### 4.1 Exemplo 1: Viga Biapoiada com Carga Transversal no Meio do Vão

Para o exemplo da viga biapoiada com carga no meio do vão, utilizam-se os mesmos parâmetros do modelo mostrado na Seção 3.5.1 para análise dinâmica.

#### 4.1.1 Análise de convergência

Para a análise de convergência realiza-se a simulação dos casos com a variação da discretização utilizada (variação do número de elementos), sendo verificado o número de elementos necessários para que seja atingida a convergência. Como critério de convergência, utiliza-se o erro percentual de 1,5% entre o deslocamento de um ponto na discretização corrente e o deslocamento do mesmo ponto na discretização utilizada na análise anterior, em um determinado instante de tempo. Calcula-se o erro percentual comparando o deslocamento do nó analisado da seguinte forma

$$Erro\% = \frac{d_i(t) - d_{i-1}(t)}{d_i(t)} \cdot 100 \quad (4.1)$$

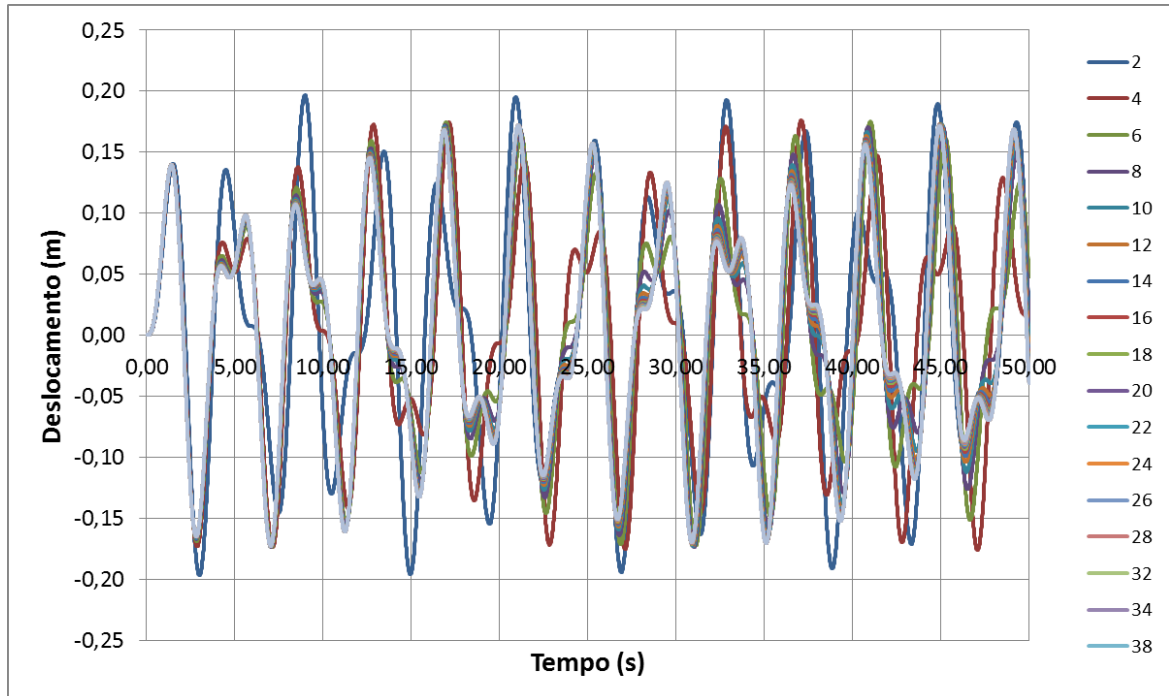
sendo *Erro%* o erro percentual,  $d_i(t)$  o deslocamento na discretização corrente,  $d_{i-1}(t)$  o deslocamento na discretização anteriormente analisada,  $t$  o tempo.

Para os dois tipos elementos utilizados, BeamCR e BTruss, inicia-se com uma malha com 2 elementos, sendo aumentado esse número de 2 em 2 até ser atingida a convergência.

Durante as simulações com o elemento BeamCR, percebe-se que a convergência é atingida utilizando uma malha com 34 elementos. Entretanto, ao ser analisado o gráfico com o

deslocamento do nó central da viga, percebe-se que, utilizando 14 elementos, os valores são bem próximos das malhas com mais elementos (Figura 27).

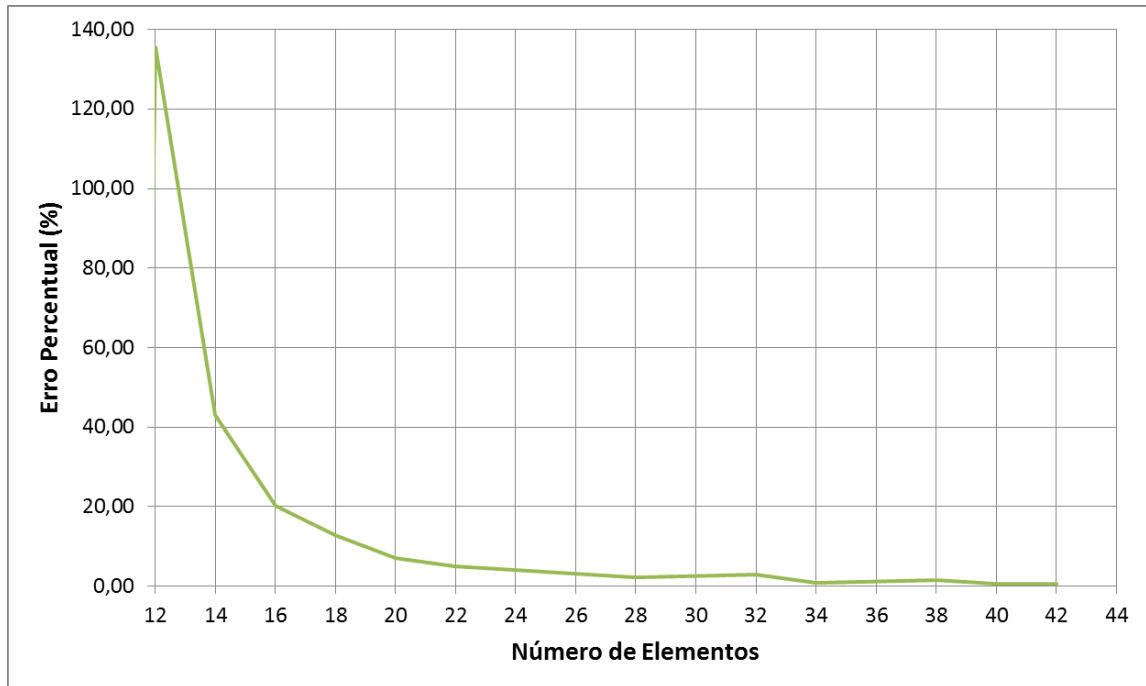
**Figura 27 - Deslocamento do nó central ao longo do tempo**



Fonte: Autor (2014)

Na análise de convergência considera-se todo o intervalo de análise. Selecionando um instante de tempo de 38,18 s, pode-se verificar a diminuição do erro percentual com o aumento da discretização (Figura 28).

**Figura 28 - Análise do erro percentual do deslocamento com o aumento da discretização**



Fonte: Autor (2014)

Os dados utilizados para geração da Figura 28 se encontram na Tabela 7, onde se constata que com malhas a partir de 34 elementos é possível obter configurações finais bem próximas, verificando a convergência do modelo.

**Tabela 7 - Erros percentuais com a utilização do elemento BeamCR**

Número de Elementos	Erro Percentual (%)	Número de Elementos	Erro Percentual (%)
4	59,00	22	4,99
6	-90,42	24	4,08
8	-205,42	26	3,10
10	-782,21	28	2,20
12	135,55	32	2,81
14	43,06	34	0,91
16	20,09	38	1,45
18	12,88	40	0,55
20	7,06	42	0,52

Fonte: Autor (2014)

Realizando a análise da viga utilizando o elemento BTruss, percebe-se, a partir da Tabela 8, que o modelo necessita de um maior refinamento da malha, sendo atingida a convergência utilizando 40 elementos.

**Tabela 8 - Erros percentuais com a utilização do elemento BTruss**

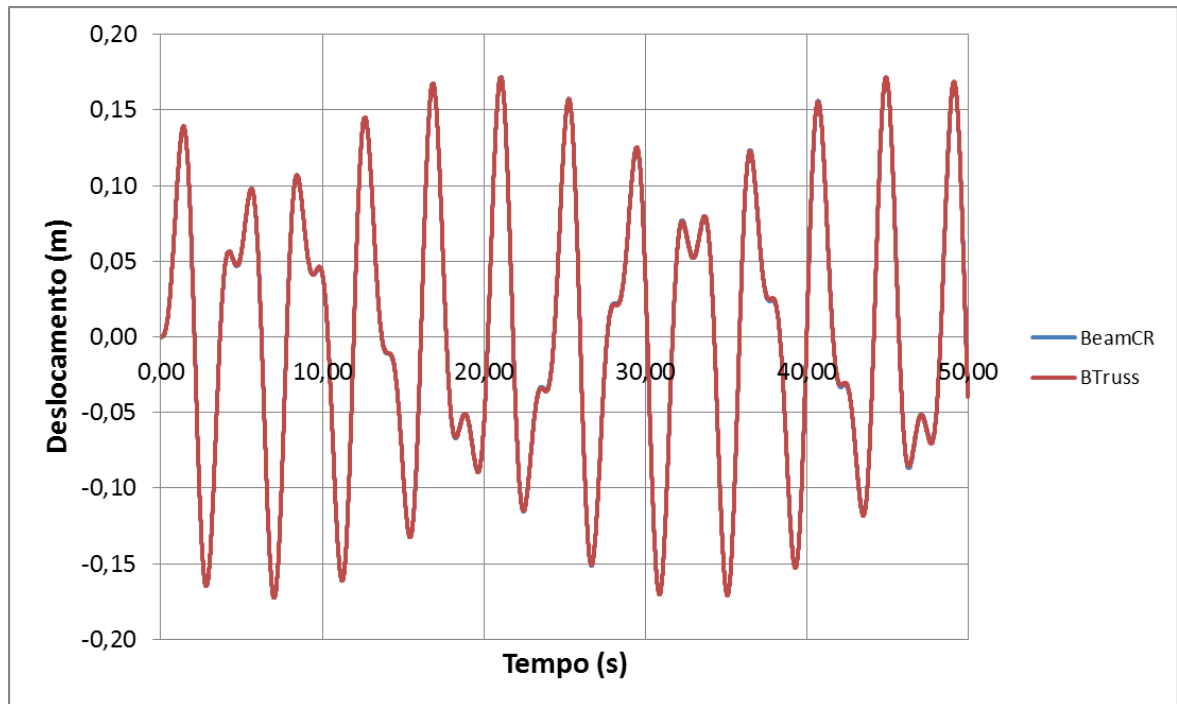
Número de Elementos	Erro Percentual (%)	Número de Elementos	Erro Percentual (%)
4	296,15	22	13,77
6	214,41	24	8,46
8	-15,22	26	6,81
10	-96,73	28	5,10
12	-172,68	32	6,21
14	1323,90	34	2,27
16	89,65	38	3,65
18	37,23	40	1,47
20	20,23	42	1,25

Fonte: Autor (2014)

Observando a Tabela 8, constata-se que a partir da utilização de uma malha com 14 elementos os erros começam a diminuir com o aumento do refinamento da malha, embora existam alguns que não sigam esse comportamento (32 e 38 elementos). Algumas malhas não são consideradas (30 e 36 elementos) por terem gerado informações de deslocamento para passos de tempo diferentes.

Para o exemplo analisado, percebe-se que a convergência é atingida mais rapidamente com a consideração do elemento de viga (BeamCR), o que era esperado por utilizar uma formulação mais robusta, considerando tanto graus de liberdade translacionais quanto rotacionais. A Figura 29 mostra a comparação entre os deslocamentos gerados pelas malhas onde se considera a convergência sendo atingida, ou seja, utilizando o BeamCR com uma malha com 34 elementos e BTruss com 40 elementos.

Figura 29 - Gráfico comparativo entre BeamCR e BTruss



Fonte: Autor (2014)

Percebe-se que os resultados estão bem próximos. Ao ser feito um cálculo de erro percentual entre as duas configurações, percebe-se um erro máximo calculado de 0,1%, o que confirma a proximidade das respostas.

#### 4.1.2 Custo computacional

Além da qualidade da resposta, o custo computacional é um aspecto que deve ser levado em consideração, pois, em uma situação real, é preferível a obtenção da resposta o mais rápido possível para definir a decisão a ser tomada em uma situação de emergência.

Para análise do custo computacional, utiliza-se um computador com processador Intel® Core™ i5 - 2410 M CPU @ 2,30 GHz, com sistema operacional Windows 7, 64 bits e memória RAM de 4 Gb. Simula-se o caso da viga biapoiada com carga no meio do vão considerando o elemento BeamCR e BTruss e variando o número de elementos de 4 a 42, mesmas discretizações utilizadas na análise de convergência, entretanto utilizando um tempo de análise de 300 s. Para cada nível de discretização, realizam-se três simulações, sendo considerado como tempo de simulação a média dos três tempos medidos.



Os tempos finais utilizando o elemento BeamCR estão dispostos na Tabela 9. Constatase que à medida que o nível de discretização aumenta o tempo também aumenta.

**Tabela 9 - Elemento BeamCR: variação do tempo com o nível de discretização**

Número de Elementos	Tempo Médio (s)	Número de Elementos	Tempo Médio (s)
4	2,020	24	55,487
6	3,990	26	65,620
8	6,630	28	75,470
10	10,010	30	86,577
12	13,977	32	98,543
14	18,883	34	109,870
16	24,730	36	125,163
18	31,447	38	140,077
20	38,977	40	156,637
22	47,883	42	171,903

Fonte: Autor (2014)

Utilizando o elemento BTruss, são considerados todos os níveis de discretização, diferentemente da análise de convergência, onde algumas malhas (30 e 36 elementos) não entraram no cálculo. Os tempos obtidos estão dispostos na Tabela 10.

**Tabela 10 - Elemento BTruss: variação do tempo com o nível de discretização**

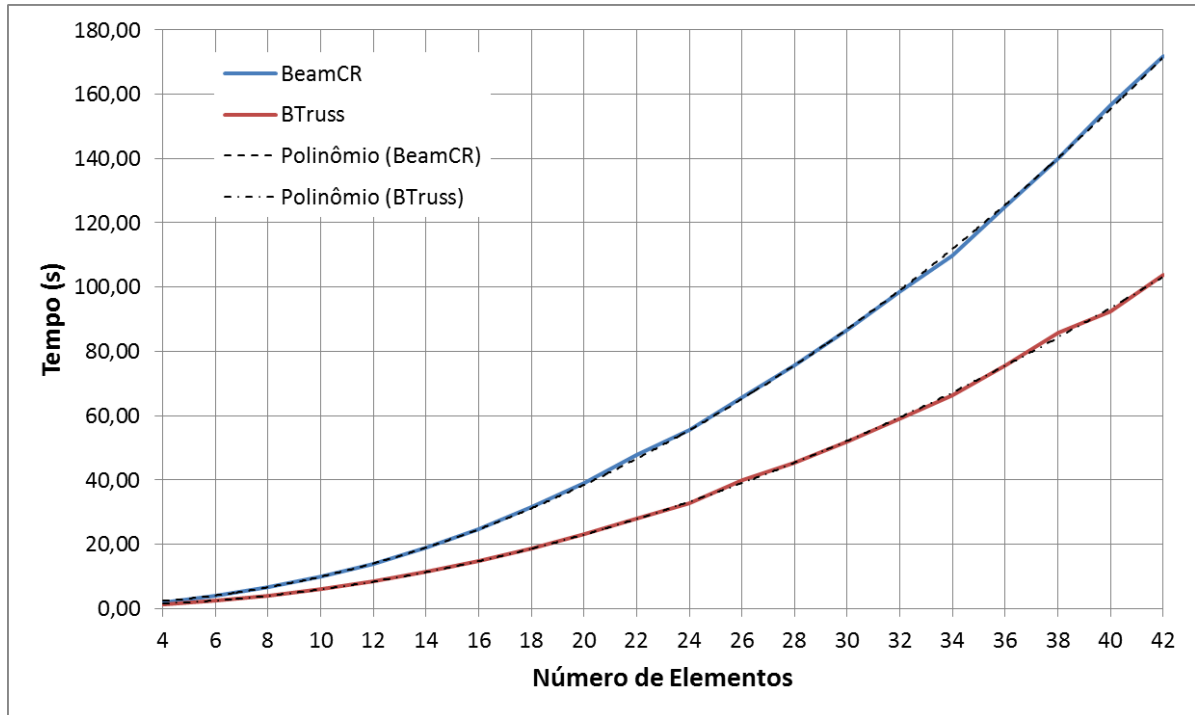
Número de Elementos	Tempo Médio (s)	Número de Elementos	Tempo Médio (s)
4	1,415	24	32,765
6	2,465	26	39,920
8	4,097	28	45,282
10	6,115	30	52,067
12	8,388	32	59,223
14	11,461	34	66,331
16	14,643	36	75,639
18	18,611	38	85,717
20	23,145	40	92,425
22	27,950	42	103,667

Fonte: Autor (2014)

Transformando as tabelas de tempo em gráfico (Figura 30), percebe-se que, fixando um mesmo número de elementos, o tempo gasto pelo elemento de viga é superior ao tempo gasto pelo elemento de treliça. Embora o número de elementos utilizados para atingir a convergência do BeamCR tenha sido menor que o utilizando o BTruss, o tempo de simulação é superior (tempos destacados nas respectivas tabelas), apresentando uma diferença

de 18,9%. Verifica-se, também, que as curvas apresentam ordem de variação  $n^2$ , ou seja, à medida que o número de elementos aumenta, a curva varia quadraticamente.

