UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

OS DESDOBRAMENTOS TEÓRICOS DA PROPORCIONALIDADE NA ESCOLA DE EDUCAÇÃO BÁSICA

Mayra Taís Albuquerque Santos

Maceió, Julho de 2018.

Instituto de Matemática

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

MAYRA TAÍS ALBUQUERQUE SANTOS

OS DESDOBRAMENTOS TEÓRICOS DA PROPORCIONALIDADE NA ESCOLA DE EDUCAÇÃO BÁSICA

Maceió - AL

2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

MAYRA TAÍS ALBUQUERQUE SANTOS

OS DESDOBRAMENTOS TEÓRICOS DA PROPORCIONALIDADE NA ESCOLA DE EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação de Mestrado Profissional, submetida em 20 de julho de 2018 à banca examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Alagoas em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como parte dos requisitos necessários a obtenção do grau de mestra em Matemática.

Orientador: Dr Rinaldo Vieira da Silva Junior.

Maceió - AL

2018

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Bibliotecário Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale – CRB4 - 661

S237d Santos, Mayra Taís Albuquerque.
Os desdobramentos teóricos da proporcionalidade na escola de educação Básica / Mayra Taís Albuquerque Santos. - 2018.
100 f. : il.

Orientador: Rinaldo Vieira da Silva Junior.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2018.

Bibliografia: f. 91-93.
Apêndices: f. 94-100.

1. Matemática – Estudo ensino. 2. Proporcionalidade (Geometria). 5. Descritores de matemática. 4. Aprendizagem significativa. 5. Sequência didática. I. Título.

CDU: 372:514

Folha de Aprovação

MAYRA TAÍS ALBUQUERQUE SANTOS

OS DESDOBRAMENTOS TEÓRICOS DA PROPORCIONALIDADE NA ESCOLA DE EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 20 de julho de 2018.

Banca Examinadora:

Rinaldo V. da S. Jr

Prof. Dr. Rinaldo Vieira da Silva Junior – UFAL (Presidente)

Adina Rocha dos Santos

Profa. Dra. Adina Rocha dos Santos – UFAL/IFAL

Arlyson Alves do Nascimento

Prof. Dr. Arlyson Alves do Nascimento – IFAL

MACEIÓ - 2018

Em memória de Wiliane dos Santos Rodrigues

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Valquíria por nunca me mostrar a desistência como uma opção e me dando apoio em todos os momentos em que as coisas já não pareciam muito certas.

Aos companheiros de viagem Cláudio Roberto, Clewerton do Santo Silva, Elvis Gomes e Gerlan Soares, com os quais foram divididas tantas batalhas e conquistas, dia-a-dia.

Aos colegas da turma que se propuseram a abdicar juntamente, dos feriados, fins de semana e até momentos em família em nome de um sonho.

Aos companheiros da escola Manoel André que sempre estiveram presentes nessa caminhada, me dando estimulo e me oferecendo oportunidades de crescer tanto profissionalmente como quanto pessoa.

Aos meus alunos da escola Manoel André que nunca me deixaram esquecer que o mestrado não era somente um título, mas uma conquista coletiva, da qual eles foram parte essencial. Em especial a Wiliane dos Santos Rodrigues que se foi cedo, mas fez compreender o compromisso que carrega o professor.

Aos nossos professores que vestiram a camisa do PROFMAT, professores por vocação, Adina Rocha, André Flores e Isnaldo Isaac e mostraram que ensinar de fato pode ser uma missão de empatia e superação, e cujo exemplo carregarei nas jornadas que irei trilhar daqui em diante.

Ao meu orientador Rinaldo Vieira da Silva Junior pelo apoio e incentivo em tanto momentos dessa caminhada.

Por fim, agradeço a todos que estiveram presentes me oferecendo apoio, mas principalmente aos que não, pois foram esses que me fizeram entender que a única pessoa capaz me impor limites sou eu.

Não adianta olhar para o céu com muita fé e pouca luta.

Gabriel Pensador

RESUMO

Esse trabalho tem como iniciativa estudar a proporcionalidade numa perspectiva mais ampla e natural à natureza com a qual se concebeu a matemática. Para isso, deseja-se ampliar a compreensão do conteúdo e apresentando sob um aspecto mais amplo, indo de encontro com o aspecto simplista das bibliografias para o Ensino Básico, a fim de obter recursos necessários que justifique a Sequência Didática proposta para turmas de 9º ano do Ensino Fundamental, sobre Semelhança e Medidas de Volume.

Para dá corpo a proposta a dissertação foi dividida em quatro capítulos. O primeiro apresenta uma construção histórica da proporcionalidade, onde se tem a Comensurabilidade, Os *Elementos* de Euclides e o Teorema de Tales. O capítulo 2 tem como foco Princípio de Cavalieri e o Teorema de Pappus, que tem forte relação com o capítulo seguinte que trata da proporcionalidade de sólidos, em particular de Poliedros e Sólidos de Revolução, de forma a ampliar a perspectiva de tratamento desse conteúdo na prática de ensino da Matemática.

Por fim o capítulo 4 trás a proposta de Sequência Didática sobre Semelhança e Medidas de Volume, direcionada ao 9º ano do Ensino Fundamental, com 7 atividades com tempo de aplicação de 14 horas aula; além de algumas sugestões de conteúdos nos quais a proporcionalidade já é ou pode ser fortemente utilizada.

A proposta apresentada tem por finalidade usar esquemas mentais preexistentes para construir outros, gerando a valorização da aprendizagem significativa por parte do docente que ensina matemática e significado para o aluno dentro da própria matemática, para estimular a descoberta tanto de conteúdo novos como a sua importância em todos os aspectos da vida social.

Palavras-chave: Proporcionalidade; Geometria; Aprendizagem Significativa; Descritores para Matemática.

ABSTRACT

This work has as an initiative to study the proportionality of a broader and natural perspective to the nature with which the classical mathematics was conceived. To do this, we want to broaden the understanding of the content and present it in a broader perspective, going against the simplistic aspect of bibliographies for Basic Education, in order to obtain necessary resources that justify the proposed Didactic Sequence for 9th grade of Elementary School, on Similarity and Volume Measures.

To give substance to the proposal the dissertation was divided into four chapters. The first presents a historical construction of proportionality, where we have the Comensurability, The Elements of Euclid and The Theorem of Thales. Chapter 2 focuses on Cavalieri's Principle and Pappus's Theorem, which has a strong relationship with the following chapter dealing with the proportionality of solids, in particular Polyhedra and Solids of Revolution, in order to broaden the perspective of treatment of this content in the practice of teaching mathematics.

Finally, chapter 4 brings the proposal of the Didactic Sequence on Similarity and Volume Measures, directed to the 9th year of Elementary School, with 7 activities with application time of 14 hours class; besides some suggestions of contents in which the proportionality already is or can be used strongly.

The purpose of the present proposal is to use preexisting mental schemas to construct others, generating the appreciation of meaningful learning by the teacher who teaches mathematics and meaning to the student within mathematics itself, to stimulate the discovery of both new content and its importance in all aspects of social life.

Keywords: Proportionality; Geometry; Significant Learning; Descriptors for Mathematics.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

JUSTIFICATIVA

O interesse em pesquisar respeito do tema de Proporcionalidade surgiu a partir das atividades em sala de aula, assim como também dos treinamentos de avaliações externas, onde se pode verificar a importância e forte presença no currículo da educação básica do tema citado.

No exercício da atividade de ensino verificou-se também que a importância de diversos aspectos do conteúdo que por vezes são poucos explorados, os quais vão ser apresentados ao longo do trabalho. Para tanto é necessário compreender que a educação básica tem em seu currículo uma série de conteúdos tidos como de fundamental importância para o tipo de sujeito que se deseja formar no Brasil, de modo que esse possa obter na escola o que é denominada de formação integral do sujeito, segundo a LDB[1] (2017,p.8), "A educação... tem por finalidade o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho."

Segundo o princípio formativo, a educação tem papel fundamental no desenvolvimento pleno do educando, assim como no seu preparo para o exercício da cidadania e preparo para o trabalho, entretanto, se faz necessário compreender o papel do currículo de cada disciplina na formação dessas aptidões do discente.

Exercer cidadania, é está preparado para o mundo do trabalho, trata-se de ser capaz de tomar decisões diante da complexidade da sociedade. Nessa perspectiva, a Matemática tem papel fundamental visto que a organização social, que se tornou tão complexa que a Matemática se faz necessária em todos os seus setores; desde os mais complexos e sofisticados, onde são movimentadas altas quantias financeiras e utilizadas as tecnologias mais elaboradas, até setores que para leigos, não possuem influência direta da Matemática, (aparentemente) como postos de saúde, órgãos de recursos humanos e etc.

Nesse contexto, cada conteúdo matemático no currículo da Educação Básica tem sua importância social, e como patrimônio historicamente construído do homem deve ser de acesso de todos garantindo ao cidadão a universalização do conhecimento científico comum e universal.

[1] Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional

Dessa forma, podemos afirmar que os conteúdos de matemática da educação básica são divididos em blocos de conteúdos dos quais se tem o bloco de “Grandezas e Medidas” que:

> “Este bloco caracteriza-se por sua forte relevância social devido a seu caráter prático e utilitário, e pela possibilidade de variadas conexões com outras áreas do conhecimento. Na vida em sociedade, as grandezas e as medidas estão presentes em quase todas as atividades realizadas. Desse modo desempenham papel importante no currículo, pois mostram claramente ao aluno a utilidade do conhecimento matemático no cotidiano.” (PCN de matemática, 1998, p. 51-52)

Nota-se que esse bloco tem um caráter social forte, visto que é possível encontrar com clareza aplicações e ligações com a realidade social do aluno, fazendo com quem o mesmo sinta-se mais próximo, enquanto sujeito ativo da prática matemática e tornando-o conteúdo de caráter significativo para os mesmo. Não obstante, do caráter social desse bloco tem-se que:

> “As atividades em que as noções de grandezas e medidas são exploradas proporcionam melhor compreensão de conceitos relativos ao espaço e às formas. São contextos muito ricos para o trabalho com os significados dos números e das operações, da idéia de proporcionalidade e um campo fértil para uma abordagem histórica.” (PCN de matemática, 1998, p.52)

Notavelmente, esse bloco é rico em conceitos que proporcionam melhores conceitos relativos à geometria de forma geral, tendo em si ferramentas muito importantes para melhoria da compreensão desses, além de enriquecer o trabalho com números e operações com sua infinidade de perspectivas e aplicações utilizando o conceito de *Proporcionalidade*, que é um campo rico de trabalho, não somente do ponto de vista teórico da matemática e de suas aplicações, como também do ponto de vista histórico e metodológico.

Entretanto, mesmo que o bloco de grandezas e medidas, que é intimamente associado ao de *Proporcionalidade*, e possibilita maior proximidade dos fatos sociais e consequentemente do alunado, pois esse consegue se mostrar claramente significativo quando, por exemplo, é apresentada a receita de uma fornalha de biscoitos a qual se deseja produzir apenas meia fornalha.

No que se refere à aprendizagem significativa Ausubel (1982) tem três vantagens em relação à aprendizagem que é obtida por repetição ou memorização:

- O conhecimento aprendido de forma significativa é lembrado por mais tempo;
- O conteúdo que foi apreendido de forma significativa amplia a capacidade de aprendizagem de conteúdos que tem como base os esquemas mentais aprendidos nesse;
- Uma vez que o conteúdo é aprendido de forma significativa à reaprendizagem dele se torna mais rápida.

O conteúdo, entretanto, por conta de suas características, já citadas, é visto de forma simplista, fazendo com que inúmeros aspectos importantes do mesmo se percam, e dificultando que esse seja associado a todas as suas demais manifestações na educação básica como, por exemplo, Razão e Proporção, Semelhança de Triângulos, ou mesmo a aplicações em disciplinas distintas como física e química.

Essa visão simplista, sem a preocupação em construir uma Sequência Didática que favoreça a construção de uma aprendizagem significativa pode representar um barreira à aprendizagem, pois é necessário ter em mente que a aprendizagem tem como necessidade essencial gerar desconforto, para que o aluno busque-o na apreensão dos conteúdos, a fim de reequilibrar seus esquemas mentais.

Tendo em mente os elementos apresentados o trabalho foi dividido em quatro capítulos que tem como fim passear pela proposta didática apresentada como produto do mesmo, que é uma Sequência Didática para o 9º ano, pautada no conceito da Aprendizagem Significativa de Ausubel.

Dessa forma, o primeiro capítulo fala a respeito de conceitos históricos, que mostram que o conteúdo possui fundamentalmente natureza geométrica e desse modo é uma escolha inteligente que esses sejam apresentados ao aluno sob essa perspectiva. Para tanto, serão são apresentados, a Comensurabilidade, Os *Elementos* de Euclides e o Teorema de Tales.

O capítulo 2 trabalhará o Princípio de Cavalieri enquanto axiomático, como apresentado na educação básica, e Teorema de Pappus, enquanto sua importância para o cálculo de áreas e volumes de sólidos de revolução.

O terceiro capítulo trata de proporcionalidade de Poliedros quanto aos Sólidos de Revolução de forma geral, definindo a Semelhança e a Constante de Proporcionalidade, caso exista a Semelhança.

O último capítulo apresenta a Sequência Didática, e o tratamento que pode ser dado a alguns a conteúdos do Ensino Médio e disciplinas afins como Física.

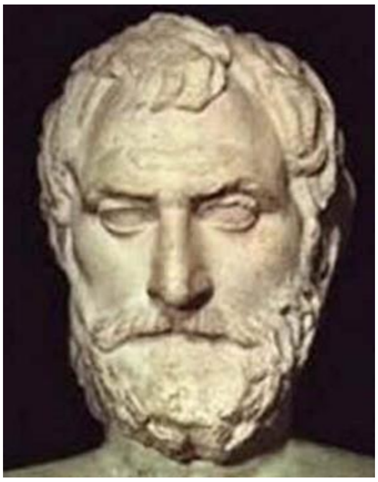
Vejamos a seguir elementos de cunho histórico que colaboram para construção da perspectiva de proporcionalidade apresentada como forma de tratamento de alguns conteúdos do ensino médio e até mesmo anos finais do ensino fundamental.

1. CONTEXTO HISTÓRICO

A noção de Proporcionalidade está muito presente na Matemática e em vários momentos de sua história, alguns mais significativos que outros. Entretanto, na antiguidade, a área da Matemática que mais se destacou inicialmente, para além de problemas cotidianos, foi à Geometria. Isto se justifica, pelo fato da Matemática ter a finalidade inicial, de resolver problemas práticos de cada sociedade.

A história conta que um dos primeiros matemáticos gregos foi Tales de Mileto (séc. XII-XI a. C.), que teria sido influenciado pelos egípcios e mesopotâmicos. Tales tem seus contados, através de gerações, seus feitos; por exemplo, ter medido a altura de uma pirâmide do Egito relacionando suas dimensões a dimensões de sua sombra.[2]

Figura 1- Tales de Mileto



Fonte: auladefilosofia.net

Inicialmente, os gregos praticavam uma Geometria muito semelhante à noção de matemática desenvolvida no Antigo Egito e na Mesopotâmia, onde as medidas eram marcadas por cálculos e algoritmos, e transformadas em números e tinham significado na vida prática.

Partindo desse ponto para desenvolver a Matemática fundada em argumentos lógicos consistentes e demonstrações praticadas pelos gregos, não havendo precisão histórica de como houve essa transição. A seguir, este capítulo irá tratar da Comensurabilidade de Segmentos, dos *Elementos* de Euclides em suas partes que

[2] Tales mediu a altura da pirâmide usando as relações de proporcionalidade de seu teorema.

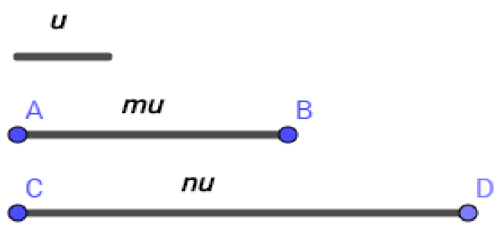
interessa ao estudo, do Teorema de Tales; e finalmente, do desenvolvimento das ciências e da proporcionalidade, a fim de construir um panorama claro da importância desses conceitos, tanto na teoria Matemática largamente difundida na sociedade, como sua relevância histórica.

1.1. Comensurabilidade

Define-se comensuráveis, dois segmentos de reta quaisquer $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, tais que existe algum segmento u, o qual chamamos, unidade, que cabe exatamente $m\ vezes$ em AB e $n\ vezes$ em CD.

De modo análogo, diz-se que dois segmentos são incomensuráveis se, não existe unidade de medida comum, isto é, que os segmentos respectivos não sejam múltiplos dela.

Figura 2- Segmentos Comensuráveis



Fonte: Autoria Própria

Note que, na Figura 2 existe um segmento de comprimento u tal que, cabe $m\ vezes$ em AB e $n\ vezes$ em CD.

A partir desse problema, podemos discutir problemas como razão entre segmento, estendendo o mesmo a números naturais; por conseguinte aos números inteiros, o justificando geometricamente a simplificação de frações como analisaremos a seguir.

Comumente, os livros didáticos e materiais de pesquisa encontrados na internet, apresentam a introdução a conteúdo de Frações, forma concreta, através do uso de objetos. Entretanto, o tratamento geométrico desse, foi historicamente construído.

Tome dois segmentos comensuráveis, $AB = 3u$ e $BC = 5u$, que se encontram sob uma mesma reta suporte.

Note que:

$AB: BC = 3u: 5u$ (Diz-se: AB está para BC na razão que $3u$ está para $5u$.)

O que equivale à:

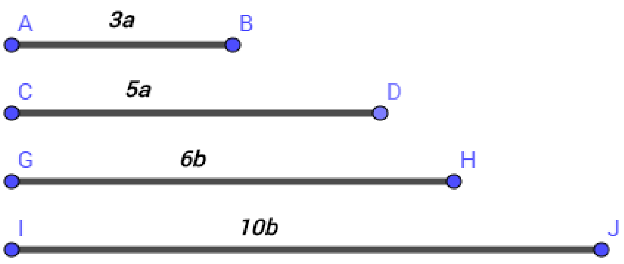
$AB: BC = 3: 5$ (Diz-se: AB está para BC na razão que 3 está para 5.)

Isso equivale dizer que existe uma unidade u, tal que para cada 3 unidades u em AB existe necessariamente 5 unidades u em BC.

Tomando outros dois segmentos $EF = 6b$ e $GH = 10b$, então:

$EF: GH = 6b: 10b$.

Figura 3- Pares de Segmentos Comensuráveis



Fonte: Autoria Própria

Observe que o primeiro exemplo claramente o segmento que servia de unidade de medida era o u. Note, entretanto que, na segunda situação observa-se que há duas possibilidades para a unidade, b e $2b$.

Vemos assim, um problema clássico da Matemática na Educação Básica, que é a simplificação de Frações, que se trata de tomar a maior unidade de forma que os dois segmentos considerados sejam comensuráveis, o que equivale à $EF: GH = 3: 5$.

Apresentemos agora, uma situação com quatro segmentos, $AB = 2a, BC = 3a$, $CD = 4b$ e $DE = 6b$, de tal forma que $AB: BC = 2: 3$ e $CD: DE = 4: 6$ (ou $2: 3$), logo: $AB: BC = CD: DE$.

Definição 1: Denomina-se proporção a igualdade entre duas razões.

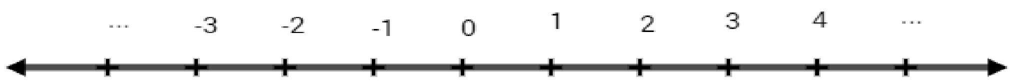
Usualmente a notação $AB: BC$ foi substituída pela notação de fração, $\frac{AB}{BC}$, visto a útil atende a mudança de perspectiva no tratamento dos números enquanto abstratos.

Essa notação conceitua uma fração como a razão entre dois números inteiros a e b, tal que b é diferente de zero. Ao contrário da relação anterior, que atendia a relação entre dois segmentos.

Para justificar isso, iniciaremos relembrando que a natureza geométrica da Matemática, preponderou durante muitos séculos, pois só no final do século XVI os números foram aceitos como entes abstratos. Por isso que, os conceitos matemáticos sobre os quais se apoiam o conteúdo citado acima são relativamente recentes.

Se tratando dos conjuntos numéricos, os números inteiros podem ser definidos geometricamente sobre uma reta; sobre a qual é tomada uma origem onde se localiza o 0 (zero) , tal que, à direita os números crescem na razão de uma unidade infinitamente (1, 3, 4,...), e a esquerda decrescem na mesma razão no sentido oposto simetricamente, recebendo o nome de inteiros negativos (-1, -2, -3,...), visto que os outros eram positivos.

Figura 4- Reta dos Números Inteiros



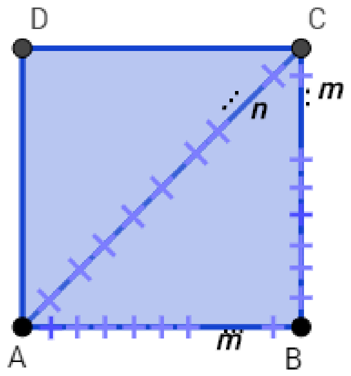
Fonte: Autoria Própria

Tendo conhecimento da natureza geométrica da Matemática e da transição sofrida, de ciência aplicada à ciência abstrata, a seguir apresentaremos o problema da Incomensurabilidade[3] da diagonal do quadrado.

Problema 1: Um problema muito interessante é o da incomensurabilidade da diagonal de um quadrado em relação ao seu lado.

[3] Denominam-se incomensuráveis dois segmentos, para os quais não existe uma mesma unidade u, que esteja contido nos mesmo um número exato de vezes, isto é, não comensurável.

