UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CENTRO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

DAVID ANDERSON CARDOSO DANTAS

ABORDAGEM MICROMECÂNICA DA RESISTÊNCIA DE MEIOS POROSOS

MACEIÓ
2013

DAVID ANDERSON CARDOSO DANTAS

ABORDAGEM MICROMECÂNICA DA RESISTÊNCIA DE MEIOS POROSOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Área de concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Severino P. C. Marques

MACEIÓ
2013

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Fabiana Camargo dos Santos

D192a Dantas, David Anderson Cardoso.
Abordagem micromecânica da resistência de meios porosos / David Anderson Cardoso Dantas. -- 2013.
73 f. : il.

Orientador: Severino P. C. Marques.
Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil : Estruturas) – Universidade Federal de Alagoas. Centro de Tecnologia. Maceió, 2013.

Bibliografia: f. 68-73.

1. Micromecânica. 2. Elasticidade não linear. 3. Materiais porosos. 4. Deformação efetiva. 5. Software ABAQUS. I. Título.

CDU: 624.044:624.121

Universidade Federal de Alagoas – UFAL
Unidade Acadêmica Centro de Tecnologia – CTEC
Programa de Pós-Graduação de Engenharia Civil – PPGEC

ABORDAGEM MICROMECÂNICA DA RESISTÊNCIA DE MEIOS POROSOS

DAVID ANDERSON CARDOSO DANTAS

Dissertação submetida à banca examinadora do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas e aprovada no dia 28 do mês de março do ano de 2013.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Severino Pereira Cavalcanti Marques
Orientador – CTEC/UFAL

Prof. Dr. Eduardo Nobre Lages
CTEC/UFAL

Prof. Dr. José Júlio de Cerqueira Pituba
UFG

Campus A. C. Simões, Av. Lourival de Melo Mota, S/N
Tabuleiro do Martins – CEP 57072-970 – Maceió – Alagoas
Tel/Fax: (82) 3214-1863
E-mail: ppgec@ctec.ufal.br
Homepage: www.ctec.ufal.br/posgraduacao/ppgec

AGRADECIMENTOS

À minha família, minha mãe, meu irmão, tias, tios, primos, avós; pelo apoio incondicional e paciência sem igual, sempre presentes em todos os momentos.

À minha esposa Adriana, por toda a paciência e apoio que foram fundamentais para que eu conseguisse vencer mais essa batalha. Te amo!

Ao professor Severino Pereira Cavalcante Marques, pela orientação e atenção dispensada neste trabalho. Pela oportunidade do intercâmbio na UFRGS, a qual trouxe uma bagagem importante para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas e do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, pelos conhecimentos transmitidos ao longo do mestrado.

Aos amigos do LCCV, pelos momentos de descontração e de aprendizagem mútuo que tivemos durante todo o mestrado.

À CAPES e ao CNPq, pela concessão da bolsa de estudos para o intercâmbio na UFRGS.

Aos amigos Reberth, Joseanderson, Giancarlo, Ricardo, Catarina, Michele e Diogo, por todos os momentos de lazer, de descontração e de sorrisos que tivemos durante essa jornada.

Aos amigos da UFRGS, Cláudia, Paulo, Paula, Vitor, Carla, Débora e Jorge, por todos os bons momentos que vivemos durante minha estadia em Porto Alegre.

Ao meu amigo Reberth. Depois de tantos anos de luta e desafios é triste não vê-lo concluindo junto comigo esta importante etapa de nossa vida acadêmica. Tenho certeza que o verei vencendo esta etapa logo em breve.

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo sobre as propriedades efetivas de sólidos porosos com matriz elástica não linear e elastoplástica. Na avaliação das propriedades mecânicas macroscópicas empregam-se modelos micromecânicos lineares em conjunto com o conceito de deformação efetiva correspondente ao método secante modificado. Os poros são admitidos como distribuídos randomicamente na matriz, a qual apresenta uma lei constitutiva caracterizada por um comportamento linear em dilatação e não linear em cisalhamento. Os resultados obtidos são confrontados com aqueles fornecidos pelo programa comercial de elementos finitos ABAQUS, admitindo-se que os poros exibem geometrias esféricas para sólidos tridimensionais. A geração dos resultados numéricos oriundos do programa ABAQUS foi viabilizada mediante a implementação de uma sub-rotina externa que incorpora a relação constitutiva não linear considerada nas análises.

Palavras-chave: Micromecânica. Elasticidade Não Linear. Meios Porosos. Deformação Efetiva.

ABSTRACT

This works presents a study about effective properties of porous solids with nonlinear elastic and elastoplastic matrix. For macroscopic mechanics properties evaluation, micromechanics models are used with effective strain concept relative to the modified second method. The porous are assumed as randomly distributed in the matrix, which presents a constitutive law with linear behavior in dilatation and nonlinear in shear. The results are compared with those provided by finite element methods program ABAQUS, assuming porous with spherical geometry for three dimensional solids. Numerical results from ABAQUS were obtained by an implementation of an external subroutine which incorporates at analysis the nonlinear constitutive law.

Keywords: Micromechanics. Nonlinear Elasticity. Elastoplasticity. Porous Media. Effective Strain.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos romanos

$\mathbb{A}_I$	Tensor de concentração de tensão da fase inclusão
$\mathbb{A}_m$	Tensor de concentração de tensão da fase matriz
$\mathbb{A}_i^{dil}$	Tensor de concentração de tensão da fase inclusão (modelo de Eshelby)
$\mathbb{A}_i^{mt}$	Tensor de concentração de tensão da fase inclusão (modelo de Mori-Tanaka)
$\mathbb{A}_i^{sc}$	Tensor de concentração de tensão da fase inclusão (modelo Auto-Consistente)
$\mathbb{B}_I$	Tensor de concentração de deformação da fase inclusão
$\mathbb{B}_m$	Tensor de concentração de deformação da fase matriz
C_i^{nl}	Tensor de rigidez elástico não linear da fase inclusão
C_m^{nl}	Tensor de rigidez elástico não linear da fase matriz
$\overline{C}_i^{nl}$	Tensor de rigidez elástico não linear efetivo da fase inclusão
$\overline{C}_m^{nl}$	Tensor de rigidez elástico não linear efetivo da fase matriz
$\mathbb{C}$	Tensor de rigidez do material
$\mathbb{C}_i$	Tensor de rigidez da inclusão
$\mathbb{C}_m$	Tensor de rigidez da matriz
$\mathbb{C}_s$	Tensor de rigidez secante
$\overline{\mathbb{C}}$	Tensor de rigidez efetivo do material compósito
$\mathbb{C}^{hom}$	Tensor de rigidez efetivo do compósito linear
$\mathbb{D}$	Tensor de flexibilidade do material
$\mathbb{D}_i$	Tensor de flexibilidade da inclusão
$\mathbb{D}_m$	Tensor de flexibilidade da matriz
$\overline{\mathbb{D}}$	Tensor de flexibilidade efetivo do material compósito
$\boldsymbol{e}$	Tensor de deformação desviadora
$\boldsymbol{E}$	Tensor de deformação macroscópico
f_i	Fração volumétrica das inclusões
f_m	Fração volumétrica da matriz
h	Limite de resistência para o estado de tração hidrostática

$\mathbb{I}$	Tensor identidade de quarta ordem
k	Limite de resistência para o estado de cisalhamento puro
$\boldsymbol{s}$	Tensor de tensão desviadora
$\mathbb{S}$	Tensor de Eshelby
T	Coeficiente de atrito
V	Volume representativo do material composto
V_i	Volume ocupado pela inclusão no material composto
V_m	Volume ocupado pela matriz no material composto
$\underline{x}$	Vetor posição

Símbolos gregos

ε_{eq}	Deformação equivalente de von Mises
ε_i	Deformação uniforme na inclusão
ε_m	Primeiro invariante do tensor de deformação
ε_t	Deformação uniforme (eingenstrain)
ε^{fic}	Deformação na inclusão fictícia
ε^{real}	Deformação real
$\underline{\underline{\varepsilon}}$	Campo de deformações locais
$\langle\varepsilon\rangle$	Deformação média do material composto
μ_s	Módulo de cisalhamento secante
$\boldsymbol{\Sigma}$	Tensor de tensão macroscópico
σ_{eq}	Tensão equivalente de von Mises
σ^{fic}	Tensão na inclusão fictícia
σ^{real}	Tensão real
$\langle\sigma\rangle_m$	Tensor de tensões média na matriz
$\langle\sigma\rangle_i$	Tensor de tensões média na inclusão
$\langle\varepsilon\rangle_m$	Tensor de deformações média na matriz
$\langle\varepsilon\rangle_i$	Tensor de deformações média na inclusão

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 Relevância e Estado da Arte

A micromecânica constitui uma das mais recentes linhas de pesquisa usadas na modelagem do comportamento de materiais heterogêneos, porosos e celulares, e tem recebido grande impulso graças à convicção cada vez mais crescente do meio científico da importância fundamental da microestrutura na definição das características comportamentais dos materiais. As aplicações desse tipo de modelagem são bem abrangentes e em diversas áreas do conhecimento, tais como: Geomecânica, Mecânica dos Solos, Hidrologia, dentre outras.

A micromecânica é uma das ferramentas relevantes para o desenvolvimento de novas tecnologias que têm se destacado no início deste século. Dentre essas tecnologias podem ser incluídas a nanotecnologia, a biotecnologia, a microeletrônica, etc. Além disso, à micromecânica podem ser atribuídas melhorias significativas na área de engenharia, principalmente no que diz respeito a projetos de novos materiais.

No âmbito do desenvolvimento de novos materiais, a teoria micromecânica desempenha um papel importante, permitindo, inclusive, a obtenção de propriedades mecânicas e físicas desejadas. A micromecânica proporciona uma melhor compreensão da influência das propriedades das fases constituintes sobre o comportamento macroscópico do material.

As técnicas de micromecânica utilizadas para estimativa das propriedades efetivas dos materiais compósitos são amplamente utilizadas e têm apresentado bons resultados. Dentre essas técnicas, destacam-se os modelos micromecânicos de meios efetivos, para os quais o material heterogêneo é substituído por um material homogêneo efetivo equivalente.

A micromecânica linear é hoje largamente aplicada à mecânica das rochas com o objetivo de caracterizar o comportamento global das mesmas em termos das propriedades mecânicas da fase sólida que constitui a matriz do material e de informações sobre a geometria e distribuição dos poros. No caso de microestruturas periódicas, esquemas de média apropriados têm sido desenvolvidos por Auriault e Sanchez-Palencia (1977) para materiais poroelásticos (DORMIEUX *et al.*, 2002).

Duas grandes abordagens teóricas têm sido desenvolvidas para resolver o problema de estimar propriedades elásticas a partir dos materiais constituintes e da microestrutura:

(1) teoria dos meios efetivos, que assume poros e fissuras que podem estar ou não conectadas e (2) teoria poroelástica, a qual assume que porções significativas dos poros e das fissuras são conectadas (BERRYMAN *et al.*, 2002). Para a primeira, contribuições importantes podem ser atribuídas aos limites clássicos de Voigt (1928), Reuss (1929) e Hashin e Shtrikman (1961, 1962), bem como as estimativas obtidas do modelo auto-consistente (BUDIANSKY, 1965; Hill,1965; Berryman, 1980a, b), além do esquema diferencial (CLEARY *et al.*, 1980; NORRIS, 1985; AVELLANEDA, 1987) e Mori-Tanaka (MORI e TANAKA, 1973; BENVENISTE, 1987). Para a segunda abordagem, Biot (1941) e Gassmann (1951) são bastante relevantes com o desenvolvimento de equações constitutivas poroelásticas.

No entanto, no que diz respeito à modelagem do comportamento não linear de materiais compósitos, a aplicação de técnicas da micromecânica é relativamente recente e diversas questões ainda permanecem em aberto (ZAOUI, 2002), em particular, a determinação das propriedades de resistência de materiais randomicamente heterogêneos. As principais contribuições nessa área têm sido dedicadas para o caso de constituintes puramente coesivos que atendem ao critério de resistência de von Mises (veja, por exemplo, LEE e MEAR (1992); SUQUET (1997); JIANG *et al.* (2002)). Uma estratégia empregada para casos de material elastoplástico consiste em simular a resposta local do comportamento perfeitamente plástico, para um processo de carregamento monotônico, através de um comportamento elástico não linear fictício (MAGHOUS *et al.*, 2007).

Ainda nesse contexto, poucos são os trabalhos desenvolvidos relacionados a materiais que apresentam propriedades de atrito, que são comuns em geomateriais, como concreto, rochas e solos. Lemarchand *et al.* (2002) apresentam uma abordagem baseada em uma representação elástica não linear fictícia de um material com critério de resistência de Drucker-Prager com uma regra de fluxo plástico descrito por um potencial de von Mises. Barthélémy e Dormieux (2004) propõem uma abordagem teórica da resistência de materiais compósitos, onde a determinação da superfície de resistência utiliza um esquema de homogeneização não linear baseado no método secante modificado. Trillat *et al.* (2006) apresentam um estudo do critério de resistência para materiais porosos de Drucker-Prager com cavidades esféricas. Pasquali (2008) referencia trabalhos desenvolvidos recentemente que fazem uso da combinação da teoria da homogeneização com a teoria da análise limite para a obtenção do domínio de resistência macroscópico de materiais compósitos a partir do conhecimento das resistências e do comportamento dos materiais constituintes (ver FRANCESCATO e PASTOR (1997) e de BUHAN *et al.* (1998)).

Em situações mais complexas, a utilização de procedimentos numéricos, como o Método dos Elementos Finitos, juntamente com teoremas disponíveis na literatura, torna-se ferramenta importante para a determinação de cargas limites e do domínio de resistência macroscópico de materiais compósitos. Porém, o uso desse tipo de estratégia, em geral, apresenta dificuldades numéricas (ver PASQUALI (2008)), particularmente para cargas próximas ao valor de colapso.

Para meios porosos não lineares, importantes modelagens também foram realizadas em termos de equações constitutivas macroscópicas estabelecidas dentro de um framework termo-mecânico geral (BIOT, 1973; COUSSY, 1995; DORMIEUX *et al.*, 2002).

1.2 Objetivos e Metodologia

A estimativa das propriedades de resistência de materiais randomicamente heterogêneos através da aplicação de ferramentas da micromecânica é uma questão relativamente recente, principalmente no que diz respeito a materiais não lineares e que apresentam propriedades de atrito.

Uma estratégia de homogeneização de meios porosos com matriz elastoplástica consiste em modelar o comportamento elastoplástico local por um comportamento assintótico elástico não linear. Esta abordagem apresenta como principal dificuldade a variação espacial do tensor de rigidez $\mathbb{C}$ ($\mathbb{C} = \mathbb{C}(\underline{\underline{\varepsilon}}\,(\underline{x}))$), a qual é gerada pelo carregamento imposto que induz um campo de deformações locais $\underline{\underline{\varepsilon}}$ não homogêneas na matriz ($\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})$).

Uma vez que esquemas clássicos de homogeneização são formulados para compósitos com fases elásticas lineares, ou seja, com rigidez constante dentro de cada constituinte, tais modelos não podem ser diretamente aplicados para o caso em que o tensor $\mathbb{C}$ tem variação pontual. Dessa forma, a ideia é recorrer a técnicas de homogeneização baseadas no conceito de deformação efetiva constante $\underline{\underline{\varepsilon}}^{ef}$, a qual representa o campo de deformações heterogêneas $\underline{\underline{\varepsilon}}$ em cada fase, sendo dependente do carregamento macroscópico aplicado. A partir da determinação de $\underline{\underline{\varepsilon}}^{ef}$, pode-se utilizar uma aproximação para o tensor de rigidez, de tal forma que $\mathbb{C}(\underline{\underline{\varepsilon}}\,(\underline{x})) \cong \mathbb{C}(\underline{\underline{\varepsilon}}^{ef}) = \overline{\mathbb{C}}$, com $\overline{\mathbb{C}}$ constante por fase e possibilitando a aplicação de esquemas de homogeneização para compósitos elásticos lineares.

Este trabalho propõe dar continuidade a estudos iniciais realizados por Pasquali (2008), o qual buscou a determinação de domínios de resistência macroscópicos de meios porosos, para materiais regidos pelo critério de von Mises e Drucker-Prager, através da aplicação de leis elásticas não lineares. Em seus resultados, Pasquali (2008) comparou domínios de resistência analíticos obtidos através de recursos de homogeneização não linear (MAGHOUS *et al.*, 2007) com um código de elementos finitos no qual leis elásticas não lineares assintóticas foram implementadas. A investigação mostrou uma razoável concordância de resultados para matriz de von Mises e grandes diferenças no caso da matriz de Drucker-Prager no domínio de significantes tensões de compressão macroscópicas.

A introdução do conceito de deformação efetiva para representar os campos não homogêneos de deformações nas diferentes fases, juntamente com leis constitutivas não lineares assintóticas para aproximação do comportamento elastoplástico da matriz dos materiais porosos, apresenta-se como uma possível forma de modelar o comportamento resistente dos mencionados materiais compósitos.

A estratégia, aqui adotada, consiste no ajuste de expressões analíticas obtidas via micromecânica não linear para sólidos porosos em função de resultados encontrados através do uso do método dos elementos finitos. Para isto, o programa comercial de elementos finitos ABAQUS é utilizado com uma sub-rotina externa chamada UMAT, escrita em linguagem de programação FORTRAN. Sendo assim, o principal objetivo deste trabalho é a determinação de domínios de resistência macroscópica de meios porosos com diferentes níveis de porosidade e matriz constituída por material regido pelo critério de von Mises e Drucker-Prager. Os resultados obtidos através das expressões ajustadas propostas são comparados com outros encontrados através de diferentes modelos disponíveis na literatura.

2 MICROMECÂNICA DE COMPÓSITOS E MEIOS POROSOS

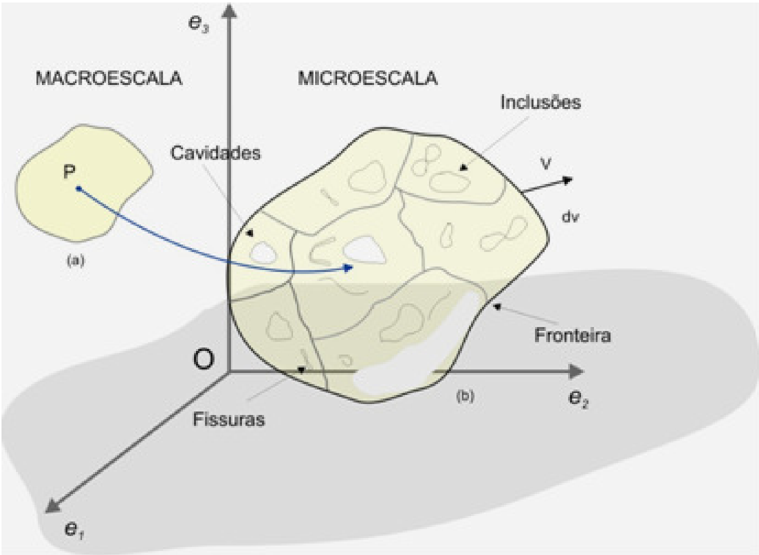
Os compósitos são concebidos pela combinação de dois ou mais materiais para produzir, como resultado, um produto composto que usualmente supera, em desempenho, seus constituintes isoladamente. O objetivo principal da micromecânica de materiais compósitos é determinar suas propriedades macroscópicas ou efetivas a partir das propriedades das fases, geometrias e de sua distribuição espacial dentro do material. Meios porosos é a classificação dada ao material compósito onde as fases sólidas envolvem vazios ou poros.

A seguir, é apresentada uma breve revisão de relevantes modelos micromecânicos formulados para materiais que apresentam comportamento constitutivo linear e não linear, tendo como foco principal compósitos com apenas duas fases.

2.1 Modelos Lineares da Micromecânica

No que diz respeito à caracterização de propriedades efetivas de materiais compósitos com comportamento constitutivo linear, as técnicas de micromecânica utilizadas para a avaliação dessas propriedades são amplamente utilizadas e, em geral, têm apresentado bons resultados. Para tanto, devido a certa complexidade da microestrutura do material heterogêneo real, aproximações têm que ser adotadas para avaliaras propriedades efetivas do material. Normalmente, essas aproximações são baseadas na hipótese que o material heterogêneo real pode ser assumido como homogêneo equivalente ou efetivo. Para isso, adota-se, em geral, o conceito do volume elementar representativo (VER) que retrata a vizinhança de um ponto material (Figura 2.1). Um VER é uma porção do material que é capaz de representar o comportamento macroscópico do material. Em outras palavras, o VER deve capturar todos os microelementos que têm influência na resposta macroscópica do contínuo. Assim, subvolumes suficientemente grandes selecionados aleatoriamente dentro da amostra são tomados para dar lugar a um material com propriedades médias que, por sua vez, correspondem às propriedades totais ou efetivas do material.

Figura 2.1 – Volume Elementar Representativo.



Fonte: Autor (2013).

Quando se trata de microestruturas periódicas, as propriedades efetivas podem ser determinadas exatamente em termos de problemas de célula unitária com condições de contorno apropriadas (SANCHEZ-PALENCIA (1980) e BENSOUSSAN *et al.* (1978) apud PONTE CASTAÑEDA (1997)). Já para microestruturas randômicas, como não é possível a determinação exata das propriedades efetivas, busca-se determinar uma série de possíveis comportamentos efetivos em termos de limites. Vários métodos de homogeneização têm sido desenvolvidos para esse propósito, incluindo os métodos de Voigt (1928) e Reuss (1929), que foram desenvolvidos para conduzir a limites dos módulos efetivos de compósitos multifásicos com frações volumétricas prescritas. Limites mais refinados foram desenvolvidos por Hashin e Shtrikman (1961, 1962) e Beran (1965) (ver WILLIS (1981, 1983) apud PONTE CASTAÑEDA (1997)). Procedimentos têm sido propostos para estimar o comportamento efetivo de compósitos com classes de microestrutura especiais.