**Figura 30 - Gráfico do custo computacional com o aumento da discretização**



Fonte: Autor (2014)

## 4.2 Exemplo 2: Análise de um *Riser* Submerso

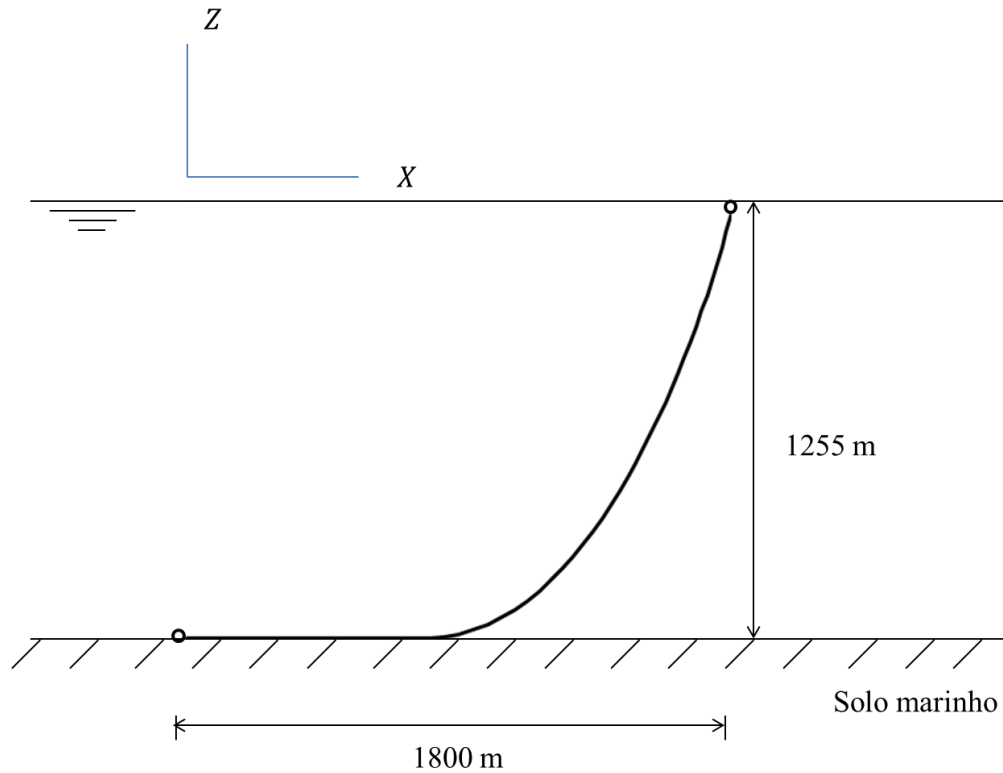
Como segunda aplicação, realiza-se a análise de um *riser* rígido em catenária com 16 polegadas de diâmetro externo e 1 polegada de espessura (Figura 31). Takafuji (2010) realizou a análise estática desse *riser* e, neste trabalho, realiza-se, então, a análise dinâmica. A Tabela 11 apresenta os parâmetros para criação do modelo.

Considera-se, também, o mesmo perfil de correnteza utilizado por Takafuji (2010), mostrado na Tabela 12, que consiste em um perfil típico de mar extremo centenário da Bacia de Campos.

**Tabela 11 - Parâmetros do modelo do riser rígido**

Parâmetro	Valor
Densidade da água do mar	1.025,00 kg/m <sup>3</sup>
Diâmetro externo do riser	0,4064 m
Diâmetro interno do riser	0,3556 m
Rigidez à flexão do riser ( $EI$ )	78.000,00 kN·m <sup>2</sup>
Rigidez axial do riser ( $EA$ )	4.000.000 kN
Peso no ar	2,4927 kN/m
Comprimento Total	2.500 m
Coefficiente de arrasto na direção normal ( $C_{Dn}$ )	1,1
Coefficiente de arrasto na direção normal ( $C_{Da}$ )	0,1

Fonte: Autor (2014)

**Figura 31 - Configuração do riser rígido em catenária**

Fonte: Autor (2014)

**Tabela 12 - Perfil de correnteza utilizado na análise do riser rígido**

Profundidade (m)	Velocidade (m/s)	Ângulo (graus)
0,00	1,96	0
50,00	1,54	0
100,00	1,39	0
140,00	1,18	0
230,00	0,72	0
340,00	0,78	0
415,00	0,72	45
545,00	0,41	135
640,00	0,52	135
750,00	0,76	135
915,00	0,71	135
1.254,50	0,00	135
1.255,00	0,00	135

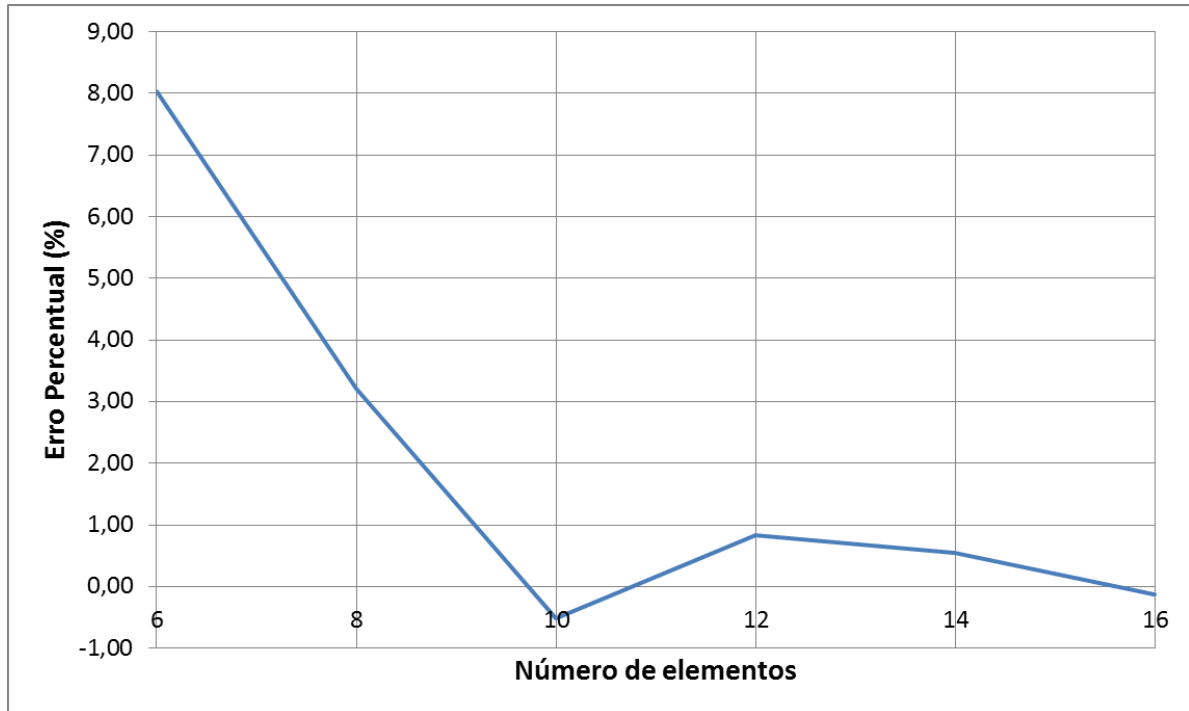
Fonte: Autor (2014)

#### 4.2.1 Análise de convergência

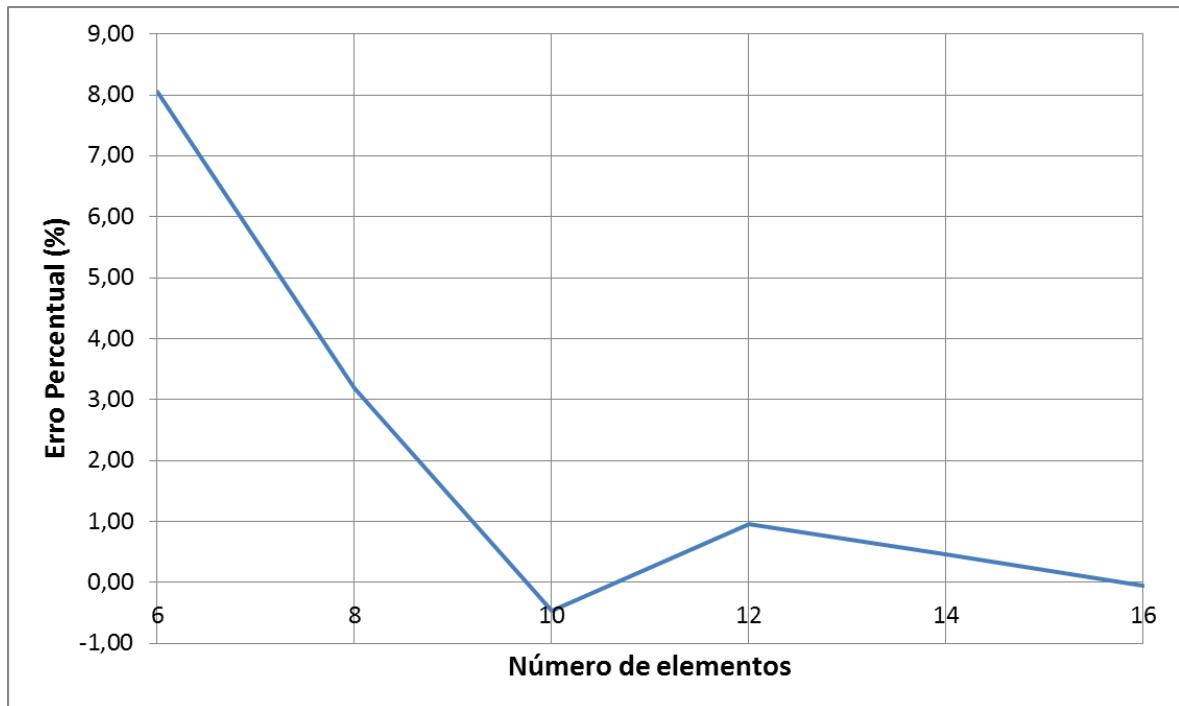
Inicia-se a simulação com 4 elementos, sendo esse número aumentado de 2 em 2 até ser atingida a convergência. A simulação possui um tempo final de análise de 200 s, verifica-se a convergência, analisando o deslocamento do nó central no instante 120 s.

A Figura 32 mostra o erro percentual utilizando o elemento `BeamCR`. Percebe-se que a partir de 10 elementos o modelo já apresenta um erro menor do que 1,5%.

Ao analisar com o elemento `BTruss`, percebe-se que, novamente, a partir de uma malha com 10 elementos, o modelo converge (Figura 33).

**Figura 32 - Erro percentual para o elemento BeamCR**

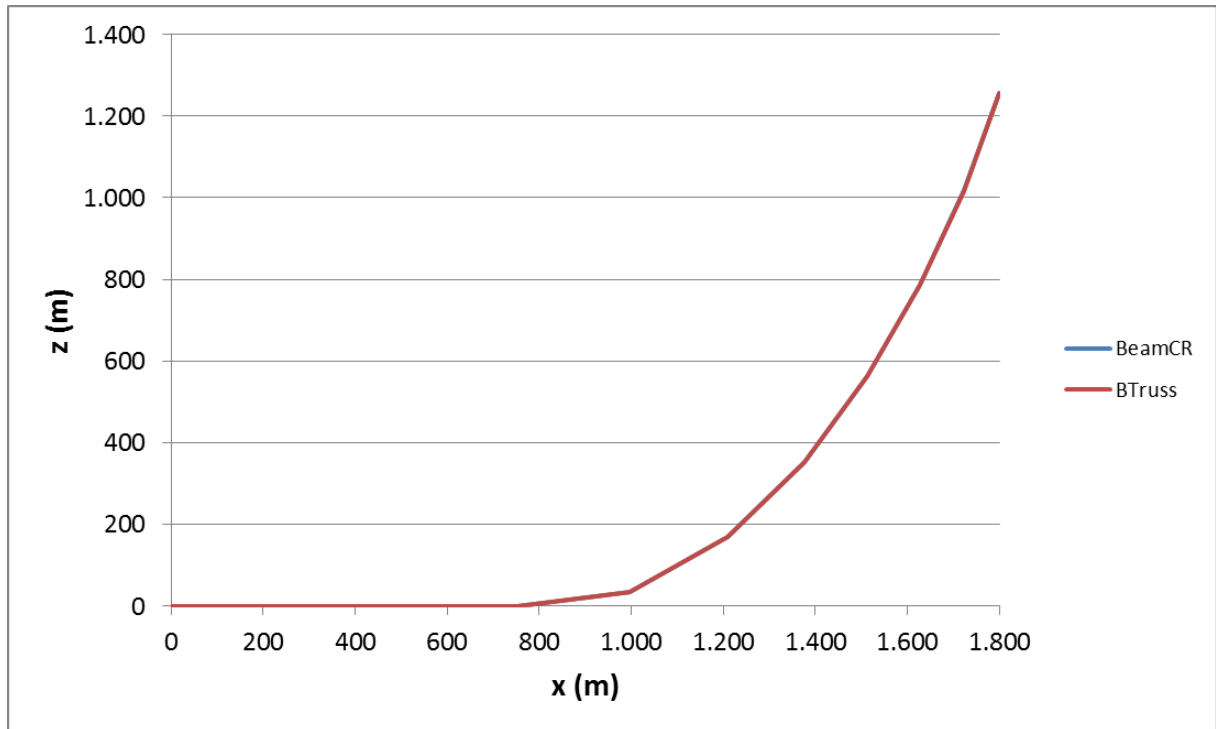
Fonte: Autor (2014)

**Figura 33 - Erro percentual utilizando o elemento BTruss**

Fonte: Autor (2014)

Observa-se que, para este modelo, o elemento de viga não apresentou uma convergência mais rápida, embora seja um elemento mais completo. A Figura 34 mostra a configuração final do *riser* utilizando os dois tipos de elementos com uma malha com 10 elementos.