Figura 5- Quadrado com Diagonal Demarcada



Fonte: Autoria Própria

Para mostrar que a diagonal de um quadrado em relação a seu lado é incomensurável, basta supor que haja um segmento de reta u, que caiba m vezes em AB e $n\ vezes$ na diagonal AC do quadrado $ABCD$.

Tomando AB como unidade comprimento, temos que $\frac{AC}{AB} = \frac{nu}{mu}$.

Logo, $\frac{AC}{AB} = \frac{n}{m}$.

Tomando a medida de $AC = \frac{n}{m}$, e a medida de $AB = 1$.

Pelo Teorema de Pitágoras, temos: $\left(\frac{n}{m}\right)^2 = 1^2 + 1^2$, isto é, $n^2 = 2m^2$.

Absurdo, pois se m par ou impar o número de fatores pares de $2m^2$ é impar. Portanto, o número de n^2 também deve possuir um número impar de fatores 2, o que é claramente impossível.

Na seção seguinte, serão apresentados alguns conceitos contidos nos *Elementos* de Euclides, que são importantes para construção de relações de Proporcionalidade entre áreas de figuras geométricas primitivas (triângulos, retângulos e circunferências). Visto que essa seção apresenta a relação proporcionalidade de forma linear ao associar segmentos, entretanto, para prosseguir é necessário definir o que é a Constante de Proporcionalidade.

1.2. Geometria nos Elementos de Euclides

Os Elementos, de Euclides, é um dos mais importantes trabalhos da Matemática, pois dá início a uma Matemática estruturada em fundamentos sob os quais está estruturada a Matemática moderna, que são definições, postulados e axiomas.

Existem várias teorias a respeito desses trabalhos, a principal é que Euclides de fato existiu, e que escreveu os *Elementos*. Outra diz que na verdade Euclides foi um editor, que reuniu os trabalhos em matemática; ou ainda que Euclides fosse o nome de um pseudônimo de um grupo de matemáticos. Entretanto, existem relatos em alguns documentos de lugares por onde ele teria passado, reforçando a primeira teoria.

Os *Elementos* são formados por 13 livros, ou se considerar as traduções em português, atualmente utilizadas 13 capítulos. Os livros podem ser divididos segundo os temas tratados da seguinte maneira: Geometria Plana (livros I a VI), Aritmética (livros VII a IX) e Geometria Espacial (X a XIII).

Considerando o foco do trabalho, o que de fato interessa ao corpo do trabalho é a parte que trata de Geometria Espacial. Entretanto, é necessário construir sistematicamente a partir da Geometria Plana os conceitos necessários ao estudo realizados. Então serão tratados nos seis primeiros livros dos *Elementos*, os quais serão discutidos a seguir.

O livro I inicia-se com as seguintes definições:

I. Ponto é o que não tem partes, ou o que não tem grandeza alguma.

Acima se pode verificar foi definido intuitivamente o ponto, e a seguida linha e superfície. Diferentemente do que se pode imaginar, as primeiras definições se apegam a conceitos finitos.

II. Linha é o que tem comprimento sem largura.
III. As extremidades da linha são pontos.
IV. Linha reta é aquela, que está posta igualmente entre as suas extremidades.
V. Superfície é o que tem comprimento e largura.
VI. As extremidades da superfície são linhas.

A partir desses conceitos intuitivos, denominados definições o livro vai apresentar axiomas, postulados e proposições, que podem ser divididas em teoremas e problemas. Por fim, será apresentada uma leitura da Equivalência de Áreas dos livros I e II para logo após falar sobre a Teoria de Razões e Proporções apresentada no livro IV.

Os primeiros problemas dos Elementos tratam de construções geométricas com régua e compasso, a fim de demonstrar geometricamente as propriedades desejadas. Para não se distanciar do objetivo do trabalho, o trabalho iniciará tratando da “Proposição 4”, do livro I, que possui o seguinte enunciado:

> “Se dois triângulos tiverem respectivamente dois lados iguais a dois lados e se os ângulos compreendidos por estes lados forem também iguais, as bases serão iguais, os triângulos serão iguais e os demais ângulos que são opostos a lados iguais, serão também iguais.” (Euclides, 44, p.10)

Acima vemos que se trás que quando dois triângulos possuem dois de seus lados congruentes entre, e também o ângulo entre esses lados congruentes, então os triângulos são congruentes.

A solução proposta na época era a sobreposição dos triângulos, que não é aceita como demonstração atualmente. Enunciava-se que, colocando-se sobrepostos os lados e os ângulos congruentes dos dois triângulos, de forma que seja possível verificar que o terceiro lado e os demais ângulos também são congruentes, demonstrando assim a congruência entre os triângulos.

Uma solução clássica aceitável nos dias de hoje é a construção com régua e compasso, onde é imediata a congruência do terceiro lado. Podendo verificar a congruência dos demais ângulos com a Lei dos Senos[4].

No que se refere ao tratamento de áreas, já se sabia calcular áreas de figuras primitivas como triângulos, quadrados e retângulos, problemas que não interessavam muito a Matemática. Entretanto, um problema da época que era de grande interesse, é o denominado “Quadratura”, onde escolhida uma curva ou uma poligonal qualquer, limitada, se investigava qual seria a medida do lado do quadrado

---

[4] Essa proposição remete ao que se conhece atualmente como um dos casos de congruência de triângulos, denominado lado, ângulo, lado (LAL), que é um dos pontos de partida da geometria de semelhança na educação básica.

de mesma área que a da curva ou poligonal escolhida, problema o qual foi sendo solucionado através dos séculos para cada tipo de curva, como a quadratura da parábola.[5]

A teoria que ajuda realizar a quadratura da poligonal foi exposta por Euclides nos livros I e II, e mais adiante no livro IV usando a teoria de Eudoxo, onde foram usados muitos fatos trazidos nos livros I, II e III. Entretanto, pela necessidade de não se fazer muito prolixo iremos enunciar apenas as proposições minimamente necessárias.

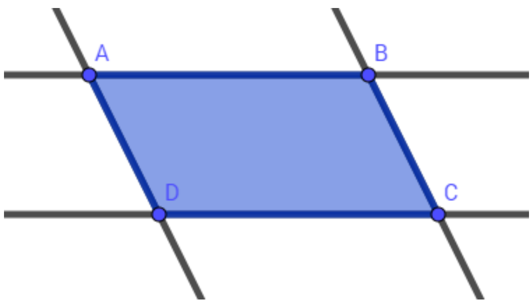
A proposição 34 de livro I enuncia que, “em um paralelogramo, os lados e os ângulos opostos são iguais e o paralelogramo é dividido pela diagonal em duas partes iguais”.

Figura 6- Paralelogramo

Fonte: Autoria Própria

Como o paralelogramo é determinado por quatro retas não coincidentes, onde traçadas duas paralelas entre si, *r* e *s*. Dadas às duas outras também paralelas entre si, *p* e *q*, e concorrentes com r e s. À região delimitada entre essas quatro retas é o paralelogramo, vejamos na Figura 7 abaixo.

Figura 7- Paralelogramo Determinado por Retas Opostas Paralelas



Fonte: Autoria Própria

[5] Problema resolvido por Arquimedes no século XVII, através da curva mecânica construída e intitulada pelo mesmo de “espiral”.

Para mostrar que de fato um paralelogramo tem suas diagonais divididas em duas partes iguais, como a Proposição 34 apresenta, seguiremos algumas orientações:

1) Trace todos os ângulos correspondentes a um escolhido inicialmente;
2) Note que existe um ângulo externo que é oposto pelo vértice a um interno, então os ângulos internos opostos são congruentes;
3) Com os outros dois ângulos internos ainda não citados, são suplementares aos dois internos em evidência, então são congruentes;
4) Usando o caso ALA de congruência de triângulos temos que, seus lados opostos são congruentes, assim como já se sabia dos seus ângulos opostos.

Usando as informações obtidas, e traçando uma das diagonais do paralelogramo esse passa a ser dividido em dois triângulos. Pode-se verificar a existência do caso LAL de congruência de triângulos, logo temos dois triângulos congruentes.

A partir dessa definição, podemos tirar outras conclusões, como que dois paralelogramos de mesmas alturas que estão sobre uma mesma base (ou com bases congruentes e entre as mesmas paralelas) são congruentes. O mesmo conceito pode ser estendido aos triângulos, uma vez que, um paralelogramo é dividido em dois triângulos iguais por uma de suas diagonais, seja qual for a diagonal escolhida.

Esses resultados dão suporte para resolver o problema da Quadratura da Poligonal através do seguinte problema:

“Dado um triângulo, construir um retângulo com a mesma área.”

A solução do problema pode ser feita utilizando a seguinte construção:

1) Dado o triângulo OPQ, complete-o de forma a construir o paralelogramo $OPQR$, cuja área é o dobro da área do triângulo.
2) Tomando um ponto no interior D no interior de QR e E não pertencente a QR, construa o quadrado $OPED$ com lado medindo OP.

3) Traçando o ponto F médio de OP e construindo uma paralela a PE a partir do mesmo, obtêm-se dois retângulos de mesma altura e área do triângulo OPQ.

Obtido o retângulo de mesma base que o triângulo dado, iremos a partir desse retângulo, construir o quadrado de mesma área que o retângulo.

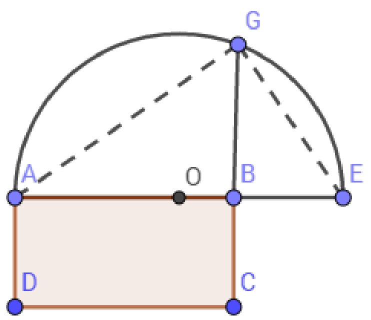
Para isso, construiremos ao retângulo $ABCD$, no qual se lados AB e BC forem iguais o problema foi resolvido.

Prolonguemos o lado AB até o ponto E de forma que $BE = BC$. Em seguida, trace o ponto médio do segmento AE, e depois a semicircunferência de raio AO. Logo após, prolongue até o ponto G na circunferência o lado CB.

Sabendo que, o triângulo AEG é retângulo em G, então $AB.BE = BG^2$, ou seja, $BG = \sqrt{AB.BE}$ é o lado do quadrado com área igual ao retângulo.

Veja na Figura 8 abaixo desenhada segundo a construção enunciada.

Figura 8- Quadratura do Retângulo



Fonte: Autoria Própria

.

Portanto, a quadratura da poligonal é feita dividindo a poligonal em triângulos para encontrar o retângulo com mesma área à de cada triângulo dado. Em seguida se faz a quadratura dos retângulos obtidos, sendo a soma das áreas dos quadrados obtidos igual à área da poligonal. ■

Tratado o conceito de equivalência de áreas nos livros I e II, o livro V apresenta uma teoria de razões e proporções, onde é tratado o critério de proporcionalidade a partir da relação entre quatro segmentos de retas.

A definição 6 do livro V coloca que grandezas que possuem a mesma razão são chamadas Proporcionais, sendo que esse conceito será aplicado somente a Grandezas Homogêneas.

Definição 2: Considere p e q Grandezas Homogêneas. Dizemos que elas são proporcionais se, e somente se, para todo par de inteiros positivos p e q, temos que:

(i) Se $pa < qb$ então $pc < qd$.

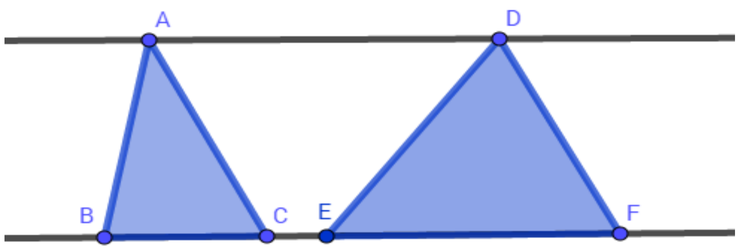
(ii) Se $pa = qb$ então $pc = qd$.

(iii) Se $pa > qb$ então $pc > qd$.

Fazendo uso do conceito de Proporcionalidade e de grandezas homogêneas surgem algumas aplicações nos livros posteriores tidas como proposições, como por exemplo, no livro VI tem-se que triângulos e paralelogramos de mesma altura têm bases proporcionais a suas áreas. Assim como, o livro XII trás que as áreas dos círculos são proporcionais ao quadrado de seus respectivos raios.

Seguem demonstrações das citadas proposições nos moldes da matemática na atualidade.

Figura 9- Triângulos com Mesma Altura



Fonte: Autoria Própria

Tome dois triângulos com mesmas alturas (Veja a Figura 9), e sabendo que a área de um triângulo é dada por $S = b.h$ (sendo b a base e h a altura do triângulo), temos que:

$S_{T_1} = b_1.h$ e $S_{T_2} = b_2.h$.

Fazendo:

$$\frac{S_{T_1}}{S_{T_2}} = \frac{b_1.h}{b_2.h}$$

$$\frac{S_{T_1}}{S_{T_2}} = \frac{b_1}{b_2} \qquad \blacksquare$$

De forma análoga, temos se dois retângulos tem mesmas alturas com áreas respectivas A_1 e A_2, e respectivas bases b_1 eb_2, então:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{b_1}{b_2} \qquad \blacksquare$$

Quanto ao círculo teremos que sendo sua área $A = \pi r^2$, então considerando dois círculos de raios r_1 e r_2, temos que:

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \qquad \blacksquare$$

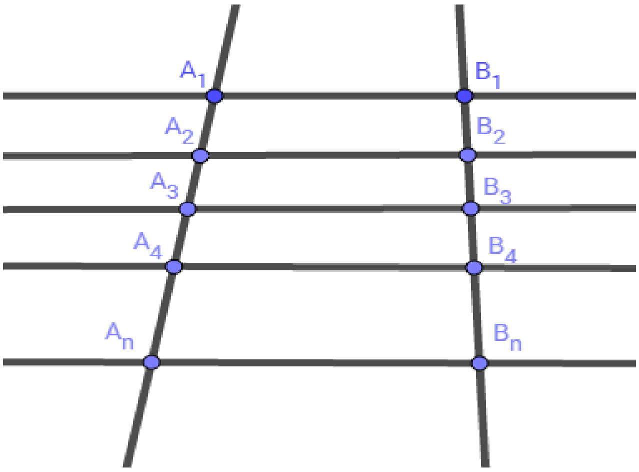
1.3. Teorema de Tales e Aplicações

Nessa seção iremos tratar do *Teorema de Tales*, pois já mostramos argumentos necessários para justificar a Comensurabilidade de segmentos, e enunciamos Fração de forma superficial e definimos Proporção. Veremos a seguir a demonstração do teorema, que estenderá a compreensão da proporcionalidade não somente para segmentos ou de frações, mas para qualquer número real.

Teorema 1 (Teorema de Tales): Dado um feixe de retas paralelas e duas transversais. Temos que os segmentos que resultam da interseção entre duas paralelas são proporcionais.

Essa proporcionalidade de segmentos leva a analisar que se sobre uma transversal se determinam os segmentos A_1A_2, A_2A_3, $A_3A_4, ..., A_{n-1}A_n$ e na mesma ordem na outra transversal temos B_1B_2, B_2B_3, $B_3B_4, ..., B_{n-1}B_n$, observe a Figura 10 abaixo.

Figura 10- Feixe de Paralelas Cortado por Duas Transversais



Fonte: Autoria Própria

Então segundo o *Teorema de Tales,* teremos que:

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \frac{A_3A_4}{B_3B_4} = \cdots = \frac{A_{n-1}A_n}{B_{n-1}B_n} = k.$$

Daí, definimos k como sendo a constante de proporcionalidade[6] da relação.

A seguir veremos a construção geométrica necessária à demonstração do teorema enunciado para os reais.

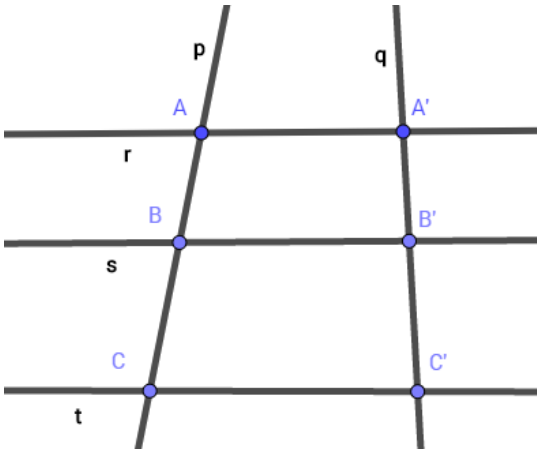
Demonstração:

Para demonstrar o *Teorema de Tales*, consideremos num mesmo plano, três retas paralelas entre si *r, s* e *t*.

Traçando duas retas p e q concorrentes as três primeiras, respectivamente, nos pontos A, B e C, e A', B' e C', como na Figura 11.

[6] Denomina-se constante de proporcionalidade a constante que determina que duas ou mais razões entre dois valores (ou grandezas) são os mesmos, fazendo existir a proporcionalidade.

Figura 11- Feixe de Paralelas Interceptadas por Duas Concorrentes



Fonte: Autoria Própria

Suponha $\overline{AB} = \overline{BC}$.

Então pelo Teorema da Base Média teremos que $\overline{A'B'} = \overline{B'C'}$.

Fazendo:

$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = 1$, implica que $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = 1$.

Suponhamos que, $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ seja um número racional, tomemos $\frac{3}{5}$. Então podemos dividir AB e BC em 3 e 5 partes iguais respectivamente, cada uma com tamanho a.

Analogamente, há a mesma relação entre $\overline{A'B'}$ e $\overline{B'C'}$, com unidade de medida de tamanho b.

Daí:

$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{2}{3}$, implica em $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{2}{3}$.

Suponhamos agora que:

$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{m}{n}$ Com m, n naturais.

Então:

$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{m}{n}$, implica que $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{m}{n}$.

Portanto, $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$.

Claramente, o que já foi discutido nos mostra que o resultado é válido para os racionais. Mostraremos a seguir, que o resultado também é válido para os irracionais.

Consideremos $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então existe $a \in \mathbb{Q}$ tal que $x < a < x + \frac{1}{n}$.

Suponhamos que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = x$ seja irracional.

Escolhamos então uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ de números racionais positivos tal que $x < a_n < x + \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Marque o ponto $C_n \in p$ tal que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC_n}} = a_n$.

Consideremos t_n a paralela às retas r, s e t traçada por C_n e $C_n' \in q$, temos de forma análoga ao caso anterior temos que $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C_n'}} = a_n$.

Daí:

$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC_n}} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} + \frac{1}{n}$.

Logo:

$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} < \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C_n'}} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} + \frac{1}{n}$.

Note que, quando $n \to \infty$, então:

$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C_n'}} \to \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$.

Analogamente, quando $n \to \infty$, então:

$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C_n'}} \to \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$.

Como uma sequência só pode convergir para um único valor, então pode - se concluir que:

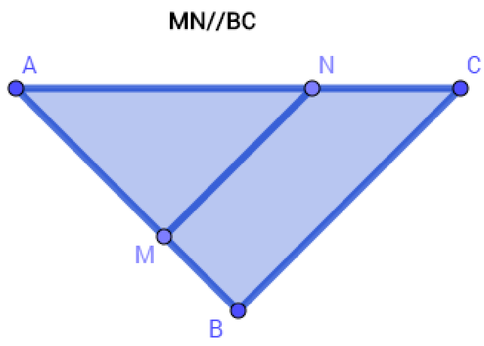
$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$.

Portanto, teorema vale para todo valor real. ■

A utilidade mais importante desse teorema são as relações de entre segmentos em polígonos. Vejamos a seguir algumas situações que podem ser ilustradas a partir dele:

1) Num triângulo ABC tem-se MN paralelo a base BC, tal que $M \in AB$, $N \in AC$. Temos que se $\overline{AM} = \overline{MB}$, então $\overline{AN} = \overline{NC}$. Veja a Figura 12.

Figura 12- Triângulo ABC com Segmento Paralelo a Base BC



Fonte: Autoria Própria

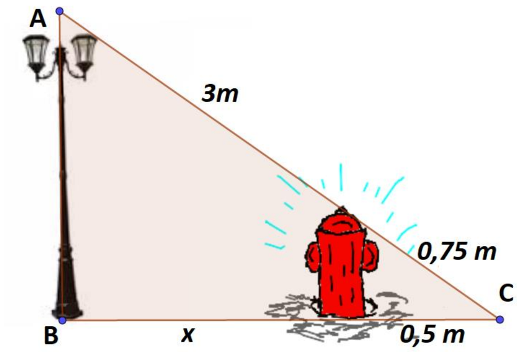
Consideremos três retas paralelas entre si, sendo essas $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{MN}$ e $t(A \in t)$. Por hipótese, temos que $\overline{AM} = \overline{MB}$, logo pelo Teorema de Thales $\overline{AN} = \overline{NC}$.

O problema resolvido é denominado Base média do Triângulo, e pode ser aplicado não somente em triângulos, como também em quadriláteros de forma semelhante.

2) Usando o Teorema de Thales é possível de calcular distâncias e alturas, e problemas diversos. Veja a seguir.

Problema 2: Considere um poste cuja distância de seu ponto mais alto ao ponto mais alto de um hidrante é de 3m, igualmente, com o mesmo ângulo de inclinação usado, a distância do alto do hidrante ao chão é de 0,75 m e do chão a sua base de 0,5 m como mostra a Figura 13 abaixo.

Figura 13- Ilustração do Problema 2



Fonte: Autoria Própria

Uma proposta para resolução de problemas bem comum para a situação descrita é calcular a distância do hidrante ao poste, que são as distâncias de suas respectivas bases.

Usando o Teorema de Thales temos:

$$\frac{0,75}{3} = \frac{0,5}{x}.$$

Logo, $x = 2\,m$.

Feita uma análise construtiva da Proporcionalidade, tanto linear quanto plana; veremos a seguir esses conceitos são importantes na histórica no desenvolvimento das ciências, em particular na astronomia. Assim, adiante serão apresentados alguns fatos históricos relevantes a respeito dessa e a matemática.

