UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

TIAGO MARINHO DA SILVA

UMA ABORDAGEM DE SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS NO ENSINO MÉDIO

Maceió

2013

TIAGO MARINHO DA SILVA

UMA ABORDAGEM DE SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS NO ENSINO MÉDIO

Dissertação de Mestrado, apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática ofertado pelo Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Luis Guillermo Martinez Maza

Maceió

2013

Catalogação na fonte

Universidade Federal de Alagoas

Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

S586u Silva, Tiago Marinho da.

Uma abordagem de sequências numéricas no ensino médio / Tiago Marinho da Silva. – 2013.

61 f. : il.

Orientador: Luis Guilhermo Martinez Maza.

Dissertação (Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2013.

Bibliografia: f. 60-61.

1. Álgebra elementar - Progressões. 2. Sequências numéricas. 3. Recorrência. 4. Fibonacci, sequência de. 5. Matemática – Ensino. I. Título.

UMA ABORDAGEM DE SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS NO ENSINO MÉDIO

Tiago Marinho da Silva

Dissertação de Mestrado Profissional, submetida em 09 de agosto de 2013 à banca examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Alagoas em associação com a Sociedade Brasileria de Matemática, como parte dos requisitos necessários a obtenção do grau de mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

Luis Guillermo Martinez M.

Prof. Dr. Luis Guillermo Martinez Maza (Orientador - UFAL)

Carlos Argollo Pereira Alves

Prof. Dr. Argollo Pereira Alves (IFAL)

Gregório Manoel da Silva Neto

Prof. MSc. Gregório Manoel da Silva Neto (UFAL)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus por me dar forças nessa minha caminhada.

A minha esposa Márcia Gomes por me apoiar durante esses dois anos;

Aos meus filhos Arthur Santiago & Alícia Maria .

Aos meus pais José Paulo e Iracilda por tudo que me deram e pelo apoio;

Meus irmãos: Tina, Jé e Paulinho por acreditarem em mim;

Ao meu orientador e Prof. **Dr. Luis Guillermo M. Maza** pela orientação, paciência e dedicação.

Aos professores do PROFMAT- UFAL.

Aos colegas do Curso, em especial: Cleverton, Josivaldo e Clayton.

A CAPES pelo suporte dado ao longo de todo o curso de Mestrado.

Aos amigos: Isnaldo, Marcos Larangeiras e Sandro pelo apoio e ajuda que me deram durante o curso.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo apresentar uma proposta que servirá de ferramenta no auxílio dos estudos das sequências numéricas, assunto visto em praticamente todo ensino básico da Matemática. O docente, através dos conceitos e da proposta apresentada neste trabalho, irá aproveitar todo o cotidiano do aluno para a construção das resoluções de problemas, que será de forma recursiva, que envolvam sequências numéricas. Esta abordagem será apresentada em três partes: primeiramente abordaremos o estudo das sequências numéricas através da História da Matemática; em seguida, apresentaremos exemplos do cotidiano, da natureza e curiosidades que envolvam sequências numéricas, que são resolvidos de forma recursiva; por último, apresentaremos definições e propriedades das progressões aritmética e geométrica e da sequência Fibonacci. A proposta do trabalho é fazer o uso de recorrência nas resoluções de problemas que envolvam sequências numéricas no ensino básico. Acreditamos que esta nova abordagem no estudo das sucessões numéricas ajudará professores a realizar um trabalho mais contextualizado e fará com que alunos tenham melhor motivação e menos dificuldades no aprendizado dos assuntos citados

Palavras-chave: Sequências numéricas. Recorrência. Sequência de Fibonacci. Progressão Aritmática e Progressão Geométrica.