**Figura 34 - Configuração final do *riser* rígido utilizando os elementos BeamCR e BTruss**

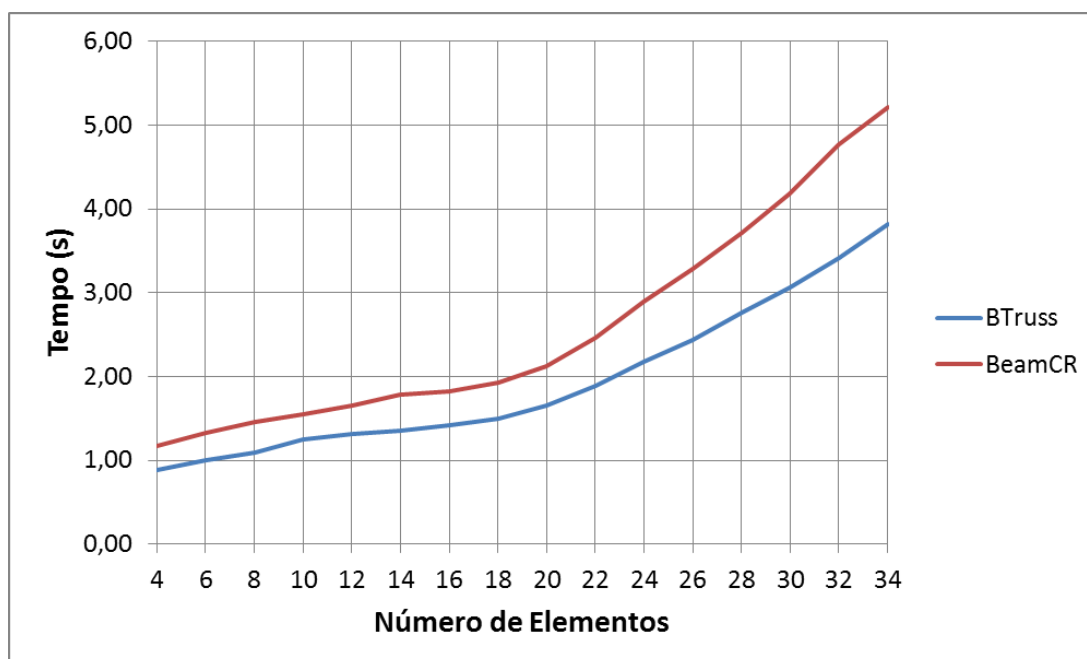


Fonte: Autor (2014)

#### 4.2.2 Custo computacional

Para análise do custo computacional, utilizam-se malhas iniciando em 4 e terminando 34 elementos, embora a convergência tenha sido atingida com 10 elementos. Percebe-se, analisando a Figura 35, que o tempo gasto para a simulação do modelo é maior utilizando o elemento de viga. Para este exemplo, onde não é considerado engastamento, pode-se utilizar uma malha mais refinada com o elemento de treliça que serão obtidos resultados semelhantes aos com o elemento de viga e com um custo computacional menor.

**Figura 35 - Custo computacional para análise do *riser* rígido**



Fonte: Autor (2014)

### 4.3 Análise dos Resultados

Conforme observado nos exemplos simulados, percebe-se que o elemento de viga BeamCR requer um custo computacional maior que o elemento especial de treliça BTruss ao se tratar de uma análise que utilize malhas com o mesmo número de elementos. Entretanto, nota-se que, normalmente, a convergência é atingida de forma mais rápida para esse elemento mais completo, embora para o exemplo do *riser* rígido a convergência tenha sido atingida com o mesmo número de elementos.

Ao ser analisado o custo computacional considerando o número de elementos necessário para atingir a convergência, verifica-se que o elemento de viga também apresenta um custo superior ao do elemento de treliça.

Embora apresente um custo computacional superior, o elemento finito BeamCR, além de possibilitar a convergência com um número inferior ao utilizado pelo elemento de treliça, permite o cálculo dos esforços de torção e a consideração de modelos que necessite de engastamento.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O DOOLINES consiste em um *framework*, desenvolvido em linguagem orientada a objetos, que permite a análise dinâmica não linear de linhas de ancoragem e *risers* no domínio do tempo. Neste trabalho revisou-se a formulação para um elemento finito simplificado de treliça que, quando desejado, pode apresentar rigidez à flexão, existente no DOOLINES e denominado de `BTruss`, propondo-se a modificação no cálculo da curvatura circular.

Exemplos que simulam *risers* submersos foram elaborados de modo a verificar a formulação proposta. Confrontaram-se os resultados obtidos com os disponíveis na literatura, verificando-se a boa concordância dos resultados.

Com o objetivo de aprimorar o elemento de treliça existente, desenvolveu-se a formulação para a consideração, também de maneira simplificada, da rigidez à torção. Entretanto, verificou-se que havia casos em que o elemento proposto apresentava inconsistência de resultado, o que comprometia o resultado final da análise.

Como contribuição maior do trabalho, estudou-se um elemento finito completo de viga, que utiliza a teoria co-rotacional, implementando-o no DOOLINES com o nome de `BeamCR`. Devido a sua estruturação em *framework*, pequenas modificações foram necessárias para incorporação desse elemento.

Exemplos para verificação dessa formulação foram realizados, sendo analisados modelos que simulam vigas e *risers* submersos, apresentando resultados coerentes com as respostas analíticas.

Elementos com formulação mais simples, a exemplo do `BTruss`, são largamente utilizados devido ao custo computacional ser reduzido devido aos poucos graus de liberdade considerados. Decidiu-se realizar um estudo comparativo entre os elementos `BTruss` e `BeamCR`, analisando-se a convergência e o custo computacional envolvido.

Com o estudo realizado, percebeu-se que, para um mesmo nível de discretização, o tempo necessário para realizar a simulação com o elemento de treliça é menor que o com o de viga, entretanto a convergência, em alguns casos, pode ser atingida mais rapidamente com um elemento de viga.



Além de a convergência ser atingida mais rapidamente, o elemento de viga permite o cálculo do esforço de torção, além da consideração do engastamento que não são calculados/considerados com o elemento de treliça implementado. Durante o projeto de um sistema oceânico, a exemplo da instalação de uma plataforma com várias linhas e *risers*, nos estudos iniciais utilizam-se modelos simplificados devido à sua rapidez, entretanto, na fase final, deve-se ter uma análise mais detalhada, necessitando-se de modelos mais completos.

Para continuidade do presente trabalho, sugerem-se:

- validação e verificação dos elementos disponibilizados no *framework* DOOLINES em situações compatíveis com o cenário real de *risers*, bem como a verificação do potencial de aplicação desses elementos para modelagem de mangotes;
- estudo e desenvolvimento de outras formulações para o elemento de viga, por exemplo, a Formulação Posicional do Método dos Elementos Finitos proposta por Greco e Coda (2006), e até mesmo a formulação do elemento disponibilizado no Orcaflex (ORCINA, 2014);
- implementação da consideração do engastamento para os dois tipos de elementos finitos disponíveis, uma vez que essa consideração somente é possível para o elemento de viga;
- estudo para sistematizar a definição das configurações iniciais de linhas discretizadas com o elemento BeamCR quando essas possuem folgas em seus comprimentos indeformados em relação às distâncias entre os pontos extremos de apoios. Nesses casos, o DOOLINES, atualmente, utiliza a equação da catenária que considera apenas os esforços axiais.

## REFERÊNCIAS

- BARNES, M. R.; ADRIAENSSENS, S.; KRUPKA, M. A novel torsion/bending element for dynamic relaxation modeling. **Computers & Structures**, v. 119, p. 60-67, Apr 1 2013. ISSN 0045-7949.
- BARROSO, R. V.; LAGES, E. N.; FERREIRA, F. M. G.; BEZERRA NETO, H. P. Desenvolvimento e implementação de guinchos para recolhimento e pagamento de linhas no framework doolines. In: CONGRESSO DE ENGENHARIA, CIÊNCIA E TECNOLOGIA - CONECTE, Maceió, 2013. **Congresso de engenharia, ciência e tecnologia – Conecte**. Maceió, AL, 2013.
- BELYTSCHKO, T.; HSIEH, B. J. Non-linear transient finite element analysis with convected co-ordinates. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 7, 1973.
- BEZERRA NETO, H. P. **Avaliação de performance de um simulador dinâmico de linhas de ancoragem e risers com o uso de Computação de Alto Desempenho**. 2011. Monografia (Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2011.
- BEZERRA NETO, H. P.; COSTA, J. A. C.; FERREIRA, F. M. G.; SILVEIRA, E. S. S. Processamento Paralelo com OPENMP em um Simulador Dinâmico de Linhas de Ancoragem e Risers, Parte II. **Mecânica Computacional**, v. XXIX, p. 19, 2010.
- CARNEIRO, M. L. **Desenvolvimento de dispositivo de geração e absorção ativa para tanque de ensaios de estruturas oceânicas**. 2007. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecatrônica) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.
- CHAI, Y. T.; VARYANI, K. S.; BARLTROP, N. D. P. Three-dimensional Lump-Mass formulation of a catenary riser with bending, torsion and irregular seabed interaction effect. **Ocean Engineering**, v. 29, n. 12, p. 1503-1525, Sep 2002. ISSN 0029-8018.
- CHAKRABARTI, S. K. **Handbook of offshore engineering**. Illinois, EUA: Elsevier, 2005.
- CHEN, J. J.; WANG, D. J. Non-linear dynamic analysis of flexible marine-risers. China **Ocean Engineering** 5, v. 4, 1991.
- CINTRA, D. T. **Uma estratégia de adaptação no tempo baseada na curvatura do histórico de deslocamentos**. 2008. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2008.
- CRISFIELD, M.A.. **Non-linear finite element analysis of solids and structures**. v. 2: Advanced Topics, Chichester: John Wiley & Sons, 1997.
- DET NORSKE VERITAS. **DNV-RP-C205**: Environmental conditions and environmental loads. Norway, 2007.
- ESCARPINI FILHO, R. S.; LAGES, E. N. Modelagem de Linhas Flexíveis com o Uso de Elementos de Massa Concentrada com a Incorporação Simplificada da Rigidez à Flexão. In: CONGRESSO IBERO LATINO AMERICANO DE MÉTODOS COMPUTACIONAIS EM ENGENHARIA, Porto, 2007. **CMNE & CILAMCE**. Porto, 2007, p.1-15.

FELIPPA, C. A. **Non-linear finite element methods / NFEM**. Center for Aerospace Structures, University of Colorado, Boulder/USA. Lecture notes for the course non-linear finite element methods 2001.

FERREIRA, F. M. G. **Desenvolvimento e aplicações de um framework orientado a objetos para análise dinâmica de linhas de ancoragem e de risers**. 2005. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2005.

FRAEIJIS DE VEUBEKE, B. The dynamics of flexible bodies. **International Journal of Engineering Science**, v. 14, n. 10, 1976.

GHADIMI, R. A simple and efficient algorithm for the static and dynamic analysis of flexible marine risers. **Computers & Structures**, v. 29, n. 4, p. 541-555, 1988. ISSN 0045-7949.

GRECO, M ; CODA, H. B. Positional FEM formulation for flexible multi-body dynamic analysis. **Journal of Sound and Vibration**, v. 290, p. 1141-1174, 2006.

HARRISON, H. B. **Computer methods in structural analysis**. Englewood Cliffs, New Jersey, USA: Prentice Hall Inc., 1973.

KREYSZIG, E.. **Advanced engineering mathematics**. 7th ed., John Wiley & Sons, 1992.

LAGES, E. N.; SILVEIRA, E. S. S.; FERREIRA, F. M. G. e ESCARPINI FILHO, R. S.. Contribuição à Análise Dinâmica de Linhas de Ancoragem e Risers com a Consideração Simplificada da Rigidez à Flexão. In: CONGRESSO IBERO LATINO AMERICANO DE MÉTODOS COMPUTACIONAIS EM ENGENHARIA, 29, Maceió, 2008. **CILAMCE**. Maceió, 2008.

LAL, B.; ARORA, S. **Three dimensional differential geometry**. 5th ed, Atma Ram & Sons, 1989.

MAPLESOFT. Maple 16. p. Disponível em <[www.maplesoft.com/products/maple](http://www.maplesoft.com/products/maple)>. Acesso em: 27 de agosto de 2013.

MCNAMARA, J. F.; HIBBITT, H. D. Numerical analysis of flexible pipes and risers in offshore applications. In: OFFSHORE MECHANICS AND ARTIC ENGINEERING SPECIALTY, New Orleans, 1986. **Proc. 1<sup>st</sup> Offshore Mechanics and Artic Engineering Specialty Symp. On Offshore and Artic Frontiers**. New Orleans, 1986.

MCNAMARA, J. F.; O'BRIEN, P. J.; GILROY, S. G. Nonlinear analysis of flexible risers using hybrid finite elements. In: INTERNATIONAL OFFSHORE MECHANICS AND ARTIC ENGINEERING SYMP, 1986. **Proc. 5<sup>th</sup> International Offshore Mechanics and Artic Engineering Symp**, 1986.

MENIN, R. C. G. **Aplicação da Descrição Cinemática Co-Rotacional na Análise Não-Linear Geométrica de Estruturas Discretizadas por Elementos Finitos de Treliça, Vigas e Cascas**. 2006. Tese (Doutorado em Estruturas e Construção Civil) – Universidade de Brasília, Distrito Federal, 2006.

NAKAJIMA, T.; MOTORA, S.; FUJINO, M. On the dynamic analysis of multi-component mooring lines. In: OFFSHORE TECHNOLOGY CONFERENCE, 14, Houston, 1982. **14<sup>th</sup> Offshore Technology Conference**. Houston, 1982 .

NISHIMOTO, K.; FUCATU, C. H.; MASETTI, I. Q. Dynasim: a time domain simulator of anchored FPSO. **Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering**, ASME 124(4):203–211, 2002, doi:10.1115/1.1513176.

NOUR-OMID, B.; RANKIN, C. C. Finite rotation analysis and consistent linearization using projectors. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 93, n. 3, 1991.

O'BRIEN, P.; MCNAMARA, J. F.; GREALISH, F. **Extreme bending and torsional responses of flexible pipelines**. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON OFFSHORE MECHANICS AND ARCTIC ENGINEERING, 1992. **Proceedings of the 11th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering**. 1992.

ORCINA. Disponível em: <<http://www.orcina.com>>. Acesso em: 11 de agosto de 2014.

PASQUETTI, E. **Estabilidade Estática e Dinâmica de Torres Estaiadas**. 2003. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2003.

PORTALSAOFRANCISCO. Força de Coriolis. Disponível em: <<http://www.portalsaofrancisco.com.br/alfa/fisica/a-forca-de-coriolis.php>>. Acesso em: 11 de agosto de 2014.

RANKIN, C. C.; BROGAN, F. A. An element independent corotational procedure for the treatment of large rotations. **Journal of Pressure Vessel Technology**, v. 108, n. 2, p. 10, 1986.

RANKIN, C. C.; NOUR-OMID, B. The use of projectors to improve finite element performance. **Computers & Structures**, v. 30, n. 1-2, 1988.

SEYED, F. B.; PATEL, M. H.; HOLLAND, A. P. Dynamic analysis of flexible catenary risers including internal flow effects. **Dynamics of Compliant Structures**, Final Report, Project 12, vol. Vol. III, 1987

SILVA, D. M. L. **Geração de configurações equilibradas de sistemas de linhas flexíveis através de métodos de relaxação dinâmica**. 2005. Dissertação (Mestrado em Ciência em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2005.

SILVA, W. M.; FERREIRA, F. M. G.; LAGES, E. N. Análise estática de linhas de ancoragem e risers utilizando processo iterativo com refinamento de malhas no framework doolines. In: CONGRESSO DE ENGENHARIA, CIÊNCIA E TECNOLOGIA – CONECTE, Maceió, 2013. **Congresso de Engenharia, Ciência e Tecnologia – Conecte**. Maceió, 2013.

SILVEIRA, E. S. **Análise dinâmica de linhas de ancoragem com adaptação no tempo e subciclagem**. 2001. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2001.

SILVEIRA, E. S. S.; LAGES, E. N.; FERREIRA, F. M. G. DOOLINES: an object-oriented framework for non-linear static and dynamic analyses of offshore lines. **Engineering with Computers**, v. 28, n. 2, p. 149-159, Apr 2012. ISSN 0177-0667.

SPURRIER, R.A. A comment on singularity-free extraction of a quaternion from a direction cosine matrix. **J. Spacecrafts & Rockets**, v. 15, p. 255, 1978.

STEWART, J. **Cálculo**. 6ª Edição. São Paulo, 2009.

SUSSEKIND, J. C. **Curso de Análise Estrutural**. Rio de Janeiro, RJ, 1984.

TAKAFUJI, F. C. M.. **Dinâmica tridimensional de risers**. 2010. Tese (Doutorado em Engenharia de Controle e Automação Mecânica) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

VAN DEN BOOM, H. J. J.; DEKKER, J. N.; ELSACKER, A. W. V. Dynamic aspects of offshore riser and mooring concepts. In: Offshore Technology Conference, 19, Houston, 1987. **19th Offshore Technology Conference**. Houston, 1987.