1.4. O desenvolvimento das ciências e a proporcionalidade

A Proporcionalidade é de fundamental importância na história das ciências, pois é conhecido que não somente matemáticos como também astrônomos da antiguidade usavam largamente esse conceito, em particular, fazendo semelhança e congruência de triângulos.

Apesar dos vários problemas que os matemáticos tentavam resolver, alguns problemas clássicos de astronomia se destacaram, como, o cálculo da distância da

Terra ao Sol, da distância da Terra à Lua e o tamanho da circunferência da Terra[7]. O último problema foi mais bem estimado por Cláudio Ptolomeu[8], que calculou a circunferência terrestre em torno de 6,28 Km, valor que atualmente é estabelecido em 6.378 Km.

Além de Cláudio Ptolomeu pode-se citar também os trabalhos de Aristarco (séc. III A.C.), que se destacou não por conseguir calcular com precisão, pois esse conseguiu resultados muito distantes da realidade, mas pelo uso de conceitos básicos de geometria como Semelhança de Triângulos e Proporcionalidade.

Outro astrônomo ilustre foi Erastótenes (276-196 A. C.) que trabalho com a estimativa do raio da Terra, e foi o mais celebre na missão quando fez a seguinte observação:

> "Era sabido que quando o Sol se encontrava mais ao norte (solstício de inverno, para nós, habitante do hemisfério Sul), os raios solares caiam verticalmente, ao meio dia, na localidade Siene, hoje Assua, pois a imagem do Sol podia ser vista refletida nos poços mais profundos daquela cidade. Ao mesmo tempo, em Alexandria, os raios solares caiam inclinadamente, fazendo um ângulo aproximado de 7,2º com a vertical." (p. 6, ÁVILA, 2010)

Logo, observando o modo como eram feitas as observações, utilizados os ângulos com recursos na época ainda limitados, e fazendo uso da matemática básica, fica claro a dificuldade de realizar esses cálculos com precisão, e o quanto são notáveis aproximações como as de Ptolomeu.

---

[7] Fala-se da circunferência da Terra referente à linha do Equador.

[8] O último grande astrônomo da antiguidade, que viveu aproximadamente no ano 150.

2. SÓLIDOS E RELAÇÕES FUNDAMENTAIS

O capítulo anterior apresentou os conceitos históricos básicos que envolvem a teoria de proporcionalidade, iniciando no conceito de comensurabilidade e as relações entre algumas áreas nos *Elementos,* finalizando com a proporcionalidade entre os segmentos correspondentes de duas retas transversais a um feixe de retas paralelas. Dessa forma, nada mais natural que prosseguir os estudos sobre proporcionalidade de forma espacial, isto é, por meio de sólidos.

Ao se trabalhar com sólidos na educação básica ou no ensino superior, no que se refere à Geometria Euclidiana, se tem como base o uso contínuo de alguns conceitos básicos, como semelhança e congruência, ou teoremas fundamentais para o tratamento dos mesmos, como por exemplo, o Princípio de Cavalieri e o Teorema de Pappus. Todos esses elementos citados fazem parte de um conjunto teórico de fundamental importância para o estudo das relações entre figuras geométricas, como se pode observar a seguir.

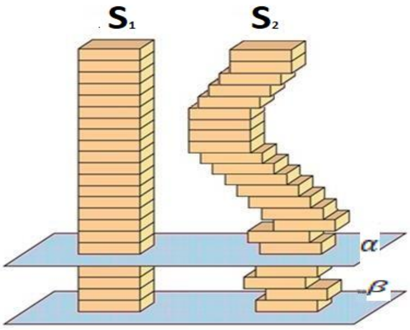
2.1. Princípio de Cavalieri

O princípio de Cavalieri associa dois sólidos diferentes de forma que seja possível verificar quando os dois possuem os mesmo volumes. Entretanto, apesar desse poder ser tratado enquanto teorema, iremos dá ao mesmo o tratamento da Educação Básica, que o toma como verdade sem que para isso seja necessário demonstração (axioma).

Princípio de Cavalieri: Dados dois sólidos S_1 e S_2 com alturas iguais, apoiados sob um plano α. Se todo plano β, paralelo a α, determina áreas correspondentes entre esses sólidos, então os S_1 e S_2 possuem o mesmo volume.

Veja na Figura 14 uma representação para a situação descrita.

Figura 14- Princípio de Cavalieri

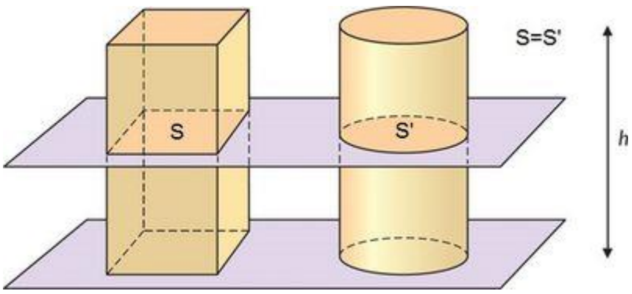


Fonte: Autoria Própria

A partir do princípio acima citado é possível realizar várias conjecturas, como por exemplo, em que condições um prisma e um cilindro de mesmas alturas possuem o mesmo volume, ou qual a relação que se mantem entre duas alturas quando todo plano paralelo ao plano da base intercepta dois sólidos em regiões de mesmas áreas. Para explorar um pouco mais a utilidade do princípio tratado resolvamos os problemas propostos a seguir.

Problema 3: Considere um prisma de base quadrada a e um cilindro reto raio R, de mesmas alturas, iremos determinar qual a relação que deve existir entre suas bases para que esses possuam volumes iguais.

Figura 15- Figura do Problema 3



Fonte: Autoria Própria

Notemos que, o volume do prisma de base quadrada é igual a $V_p = b^2.h$ e do cilindro $V_c = \pi R^2.h$. Como se deseja que esses possuam os mesmos volumes, então:

$V_p = V_c$

$b^2.h = \pi R^2.h$

$b^2 = \pi R^2$

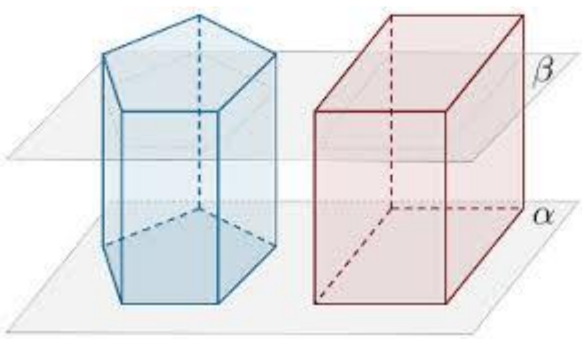
$$\frac{b^2}{R^2} = \pi$$

$$\frac{b}{R} = \sqrt{\pi}\,. \qquad \blacksquare$$

Portanto, podemos concluir que, o lado do prisma de base quadrangular deve está para o raio do cilindro na razão de $\sqrt{\pi}$.

Problema 4: Considere dois prismas retos de bases regulares como na Figura 16, de sorte que esses sólidos tenham as mesmas alturas e volumes. Determinemos a relação entre as medidas de seus lados, onde consideremos o lado da base do prisma regular pentagonal a, à esquerda, e a do prisma regular quadrangular b, à direita.

Figura 16- Prismas Bases Regulares, Pentagonal e Quadrada.



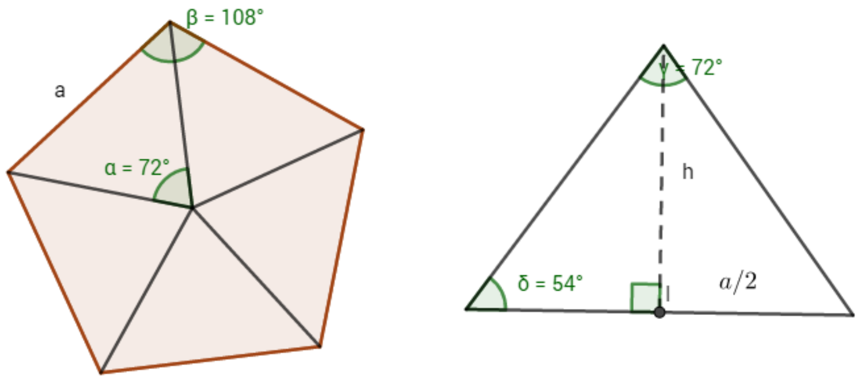
Fonte: Autoria Própria

Como os prismas considerados, possuem alturas e volumes respectivos iguais, então pelo Princípio de Cavalieri suas bases possuem mesmas áreas.

Sabe-se também que o prisma quadrangular tem como área da base $A_q = b^2$.

A seguir iremos determinar a área da base do prisma pentagonal em função de a.

Figura 17- Base Pentagonal



Fonte: Autoria Própria

Notemos que, o pentágono da base do prisma pentagonal reto pode ser dividido em cinco triângulos congruentes, como mostrado ao lado acima.

Sabendo que cada um desses triângulos é isóceles, podemos relacionar a altura da base da seguinte forma:

$$\tan 54° = \frac{h}{a/2}$$

$$\tan 54° = \frac{2h}{a}$$

$$h = \frac{a}{2}\tan 54°$$

Como a área de um triângulo qualquer é igual à razão por 2 do produto da base pela altura, então:

$$A_t = a.h$$

$$= a.\frac{a}{2}\; tang\; 54°$$

$$= \frac{a^2}{2}\tan 54°.$$

Como a área do pentágono é igual a $A_p = 5.A_t$, logo $A_p = 5.\frac{a^2}{2}\tan 54°$.

Daí:

$$A_p = A_q$$

$$b^2 = \frac{5a^2}{2}\; tan 54°$$

$$b = a\sqrt{\frac{5}{2}\tan 54°}\,. \qquad \blacksquare$$

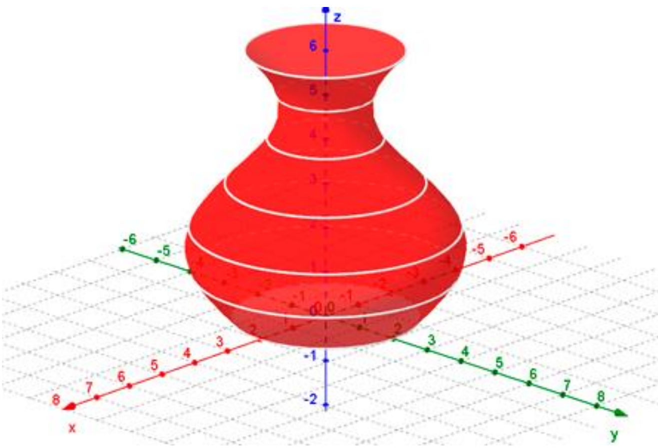
Encontrada a relação entre os lados da base pentagonal e da base quadrangular, objetiva-se a seguir tratar de um teorema muito importante na determinação de volumes e áreas de sólidos de revolução, o Teorema de Pappus.

2.2. Teorema de Pappus

O Teorema de Pappus tem como objetivo o cálculo de áreas e volumes de Sólidos de Revolução de forma puramente geométrica, como os matemáticos clássicos costumavam resolver os problemas matemáticos.

Vejamos a seguir a teoria que perpassa as definições que estruturam tal teorema. Entretanto, inicialmente considere uma reta E, denominada eixo de simetria, e uma linha simples L sob um mesmo plano α que não intercepta E, de modo que cada ponto P em L ao ser rotacionado forma uma circunferência num plano perpendicular a E, e com centro em E. Denomina-se o sólido formado de Superfície de Revolução.

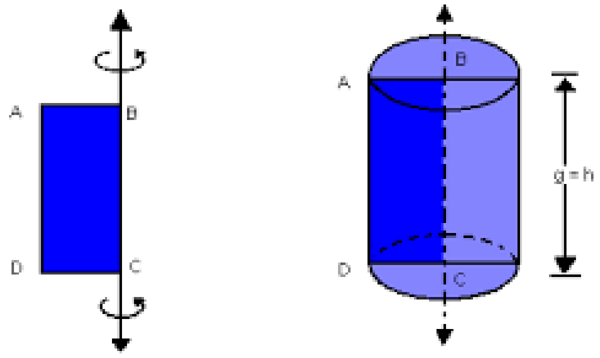
Figura 18- Superfície de Revolução



Fonte: Autoria Própria

Quando a linha simples L tem suas extremidades interceptando o eixo L, ou é uma linha simples fechada, temos a rotação dessa linha em torno do eixo resulta no que definimos como Sólido de Revolução.

Figura 19- Sólido de Revolução



Fonte: Autoria Própria

Inicialmente havia sido mencionado que, o objetivo do teorema citado é calcular áreas e volumes de Sólidos de revolução, entretanto, antes disso ser feito, é necessário que definamos o conceito de Centro de Gravidade.

2.2.1. Centro de Gravidade

Para ilustrar intuitivamente o que é o Centro de Gravidade, imaginemos um garçom no seu ambiente de trabalho, onde deve equilibrar uma bandeja toda a noite, entretanto, a prática do ofício o fez perceber que em determinado ponto da bandeja se ele fosse cuidadoso e não movesse o braço, era possível equilibrar bandejas com apenas um dedo.

Figura 20- Garçom Equilibrando Bandeja

Fonte: https://gartic.com.br/kaquers/desenho-jogo/1233365102

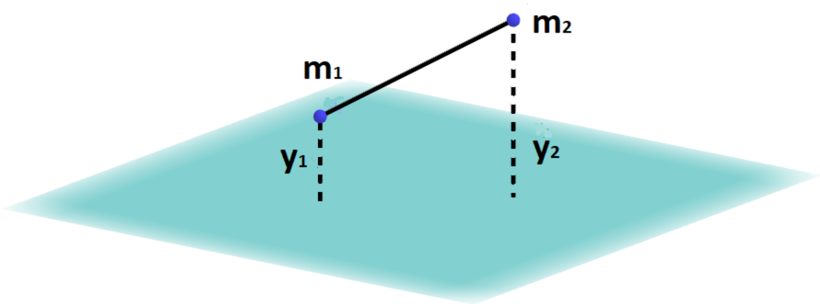
Na situação descrita, o garçom sem imaginar descobriu a localização na bandeja do que denominaremos Centro de Gravidade da mesma. Ilustrada uma situação física envolvendo Centro de Gravidade podemos definir esse conceito segundo duas situações:

(1) ***Segmento***- o Centro de Gravidade de um segmento é seu ponto médio.

(2) ***Figura que possui Eixo de Simetria***- seu Centro de Gravidade encontra-se no eixo de simetria necessariamente.

Para prosseguir a apresentação desse conceito sob um ponto de vista físico, tomemos uma barra de certo comprimento (sem massa, exceto nos extremos com massas m_1 e m_2·) e cujos extremos se encontram a alturas y_1 e y_2, respectivamente. Veja a Figura 21.

Figura 21- Barra com massa nos extremos



Fonte: Autoria Própria

Consideraremos inicialmente que a barra está em equilíbrio (permanece imóvel), dadas às massas nos extremos da barra e suas respectivas alturas do plano. Então o nosso objetivo será determinar a altura y em relação ao plano dado (Figura 20), do ponto G(Centro de Gravidade), na barra, permaneça em equilíbrio.

Supondo a existência do ponto G a uma altura y do plano, iremos fazer uso da equação $E = m.g.h$, da energia potencial, na qual: m é massa, g é aceleração da gravidade e y a altura da massa.

Fazendo uso da equação em relação aos pontos de massa das extremidades da barra, temos:

(1) $E_1 = m_1 g y_1$;

(2) $E_2 = m_2 g y_2$.

Como o G é o centro de gravidade da barra, e um segmento tem como centro de gravidade seu ponto médio. Logo sua massa é dada por $m = \frac{m_1+m_2}{2}$., e sua energia potencial é $E = (m_1 + m_2)gy$.

Portanto:

$E = E_1 + E_2$

$(m_1 + m_2)gy = m_1gy_1 + m_2gy_2$

$y = \frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}$, onde y é a altura de G.

Logo se considerarmos que um sistema em equilíbrio foi colocado sob um Plano Cartesiano, com massas respectivas $m_1, \dots, m_r$ tendo as distâncias do eixo associadas aos pontos $(x_1, y_1), \dots, (x_r, y_r)$. Então o ponto $G = (x, y)$, tem suas coordenadas dadas por:

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}$$

e

$$y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \cdots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}.$$

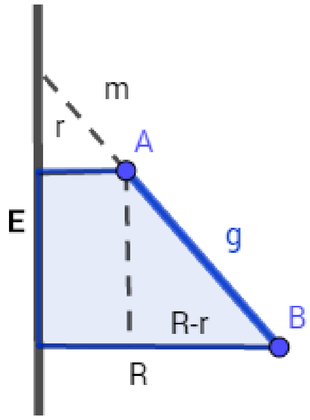
Dada a situação geral acima, observe que, o problema da barra é um caso particular, onde só existem duas massas associadas às distâncias e uma das coordenadas em ambos os pontos é igual a 0.

2.2.2. Teorema de Pappus (Parte 1)

Alguns Sólidos de Revolução são tratados na Educação Básica por sua presença expressiva nosso cotidiano, como cilindros, cones, troncos de cones e esferas; por isso, a escola concentra esforços na aprendizagem das áreas e volumes dos mesmos. Assim prosseguiremos, com o cálculo da área de um tronco de cone, tomado- o como uma Superfície de Revolução formada a partir da rotação de um segmento de reta AB, com comprimento g, onde A e B têm distâncias respectivas do eixo de simetria E, r e R.

Veja a Figura 22.

Figura 22- Segmento AB e Reta E



Fonte: Autoria Própria

A área lateral do tronco de cone é dada por:

$$A = \pi R(m+g) - \pi rm$$

$$= \pi Rm + \pi Rg - \pi rm$$

$$= \pi Rg + \pi(R-r)m.$$

Fazendo uso da semelhança existente entre os dois triângulos retângulos de diagonais respectivas m e g temos que, $\frac{R-r}{g} = \frac{r}{m}$·, isto é, $R - r = \frac{rg}{m}$, então:

$$= \pi Rg + \pi rg$$

$$= 2\pi\left(\frac{R+r}{2}\right)g.$$

Visto que $X = \frac{R+r}{2}$ é à distância do ponto médio de AB ao eixo E, então:

$$A = 2\pi Xg.$$ ■

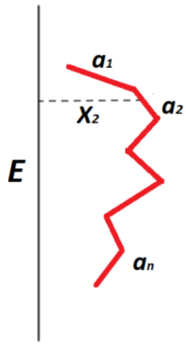
Esse resultado será bastante útil na demonstração da primeira parte do Teorema de Pappus a seguir.

Teorema de Pappus (Primeira Parte): Sejam L uma linha plana e E um eixo de simetria num mesmo plano. A área da superfície gerada pela rotação de L em torno de E é dada pelo produto do comprimento da linha pelo produto do comprimento da circunferência descrita por seu centro de gravidade.

Demonstração:

Considere uma poligonal plana formada por segmentos de pontos médios a_1,...,a_r, que os mesmos distam de E, x_1,...,x_r e com áreas respectivas $A_1, \ldots, A_r$. Daí

Figura 23- Poligonal



Fonte: Autoria Própria

$A = A_1 + \cdots + A_r$

$= 2\pi x_1 a_1 + \ldots + 2\pi x_r a_r$

$= 2\pi(x_1 a_1 + \ldots + x_r a_r)$.

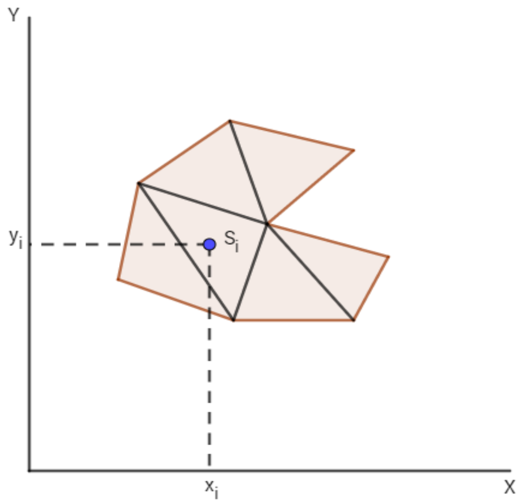
Sabendo que, $x = \frac{x_1 a_1 + \cdots + x_r a_r}{a_1 + \cdots + a_r}$, sendo $L = a_1 + \cdots + a_r$ (comprimento da poligonal), então $xL = x_1 a_1 + \cdots + x_r a_r$.

Logo, $A = 2\pi x L$. ■

2.2.3. Teorema de Pappus (Parte 2)

Na Educação Básica uma definição utilizada é a de baricentro de um triângulo. Esse é calculado através da média aritmética dos pontos médios dos lados do triângulo. De posse dessa definição, para encontrar o centro de gravidade de um polígono qualquer, decomponha-o em r triângulos $T_1, T_2, \ldots, T_r$, com respectivas áreas $S_1 + \cdots + S_r$, e com baricentros (x_k, y_k) com k indo de 1 a r, tal que P é centro de gravidade do polígono localizado no ponto (x, y).

Figura 24- Polígono Decomposto em Triângulos



Fonte: Autoria Própria

Concluímos então que, o centro de gravidade de um polígono é dado por:

$$x = \frac{S_1x_1 + \cdots + S_rx_r}{S_1 + \cdots + S_r}$$

e

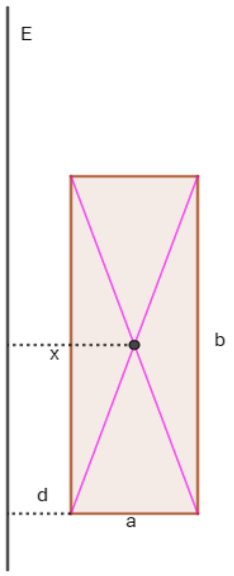
$$y = \frac{S_1y_1 + \cdots + S_ry_r}{S_1 + \cdots + S_r}.$$

Onde esse é um ponto de coordenadas (x, y).