2.1.1 Micromecânica de Meios Efetivos

Os modelos de campos médios admitem que os campos de tensões e deformações em cada fase do material compósito podem ser representados por suas médias volumétricas, $\langle\sigma\rangle_m$ e $\langle\varepsilon\rangle_m$ para a matriz e $\langle\sigma\rangle_i$ e $\langle\varepsilon\rangle_i$ para a inclusão. Sendo V_mo volume ocupado pela matriz no material composto e V_i o volume ocupado pelas inclusões, as médias volumétricas podem ser calculadas como,

$$\langle\sigma\rangle_m = \frac{1}{V_m}\int_{V_m} \sigma_m(x)\, dV \qquad \langle\varepsilon\rangle_m = \frac{1}{V_m}\int_{V_m} \varepsilon_m(x)\, dV$$
$$\langle\sigma\rangle_i = \frac{1}{V_i}\int_{V_i} \sigma_i(x)\, dV \qquad \langle\varepsilon\rangle_i = \frac{1}{V_i}\int_{V_i} \varepsilon_i(x)\, dV \tag{2.1}$$

onde o volume representativo do material composto estudado é dado por $V = V_m + V_i$ e xé o vetor que indica a posição de um ponto material no interior da fase correspondente.

Para o caso em que matriz e inclusões se comportam como material elástico linear, as relações constitutivas entre tensões e deformações média em cada fase podem ser escritas como

$$\langle\sigma\rangle_m = \mathbb{C}_m\langle\varepsilon\rangle_m \qquad \langle\sigma\rangle_i = \mathbb{C}_i\langle\varepsilon\rangle_i \tag{2.2}$$

onde $\mathbb{C}_m$ e $\mathbb{C}_i$ são os tensores de rigidez elásticos da matriz e das inclusões, respectivamente.

Para obtenção das tensões e deformações médias do material composto (denominadas efetivas), $\langle\sigma\rangle$ e $\langle\varepsilon\rangle$, faz-se necessária a integração das tensões e deformações médias em cada uma das fases dentro do volume representativo. Com base nas definições de tensões e deformações médias, as seguintes expressões podem ser deduzidas para as tensões e deformações efetivas do material composto:

$$\langle\underline{\underline{\sigma}}\rangle = f_m\,\langle\underline{\underline{\sigma}}\rangle_m + f_i\,\langle\underline{\underline{\sigma}}\rangle_i \qquad \langle\underline{\underline{\varepsilon}}\rangle = f_m\,\langle\underline{\underline{\varepsilon}}\rangle_m + f_i\,\langle\underline{\underline{\varepsilon}}\rangle_i \tag{2.3}$$

onde f_m e f_i representam as frações volumétricas de cada fase, sendo essas definidas por

$$f_m = \frac{V_m}{V} \qquad f_i = \frac{V_i}{V} \tag{2.4}$$

As tensões e deformações efetivas se relacionam com as tensões e deformações médias em cada fase através dos correspondentes tensores de concentração de deformação médios ($\mathbb{A}_m$ e $\mathbb{A}_i$) e tensão ($\mathbb{B}_m$ e $\mathbb{B}_i$), como a seguir

$$\langle\sigma\rangle_m = \mathbb{B}_m\langle\sigma\rangle \qquad \langle\varepsilon\rangle_m = \mathbb{A}_m\langle\varepsilon\rangle$$
$$\langle\sigma\rangle_i = \mathbb{B}_i\langle\sigma\rangle \qquad \langle\varepsilon\rangle_i = \mathbb{A}_i\langle\varepsilon\rangle \tag{2.5}$$

onde

$$f_m\mathbb{B}_m + f_i\mathbb{B}_i = \mathbb{I} \qquad\qquad f_m\mathbb{A}_m + f_i\mathbb{A}_i = \mathbb{I} \tag{2.6}$$

sendo $\mathbb{I}$ o tensor unitário de quarta ordem. As constantes elásticas efetivas são determinadas no momento em que se conhece um dos quatro tensores de concentração. Sendo assim, de acordo com (2.2) - (2.6), têm-se

$$\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C}_m + f_i(\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m)\mathbb{A}_i \qquad\qquad \bar{\mathbb{D}} = \mathbb{D}_m + f_i(\mathbb{D}_i - \mathbb{D}_m)\mathbb{B}_i \tag{2.7}$$

onde $\bar{\mathbb{C}}$ é o tensor de rigidez elástico do compósito e $\bar{\mathbb{D}} = \bar{\mathbb{C}}^{-1}$ o correspondente tensor de flexibilidade. Na expressão (2.7), $\mathbb{D}_m = \mathbb{C}_m^{-1}$ e $\mathbb{D}_i = \mathbb{C}_i^{-1}$.

Assim, a obtenção das propriedades macroscópicas relacionadas com a rigidez do compósito elástico linear praticamente se reduz ao cálculo de um dos quatro tensores de concentração em função da microestrutura do volume representativo do material composto.

2.1.2 Modelo de Eshelby

Uma grande parte dos modelos de campo médio utilizados na micromecânica dos sólidos é baseada no trabalho de Eshelby (1957), que tratou do comportamento de uma inclusão elástica de forma elipsoidal inserida em um meio elástico e infinito.

Os resultados de Eshelby mostram que se uma inclusão elipsoidal homogênea e elástica inserida em uma matriz linear infinita é submetida a uma deformação uniforme ε_t (chamada de *eigenstrain*), estados de tensões e deformações uniformes são induzidos na inclusão. A deformação uniforme na inclusão, ε_c, se relaciona com ε_t pela expressão

$$\varepsilon_c = \mathbb{S}\varepsilon_t \tag{2.8}$$

onde $\mathbb{S}$ é o tensor de Eshelby para a inclusão elipsoidal. Além disso, a tensão na inclusão pode ser obtida através da aplicação direta da lei de Hooke:

$$\sigma_i = \mathbb{C}_m(\varepsilon_c - \varepsilon_t) = \mathbb{C}_m(\mathbb{S} - \mathbb{I})\varepsilon_t \tag{2.9}$$

O tensor de Eshelby depende apenas da geometria da inclusão e das constantes elásticas da matriz e existem expressões analíticas para seus componentes para muitos casos de interesse (elipsóides, discos, etc.).

A importância do resultado acima é que o mesmo pode ser utilizado para obter o tensor de concentração de deformação de uma inclusão elipsoidal inserida em um meio infinito de propriedades diferentes mediante a utilização do conceito da inclusão elástica equivalente. Essa estratégia consiste em substituir a inclusão real por uma fictícia de propriedades iguais às do meio, onde o conjunto inclusão/matriz se encontra submetido a uma deformação efetiva $\bar{\varepsilon}$. A inclusão fictícia sofre uma deformação livre de tensão ε_t tal que os campos de tensão e deformação de ambas as inclusões (real e fictícia) dentro da matriz sejam iguais. Dessa forma, a tensão e a deformação na inclusão fictícia são dadas por

$$\varepsilon^{fic} = \bar{\varepsilon} + \varepsilon_c \qquad \sigma^{fic} = \mathbb{C}_m(\varepsilon_c + \bar{\varepsilon} - \varepsilon_t) \tag{2.10}$$

Assim, como a tensão e a deformação real têm que ser iguais às correspondentes da inclusão fictícia, tem-se

$$\varepsilon^{real} = \bar{\varepsilon} + \varepsilon_c \qquad \sigma^{real} = \mathbb{C}_m(\varepsilon_c + \bar{\varepsilon} - \varepsilon_t) \tag{2.11}$$

O cálculo da deformação livre ε_t que será aplicada na inclusão fictícia pode ser realizado igualando as tensões das equações (2.10) e (2.11), que leva a

$$\varepsilon_t = [(\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m) + \mathbb{C}_m]^{-1}(\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m)\bar{\varepsilon} \tag{2.12}$$

Combinando as equações (2.10) e (2.12) se obtém o tensor de concentração de deformação para a inclusão, $\mathbb{A}_i^{dil}$

$$\varepsilon_i = \bar{\varepsilon} + \varepsilon_c = \bar{\varepsilon} + \mathbb{S}\varepsilon_t = [\mathbb{I} + \mathbb{S}\mathbb{C}_m^{-1}(\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m)]^{-1}\bar{\varepsilon} = \mathbb{A}_i^{dil}\bar{\varepsilon} \tag{2.13}$$

O tensor de concentração de deformação $\mathbb{A}_i^{dil}$ não considera as interações entre as diferentes partículas dentro do material compósito e pode ser usado apenas para obter as propriedades de materiais compósitos quando a fração volumétrica do reforço é pequena (na prática, inferior a 10%) (ESCUDERO, 2004).

Nessas condições, a expressão do tensor de rigidez efetivo do material compósito pode ser obtida substituindo (2.13) em (2.7)

$$\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C}_m + f_i(\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m)[\mathbb{I} + \mathbb{S}\mathbb{C}_m^{-1}(\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m)]^{-1} \tag{2.14}$$

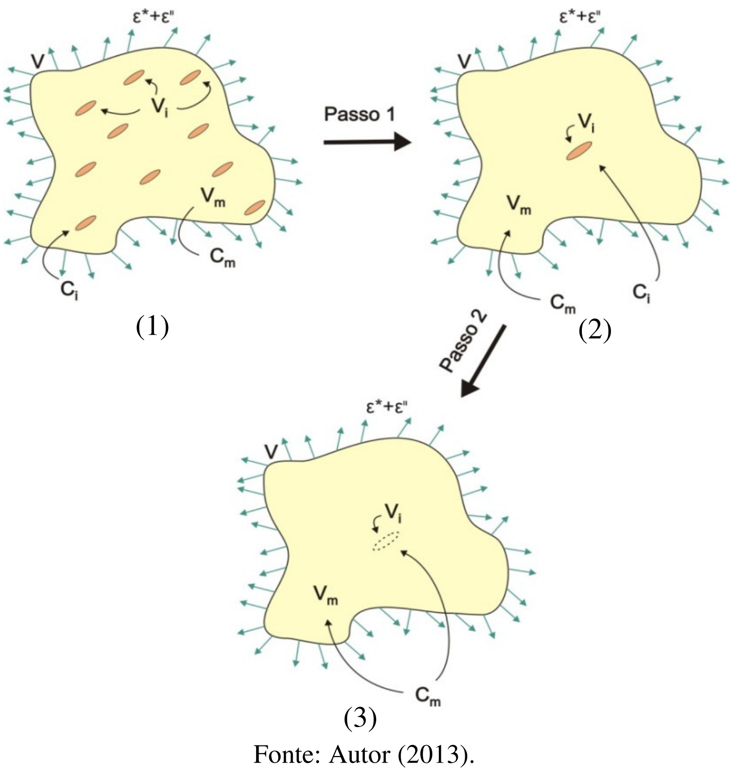
Segundo Böhm (1998), expressões analíticas para o tensor de Eshelby podem ser obtidas também para inclusões esféricas em uma matriz transversalmente isótropa (WITHERS, 1989) ou materiais com simetria cúbica (MURA, 1987), desde que os eixos materiais da matriz constituinte estejam alinhados com a orientação das inclusões não esféricas. Nos casos em que não estão disponíveis soluções analíticas, o tensor de Eshelby pode ser obtido numericamente (GAVAZZI e LAGOUDAS, 1990).

2.1.3 Modelo de Mori-Tanaka

Dentre os diversos modelos baseados no modelo de Eshelby para calcular as propriedades efetivas de compósitos com fração volumétrica de inclusões finitas, o modelo de Mori-Tanaka é, sem dúvida, um dos esquemas de homogeneização mais utilizados na literatura. Ao contrário do modelo anterior, esse modelo leva em consideração a interação entre as inclusões.

No modelo proposto por Mori e Tanaka (1973), o material heterogêneo é submetido a um estado de deformação homogêneo ε^* e a uma perturbação ε'' não uniforme resultante da interação entre as inclusões. Em uma primeira fase, inicialmente, o material em estudo é substituído pelo problema de Eshelby sendo, em uma fase posterior, realizada a homogeneização do material, como esquematizado em (Figura 2.2).

Figura 2.2 – Esquema de representação do modelo de Mori-Tanaka: (1) VER heterogêneo, (2) Aplicação do método da inclusão equivalente de Eshelby, (3) Material equivalente homogeneizado.



Fonte: Autor (2013).

Benveniste (1987) reformulou o modelo de Mori e Tanaka (1973) no contexto dos tensores de concentração de deformação. De acordo com Benveniste, o tensor de concentração de deformação $\mathbb{A}_i^{mt}$ da inclusão pode ser calculado por interpolação entre os correspondentes para o caso diluído $\mathbb{A}_i^{dil}$ e para $f_i \to 1$ ($\mathbb{A}_i \approx \mathbb{I}$). A interpolação mais simples tem a forma

$$\mathbb{A}_i^{mt} = \mathbb{A}_i^{dil}\left[(1 - f_i)\mathbb{I} + f_i\mathbb{A}_i^{dil}\right]^{-1} \tag{2.15}$$

e as propriedades elásticas efetivas são obtidas de forma direta introduzindo (2.15) em (2.7) como a seguir:

$$\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C}_m f_i + (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m)\left[\mathbb{A}_i^{dil}\left[(1 - f_i)\mathbb{I} + f_i\mathbb{A}_i^{dil}\right]^{-1}\right] \tag{2.16}$$

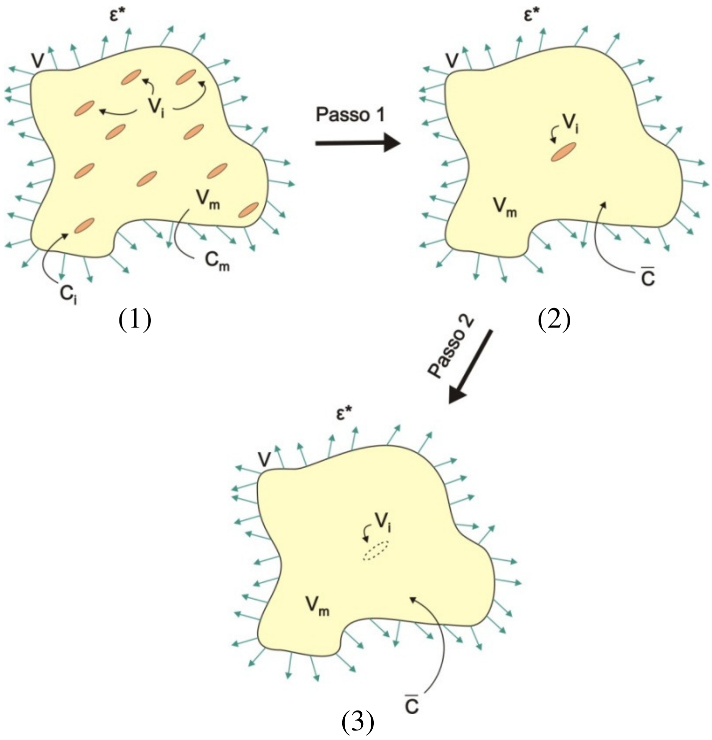
Böhm (1998) cita diferentes equações equivalentes ao modelo de Mori-Tanaka, as quais foram desenvolvidas por diversos autores para os tensores de concentração de cada fase e tensores termoelásticos efetivos de materiais heterogêneos, dentre eles têm-se Pedersen (1983); Wakashima *et al.* (1988); Taya *et al.* (1991); Pedersen e Withers (1992); Clyne e Withers (1993).

2.1.4 Modelo Auto-Consistente

Outro tipo de modelo de aproximação do comportamento termomecânico de materiais heterogêneos é o esquema auto-consistente. Para tirar proveito do conceito de inclusão equivalente, o modelo auto-consistente consiste em uma única inclusão inserida em um material efetivo cujas propriedades não são conhecidas a priori e que são, precisamente, a solução do problema. Essa constitui uma forma implícita de ter em conta a interação entre as inclusões.

De maneira similar ao modelo anterior (ver Figura 2.3), o material heterogêneo é submetido a um estado de deformação homogêneo ε^*, sendo também substituído pelo problema de Eshelby antes da realização da homogeneização do material. Porém, nesse caso, o tensor constitutivo da matriz, $\mathbb{C}_m$, é substituído pelo tensor constitutivo do meio efetivo, $\bar{\mathbb{C}}$.

Figura 2.3 – Esquema de representação do modelo auto-consistente: (1) VER heterogêneo, (2) Aplicação do método da inclusão equivalente de Eshelby, (3) Material equivalente homogeneizado.



Fonte: Autor (2013).

Dessa forma, o tensor de concentração de deformação para a inclusão ($\mathbb{A}_i^{sc}$) no modelo auto-consistente é obtido diretamente da solução diluída de Eshelby, (2.13), substituindo o tensor de rigidez da matriz, pelo correspondente ao meio efetivo, como a seguir

$$\mathbb{A}_i^{sc} = [\mathbb{I} + \mathbb{S}\bar{\mathbb{C}}^{-1}(\mathbb{C}_i - \bar{\mathbb{C}})]^{-1} \tag{2.17}$$

onde o tensor de Eshelby depende agora da forma da inclusão e das constantes elásticas do meio efetivo.Agora, para a determinação das propriedades elásticas efetivas, faz-se necessário resolver a equação não linear obtida de forma direta substituindo (2.17) em (2.7) como a seguir

$$\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C}_m + f_i(\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m)[\mathbb{I} + \mathbb{S}\bar{\mathbb{C}}^{-1}(\mathbb{C}_i - \bar{\mathbb{C}})]^{-1} \tag{2.18}$$

Escudero (2004) enfatiza a adequada aplicação deste modelo a materiais multifásicos, onde as diversas fases se encontram dispersas sem que exista uma matriz continua propriamente dita, como os sólidos policristalinos.

A partir dos teoremas variacionais é possível estabelecer limites superiores e inferiores para as propriedades do meio efetivo. Esses limites são importantes por seu valor intrínseco e como ferramentas para validar outros métodos de homogeneização. A seguir, são apresentados alguns dos principais limites utilizados na literatura.

2.1.5 Limites de Hill

Os limites de Hill (1952) são obtidos utilizando expressões clássicas para a mínima energia potencial e a mínima energia complementar em combinação com funções de tensão e deformação uniformes. O limite superior é resultante do modelo de isodeformação de Voigt (1889), sendo o limite inferior oriundo do modelo de isotensão de Reuss (1929). Em geral, o primeiro superestima a rigidez do compósito, enquanto que o segundo subestima-a. Para ambos, sempre há predição de isotropia para o material composto. Os limites de Hill são expressos como a seguir:

$$\left[f_i \mathbb{C}_i^{-1} + (1 - f_i)\mathbb{C}_m^{-1}\right]^{-1} \leq \bar{\mathbb{C}} \leq f_i \mathbb{C}_i + (1 - f_i)\mathbb{C}_m \tag{2.19}$$

Esses limites são independentes da distribuição espacial e da forma das fases. Em outras palavras, essas cotas não contêm qualquer informação sobre a microgeometria do material heterogêneo além das frações volumétricas. Embora sejam muito fáceis de calcular, esses limites são tipicamente muito largos e, por isso, têm pouco uso na prática.

2.1.6 Limites de Hashin-Shtrikman

Ao contrário dos limites de Hill, os limites desenvolvidos por Hashin e Shtrikman (1962), obtidos mediante uma formulação variacional baseada no princípio da mínima energia potencial, apresentam variação menor e, por isso, são os mais utilizados na literatura.

Quando a única informação disponível no modelo é a fração volumétrica e a distribuição isótropa do reforço, os limites de Hashin-Shtrikman são os que apresentam melhores resultados dentre os limites utilizados pela literatura. No caso de materiais porosos, apenas o limite superior de Hashin-Shtrikman pode ser obtido, o limite inferior para o módulo elástico é igual a zero.

Estes limites foram calculados para materiais bifásicos com uma microestrutura estatisticamente isótropa. Sendo assim, os limites para o módulo de elasticidade volumétrica (K) e o módulo de cisalhamento (μ) para um compósito com 2 fases isótropas são dados por

$$K_1 + \frac{f_2}{\frac{1}{K_2 - K_1} + \frac{3(1-f_2)}{3K_1 + 4\mu_1}} \leq K \leq K_2 + \frac{1-f_2}{\frac{1}{K_1 - K_2} + \frac{3f_2}{3K_2 + \mu_2}} \tag{2.20}$$

$$\mu_1 + \frac{f_2}{\frac{1}{\mu_2 - \mu_1} + \frac{6(1-f_2)(K_1 + 2\mu_1)}{5\mu_1(3K_1 + 4\mu_1)}} \leq \mu \leq \mu_2 + \frac{1-f_2}{\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} + \frac{6f_2(K_2 + 2\mu_2)}{5\mu_2(3K_2 + 4\mu_2)}} \tag{2.21}$$

A fase 2 é aquela em que $K_2 \geq K_1$ e $\mu_2 \geq \mu_1 . f_2$ corresponde a fração volumétrica da fase 2.

Böhm (1998) comenta sobre a aplicação da formulação variacional de Hashin-Shtrikman na geração de limites para arranjos de fases mais gerais. Dentre eles podem ser citados os limites de Hervé-Stolz-Zaoui (HERVÉ *et al.*, 1991) e os trabalhos de Bornert (1996) e Bornert *et al.*(1996), onde padrões de fase complexos são analisados através do emprego de métodos numéricos.

2.2 Modelos Não Lineares da Micromecânica

Apesar da disponibilidade das diversas técnicas de homogeneização que tratam de materiais compósitos com comportamento elástico linear, em muitas aplicações o comportamento realmente observado dos compósitos é principalmente não linear. Na verdade, pelo menos um dos componentes desses compósitos pode apresentar um comportamento não linear dependendo do objetivo da aplicação industrial ou nível de carga aplicada.

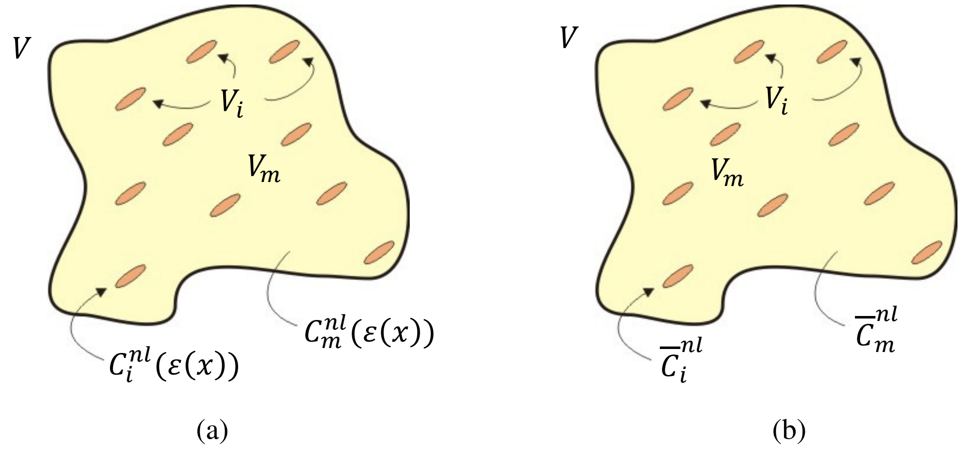
Se pelo menos uma fase do meio heterogêneo tem comportamento não linear (não linear elástico, viscoelástico, elastoplástico, elastoviscoplástico, etc.), o comportamento global, ou as propriedades efetivas do meio heterogêneo não serão elásticas lineares. Ao contrário de materiais lineares, onde o tensor de rigidez efetivo é, em geral, suficiente para caracterizar completamente a relação constitutiva, em materiais não lineares sua caracterização e modelagem são muito mais complexas, tendo como principal dificuldade a forte variação dos campos de tensões e deformações na interface dos materiais.