WALTON, J. S.; POLACHEK, H. Calculation of transient motions of submerged cables. **Mathematics of Computation**, v. 14, p. 20, 1960.

WEMPNER, G. Finite elements, finite rotations and small strains of flexible shells. **International Journal of Solids and Structures**, v. 5, n. 2, 1969.

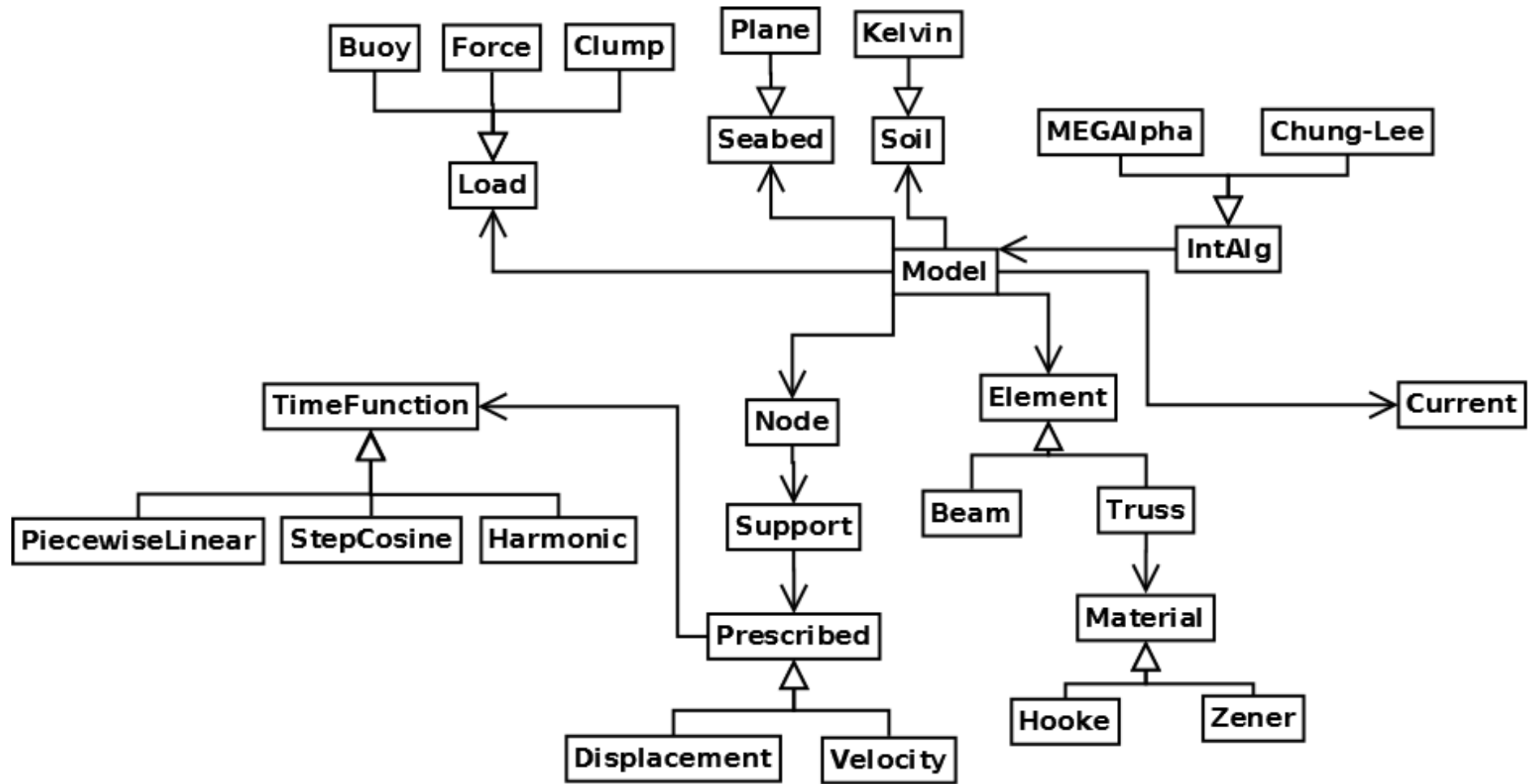
## APÊNDICE A – DOOLINES

O DOOLINES é um *framework* desenvolvido com a linguagem de programação C++ que utiliza o paradigma da programação orientada a objetos (POO). Entre as diversas classes que o compõem (Figura 36), destacam-se as classes `Model` e a `Intalg`. Elas são responsáveis pela concepção do modelo e pelos algoritmos de integração temporal, respectivamente (BEZERRA NETO *et al.*, 2010).

A classe `Model` refere-se ao modelo computacional e é utilizada para fazer a modelagem do problema a ser tratado. A partir dela, pode-se definir a malha de elementos finitos das estruturas de linha de ancoragem e *riser*, bem como as propriedades físicas e geométricas dos elementos (BEZERRA NETO *et al.*, 2010).

A classe `Intalg` é a classe dos algoritmos de integração no domínio do tempo. Esses algoritmos são utilizados na discretização das Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) no tempo, sendo obtidas respostas do sistema estrutural (FERREIRA, 2005).

Figura 36 - Diagrama de classes UML do DOOLINES



Fonte: Adaptada de Ferreira (2005)

A reformulação em *framework* permitiu que modificações fossem feitas de modo a deixá-lo com mais funcionalidades. A seguir estão listadas as modificações feitas desde a conversão em *framework* até a elaboração do presente trabalho:

- Incorporação das rotinas clássicas de catenária, realização da análise estática e algoritmo de integração numérica temporal de relaxação dinâmica;
- Algoritmos de integração numérica: Método das diferenças centrais e Método de Euler;
- Modelo constitutivo de Kelvin e Modelo segmentado;
- Versão paralela para ambientes de memória compartilhada;
- Guincho;
- Fluido interno;
- Adaptatividade no tempo;
- Modelos de contato/Atrito linha-solo;
- Consideração de obstáculos;
- Consideração do efeito de ondas

### **A.1 Incorporação das Rotinas Clássicas de Catenária, Análise Estática e de Relaxação Dinâmica**

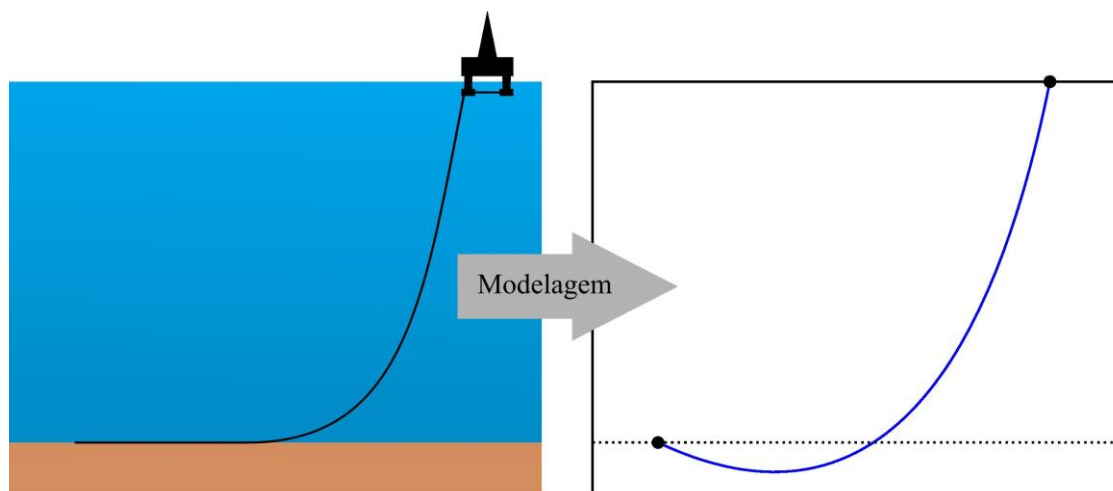
Segundo Ferreira (2005), a incorporação das rotinas clássicas de catenária, análise estática e de relaxação dinâmica possibilita a geração de configurações iniciais complexas. Durante a análise estática é feita uma busca pelo equilíbrio estático da linha, o que gera uma configuração inicial do modelo necessária para a realização da análise dinâmica no domínio do tempo.

A partir de uma situação real, cria-se um modelo (Figura 37) e nesse modelo é aplicada a discretização espacial da linha em elementos finitos. A criação do modelo é feita utilizando



rotinas clássicas de catenária inextensível (por exemplo, Pasquetti, 2003). Para a realização do equilíbrio estático, o algoritmo de integração temporal utilizado é o de relaxação dinâmica.

**Figura 37 - Modelagem numérica de uma situação real**



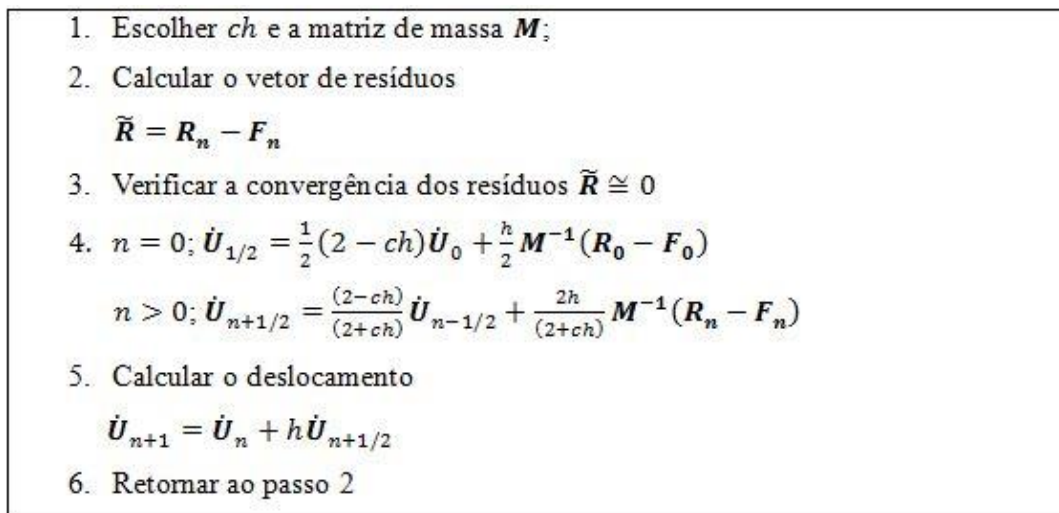
Fonte: Adaptada de Silva *et al.* (2013)

Segundo Silva (2005), o método de relaxação dinâmica baseia-se no fato de que a solução estática de um modelo pode ser gerada como a resposta permanente de uma análise transiente amortecida. Silva (2005) apresenta um algoritmo do método de relaxação dinâmica (Figura 38), ressaltando que  $ch$  (coeficiente de amortecimento multiplicado por um pseudo incremento de tempo) e  $M$  são valores fictícios escolhidos de modo que a solução estática seja obtida com um número mínimo de passos. Segundo Silveira *et al.* (2012), a relaxação dinâmica é um método explícito que usa um amortecimento crítico a fim de acelerar a convergência.

Silva *et al.* (2013) propuseram fazer a análise estática de modo iterativo com refinamento de malhas. Essa estratégia consiste na discretização inicial da malha com poucos elementos e realização da análise estática, em seguida é aumentada a discretização e novamente realizada a análise estática. Esse processo é repetido até que se atinja o equilíbrio da malha com o número de elementos desejados. A Figura 39 mostra o fluxograma desse método.

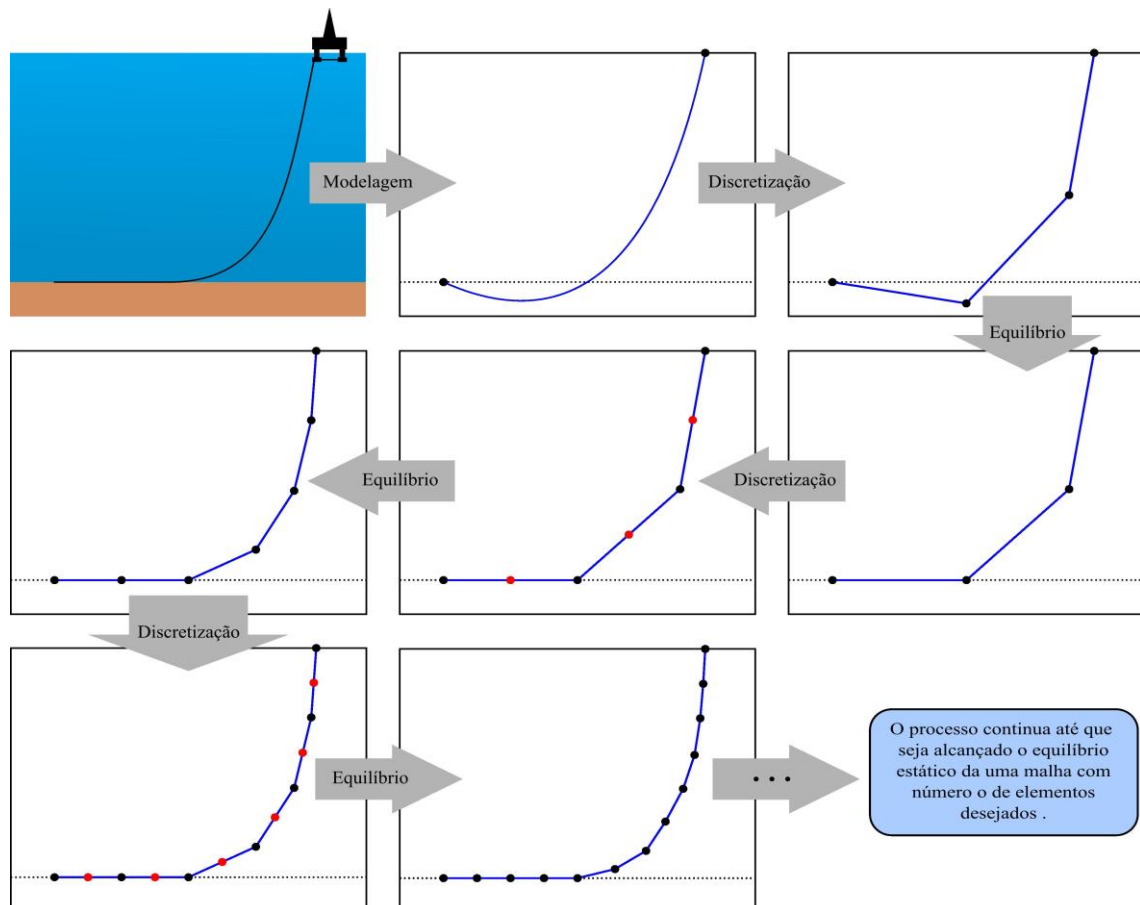
A utilização da estratégia proposta por Silva *et al.* (2013) resultou em uma análise mais rápida que a estratégia convencional. Além disso, também é possível notar uma menor dependência entre os parâmetros adotados e a resposta obtida, o que torna o método confiável.

**Figura 38 - Algoritmo do Método de Relaxação Dinâmica Explícito**



Fonte: Silva (2005)

**Figura 39 - Fluxograma de uma análise estática de modo iterativo**



Fonte: Silva *et al.* (2013)

O algoritmo de integração numérica temporal de relaxação dinâmica implementado no DOOLINES encontra-se na classe `Relax`, classe filha da `IntAlg`.

## A.2 Algoritmos de Integração Numérica

Novos algoritmos de integração estão incorporados para análise dinâmica: o Método de Euler e o Método das Diferenças Centrais. Inicialmente havia os algoritmos de integração MEGAlpha e Chung-Lee.