Ainda pensando na ideia de centro de gravidade de um polígono, iremos buscar uma expressão para o volume de um sólido formado pela revolução de um retângulo, sabendo que o seu centro de gravidade é o ponto de interseção de suas diagonais.

Basta tomar um retângulo de altura “a” e base “b” tal que esse tenha um de seus lados, paralelo ao eixo E.

Figura 25- Retângulo com Lado Paralelo ao Eixo E



Fonte: Autoria Própria

Sabendo que a área do retângulo é $S = ab$, e que a rotação do mesmo em torno do eixo E gera um sólido de revolução formado pela diferença de dois cilindros, de respectivos raios, $d + a$ e d.

Dessa forma seu volume será dado por:

$$V = \pi(a + d)^2 b - \pi d^2 b$$

$$= \pi(a^2 + 2ad + d^2)b - \pi d^2 b$$

$$= \pi a^2 b + 2\pi adb$$

$$= \pi ab(a + 2d).$$

Sabendo que, a área do retângulo é dada por $S = ab$, então $V = 2\pi\left(\frac{a}{2} + d\right)S$.

Basta chamar $x = d + a/2$, que é o ponto de encontro das diagonais do retângulo.

Logo: $V = 2\pi xS$. ■

Agora se tem posse dos elementos necessários para prosseguir a segunda parte do teorema.

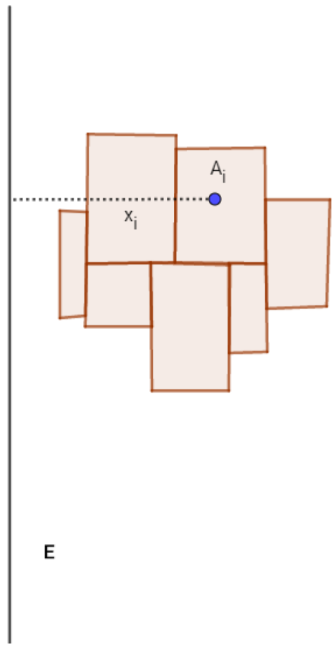
Teorema de Pappus (Segunda Parte): Considere uma figura plana no mesmo plano que um eixo E, então o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da figura plana em torno do eixo E é dado pelo produto da área da figura plana e do comprimento da circunferência que descrita pelo seu centro de gravidade.

Demonstração:

A demonstração clássica dessa parte do teorema trata especificamente de um polígono retangular, que é um polígono formado por retângulos justapostos.

Inicialmente consideremos o polígono dado como formado pelos retângulos R_1,R_2,...,R_n com respectivas áreas,S_1,S_2,...,S_n.

Figura 26- Polígono retangular



Fonte: Autoria Própria

Seja x_i a distância do centro do retângulo R_i ao eixo E, onde $1 \leq i \leq n$, e sendo E paralelo a um dos lados do retângulo. Então, o volume do sólido gerado pelo polígono é igual à soma dos volumes dos sólidos formados ($S = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$) pela rotação dos retângulos que o forma.

Daí:

$$V = 2\pi x_1 S_1 + 2\pi x_2 S_2 + \cdots + 2\pi x_n S_n$$

$$= 2\pi(x_1S_1 + x_2S_2 + \cdots + x_nS_n)$$

Sabendo que, $x = \frac{S_1x_1+\cdots+S_rx_r}{S_1+\cdots+S_r}$, ou seja, $xS = S_1x_1 + S_2x_2 + \cdots + S_nx_n$.

Então: $V = 2\pi xS$. ■

O teorema apresentado é muito útil no tratamento de sólidos de revolução, entretanto a visão puramente geométrica dessa seção dará lugar a um tratamento mais analítico no capítulo seguinte.

2.3. Limitações Teóricas

Os conceitos estudados no capítulo tratam de forma geral de áreas e volumes de sólidos e Sólidos de Revolução, entretanto, no que se refere ao tratamento de curvas, o tratamento moderno o associa a sistemas de coordenadas, no qual o mais disseminado é de eixos perpendiculares. Logo o estudo segundo esses eixos se concentra somente nas curvas, dispensando o uso do conceito de Centro de Gravidade, que numa curva qualquer pode gerar certa dificuldade.

Observando essa dificuldade conceitual, os Sólidos Revolução podem ter suas áreas e volumes estudados a partir do conceito de Integral de Riemann, que irá definido no capítulo a seguir. Esse conceito tem tratamento analítico e por isso trata cada curva como resultante de uma expressão analítica, na qual é possível em cada ponto para qual essa está definida determinar sua localização no plano. Não precisando que sejam fornecidas essas informações uma a uma como necessário o Teorema de Pappus.

Outro fato importante a respeito dos métodos matemáticos antigos era o uso do método de Exaustão no cálculo de áreas e volumes de figuras irregulares, que apesar de até fornecer bons números para as grandezas consideradas, ainda eram imprecisas, gerando um erro, mesmo que esse fosse mínimo.

Esse problema teve como primeira tentativa de aproximação ideal as Integrais de Riemann, que fez o estudo de áreas e volumes de forma não só analítica. Entretanto, assim como o Teorema de Pappus as suas somas nas quais se baseavam as Integrais de Riemann tornavam o processo cansativo, pois se fazia a aproximação das áreas também por áreas, só que nesse caso, as áreas de retângulos e aproximariam por cima e por baixo da curva, oferecendo uma precisão melhor.

Entretanto, foi o professor de Newton, Isaac de Barrow, que verificou a existência de uma relação entre uma derivada e sua função. A partir desse momento, as somas de Riemann puderam ser dispensadas, sendo posta em seu lugar o ilustre Teorema Fundamental do Cálculo.

3. FIGURAS ESPACIAIS E AS PROPORÇÕES

Os sólidos podem ser divididos em Poliedros, Sólidos de Revolução e sólidos que não se enquadram nessas duas definições. Para cada um desse grupo é possível se adotar estratégias diferentes para verificar sua semelhança. Entretanto, antes de iniciar o estudo das “Figuras Espaciais e suas Proporções” se faz necessário esclarecer o motivo que levou esse capítulo, que pode parecer demasiadamente complexo em relação aos demais.

Tanto o professor quanto o aluno ao se deparar com o conteúdo de proporções ou semelhança no livro didático (seja na sua primeira apresentação no Ensino Fundamental seja numa apresentação posterior, no Ensino Médio), notará que esse conteúdo é frequentemente associado a objetos concretos e escalas, podendos ser esses objetos de natureza plana ou espacial. Por exemplo, a semelhança entre duas fotografias, sendo uma 3x4 e outra ampliada para o formato15x20; outro caso seria a frequente associação de um objeto como um carro a sua miniatura.

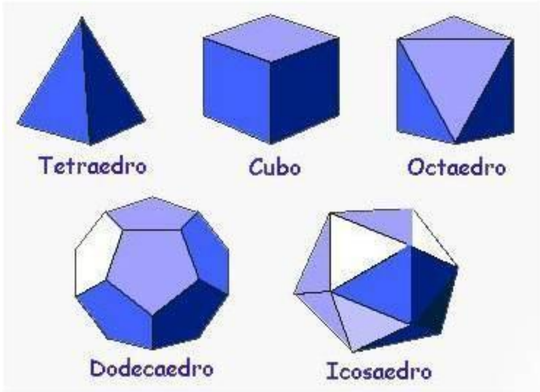
Apesar desse tipo de problema ser de frequente uso na introdução do conteúdo, o tratamento subsequente é quase sempre associado somente a triângulos e polígonos, às vezes é retomado de forma desconectada do conteúdo no ensino médio para o caso espacial, fazendo com que o aluno tenha uma percepção pobre e limitada dos conteúdos. Dessa forma, esse capítulo se dedica a construir uma visão analítica da proporcionalidade de forma a ampliar também a perspectiva do professor de matemática, através da análise da proporcionalidade de Poliedros e Sólidos de Revolução.

3.1. Proporcionalidade de poliedros

A geometria Euclidiana oferece ferramentas necessárias para analisar o grupo dos poliedros, e verificar sua semelhança, tanto em relação a suas áreas como em relação a seus volumes.

Sabendo que poliedros são sólidos geométricos formados por polígonos, é natural se fazer a seguinte pergunta: é possível determinar relações de proporcionalidade entre os mesmos?

Figura 27- Poliedros de Platão

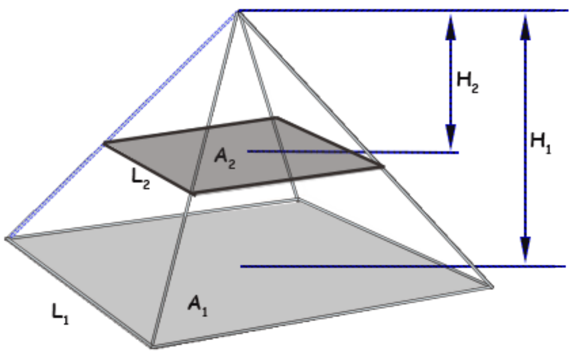


Fonte: HTTPS://www.estudokids.com.br/poliedros/

A resposta pode ser dada fazendo análise de poliedros mais específicos, como por exemplo, prismas e pirâmides. De fato, é possível decompor qualquer poliedro em pirâmides, as quais possuem as relações de proporcionalidade são mais simples de serem encontradas. Veremos uma situação de Proporcionalidade que envolve pirâmides, a fim de aplicá-las a outros Poliedros.

Considere uma pirâmide de altura H_1, e uma segunda pirâmide formada pela interseção da primeira com um plano paralelo a sua base de altura H_2. Podem-se estabelecer relações de proporcionalidade entre suas bases e suas alturas. Para isso basta considerar uma pirâmide qualquer (Figura 28), seccionando-a segundo um plano paralelo a base e distinto da mesma.

Figura 28- Pirâmide regular quadrangular



Fonte: Autoria Própria

Iniciaremos a partir de uma face lateral qualquer, onde se pode observar que o triângulo que forma a face lateral possui em seu interior uma paralela a base, de modo que, determinam-se dois triângulos semelhantes, tal que $\frac{L_1}{L_2} = k > 0$ (constante). Como as bases são quadrados, temos $\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2 = k^2$.

Sejam os triângulos retângulos formados pelos apótemas e a alturas com suas bases paralelas, então $\frac{H_1}{H_2} = k$.

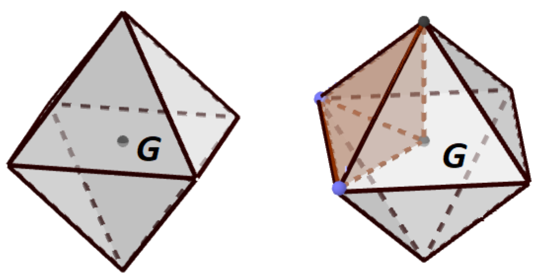
Por fim, como $\frac{V_1}{V_2} = \frac{A_1 H_1}{A_2 H_2} = k^3$.

Portanto, essa relação pode ser usada para verificar também se há semelhança entre dois poliedros quaisquer.

Para ficar mais clara a situação iremos analisar algumas situações com alguns poliedros de Platão.

Inicialmente consideremos um octaedro de Platão como na Figura 29, se tem demarcado o ponto G, equidistante de todos os seus vértices, e cujos planos que passam pelos vértices e G formam oito pirâmides de base triangulares congruentes. Portanto, octaedro de Platão é regular.

Figura 29- Octaedros de Platão

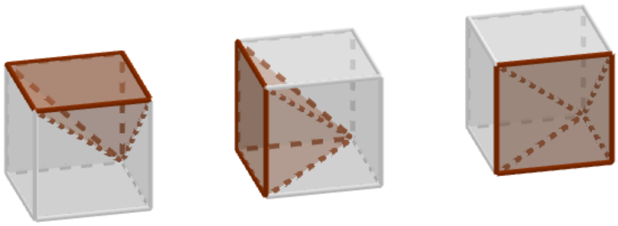


Fonte: Autoria Própria

A afirmação de que um prisma qualquer pode ser decomposta em três pirâmides de mesmas alturas e bases que o prisma considerado. Considerando essa informação fizemos a escolha do cubo para ilustrar outro caso de Semelhança entre Poliedros.

Sabemos que o cubo pode ser dividido em três pirâmides de bases quadradas congruentes (faces congruentes e mesma altura).

Figura 30- Cubo Seccionado em Pirâmides de Base Quadrada.



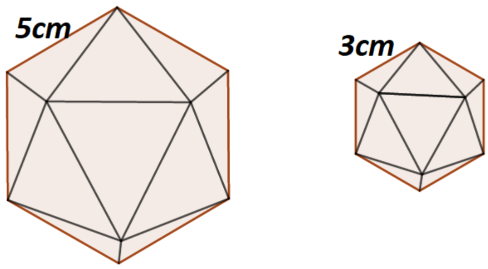
Fonte: Autoria Própria

Essa construção costuma auxiliar porque o volume do prisma é três vezes o volume da pirâmide de base congruente e mesma altura, isto é, congruentes. Dessa forma, pode-se mostrar que dois cubos quaisquer são semelhantes, mostrando que umas das pirâmides nas quais cada foi decomposto são semelhantes entre si.

Dessa forma podemos concluir que dois poliedros quaisquer são semelhantes se, ao seccionar cada um num número $n \geq 1$ de pirâmides, de forma que haja semelhança, uma a uma entre as pirâmides dos dois poliedros.

Para compreender melhor tal situação, tomemos dois icosaedros regulares, de forma que possuem arestas medindo, respectivamente, $5\,cm$ e $3\,cm$. Iremos mostrar que é possível mostrar que a razão entre suas arestas é $\frac{5}{3}$.

Figura 31- Icosaedros



Fonte: Autoria Própria

Pode-se afirmar que de fato existe uma relação de Semelhança entre os dois icosaedros, pois podemos tomar um ponto no seu interior tal que, tomando-o como vértice para as 20 pirâmides de base triangular nas os mesmos serão decompostos e encontrada a relação de Semelhança da mesma forma que nas situações anteriores. Logo, do mesmo modo que os lados dos icosaedros regulares estão relacionados segundo uma constante $\frac{5}{3}$, as suas áreas estão relacionadas segundos uma constante $\left(\frac{5}{3}\right)^2$, e seus volumes $\left(\frac{5}{3}\right)^3$.

Para tornar o trabalho mais acessível irá ser realizada a construção de associações que construiremos posteriormente. Para tanto, é preciso responder a seguinte pergunta: em que condições dois cilindros são semelhantes, isto é, possui seus ângulos congruentes e seus lados dois a dois relacionados segundo a mesma grandeza de proporcionalidade?

3.2. Proporcionalidade em Sólidos de Revolução

Para expandir mais o conceito de proporcionalidade, iremos nessa seção, a avaliar em quais condições dois Sólidos de Revolução são proporcionais. Para isso iremos inicialmente apresentar alguns elementos de cálculos necessários a nosso estudo. No capitulo 2, ao tratar do Princípio de Cavalieri e do Teorema de Pappus, demos os primeiros passos para compreender a Proporcionalidade de Sólidos de Revolução.

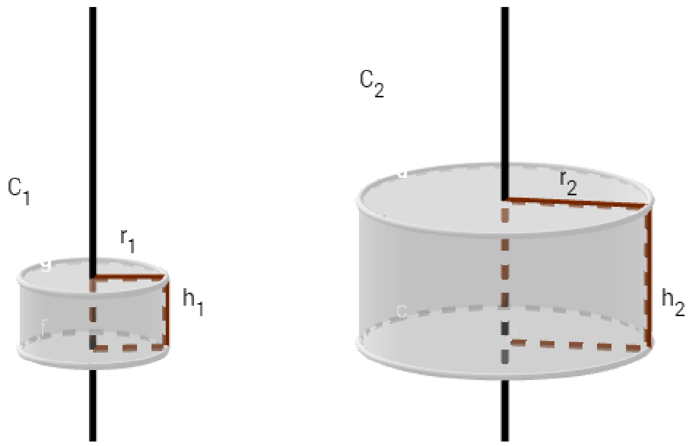
O Princípio de Cavalieri afirma que dois sólidos de mesmas alturas e seccionados por um plano paralelo ao plano da base determinam sólidos de mesmo volume se cada um desses sólidos possui áreas congruentes entre si, isto é, onde a Constante de Proporcionalidade é igual a 1.

Segundo o Teorema de Pappus, cada ponto numa curva L que se encontra sob o mesmo plano de um eixo E ,quando rotacionado em torno do mesmo, forma uma circunferência. Do ponto de vista do cálculo de integrais, os pontos da curva L são escolhidos de forma que suas projeções sob o eixo E, são equidistantes entre si, a partir dos quais iremos definir adiante o conceito de partições para definir as semelhanças desejadas. Para isso, iniciaremos respondendo a pergunta feita anteriormente, em que condições pode-se afirmar que dois cilindros são proporcionais.

Dadas os volumes dos cilindros circulares retos considerados $V_1 = \pi {r_1}^2 h_1$ e $V_2 = \pi {r_2}^2 h_2$. Temos que se $\frac{V_1}{V_2} = k^3$ para que exista Proporcionalidade entre os cilindros.

Note também que, como o cilindro é um Sólido de Revolução obtido a partir de um retângulo de base e altura, com respectivos, tamanhos correspondentes ao raio e a altura do cilindro. Veja na Figura 32.

Figura 32- Cilindros Semelhantes



Fonte: Autoria Própria

Observemos acima a Figura 31, os que os retângulos são semelhantes mostrados se, existir uma constante k tal que, $\frac{r_1}{r_2} = \frac{h_1}{h_2} = k$. Admitindo a existência da constante k, e considerando a área da base e volume respectivos dos cilindros C_1 e C_2, A_1, A_2, V_1 e V_2.Temos que $\frac{A_1}{A_2} = k^2$ e $\frac{V_1}{V_2} = k^3$.

Para construirmos o conceito de Proporcionalidade em Sólidos de Revolução é necessário fazer uso de alguns conceitos fundamentais do Cálculo; em particular, que no $\mathbb{R}^3$ pode-se definir o cálculos áreas e volumes dos sólidos de revolução a partir da aproximação por cilindros.

3.2.1. Integrais e suas propriedades

Definição 1: Dado um intervalo $[a, b]$. Uma partição desse intervalo é a escolha de um subconjunto finito $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k = b\}$.

Se fixarmos uma partição do intervalo considerado, tal que a função $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ é limitada pelo intervalo $[a, b]$, denota-se:

$$m_i = \inf\{f(x); x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = \underset{[x_{i-1}, x_i]}{inf \quad f}$$

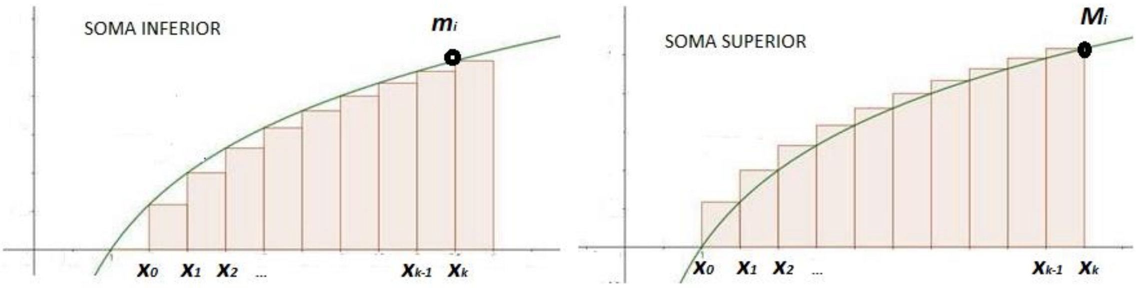
e

$$M_i = \sup\{f(x); x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = \underset{[x_{i-1}, x_i]}{sup \quad f}.$$

Considere m_i e M_i bem definidos em f, definiremos a soma inferior e a soma superior de f em relação à P por:

$$s(f;P) = \sum_{i=1}^{k} m_i(x_i - x_{i-1}) \text{ e } S(f;\ P) = \sum_{i=1}^{k} M_i\ (x_i - x_{i-1})\ .$$ [9]

Figura 33- Somas de Riemann



Fonte: Autoria Própria

Ao se fixar a partição P, é verificado que $s(f;\ P) \leq S(f;\ P)$, pois $m_i \leq M_i$. Veremos a seguir que uma função limitada f é limitada se $\inf\big(S(f;P)\big) = \sup(s(f;P))$, então essa é diferenciável.

Lema: Seja $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Dadas partições P e Q de $[a, b]$, tais que $P \subset Q$, temos que $s(f;P) \leq s(f;Q)$ e $S(f;\ Q) \leq S(f;\ P)$.

Demonstração:

Consideremos $Q = P \cup \{a\}$, com $a \neq x_0, x_1, \ldots, x_k$. Fixando um índice $i \in \{1, 2, \ldots\ k\}$ tal que $x_{i-1} < a < x_i$, isto é, $[x_{i-1} \cdot, a] \cup [a, x_i] =\ [x_{i-1}, x_i]$. Então, $[x_{i-1}, a], [a, x_i] \subset [x_{i-1}, x_i]$.

(i) Sabendo que:

$$S(f, Q) = \sum_{j=1}^{i-1} M_j(x_j - x_{j-1}) + \underset{[x_{i-1}, x_i]}{(\sup f)}(x_i - x_{i-1}) + \sum_{j=i+1}^{k} M_j(x_j - x_{j-1})$$

$$S(f, Q) = \sum_{j=1}^{i-1} M_j(x_j - x_{j-1}) + \underset{[x_{i-1}, a]}{(\sup f)}(a - x_{i-1}) + \underset{[a, x_i]}{(\sup f)}(x_i - a) +$$

$$\sum_{j=i+1}^{k} M_j(x_j - x_{j-1}) \,.\, [1]$$

[9] As somas inferior e superior são definidas por áreas, respectivamente, menores e maiores que a área abaixo da curva de *f* no intervalo *[a,b]*, considerados retângulos imitados pela partição *P* conforme mostra a Figura 32.