Em comparação com os modelos lineares, pouco se conhece sobre o comportamento efetivo de compósitos com comportamento constitutivo não linear. Ponte Castañeda (1997) apresenta um breve histórico das principais pesquisas desenvolvidas no que diz respeito a esse tipo de material compósito, como descrito a seguir. Para microestruturas periódicas, como nos modelos lineares, o problema é determinístico e as propriedades efetivas podem ser determinadas em termos de problemas de células unitárias com condições de contorno apropriadas (SUQUET, 1983 e1985).

No entanto, apesar de sua simplicidade do ponto de vista teórico, a hipótese de periodicidade apresenta diversas limitações, bem como a dificuldade em conseguir certos padrões de simetrias nos materiais, como isotropia, por exemplo. Para compósitos com microestrutura randômica, a única informação disponível até muito recentemente foi dada pelos limites de Bishop e Hill (1951) para policristais rígidos-perfeitamente plásticos, um dos quais foi proposto como uma aproximação muito antes por Taylor (1938). As estimativas de Taylor-Bishop-Hill constituem uma generalização dos limites de Voigt-Reuss-Hill para compósitos não lineares e policristais. Além disso, várias generalizações do método auto-consistente foram propostos ao longo dos anos, incluindo os procedimentos de Hill (1965) e o método secante de Hutchinson (1976) e Berveiller e Zaoui (1979), bem como resultados obtidos por Gurson (1977) para materiais porosos. Dentre outras abordagens podem ser incluídos os princípios variacionais de Ponte Castañeda (1991, 1992) e Talbot e Willis (1992) para classes gerais de compósitos não lineares, bem como os de Suquet (1993) e Olson (1994) para leis constitutivas e compósitos perfeitamente plásticos, respectivamente.

Quando se trata de homogeneização de materiais compósitos não lineares, surgem dois problemas: o comportamento não linear dos microconstituintes do compósito e a heterogeneidade intra-fase induzida por essa não linearidade (OUAAR, 2006). Na busca pela solução desses problemas, diversas abordagens foram propostas (ver, por exemplo, HILL (1965), TANDON & WENG (1988) e PONTE CASTAÑEDA (1991)) e resultaram em um conceito conhecido como comparação linear de materiais heterogêneos. O principal objetivo desse conceito é fornecer uma ferramenta que torne possível a homogeneização por procedimentos de média para compósitos com comportamento não linear. A ideia principal desse conceito consiste em substituir um VER original heterogêneo que variam no espaço e no tempo por um VER com propriedades mecânicas que variam apenas com o tempo (Figura 2.4). Em outras palavras, isso equivale a considerar o compósito não linear como um compósito que tem, a cada período de tempo, características mecânicas linearizadas.

Figura 2.4 – Conceito de comparação linear heterogênea do material: (a) VER heterogêneo original; (b) Material de referência.



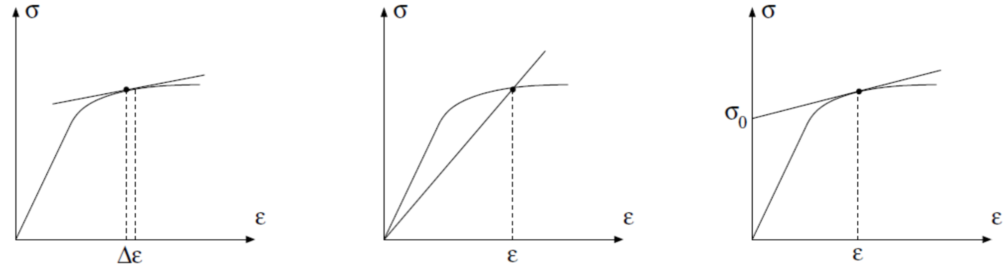
Fonte: Autor (2013).

Linearização e uniformização são processos interessantes para obtenção de processos de homogeneização para compósitos não lineares:

- A respeito do processo de linearização, várias opções podem ser feitas (ver Figura 2.5). A primeira possibilidade, proposta por Hill (1965), é uma linearização que utiliza uma formulação incremental que consiste em relacionar o incremento de tensão e deformação através de um operador tangente. Outras opções são possíveis, dentre os mais populares estão os procedimentos de linearização secante, tangente, e afins.

- Heterogeneidade da fase: cada fase que apresenta um comportamento não linear tem características (operadores de rigidez) que variam com o espaço e o tempo. Essa variação espacial dos operadores de rigidez induz uma heterogeneidade intra-fases que tornam complexo o processo de média. Uma alternativa para esse problema é assumir que, em um determinado período fixado, os operadores de rigidez são uniformes no espaço para a fase considerada.

Figura 2.5 – Esquemas de linearização.



Fonte: Autor (2013).

A ideia principal dessas formulações é baseada na linearização de leis constitutivas tanto na micro quanto na macroescala, e cada formulação difere uma da outra na maneira com que a linearização é realizada.

As principais teorias relacionadas ao estudo de compósitos não lineares, em geral, combinam dois tipos de informação para predição do comportamento efetivo desses compósitos: o comportamento individual das fases constituintes e a microestrutura do material. Na maioria desses estudos, a lei constitutiva dos constituintes pode ser escrita como

$$\sigma_m = K\, tr(\varepsilon), \qquad s_{ij} = 2\mu_s(\varepsilon_{eq})e_{ij} \tag{2.22}$$

onde σ_m e ε_m são os primeiros invariantes de tensão e deformação, $\boldsymbol{s}$ e$\boldsymbol{e}$ são as tensões e deformações desviadoras,

$$\begin{gathered} \sigma_m = \frac{1}{3}\, tr(\boldsymbol{\sigma}), \qquad \varepsilon_m = \frac{1}{3}\, tr(\boldsymbol{\varepsilon}) \\ s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m\delta_{ij}, \qquad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_m\delta_{ij}, \end{gathered} \tag{2.23}$$

onde σ_{eq} e ε_{eq} são a tensão e deformação equivalentes de von Mises

$$\sigma_{eq} = \left(\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}\right)^{1/2}, \qquad \varepsilon_{eq} = \left(\frac{2}{3}e_{ij}e_{ij}\right)^{1/2} \tag{2.24}$$

e Ké o módulo Bulk eμ_s é o módulo de cisalhamento secante.

A resposta dessas fases é então assumida como linear para carregamentos puramente hidrostático e não linear em cisalhamento. Essa hipótese é realizada com o intuito de simplificar o estudo, mas não significa uma restrição aos métodos descritos adiante.

Os métodos de campo médio descritos anteriormente podem ser estendidos de forma simples aos materiais que apresentam uma ou mais fases com comportamento elastoplástico. Existem duas formas de enfocar o problema. A primeira se apóia na teoria da plasticidade em deformações totais (modelos secantes) que simulam a deformação a partir da teoria da elasticidade não linear. Esses modelos são exatos apenas se os componentes do tensor de tensões aumentam de forma proporcional e respondem de maneira errônea na presença de descarregamentos. A outra aproximação ao problema se baseia na formulação incremental da teoria da plasticidade (modelos tangentes). Essa formulação permite estudar caminhos de carga não proporcionais e descargas parciais em uma das fases ou em todo o material composto (ESCUDERO, 2004).

A seguir é feita uma descrição a respeito dessas formas de abordagem do problema de materiais compostos que apresentam comportamento elastoplástico em pelo menos uma de suas fases.

2.2.1 Formulação Secante

As primeiras proposições a respeito de modelos secantes são atribuídas a Hutchinson (1976) que estendeu a formulação de Hill para o caso de fluência estacionária. Posteriormente, Berveiller e Zaoui (1979) *apud* Ouaar (2006) propuseram uma formulação para tipos de compósitos mais gerais fazendo uso de outros tensores secantes. Mais recentemente, outras contribuições podem ser atribuídas a Tandon e Weng (1988), Ponte Castañeda e Suquet (1998) e González *et al.* (2004).

Para a formulação secante, a lei constitutiva (2.22) pode ser escrita de forma alternativa

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}_s(\boldsymbol{\varepsilon}):\boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.25}$$

com

$$\mathbb{C}_s(\boldsymbol{\varepsilon}) = 3K\,\mathbb{J} + 2\mu_s(\varepsilon_{eq})\mathbb{K}, \tag{2.26}$$

onde $\mathbb{C}_s$ é o tensor de rigidez secante. A relação (2.27) mostra a decomposição em duas projeções $\mathbb{J}$ e $\mathbb{K}$:

$$\begin{gathered} J_{ijkh} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kh}, \quad K_{ijkh} = \frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk}\right) - J_{ijkh}, \\ \mathbb{J}:\mathbb{J} = \mathbb{J}, \qquad \mathbb{K}:\mathbb{K} = \mathbb{K}, \qquad \mathbb{K}:\mathbb{J} = \mathbb{O}, \qquad \mathbb{J} + \mathbb{K} = \mathbb{I} \end{gathered} \tag{2.27}$$

onde $\mathbb{I}$ é o tensor identidade de quarta ordem.

Sendo assim, no compósito não linear, o módulo secante $\mu_s$varia ponto a ponto na mesma fase. O compósito não linear se comporta como um compósito linear com *infinitas fases* com módulo elástico ($K^{(r)}$, $\mu_s(x)$). A variação desses módulos depende, principalmente, do tipo de comportamento não linear das fases e da deformação global que é aplicada (SUQUET, 1997). Como apresentado por Hill (1967) *apud* Suquet (1997), é possível determinar analiticamente a resposta local desses compósitos não lineares. Uma aproximação tem que ser introduzida para tornar mais fácil a construção da formulação analítica.

A aproximação para o método secante consiste em substituir os tensores secante $\mathbb{C}_s(x)$ por tensores que são constantes em cada fase:

$$\mathbb{C}_s(x) = \mathbb{C}^{(r)} \text{ na fase } r. \tag{2.28}$$

Além disso, é razoável assumir que os tensores $\mathbb{C}^{(r)}$ sejam avaliados em termos de uma deformação efetiva $\varepsilon_{eff}^{(r)}$, na forma

$$\mathbb{C}^{(r)} = \mathbb{C}_s^{(r)}\left(\varepsilon_{eff}^{(r)}\right), \tag{2.29}$$

onde $\varepsilon_{eff}^{(r)}$ é responsável por capturar as principais características do campo de deformação da fase r.

Dado os tensores $\mathbb{C}^{(r)}$, o problema acima é agora um clássico problema para um material elástico linear. Percebe-se, entretanto, que os próprios tensores dependem do campo de deformação ε (através da deformação efetiva $\varepsilon_{eff}^{(r)}$), o qual é dependente dos tensores $\mathbb{C}^{(r)}$, $r = 1 \ldots N$. O problema é então não linear, mas, ao invés de infinitos problemas não lineares para resolver (em cada ponto x), existe apenas N problemas não lineares a serem resolvidos, correspondentes às N fases do compósito em estudo.

$$\mathbb{C}^{(r)} = \mathbb{C}_s^{(r)}\left(\varepsilon_{eff}^{(r)}\right), \qquad \varepsilon_{eff}^{(r)} = função\ de\ \mathbb{C}^{(r)}, r = 1 \ldots N \tag{2.30}$$

Uma vez que esses N problemas forem resolvidos, o tensor de rigidez $\mathbb{C}^{(r)}$ e as deformações efetivas $\varepsilon_{eff}^{(r)}$ de cada fase são conhecidas,ambos não linearmente dependentes da deformação global **E**. A rigidez efetiva $\mathbb{C}^{hom}$ desse compósito linear pode então ser estimada por um esquema de predição apropriado para a microestrutura do compósito.

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^{hom}\left(f^{(r)}, \mathbb{C}^{(r)}, r = 1 \ldots N\right) \tag{2.31}$$

onde $f^{(r)}$ é a fração volumétrica de cada fase.

Finalmente, a lei constitutiva global será

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{C}^{hom}(\boldsymbol{E})\boldsymbol{E} \tag{2.32}$$

2.2.1.1 Modelo Secante Clássico

No método secante mais comumente utilizado, também conhecido como método secante clássico, a deformação efetiva na fase r é a deformação média desta fase

$$E^{(r)} = \langle \varepsilon \rangle_r. \tag{2.33}$$

A deformação média na comparação linear do material pode ser obtida em função do tensor de concentração de deformação

$$\varepsilon(x) = \mathbb{A}(x) : E^{(r)}, \qquad E^{(r)} = \mathbb{A}^{(r)} : \boldsymbol{E}, \qquad \mathbb{A}^{(r)} = \langle \mathbb{A} \rangle_r. \tag{2.34}$$

Apesar do problema não se apresentar explicitamente como não linear, fica claro que o tensor de concentração de deformação $\mathbb{A}^{(r)}$ depende das rigidezes de todas as fases, as quais dependem das deformações locais, que por sua vez são dependentes do tensor de concentração de deformação. Sendo assim, o método secante clássico envolve os seguintes passos:

Uma teoria linear fornece uma expressão para $\mathbb{C}^{hom}$ e os *N* tensores de concentração de tensão de cada fase como funções dos tensores secantes $\mathbb{C}^{(r)}$ e da microestrutura.

A resolução dos *N* problemas não lineares para os *N* tensores secantes desconhecidos $\mathbb{C}^{(r)}\left(E^{(r)}\right)$:

$$\mathbb{C}^{(r)} = \mathbb{C}_s^{(r)}\left(\varepsilon_{eff}^{(r)}\right), \qquad E^{(r)} = \mathbb{A}^{(r)} : \boldsymbol{E}, \qquad \mathbb{A}^{(r)} = \mathbb{A}^{(r)}\left(\mathbb{C}^{(r)}, r = 1 \ldots N\right) \tag{2.35}$$

Uma vez resolvido os *N* problemas não lineares da Equação (2.35), a relação constitutiva global será:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{C}^{hom}(\boldsymbol{E})\boldsymbol{E} \tag{2.36}$$

O módulo secante depende apenas da deformação equivalente $\mu_s\left(\varepsilon_{eq}\right)$ e a quantidade necessária para medir a deformação efetiva de cada fase é um escalar

$$E_{eq}^{(r)} = \left(2\mathcal{E}_{ij}^{(r)}\mathcal{E}_{ij}^{(r)}/3\right)^{1/2}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{E}}^{(r)} = \boldsymbol{E}^{(r)} - \frac{tr\,\boldsymbol{E}^{(r)}}{3}\mathbb{I} \tag{2.37}$$

O módulo secante na fase *r* é, então, dado por $\mu^{(r)} = \mu_s^{(r)}\left(E_{eq}^{(r)}\right)$.

Suquet (1997) apresenta relações constitutivas para o método secante clássico para materiais com duas fases e isotropia global. São definidas relações tanto para material com inclusão rígida quanto para material com presença de poros. No caso de materiais porosos, para os quais as propriedades efetivas do compósito são caracterizadas pelo módulo Bulk (K) e o módulo cisalhante (μ), as relações entre tensões e deformações macroscópicas são dadas por

$$\Sigma_m = K^{hom}\, tr\, \boldsymbol{E} = \frac{2(d-1)}{d}\frac{f^{(2)}}{f^{(1)}}\mu_s^{(2)}\left(\frac{E_{eq}}{1+\frac{2}{d}f^{(1)}}\right) tr\, \boldsymbol{E}$$

$$\Sigma_{eq} = 3\mu^{hom}E_{eq} = \frac{3f^{(2)}}{1+\frac{2}{d}f^{(1)}}\mu_s^{(2)}\left(\frac{E_{eq}}{1+\frac{2}{d}f^{(1)}}\right)E_{eq} \tag{2.38}$$

sendo

$$\Sigma_m = \frac{\Sigma_{ii}}{d}$$

$$\Sigma_{eq} = \left(3S_{ij}^{(r)}S_{ij}^{(r)}/2\right)^{1/2}, \qquad \boldsymbol{S}^{(r)} = \boldsymbol{\Sigma}^{(r)} - {\Sigma_m}^{(r)}\mathbb{I} \tag{2.39}$$

onde Σ_m é a tensão média macroscópica, Σ_{eq} é a tensão equivalente de von Mises, d define a dimensão do problema ($d = 2\ ou$ 3), $f^{(i)}$ é a fração volumétrica da fase (1 para a fase vazio e 2 para a fase matriz), E_{eq} é a deformação equivalente de von Mises, $\boldsymbol{E}$ é o tensor de deformação macroscópica aplicada, $\boldsymbol{\Sigma}$ é a tensão macroscópica e $\mathbb{I}$ é o tensor identidade de quarta ordem.

Mais detalhes sobre a formulação, bem como relações para materiais com outros tipos de inclusão podem também ser encontradas na referência apontada acima.

2.2.1.2 Modelo Secante Modificado

No modelo secante modificado proposto por Suquet (1995), a deformação efetiva utilizada para estimar o campo de deformação na fase *r* é relacionada ao "momento de segunda ordem" do campo de deformação nessa fase

$$\bar{\bar{\varepsilon}}_{eq}^{(r)} = \langle \varepsilon_{eq}^2 \rangle_r^{1/2} \tag{2.40}$$

Os tensores secantes podem ser calculados em cada fase com esta nova deformação efetiva

$$\mu^{(r)} = \mu_s^{(r)} \left(\bar{\bar{\varepsilon}}_{eq}^{(r)} \right), \quad \mathbb{C}^{(r)} = \mathbb{C}^{(r)}\left(K^{(r)}, \mu^{(r)}\right) \tag{2.41}$$

Segundo Suquet (1997), o método secante modificado envolve os seguintes passos:

Uma teoria linear fornece uma expressão para $\mathbb{C}^{hom}\left(\mathbb{C}^{(r)}, r = 1 \ldots N\right)$ e suas derivadas em relação aos módulos de cisalhamento de cada fase $\mu^{(r)}$.

A resolução dos *N* problemas não lineares para os *N* tensores secantes desconhecidos $\mathbb{C}^{(r)}\left(\bar{\bar{\varepsilon}}_{eq}^{(r)}\right)$:

$$\mathbb{C}^{(r)} = \mathbb{C}_s^{(r)} \left(\bar{\bar{\varepsilon}}_{eq}^{(r)} \right), \quad \bar{\bar{\varepsilon}}_{eq}^{(r)} = \left(\frac{1}{3f^{(1)}} \boldsymbol{E} : \frac{\partial \mathbb{C}^{hom}}{\partial \mu^{(r)}} (K, \mu) : \boldsymbol{E} \right)^{1/2} \tag{2.42}$$

Resolvido os *N* problemas não lineares, a relação tensão-deformação global será:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{C}^{hom}(\boldsymbol{E})\boldsymbol{E} \tag{2.43}$$

Vale ressaltar que o modelo secante modificado pode ser implementado de maneira mais fácil quando comparado ao método secante clássico, uma vez que o mesmo não requer o conhecimento dos tensores de concentração de deformação $\mathbb{A}^{(r)}$.

Suquet (1997) apresenta a lei constitutiva global para o método secante modificado para o caso de materiais porosos, como segue

$$\begin{aligned} \Sigma_m &= K^{hom}\, tr\, \boldsymbol{E} = \frac{2(d-1)}{d} \frac{f^{(2)}}{f^{(1)}} \mu_s^{(2)} \left(\bar{\bar{\varepsilon}}_{eq}^{(2)} \right) tr\, \boldsymbol{E} \\ \Sigma_{eq} &= 3\mu^{hom} E_{eq} = \frac{3f^{(2)}}{1 + \frac{2}{d} f^{(1)}} \mu_s^{(2)} \left(\bar{\bar{\varepsilon}}_{eq}^{(2)} \right) E_{eq} \end{aligned} \tag{2.44}$$

Nesse caso, a deformação efetiva da fase matriz pode ser determinada por

$$\bar{\bar{\varepsilon}}_{eq}^{(2)} = \left(\frac{2(d-1)}{3df^{(1)}} \, tr \, \underline{\underline{E}}^2 + \frac{1}{1+\frac{2}{d}f^{(1)}} E_{eq}^2 \right) \tag{2.45}$$

Mais detalhes sobre a formulação, bem como relações para materiais com outros tipos de inclusão, podem também ser encontradas em Suquet (1997).

2.2.2 Formulação Incremental

Para resolver problemas elastoplásticos não lineares, Hill (1965) propôs resolver sucessivos problemas lineares a cada incremento de carregamento. Hill investigou o comportamento elastoplástico de policristais utilizando o esquema auto-consistente baseado no uso de módulos tangenciais instantâneos na micro e nas escalas micro e macro, juntamente com um processo incremental passo a passo (OUAAR, 2006). Essa formulação incremental tem sido considerada como ponto de partida em diversas teorias de homogeneização não linear de compósitos e, atualmente, ainda é base para diversos trabalhos na área. Dessa forma, as leis constitutivas na formulação incremental são linearizadas como a seguir

$$\dot{\sigma}(x) = \mathbb{C}^{tg}(\varepsilon(x))\dot{\varepsilon}(x) \tag{2.46}$$

onde $\mathbb{C}^{tg}$ é o operador tangente instantâneo e x é a posição.

Ouaar (2006) comenta a respeito de trabalhos mais recentemente desenvolvidos com base na formulação incremental de Hill. Dentre eles podem ser citados os trabalhos de Doghri e Ouaar (2003), Doghri e Friebel (2005), onde cada referência propôs uma formulação para compósitos bifásicos elastoplásticos usando modelos constitutivos para a microescala e diferentes esquemas de homogeneização.