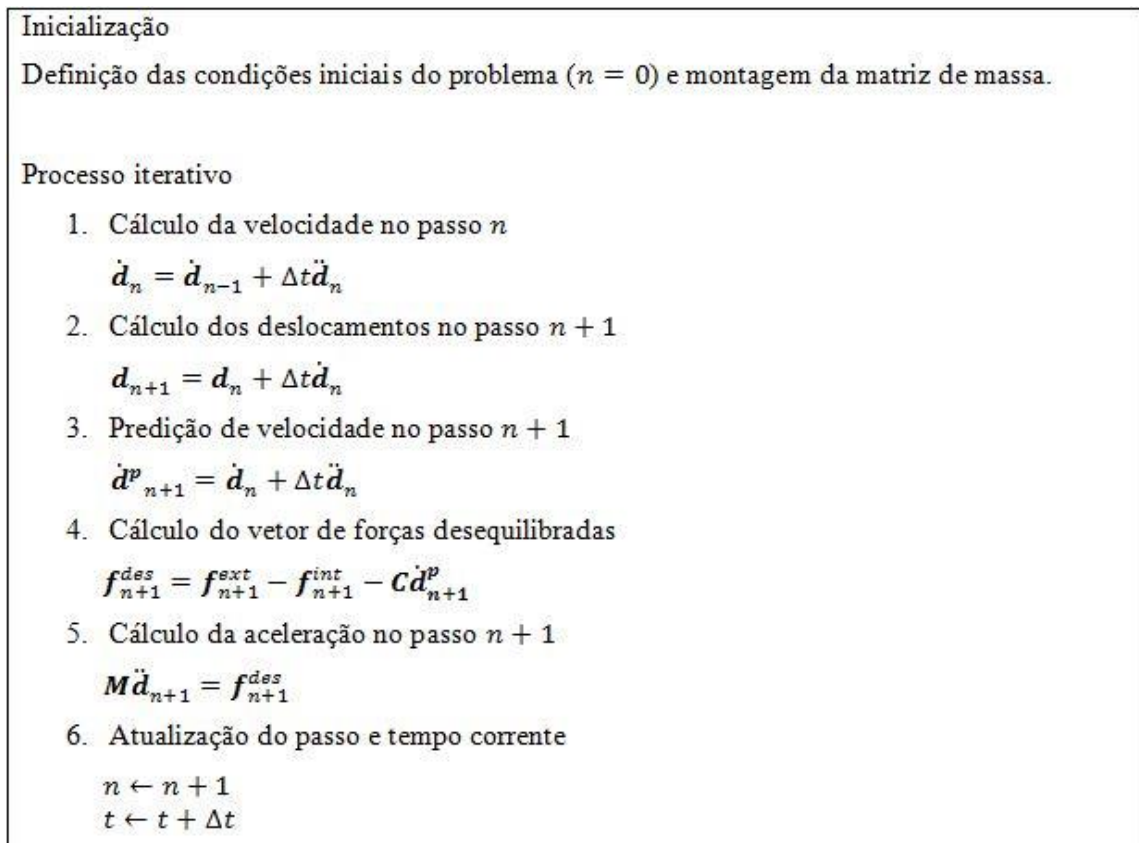
O Método de Euler pode ser obtido supondo a aceleração constante durante cada intervalo de tempo. As equações de recorrência são mostradas a seguir:

$$d_{n+1} = d_n + \dot{d}\Delta t \quad (\text{A.1})$$

$$\dot{d}_{n+1} = \dot{d}_n + \ddot{d}_n\Delta t \quad (\text{A.2})$$

O algoritmo do Método de Euler é mostrado na Figura 40.

**Figura 40 - Algoritmo do Método de integração de Euler**



O Método das Diferenças Centrais é um dos algoritmos clássicos de integração direta explícita largamente utilizado. Trata-se de um algoritmo de fácil implementação e que possui variantes apresentadas por diversos autores. Esse método pode ser encarado como uma particularização do algoritmo implícito de Newmark, cujas equações de recorrência são dadas por

$$\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{d}_n + \Delta t \dot{\mathbf{d}}_n + \Delta t^2 \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{d}}_n + \beta \ddot{\mathbf{d}}_{n+1} \right] \quad (\text{A.3})$$

e

$$\dot{\mathbf{d}}_{n+1} = \dot{\mathbf{d}}_n + \Delta t [(1 - \gamma) \ddot{\mathbf{d}}_n + \gamma \ddot{\mathbf{d}}_{n+1}] \quad (\text{A.4})$$

Observa-se que o deslocamento é aproximado por uma expansão em série de Taylor com precisão de segunda ordem e que, quando se supõe  $\beta = 0$ , o algoritmo de Newmark torna-se explícito. A definição de  $\gamma = \frac{1}{2}$  é o que justifica a denominação do algoritmo como sendo de diferença central. O algoritmo do método das diferenças centrais, variante do algoritmo de Newmark, é apresentado na Figura 41.

**Figura 41 - Algoritmo do Método das Diferenças Centrais (Variante de Newmark)**

<p>Inicialização</p> <p>Definição das condições iniciais do problema (<math>n = 0</math>) e montagem da matriz de massa.</p> <p>Processo iterativo</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Cálculo da velocidade no passo <math>n</math> <math display="block">\dot{d}_n = \dot{d}_{n-1} + \frac{\Delta t}{2} [\ddot{d}_n + \ddot{d}_{n-1}]</math> </li> <li>2. Cálculo dos deslocamentos no passo <math>n + 1</math> <math display="block">d_{n+1} = d_n + \Delta t \dot{d}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{d}_n</math> </li> <li>3. Predição de velocidade no passo <math>n + 1</math> <math display="block">\dot{d}_{n+1}^p = \dot{d}_n + \Delta t \ddot{d}_n</math> <p>ou</p> <math display="block">\dot{d}_{n+1}^p = [d_{n+1} - d_n] / \Delta t</math> </li> <li>4. Cálculo do vetor de forças desequilibradas <math display="block">f_{n+1}^{des} = f_{n+1}^{ext} - f_{n+1}^{int} - C \dot{d}_{n+1}^p</math> </li> <li>5. Cálculo da aceleração no passo <math>n + 1</math> <math display="block">M \ddot{d}_{n+1} = f_{n+1}^{des}</math> </li> <li>6. Atualização do passo e tempo corrente <math display="block">n \leftarrow n + 1</math> <math display="block">t \leftarrow t + \Delta t</math> </li> </ol>
--

Fonte: Autor (2014)

O algoritmo de integração temporal de Euler está implementado no DOOLINES na classe Euler e o de Diferenças Centrais na classe CentralDifference, ambas classes filhas de IntAlg.

### A.3 Modelos Constitutivos

Alguns novos modelos constitutivos estão disponíveis: Modelo de Kelvin e o Modelo Segmentado, atribuídos às classes Kelvin (modelo constitutivo de Kelvin) e NonLinear (modelo segmentado), classes filhas de Material. Inicialmente havia implementados os modelos de Hooke e Zener.

O Modelo de Kelvin é composto por uma associação em paralelo de um elemento elástico linear com um viscoso linear. Portanto, a força calculada não é função apenas dos deslocamentos, mas também das velocidades. A relação que representa tal modelo é dada por

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \eta \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad (\text{A.5})$$

sendo  $t$  o instante de tempo avaliado,  $\eta$  o coeficiente de viscosidade axial do material,  $\sigma(t)$  a tensão avaliada no instante  $t$ ,  $E$  o módulo de Young e  $\varepsilon(t)$  a deformação no instante  $t$ .

A relação força-deslocamento assume a seguinte forma:

$$f(t) = \frac{EA_0}{L}u(t) + \frac{\eta A_0}{L_0}\dot{u}(t) \quad (\text{A.6})$$

sendo  $EA_0$  o módulo de rigidez axial,  $A_0$  a área da seção transversal,  $L$  o comprimento do elemento deformado,  $u(t)$  o deslocamento no instante  $t$ ,  $L_0$  o comprimento indeformado do elemento.

No modelo segmentado a relação constitutiva é definida a partir de um conjunto de pontos. Esses pontos podem representar pares tensão-deformação ou força-deslocamento. No caso da representação tensão-deformação, é necessária a especificação da seção transversal do elemento para completar a relação constitutiva a ser aplicada. Para utilizar pares força-deslocamento, nenhuma outra informação é exigida. Nesse modelo, as informações entre pares tensão-deformação (ou força-deslocamento) são obtidas a partir de um procedimento de interpolação.

#### A.4 Versão Paralela

Segundo Bezerra Neto *et al.* (2010), alguns dos principais objetivos do uso de técnicas de Computação de Alto Desempenho são: reduzir o tempo de processamento, minimizar o consumo de energia e memória, reduzir problemas na transferência de dados por rede, dentre outros, cujo objetivo é sempre otimizar o desempenho do *software* ou *hardware* envolvido.

Para simulação de linhas ou *risers* utilizando o DOOLINES, a etapa inicial consiste na modelagem numérica de todo o cenário *offshore* e domínio do problema. No caso específico, as linhas de ancoragem e os *risers* precisam ser discretizados em elementos finitos, pois esse

simulador utiliza o Método dos Elementos Finitos (MEF) para discretização espacial das equações diferenciais (BEZERRA NETO *et al.*, 2010)

Em algumas situações de projeto, essa malha precisa ser muito discretizada para se obter uma resposta satisfatória, acarretando o aumento no tempo de processamento e/ou consumo de memória e inviabilizando algumas análises em *desktops* comuns. Para contornar esses problemas é comum o uso de técnicas de Computação de Alto Desempenho.

Segundo Bezerra Neto *et al.* (2010), dentre as técnicas existentes destacam-se as estratégias de otimização do código fonte e as estratégias baseadas em processamento paralelo. Sendo o processamento paralelo recomendado em regiões que demandam elevado esforço computacional (tempo, memória ou processamento) e consiste em dividir o fluxo do programa entre as centrais de processamento disponíveis.

Bezerra Neto *et al.* (2010) implementaram quatro estratégias de processamento paralelo utilizando o padrão OpenMP (*Open Multi-Processing*) em três delas e o MPI (*Message Passing Interface*) na restante. Bezerra Neto (2011) escolheu duas estratégias utilizadas por Bezerra Neto *et al.* (2010), a “Estratégia 1 – Paralelização direta com uma única diretiva” e a “Estratégia 4 – Uso do padrão MPI em ambientes de memória compartilhada” analisando o ganho de desempenho no DOOLINES, simulando somente uma linha, e no DOOLINES acoplado ao Dynasim (*Dynamic Simulator*) (NISHIMOTO *et al.*, 2002), simulando um sistema de linhas, verificando um ganho significativo na versão do DOOLINES utilizando a “Estratégia 1 – Paralelização direta com uma única diretiva”, que será citada como Estratégia 1 ao longo do texto.

O modelo de paralelismo utilizado foi o de dados que, juntamente com o funcional, constituem os modelos clássicos de paralelismo (BEZERRA NETO *et al.*, 2010). No paralelismo de dados ocorre a divisão de um conjunto de dados que operam com as mesmas instruções. Segundo Bezerra Neto (2011), nesse tipo de paralelismo é necessária uma atenção especial, pois a divisão sem um critério seguro pode ocasionar em informações que não são atualizadas, gerando condições de corrida (*race conditions*) e conseqüentemente erros no programa.

As condições de corrida podem ocorrer quando uma informação precisa ser atualizada por dois locais diferentes ao mesmo tempo. Caso não haja um tratamento do modo como essa

informação será armazenada, quando os locais tentarem atualizar essa no mesmo instante de tempo, uma das contribuições será perdida.

No DOOLINES, as forças externas e internas são representadas por vetores com dimensão múltipla do número de nós da malha. Realiza-se um *loop* em cada elemento da malha e para cada elemento são calculadas as forças nodais equivalentes associadas a cada tipo de força durante a montagem desses vetores. Essas forças nodais são atualizadas no vetor de forças global que contém as forças associadas a todos os nós da malha.

A Estratégia 1 foi desenvolvida utilizando o padrão OpenMP e consistiu na aplicação direta das diretivas nas regiões que demandam maior consumo de tempo. Essa estratégia é considerada simplificada por ser possível paralelizar o código com o uso da diretiva apenas (BEZERRA NETO *et al.*, 2010). Um pseudo-código do DOOLINES com a diretiva de paralelização é mostrado na Figura 42.

**Figura 42 - Exemplificação do uso de uma diretiva de OpenMP**

```
// Cálculo da Força devido à Corrente Marítima
#pragma omp parallel for
for (int i=0;i<NumElements;i++)
{...}
```

Fonte: Bezerra Neto *et al.* (2010)

## A.5 Guinchos

Segundo Barroso *et al.* (2013), o módulo implementado trata-se de um tipo de guincho simplificado, que possibilita simular problemas de pagamento e recolhimento de linhas utilizando uma estratégia de modelagem na qual não há alteração no número de elementos da malha.

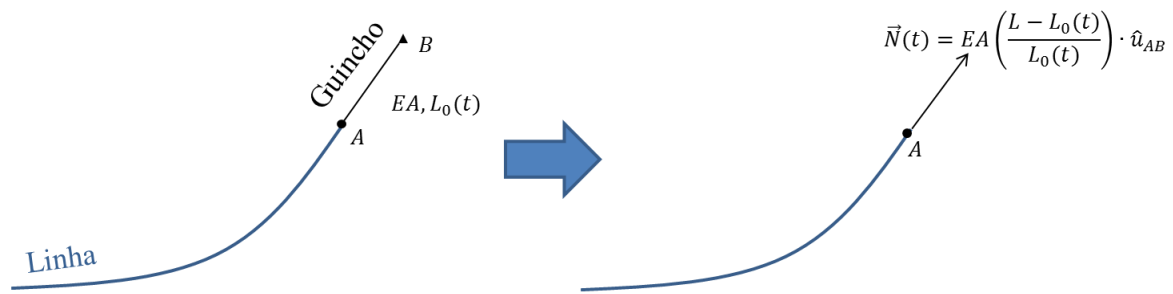
O tipo de guincho desenvolvido possibilita a variação do comprimento ao longo do tempo ou a variação da força normal ao longo do tempo. Essa variação é definida por meio de uma função no tempo. Na prática, esse tipo de guincho é tratado como uma ação externa sendo aplicada a um nó da malha de elementos finitos. Em virtude disso, a classe `Winch` que abstrai as funcionalidades do guincho é uma classe derivada de `Load`, classe responsável pelos carregamentos aplicados às linhas.



Através da função associada ao guincho, é possível estabelecer diferentes taxas de variação de comprimento ou força (dependendo do tipo de guincho) para cada intervalo de tempo. Isso permite que em uma única simulação sejam executadas as funções de pagamento e recolhimento de linha.

O guincho com variação do comprimento (no DOOLINES representado pela classe `WLength`, classe filha de `Winch`), representado na Figura 43, possui como parâmetros as coordenadas da extremidade fixa do guincho, o nó de ligação guincho-linha, a rigidez axial,  $EA$ , e a função associada ao comprimento indeformado do guincho,  $L_0(t)$ , com  $t$  representando o tempo.

**Figura 43 - Modelagem do guincho com variação do comprimento**



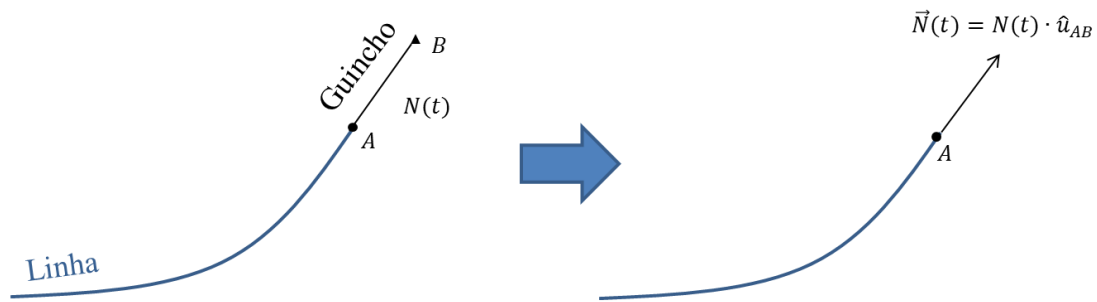
Fonte: Autor (2014)

Assim, através da função associada ao comprimento do guincho, é especificado o comprimento indeformado,  $L_0$ . O comprimento final,  $L$ , é a distância entre o vetor de coordenadas dado e o nó de ligação guincho-linha. Com a equação ( A.7 ), é calculado o módulo da força ( $N$ ) exercida pelo guincho que é multiplicado pelo vetor unitário  $\hat{u}_{AB}$  na direção e sentido do guincho. Por fim, a força exercida pelo guincho,  $\vec{T}$ , é somada ao vetor de forças externas atuantes no sistema.

$$N = EA \frac{L - L_0}{L_0} \quad (\text{A.7})$$

No caso do guincho com variação da força normal (no DOOLINES representado pela classe `WTension`, classe filha de `Winch`), representado na Figura 44, são adotados os mesmos parâmetros, com exceção da rigidez axial do guincho, que não influencia no problema, visto que o módulo da força normal é dado em função do tempo.