ABSTRACT

The objective of this paper is to present a proposal which will serve as a tool helping in the study of numerical sequences, a common subject among basic mathematics studies. The teacher, through the concepts and the proposal presented in this paper, will take the advantage of all the students? everyday life situations and create solution for their problems, which are recursively, and engage in numerical sequences. This approach will be presented in three parts: the first approach is the study of numerical sequences through the history of mathematics, subsequently present examples of everyday life, from nature and curiosities relating numerical sequences, which are solved recursively, and finally, it is presented definitions and properties of arithmetic and geometric progressions and the Fibonacci sequence. The purpose of this work is to make use of recurrence in problem solving involving numerical sequences in basic education. We believe this new approach in the study of numerical sequences will help teachers to conduct a more contextualized work and students will be more motivated and feel less difficulty in learning the mentioned subject.

Keywords: numerical sequences, recurrence, Fibonacci sequence, Arithmetic Progression and Geometric Progression.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Ao longo dos anos o ensino de sequências numéricas no ensino médio, em alguns casos, esteve ligado ao ato de decorar fórmulas. Tal procedimento tem tornado o ensino da Matemática a uma condição momentânea, provisória, levando ao esquecimento do uso das sequencias e suas propriedades.

O presente trabalho tem como objetivo mostrar que o ensino da Matemática deve privilegiar o conhecimento de mundo do aluno, levando em consideração que o discente consegue ter um raciocínio lógico para entender a construção de uma sequência numérica com referência no seu dia-a-dia.

Atividades de sequências numéricas com História da Matemática, uso de jogos e curiosidades tornam o aprendizado mais prazeroso e eficaz, pois a proposta não leva ao esquecimento das construções das sucessões numéricas.

Este trabalho está dividido em quatro partes: a primeira, nos mostra a fundamentação teórica referente a este processo; a segunda, uma abordagem histórica de sequências numéricas; a terceira, sequências numéricas que envolvem o dia-a-dia, curiosidades e elementos da natureza; a última, destina-se a definição de sequências(de um modo geral) e aos conceitos e propriedades das progressões aritméticas e geométricas e sequência Fibonacci.

A importância deste trabalho se volta ao ensino de sequências numéricas no ensino médio, proporcionando ao professor um caminho para modificar a assimilação de tais conteúdos pelos alunos, construindo uma proposta para alguns professores de escolas públicas, um instrumento para a melhoria do ensino de sequências numéricas no final do ensino básico. Além disso, esse procedimento serve como pré-requisito para os estudos de Matemática em cursos superiores.

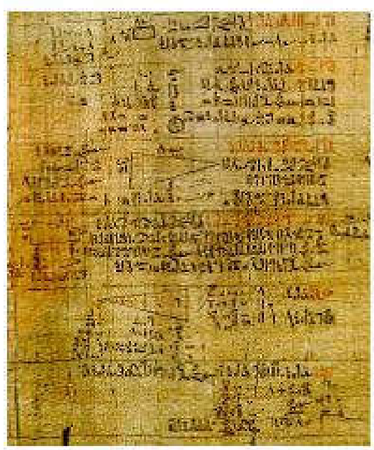
O ensino de Matemática no ensino médio, em muitos lugares esteve voltado à assimilação de regras e fórmulas que em muitos casos tem sido o causador de tormentos e inquietações em relação ao aprendizado. O elemento motivador talvez esteja ligado a desassociação dos conteúdos com a realidade dos alunos. Deste modo, é importante lembrar que o aprendizado deve estar ligado ao prazer de aprender para o melhor entendimento dos conteúdos e um passo importante é o professor relacionar os conteúdos de ensino ao cotidiano dos alunos.

1 CONSIDERAÇÕES HISTÓRICAS

1.1 PAPIRO DE RHIND

Algumas das contribuições egípcias para a matemática são encontradas em um certo número de papiros egípcios, que de algum modo resistiu ao desgaste do tempo por mais de três e meio milênios. O mais extenso dos de natureza matemática é um rolo de papiro com cerca de 0,30m de altura e 5m de comprimento, que está agora no Museu Britânico. Foi comprado em 1858 numa cidade à beira do Nilo, por um antiquário escocês, Henry Rhind; por isso é conhecido como Papiro de Rhind (ou Papiro de Ahms em homenagem ao escriba que o copiou por volta de 1650 A.C.).