2.2.3 Formulação Tangente

A formulação tangente foi proposta inicialmente por Molinari *et al.* (1987) e é uma mistura do método incremental e do método secante. Essa formulação faz uso de operadores tangentes, como no caso incremental, e resolve o problema não linear diretamente (não passo a passo), como na abordagem secante. Neste método, a linearização do comportamento não linear, $\sigma = f(\varepsilon)$, é definida como

$$\sigma(x) = \mathbb{C}(x)\varepsilon(x) + \tau(x) \tag{2.47}$$

com

$$\mathbb{C}(x) = \frac{df}{d\varepsilon}\big(\varepsilon(x)\big) \tag{2.48}$$

onde τ é a ordenada σ_0 na origem, como mostrado na Figura 2.5.

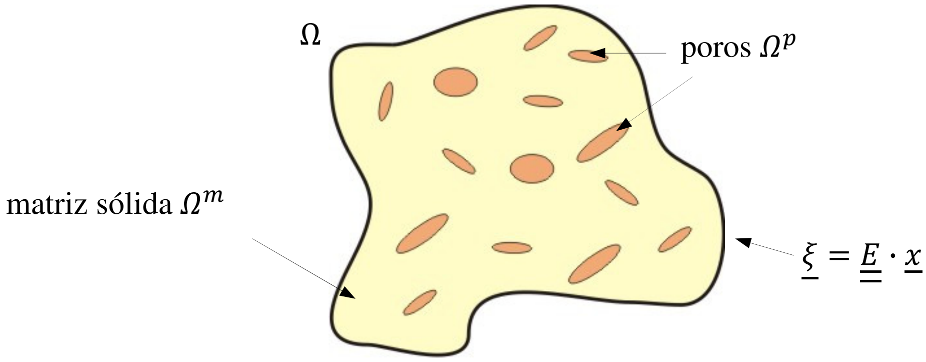
Os modelos tangentes se apóiam na formulação incremental da teoria da plasticidade e permitem estudar caminhos de carga não proporcionais e descargas parciais em algumas fases em todo o material composto. De acordo com Pettermann *et al.* (1999) *apud* Escudero (2004), as aproximações tangentes permitem simular qualquer tipo de solicitação e podem ser empregadas como equações constitutivas do material composto em um programa de elementos finitos.

3 HOMOGENEIZAÇÃO NÃO LINEAR DE MEIOS POROSOS

Neste capítulo é abordada a questão de como definir o domínio de resistência macroscópico de um material poroso baseado na resistência da fase sólida. O estudo apresentado trata-se de um material com poros vazios, para o qual é implementada uma técnica de homogeneização não linear, com matriz constituída por material regido pelo critério de von Mises e Drucker-Prager.

Considera-se o volume elementar representativo Ω (Figura 3.1) de um meio cujos poros estão aleatoriamente distribuídos.

Figura 3.1 – Volume elementar representativo.



Fonte: Autor (2013).

3.1 Resistência Microscópica da Fase Sólida

Para o material poroso em questão, a determinação de sua resistência requer inicialmente a descrição da resistência apenas da fase sólida, juntamente com informações morfológicas sobre a geometria da microestrutura. Para este fim, recorrendo a resultados clássicos da análise convexa, existem dois modos de definir a resistência da fase sólida, os quais são referidos como definição *direta* e definição *dual* (Salençon, 1983).

A primeira abordagem consiste em definir um domínio convexo G^m dos estados de tensões admissíveis (microscópico), o qual é definido através de um critério de resistência $f^m\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)$:

$$\underline{\underline{\sigma}} \in G^m \Leftrightarrow f^m\left(\underline{\underline{\sigma}}\right) \leq 0 \tag{3.1}$$

O contorno ∂G^m é caracterizado pela condição $f^m\left(\underline{\underline{\sigma}}\right) = 0$ e $\underline{\underline{\sigma}} = 0$ é assumido como estado de tensão admissível, isto é, $f^m(0) \leq 0$.

A definição *dual* do critério de resistência consiste na introdução de uma função suporte $\pi^m\left(\underline{\underline{d}}\right)$ de G^m, que é definida sobre o domínio dos tensores simétricos de segunda ordem e que é convexa em relação a $\underline{\underline{d}}$:

$$\pi^m\left(\underline{\underline{d}}\right) = sup\left(\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}, \underline{\underline{\sigma}} \in G^m\right) \tag{3.2}$$

$\pi^m\left(\underline{\underline{d}}\right)$ representa a máxima capacidade de dissipação "plástica" que o material pode resistir. O fato que a tensão zero é compatível em resistência, isto é $0 \in G^m$, implica que $\pi^m\left(\underline{\underline{d}}\right) \geq 0$. Além disso, percebe-se que:

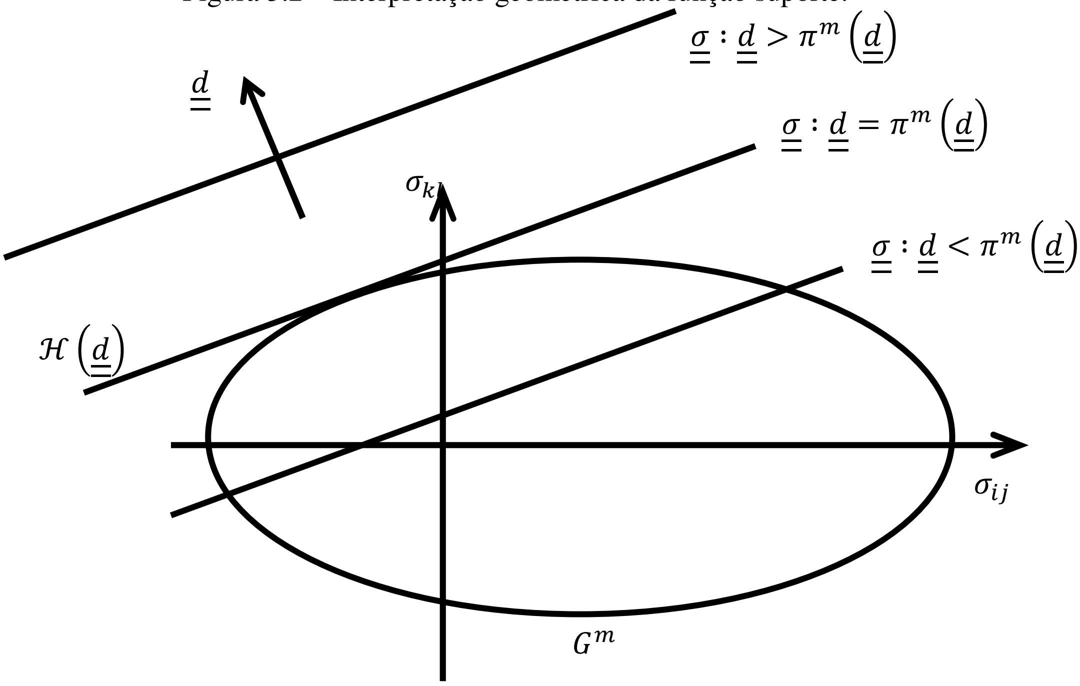
$$(\forall\, t \in \mathbb{R}^+)\pi^m\left(t\underline{\underline{d}}\right) = t\, \pi^m\left(\underline{\underline{d}}\right) \tag{3.3}$$

A definição *dual* da resistência do sólido então assume a forma

$$\underline{\underline{\sigma}} \in G^m \Leftrightarrow \left(\forall\, \underline{\underline{d}}\right)\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} \leq \pi^m\left(\underline{\underline{d}}\right) \tag{3.4}$$

Para um dado valor de $\underline{\underline{d}}$, percebe-se que a condição$\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} = \pi^m\left(\underline{\underline{d}}\right)$ define um hiperplano $\mathcal{H}\left(\underline{\underline{d}}\right)$ no espaço das tensões. Este hiperplano é tangente ao contorno ∂G^m no ponto $\underline{\underline{\sigma}}$ o qual a normal a ∂G^m é paralela a $\underline{\underline{d}}$ (ver Figura 3.2).

Figura 3.2 – Interpretação geométrica da função suporte.



Fonte: Adaptado de Salençon (1983).

Além disso, fazendo a derivada de (3.3) com respeito a $t > 0$:

$$\frac{\partial \pi^m}{\partial \underline{\underline{d}}}\left(\underline{\underline{d}}\right):\underline{\underline{d}} = \pi^m\left(\underline{\underline{d}}\right) \tag{3.5}$$

Segue-se que o estado de tensão $\underline{\underline{\sigma}} \equiv \frac{\partial \pi^m}{\partial \underline{\underline{d}}}\left(\underline{\underline{d}}\right)$ se localiza em $\mathcal{H}\left(\underline{\underline{d}}\right)$. Além disso, a convexidade da função suporte leva

$$\pi^m\left(\underline{\underline{d}}'\right) - \pi^m\left(\underline{\underline{d}}\right) \geq \frac{\partial \pi^m}{\partial \underline{\underline{d}}}\left(\underline{\underline{d}}\right):\left(\underline{\underline{d}}' - \underline{\underline{d}}\right) \tag{3.6}$$

Combinando (3.5) e (3.6) tem-se

$$\left(\forall\, \underline{\underline{d}}'\right) \pi^m\left(\underline{\underline{d}}'\right) \geq \frac{\partial \pi^m}{\partial \underline{\underline{d}}}\left(\underline{\underline{d}}\right):\underline{\underline{d}}' \tag{3.7}$$

De acordo com a definição *dual* (3.4) de G^m, a relação (3.7) assegura que $\underline{\underline{\sigma}} \equiv \frac{\partial \pi^m}{\partial \underline{\underline{d}}}\left(\underline{\underline{d}}\right)$ está localizado na intersecção de $\mathcal{H}\left(\underline{\underline{d}}\right)$ com G^m.

3.2 Estados de Tensões Macroscópicos Admissíveis

Um campo de tensões microscópico $\underline{\underline{\sigma}}$ definido no VER é estaticamente compatível com um dado estado de tensões admissíveis $\underline{\underline{\Sigma}}$ quando satisfaz:

- a condição de balanço de momento $div\, \underline{\underline{\sigma}} = 0$;
- a regra da média $\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\bar{\sigma}}}$; e
- tensões nulas na região do poro, $(\forall\, \underline{x} \in \Omega^p)\underline{\underline{\sigma}} = 0$.

Denotando G^{hom} como o domínio convexo de resistência macroscópico, ou seja, o conjunto de estado de tensões macroscópicas admissíveis $\underline{\underline{\Sigma}}$:

$$G^{hom} = \left\{\underline{\underline{\Sigma}} \mid div\, \underline{\underline{\sigma}} = 0 \; em\, \Omega,\;\; \underline{\underline{\sigma}} = 0 \; em\, \Omega^p, f^m\left(\underline{\underline{\sigma}}\right) \leq 0 \; \forall\, \underline{x} \in \Omega^m\right\} \tag{3.8}$$

sendo que o tensor macroscópico de tensões é definido como a média de $\underline{\underline{\sigma}}$ sobre o VER e a solicitação do VER definida por meio de uma deformação homogênea:

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_\Omega = \frac{1}{\Omega} \int_\Omega \underline{\underline{\sigma}} \, d\Omega \tag{3.9}$$

$$\underline{\xi}(\underline{x}) = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{x} \;\; \forall \underline{x} \in \partial\Omega \tag{3.10}$$

onde $\underline{\xi}$ é o campo de deslocamentos, $\underline{x}$ é o vetor posição (ambos na escala microscópica) e $\underline{\underline{E}}$ é a média das deformações microscópicas $\underline{\underline{\varepsilon}}$ sobre o domínio Ω

$$\underline{\underline{E}} = \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_\Omega = \frac{1}{\Omega} \int_\Omega \underline{\underline{\varepsilon}} \, d\Omega \tag{3.11}$$

A determinação de G^{hom} decorre da resolução de um problema elastoplástico de análise limite definido sobre o VER. Para uma deformação imposta $\underline{\underline{E}}$, deve-se encontrar $\underline{\underline{\sigma}}$ e $\underline{\xi}$ sujeitos às seguintes condições:

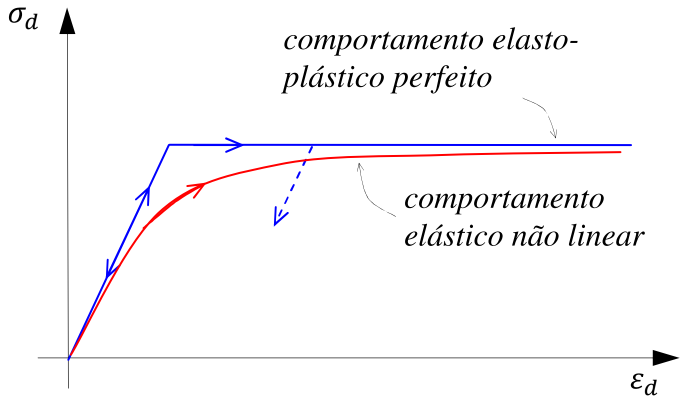
$$\begin{cases} div \, \underline{\underline{\sigma}} = 0 \\ \underline{\xi} = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{x} \\ \dot{\underline{\underline{\sigma}}} = \mathbb{C} : \left(\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} - \dot{\lambda} \dfrac{\partial g}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right) \dot{\lambda} \geq 0, \end{cases} \tag{3.12}$$

onde o multiplicador $\dot{\lambda}$ é nulo $f\left(\underline{\underline{\sigma}}\right) < 0$ ou ($f\left(\underline{\underline{\sigma}}\right) = 0$ e$\dot{f}\left(\underline{\underline{\sigma}}\right) < 0$), g é o potencial plástico e $\mathbb{C}$ é o tensor de rigidez de quarta ordem. Se $\underline{\underline{\sigma}}$ é solução em tensões do problema,$\underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_\Omega \in G^{hom}$. As tensões macroscópicas $\underline{\underline{\Sigma}}$ que representam estados de tensões limites pertencem à fronteira do domínio de resistência macroscópico ∂G^{hom}.

3.3 Princípio da Homogeneização Não Linear

Devido ao grau de complexidade da resolução direta de (3.12), em função, principalmente, do caráter aleatório da morfologia do meio poroso, emprega-se uma abordagem onde o comportamento elastoplástico local é modelado por um comportamento elástico não linear fictício, explorando a analogia entre os modelos (Figura 3.3).

Figura 3.3 – Comparação entre o comportamento elastoplástico perfeito do material e o comportamento elástico não linear.



Fonte: Autor (2013).

A dificuldade, nesse caso, reside no fato do carregamento ao qual o VER é submetido induzir um campo de deformações locais não homogêneas na matriz (ou seja, $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})$). Por consequência, o tensor de rigidez $\mathbb{C}$ varia de ponto a ponto no VER ($\mathbb{C} = \mathbb{C}(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}))$). Dessa forma, a matriz se comporta como um material heterogêneo, e não como uma fase homogênea. Esse fato impede que esquemas clássicos de homogeneização sejam diretamente aplicados, visto que os mesmos lidam apenas com compósitos com fases homogêneas.

A partir daí, a ideia é fazer uso de uma técnica de homogeneização não linear, que se baseia no conceito de deformação efetiva, a qual representa o campo de deformações heterogêneas $\underline{\underline{\varepsilon}}$ em cada fase por uma deformação efetiva uniforme $\underline{\underline{\varepsilon}}^{ef}$, que depende do carregamento macroscópico dado, a partir de (3.10), por $\underline{\underline{E}}$. A determinação de $\underline{\underline{\varepsilon}}^{ef}$ pode ser realizada por diferentes métodos, explorando-se a equivalência energética entre as escalas micro e macroscópicas (LEMARCHAND *et al* (2002) *apud* PASQUALI (2008)).

Definida a deformação efetiva uniforme, pode-se adotar uma aproximação para o tensor de rigidez, tal que $\mathbb{C}(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})) \cong \mathbb{C}(\underline{\underline{\varepsilon}}^{ef}) = \mathbb{C}^{ef}$, ou seja, $\mathbb{C}^{ef}$ é constante por fase, permitindo a aplicação de esquemas de homogeneização lineares. Dessa forma, é possível determinar o comportamento elástico do material homogeneizado:

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{C}^{hom} : \underline{\underline{E}} \qquad (3.13)$$

onde $\mathbb{C}^{hom}$ é o tensor de rigidez elástico homogeneizado e pode ser obtido através dos modelos de homogeneização lineares apresentados anteriormente, como por exemplo o de Mori-Tanaka.

3.4 Definição da Lei Elástica Não Linear

Por fim, para a determinação do domínio de resistência macroscópico do meio poroso, baseado nos estudos de Pasquali (2008), adota-se aqui uma abordagem que consiste em simular o comportamento elastoplástico perfeito do material por uma relação tensão – deformação do tipo elástico não linear, compatível com o critério de plasticidade do material constitutivo (Figura 3.3). A relação é construída de modo que $\underline{\underline{\sigma}}$ satisfaça sempre o critério de resistência do material, em todos os pontos de Ω, fornecendo uma aproximação pelo interior do domínio de carregamentos limites.

Neste trabalho são utilizadas leis elásticas não lineares propostas por Pasquali (2008) que simulam o comportamento de um material suposto elastoplástico perfeito e com matriz constituída por material regido pelo critério de von Mises e Drucker-Prager. A seguir estão as descrições das leis elásticas não lineares:

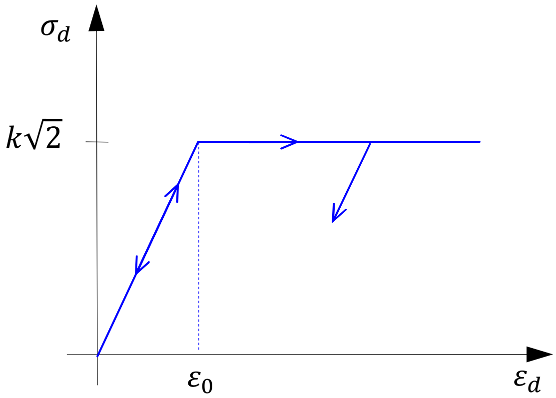
3.4.1 Matriz com Material de Von Mises

O critério de von Mises pode ser escrito como

$$f\left(\underline{\underline{\sigma}}\right) = \sigma_d - k\sqrt{2} \leq 0, \tag{3.14}$$

onde o escalar k designa o limite em cisalhamento simples do material. O comportamento do material constitutivo é representado na Figura 3.4.

Figura 3.4 – Comportamento do material.



Fonte: Autor (2013).

Como o critério (3.14) leva em consideração apenas o segundo invariante do tensor desviador de tensões, Pasquali (2008) propõe construir uma lei elástica não linear fictícia da forma

$$\underline{\underline{\sigma}} = K\varepsilon_v \underline{\underline{1}} + 2\mu(\varepsilon_d)\underline{\underline{\varepsilon_d}}\ , \tag{3.15}$$

sendo que os coeficientes K (constante) e $\mu \geq 0$ representam, respectivamente, o módulo de compressão (módulo *Bulk*) e o módulo de cisalhamento elásticos.

A estratégia adotada consiste em escolher uma lei não linear fictícia de maneira que o tensor de tensões $\underline{\underline{\sigma}}$ dado por (3.15) satisfaça em cada ponto o critério f para qualquer valor de $\underline{\underline{\varepsilon}}$:

$$\forall \underline{\underline{\varepsilon}} \quad f\left(\underline{\underline{\sigma}}\right) = \sigma_d - k\sqrt{2} \leq 0. \tag{3.16}$$

Escolhe-se então a lei elástica não linear fictícia de maneira que o tensor de tensões atinja o critério f assintoticamente, ou seja, quando a deformação torna-se grande em relação a um valor de referência.

Sendo ε_{ref} uma deformação considerada "pequena", na prática equivalente a uma fração da deformação ε_0 atingida ao fim do regime elástico, tem-se a relação

$$f\left(\underline{\underline{\sigma}} = K\varepsilon_v \underline{\underline{1}} + 2\mu(\varepsilon_d)\underline{\underline{\varepsilon_d}}\right) = 0 \quad quando \quad \varepsilon_d/\varepsilon_{ref} \gg 1. \tag{3.17}$$

Analisando (3.14), trata-se de satisfazer o limite

$$\lim_{\varepsilon_d/\varepsilon_{ref} \to \infty} 2\mu(\varepsilon_d)\underline{\underline{\varepsilon_d}} = k\sqrt{2}. \tag{3.18}$$

Pode-se, por consequência, tomar qualquer função $\mu(\varepsilon_d)$ cujo comportamento assintótico verifique

$$\mu(\varepsilon_d) \sim \frac{k\sqrt{2}}{2\varepsilon_d} quando \quad \varepsilon_d/\varepsilon_{ref} \gg 1. \tag{3.19}$$

Assim, para material com matriz de von Mises, toma-se a seguinte função $\mu(\varepsilon_d)$ para simular o comportamento assintótico:

$$\mu(\varepsilon_d) = \frac{k\sqrt{2}}{2} \frac{1/\varepsilon_{ref}}{1 + \varepsilon_d/\varepsilon_{ref}} \tag{3.20}$$

3.4.2 Matriz com Material de Drucker-Prager

O critério de Drucker-Prager é uma generalização do critério de von Mises, no qual é incluída a influência da pressão hidrostática, sendo escrito como

$$f\left(\underline{\sigma}\right) = \sqrt{J_2} + \alpha J_1 - k, \tag{3.21}$$

onde α e k são parâmetros do material, determinados a partir de resultados experimentais.

Por conveniência, tirando proveito da correspondência entre os critérios de Mohr – Coulomb, que é função dos parâmetros c (coesão) e ϕ (ângulo de atrito interno), e de Drucker – Prager em deformação plana podem ser estabelecidas as seguintes correspondências dos parâmetros α e $k$do critério (3.21) (DRUCKER e PRAGER (1952) *apud* PASQUALI (2008)):

$$\alpha = \frac{\tan\phi}{(9 + 12\tan^2\phi)^{1/2}}, \qquad k = \frac{3c}{(9 + 12\tan^2\phi)^{1/2}} \tag{3.22}$$

O critério (3.21) pode ser reescrito como

$$f\left(\underline{\sigma}\right) = \sigma_d + T(\sigma_m - h), \tag{3.23}$$

onde Té o coeficiente de atrito do material e h é o limite em tração isótropa.