**Figura 44 - Modelagem do guincho com variação da força normal**



Fonte: Autor (2014)

Assim, através da função associada ao guincho, é calculado o módulo da força exercida por ele. Em seguida, o módulo da força é multiplicado pelo vetor unitário na direção e sentido do guincho. Obtém-se, então, a força exercida pelo guincho, que é somada ao vetor de forças externas.

## A.6 Fluido Interno

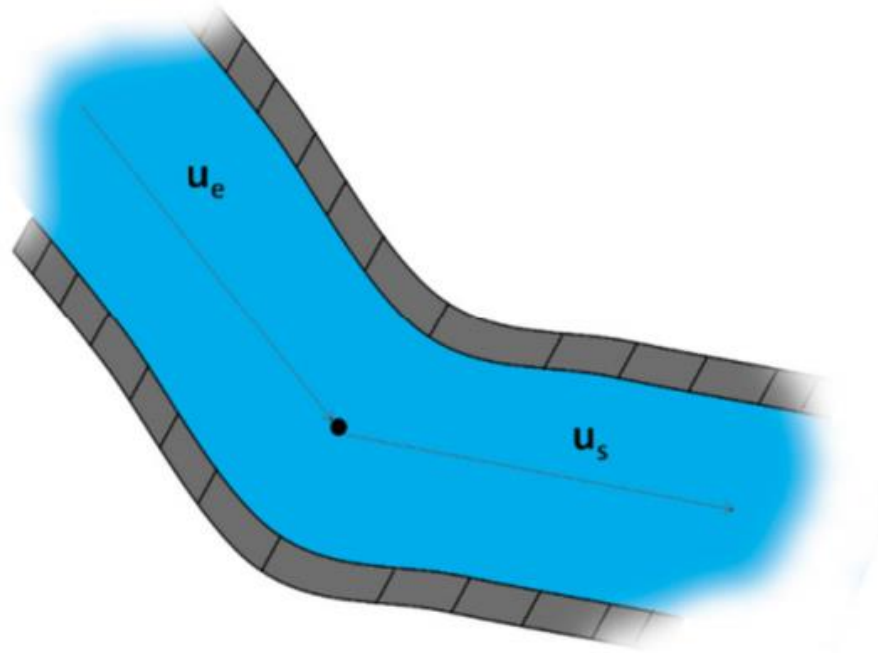
O modelo utilizado para a consideração de fluido interno encontra-se no OrcaFlex (ORCINA, 2014) onde se considera a adição de duas novas forças, uma centrífuga originada a partir da mudança de direção do fluxo e outra de Coriolis, provocada pela turbulência do meio.

Considera-se um fluido com densidade  $\rho$  se deslocando com fluxo uniforme, vazão mássica  $r$ , escoando em um duto com área transversal  $a$  e velocidade  $s_f$  dada por

$$s_f = \frac{r}{a\rho} \quad (\text{A.8})$$

Considera-se ainda um nó onde o fluido em escoamento entra na direção  $\mathbf{u}_e$  e sai na direção  $\mathbf{u}_s$  (Figura 45), tem-se que os vetores velocidade de entrada e de saída são  $s_{fe}\mathbf{u}_e$  e  $s_{fs}\mathbf{u}_s$ , respectivamente.

Figura 45 - Esquema do fluxo passando por um nó



Fonte: Autor (2014)

Desta forma, a taxa de entrada pode ser expressa por  $\rho a_e s_e^2 \mathbf{u}_e$  e a de saída por  $\rho a_s s_s^2 \mathbf{u}_s$ , logo a força necessária para mudar a direção é dada por

$$\mathbf{F} = \rho a_s s_s^2 \mathbf{u}_s - \rho a_e s_e^2 \mathbf{u}_e \quad (\text{A.9})$$

O oposto da força apresentada em ( 2.13 ) fornece a força centrífuga,  $\mathbf{F}_c$ , resultante no nó, ou seja,

$$\mathbf{F}_c = \rho a_e s_e^2 \mathbf{u}_e - \rho a_s s_s^2 \mathbf{u}_s \quad (\text{A.10})$$

A força de Coriolis é conhecida por ser imperceptível em referenciais fixos e é somente observada quando o referencial é não inercial, ou seja, quando este se move com o corpo. Um exemplo que ilustra bem essa situação é o de um carrossel com uma pessoa próxima do centro tentando acertar uma bolinha em outra que está na extremidade, se a bolinha for lançada em linha reta certamente ela não irá acertar o seu destino, uma vez que a pessoa da extremidade está em um movimento circular. Para quem está do lado de fora do carrossel (referencial fixo) a bolinha fez uma trajetória retilínea e a pessoa da extremidade está em um movimento circular, mas para a pessoa que está no carrossel, girando com ele, a outra está parada e a bolinha fez uma trajetória curva como se existisse uma força mudando a sua direção, essa é à

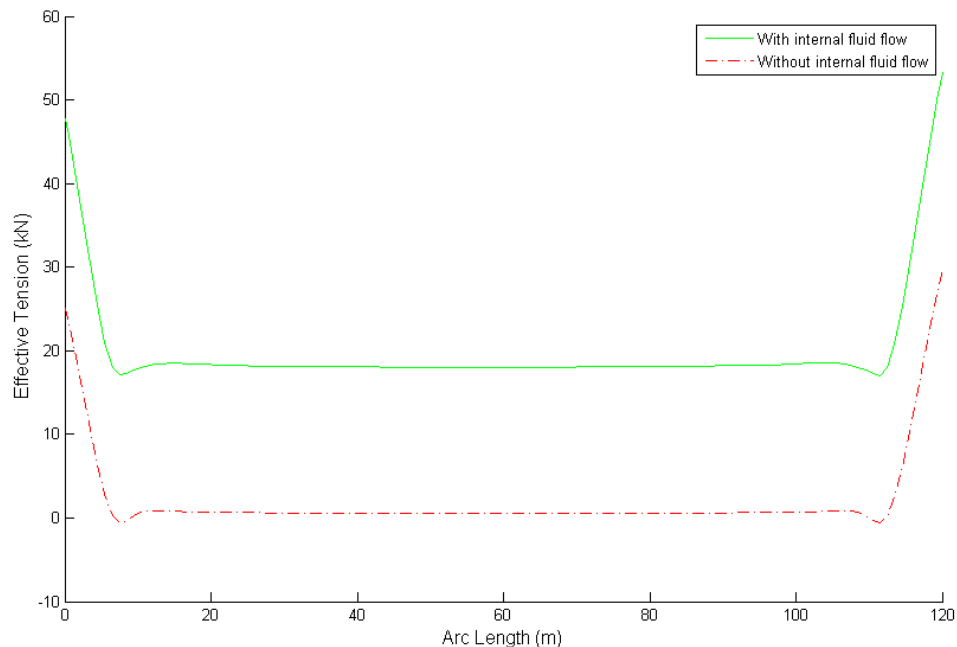
força de Coriolis (PORTALSAOFRANCISCO, 2014). Agora imagine um tubo ligando as duas pessoas e a bolinha fosse passada por meio deste. Para as pessoas no carrossel a bolinha fez uma trajetória retilínea e o tubo está exercendo uma força que se opõe a de Coriolis. De forma análoga é isso que ocorre em tubos com fluido se movimentando em seu interior.

Agora considerando um elemento com velocidades nodais  $v_1$  e  $v_2$ , se existir um fluido se movimentando em seu interior, cada nó deve receber uma força resultante que corresponde à ação da força de Coriolis, dada por

$$F_{co} = r(\text{projecção de } (v_2 - v_1)\text{normal ao elemento}) \quad (\text{A.11})$$

A Figura 46 apresenta o resultado comparativo do efeito do fluxo de fluido interno apresentando as respostas para duas situações: mangote cheio e mangote vazio. Como exemplo de análise considerou-se um mangote de transferência em operação de alívio de Gás Natural Liquefeito (GNL). Nessa situação a linha encontra-se conectada em duas unidades flutuantes.

**Figura 46 - Efeito do fluxo de fluido interno**



Fonte: Autor (2014)

## A.7 Adaptatividade no Tempo

A técnica de adaptatividade no tempo implementada no DOOLINES é baseada na curvatura do histórico de deslocamento, desenvolvida por Cintra (2008). Para incorporar esse recurso foi criado o método `ComputeCurvature` na classe `IntAlg` (responsável pelos algoritmos de integração temporal), que faz o cálculo da curvatura baseada no histórico de deslocamento.

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{(\dot{\mathbf{d}} \cdot \dot{\mathbf{d}})(\ddot{\mathbf{d}} \cdot \ddot{\mathbf{d}}) - (\dot{\mathbf{d}} \cdot \ddot{\mathbf{d}})^2}}{(\dot{\mathbf{d}} \cdot \dot{\mathbf{d}})^{3/2}} \quad (\text{A.12})$$

sendo  $\dot{\mathbf{d}}$  o vetor velocidade e  $\ddot{\mathbf{d}}$  o vetor aceleração.

Na Figura 47 é apresentado o código que implementa o cálculo da curvatura.

**Figura 47 - Método da Classe `IntAlg` para calcular a curvatura**

```

1  double IntAlg::ComputeCurvature(void) {
2      // Calculo da curvatura do historico de deslocamento.
3      int num_free_dof = 0;
4      int NumNodes = model->GetNumNodes();
5      //Produto (vT x v) e (vT x a)
6      double vTv = 0;
7      double vTa = 0;
8      for (int i = 0; i < 6*NumNodes; i++) {
9          if (free_dof_indexer[i] == true) {
10             vTv += v0[i] * v0[i];
11             vTa += v0[i] * a0[i];
12             num_free_dof++;
13         }
14     }
15     //Curvatura
16     double aux = 0;
17     double uvTv = 1 + vTv;
18     double dots = vTa*vTa;
19     for (int j = 0; j < 6*NumNodes; j++) {
20         if (free_dof_indexer[j] == true) {
21             aux = a0[j] * uvTv - v0[j] * vTa;
22             dots = dots + aux*aux;
23         }
24     }
25     double k = sqrt(dots) / (uvTv * uvTv);
26     return k;
27 }

```

Fonte: Autor (2014)

Também foi criada uma classe para gerenciar o algoritmo adaptativo, denominada `Adaptivity`. Essa classe faz o cálculo do passo de integração (*time step*) tomando como

base o valor da curvatura do histórico de deslocamento (obtido pelo método `IntAlg::ComputeCurvature`) e levando em consideração a regularização da curvatura. A Figura 48 mostra a declaração da classe `Adaptivity`, bem como os métodos e atributos presentes nela.

**Figura 48 - Declaração da classe `Adaptivity` responsável por gerenciar os algoritmos adaptativos**

```

1  class Adaptivity
2  {
3  public:
4      Adaptivity (double m, IntAlg *simulation, IntAlg *prediction);
5
6      // Faz a integracao temporal adaptativa
7      void Solve(double t);
8
9  private:
10     // Sugere o incremento de tempo
11     double suggest_dt(void);
12
13     //Ponteiro de estados
14     IntAlg* simulation; // simulacao real
15     IntAlg* prediction; // simulacao de predicao
16
17     double m; // define extensao do patamar de regularizacao
18     double kmn; // curvatura regularizada
19     double tmm; // tempo do proximo patamar de regularizacao
20     double tp; // tempo da simulacao de predicao
21     double per; // percentual que define o incremento de tempo inicial
22     double dtmax; // maximo incremento de tempo
23     double dtmin; // minimo incremento de tempo
24     double dtdl; // patamar de regularizacao em segundos
25     double dtini; // incremento de tempo inicial
26     double dtheta; // maior deflexacao da curva do historico de deslocamento
27 };

```

Fonte: Autor (2014)

## A.8 Modelos de Contato/Atrito Linha-Solo

O modelo de interação linha solo desenvolvido segue a abordagem do programa OrcaFlex (ORCINA, 2014), onde se considera que a força de atrito existente entre a linha e o fundo do mar nunca ultrapassa o valor de  $\mu R$ , onde  $R$  representa a força de contato e  $\mu$  o coeficiente de atrito. Nesse caso a força de contato é dada por

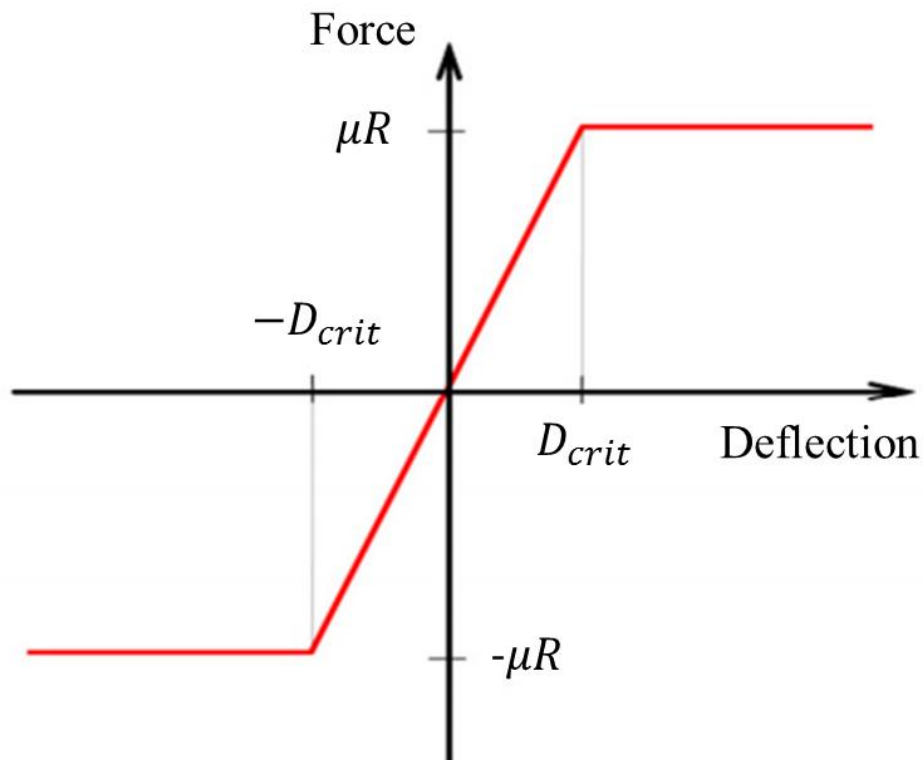
$$R = kA\beta \quad (\text{A.13})$$

sendo  $k$  a rigidez do fundo do mar,  $A$  a área de contato, que é aproximada pelo produto entre o diâmetro da linha e o comprimento que está em contato com o solo e  $\beta$  a profundidade de penetração.

Com o valor da força de contato, calculam-se as forças de atrito entre a linha e o solo, tratando o assunto de uma forma simplificada, uma vez que alguns efeitos são desprezados, como, por exemplo, o solo movido pela linha, o acúmulo de solo na frente da linha (ORCINA, 2014).

No modelo adotado, os objetos que se encontram em contato mantêm uma posição alvo e uma força de atrito é aplicada. A Figura 49 ilustra a variação da força de atrito com o afastamento do corpo em relação ao ponto alvo. Pode-se observar que a variação entre  $-\mu R$  e  $\mu R$  ocorre de forma linear no intervalo entre  $-D_{crit}$  (distância crítica) e  $D_{crit}$ .

**Figura 49 - Variação da força de atrito**



Fonte: Orcina (2014)

Tem-se que o  $D_{crit}$  é dado por

$$D_{crit} = \frac{\mu R}{k_s A} \quad (\text{A.14})$$

sendo  $k_s$  a rigidez tangencial e  $A$  a área de contato.

A partir da equação ( A.14 ), percebe-se que quanto maior  $k_s$  menor é o  $D_{crit}$ , ou seja, o intervalo em que a força de atrito apresenta comportamento linear diminui.