Figura 1.1: **Papiro de Rhind**



Pormenor do *Papiro de Rhind*

Fonte: Disponível em < http://www:clubedegeometria.blogspot.com.br>. Acesso em 20 abr. 2013

1.1.1 PROBLEMA 40 (PAPIRO DE RHIND)

Entre cinco pessoas, foram repartidas cem medidas de trigo, de tal modo que a segunda recebeu, a mais que a primeira, tanto quanto coube, à terceira mais que a segunda, à quarta mais que à terceira e à quinta mais que à quarta. Além disso, as duas primeiras obtiveram sete vezes menos que as três restantes. Quanto coube a cada uma?

Solução:

Denotemos x a quantidade que recebeu a primeira pessoa e por y a quantidade recebida a mais, como citado no problema. Então, teremos:

Parte da primeira pessoa $\rightarrow x$

Parte da segunda pessoa$\rightarrow x+y$

Parte da terceira pessoa$\rightarrow x+2y$

Parte da quarta pessoa$\rightarrow x+3y$

Parte da quinta pessoa $\rightarrow x+4y$

De acordo com as premissas do problema, podemos colocar essas duas equações:

$$\begin{cases} x+(x+y)+(x+2y)+(x+3y)+(x+4y)=100 \\ \\ 7[x+(x+y)]=(x+2y)+(x+3y)+(x+4y). \end{cases}$$

Uma vez simplificada, a primeira equação se transforma em

$$x+2y=20,$$

e a segunda em

$$11x=2y.$$

Resolvendo-se o sistema, obteremos

$$x=\frac{5}{3};\ y=\frac{55}{6}.$$

Logo, as partições das medidas do trigo é a sequência dada por

$$\frac{5}{3},\frac{65}{6},\frac{20}{1},\frac{175}{6} \text{ e } \frac{115}{3},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \text{Parte da primeira pessoa} &: \frac{5}{3}, \\ \text{Parte da segunda pessoa} &: \frac{5}{3}+\frac{55}{6} \\ \text{Parte da terceira pessoa} &: \frac{5}{3}+2.\frac{55}{6} \\ \text{Parte da quarta pessoa} &: \frac{5}{3}+3.\frac{55}{6} \\ \text{Parte da quinta pessoa} &: \frac{5}{3}+4.\frac{55}{6}. \end{aligned}$$

1.1.2 PROBLEMA 79 (PAPIRO RHIND)

Muitos dos cálculos no Papiro Rhind são evidentemente exercícios para jovens estudantes. Embora uma grande parte deles seja de natureza prática, em algumas ocasiões o escriba parece ter tido em mente enigmas ou recreações matemáticas. O problema 79, por exemplo, cita apenas "sete casas, 49 gatos, 343 ratos, 2041 espigas de trigo, 16 807 hectares". O problema descreve a sequência 7, 49, 343, 2041, 16807, que pode ser vista como 7, $7^2, 7^3, 7^4, 7^5$ que são os termos de uma progressão geométrica. É presumível que o escriba estava tratando de um problema bem conhecido, em que uma das sete casas havia sete gatos, cada um deles come sete ratos, cada um dos quais havia comido sete espigas, cada uma delas teria produzido sete medidas de grão. O problema evidentemente não pedia uma resposta prática, que seria o numero de medidas de grãos poupadas, mas a não-prática soma dos números de casas, gatos, ratos, espigas e medidas de grão, que seria soma dos termos da progressão geométrica 7, $7^2, 7^3, 7^4, 7^5$.