A correspondência entre os parâmetros c e ϕ e os parâmetros T e h, para determinação de cargas limites de estruturas no estado plano de deformações, é dada por (ABAQUS (2003) *apud* PASQUALI (2008))

$$T = \frac{\sqrt{2}\sin\phi}{\sqrt{1 + \frac{1}{3}\sin^2\phi}} \tag{3.24}$$

e

$$\frac{Th}{c} = \frac{\sqrt{2}\cos\phi}{\sqrt{1 + \frac{1}{3}\sin^2\phi}} \tag{3.25}$$

Da mesma forma que o descrito para von Mises, o princípio é procurar uma lei elástica não linear que descreva o critério de Drucker-Prager, tal que (3.23) seja satisfeita para grandes valores da norma do tensor desviador de deformações, ou seja,

$$\lim_{\varepsilon_d/\varepsilon_{ref}\to\infty} f\left(\underline{\underline{\sigma}}\right) = 0. \tag{3.26}$$

Como o critério (3.23) leva em consideração tanto o segundo invariante do tensor desviador de tensões como o primeiro invariante do tensor de tensões, Pasquali (2008) propõe uma lei elástica não linear fictícia da forma

$$\underline{\underline{\sigma}} = K(\varepsilon_v, \varepsilon_d)\varepsilon_v \underline{\underline{1}} + 2\mu(\varepsilon_v, \varepsilon_d)\underline{\underline{\varepsilon}}_d \tag{3.27}$$

A escolha mais simples consiste em adotar um valor constante para o módulo de compressão K. Assim, a condição (3.26) junto à lei (3.27) indicam que o módulo de cisalhamento μ deve necessariamente satisfazer

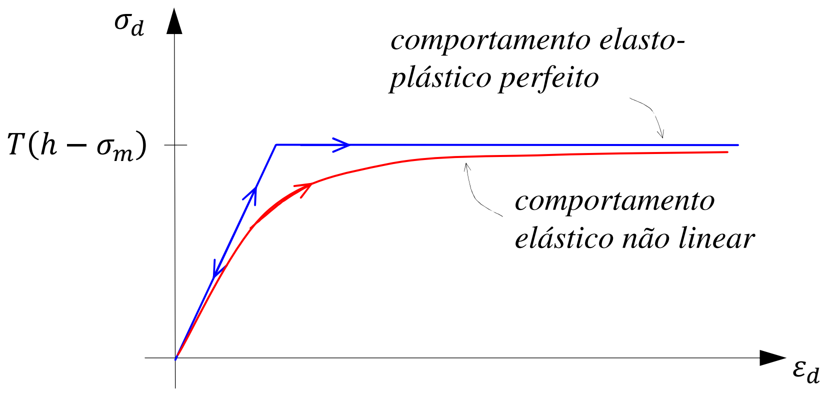
$$\mu(\varepsilon_v, \varepsilon_d) \sim \frac{T}{2\varepsilon_d}(h - K\varepsilon_v) quando \quad \varepsilon_d/\varepsilon_{ref} \gg 1. \tag{3.28}$$

Assim, para material com matriz de Drucker-Prager, toma-se a seguinte função μ para simular o comportamento assintótico:

$$\mu(\varepsilon_v, \varepsilon_d) = \frac{T}{2}(h - K\varepsilon_v)\frac{1/\varepsilon_{ref}}{1 + \varepsilon_d/\varepsilon_{ref}}, \tag{3.29}$$

Assintoticamente nota-se que $\mu \to 0$ enquanto que o módulo de compressão K permanece constante. Isto implica que $\mu/K \to 0$. Uma vez que $\sigma_m = K\varepsilon_v$ permanece com valor finito, a razão $\varepsilon_v/\varepsilon_d$ tende a zero. Sendo assim, o material fictício se comporta no regime assintótico como um material incompressível, ou seja, o material elástico não linear modela assintoticamente o material de Drucker-Prager com um potencial plástico de von Mises. A Figura 3.5 apresenta a lei elástica não linear fictícia que simula o comportamento do material de Drucker-Prager.

Figura 3.5 – Comparação entre o comportamento elastoplástico perfeito do material e o comportamento elástico não linear.



Fonte: Autor (2013).

4 DOMÍNIOS MACROSCÓPICOS DE RESISTÊNCIA

Neste capítulo são apresentados domínios de resistência de materiais porosos com matriz de von Mises e Drucker-Prager deduzidos com base em micromecânica não linear, cujos resultados para diversas porosidades são comparados com soluções obtidas pelo método dos elementos finitos. Apresenta-se também uma estratégia de ajuste das expressões analíticas dos citados domínios visando-se uma maior aproximação dos resultados fornecidos pelo método dos elementos finitos.

4.1 Domínio de Resistência Macroscópico por Maghous *et al.* (2007)

Maghous *et al.* (2007) apresentam expressões analíticas para fronteira do domínio de resistência de um meio poroso, com poros randomicamente distribuídos,para matrizes com comportamento caracterizado pelos critérios de Drucker-Prager, com fluxo plástico não associado.

A metodologia consiste em definir uma aproximação das propriedades da resistência de materiais compósitos fazendo uso de micromecânica associada ao conceito de estados de tensão limites. Maghous *et al* (2007) mostram que o estado de tensão macroscópico pode ser obtido através da solução de uma sequência de problemas viscoplásticos presentes em um volume elementar representativo. A estratégia de resolução corresponde a uma técnica de homogeneização não linear baseada no método secante modificado. A expressão analítica encontrada é:

$$f_{DP}^{hom}\left(\underline{\underline{\Sigma}},\Phi\right)=\frac{1+\frac{2\Phi}{3}}{T^2}\Sigma_d^2+(\frac{3\Phi}{2T^2}-1)\Sigma_m^2+2(1-\Phi)h\Sigma_m-(1-\Phi)^2h^2=0 \tag{4.1}$$

onde $\Sigma_m=\frac{1}{3}\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\Sigma}}$ é a tensão média macroscópica, $\Sigma_d=\sqrt{\underline{\underline{\Sigma}}_d:\underline{\underline{\Sigma}}_d}$ é a norma do tensor desviador de tensões macroscópicas$\underline{\underline{\Sigma}}_d$ ($\underline{\underline{\Sigma}}_d=\underline{\underline{\Sigma}}-\Sigma_m\underline{\underline{1}}$) e Φ indica a porosidade.

Para a determinação do domínio de resistência de um meio poroso com matriz sólida regida pelo critério de von Mises, com limite de resistência em cisalhamento simples k, basta fazer o limite da expressão (4.1) para $h\to\infty$ e $T\to 0$, com $Th=\sqrt{2}k$. A expressão para a fronteira do domínio de resistência retorna

$$f_{VM}^{hom}\left(\underline{\underline{\Sigma}},\Phi\right)=\left(1+\frac{2\Phi}{3}\right)\Sigma_d^2+\frac{3\Phi}{2}\Sigma_m^2-2(1-\Phi)^2k^2=0, \quad (4.2)$$

Vale ressaltar que (4.2)já foi estabelecida por diversos autores: Suquet (1997), Ponte Castañeda (1991) e Leblond *et al.* (1994).

Para $\underline{\underline{\Sigma}}_d=0$, considerando (4.1) onde $\underline{\underline{\Sigma}}_m$ é desconhecido, pode-se observar que se $\Phi>2T^2/3$, $\underline{\underline{\Sigma}}_m$ apresenta uma resposta positiva e outra negativa. Como consequência, a falha é possível em compressão assim como em tração. Ao contrário, se $\Phi<2T^2/3$, ambos $\underline{\underline{\Sigma}}_m$ têm valores positivos. Neste caso, falha em compressão se torna impossível: suas estimativas tendem a infinito. Dessa forma, uma taxa de porosidade crítica ou um ângulo de atrito interno crítico deve existir.

4.2 Domínios de Resistência Empregados por Pasquali (2008)

Utilizando a metodologia descrita no Capítulo 3, Pasquali (2008) define um domínio de resistência macroscópico de meios porosos com matriz constituída por material regido pelo critério de von Mises e Drucker-Prager. Os modelos elásticos não lineares apresentados anteriormente, (3.20) e (3.29), são implementados no programa comercial de elementos finitos ABAQUS, através da sub-rotina UMAT (ver Pasquali (2008)). Através deles, é possível obter as fronteiras dos domínios de resistência macroscópico de meios porosos de diferentes porosidades.

Em seus exemplos, Pasquali (2008) considera uma morfologia simplificada para o meio poroso remetendo a uma distribuição periódica de poros. A célula elementar correspondente (Figura 4.1) é um volume cúbico com a fase sólida envolvendo um poro esférico centrado. Seus resultados são analisados e comparados às expressões analíticas desenvolvidas por Maghous *et al.* (2007) para o domínio de resistência macroscópico.

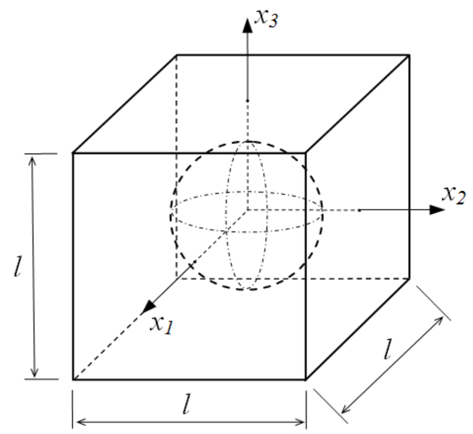
O carregamento da célula unitária é definido por deformações macroscópicas da forma

$$\underline{\underline{E}}=E_0\begin{bmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & \alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \ com\ E_0>0, \quad (4.3)$$

onde o parâmetro real α representa o caminho de carregamento no espaço de deformações macroscópicas (estabelece a proporção com que a deformação E_0 é aplicada nas direções dos versores $\underline{e}_1$ e $\underline{e}_2$, em relação à direção do versor $\underline{e}_3$).

As análises são realizadas apenas em um oitavo da célula elementar, devido à periodicidade e simetrias do problema$\{x_1 \leq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0\}$, e discretizado em elementos. São analisadas duas porosidades: $\Phi = 15\%$ e $\Phi = 30\%$.

Figura 4.1 – Material poroso: geometria da célula elementar.

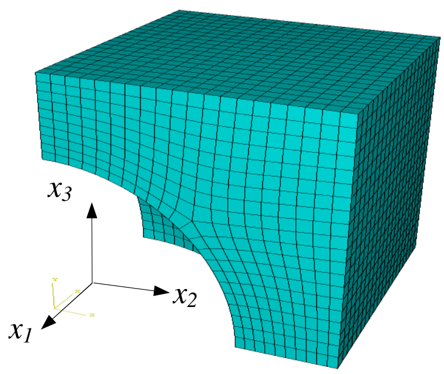


Fonte: Pasquali (2008).

4.2.1 Porosidade $\Phi = 15\%$

A malha de elementos finitos para a célula elementar com porosidade $\Phi = 15\%$ é apresentada na Figura 4.2.

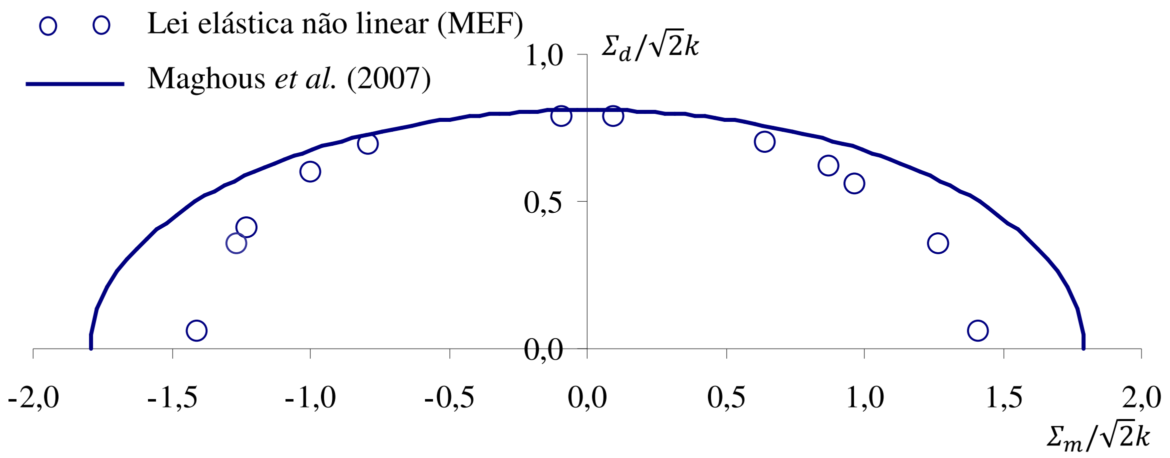
Figura 4.2 – Material poroso ($\Phi = 15\%$): discretização em elementos finitos.



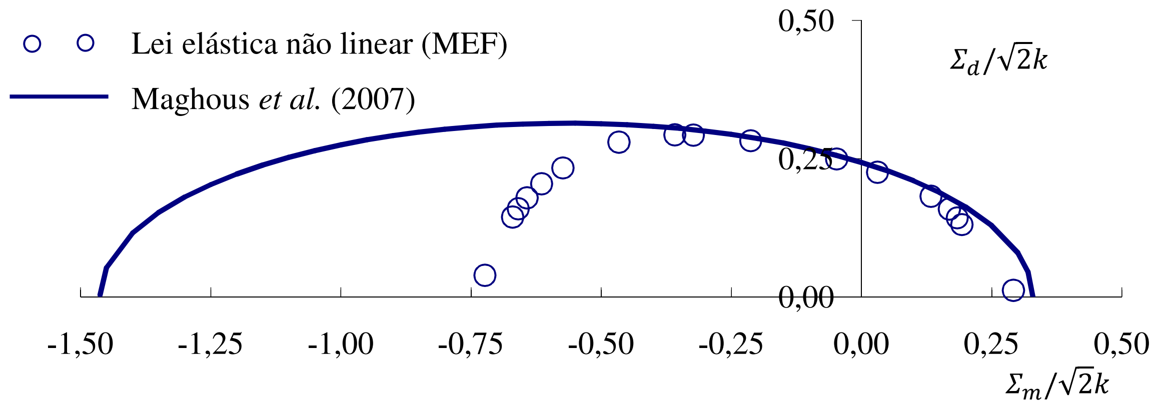
Fonte: Pasquali (2008).

A determinação do domínio de resistência macroscópico, tanto para o caso do meio poroso com matriz de von Mises quanto de Drucker-Prager, é realizada aplicando-se uma deformação $E_0 = 0{,}01$ e variando-se o parâmetro α de -3,0 a 1,0 para o caso de von Mises e de -10,0 a 1,0 para o caso da matriz de Drucker-Prager. Cada valor de α determina um ponto no gráfico que representa um estado de tensões limite. A Figura 4.3 apresenta os resultados obtidos através das implementações da lei elástica não linear, bem como das expressões analíticas apresentadas por Maghous *et al.* (2007).

Figura 4.3 – Domínio de resistência para um meio poroso com $\Phi = 15\%$: (a) matriz sólida de von Mises, (b) matriz sólida de Drucker-Prager com $T = 0{,}3$.



(a)



(b)

Fonte: Pasquali (2008).

Pela Figura 4.3 percebe-se uma boa concordância entre os domínios de resistência obtidos pela implementação das leis elásticas não lineares e aqueles obtidos através da solução analítica, exceto no domínio de significantes tensões de compressão macroscópicas, para o caso de matriz sólida de Drucker-Prager.

De acordo com Pasquali (2008), este desvio observado nas compressões para a matriz de Drucker-Prager é atribuído ao fato que o conceito de uma deformação efetiva única para toda a matriz, empregada na formulação analítica da homogeneização não linear, falha ao capturar o efeito da forte heterogeneidade das deformações em torno dos poros.

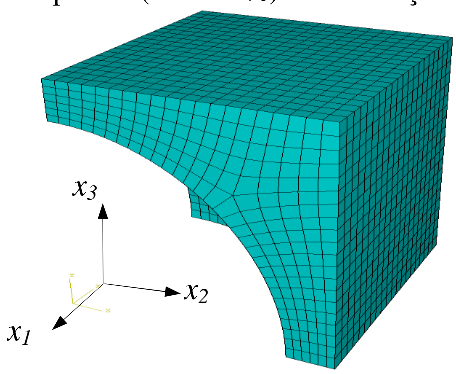
4.2.2 Porosidade $\Phi = 30\%$

A Figura 4.4 apresenta a malha de elementos finitos empregada para a célula elementar com porosidade $\Phi = 30\%$.

Adotando-se os mesmos valores de E_0 e α empregados no exemplo anterior, os resultados obtidos através da implementação da lei elástica não linear, bem como das expressões analíticas, são mostrados na Figura 4.5.

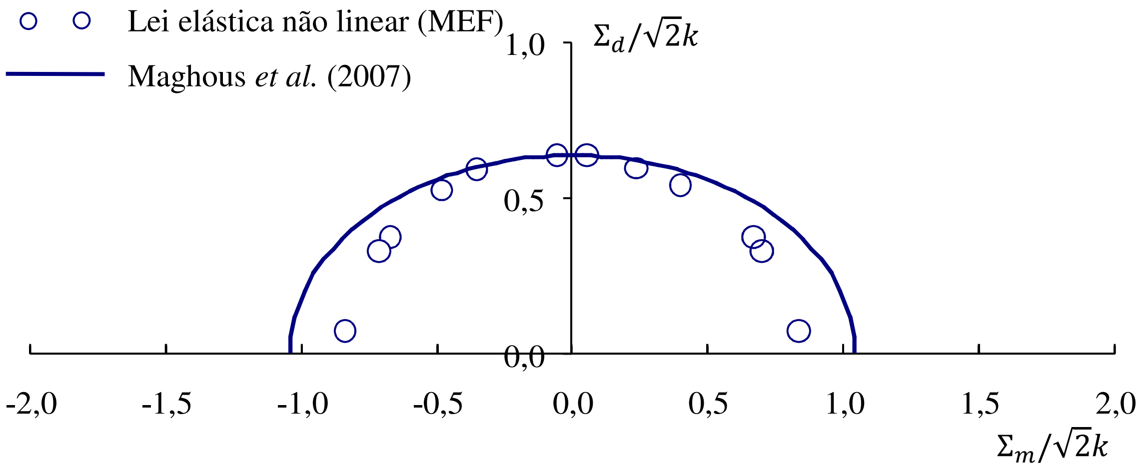
Além de uma boa concordância entre as duas abordagens, verifica-se que para esse valor maior de porosidade há uma melhor equivalência entre os domínios de resistência na região de tensões médias macroscópicas mais negativas.

Figura 4.4 – Material poroso ($\Phi = 30\%$): discretização em elementos finitos.

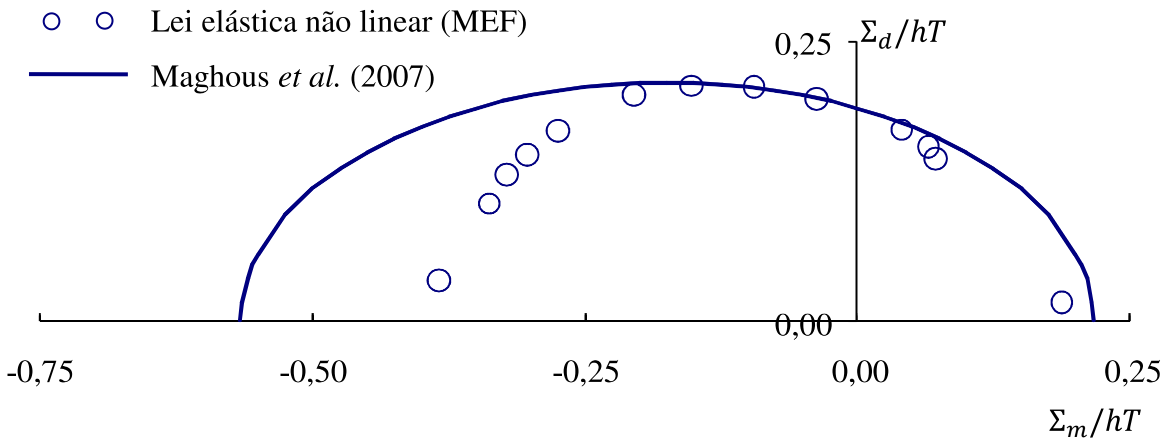


Fonte: Pasquali (2008).

Figura 4.5 – Domínio de resistência para um meio poroso com $\Phi = 30\%$: (a) Matriz sólida de von Mises; (b) Matriz sólida de Drucker – Prager com $T = 0{,}3$.



(a)



(b)

Fonte: Pasquali (2008).

4.3 Ajuste do Domínio de Resistência

Como apresentado nas seções anteriores, Maghous *et al.* (2007) e Pasquali (2008) tratam de critérios de resistência macroscópico de meios porosos. O presente trabalho busca uma metodologia para ajustar oscitados domínios de resistência aos resultados obtidos através do emprego do método dos elementos finitos através da ferramenta computacional ABAQUS.

Maghous *et al.* (2007) e Pasquali (2008) utilizam como estratégia a implementação de uma técnica de homogeneização não linear baseada no método secante modificado que modela o comportamento elastoplástico local por um comportamento elástico não linear. Como já comentado, a abordagem baseada em micromecânica não linear, tem como uma de suas dificuldades a não homogeneidade do campo de deformações locais induzidos na matriz do material poroso. Fato que se procura contornar recorrendo-se ao conceito de deformação efetiva para representar o campo de deformações heterogêneo.

A abordagem aqui adotada não propõe nenhuma alteração no que diz respeito à definição de deformações efetivas para representar os campos não homogêneos das deformações efetivas das fases ou a lei constitutiva não linear assintótica que representa, de forma aproximada, o comportamento elastoplástico do meio poroso. A proposta aqui apresentada, busca ajustar as expressões analíticas dos domínios de resistência macroscópica representados por (4.1) e (4.2), para materiais com matriz de Drucker-Prager e von Mises, tendo como referência os resultados obtidos via método dos elementos finitos.

A estratégia de ajuste consiste na introdução de coeficientes dependentes da porosidade para o caso de von Mises, e também do coeficiente de atrito para matriz de Drucker-Prager, nas citadas expressões analíticas, como indicado nas subseções 4.3.1 e 4.3.2. A metodologia para definição dos citados coeficientes é simples e utiliza os resultados de diversas análises numéricas efetuadas através do método dos elementos finitos, considerando diferentes níveis de porosidade e de carregamento impostos sobre a célula unitária. Vale ressaltar, que a obtenção dos coeficientes ocorre de maneiras distintas para materiais com matrizes de von Mises e Drucker-Prager, devido a peculiaridades inerentes de cada modelo constitutivo.