No caso onde os coeficientes normais e axiais são distintos o Orcaflex (ORCINA, 2014) usa um único valor de  $\mu$  dado por

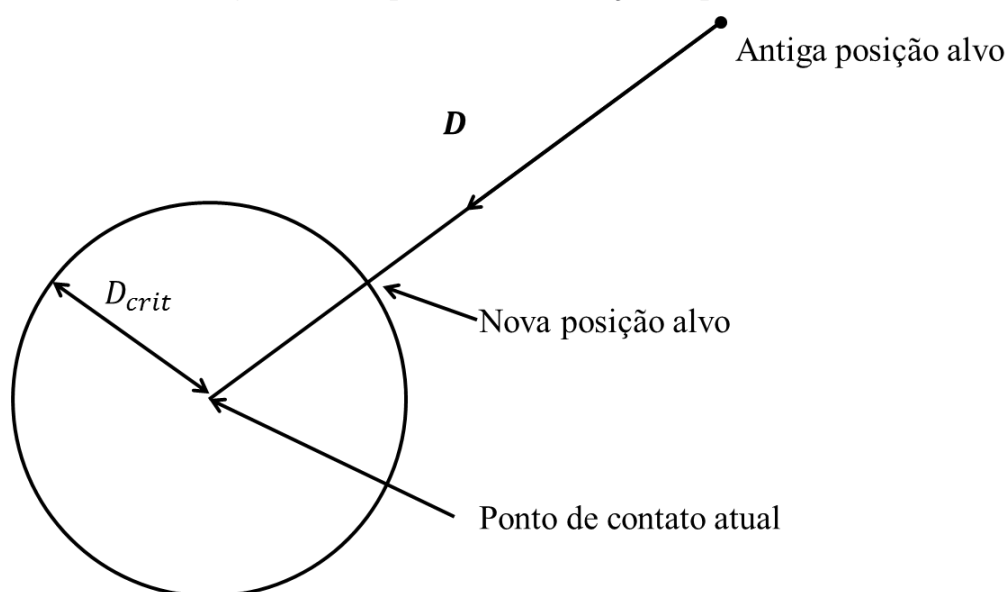
$$\mu = \|\mu_n \mathbf{D}_n + \mu_a \mathbf{D}_a\| \quad (\text{A.15})$$

sendo  $\mathbf{D}_n$  e  $\mathbf{D}_a$  os vetores das projeções, ao longo das direções normal e axial, do vetor unitário do deslocamento do ponto alvo para a direção de destino (ORCINA, 2014).

A cada intervalo de tempo durante a análise dinâmica a posição alvo é modificada conforme os seguintes itens:

- Se a linha não está em contato então a posição alvo não está definida;
- No instante em que a linha está em contato, então a posição alvo é definida no ponto de contato;
- Se a posição alvo está a uma distância maior que a crítica da posição de contato, então o ponto alvo é deslocado para uma distância  $D_{crit}$  do ponto de contato na reta definida pelo vetor  $\mathbf{D}$  (Figura 50).

**Figura 50 - Esquema da atualização do ponto alvo**



Fonte: Orcina (2014)



## A.9 Consideração de Obstáculos

Para a consideração de obstáculos, utilizou-se a abordagem do programa OrcaFlex (ORCINA, 2014) em obstáculos sólidos. Os obstáculos representam barreiras físicas ao movimento de linhas, resistem principalmente à penetração, através da aplicação de uma força de reação normal à superfície mais próxima (interna ou externa), a qual é proporcional à profundidade de penetração do objeto (linhas) no obstáculo.

Para o tratamento de situações de contato-impacto, consideram-se os nós dos elementos como as partes sujeitas a reações advindas de interações com obstáculos. Embora em uma situação real o contato-impacto possa ocorrer em região diferente, essa suposição simplifica o tratamento do problema. Dessa forma, a reação na extremidade do elemento da linha é calculada por:

$$\text{Reação} = (\text{Parcela Rigidez}) + (\text{Parcela Amortecimento}) \quad (\text{A.16})$$

A parcela da reação normal devido à rigidez, *Parcela Rigidez*, é calculada a partir da seguinte equação:

$$\text{Parcela Rigidez} = KAd \quad (\text{A.17})$$

onde  $K$  é a rigidez do obstáculo,  $d$  é a profundidade de penetração (considerando o diâmetro de contato, que é admitido como o maior diâmetro externo dos elementos conectados ao nó) e  $A$  é a área de contato, admitida como a região de influência do nó, cujo valor é dado por:

$$A = \sum (L_i D_i) / 2 \quad (\text{A.18})$$

sendo  $L_i$  o comprimento do  $i$ -ésimo elemento conectado ao nó de interesse e  $D_i$  o seu respectivo diâmetro externo.

A parcela de reação normal devido ao amortecimento, *Parcela Amortecimento*, pode ser calculada da seguinte forma:

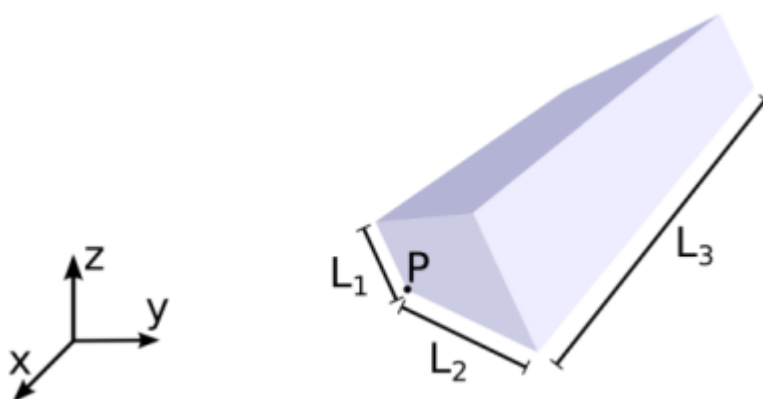
$$\text{Parcela Amortecimento} = 2\alpha(mKA)^{1/2}V_n \quad (\text{A.19})$$

sendo  $\alpha$  uma porcentagem do amortecimento crítico,  $m$  a massa concentrada no nó de interesse (considerando a influência de metade da massa de todos os elementos a ele conectados) e  $V_n$  a intensidade de velocidade do nó na direção normal ao obstáculo. O cálculo

do sentido de  $V_n$  também é fundamental, pois a contribuição do amortecimento da reação normal ao obstáculo apenas deve ser considerada quando o nó estiver penetrando no obstáculo.

Quanto às formas dos obstáculos, encontra-se implementado o obstáculo do tipo *Bloco*, que possui geometria definida a partir da informação de um ponto no bloco (origem do bloco) e dos comprimentos de suas arestas (Figura 51).

**Figura 51 - Definição da geometria do obstáculo do tipo *Bloco***

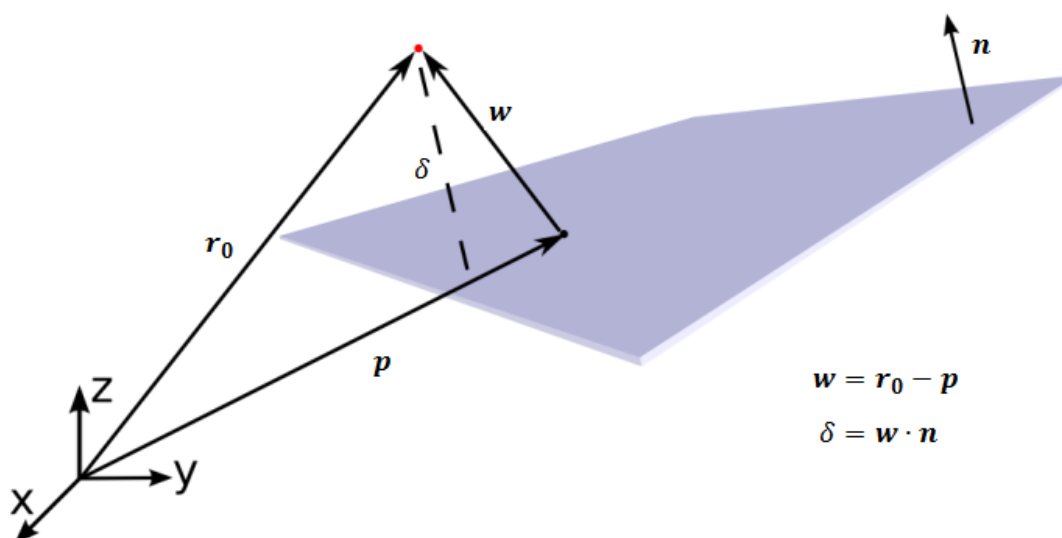


Fonte: Autor (2014)

A montagem da estratégia de checagem da ocorrência de contato adotada passa pela análise da distância de um ponto qualquer no espaço a um plano. Segundo Stewart (2009), sejam  $\mathbf{p}$  o vetor posição de um ponto pertencente ao plano,  $\mathbf{n}$  seu vetor normal e  $\mathbf{r}_0$  o vetor posição de um ponto qualquer no espaço. É possível obter a distância  $\delta$  do ponto qualquer ao plano através do valor absoluto da projeção do vetor diferença  $\mathbf{w}$  sobre o vetor normal  $\mathbf{n}$  (Figura 52), onde o vetor diferença é dado por

$$\mathbf{w} = \mathbf{r}_0 - \mathbf{p} \quad (\text{A.20})$$

**Figura 52 - Distância com sinal de um ponto qualquer no espaço a um plano**



Fonte: Autor (2014)

O destaque de Stewart (2009) sobre a necessidade de considerar o valor absoluto apoia-se, claramente, na intenção de evitar a obtenção de um valor negativo quando o produto escalar entre o vetor diferença e o vetor normal fornecer o referido sinal. Se uma distância negativa em geometria analítica pode ser um problema, para o caso da checagem de contato em questão, trata-se de uma forma rápida e eficiente de resolver o problema. A distância com sinal, conforme Figura 52, é dada por

$$\delta = w \cdot n \quad (\text{A.21})$$

que quando calculada para um determinado nó em dois passos de tempo distintos, fornece uma excelente referência em relação à ocorrência de contato entre os dois passos de tempo.

A estratégia, nesse caso, baseia-se em verificar se ocorre mudança no sinal de  $\delta$  entre dois passos de tempo consecutivos. Quando é confirmada tal alteração no sinal, é porque o nó penetrou o plano e, portanto, há ocorrência de contato.

Para os blocos, admite-se que suas faces são formadas por planos infinitos e o cálculo da distância por ( A.21 ) é realizado para todas as 6 faces do bloco. No caso do bloco, não há necessidade de verificar se ocorre mudança no sinal da distância entre dois passos de tempo. Basta verificar se o sinal da distância a todas as 6 faces (planos) é sempre negativo em um determinado passo de tempo. Se isso for verdadeiro, o nó se encontra no interior do bloco e, portanto, ocorre contato.

### A.10 Consideração do Efeito de Ondas

As ondas oceânicas apresentam um comportamento aleatório que possui variação temporal e espacial. Teorias variadas foram desenvolvidas para o estudo desse comportamento, modificando sua complexidade a depender das considerações feitas.

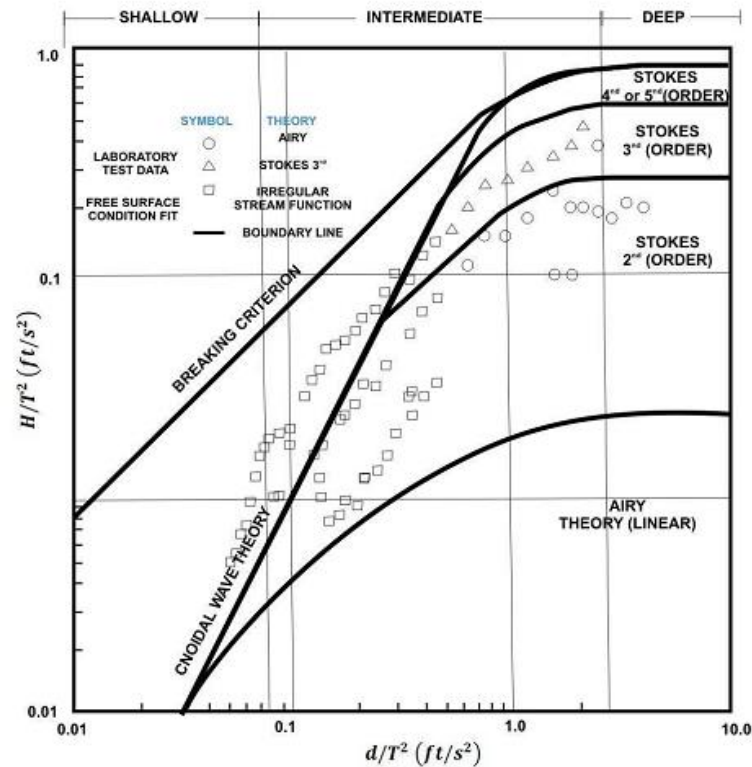
As teorias podem ser classificadas como regulares e irregulares, podendo estas serem classificadas em lineares e não lineares. Dentre as teorias existentes serão utilizadas a de Airy (onda regular e linear), Stokes 2ª Ordem (onda regular e não linear) e JONSWAP (*Joint North Sea Wave Observation Project*, onda irregular). No entanto, vale ressaltar que cada teoria é utilizada para determinado tipo de caso e que não existe teoria que satisfaça a todas as situações.

As ondas regulares (determinísticas), diferente das irregulares (aleatórias), são ondas com comportamento bem definido e constante em cada período de tempo ou espaço. De acordo com Chakrabarti (2005) existem três parâmetros que são necessários para descrever uma onda: altura da onda ( $H$ ), profundidade da lâmina de água ( $h$ ) e o período da onda ( $\Gamma$ ). Esses são utilizados para escolha da teoria (Figura 53).

Para ondas irregulares tem-se um estado de mar formado pela superposição de diferentes ondas. Em um modelo computacional, essa representação pode ser obtida através de um somatório de várias frentes de ondas com características distintas. As informações para compor cada componente de onda são extraídas de uma curva denominada espectro. Essa curva é ajustada em função de parâmetros do ambiente e registra as frequências que ocorreram naquele local.

Vários espectros foram propostos ao longo do tempo, entre os mais conhecidos destacam-se o modelo de Pierson-Moskowitz, o modelo de Bretschneider, modelo ISSC e o modelo do JONSWAP. Aborda-se em detalhes os espectros de Pierson-Moskowitz e JONSWAP.

Figura 53 - Extensão de validade para diferentes teorias de ondas



Fonte: Adaptada de CHAKRABARTI (2005)

#### A.10.1 Teoria de Airy ou Teoria de Onda Linear

Teoria de pequenas amplitudes, utilizada para ondas com altura pequena quando comparada com o comprimento de onda e com a distância do nível médio de água.

A condição dinâmica para essa teoria é dada por

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\zeta = 0 \quad (\text{A.22})$$

onde  $\phi$  representa o potencial,  $t$  o tempo,  $g$  a aceleração da gravidade e  $\zeta$  a superfície de elevação da onda.

O potencial proposto por Airy é dado da seguinte forma:

$$\phi = \frac{gH}{2\omega} \frac{\cosh[k(x_3 + h)]}{\cosh(kh)} \text{sen}(kx_1 - \omega t) \quad (\text{A.23})$$

onde  $k$  representa o número de onda e  $\omega$  a frequência angular.

Substituindo o potencial em ( A. 22 ) encontra-se a equação da superfície de elevação

$$\zeta(x_1, t) = \frac{H}{2} \cos(kx_1 - \omega t) \quad (\text{A.24})$$

O comprimento de onda,  $\lambda$ , é calculado por

$$\lambda = \Gamma (gh)^{1/2} \left[ \frac{f(\varpi)}{1 + \varpi f(\varpi)} \right]^{1/2} \quad (\text{A.25})$$

onde

$$f(\varpi) = 1 + \sum_{n=1}^4 \alpha_n \varpi^n \quad (\text{A.26})$$

e

$$\varpi = \frac{4\pi^2 h}{g \Gamma^2} \quad (\text{A.27})$$

A velocidade,  $v_i$ , é dada pela derivada do potencial na direção  $i$ , assim

$$v_1 = \frac{\pi H \cosh[k(x_3 + h)]}{\Gamma \sinh(kh)} \cos(kx_1 - \omega t) \quad (\text{A.28})$$

e

$$v_3 = \frac{\pi H \sinh[k(x_3 + h)]}{\Gamma \sinh(kh)} \sin(kx_1 - \omega t) \quad (\text{A.29})$$

Derivando a velocidade em função do tempo tem-se as expressões para aceleração

$$\dot{v}_1 = \frac{2\pi^2 H \cosh[k(x_3 + h)]}{\Gamma^2 \sinh(kh)} \sin(kx_1 - \omega t) \quad (\text{A.30})$$

e

$$\dot{v}_2 = -\frac{2\pi^2 H \cosh[k(x_3 + h)]}{\Gamma^2 \sinh(kh)} \cos(kx_1 - \omega t) \quad (\text{A.31})$$

### A.10.2 Teoria de Stokes

Segundo Carneiro (2007), as teorias não lineares conseguem obter uma representação mais próxima das ondas reais, permitindo a análise de ondas mais altas e em profundidades mais rasas.