Note que, $\underset{[x_{i-1},a]}{\sup f} \leq \underset{[x_{i-1},x_i]}{\sup f}$ e $\underset{[a,x_i]}{\sup f} \leq \underset{[x_{i-1},x_i]}{\sup f}$.

Como $\underset{[x_{i-1},x_i]}{\sup f} = M_i$, então $\underset{[x_{i-1},a]}{\sup f}, \underset{[x_{i-1},a]}{\sup f} \leq M_{i.}$

Daí, $\underset{[x_{i-1},a]}{\sup f}(a - x_{i-1}) + \underset{[a,x_i]}{\sup f}(x_i - a) \leq M_i\ (x_i, x_{i-1})$.

Olhando para [1], veja que:

$$S(f,Q) \leq \sum_{j=1}^{i-1} M_j(x_j - x_{j-1}) + M_i\ (x_i - x_{i-1}) + \sum_{j=i+1}^{k} M_j(x_j - x_{j-1})$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k} M_j(x_j - x_{j-1})$$

$$\leq S(f,P).$$ ■

(ii) Sabendo que:

$$s(f,Q) = \sum_{j=1}^{i-1} m_j(x_j - x_{j-1}) + \underset{[x_{i-1},x_i]}{(\inf\ f)}(x_i - x_{i-1}) + \sum_{j=i+1}^{k} m_j\big(x_j - x_{j-1}\big)$$

$$= \sum_{j=1}^{i-1} m_j\big(x_j - x_{j-1}\big) + \underset{[x_{i-1},a]}{(\inf f)}(a - x_{i-1}) + \underset{[a,x_i]}{(\inf f)}(x_i - a) +$$

$$\sum_{j=i+1}^{k} m_j(x_j - x_{j-1}).\ [2]$$

Note que, $\underset{[x_{i-1},a]}{\inf f} \geq \underset{[x_{i-1},x_i]}{\inf f}$ e $\underset{[a,x_i]}{\inf f} \geq \underset{[x_{i-1},x_i]}{\inf f}$.

Como $\underset{[x_{i-1},x_i]}{\inf f} = m_i$, então $\underset{[x_{i-1},a]}{\inf f}, \underset{[x_{i-1},a]}{\inf f} \geq m_i$.

Daí, $\underset{[x_{i-1},a]}{(\inf f)}(a - x_{i-1}) + \underset{[a,x_i]}{(\inf f)}(x_i - a) \geq m_i(x_i, x_{i-1})$.

Olhando para [2], veja que:

$$s(f,Q) \geq \sum_{j=1}^{i-1} m_j(x_j - x_{j-1}) + m_i\ (x_i - x_{i-1}) + \sum_{j=i+1}^{k} m_j(x_j - x_{j-1})$$

$$\geq \sum_{j=1}^{k} m_j(x_j - x_{j-1})$$

$$\geq s(f,P).$$ ■

Portanto, quando $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função limitada, dadas duas partições da mesma P e Q, com $P \subset Q$, então $S(f, P) \geq S(f, Q)$ e $s(f, P) \leq s(f, Q)$.

O resultado a seguir é central no estudo das Integrais de Riemann, e vai ser de muita importância para a continuidade teórica.

Definição 2: Uma função limitada $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável se:

$\sup\limits_{P} s(f; P) = \inf\limits_{P} S(f; P)$.

A seguir enuncia-se o critério de integrabilidade de Cauchy.

Teorema de Cauchy: Uma função limitada $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável se, e somente se, as seguintes condições forem satisfeitas: para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe uma partição P_ε de $[a, b]$ tal que $S(f; P_\varepsilon) - s(f; P_\varepsilon) < \varepsilon$.

Demonstração:

$\Longrightarrow$) Supondo que f é integrável, da definição 2 temos que $\sup\limits_{P} s(f;\ P) = \inf\limits_{P} S(f;\ P) = A$.

Seja $\varepsilon > 0$, como $A = \sup\limits_{P} s(f; P)$ é a menor cota superior para $s(f; P)$, então $A - \frac{\varepsilon}{2} < s(f; P_1)$, tal que P_1 é uma partição de $[a, b]$.

Analogamente, seja P_2 uma partição em $[a, b]$, temos que $S(f; P_2) < A + \frac{\varepsilon}{2}$., observado que $A = \inf\limits_{P} S(f;\ P)$ é a maior cota superior para $S(f;\ P)$.

Adotemos $P_\varepsilon = P_1 \cup P_2$, então:

$S(f; P_\varepsilon) \leq S(f; P_2)$ e $s(f; P_e) \geq s(f; P_1)$.

Logo, $S(f; P_\varepsilon) - s(f; P_\varepsilon) \leq S(f; P_2) - s(f; P_1)$.

Como $S(f; P_2) - s(f; P_1) < \left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon$.

Portanto, $S(f; P_\varepsilon) - s(f; P_\varepsilon) < \varepsilon$.

$\Longleftarrow$) Sabemos que, $0 \leq \inf\limits_{P} S(f; P_\varepsilon) - \sup\limits_{P} s(f; P_\varepsilon) \leq S(f; P_\varepsilon) - s(f; P_\varepsilon) < \varepsilon$, dado $\varepsilon > 0$.

Como a escolha de ε é arbitrária, então $0 = \inf_P S(f;P_\varepsilon) - \sup_P s(f;P_\varepsilon)$·, isto é, $\inf_P S(f;P_\varepsilon) = \sup_P s(f;P_\varepsilon)$.

Logo, f é integrável. ■

Teorema 2: Toda função monótona $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável.

Demonstração:

Suponha f não decrescente. Note que essa é limitada, pois sua imagem está contida em $[f(a);\ f(b)]$.

Utilizando o critério de Cauchy, basta garantir, dado $\varepsilon > 0$, a existência de uma partição $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b\}$ em $[a,b]$, tal que $P = P_\varepsilon$.

Como f é não decrescente, temos $m_j = \inf\{f(x); x_{j-1} \leq x \leq x_j\} = f(x_{j-1})$ e $M_j = \sup\{f(x); x_{j-1} \leq x \leq x_j\} = f(x_j)$.

Logo:

$$S(f;P) - s(f;P) = \sum_{j=1}^{k} M_j(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^{k} m_j(x_j - x_{j-1})$$

$$= \sum_{j=1}^{k}(M_j - m_j)(x_j - x_{j-1})$$

$$= \sum_{j=1}^{k}(f(x_j) - f(x_{j-1}))(x_j - x_{j-1}).$$

Seja $\delta = \max\{x_j - x_{j-1}\ ·;\ 1 \leq j \leq k\}$, segue que:

$$S(f;P) - s(f;P) < \sum_{j=1}^{k}(f(x_j) - f(x_{j-1}))\delta$$

$$< (f(x_k) - f(x_0))\delta$$

$$< (f(b) - f(a))\delta.$$

Escolheremos uma partição $(f(b) - f(a))\delta < \varepsilon$, escolheremos então, $\delta < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)+1}$ ·, $\forall 1 \leq j \leq k$.

Como é possível escolher uma partição que satisfaz o Critério de Cauchy, então f é integrável.

Para o caso de f não crescente a demonstração é análoga, diferindo que para esse caso específico teremos $M_j = f(x_{j-1})$ e$m_j = f\left(x_j\right)$, que resulta na seguinte partição $\delta < \frac{\varepsilon}{f(a)-f(b)+1} \cdot, \forall 1 \leq j \leq k$. ■

O teorema a seguir define uma propriedade tão importante quanto o anterior para a integrabilidade, entretanto prosseguiremos tomando-o como verdade, sem que para isso seja necessária sua demonstração.

Teorema 3: Toda função contínua $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável.

A seguir iremos tratar do teorema mais importante da seção, o Teorema de Riemann, e para isso iremos definir algumas notações:

(1) Norma de uma partição P: $|P| = max\left\{\left|x_j - x_{j-1}\right|; 1 \leq j \leq k\right\}$.

(2) Pontilhamento de P é definido como todo ponto $\xi = (\xi_j)_{1 \leq j \leq k}$, tal que $\xi_j \epsilon [x_{j-1}, x_j]$.

(3) Soma de Riemann de f com relação à partição P e ao pontilhamento:

$\sum(f; P; \xi) = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$.

Fixadas as notações, dizemos que I é o limite das somas de Riemann $\sum(f; P; \xi)$, quando $|P| \to 0$ para todo pontilhamento ξ de P.

Teorema de Riemann: Uma função limitada $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável se, e somente se, existe o limite $\lim_{|P| \to 0} \sum(f;\ P;\ \xi)$ de suas somas de Riemann, para todo pontilhamento ξ de P. Nesse caso, tem-se:

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P| \to 0} \sum(f; P; \xi)$.

Demonstração:

Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e não negativa.

Denota-se $\mathcal{R}$ a região sob o gráfico de f, tal que essa é definida por $\mathcal{R} = \{(x,y) \epsilon \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b \ e \ 0 \leq y \leq f\}$.

Tomemos uma partição P_k equiespaçada de $[a,b]$, ou seja, $x_j - x_{j-1} = \frac{b-a}{k}$, para todo $1 \leq j \leq k$, existem $\xi_{kj}, \xi'_{kj} \epsilon [x_{j-1}, x_j]$ tal que $f\left(\xi_{kj}\right) = \min_{[x_{j-1}, x_j]} f$ e $\left(\xi_{kj}\right) = \max_{[x_{j-1}, x_j]} f$.

Dada as aproximações por falta e por excesso:

$\underline{A}(f;k) = \sum_{j=1}^{k} m_j(x_j - x_{j-1}) = \left(\frac{b-a}{k}\right)\sum_{j=1}^{k} m_j = \sum(f, P_k, \xi_k)$

e

$\overline{A}(f;k) = \sum_{j=1}^{k} M_j(x_j - x_{j-1}) = \left(\frac{b-a}{k}\right)\sum_{j=1}^{k} M_j = \sum\left(f, P_k, \xi'_k\right).$

Como $|P| = \frac{1}{k}$, segue que:

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{k\to+\infty} \sum(f, P_k, \xi_k) = \lim_{k\to+\infty} \underline{A}(f;k)$

e

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{k\to+\infty} \sum(f, P_k, \xi'_k) = \lim_{k\to+\infty} \overline{A}(f;k).$

Notemos que, $\lim_{k\to+\infty} \underline{A}(f;k) = \int_a^b f(x)dx = \lim_{k\to+\infty} \overline{A}(f;k)$. Fazendo uma mudança de base em $|P| = \frac{1}{k}$, temos que quando $k \to +\infty$, $|P| \to 0$. Logo $\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P|\to 0} \sum(f, P_k, \xi_k)$.

Em relação à definição a seguir, note que para o Teorema de Riemann, trabalhamos com uma função integrável e não negativa $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. Como $\lim_{k\to+\infty} \underline{A}(f;k) = \int_a^b f(x)dx = \lim_{k\to+\infty} \overline{A}(f;k)$, podemos observar que as aproximações superiores e inferiores convergem para um mesmo valor, que só é possível ser $A(\mathcal{R})$.

Portanto, $A(\mathcal{R}) = \int_a^b f(x)dx$. ■

Definição 3: Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função integrável e não negativa, definimos a área da região $\mathcal{R}$ sob o gráfico de f por $A(\mathcal{R}) = \int_a^b f(x)dx$.

Veremos a seguir proposições muito importantes ao se trabalhar com integrais.

Proposição 1: Se $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ são funções integráveis e tais que $f \leq g$, então $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Demonstração:

Por hipótese temos que $f \leq g$, tomemos uma partição P de $[a, b]$, então $M_j\ (f) \leq M_j\ (g)$, para todo $1 \leq j \leq k$.

Considere $S(f; P) = \sum_{j=1}^{k} M_j(f)(x_j - x_{j-1})$ e $S(g; P) = \sum_{j=1}^{k} M_j(g)(x_j - x_{j-1})$.

Então, $S(f;\ P) \leq S(g;\ P)$ para toda partição de P em $[a, b]$.

Como $\int_a^b f(x)dx \leq S(f; P)$, então $\int_a^b f(x)dx \leq S(g; P)$.

Logo, $\int_a^b f(x)dx$ é uma cota inferior para as somas superiores $\left(\int_a^b f(x)dx \leq \inf\limits_P S(g; P)\right)$ e $\inf\limits_P S(g; P) = \int_a^b g(x)dx$, então $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$. ■

Tomemos como verdade a proposição a seguir.

Proposição 2: Se $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ são integráveis e $c \epsilon \mathbb{R}$, então:

(a) Se $cf: [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável, tal que c é uma constante, então:

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

(b) Se $f + g: [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável, então:

$\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$

Segue alguns exemplos para ilustrar a utilização da proposição anterior.

Problema 1: Seja a função f: $[0,2] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax^2, com\ a \neq 0$, determine sua integral no intervalor na qual essa está definida.

Solução:

Iremos calcular $\int_0^2 ax^2 dx$.

Pela proposição 2 (a), temos que $\int_0^2 ax^2 dx = a\int_0^2 x^2 dx$.

Logo: $a\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = a\left(\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) = \frac{8}{3}a$ ■

Problema 2: Dada a função g: $[1,7] \to \mathbb{R}$, tal que $g(x) = \sqrt{2}x^3 - 3x^2 + 10x - 1$.

Solução:

Iremos calcular $\int_1^7 (\sqrt{2}\, x^3 - 3x^2 + 10x - 1)dx$.

Pela proposição 2 (a) e (b), temos:

$$\int_1^7 (\sqrt{2}\,x^3 - 3x^2 + 10x - 1)dx = \sqrt{2}\int_1^7 x^3dx - 3\int_1^7 x^2dx + 10\int_1^7 xdx - \int_1^7 1.$$

Logo:

$$\int_1^7 (\sqrt{2}\,x^3 - 3x^2 + 10x - 1)dx = \sqrt{2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^7 - 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^7 + 10\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^7 - [x]_1^7$$

$$\int_1^7 (\sqrt{2}\,x^3 - 3x^2 + 10x - 1)dx = \sqrt{2}\left(\frac{7^4}{4} - \frac{1^4}{4}\right) - 3\left(\frac{7^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right) + 10\left(\frac{7^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) - (7-1)$$

$$\int_1^7 (\sqrt{2}\,x^3 - 3x^2 + 10x - 1)dx = \sqrt{2}\left(\frac{2400}{4}\right) - 3\left(\frac{342}{3}\right) + 10\left(\frac{48}{2}\right) - 6$$

$$\int_1^7 (\sqrt{2}\,x^3 - 3x^2 + 10x - 1)dx = 600\sqrt{2} - 342+240-6$$

$$\int_1^7 (\sqrt{2}\,x^3 - 3x^2 + 10x - 1)dx = 600\sqrt{2} - 108.$$ ■

3.2.2. Integral de Riemann Aplicada a Semelhança de Sólidos de Revolução

De posse da definição de Semelhança[10] de retângulos e da teoria que define a Integral de Riemann iremos determinar quando duas curvas limitadas são semelhantes, a fim de construir uma percepção analítica do tema, com o objetivo de determinar em que condições dois sólidos de revolução também são semelhantes, sem que para isso seja necessário se fazer uso do cálculo de múltiplas variáveis.

Inicialmente definiremos o comprimento de uma curva limitada e contínua.

Definição 4: Dada $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b), define-se comprimento de f , para todo $x \in [a, b]$, por $L_f = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$.

De posse do comprimento de uma curva f, quando essa é limitada e contínua, definiremos a seguir condições que se fazem necessárias para a semelhança das mesmas. Recordemos que, quando uma curva limitada, pode ser vista como redução ou aumento de outra, sem que para isso, se percam suas propriedades no processo.

Definição 5 : Considere as funções $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ e $g: [c, d] \to \mathbb{R}$ contínuas, as partições $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b\}$ em f e $Q = \{c = x'_0 < x'_1 < \cdots < x'_k =$

---

[10] Conceito sob o qual dois polígonos são semelhantes se possui seus ângulos internos e seus respectivos lados opostos dois a dois tem como razão a mesma constante de proporcionalidade.

$d\}$ em g, tal que $\frac{(x_i - x_{i-1})}{(x'_i - x'_{i-1})} = k$ (constante) para todo $1 \leq i \leq k$. Se $\frac{m_i}{m'_i} = \frac{M_i}{M'_i} = k$, então existe também a mesma constante de proporcionalidade entre os comprimentos de f e g tem comprimentos respectivos,L_f e L_g, tal que $\frac{L_f}{L_g} = k$.

O resultado acima nos permite saber em que condições existe uma constante de proporcionalidade entre duas curvas limitadas a um intervalo, isto é, a existência da constante de proporcionalidade que faremos na demonstração a seguir.

O mesmo critério utilizado para relacionar a razão entre comprimento de curvas pode ser utilizada para o cálculo abaixo da curva limitada.

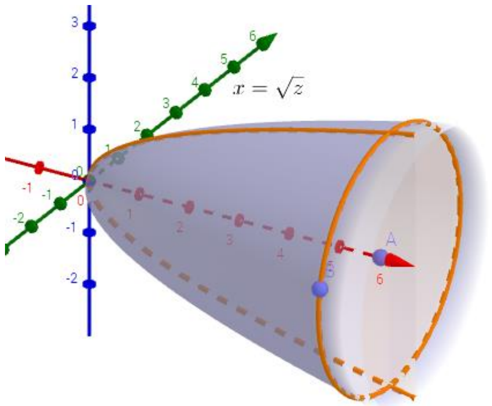
Definição 6: Considere as funções $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ e $g: [c, d] \to \mathbb{R}$ contínuas, as partições $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b\}$ em f e $Q = \{c = x'_0 < x'_1 < \cdots < x'_k = d\}$ em g, tal que $\frac{(x_i - x_{i-1})}{(x'_i - x'_{i-1})} = k$ (constante) para todo $1 \leq i \leq k$. Se $\frac{m_i}{m'_i} = \frac{M_i}{M'_i} = k$, então existe a mesma constante de proporcionalidade ao quadrado entre as áreas definidas abaixo de f e g, com respectivas áreas A_f e A_g, tal que $\frac{A_f}{A_g} = k^2$.

Compreendida a relação entre comprimentos e áreas de curvas limitadas contínuas, iremos definir o volume de um Sólido de Revolução para poder a partir desse, fazer a identificação da constante de proporcionalidade de dois sólidos de revolução semelhantes.

Iniciaremos definindo uma Superfície de Revolução $\mathcal{S}(e, \mathcal{G})$ como sendo a superfície formada pela rotação de $\mathcal{G}$ (o gráfico da função f sob um sistema cartesiano fixado) em torno de um eixo e (sob o mesmo plano que $\mathcal{G}$ paralelo às abscissas), tal que para todo $x \in [a, b]$ o ponto $(x, f(x)) \in \mathcal{G}$ descreve o círculo de raio $f(x)$, centrado no ponto de e, e com abscissa x e contido no plano perpendicular a e.

Denomina-se então, sólido de revolução $\mathcal{S}(e, \mathcal{G})$, a união dos discos gerados pela rotação de $\mathcal{G}$ em torno de e, limitada pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Vejamos abaixo a ilustração de um Sólido de Revolução descrito pela curva $x = \sqrt{z}$.

.Figura 34- Sólido Gerado pela Rotação da Curva $\boldsymbol{x} = \sqrt{\boldsymbol{z}}$



Fonte: Autoria Própria

A seguir veremos como calcular o volume desses sólidos.

Definição 7: Dada a função $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, contínua, o volume do sólido de revolução em torno de um de seus eixos é dado por $V_f = \pi \int_a^b \ [f(x)]^2 dx$.

A definição a seguir, nos permite observar quais as condições necessárias para dois sólidos de revolução ser semelhantes.

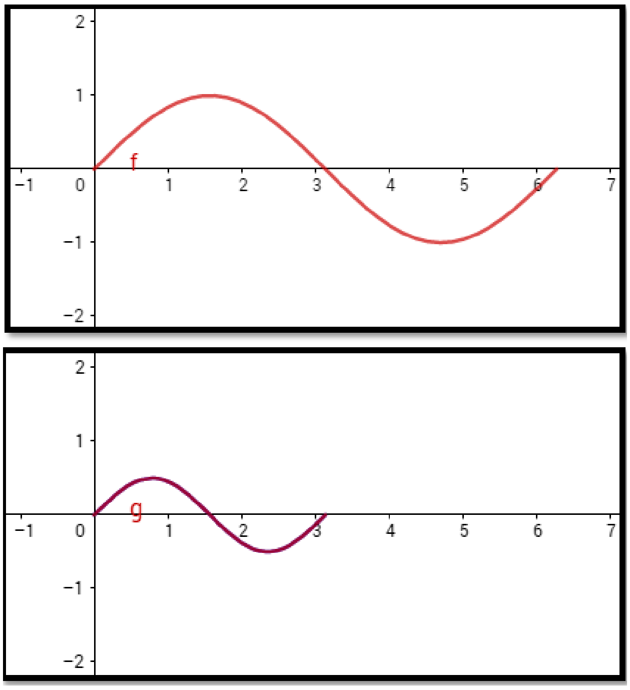
Definição 8: Considere as funções $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ e $g: [c, d] \to \mathbb{R}$ contínuas, as partições $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b\}$ em f e $Q = \{c = x'_0 < x'_1 < \cdots < x'_k = d\}$ em g, tal que $\frac{(x_i - x_{i-1})}{(x'_i - x'_{i-1})} = k$ (constante) para todo $1 \leq i \leq k$. Se $\frac{m_i}{m\prime_i} = \frac{M_i}{M'_i} = k$, então os volumes dos Sólidos Revolução de f e g, respectivamente,V_f e V_g, satisfazem a igualdade $\frac{V_f}{V_g} = k^3$.

Vejamos abaixo alguns exemplos que ilustra a semelhança de que falamos.

Analisemos a proporcionalidade entre as seguintes funções contínuas, $f: [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ e $g: [0, \pi] \to \mathbb{R}$, definidas respectivamente por, $f(x) = sen(x)$ e $g(x) = \frac{1}{2} sen(2x)$.