A seguir, encontra-se descrita detalhadamente a metodologia utilizada para avaliação dos coeficientes de ajuste para materiais com matrizes de von Mises e Drucker-Prager.

4.3.1 Matriz com Material de von Mises

Para o caso de material com matriz regida pelo critério de von Mises, percebe-se que o domínio de resistência é função da porosidade e do parâmetro k, que é o limite de resistência em cisalhamento simples.

Dessa forma, deseja-se propor um novo domínio de resistência com a inserção de coeficientes capazes de ajustar os resultados analíticos aos numéricos. A nova equação proposta se apresenta sob a forma mostrada seguir:

$$f_{VM}^{hom}\left(\underline{\underline{\Sigma}},\Phi\right) = A(\Phi)\cdot\left(1+\frac{2\Phi}{3}\right)\Sigma_d^2 + B(\Phi)\cdot\frac{3\Phi}{2}\Sigma_m^2 - 2(1-\Phi)^2k^2 = 0 \qquad (4.4)$$

onde $A(\Phi)$ e $B(\Phi)$ são os coeficientes de ajuste adicionados a equação original (4.2).

Se todos os termos de (4.4) são divididos por $2k^2$, temos:

$$f_{VM}^{hom}\left(\underline{\underline{\Sigma}},\Phi\right) = A(\Phi)\cdot\left(1+\frac{2\Phi}{3}\right)\left(\frac{\Sigma_d}{\sqrt{2}k}\right)^2 + B(\Phi)\cdot\frac{3\Phi}{2}\left(\frac{\Sigma_m}{\sqrt{2}k}\right)^2 - (1-\Phi)^2 = 0 \qquad (4.5)$$

Assim, se as coordenadas forem $\frac{\Sigma_d}{\sqrt{2}k}$ e $\frac{\Sigma_m}{\sqrt{2}k}$, os coeficientes A e B podem ser considerados apenas como funções de Φ.

Para a avaliação de $A(\Phi)$ e $B(\Phi)$ foi analisada uma série de casos envolvendo uma célula unitária cúbica com poro esférico, representativa de um meio com distribuição de poros periódica, submetidas a variadas condições de carregamento e exibindo diferentes níveis de porosidade, como o apresentado em Pasquali (2008), e sujeita às seguintes condições iniciais:

a) quando $\Phi = 0$, não existe porosidade e, assim, $A(\Phi) = B(\Phi) = 1$. Isto é, tem-se o critério de resistência tradicional de von Mises;

b) quando $\Phi = 1$, não existe a matriz e, assume-se, $A(\Phi) = B(\Phi) = 0$.

A partir daí, com análises realizadas para $k = 1$ e $\Phi = 5\%, 15\%, 30\%, 45\%$, aplicando-se uma deformação $E_0 = 0{,}01$ e variando-se o parâmetro α de -3,0 a 1,0, foram obtidos valores para $A(\Phi)$ e $B(\Phi)$ associados a cada porosidade modelada. De posse dos resultados, são propostas funções que relacionam cada coeficiente de ajuste com a porosidade. Estas funções foram obtidas através de ajuste polinomial quadrático e são válidas para $0 \leq \Phi \leq 0{,}52$, resultando nas seguintes expressões:

$$A(\Phi) = \begin{cases} a_1 + a_2\Phi + a_3\Phi^2, & 0 \leq \Phi \leq 0{,}15 \\ a_4 + a_5\Phi + a_6\Phi^2, & 0{,}15 \leq \Phi \leq 0{,}52 \end{cases} \tag{4.6}$$

$$B(\Phi) = \begin{cases} b_1 + b_2\Phi + b_3\Phi^2, & 0 \leq \Phi \leq 0{,}15 \\ b_4 + b_5\Phi + b_6\Phi^2, & 0{,}15 \leq \Phi \leq 0{,}52 \end{cases} \tag{4.7}$$

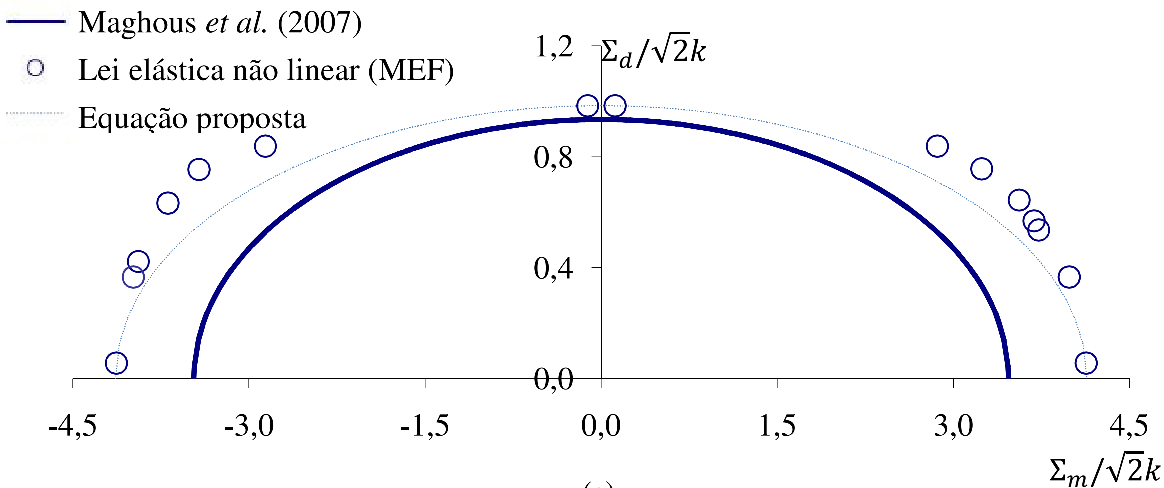
Os valores dos a_i e b_i são apresentados a seguir:

$$\begin{cases} a_1 = 1{,}000; a_2 = -3{,}076; a_3 = 22{,}238 \\ a_4 = 1{,}582; a_5 = -5{,}446; a_6 = 12{,}176 \end{cases} \tag{4.8}$$

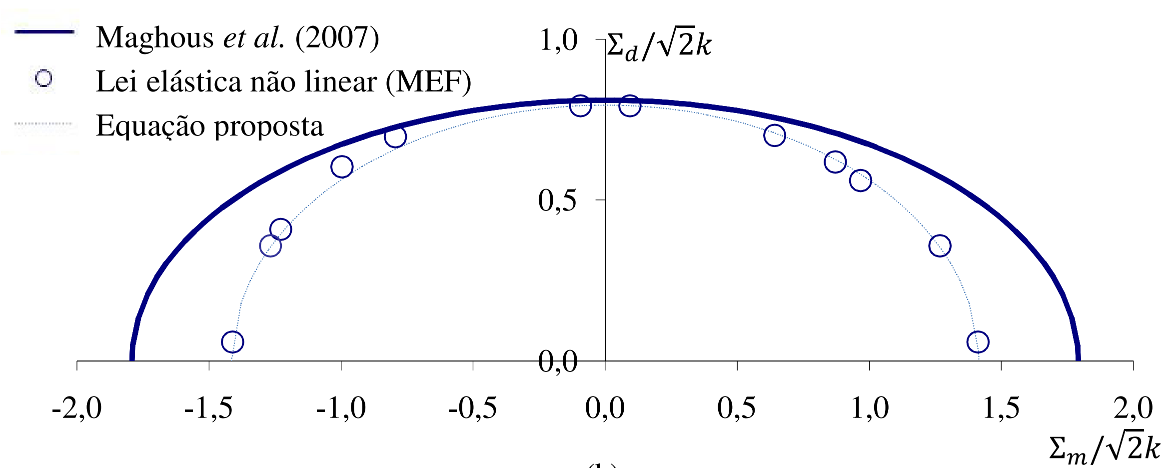
$$\begin{cases} b_1 = 1{,}000; b_2 = -10{,}906;\ b_3 = 99{,}523 \\ b_4 = 2{,}929; b_5 = -12{,}970;\ b_6 = 27{,}562 \end{cases} \tag{4.9}$$

No que segue, são apresentados os resultados obtidos das análises realizadas:

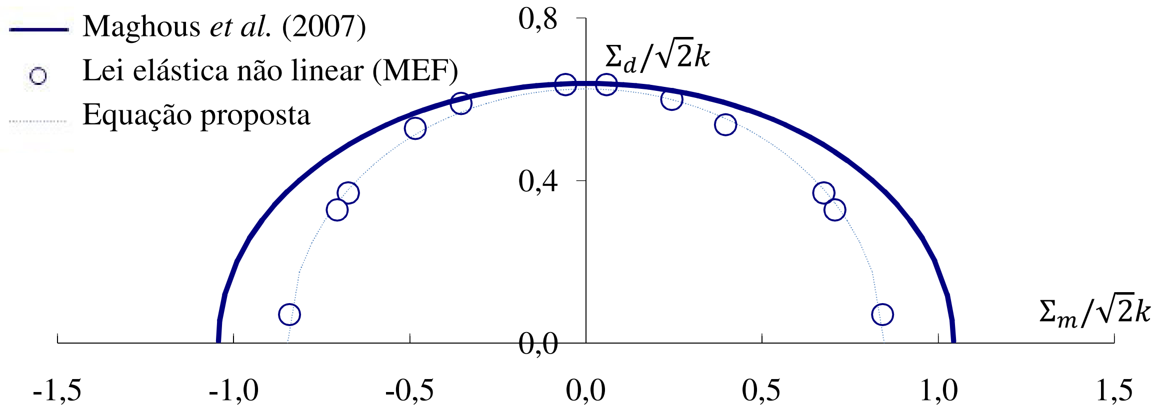
Figura 4.6 – Domínio de resistência de von Mises para diversas porosidades. Matriz sólida de von Mises com: (a) $\Phi = 5\%$; (b) $\Phi = 15\%$; (c) $\Phi = 30\%$ e (d) $\Phi = 45\%$.



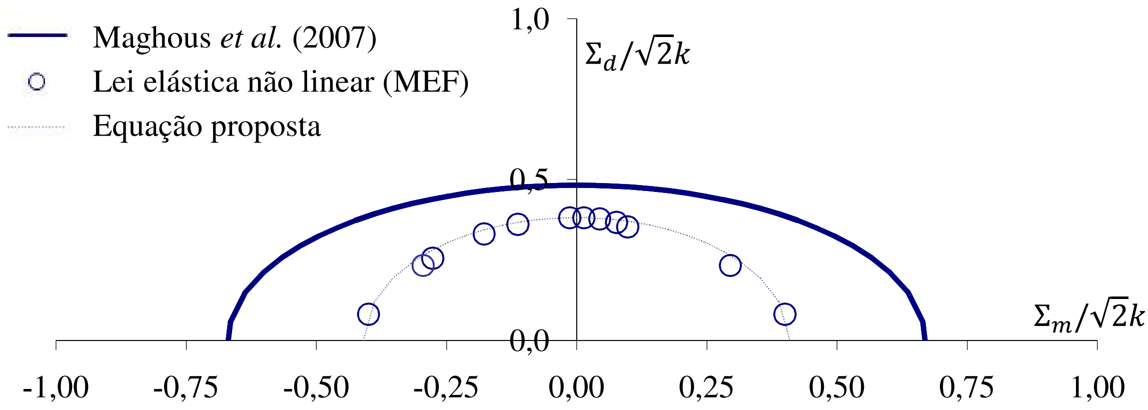
(a)



(b)



(c)



(d)

Fonte: Autor (2013).

4.3.2 Matriz com Material de Drucker-Prager

Diferente do modelo de von Mises, o material com matriz regida pelo critério de Drucker-Prager proposto por Maghous *et al.* (2007) é uma função de 3 variáveis, o limite em tração isótropa h,o coeficiente de atrito do material Te a porosidadeΦ.

Da mesma forma, busca-se um novo domínio de resistência com a inserção de coeficientes na equação baseada na micromecânica não linear, como mostrado em (4.10), e impondo-se um ajustamento entre os resultados analíticos e numéricos.

$$f_{DP}^{hom}\left(\underline{\underline{\Sigma}},\Phi\right) = A(\Phi,\mathrm{T})\cdot\frac{1+\frac{2\Phi}{3}}{T^2}\Sigma_d^2 + B(\Phi,\mathrm{T})\cdot\left(\frac{3\Phi}{2T^2}-1\right)\Sigma_m^2 + C(\Phi,\mathrm{T})\cdot 2(1-\Phi)h\Sigma_m \quad (4.10)$$
$$-(1-\Phi)^2h^2 = 0$$

Para Drucker-Prager também foi realizado estudo sobre a influência de cada parâmetro durante o processo de ajuste da equação. Em análise similar àquela realizada para matriz de von Mises,dividindo-se todos os termos por h^2T^2, tem-se:

$$f_{DP}^{hom}\left(\underline{\underline{\Sigma}},\Phi\right) = A(\Phi,T)\cdot\frac{1+\frac{2\Phi}{3}}{T^2}\left(\frac{\Sigma_d}{hT}\right)^2 + B(\Phi,T)\cdot\left(\frac{3\Phi}{2T^2}-1\right)\left(\frac{\Sigma_m}{hT}\right)^2 + \quad (4.11)$$
$$+C(\Phi,T)\cdot\frac{2(1-\Phi)}{T}\frac{\Sigma_m}{hT} - (1-\Phi)^2\frac{1}{T^2} = 0$$

Assim, para as coordenadas $\frac{\Sigma_d}{hT}$ e $\frac{\Sigma_m}{hT}$, os coeficientes A, B e C podem ser considerados apenas como funções de Φ e T.

A partir daí, com análises realizadas para $T = 0{,}3,\ 0{,}36\ e\ 0.47$, $h = 1,\ 1{,}5\ e\ 2$ e $\Phi = 15\%,\ 30\%,\ 45\%$, respectivamente, aplicando-se uma deformação $E_0 = 0{,}01$ e variando-se o parâmetro α de -10,0 a 1,0, foram obtidos valores para $A(\Phi,T)$, $B(\Phi,T)$ e $C(\Phi,T)$ associados a cada porosidade e coeficiente de atrito considerados.Como, nesse caso, a expressão analítica tem dependência de duas variáveis, Φ e T, utiliza-se uma metodologia diferente para propor uma expressão ajustada, a qual é realizada em duas etapas e sujeita às seguintes condições iniciais:

a) quando $\Phi = 0$, não existe porosidade e, assume-se, $A(\Phi,T) = B(\Phi,T) = C(\Phi,T) = 1$. Isto é, tem-se o critério de resistência tradicional de Drucker-Prager;

b) quando $\Phi = 1$, não existe a matriz e, assume-se, $A(\Phi,T) = B(\Phi,T) = C(\Phi,T) = 0$.

Inicialmente, observando (4.1) como a soma de parcelas dependentes Φ e T, é possível reescrevê-la como a seguir:

$$f_{DP}^{hom}\left(\underline{\Sigma}, \Phi\right) = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 0 P_i = P_i(\Phi, T) \tag{4.12}$$

Dessa forma, buscando os coeficientes para ajustar (4.12) e variando as porosidades para cada valor de T, tem-se:

$$A(\Phi)P_1 + B(\Phi)P_2 + C(\Phi)P_3 + P_4 = 0 \tag{4.13}$$

A partir daí, sabendo-se da dependência de Te Φ, e considerando um ajuste polinomial quadrático, para $i = 1, 2, 3$, são obtidas as seguintes expressões, as quais definem os coeficientes de ajuste:

$$A(\Phi) = a_1(T) + b_1(T)\Phi + c_1(T)\Phi^2 \tag{4.14}$$

$$B(\Phi) = a_2(T) + b_2(T)\Phi + c_2(T)\Phi^2 \tag{4.15}$$

$$C(\Phi) = a_3(T) + b_3(T)\Phi + c_3(T)\Phi^2 \tag{4.16}$$

Por fim, fazendo-se outro ajuste polinomial, agora com os a_i, b_i e c_i para seus respectivos A, B e C, é possível definir as expressões que definem os elementos das matrizes definidas abaixo:

$$\begin{bmatrix} a_1(T) \\ b_1(T) \\ c_1(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^1 & b_{11}^1 & c_{11}^1 \\ a_{22}^1 & b_{22}^1 & c_{22}^1 \\ a_{33}^1 & b_{33}^1 & c_{33}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ T \\ T^2 \end{Bmatrix} \tag{4.17}$$

$$\begin{bmatrix} a_2(T) \\ b_2(T) \\ c_2(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^2 & b_{11}^2 & c_{11}^2 \\ a_{22}^2 & b_{22}^2 & c_{22}^2 \\ a_{33}^2 & b_{33}^2 & c_{33}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ T \\ T^2 \end{Bmatrix} \tag{4.18}$$

$$\begin{bmatrix} a_3(T) \\ b_3(T) \\ c_3(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^3 & b_{11}^3 & c_{11}^3 \\ a_{22}^3 & b_{22}^3 & c_{22}^3 \\ a_{33}^3 & b_{33}^3 & c_{33}^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ T \\ T^2 \end{Bmatrix} \tag{4.19}$$

Daí, a partir das análises realizadas, são obtidos valores numéricos para os elementos das matrizes em (4.20)-(4.22), os quais estão mostrados seguir:

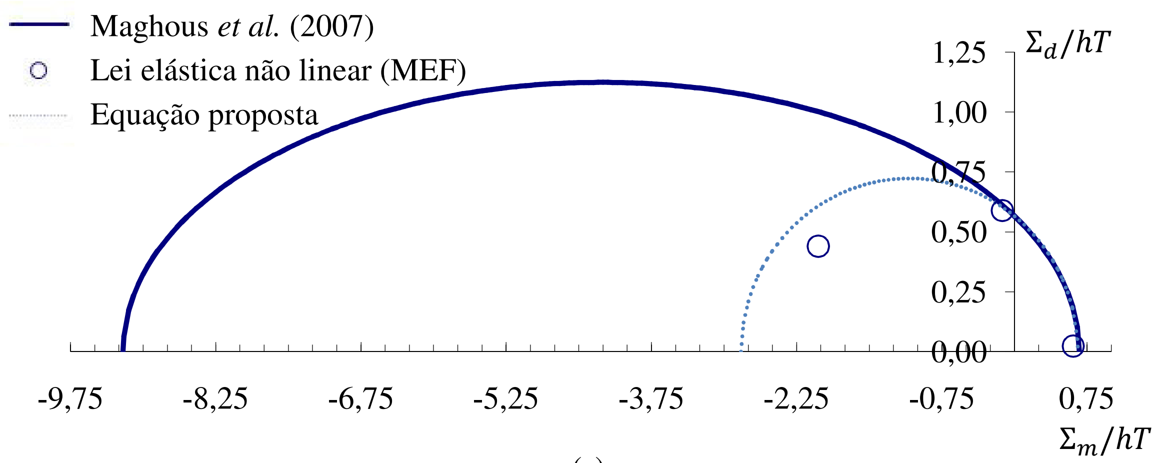
$$\begin{bmatrix} a_{11}^1 & b_{11}^1 & c_{11}^1 \\ a_{22}^1 & b_{22}^1 & c_{22}^1 \\ a_{33}^1 & b_{33}^1 & c_{33}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6{,}307 & -22{,}011 & 12{,}247 \\ -113{,}206 & 548{,}929 & -581{,}130 \\ 231{,}396 & -1127{,}209 & 1249{,}699 \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}^2 & b_{11}^2 & c_{11}^2 \\ a_{22}^2 & b_{22}^2 & c_{22}^2 \\ a_{33}^2 & b_{33}^2 & c_{33}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34{,}432 & -164{,}960 & 218{,}276 \\ -298{,}382 & 1466{,}535 & -1809{,}667 \\ 484{,}712 & -2329{,}290 & 2808{,}802 \end{bmatrix} \tag{4.21}$$

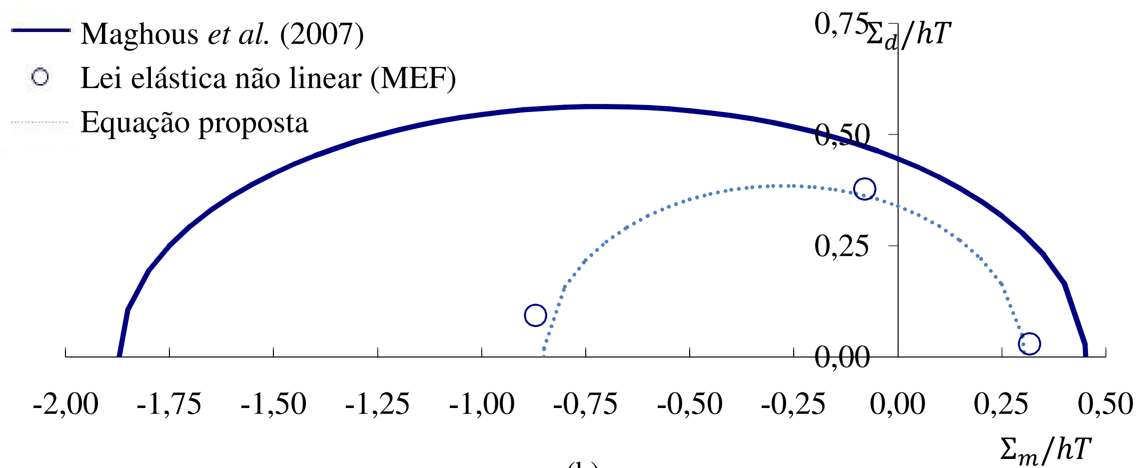
$$\begin{bmatrix} a_{11}^3 & b_{11}^3 & c_{11}^3 \\ a_{22}^3 & b_{22}^3 & c_{22}^3 \\ a_{33}^3 & b_{33}^3 & c_{33}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9{,}858 & -43{,}940 & 48{,}499 \\ -95{,}261 & 477{,}384 & -555{,}110 \\ 178{,}962 & -895{,}450 & 1061{,}010 \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

Para verificar os resultados obtidos, são realizadas análises no software ABAQUS, para $T = 0{,}41$, $h = 1{,}7$ e $\Phi = 15\%, 30\%, 45\%$, as quais são comparadas com os resultados das curvas analíticas ajustada e não ajustada. A seguir, apresentam-se os gráficos das análises realizadas:

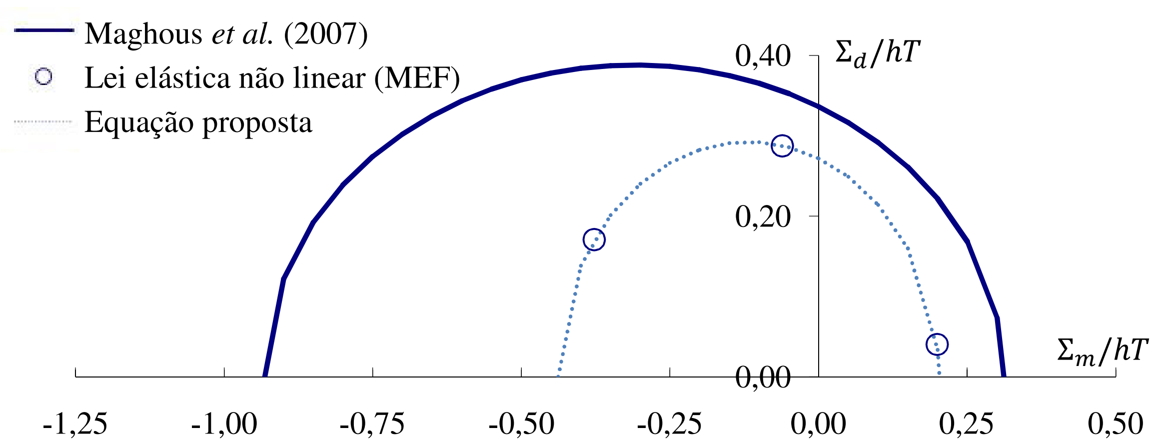
Figura 4.7 – Domínio de resistência de Drucker-Prager para diversas porosidades. Matriz sólida de Drucker - Prager com: (a) $\Phi = 15\%$; (b) $\Phi = 30\%$; (c) $\Phi = 45\%$.