Para Stokes o potencial é definido como uma soma de vários potenciais. A quantidade de potenciais utilizados define a ordem da teoria de Stokes que está sendo trabalhada, variando de 2 a 5. O primeiro potencial  $\phi_1$  presente na soma é o potencial de Airy ( A.23 ) e o potencial que define a teoria de 2ª ordem de Stokes é dado por

$$\phi = \phi_1 + \frac{3\pi H}{8\Gamma} \left( \frac{\pi H}{\lambda} \right) \frac{\cosh[2k(x_3 + h)]}{\sinh^4(kh)} \sin[2(kx_1 - \omega t)] \quad (\text{A.32})$$

As equações da superfície de elevação, velocidade e aceleração são obtidas de forma semelhante às obtidas para a teoria de Airy de modo que:

$$\zeta(x_1, t) = \zeta_1 + \frac{\pi H^2}{8\lambda} \frac{\cosh(kh)}{\sinh^3(kh)} [2 + \cosh(2kh)] [\cos(2(kx_1 - \omega t))] \quad (\text{A.33})$$

$$v_1 = v_{1(Airy)} + \frac{3\pi H}{4\Gamma} \left( \frac{\pi H}{\lambda} \right) \frac{\cosh[2k(x_3 + h)]}{\sinh^4(kh)} \cos[2(kx_1 - \omega t)] \quad (\text{A.34})$$

$$v_3 = v_{3(Airy)} + \frac{3\pi H}{4\Gamma} \left( \frac{\pi H}{\lambda} \right) \frac{\sinh[2k(x_3 + h)]}{\sinh^4(kh)} \sin[2(kx_1 - \omega t)] \quad (\text{A.35})$$

$$\dot{v}_1 = \dot{v}_{1(Airy)} + 3 \frac{\pi^2 H}{\Gamma^2} \left( \frac{\pi H}{\lambda} \right) \frac{\cosh[2k(x_3 + h)]}{\sinh^4(kh)} \sin[2(kx_1 - \omega t)] \quad (\text{A.36})$$

$$\dot{v}_3 = \dot{v}_{3(Airy)} + 3 \frac{\pi^2 H}{\Gamma^2} \left( \frac{\pi H}{\lambda} \right) \frac{\sinh[2k(x_3 + h)]}{\sinh^4(kh)} \cos[2(kx_1 - \omega t)] \quad (\text{A.37})$$

### A.10.3 Espectro de Pierson-Moskowitz

O espectro de Pierson-Moskowitz, segundo a DNV-RP-C205 (2007), é descrito por

$$S_{PM}(\omega) = \frac{5}{16} H_s^2 \omega_p^4 \omega^{-5} e^{-\frac{5}{4} \left( \frac{\omega}{\omega_p} \right)^{-4}} \quad (\text{A.38})$$

onde  $H_s$  representa a altura significativa dos componentes de onda e  $\omega_p$  é definido como a frequência angular de pico do espectro e pode ser calculada por

$$\omega_p = \frac{2\pi}{\Gamma_p} \quad (\text{A.39})$$

onde  $\Gamma_p$  representa o período de pico do espectro

A expressão ( A.38 ) fornece a densidade de energia  $S_{PM}$  associada à frequência  $\omega$ .

#### A.10.4 Espectro de JONSWAP

O espectro de JONSWAP é baseado no espectro de Pierson-Moskowitz e descrito pela DNV-RP-C205 (2007) como

$$S_J(\omega) = A_\gamma S_{PM}(\omega) \gamma^{e^{-0,5 \left( \frac{\omega - \omega_p}{\sigma \omega_p} \right)^2}} \quad (\text{A.40})$$

onde  $S_{PM}(\omega)$  representa o espectro de Pierson-Moskowitz,  $A_\gamma$ , definido em função do parâmetro de forma  $\gamma$  por

$$A_\gamma = 1 - 0,287 \ln(\gamma) \quad (\text{A.41})$$

O parâmetro de desvio padrão  $\sigma$  da equação ( A. 40 ) pode ser obtido por

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_a = 0,07 & \text{para } \omega \leq \omega_p \\ \sigma_b = 0,09 & \text{para } \omega > \omega_p \end{cases} \quad (\text{A.42})$$

Como descrito pela DNV-RP-C205 (2007), espera-se que no modelo de JONSWAP os parâmetros altura significativa e período de pico satisfaçam à relação

$$3,6 < \frac{\Gamma_p}{\sqrt{H_s}} < 5,0 \quad (\text{A.43})$$



### A.10.5 Forças Hidrodinâmicas

As expressões que descrevem os esforços gerados pelas correntes marítimas e pelas ondas apresentam grande complexidade. Várias formulações foram propostas para o cálculo dessas forças hidrodinâmicas, em geral são considerados os efeitos de ondas e corrente separadamente. As formulações podem ser agrupadas em três classes principais, segundo Chakrabarti (2005): formulação de Froude-Krylov, modelo de difração/radiação e formulação de Morison.

Um dos parâmetros utilizados na escolha da formulação, ou classe, é o índice de esbeltez que representa a razão entre o comprimento de onda e a dimensão do corpo perpendicular ao fluxo.

Dentre as formulações existentes será utilizada a formulação de Morison devido às características dos corpos analisados. A força calculada por essa expressão é composta por duas parcelas, uma de arrasto e outra inercial, a força também pode ser decomposta respectivamente nas direções normal e tangencial como

$$f_n = \frac{1}{2} \rho_w C_{dn} D_h |v_n - r_n| (v_n - r_n) + \rho_w \frac{\pi D_b^2}{4} (C_{an} + 1) \dot{v}_n - \rho_w \frac{\pi D_b^2}{4} C_{an} \dot{r}_n \quad (\text{A.44})$$

$$f_t = \frac{1}{2} \rho_w C_{dt} D_h |v_t - r_t| (v_t - r_t) + \rho_w \frac{\pi D_b^2}{4} (C_{at} + 1) \dot{v}_t - \rho_w \frac{\pi D_b^2}{4} C_{at} \dot{r}_t \quad (\text{A.45})$$

sendo  $\rho_w$  a densidade da água,  $D_b$  o diâmetro equivalente,  $D_h$  o diâmetro hidrodinâmico,  $v_n$  a velocidade do fluido na direção normal,  $\dot{v}_n$  a aceleração do fluido na direção normal,  $r_n$  a velocidade da estrutura na direção normal,  $\dot{r}_n$  a aceleração da estrutura na direção normal,  $C_{dn}$  o coeficiente de arrasto na direção normal,  $C_{an}$  o coeficiente de massa adicional na direção normal,  $v_t$  a velocidade do fluido na direção tangencial,  $\dot{v}_t$  a aceleração do fluido na direção tangencial,  $r_t$  a velocidade da estrutura na direção tangencial,  $\dot{r}_t$  a aceleração da estrutura na direção tangencial,  $C_{dt}$  o coeficiente de arrasto na direção tangencial,  $C_{at}$  o coeficiente de massa adicional na direção tangencial.

### A.10.6 Implementação Computacional

O cálculo da influência da corrente marítima na composição da força já existe no DOOLINES, dessa forma implementaram-se algumas classes e métodos para a incorporação do cálculo da força gerada pela presença de ondas marítimas.

Consideraram-se ondas regulares e irregulares no DOOLINES. Dentre as formulações para ondas regulares, foram consideradas Airy e Stokes de 2ª ordem e para ondas irregulares Pierson-Moskowitz e JONSWAP. Para isso foram criadas as classes: `Fluid`, `Wave`, `Airy`, `Stokes`, `Spectrum`, `PiersonMoskowitz` e `JONSWAP` e modificadas as classes `Model`, `GeometryModel` e `Read`, já existentes, para o recebimento dos parâmetros de onda.

A classe `Fluid` é responsável pelo cálculo das forças geradas pela corrente marítima e pela onda. É utilizada a formulação de Morison para esse cálculo. No cálculo da parcela de arrasto, a velocidade considerada é a soma das velocidades de onda e corrente. Já no cálculo da parcela inercial, uma parte é calculada com a aceleração da onda e outra com massa adicional.

A classe `Wave` é responsável por criar uma instância de onda, podendo ser definida como de Airy ou Stokes. Nessa classe estão implementados os cálculos do comprimento de onda e da velocidade e aceleração pela teoria de Airy.

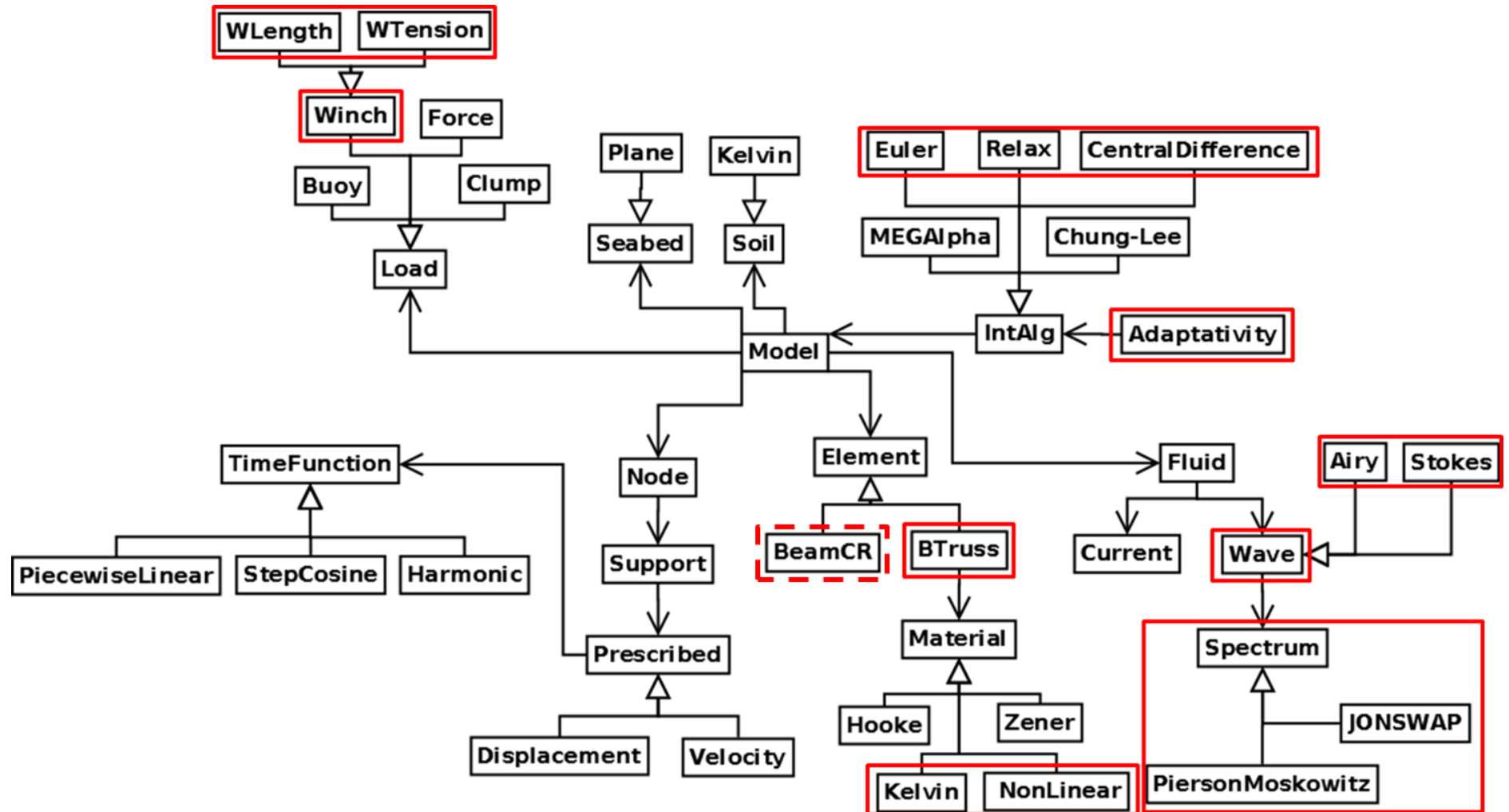
Na classe `Stokes` estão implementados os cálculos da velocidade e aceleração pela teoria de Stokes de 2ª ordem. A parcela de Airy, presente nas expressões de velocidade e aceleração, é calculada na classe `Wave`.

Já para as ondas irregulares, a classe `Spectrum` é uma classe abstrata, sendo utilizada para criar métodos que podem ser utilizados por suas classes derivadas `PiersonMoskowitz` e `JONSWAP`. Estas são utilizadas para criação dos espectros de onda de Pierson-Moskowitz e JONSWAP, respectivamente, e calcular densidade de energia, sendo os cálculos da força feitos pela classe `Wave` a partir da teoria de Airy.

### A.11 Diagrama de Classes UML

A composição atual de classes do DOOLINES pode ser vista na Figura 54, onde estão destacadas as modificações supracitadas. Também se encontra destacado em tracejado a contribuição desse trabalho.

Figura 54 - Diagrama de UML atual do DOOLINES



Fonte: Autor (2014)

## APÊNDICE B – ALGORITMO DE SPURRIER

O algoritmo de Spurrier (1978) é utilizado para calcular as rotações a partir de uma matriz de rotação. Sendo  $\mathbf{R}_\theta$  a matriz da qual se deseja calcular as rotações, seguem-se os seguintes passos:

$$\text{tr}(\mathbf{R}_\theta) = R_{11} + R_{22} + R_{33} \quad (\text{B. 1})$$

$$m = \max[\text{tr}(\mathbf{R}_\theta), R_{11}, R_{22}, R_{33}] \quad (\text{B. 2})$$

$$n = \sqrt{1 + 2m - \text{tr}(\mathbf{R}_\theta)} \quad (\text{B. 3})$$

se  $m = \text{tr}(\mathbf{R}_\theta)$

$$q = \frac{n}{2} \quad \mathbf{q} = \frac{1}{2n} [R_{32} - R_{23} \quad R_{13} - R_{31} \quad R_{21} - R_{12}]^T \quad (\text{B. 4})$$

se  $m = R_{11}$

$$q = \frac{1}{2n} (R_{32} - R_{23}) \quad \mathbf{q} = \frac{1}{2n} [n^2 \quad R_{21} + R_{12} \quad R_{31} + R_{13}]^T \quad (\text{B. 5})$$

se  $m = R_{22}$

$$q = \frac{1}{2n} (R_{13} - R_{31}) \quad \mathbf{q} = \frac{1}{2n} [R_{12} + R_{21} \quad n^2 \quad R_{32} + R_{23}]^T \quad (\text{B. 6})$$

se  $m = R_{33}$

$$q = \frac{1}{2n} (R_{21} - R_{12}) \quad \mathbf{q} = \frac{1}{2n} [R_{13} + R_{31} \quad R_{23} + R_{32} \quad n^2]^T \quad (\text{B. 7})$$

Obtêm-se, então, o escalar  $q$  e o vetor  $\mathbf{q}$  empregados no cálculo do vetor  $\mathbf{w}$ , descrito por Crisfield (1997) como

$$\mathbf{w} = 2 \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{e} = \frac{2\mathbf{q}}{q} \quad (\text{B. 8})$$

que define o pseudovetor de rotação através das seguintes expressões:

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$$

$$\text{se } \|\mathbf{w}\| = 0$$

(B.9)

$$\boldsymbol{\theta} = 2 \tan^{-1} \left( \frac{\|\mathbf{w}\|}{2} \right) \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}$$

$$\text{se } \|\mathbf{w}\| \neq 0$$

(B.10)