Notemos na Figura 35, que intuitivamente as duas funções são semelhantes, para tanto, iremos verificar a existência dessa semelhança, verificando a existência da constante de Proporcionalidade, seja em relação a seus comprimentos, áreas ou volume dos seus Sólidos de Revolução.

Figura 35- Curvas das Funções f e g



Fonte: Autoria Própria

Notemos que se para f e g adotarmos as partições P e Q são tais que $i = 4$, então temos que tanto os retângulos das somas inferiores quanto as superiores correspondentes são semelhantes um a um numa razão de 2 para 1, isto é, a Constante de Proporcionalidade é igual a 2.

Inicialmente, iremos calcular o comprimento das curvas de f e g.

Sejam:

$$L_f = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + [sen'(x)]^2}dx = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 2sen(x)\cos(x)}dx = 7{,}64$$

e

$$L_g = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + [\frac{1}{2}sen'(2x)]^2}dx = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + sen(2x)cos(2x)}dx = 3{,}82.$$

Verifica-se que, $\frac{L_f}{L_g} = 2.$

Para se verificar a proporcionalidade das áreas façamos:

$$A_f = \int_0^{2\pi} sen(x)dx = 2[-\cos(x)]_0^{\pi} = 4$$

e

$A_g = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} sen(2x)dx = 2\left[-\frac{1}{4}\cos(2x)\right]_0^{\pi/2} = 1.$

Notemos que, $\frac{A_f}{A_g} = 4 = 2^2$.

Finalmente, para o volume:

$V_f = \pi \int_0^{2\pi} sen^2(x)dx = 2\pi\left[-\frac{1}{4}sen(2x) + \frac{1}{2}x\right]_0^{\pi} = \pi^2$

e

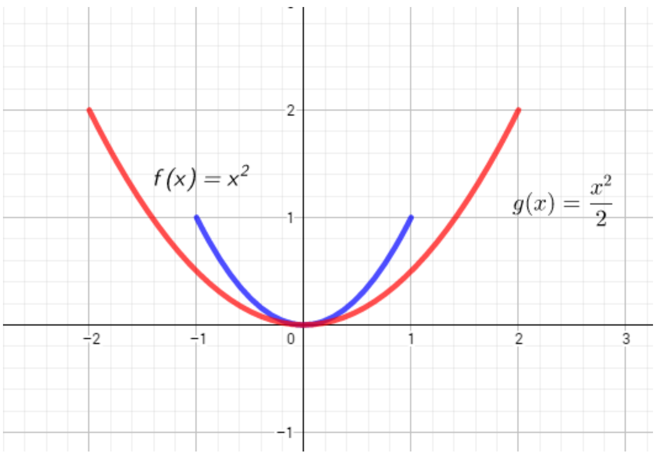
$V_g = \pi \int_0^{\pi} \frac{1}{2} sen^2(2x)dx = \pi\left[-\frac{1}{8}sen(4x) + \frac{1}{4}x\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{8}.$

Então, $\frac{V_f}{V_g} = 8 = 2^3$.

Portanto, podemos verificar que as duas curvas tem uma relação de proporcionalidade 2 para 1, ou seja, a curva g é uma redução de f em todas as suas proporções.

Por fim iremos analisar a proporcionalidade das curvas $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$ e $g: [-2,2] \to \mathbb{R}$, definidas respectivamente por, $f(x) = x^2$ e $g(x) = \frac{x^2}{2}$. Temos os gráficos apresentados abaixo.

Figura 36- Gráficos das Funções $\boldsymbol{f(x) = x^2}$ e $\boldsymbol{g(x) = \frac{x^2}{2}}$.



Fonte: Autoria Própria

No que usarmos as partições P e Q tais que $k = 4$ temos que os retângulos superiores e inferiores estão relacionados numa razão de 1 para 2 entre f e g, respectivamente.

Logo, temos que:

(1) Comprimento:

$L_f = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + [x^2]^2} dx = 2 \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx = 2{,}96.$

e

$L_g = \int_{-2}^{2} \sqrt{1 + \left[\frac{x^2}{2}\right]^2}\, dx = 2 \int_0^2 \sqrt{1 + x^2} dx = 5{,}92.$

Verifica-se que, $\frac{L_f}{L_g} = \frac{1}{2}$.

(2) Área:

$A_f = \int_{-1}^{1} x^2 dx = 2 \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$

e

$A_g = \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}.$

Notemos que, $\frac{A_f}{A_g} = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$.

(3) Volume:

$V_f = \pi \int_{-1}^{1} (x^2)^2 dx = \pi \left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^1 = \frac{2\pi}{5}$

e

$V_g = \pi \int_{-2}^{2} \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{4} \left[\frac{x^5}{5}\right]_{-2}^2 = \frac{16\pi}{5}.$

Então, $\frac{V_f}{V_g} = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$.

Mostramos em que situações curvas são semelhantes, e como verificar a existência da Constante de Proporcionalidade ao se trabalhar com seus comprimentos, áreas e volumes.

De forma geral podemos afirmar que, uma Constante de Proporcionalidade$k$ nos fornece qual a taxa de ampliação (ou dedução) de uma curva, sem que para isso essa perca nenhuma propriedade, ou seja, não sofra distorções de imagem. Logo, afirmar que um Sólido de Revolução, possui o comprimento da curva que o descreve, associado a outro semelhante por uma constante k, a área k^2 e o volume k^3, nos fornece que esses aumento (ou redução) acontece na mesma proporção de forma linear, plana ou espacial.

4. A SEQUÊNCIA DIDÁTICA PROPOSTA E ALGUNS USOS DE PROPORCIONALIDADE NO ENSINO MÉDIO

O conteúdo apresentado deixa claro o quando a Proporcionalidade é rica, e pode ser amplamente tratada na Educação Básica, pois é comum essa ser tratada sobre bases não muito sólidas.

Normalmente, a Proporcionalidade é apresentada de forma não muito natural, se olharmos para a história da construção da Matemática; pois se tem a proporcionalidade e a semelhança como sendo conteúdos de naturezas distintas, sendo um de natureza algébrica e outro de natureza geométrica, padrão esse apresentado nos próprios livros didáticos.

Entretanto, a responsabilidade por fazer a aproximação conceitual desses conteúdos é do docente, que pode se deparar com dificuldades tanto de natureza teórica quanto metodológica, e isso limita o alcance da ação didática.

Por outro lado, sob o ponto de vista, pode-se olhar para Matriz de Referência do Ensino Médio de matemática para Prova Brasil. Essa matriz é formada por quadro eixos: Espaço e Forma (D1-D10), Grandezas e Medidas (D11-D13), Números e Operações/Álgebra e Funções (D14-D33) e Tratamento de Informação (D34, D35). Essa matriz é formada por 35 Descritores, que estabelecem o alcance do conhecimento que o aluno deve obter.

Entre esses descritores foram destacados alguns:

D1- Identificar figuras semelhantes mediante o reconhecimento de relações de proporcionalidade.

D2 - Reconhecer aplicações das relações métricas do triângulo retângulo em um problema que envolva figuras planas ou espaciais.

D11 – Resolver problema envolvendo o cálculo de perímetro de figuras planas.

D12 – Resolver problema envolvendo o cálculo de área de figuras planas.

D13 – Resolver problema envolvendo a área total e/ou volume de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera).

D15 – Resolver problema que envolva variações proporcionais, diretas ou inversas entre grandezas.

D16 – Resolver problema que envolva porcentagem.

D34 – Resolver problema envolvendo informações apresentadas em tabelas e/ou gráficos.

D35 – Associar informações apresentadas em listas e/ou tabelas simples aos gráficos que as representam e vice-versa.

Observe acima mostrados 9 Descritores, e que esses estão intimamente ligados ao conceito de Proporcionalidade, seja geométrica ou algebricamente; e que também que eles perpassam todos os temas trabalhados no Ensino Médio.

De posse dessa informação, pode-se observar a importância do tratamento de Proporcionalidade, tanto como aparato teórico para o professor quanto metodológico para o aluno, visto que esses 35 descritores de Matemática para a Educação Básica apontam os conhecimentos básicos que devem ser aprendidos nessa etapa para se adquirir uma aprendizagem básica satisfatória.

Comumente em Matemática, o conceito de Proporcionalidade é introduzido de forma algébrica e, portanto com poucos ou nenhuns recursos visuais que auxiliem o aluno no reconhecimento dos padrões matemáticos, e não de fórmulas prontas.

Já no que se refere à Semelhança de figuras, normalmente essa é introduzida correlacionada a objetos de qualquer natureza, entretanto, seu estudo é limitado a polígonos, com ênfase em triângulos, sem se estabelecer discussões sobre a natureza Matemática que permeiam as Semelhanças entre figuras, como já citado anteriormente.

Apesar de esse trabalho ter como resultado uma Sequência Didática sobre Semelhanças e Medidas de Volume, destinada ao 9º ano do Ensino Fundamental, que será apresentada a seguir, assim como sugestões de abordagens para Ensino Médio, onde podem ser explorados os conceitos apresentados nos capítulos anteriores e de forma que esses possam contribuir para construção de uma visão multifacetada do conhecimento para o aluno, a fim de torná-lo significativo. Essas sugestões têm como base o material construído e destinado a professores da Educação Básica, a fim de fazê-los compreender que o ato de tornar o conteúdo significativo é uma tarefa complexa e continua que deve ser empenhada desde muito cedo.

4.1. A Sequência Didática: Semelhança e Medida de Volumes

Esse trabalho tem como produto a Sequência Didática que será apresentada, e que tem como tema a *“Semelhança e Medidas de Volume”*. Foram apresentados até o momento, vários conceitos associados à Proporcionalidade, que foram utilizados para conjecturar uma proposta de intervenção no 9º ano do Ensino Fundamental, com finalidade de construir uma aprendizagem significativa, segundo a perspectiva geométrica dos conteúdos.

A Sequência Didática proposta foi estruturada para desenvolver-se em 14 aulas, aproximadamente. A mesma será organizada em 7 atividades, que podem ser divididas da seguinte maneira: Atividade 1 (1 aula), Atividade 2 (1 aula), Atividade 3 (4 aulas), Atividade 4 (2 aulas), Atividade 5 (1 aula), Atividade 6 (2 aulas) e Atividade 7 (3 aulas).

4.1.1. Atividade 1

A primeira atividade será a leitura e apresentação do texto intitulado *Sobre Miniaturas e Escalas* (Veja o APÊNDICE A), o qual aborda a noção intuitiva do conteúdo Semelhança, no plano e no espaço, de forma a caracterizar sua importância social. Essa atividade prossegue com a proposição de três perguntas, a fim de levantar a discussão sobre a aplicação do conteúdo no cotidiano do conteúdo e sua presença no dia-a-dia do aluno.

4.1.2. Atividade 2

A atividade 2, a partir da discussão do texto *Sobre Miniaturas e Escalas,* visa introduzir o conceito de Proporcionalidade de segmentos de reta. Inicialmente, será realizado o estudo sobre a razão entre dois segmentos, de forma que seja possível primeiro definir uma razão. A partir de quatro segmentos, a proporcionalidade será definida como a igualdade entre duas razões, garantindo a existência de uma constante de proporcionalidade.

O conceito de proporcionalidade entre segmentos já foi introduzido no capítulo 1, ao se falar de Segmentos Comensuráveis.

4.1.3. Atividade 3

Essa atividade tem por finalidade tratar do Teorema de Tales e suas aplicações, enfatizando a Semelhança de Triângulos. A associação entre essa atividade e a última é feita ao se definir o Teorema citado, de forma a compreender a extensão para todo número real.

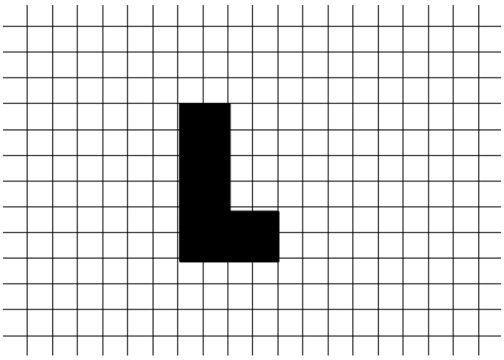
Como sugestão, essa atividade pode ser organizada em 4 etapas, sendo: apresentação do Teorema de Tales (1 aula), resolução de problemas envolvendo Teorema de Tales (1 aula) (APÊNDCE B), análise do Teorema de Tales e a Semelhança de Triângulos (1 aula) e resolução de problemas sobre Semelhança de Triângulos (1 aula) (APÊNDICE C).

A quarta etapa da atividade é composta por 6 (seis) problemas, onde a última questão trabalhada será direcionada a Homometria de triângulos, tendo por finalidade a significação do conteúdo de Semelhança. Sugere-se que o professor apresente a noção de Homometria através da construção no Geogebra.

4.1.4. Atividade 4

A partir da resolução do problema por Homometria apresentado na atividade anterior, o professor deve propor a utilização do conceito para outros polígonos. Por fim, retomando as situações apresentadas na Atividade 1, será solicitado aos alunos a ampliação e redução de desenhos, conforme modelo apresentado na Figura 37. Para isso, será utilizado malha quadriculada, recorrendo a constantes de proporcionalidades 2 e 1/2, respectivamente.

Figura 37- Desenho na Malha Quadriculada



Fonte: https://pt.surveymonkey.com/r/P2W6XRS

4.1.5. Atividade 5

Nessa etapa será trabalhado as Medidas de Volume, sugerindo-se a utilização de material dourado para a introdução do conceito de volume.

Através do material dourado, irá se construir inicialmente, o conceito de volume de um cubo. Considerando cada cubo pequeno como uma unidade, deve-se mostrar que, com 8 cubinhos podem ser organizados um cubo de lado contendo 2 unidades; que 27 cubinhos formam um cubo com lado contendo 3 unidades; e finalmente, que 1000 cubinhos formam um cubo com lado 10 unidades.

Essa experiência concreta será usada para construir o conceito de medidas de capacidade (volume), e também servirá de justificativa para compreender adiante, como calcular o Volume do Paralelepípedo Retângulo, como sendo o produto das suas três dimensões (comprimento, largura e altura).

A partir do cubo com 10 unidades de lado, formado por 1000 cubinhos, pode-se introduzir agora também as unidades de medidas de volume e seus múltiplos.

4.1.6. Atividade 6

Como mencionado na atividade anterior, essa atividade se inicia com a proposta de construção do conceito de Volume do Paralelepípedo Retângulo, através do material dourado. Para realizar essa atividade, basta escolher uma quantidade V de cubinhos, tal que $V = a.b.c$, com $a, b, c \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dessa forma, deve-se possibilitar ao aluno notar que $a,$ b e c são respectivas unidades de comprimento, largura e altura do Paralelepípedo Retângulo, e que, portanto, $V = a.b.c$ é o volume do Paralelepípedo Retângulo.

Após a construção do conceito de Volume do Paralelepípedo Retângulo, deve-se trabalhar para se desenvolver o conceito de Volume do Cilindro Circular Reto de raio r. Para tanto, conhecida a área da base do mesmo (πr^2), usaremos o *Princípio de Cavalieri* para intuir se um Paralelepípedo Retângulo possui a mesma altura h e área da base πr^2, que o referido Cilindro. Esse processo mostraria que ambos possuem o mesmo volume, portanto, pode-se concluir que a área do Volume do Cilindro Circular Reto é $V = \pi r^2 h$.

Para fixar a ideia são propostos alguns exercícios (APÊNDICE D), onde o último deve, necessariamente, ser associado ao conceito de escalas. Para desenvolver o tal conceito os alunos devem construir a planta baixa da própria residência. Esse será aprofundado na última atividade proposta.

4.1.7. Atividade 7

A última atividade propõe que os alunos formem grupos de 6 alunos e com base nas plantas baixas feitas de suas casas feitas no exercício da Atividade 6, discutam e escolham uma das plantas para construir uma maquete. A maquete deverá ser construída em sala, durante o período estabelecido de 2 aulas. Após executada a construção da maquete, essa será apresentada na aula, sendo analisada sua estrutura, escala utilizada e qual percepção da matemática, antes das atividades e depois.

4.1.8. Avaliação

A avaliação da sequência didática proposta deve ser de caráter qualitativo e quantitativo. Para isso, será observado o domínio conceitual dos alunos através da resolução dos problemas presentes no apêndice deste trabalho. Além do domínio conceitual, será avaliada a participação nas atividades desenvolvidas, possibilitando ao docente identificar as dificuldades existentes e os avanços conquistados ao longo do processo.

4.2. Função Afim

Uma função afim qualquer é definida naturalmente como sendo uma função $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Por recorrência, podemos observar que:

$$\varphi(0) = b$$

$$\varphi(1) = a + b$$

$$\varphi(2) = 2a + b$$

$$\varphi(3) = 3a + b$$

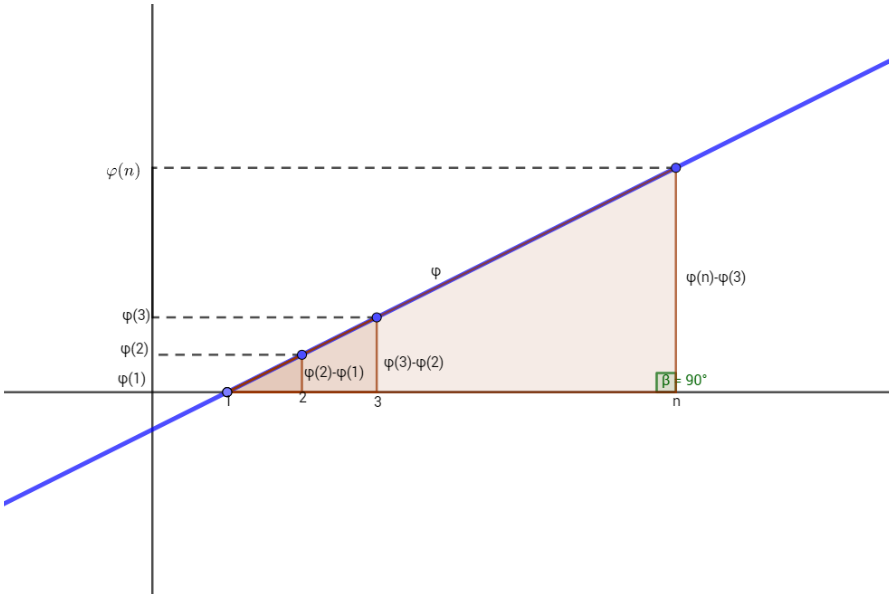
$$\varphi(4) = 4a + b$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\varphi(n) = na + b$$

Notemos que, $\varphi(n) = \varphi(n-1) + b$, ou seja, $\varphi(n) - \varphi(n-1) = b$. Isso significa que na função afim, a diferença entre dois termos consecutivos sempre é constante, o que nos garante que há uma característica geométrica importante a ser trabalhada nesse conteúdo, que atualmente já se apresenta em vários livros didáticos do 9º ano.

Figura 38- Gráfico da Função Afim $\boldsymbol{\varphi}$



Fonte: Autoria Própria

Note que são semelhantes cada um dos triângulos formados na Figura 38 pelos valores atribuídos aos pontos do gráfico.

Logo:

$$\frac{\varphi(2)-\varphi(1)}{2-1}=\frac{\varphi(3)-\varphi(2)}{3-2}=\cdots=\frac{\varphi(n)-\varphi(3)}{n-3}$$

$$\frac{b}{1}=\frac{b}{1}=\frac{(n-3)b}{n-3}=b(constante)$$

Portanto, verificamos que existe uma relação de Proporcionalidade entre os segmentos correspondentes de três pontos dados, isto é, dados os pontos $(x_1,\varphi(x_1))$, $(x_2,\varphi(x_2))$ e $(x_3,\varphi(x_3))$, temos que $\frac{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{\varphi(x_3)-\varphi(x_2)}{x_3-x_2}$.

Visto que essa função é rica geometricamente, a importância da Geometria para estruturação do aluno que se deseja construir. Dessa forma, pode-se notar que apresentação de uma definição pronta como apresentada em muitos livros didáticos é pobre conceitualmente e limitada a um aspecto decorativo da Matemática.

Geometricamente, se tem as ferramentas necessárias para uma construção natural da Matemática[11], isto é, associa-se diretamente a conteúdos programáticos das séries anteriores (Teorema de Tales e Semelhança de Triângulos), utilizando a

[11] Diz-se da construção matemática usando recursos geométricos ou logicamente construídos.

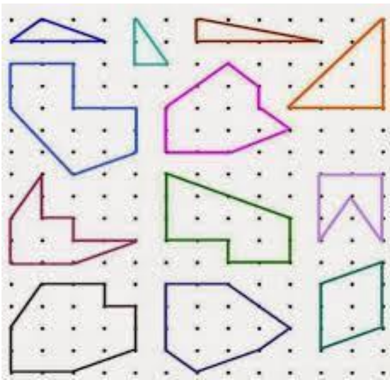
ferramenta de recorrência que apesar de não está contemplada na educação básica, é muito importante na resolução de problemas, e tem um potencial relevante particularmente para as Olimpíadas de Matemática, independentemente da modalidade a qual se apresente.

Nesse contexto, a conteúdo passa a ter um contexto muito mais amplo, podendo ser utilizados diversos recursos para sua apresentação, como:

- **Geoplano**

O Geoplano pode ser usado para construção de gráficos a partir de situações problemas, ou para modelar as mesmas, adotando um conjunto de hastes como sendo o eixo x e ou como sendo o eixo y, sendo possível também fazer uma revisão prática da semelhança de triângulos.