(a)



(b)



(c)

Fonte: Autor (2013).

5 ANÁLISES E DISCUSSÕES DE RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados estudos comparativos entre domínios de resistência analíticos propostos na literatura, análises realizadas através do Método dos Elementos Finitos e aqueles encontrados neste trabalho, bem como a aplicação desses últimos em análises realizadas em materiais porosos de von Mises e Drucker-Prager.

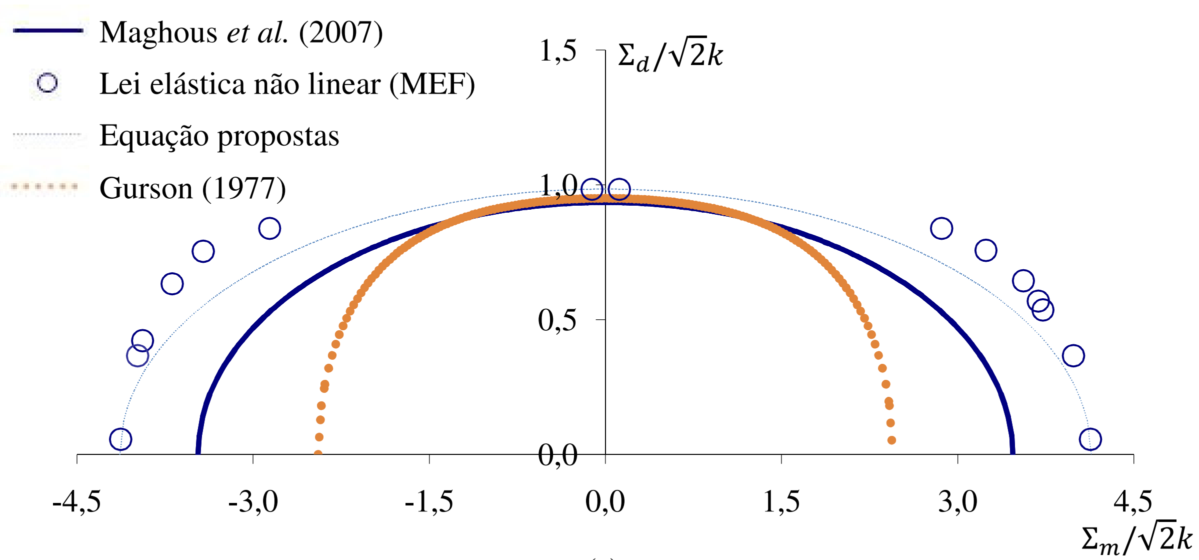
5.1 Casos de Material Poroso com Matriz de Von Mises

Para verificação da expressão ajustada para material de von Mises, são realizadas comparações da equação de ajuste proposta com superfícies de escoamento macroscópicas propostas por Gurson (1977). A função proposta por Gurson (1977) é a seguinte:

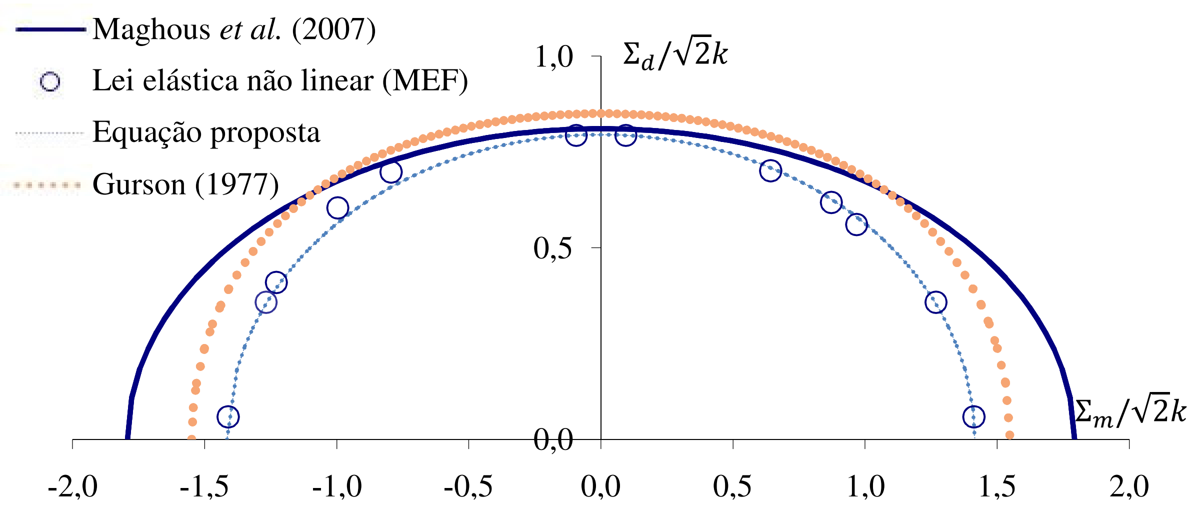
$$f_{Gurson}\left(\underline{\underline{\Sigma}}, \Phi\right) = \frac{1}{2}\Sigma_d^2 + 2k^2 \cdot \Phi \cdot \cosh\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\Sigma_m\right) - (1 + \Phi^2)k^2 = 0 \qquad (5.1)$$

Para isto, é realizada análise comparativa de superfícies de escoamento macroscópicas de um material poroso com matriz de von Mises com $k = 115{,}47MPa$ (equivalente a uma tensão de escoamento uniaxial $\sigma_y = 200MPa$) e considerando diferentes porosidades (5%, 15%, 30%, 45% e 50%). A Figura 5.1 apresenta os resultados obtidos das análises realizadas.

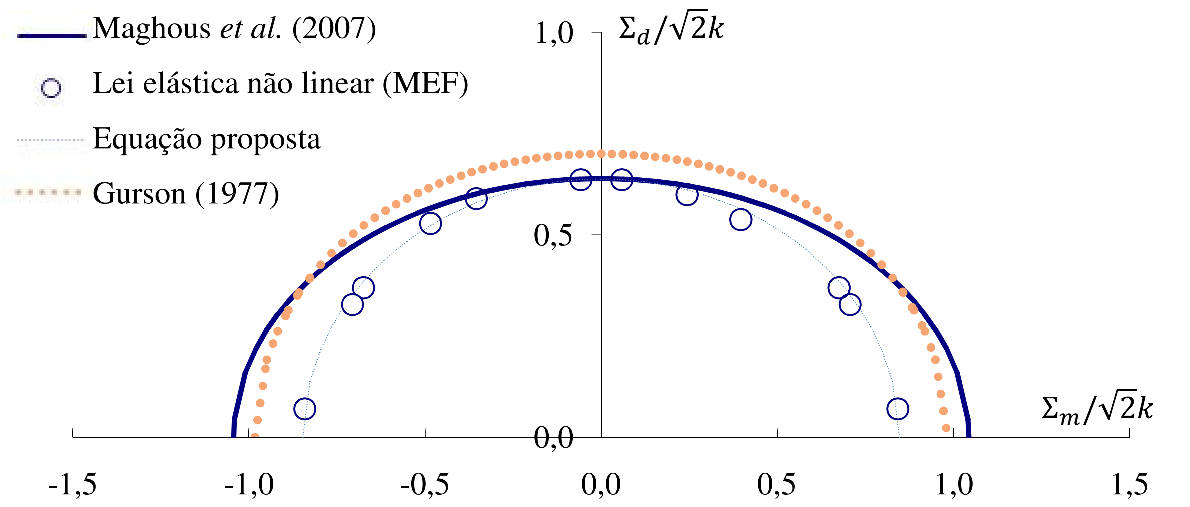
Figura 5.1 - Comparações com o critério de Gurson (1977) para diferentes porosidades: (a) $\Phi = 5\%$; (b) $\Phi = 15\%$; (c) $\Phi = 30\%$; (d) $\Phi = 45\%$; (e) $\Phi = 50\%$.



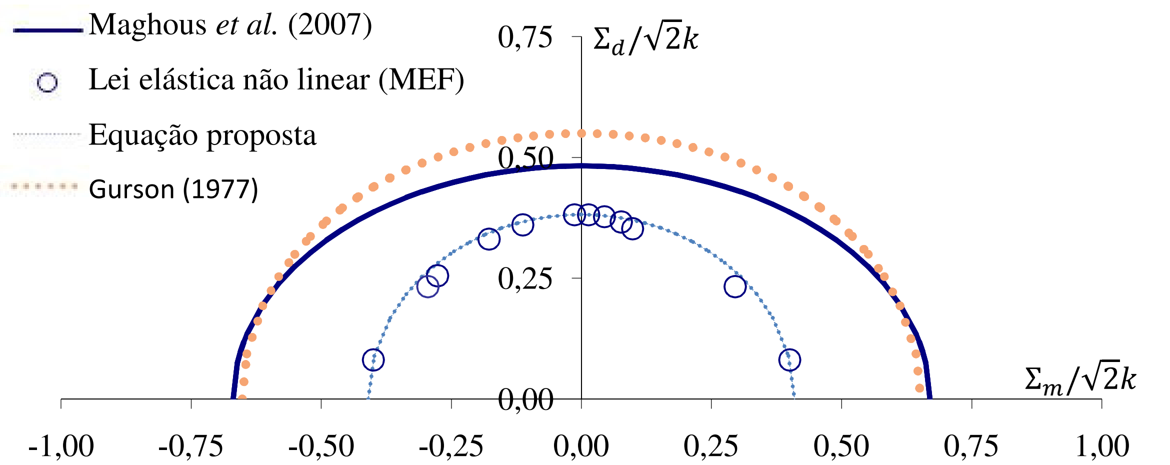
(a)


Maghous et al. (2007)
Lei elástica não linear (MEF)
Equação proposta
Gurson (1977)
$\Sigma_d/\sqrt{2}k$
$\Sigma_m/\sqrt{2}k$
1,0
0,5
0,0
-2,0
-1,5
-1,0
-0,5
0,0
0,5
1,0
1,5
2,0

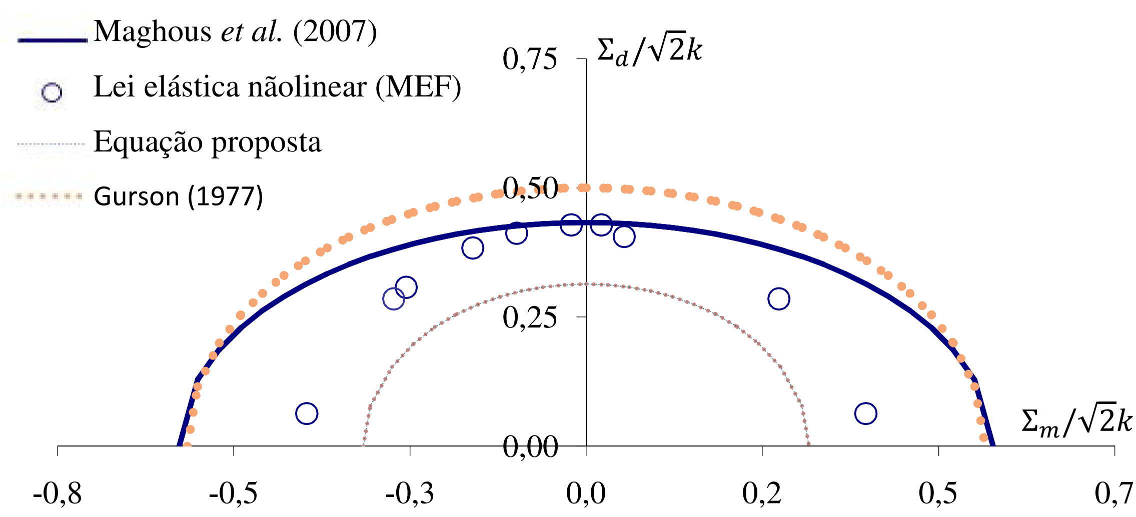
(b)


Maghous et al. (2007)
Lei elástica não linear (MEF)
Equação proposta
Gurson (1977)
$\Sigma_d/\sqrt{2}k$
$\Sigma_m/\sqrt{2}k$
1,0
0,5
0,0
-1,5
-1,0
-0,5
0,0
0,5
1,0
1,5

(c)


Maghous et al. (2007)
Lei elástica não linear (MEF)
Equação proposta
Gurson (1977)
$\Sigma_d/\sqrt{2}k$
$\Sigma_m/\sqrt{2}k$
0,75
0,50
0,25
0,00
-1,00
-0,75
-0,50
-0,25
0,00
0,25
0,50
0,75
1,00

(d)



(e)

Fonte: Autor (2013).

Para $\Phi = 5\%, 15\%, 30\%$ e 45%, fica perceptível a boa aproximação da equação proposta em comparação aos resultados obtidos através do ABAQUS. Para $\Phi = 50\%$, a equação proposta apresenta resposta menos aproximada do critério de resistência encontrado através das análises realizadas com o MEF. Isso pode ser justificado pelo fato da porosidade $\Phi = 50\%$ se aproximar muito da porosidade máxima $\Phi = 52\%$.

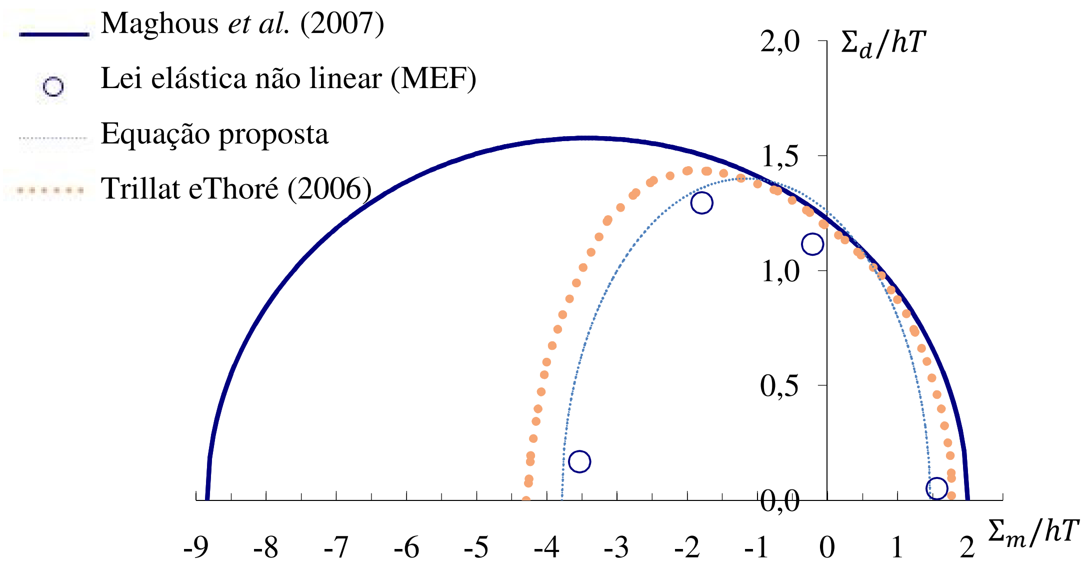
5.2 Casos de Material Poroso com Matriz de Drucker-Prager

5.2.1 Modelo de Trillat e Thoré (2006)

Trillat e Thoré (2006) apresentam estimativas para o critério de resistência de materiais com poros esféricos e caracterizados pela matriz de Drucker-Prager, fazendo uso de uma metodologia baseada no modelo de Gurson (1977) e na implementação de uma formulação cônica de segunda ordem.

O exemplo a seguir trata-se de um meio poroso com matriz de material de Drucker-Prager, porosidade 10% e ângulo de atrito interno 10°. O gráfico (Figura 5.2) apresenta uma comparação entre o modelo de Trillat e Thoré (2006), Maghous *et al.* (2007), MEF e equação aqui proposta.

Figura 5.2 – Comparação entre critérios de resistência ($\Phi = 10\%$).



Fonte: Autor (2013).

Vale observar que, assim como a fronteira do domínio de resistência de um meio poroso determinada por Maghous *et al.* (2007), a equação aqui proposta apresenta limitações quanto a falha em tração e compressão. Para $\underline{\Sigma}_d = 0$, considerando (4.10), onde $\underline{\Sigma}_m$ é desconhecido, pode-se observar que se $\Phi > 2T^2/3$, $\underline{\Sigma}_m$ apresenta uma resposta positiva e outra negativa. Como consequência, a falha é possível em compressão assim como em tração. Ao contrário, se $\Phi < 2T^2/3$, ambos $\underline{\Sigma}_m$ têm valores positivos. Neste caso, falha em compressão se torna impossível: suas estimativas tendem a infinito.

Dessa forma, para o exemplo ilustrado acima, o valor crítico do ângulo de atrito interno é $\phi \approx 16°$. Ou seja, a partir desse valor não há falha em compressão e a expressão ajustada terá seus resultados com tendência ao infinito.

5.2.2 Modelo de Durban *et al.* (2010)

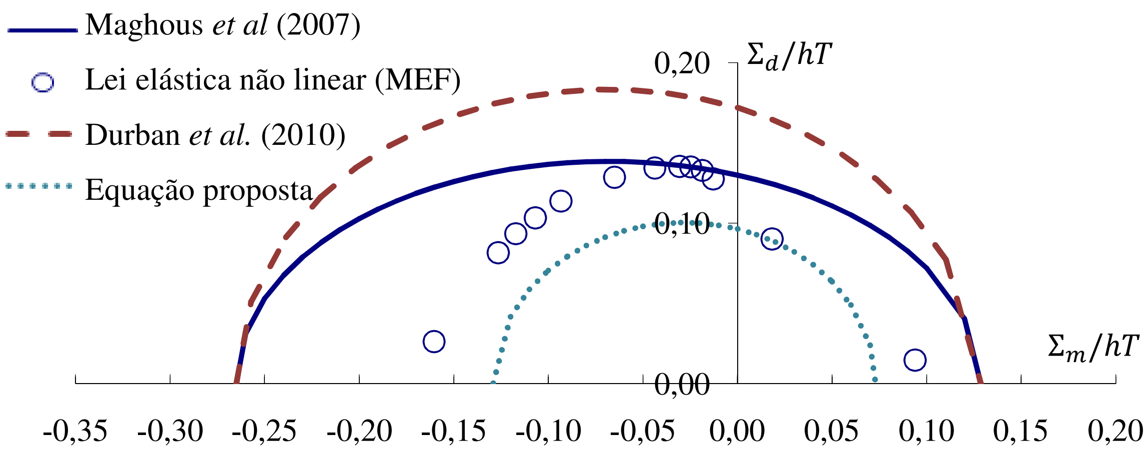
Durban *et al.* (2010) propuseram um procedimento prático para a construção de uma fronteira do domínio de resistência de sólidos porosos para matrizes com comportamento caracterizado pelo critério de Drucker-Prager e Schleicher. Essa metodologia sugere um procedimento simples para obter uma estimativa razoável de um critério de resistência para sólidos porosos, com domínio de resistência para Drucker-Prager descrito pela expressão a seguir:

$$\Sigma = (1-f)^2 - 2(1-f)\mu P + \left(\mu^2 - \frac{9}{4}f\right)P^2, \tag{5.2}$$

onde Σ representa a tensão de von Mises adimensional, f a porosidade, μ é uma medida diferencial de resistência e P é a tensão hidrostática.

Para matriz de Drucker-Prager, com porosidade 50% e $\mu = 0{,}37$, resultados obtidos pelo modelo de Durban *et al* (2010), Maghous *et al.* (2007), pela equação aqui proposta e método dos elementos finitos são mostrados a seguir.

Figura 5.3 - Comparação entre critérios de resistência ($\Phi = 50\%$).



Fonte: Autor (2013).

Pela Figura 5.3, percebe-se que, assim como no caso de material com matriz de von Mises, quando a porosidade se aproxima do valor limite ($\Phi = 52\%$) a expressão ajustada tem a tendência de subestimar as tensões, tanto Σ_d quanto Σ_m.