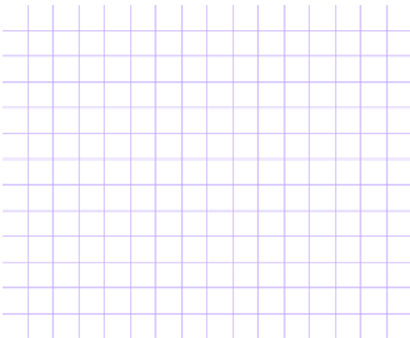
Figura 39- Geoplano Clássico



Fonte: Autoria Própria

- **Malha Quadriculada**

Figura 40- Malha Quadriculada



Fonte: Autoria Própria

É comum, nos livros didáticos de Matemática, os conteúdos serem introduzidos através de uma situação problema. Nesse sentido a malha quadriculada pode ser inserida na aula junto ao problema para realização do seu estudo de forma indutiva, usando suas colunas como valores para o $eixo\ x$ e suas linhas como valores para o $eixo\ y$.

Desse modo, é possível não somente modelar o problema para encontrar a regra da função que o descreve, como também conhecendo o conceito de somas Riemann, e suas somas superiores e inferiores, não somente realizar uma aproximação do gráfico dessa função, concluindo por essa que seu gráfico é uma reta como também o local exato por onde esse passa.

- **Sobreposição de triângulos**

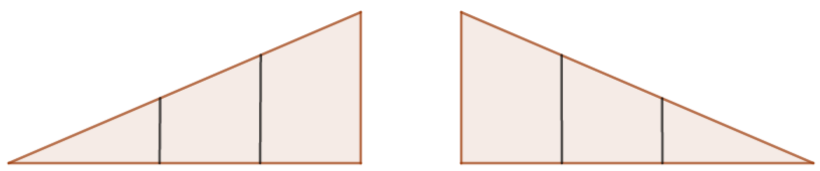
Nessa configuração, as possibilidades de resolução de problemas envolvendo Semelhança (quando geométricos) e Proporcionalidade (quando algébricos) se relacionam diretamente aos problemas de função afim, favorecendo fortemente a aprendizagem significativa, observando o fato que um objeto concreto ao ser utilizado na aprendizagem não garante uma aprendizagem significativa, se a aula não for planejada de forma a construir esquemas mentais a partir dos já adquiridos.

Além disso, o favorecimento à associação entre o estudo de funções afins e Geometria, que no caso citado é expressa por uma reta no plano, abre caminho para a construção de um ambiente favorável para a aprendizagem da geometria analítica.

Todas essas ferramentas são úteis com uma clara limitação clássica do trabalho com elementos geométricos, pois trabalha inicialmente com grandezas positivas, e a partir dessas, trabalhar gradualmente com valores negativos.

É interessante também associar o crescimento ou decrescimento da função a dois triângulos retângulos congruentes posicionados como na Figura 41 abaixo.

Figura 41- Triângulos Congruentes



Fonte: Autoria Própria

De forma que fazendo a associação ponto a ponto como sugerido na Figura 32, tem-se uma visão clara do que é uma função crescente e decrescente.

Por fim, é possível verificar que a Constante Proporcionalidade $\frac{\varphi(i)-\varphi(i-1)}{i-(i-1)} = b$ para todo $i \in [1, n]$ representa um número denominamos coeficiente angular da reta, tida como a inclinação da reta em relação ao *eixo x* , que igual a tangente do ângulo de inclinação.

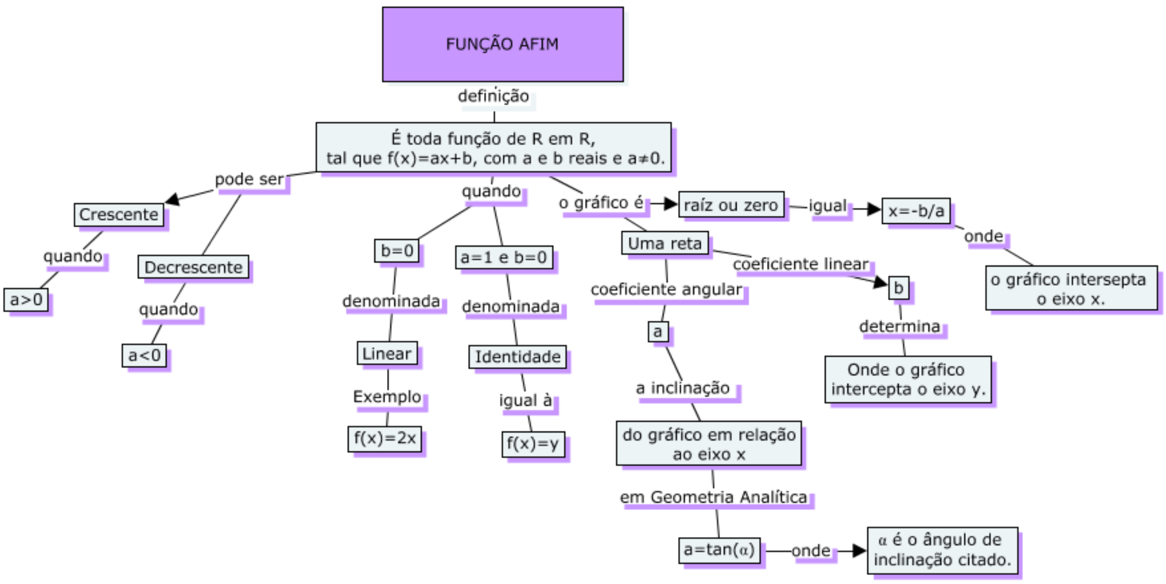
- **Construção de Mapas Conceituais**

O uso dos mapas conceituais é uma estratégia que valoriza a apreensão dos conceitos, independente da disciplina que esteja envolvida, pois esses tem por objetivo a hierarquização dos conceitos, organizando-os logicamente.

Segundo Pelizzari et al (2002) “São instrumentos que permitem descobrir as concepções equivocadas ou interpretações não aceitas (podem não ser errôneas) de um conceito, ilustradas por uma frase que inclui no conceito.” (p.41)

Dessa forma, o mapa conceitual é uma estratégia viável para construção de qualquer conceito matemático.

Figura 42- Mapa Conceitual



Fonte: Autoria Própria

Apresentadas as sugestões acima, relembremos que essas são alternativas que levam em consideração a sistemática introdução das Funções Afins e Quadráticas nos currículos do 9º ano do Ensino Fundamental.

4.3. Progressão Aritmética

Define- se como progressão aritmética toda sequência linear de primeira ordem $a_n = a_{n-1} + r$, onde a_n é seu $n - ésimo$ termo, a_{n-1} seu termo anterior e r a razão.

Consideremos a_1 o primeiro termo da recorrência bem definido, então:

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_2 + r$$

$$a_4 = a_3 + r$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$a_n = a_{n-1} + r$$

Usando a soma telescópica, temos que $a_n = a_1 + (n-1)r$.

A fórmula acima é como se define usualmente a progressão aritmética nos livros do Ensino Médio.

Verificamos facilmente que a progressão geométrica apresenta as mesmas características geométricas que as funções afins, podendo ser usadas no seu estudo recursos semelhantes.

Além disso, tanto no estudo das progressões aritméticas quanto no estudo de funções afins; dada a existência e acesso a recursos tecnológicos como computadores, não se pode descartar o uso de softwares gráficos como o Geogebra[12], Winplot[13], etc.; a fim de dá significado a aprendizagem.

4.4. Matemática Financeira

Naturalmente ao se falar de matemática financeira, devemos lidar prioritariamente com conceitos com o conceito de porcentagem, que nada mais é do que uma relação de proporção entre duas grandezas.

---

[12] O GeoGebra é um software de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um único pacote fácil de usar. O GeoGebra possui uma comunidade de milhões de usuários em praticamente todos os países. O GeoGebra se tornou um líder na área de softwares de matemática dinâmica, apoiando o ensino e a aprendizagem em Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática.

[13] O Winplot pode criar gráficos a partir de equações implícitas, explícitas, cilíndricas e paramétricas, incluindo equações diferenciais que podem ser representadas em 3D e 2D. E não é só isso! Ele pode também criar curvas e tubos simples.

Ao se trabalhar com porcentagem, pode- se adotar três representações das mesmas:

- Percentual- a forma mais tradicional onde se faz uso do símbolo por centro % mais usualmente;
- Fracionária- onde a porcentagem é representada por uma fração com denominador 100 e numerador correspondente ao valor percentual dado;
- Decimal- que se trata a adoção da forma decimal da forma fracionária.

O significado geométrico dessas representações é uma ferramenta valiosa para a compreensão do conteúdo de forma mais ampla, onde se pode trabalhar no lugar de com as barras de chocolates e outros similares com os quais os livros didáticos costumam iniciar o estudo de frações, é mais rico se trabalhar com gráficos de setores, com intuito não só de relacionar as três representações como também tornar mais natural a análise gráfica. Nessa atividade, pode-se se for possível fazer essas observações com softwares como BR Office e Office que fazem partes dos sistemas operacionais Linux e Windows, como também por meio de outros como os já sugeridos anteriormente.

Cumprida essa primeira fase, que pode ser julgada supérflua dependendo do nível de desenvolvimento do alunado, pode-se propor de diversas formas de construção geométrica, com regra e compasso é possível tanto fazer a associação por gráfico de setores (para esse um transferidor é uma ferramenta importante) como na proposta acima quanto a partir de duas semirretas com mesmas origens, onde uma é a reta percentual e a outra a reta da segunda grandeza.

Vejamos a seguir um exemplo que ilustra esse método geométrico.

Lucas comprou uma calça jeans que custava $R\$ \, 80,00$. Como pagou a vista, o vendedor concedeu a Lucas um desconto de 25%. Analisemos então qual o preço de custo da calça e qual o desconto concedido.

A solução seguirá os seguintes passos:

(1) Construa um segmento de reta $AB = 10\ cm$ que representará a porcentagem de 100%;

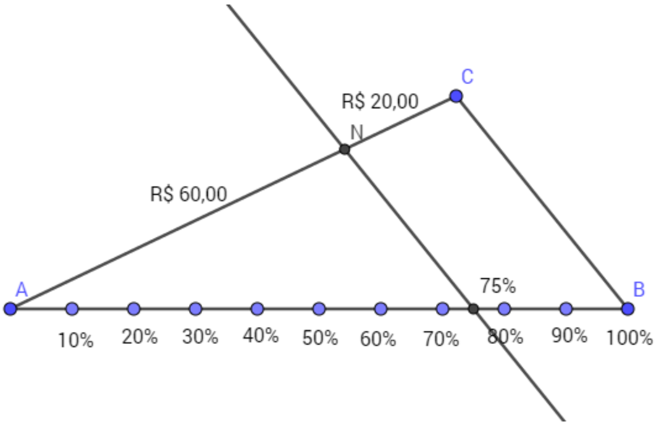
(2) Do ponto $AC = 8\ cm$ para representar os $R\$ \, 80{,}00$;

(3) Trace um segmento BC;

(4) No segmento AB, marque o ponto correspondente a 75% $(7{,}5\ cm)$ e por esse trace uma paralela a $\overline{BC}$ que passa por esse ponto.

O ponto N obtido em AB estará dividido no ponto cujas medidas de AN e NB representam o valor a ser pago pela calça e o valor do desconto, respectivamente conforme podemos observar abaixo na Figura 43.

Figura 43- Solução Geométrica



Fonte: Autoria Própria

Portanto, pode-se verificar que a calça custou $R\$\ 60{,}00$, pois dado um desconto de $R\$\ 20{,}00$ na compra realizada.

É importante mencionar que, essa estratégia tem que ser cuidadosamente planejada, escolhendo com cuidado os números, pois por mais interessante que pareça a metodologia se os números tornarem a estratégia inviável visto as aproximações possível com régua.

No que se referem aos juros simples, esses são definidos como um acréscimo periódico de um valor percentual da quantia sob a qual incide os juros, ou seja, dado um capital(C) sobre o qual incidirá a taxa de juros (i), formando um percentual $(C.i)$, esse percentual incidirá período a período de forma contínua.

Indutivamente temos:

$J = C.i$

$J_2 = j_1 + C.i$

$J_3 = j_2 + C.i$

$J_4 = j_3 + C.i$

$\vdots \qquad \vdots$

$J_n = j_{n-1} + C.i$

Logo, $J_n = C.i.n$ é denominado juro simples aplicado a n períodos.

A partir da expressão anterior, onde $C.i$ é uma constante, pode-se concluir que os juros simples é uma função afim do tipo linear, então se pode se aplicar o mesmo tratamento a essa. Entretanto, temos que a valor resultante da operação é o montante (M) é um conceito que desse ponto de vista tem um tratamento um tanto obscuro, visto que esse é dado pela soma do capital com os juros de n períodos ($M_n = C + J_n = C + C.i.n$), e concluímos que o conteúdo de juro simples não é um conteúdo em si, mas uma aplicação de função afim.

4.5. Geometria

No ensino médio a geometria toma corpo, e é largamente utilizada em todos os conceitos que compõe, podendo essa ser dividida em geometria plana, geometria espacial e geometria analítica, que tem como característica o tratamento analítico de figura de natureza plana. Nesse contexto, a semelhança e proporcionalidade tornam-se conceitos muito importantes a serem usados na resolução de problemas.

Inicialmente, quando se trata de geometria plana, temos as áreas das figuras planas, para o estudo dessas os argumentos que podem ser utilizados são vários, podendo ser retomados em conceitos apreendidos anteriormente, mas também aprendendo novos como relações métricas e razões métricas no triângulo retângulo.

Uma ferramenta muito interessante para compreender as propriedades envolvidas no conteúdo é o desenho geométrico, seja com régua e compasso, seja com softwares gráficos que simulem o uso de tais elementos como o Cabri-geometry[14], Geogebra e o Régua e Compasso.

A compreensão clara e concisa de todos os conceitos de geometria plana transmitidos é primordial para compreensão dos conceitos de geometria espacial e analítica, segundo Pelizzari et al (2002):

---

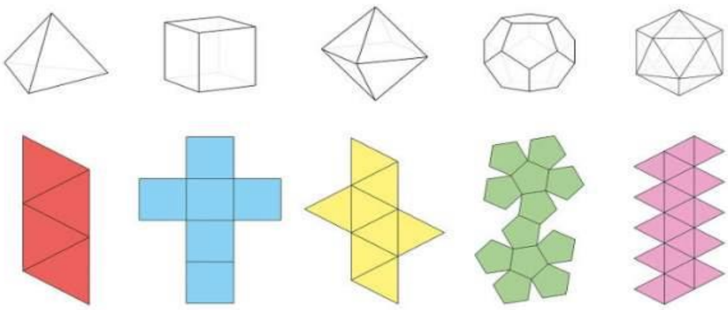
[14] Cabri-Geometry é um software de construção em geometria desenvolvido pelo Institut d'Informatiqe et de Mathematiques Appliquees em Grenoble (IMAG) e é o resultado da colaboração constante de cientistas da informática, especialistas em educação e professores.

> "... a ação educativa está condicionada pelo nível de desenvolvimento dos alunos, os quais nem sempre vêm marcados pelos estudos evolutivos existentes e que, por tal motivo, devem complementar-se com a exploração dos conhecimentos prévios dos estudantes (alunos), o que já sabem ou têm construído em seus esquemas cognitivos. A soma de sua competência cognitiva e de seus conhecimentos prévios marcará o nível de desenvolvimento dos alunos." (p.40).

Então se considerarmos a preexistência dos conhecimentos prévios de Geometria Plana, esses servirão de base para os seguintes, nesse sentido irão ser utilizadas as relações de semelhanças planas para construir o conceito de semelhança de figuras planas, um caso clássico é a afirmação que uma esfera é sempre semelhante a qualquer outra. Além disso, pode-se trabalhar através desses as relações entre os volumes de sólidos como prismas e pirâmides, ou cilindros e cones.

Para se trabalhar com geometria espacial é importante compreender a dificuldade de se compreender as partes do todo quando expostas num esboço, então é importante dispor de sólidos que auxiliem tanto na visualização tridimensional quando na representação plana do sólido.

Figura 44- Poliedros de Platão e suas Planificações



Fonte: HTTPS://brasilescola.uol.com.br/matematica

Vale lembrar que a esse respeito é enriquecedor o uso de softwares como Cabri-geometry ou o Geogebra, nos quais se podem visualizar todos os aspectos dos sólidos segundo a perspectiva que se mostrar mais conveniente, fazendo uso de propriedades e teoremas da geometria plana de forma mais clara.

Na geometria analítica nos deparamos com o estudo de pontos, retas, circunferências e cônicas.

Ponto: ao se trabalhar com pontos, trata-se basicamente de sua representação no plano, a distância entre dois pontos, centro de gravidade para dois e três pontos, e colinearidade entre dois e três pontos. Nesse podemos utilizar em sua introdução o Geoplano ou a Malha Quadriculada para estimular a descoberta, desde que se tenha o conhecimento prévio do Teorema de Pitágoras e da semelhança de triângulos.

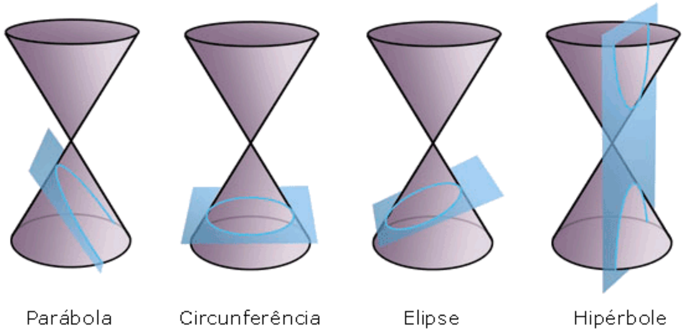
Reta: trata das respectivas equações da reta e das posições relativas entre reta e ponto, e entre duas retas.

O mais importante para o tratamento das retas continua seguindo o mesmo parâmetro da construção geométrica, tomando a mesma construção que se adota para a distância entre dois pontos, entretanto, com foco na inclinação da reta e nas condições necessárias que a descrevem, sem utilizar formulas prontas e acabadas, de forma a valorizar a descoberta.

Circunferência: temos a equação das circunferências, e as posições relativas entre a circunferência e pontos, retas e circunferências. A mesma postura deve ser adotada quando se fala de circunferências, adotando, entretanto mais um conhecimento importante, completar quadrados, que pode ser visto a partir da representação de seus produtos notáveis correspondentes.

Cônicas: As cônicas são compostas pela elipse, hipérbole e parábola, que são resultantes de cortes feitos em folhas de cones. Trabalhar com essas cônicas é mais complexo, visto que suas definições estão intimamente associadas a lugares geométricos, e esses devem ser construídos com cuidados com base nas suas definições, a fim de justificar a existência de cada um de seus elementos, sendo de fundamental importância à utilização de animações para ilustrar as transformações que podem ocorrer nessas curvas.

Figura 45- Cônicas



Fonte: HTTPS://www.matematica.pt/faq/seccoes-conicas.php

4.6. Aplicações em Disciplinas Afins

Além da presença da proporcionalidade na matemática do ensino médio, ela existe em várias outras áreas afins (física, química, biologia e geografia), a seguir iremos enumerar alguns casos onde a teoria apresentada se apresenta.

A física em particular é uma disciplina repleta de conceitos que possuem formulas onde se tem grandezas tanto diretamente proporcionais quanto inversamente proporcionais. Vejamos a seguir algumas situações onde isso ocorre.

Sistema métrico: O sistema métrico possui no seu sistema o que denominamos múltiplos e submúltiplos, e realizar a transformação de uma medida para outra dentro de uma escala específica de múltiplos e submúltiplos depende do reconhecimento da proporcionalidade que permeiam o conceito.

Força: O conceito de força é tido como sendo uma grandeza vetorial resultante do produto da massa pela aceleração, resultando no fato da força ser diretamente proporcional a massa/aceleração. Analogamente, a aceleração é inversamente proporcional à massa.

Pressão: a pressão é tida como sendo a razão da força pela área da superfície, dessa forma é fato que a pressão é uma grandeza diretamente proporcional à força, mas inversamente proporcional à área a superfície.

Energia potencial: é igual ao produto da massa pela aceleração da gravidade pela altura, de forma que se pode concluir que a massa é inversamente proporcional à altura, e altura e a massa é inversamente proporcional à energia potencial.

Dilatação: a dilatação é um conceito físico muito rico geometricamente, que trata da variação de comprimento, área ou volume sofrida por um objeto quando sofre mudanças térmicas. Visto que essa pode ser linear, superficial e volumétrica. Matematicamente, entretanto, o mais importante de ser mencionado é essas constantes para um mesmo sólido, como uma esfera, estão associadas respectivamente em relação à condição inicial por constantes, k, k^2 e k^3.

Na química temos a lei geral dos gases declara a igualdade entre o produto da pressão pelo volume e o produto da temperatura pelo número de mols do gás e a constante universal dos gases. Assim vemos que a temperatura a qual o gás é submetido é diretamente proporcional à pressão e ao volume, mas que o volume e a pressão são inversamente proporcionais.

Na geografia a densidade demográfica é dada pela razão entre a população e a área da região considerada, sendo a densidade demográfica diretamente proporcional à população e inversamente proporcional a área da região.

Nesse capítulo, foi apresentada não somente a Sequência Didática, como também sugestões de intervenção onde a Proporcionalidade está presente. Destacando, sobretudo, sua presença em diversas áreas do conhecimento.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A forma mais natural de se trabalhar com matemática é geometricamente, pois essa surge do reconhecimento de padrões, não o contrário, do conteúdo matemático para depois surgirem suas representações. Sendo a associação à geométrica mais natural a essa ciência, é importante que esse aspecto seja valorizado.

Por outro lado, a Prova Brasil é uma prova que mede a qualidade do Ensino Fundamental, e para isso adota 35 descritores a serem aprendidos. Entre esses descritores, existe nove que reforçam a importância de valorizar a geometria nos conteúdos escolares de matemática. Sob esse ponto de vista, o 9º ano do Ensino Fundamental, tem uma posição privilegiada, visto que esse possui em sua grade curricular os temas abordados pelo trabalho, como também é a prévia para o aluno que está sendo preparado para ingressar no Ensino Médio.

Dessa forma, o trabalho do professor de Matemática é muito importante para a continuidade dos estudos. A fim de alcançar os objetivos mencionados o trabalho foi construído da forma que será apresentada a seguir.

O primeiro capítulo foi tratado do contexto histórico que construíram a proporcionalidade, inicialmente por seguimentos e associação entre áreas, nos que refere aos primeiros livros dos *Elementos* de Euclides. Apresentando ao leitor a caracterização geométrica dos temas abordados. Já o capítulo seguinte tratou de sólidos e as relações fundamentais utilizadas para o seu tratamento, em particular o Princípio de Cavalieri e o Teorema de Pappus, sendo que é importante destacar que a demonstração para o último não foi completa, mas apenas uma demonstração para poligonais e polígonos.

Verificando-se as possibilidades de se trabalhar com expressões analíticas para curvas no que refere aos Sólidos de Revolução, o Teorema de Pappus dá lugar no capítulo 3, ao tratamento analítico desses sólidos, via Integral de Riemann. Esse capítulo trata de proporcionalidade em Poliedros e Sólidos de Revolução, fazendo uma ponte entre os recursos necessários para garantir a mesma. Dessa forma, enxergar a Escala de se fala na Sequência Didática como sendo o resultado do comportamento da constante de proporcionalidade de forma linear, plana e espacial.

O capítulo 4 trás a Sequência Didática (produto final) e também algumas das possibilidades de tratar geometricamente alguns conteúdos matemáticos, correlacionadas a Sequência Didática no Ensino Médio. De forma a reduzir as distâncias traçadas nas bibliografias atuais, entre o Ensino Fundamental e Médio.

A Sequência Didática propõe uma ação didática de 14 horas aulas e com 7 atividades, direcionada para o estudo de Semelhança e Medidas de Volume, a ser aplicadas em turmas de 9º ano do Ensino Fundamental. Essas ações são pautadas no conteúdo dos três primeiros capítulos, de forma que o professor, antes de fazer uso da mesma possua um conhecimento amplo dos mesmos, para possuir um conhecimento profundo dos princípios que regem as ações propostas.

Então o que é importante de se compreender nessas sugestões não é ela em si, mas de que forma essa se articula com outros conhecimentos previamente apreendidos, com a finalidade de construção uma aprendizagem com significado e articulada a realidade do aluno em seu contexto escolar. Desse modo, a respeito da aprendizagem significativa, temos que:

> “Essa dimensão refere-se à maneira de como o aluno recebe os conteúdos que deve aprender: quanto mais se aproxima do pólo de aprendizagem por descoberta, mais esses conteúdos são recebidos de modo não completamente acabado e o aluno deve defini-los ou “descobri-los” antes de assimilá-los; inversamente, quanto mais se aproxima do pólo da aprendizagem receptiva, mais os conteúdos a serem apreendidos são dados ao aluno em forma final, já acabada. ”(Ausubel, 2002,p.39)

As sugestões dadas partem do princípio que para o desenvolvimento das habilidades matemáticas é preciso estimular formas de raciocínio como a dedução, indução, inferência e julgamento, de aproximar os polos de aprendizagem e estimular a construção do conhecimento, articulando-a com a Sequência Didática construída.

Em consequência, estar-se-á contribuindo para a consolidação de práticas profissionais que ultrapassem os limites da educação bancária (FREIRE, 1980; 1986), na qual o aluno é considerado como um depósito passivo de conteúdos transmitidos pelo professor, para assumir uma nova perspectiva na qual o estudante é agente do processo ensino-aprendizagem e, consequentemente, da (re) construção do próprio conhecimento e, assim, de sua formação em um sentido mais amplo. Nesse processo educativo, o professor deve assumir outra atitude, forjada a partir de outro tipo de formação, que deve ser crítica, reflexiva e orientada pela responsabilidade social.

Nessa perspectiva, o docente deixa de ser um transmissor de conteúdos acríticos e definidos por especialistas externos para assumir uma atitude problematizadora e mediadora do processo ensino-aprendizagem sem, no entanto, perder sua autoridade nem, tampouco, a responsabilidade com a competência técnica dentro de sua área do conhecimento (FREIRE, 1996).

REFERÊNCIAS

BRASIL. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Brasília, Senado Federal, Coordenação de Edições Técnicas, 2017.

BRASIL-MEC. Matriz de Referência de Matemática da 3º Série do Ensino Médio: Comentários sobre os temas e seus descritores, exemplos de itens. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/arquivos/pdf/3_matematica.pdf. Acessado em: 20 de março de 2018.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: *Matemática.* Brasília-MEC/SEF, 1998.

FREIRE, Paulo. Pedagogia da Autonomia: Saberes Necessários a Prática Docente. 25ª edição. São Paulo: Editora Paz e Terra, 1996.

PELIZZARI et al, Adriana. Teoria da Aprendizagem Significativa Segundo Ausubel. Revista PEC, Curitiba, v.2,n.1,p.37-42, julho de 2001-julho de 2002.

OBRAS CONSULTADAS

AVILA, Geraldo. Cálculo das Funções de uma Variável. 7ª edição. Rio de Janeiro: LTC editora, 2004.

AVILA, Geraldo. RPM: A geometria e as Distâncias Astronômicas na Grécia. Nº1. Rio de Janeiro: Editora SBM, 06 de janeiro de 2010.

BRASIL. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Brasília, Senado Federal, Coordenação de Edições Técnicas, 2017.

BRASIL-MEC. Matriz de Referência de Matemática da 3º Série do Ensino Médio: Comentários sobre os temas e seus descritores, exemplos de itens. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/arquivos/pdf/3_matematica.pdf. Acessado em: 20 de março de 2018.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: *Matemática.* Brasília-MEC/SEF, 1998.

FREIRE, Paulo. Pedagogia da Autonomia: Saberes Necessários a Prática Docente. 25ª edição. São Paulo: Editora Paz e Terra, 1996.

LEITHOULD, Louis. O cálculo com geometria analítica, volume 1. 3ª edição. Vila Mariana - SP: Editora HARBRA, 1994.

LEITHOULD, Louis. O cálculo com geometria analítica, volume 2. 3ª edição. Vila Mariana - SP: Editora HARBRA, 1994.

LIMA, Elon Lages. Números e Funções Reais. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2013.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. Fundamentos de Cálculo. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2015.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. Geometria. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2013.

PELIZZARI et al, Adriana. Teoria da Aprendizagem Significativa Segundo Ausubel. Revista PEC, Curitiba, v.2,n.1,p.37-42, julho de 2001-julho de 2002.

RABELO, Mauro. Avaliação Educacional: Fundamentos, Metodologia e Aplicações no Contexto Brasileiro.

ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João Bosco Pitombeira. Tópicos de História da Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

STEWART, James. Cálculo, volume 1. Tradução da 6ª edição norte-americana. São Paulo: Cengage Learning, 2009.

STEWART, James. Cálculo, volume 2. Tradução da 6ª edição norte-americana. São Paulo: Cengage Learning, 2009.

WAGNER, Eduardo; CARVALHO, Eduardo C.P.; MORGADO, Augusto C. de O. A matemática do ensino médio volume 2. 7ª edição. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2016.

APÊNDICE A

Sobre Miniaturas e Escalas

Mayra Taís Albuquerque Santos

Se pararmos para pensar, todos nós algum dia tivemos ou desejamos ter um brinquedo que fosse igual a um objeto da vida real. Uma loja de brinquedos é repleta de carrinhos, acessórios de cozinhas, ferramentas e outros. Entretanto, apesar de muitos desses serem idênticos aos objetos reais, normalmente são menores, ou seja, são miniaturas.

Ao se pensar em miniaturas em brinquedos podemos vê que essas não só brinquedos para crianças, mas muitas vezes também são brinquedos para gente grande.

Quem nunca ouviu falar sobre pessoas que possuem coleções de miniatura de carros ou de bonecos de personagens do cinema?

Todos nós já vimos uma vez na vida pelo menos uma miniatura, mas lembremos de que do mesmo jeito que um objeto pode ser produzido em tamanho menor do original (miniatura) também pode ser produzido em tamanho maior, é o caso, por exemplo, das maquetes de projetos arquitetônicos ou de engenharia que são construídas a partir de uma maquete.

Esse fenômeno de aumentar ou diminuir tanto quanto se deseja um objeto sem que esse perca suas características é denominado de Escala.

O uso das escalas permite não somente a existência de escalas, a projeção de casas e prédios, como também a confecção de mapas.

Para compreender melhor o que é escala, imagine que um terreno possui 20 metros de comprimento, e na sua planta esse está representado com comprimento de 20 cm. Isso nos mostra que cada metro (100 centímetros) foi representado em 1 centímetro na planta, ou seja, podemos afirmar que adota uma escala de 1:100 (1 centímetro para cada 100 centímetros do terreno).

RESPONDA:

1) Você gosta de miniaturas? Que tipo?

2) Na sua casa existe alguma miniatura? De quê?

3) Qual a altura de um prédio cuja maquete possui 150 centímetros? Sabendo que foi usada a escala de 1: 100.

4) Considerando duas fotografias idênticas, exceto nos seus tamanhos, sendo uma 3x4 e outra 15x20. Existe escala entre elas? Se existe, determine-a.

APÊNDICE B

ESCOLA:____.

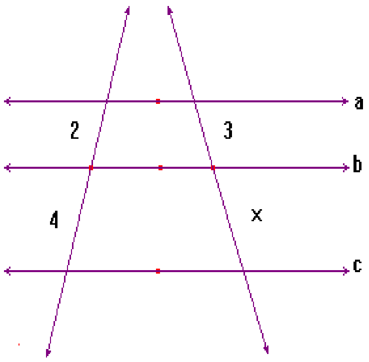
NOME:____. Nº:_______.

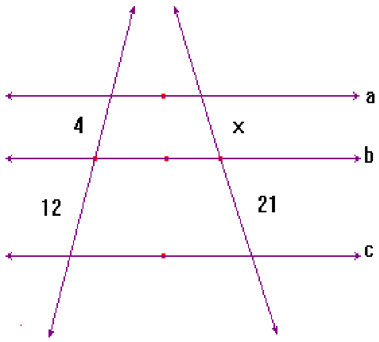
SÉRIE: 9º ANO. TURMA:_____. DATA:___/___/20____.

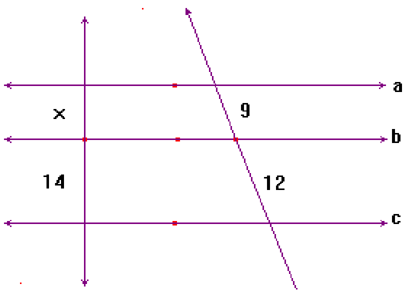
PROFESSOR:______________________.

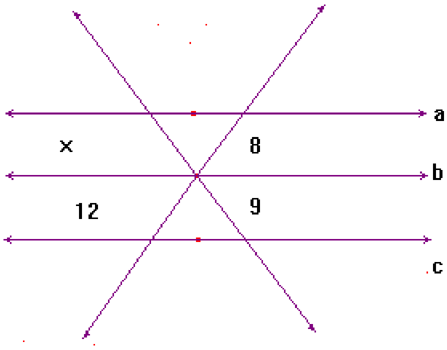
Problemas- Teorema de Tales

1. Nas figuras, $a\ //\ b\ //\ c$. Calcule o valor de x.

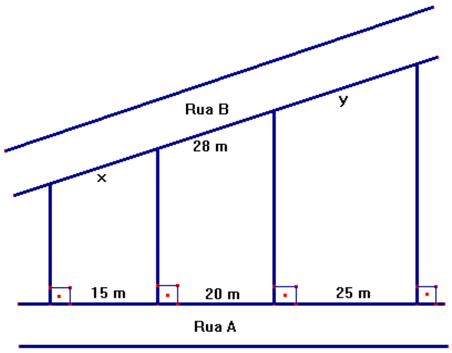
a) 

b) 

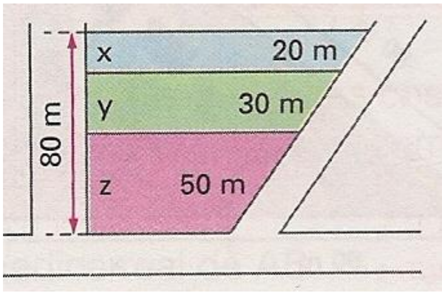
c) 

d) 

2. A figura ao lado indica três lotes de terra, com frente para a rua A e para rua B. As divisas dos lotes são perpendiculares à rua A. As frentes dos lotes $1, 2$ e 3 para a rua A, medem, respectivamente, $15\ m, 20\ m$ e $25\ m$. A frente do lote 2 para a rua B mede $28\ m$. Qual é a medida da frente para a rua B dos lotes 1 e 3?



3. Um feixe de quatro retas paralelas determina sobre uma transversal três segmentos consecutivos, que medem $5\,cm, 6\,cm$ e $9\,cm$. Calcule os comprimentos dos segmentos determinados pelo feixe em outra transversal, sabendo que o segmento desta, compreendido entre a primeira e a quarta paralela, mede $60\,cm$.
4. As alturas de dois postes estão entre si assim como 3 esta para 5. Sabendo que o menor deles mede $6\,m$, então o maior mede:
5. A planta abaixo no mostra três terrenos cujas laterais são paralelas. Calcule, em metros, as medidas x, y e z indicadas.



6. A figura abaixo nos mostra duas avenidas que partem de um mesmo ponto A e cortam duas ruas paralelas. Na primeira avenida, os quarteirões determinados pelas ruas paralelas têm $80\,m$ e $90\,m$ de comprimento, respectivamente. Na segunda avenida, um dos quarteirões determinados mede $60\,m$. Qual o comprimento do outro quarteirão?

APÊNDICE C

ESCOLA:____.

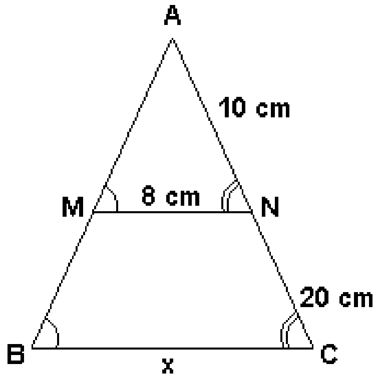
NOME:_______________________________________. Nº:_______.

SÉRIE: 9º ANO. TURMA:_____. DATA:___/___/20____.

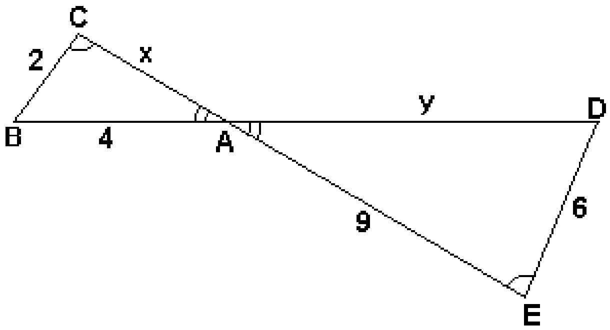
PROFESSOR:_____________________.

Problemas- Semelhança de Triângulos

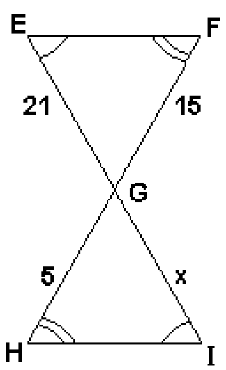
1) Determine o valor de x no triângulo abaixo.



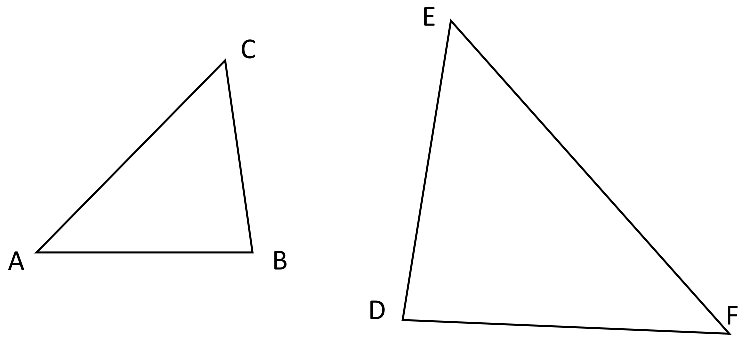
2) Na figura a seguir, os ângulos $\hat{C} = \hat{E} = 100°$. Os ângulos $\hat{B} = \hat{D} = 50°, \overline{BC} = 2\ cm, \overline{AB} = 4\ cm, \overline{DE} = 6\ cm$ e $\overline{AE} = 9\ cm$. Calcule $AC = x$ e $AD = y$.



3) Calcule o valor de x.

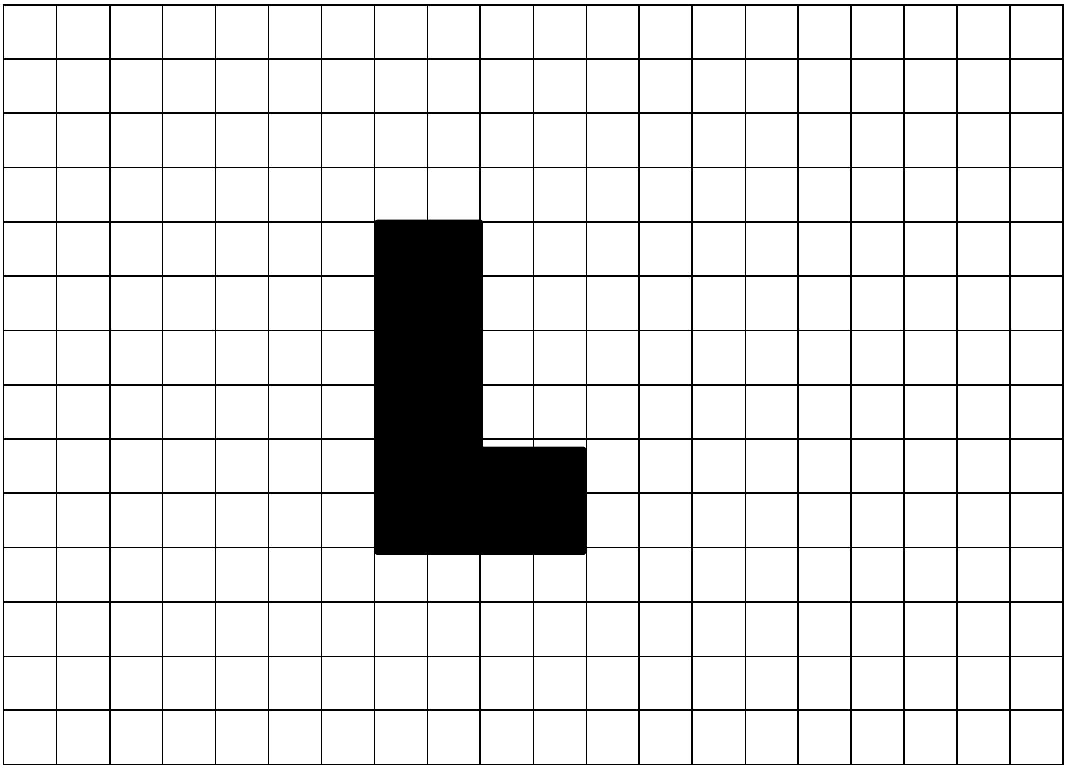


4) Os triângulos ABC e DEF são semelhantes. Sendo $\hat{A} = \hat{F}, \hat{B} = \hat{D}$ e $\hat{C} = \hat{E}$ e $\overline{AC} = 3$ e $\overline{AB} = 8$, calcule EF sendo que $\overline{DF} = 20$.



5) Os triângulos ABC e DEF são semelhantes. Sendo $\hat{A} = \hat{F}, \hat{B} = \hat{D}, \hat{C} = \hat{E}, AC = 10, \overline{AB} = 8, \overline{EF} = 4x \ e \ \overline{DF} = x + 1$, calcule o valor de x. Calcule também EF e DF.

6) Considerando a figura na malha quadriculada abaixo, construa outras duas idênticas a primeira, sendo uma com razão de semelhança $1/2$ e outra com razão de semelhança 2 entre relação a do desenho.



APÊNDICE D

ESCOLA:____.

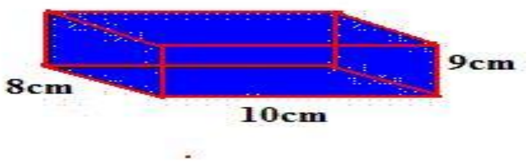
NOME:_______________________________________. Nº:_______.

SÉRIE: 9º ANO. TURMA:_____. DATA:___/___/20____.

PROFESSOR:_____________________.

Exercícios- Medidas de Volume

1. Determine o volume do bloco retangular abaixo.



2. Uma piscina possui a forma de um paralelepípedo com $6m$ de comprimento, $3m$ de largura e $1{,}7m$ de profundidade. Calcule a capacidade, em litros, dessa piscina, sabendo que $1m^3 = 1.000\ litros$.

3. Um reservatório em forma de paralelepípedo tem $4m$ de comprimento, $3m$ de largura e $1{,}5\ m$ de altura. Determine a capacidade, em m^3, deste reservatório.

4. Um jarro cilíndrico de vidro é cheio com sumo. O raio da base do jarro tem $8\ cm$ e a altura deste é de $30\ cm$. Qual é o volume do jarro? (Use $\pi\ =\ 3{,}14$).

5. Um reservatório de combustíveis apresenta o formato de um cilindro circular reto de $15\ m$ de diâmetro e $6\ m$ de altura. Determine a capacidade, em litros, desse reservatório. (Utilize $\pi = 3{,}14$)

6. Uma indústria de embalagens deseja fabricar uma lata de tinta cilíndrica com raio da base medindo $0{,}5\ dm$ de comprimento e com capacidade para $1\ dm^3$. Qual deverá ser o comprimento da altura dessa embalagem? (Use $\pi\ =\ 3{,}1$)