5.2.3 Modelo de Jeong (2002)

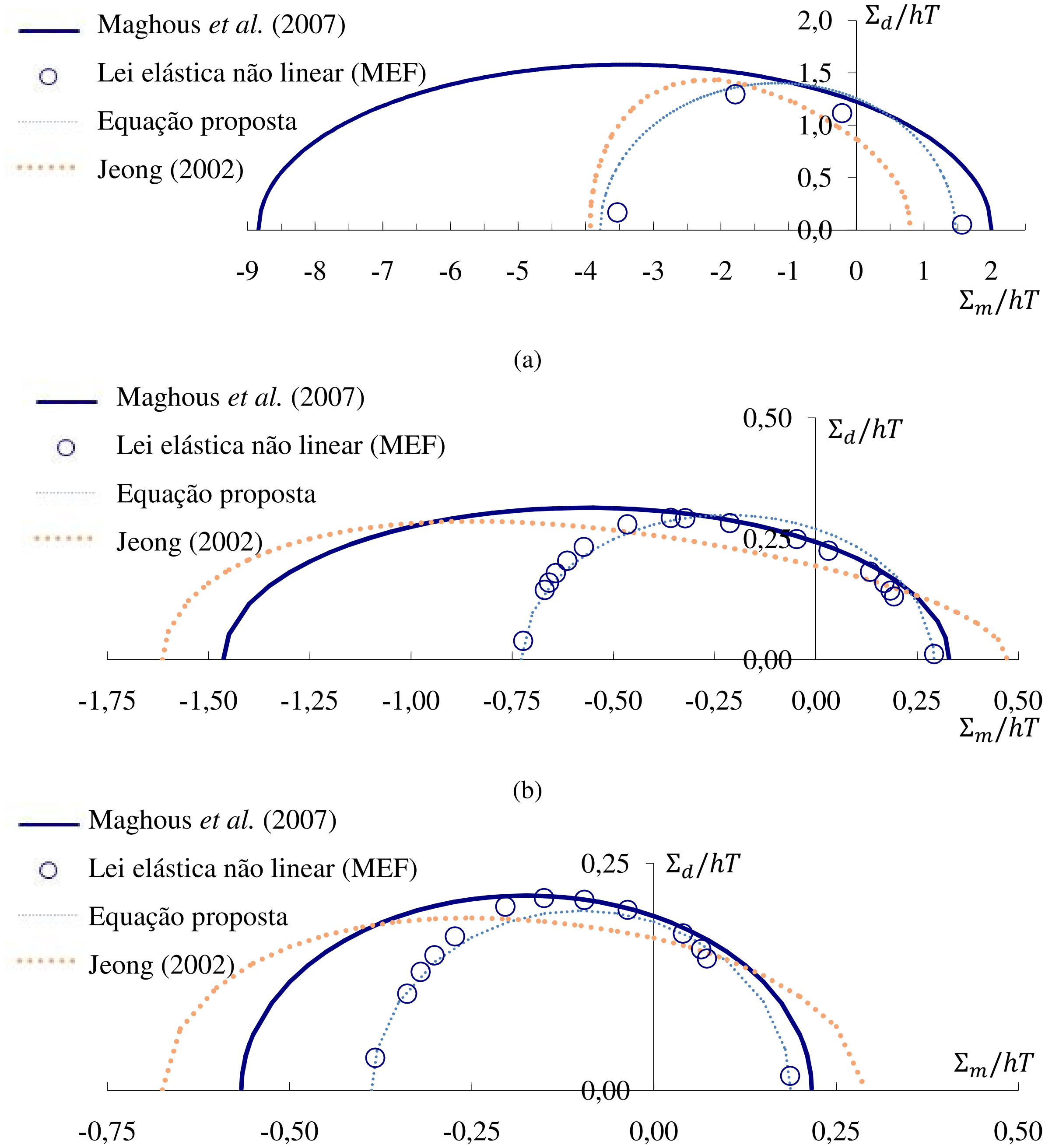
Jeong (2002) apresenta um domínio de resistência macroscópico para sólidos porosos com matriz modelada pelo critério de Coulomb, o qual foi obtido através da generalização do critério de Gurson para uma esfera submetida a tensões hidrostáticas e pelo ajuste de resultados de elementos finitos do campo de tensão de um cubo poroso. O domínio de resistência macroscópico é válido para tensões hidrostáticas negativas, bem como para tensões positivas. A função proposta por Jeong (2002) é a seguinte:

$$\Phi_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\Sigma}, \sigma_0, f, \mu') = \left(\frac{\Sigma_e}{\sigma_0}\right)^2 + \\ + \left(1 - \mu'\frac{\Sigma_m}{\sigma_0}\right)^2 \left[2f\cosh\left\{\frac{3 + sign(\Sigma_m)2\mu'}{2\mu'} log\left(1 - \mu'\frac{\Sigma_m}{\sigma_0}\right)\right\} - 1 - f^2\right] = 0 \tag{5.3}$$

onde Σ_e representa a tensão efetiva macroscópica, Σ_m é a tensão hidrostática macroscópica, f indica a fração volumétrica do sólido poroso e $\mu' = \sqrt{3}\mu$, onde μ é o fator de sensibilidade à pressão.

Para o caso de matriz de Drucker-Prager, porosidades 10%, 15% e 30% e $\mu' = 0{,}3$, as soluções obtidas pelos modelos de Jeong (2002) e Maghous *et al.* (2007), e pela equação aqui proposta, são mostradas a seguir:

Figura 5.4 – Comparação entre critérios de resistência: (a) $\Phi = 10\%$; (b) $\Phi = 15\%$ e (c) $\Phi = 30\%$.



(c)

Fonte: Autor (2013).

Dessa forma, percebe-se que a equação proposta por Jeong (2002) também apresenta grande diferença em relação ao método dos elementos finitos para o domínio de significantes tensões de compressão macroscópicas.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O principal objetivo deste trabalho foi o desenvolvimento de um estudo sobre a determinação do domínio de resistência macroscópica de meios porosos com diferentes níveis de porosidade e matriz constituída por material regido pelo critério de von Mises e Drucker-Prager.

O estudo teve como motivação o trabalho desenvolvido por Pasquali (2008), o qual analisou domínios de resistência macroscópicos de meios porosos para materiais regidos pelo critério de von Mises e Drucker-Prager.Em seu estudo, Pasquali (2008) comparou domínios de resistência analíticos obtidos através de recursos de homogeneização não linear (Maghous *et al.*, 2007) com soluções obtidas através de um código de elementos finitos no qual leis elásticas não lineares assintóticas foram implementadas. A investigação mostrou uma razoável concordância de resultados para matriz de von Mises e grandes diferenças no caso da matriz de Drucker-Prager no domínio de significantes tensões de compressão macroscópicas.

Visando-se a obtenção de resultados mais realísticos para a resistência macroscópica dos meios porosos com matriz de von Mises e Drucker-Prager, o presente trabalho empregou uma estratégia de ajustamento dos domínios analíticos de resistência acima citados, tendo como referência os resultados numéricos encontrados pelo método dos elementos finitos. Os ajustes consistiram na introdução de coeficientes nas expressões dos critérios analíticos de resistência, os quais foram deduzidos com base na imposição de aproximação com os resultados gerados pelo método dos elementos finitos, considerando diversos níveis de porosidade.

As análises efetuadas para variados níveis de porosidade evidenciaram que os coeficientes de ajustes incorporados nos critérios de resistência analíticos proporcionaram expressões capazes de descrever de forma eficiente as resistências macroscópicas de materiais porosos com matrizes de von Mises e de Drucker-Prager, independentemente da grandeza e natureza das tensões. As comparações de resultados obtidos por diferentes propostas de domínios de resistência disponibilizadas na literatura mostraram consideráveis divergências entre as mesmas e, particularmente, em relação às soluções correspondentes ao método dos elementos finitos.

O estudo também evidenciou que vários modelos analíticos propostos na literatura, em geral, apresentam grandes diferenças em relação aos resultados obtidos pelo método dos elementos finitos, especialmente para o caso de matriz de Drucker-Prager e estados tensões macroscópicos caracterizados por elevadas tensões de compressão. Assim, admitindo que os resultados numéricos retratem bem os domínios de resistência macroscópica dos materiais porosos aqui estudados, as expressões ajustadas mostraram ser alternativas interessantes, além de ser facilmente implementadas.

Com base na literatura consultada e durante o desenvolvimento do presente estudo, ficou evidenciado como um importante trabalho para o futuro a investigação de novas definições de deformações efetivas para representar os campos não homogêneos de deformações e, em função delas, formular técnicas analíticas de homogeneização não linear e critérios macroscópicos de resistência de meios compósitos ou porosos que sejam mais realísticos.

REFERÊNCIAS

ABOUDI, J. Micromechanical analysis of composites by method of cells. **Applied Mechanical Review**, 42: 193–221, 1997.

AURIAULT, J.-L., SANCHEZ-PALENCIA, E. Etude du comportement macroscopique d'un milieu poreux saturé déformable. **J. Méc.**, 16 (4), 575–603, 1977.

AVELLANEDA, M. Iterated homogenization, differential effective medium theory and applications, Commun. **Pure Appl. Math.**, 40, 527–554, 1987.

BARTHÉLÉMY, J.F., DORMIEUX, L. A micromechanical approach to the strength criterion of Drucker-Prager materials reinforced by rigid inclusions. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 28, pp. 565-582, 2004.

BENSOUSSAN, A., LIONS, J.L., PAPANICOLAOU, G. **Asymptotic Analysis for Periodic Structure**, North-Holland, Amsterdam, 1978.

BENVENISTE, Y. A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials. **Mechanics of Material**, 6 147-157, 1987

BERAN, M. Use of the variational approach to determine bounds for the effective permittivity of a random media. **Nuovo Cimento**, 38, 771-782, 1965.

BERRYMAN, J. G., PRIDE, S. R., WANG, H. F. A differential scheme for elastic properties of rocks with dry or saturated cracks, **Geophys. J. Int.**, (2002) 151, 597 611, 2002.

BERRYMAN, J.G. Long-wavelength propagation in composite elastic media - I. Spherical inclusions, **J. Acoust. Soc. Am.**, 68, 1809–1819, 1980a.

BERRYMAN, J.G. Long-wavelength propagation in composite elastic media - II. Ellipsoidal inclusions, **J. Acoust. Soc. Am.**, 68, 1820–1831, 1980b.

BERVEILLER, B., ZAOUI, A. An extension of the self-consistent scheme to plastically flowing polycrystals. **J. Mech. Phys. Solids.**, 26, 325-344, 1979.

BIOT, M.A. General theory of three-dimensional consolidation, **J. Appl.Phys.**, 12, 155–164, 1941.

BIOT, M.A. Nonlinear and semilinear rheology of porous solids, **J. Geophys. Res.**, 78 (23), 4924–4937, 1973.

BISHOP, J.F.W., HILL, R. A theory of the plastic distortion of a polycrystalline aggregate under combined stresses. **Phil. Mag.**, 42, 414-427, 1951.

BISHOP, J.F.W., HILL, R. A theoretical derivation of the plastic properties of a polycrystalline face-center metal. **Phil. Mag.**, 42, 1298-1307, 1951.

BORNERT, M. **Morphologie microstructurale et comportement mécanique; characterizations expérimentales, approches par bornes et estimations autocohérentes généralisées**. Doctoral Thesis, Ecole Nationale des Pontset Chaussées, Paris, France, 1996.

BORNERT, M., STOLZ, C., ZAOUI, A. Morphologically Representative Pattern-Based Bounding in Elasticity; **J.Mech.Phys.Sol**. 44, 307-331, 1996.

BÖHM, H.J. A Short Introduction to Basic Aspects of Continuum Micromechanics, **Institute of Lightweight Design and Structural Biomechanics**, Vienna University of Technology, 1998.

BUDIANSKY, B. On the elastic moduli of some heterogeneous materials, **J. Mech. Phys. Solids**, 13, 223–227, 1965.

DE BUHAN, P., DORMIEUX, L., SALENÇON, J. Modélisation multipolaire de la résistance d'um milieuren forcé par inclusions. **Comptes Rendus de I'Academie de Sciences de Paris**, v. 326, pp. 163-170, 1998.

CHEN H.R., YANG Q.S., WILLIAMS, F.W. A Self-Consistent Finite Element Approach to the Inclusion Problem; **Comput. Mater. Sci.**, 2, 301-307, 1994.

CLEARY, M.P., CHEN, I.-W., LEE, S.-M. Self-consistent techniques for heterogeneous media, **ASCE J. Eng. Mech.**, 106, 861–887, 1980.

CLYNE, T.W., WITHERS, P.J. **An Introduction to Metal Matrix Composites**. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1993.

COUSSY, O. **Mechanics of Porous Continua**. Wiley, New York, 1995.

DOGHRI, I., OUAAR, A. Homogenization of two-phase composite materials and structures. Study of tangent operators, cyclic plasticity and numerical algorithms. **Internat. Journal of Solids and Structures**, 40 1681-1712, 2003.

DOGHRI, I., FRIEBEL, C. Effective elasto-plastic properties of inclusion-reinforced composites. Study of shape, orientation and cyclic response, **Mechanics of Materials**, 37, 45-68, 2005.

DORMIEUX, L., MOLINARI, A., KONDO, D. Micromechanical approach to the behavior of poroelastic materials, **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, 50, 2203–2231, 2002.

DURBAN, D., COHEN, T., HOLLANDER, Y. Plastic response of porous solids with pressure sensitive matrix, **Mechanics Research Communications**, 37, 636–641, 2010.

DVORAK, G. Transformation field analysis of inelastic composite materials. **Proceedings of the Royal Society of London A**, 311–327, 1992.

ESCUDERO, J.S. **Micromecánica computacional de materiales compuestos reforzados com partículas**. Tese (Doutorado em Engenharia) – Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Universidad Politécnica de Madrid, Madrid, España. 2004.

ESHELBY, J.D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems, **Proc. Roy. Soc. London A**, 241, 376–396, 1957.

FRANCESCATO, P., PASTOR, J. Lower and upper numerical bounds to the off-axis strength of unidirectional fiber-reinforced composites by limit analysis methods. **European Journal of Mechanics – A/Solids**, v. 16, n. 2, pp. 213-234, 1997.

GASSMANN, F. **Über die elastizität poröser medien**, Vierteljahr. Naturf. Gesell. Zürich, 96, 1–23, 1951.

GAVAZZI, A.C., LAGOUDAS, D.C. On the Numerical Evaluation of Eshelby's Tensor and its Application to Elastoplastic Fibrous Composites. **Computational Mechanics**, 7, 12-19, 1990.

GONZÁLEZ, C., SEGURADO, J., LLORCA, J. Numerical simulation of elastoplastic deformation of composites: Evolution of stress microfields and implications for homogenization models. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, 52: 1573–1593, 2004.

GURSON, A. L. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth. **J. Engng. Mater. Tech**. 99, 2-15, 1977.

HASHIN, Z., SHTRIKMAN, S. Note on a variational approach to the theory of composite elastic materials, **J. Franklin Inst.**, 271, 336–341, 1961.

HASHIN, Z., SHTRIKMAN, S. A variational approach to the theory of elastic behaviour of polycrystals, **J. Mech. Phys. Solids**, 10, 343–352, 1962.

HERVÉ, E., STOLZ, C., ZAOUI, A. A propos de'l assemblaged essphères composites de Hashin; **C.R. Acad. Sci. Paris**, série II 313, 857-862, 1991.

HILL, R. A self-consistent mechanics of composite materials, **J. Mech.Phys. Solids**, 13, 213–222, 1965.

HILL, R. The Elastic Behaviour of a Crystalline Aggregate. **Proc.Phys.Soc. A65**, 349-354, 1952.

HILL, R. The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals. **J. Mech. Phys. Solids**, (15) pp 79-95, 1967.

HUTCHINSON, J.W. Bounds and self-consistent estimates for creep of polycrystalline materials. **Proc. R. Soc. Lond**. A, 348, 101-127, 1976.

JEONG, H.-Y. A new yield function and a hydrostatic stress-controlled void nucleation model for porous solids with pressure-sensitive matrices. **International Journal of Solids and Structures**, 39, pp. 1385-1403, 2002.

JIANG, M., JASIUK, I., OSTOJA-STARZEWSKI, M. Apparent elastic and elastoplastic behavior of periodic composites. **Mechanics of Materials**, 33, pp. 199-212, 2002.

LEE, B.J.,MEAR, M.E. Effective properties of power-law solids containing elliptical inhomogeneities, **Mechanics of Materials**, 13, pp. 313-335, 1992.

LEMARCHAND, E., ULM, F.J., DORMIEUX, L. Effect of inclusions on friction coefficient of highly filled composite materials. **Journal of Engineering Mechanics**, 128(8), pp. 876-884, 2002.

MAGHOUS, S., DORMIEUX, L., BARTHÉLÉMY, J.F. Micromechanical approach to the strength properties of geocomposites with a Drucker-Prager matrix – Solid Mechanics in Brazil 2007. **Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, 263-276, 2007.

MOLINARI,A., CANOVA, G.R., AHZI, S. A self-consistent approach of the large deformation polycrystal viscoplasticity. **Acta Metall**. 35 12, pp. 2983-2994, 1987.

MORI, T., TANAKA, M. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. **Acta Metal**. 21, 571, 1973.

MURA, T. **Micromechanics of defects in solids**, second ed. Martinus Nijhoff Publishers, 1987.

NORRIS, A.N. A differential scheme for the effective moduli of composites, **Mech. Mater.**, 4, 1–16, 1985.

OLSON, T. Improvements on Taylor's upper bound for rigid-plastic composites. **Mater. Sci. Eng**. A 175, 15-19, 1994.

OUARR, A. **Micromechanics of rate-independent multi-phase composites. Application to Steel Fiber-Reinforced Concrete**. Docteur en Sciences Appliqueés – Center for Systems Engineering and Applied Mechanics, Université Catholique de Louvain, Faculté des Sciences Appliquées. Louvain, Belgique, 2006.

PASQUALI, P.R.Z. **Análise limite de estruturas através de uma formulação em elasticidade não-linear**. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre, 2008.

PEDERSEN, O.B. Thermoelasticity and Plasticity of Composites I. Mean Field Theory; **Acta metall**. 31, 1795-1808, 1983.

PEDERSEN, O.B., WITHERS, P.J. Iterative Estimates of Internal Stresses in Short-Fibre Metal Matrix Composites; **Phil. Mag**. A65, 1217-1233, 1992.

PETTERMANN, H., PLANKENSTEINER, A., BÖHM, H., RAMMERSTORFER, F. A thermo-elasto-plastic constitutive law for inhomogeneous materials based on an incremental mori-tanaka approach. **Computers and Structures**, 71: 197–214, 1999.

PONTE CASTAÑEDA, P. Nonlinear Composite Materials: Effective Constitutive Behavior and Microstructure Evolution – **Continuum Micromechanics**. Springer-Verlag: 131-195, 1997.

PONTE CASTAÑEDA, P. The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites. **J. Mech. Phys. Solids**, 39, 45-71, 1991.

PONTE CASTAÑEDA, P. New variational principles in plasticity and their application to composite materials. **J. Mech. Phys. Solids**, 40, 1757-1788, 1992.

PONTE CASTAÑEDA P., SUQUET P. Nonlinear Composites; in "**Advances in Applied Mechanics** 34" (Eds. E.van der Giessen, T.Y.Wu), pp. 171{302}; Academic Press, New York, NY, 1998.

REUSS, A. Berechung der Fliessgrenze von Mischkristallen, Z. Angew. **Math. Mech.**, 9, 55, 1929.

SALENÇON, J. **Calcul à la rupture et analyse limite**. Paris: Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, 1983.

SANCHEZ-PALENCIA, E. Non-homogeneous Media and Vibration Theory, **Lecture Notes in Physics**, N° 127, Springer-Verlag, Heidelberg, 1980.

SAUTTER, M., DIETRICH, C., POECH, M.H., SCHMAUDER, S., FISCHMEISTER, H. F. Finite Element Modelling of a Transverse-Loaded Fibre Composite: Effects of Section Size and Net Density; **Comput. Mater. Sci**. 1, 225-233, 1993.

SUQUET, P. Analyse limite et homogénéisation. **C. R. Acad. Sci. Paris II**. 295, 1355-1358, 1983.

SUQUET, P. **Elements of homogenization for inelastic solid mechanics.** In Homogenization techniques for composite media, Lecture notes in Physics 272 (E. Sanchez-Palencia and A. Zaoui, ed.), Springer-Verlag, New York, 193-278, 1985.

SUQUET, P. Overall potentials and extremal surfaces of power law or ideally plastic composites. **J. Mech. Phys. Solids,** 41, 981-1002, 1993.

SUQUET, P. Overall properties of nonlinear composites: a modified secant modulus theory and its link with Ponte Castaneda's nonlinear variational procedure. **C. R. Acad. Sci. Paris**, SérieIIb 320, pp. 563-571, 1995.

SUQUET, P. **Effective behavior of nonlinear composites – Continuum Micromechanics**. Springer-Verlag: 197-264, 1997.

TALBOT, D.R.S.,WILLIS, J. R. Some explicit bounds for the overall behavior of nonlinear composites. **Int. J. Solids Struct**. 29, 1981-1987, 1992.

TANDON, G.P., WENG, G.J. A theory of particle-reinforced plasticity, **Journal of Applied Mechanics- Trans. ASME**, 55, 126-135, 1988.

TAYA, M., ARMSTRONG, W.D., DUNN, M.L., MORI, T. Analytical Study on Dimensional Changes in Thermally Cycled Metal Matrix Composites; **Mater. Sci. Engng.** A143, 143-154, 1991.

TAYLOR, G.I. Plastic strains in metals. **J. Inst. Metals**. 62, 307-324, 1938.

TORQUATO, S. Random Heterogeneous Media: Microstructure and Improved Bounds on Effective Properties; **Appl.Mech.Rev.**, 44, 37-75, 1991.

TRILLAT, M., PASTOR, J.,THORÉ, P. Limit analysis and conic programming: 'porous Drucker–Prager' material and Gurson's model. **C. R. Mecanique**, 334, pp. 599-604, 2006.

VOIGT, W. Lehrbuch der Kristallphysik, Teubner, Leipzig, p. 962, 1928.

VOIGT, W. Über die Beziehungzwischen den beiden Elasticitäts-Constanten isotroper Körper; **Ann. Phys.**, 38, 573-587, 1889.

WAKASHIMA K., TSUKAMOTO H., CHOI B.H. Elastic and Thermoelastic Properties of Metal Matrix Composites with Discontinuous Fibers or Particles: Theoretical Guidelines towards Materials Tailoring; in ”The Korea-Japan Metals Symposium on Composite Materials", pp. 102-115; **The Korean Institute of Metals**, Seoul, Korea, 1988.

WILLIS, J.R. Variational and related methods for the overall properties of composites. In **Advances in Applied Mechanics** (C. S. Yih, ed.), Academic Press, New York, 1-78, 1981.

WILLIS, J.R. The overall response of composite materials. **ASME J. Appl. Mech.** 50, 1202-1209, 1983.

WITHERS, P.J. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion in a transversely isotropic medium, and its relevance to composite materials. **Philosophical Magazine A**, 59 (4), 759–781, 1989.

ZAOUI, A. Continuum micromechanics: survey. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 128, n. 8, p. 808-816, 2002.