1.2 GAUSS E A SOMA DOS TERMOS DE UMA SEQUÊNCIA

No início do século XIX o maior matemático da época, talvez de todos os tempos, se chamava Carl Friendrich Gauss (1777-1855) foi criança prodígio, seu pai era um trabalhador esforçado de Brunswick, teimoso em seus pontos de vista, que tentou evitar que seu filho recebesse instrução adequada; mas sua mãe, mesmo sem instrução, encorajou o filho nos seus estudos e orgulhou-se grandemente do seu sucesso. Carl frequentou a escola local, onde o professor era muito exigente.Um dia, para manter a classe ocupada, o professor mandou que os alunos somassem todos os números de um a cem. Quase que imediatamente Gauss colocou sua lousa sobre a mesa, dizendo, aí está; o professor olhou para ele com pouco caso enquanto que os outros trabalhavam insistentemente. Quando o mestre finalmente, depois de certo tempo, olhou os resultados, a lousa de Gauss era uma das únicas a exibir a resposta correta, 5050, sem nenhum cálculo. O menino de dez anos evidentemente calculava de cabeça a soma da seguinte sequência $1 + 2 + 3 + 4 + ... + 97 + 98 + 99 + 100$. Como seria de esperar, Gauss teve que explicar ao espantado professor como é que tinha obtido aquele resultado:

Então,

$$
\begin{aligned}
1 + 100 &= 101,\\
2 + 99 &= 101,\\
3 + 98 &= 101,
\end{aligned}
$$

e por ai em diante, até finalmente

$$
\begin{aligned}
49 + 52 &= 101 \text{ e}\\
50 + 51 &= 101.
\end{aligned}
$$

Isto dá um total de 50 pares de números cuja soma dá 101. Portanto, a soma total é $50 \cdot 101 = 5050$.

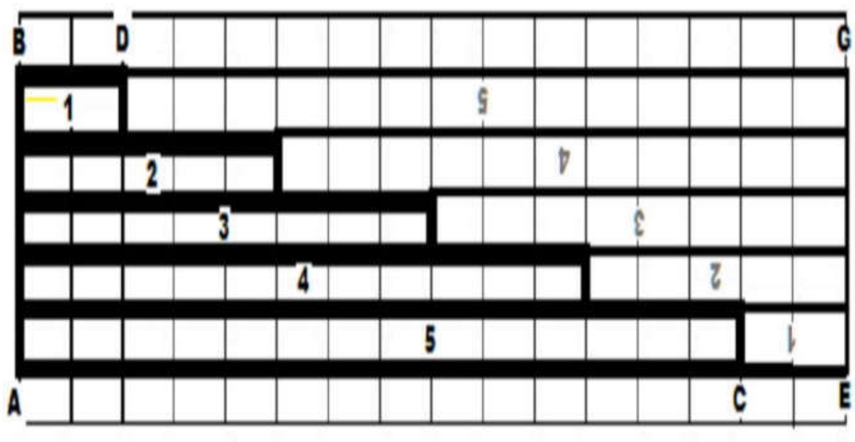
Figura 1.2: Carl Friendrich Gauss

Fonte: Disponível em < http://www.commons.wikimedia.org/wiki/File>. Acesso em 20 abr. 2013

1.2.1 OUTRA MANEIRA DE CALCULAR A SOMA DOS TERMOS DE UMA SEQUÊNCIA DO TIPO $x, x + y, x + 2y, \cdots, x + ny$ COM x E y FIXOS E $n \in \mathbb{N}$

A soma dos termos da seguinte sequência $1+2+3+4+\cdots+97+98+99+100$, calculada por Gauss, aos 10 anos de idade, pode ser deduzida por um modo simples, a saber, graficamente, usando como material, apenas papel quadriculado. Neste caso, qualquer sequência do tipo $x, x+y, x+2y, \cdots, x+ny$, com x e y fixos e $n \in \mathbb{N}$, pode ser representada por meio de uma figura descrita em forma de escada. Por exemplo, a figura ABCD, acima, representa a

Figura 1.3: Soma dos termos de uma sequência



Fonte: Autor, 2013

sequência

$$2; 5; 8; 11; 14.$$

Onde $a_1 = 2$ representa a área de um retângulo 2×1, $a_2 = 5$ representa a área de um retângulo 5×1 e assim por diante.

Para detrminarmos a soma dos termos, completamos o desenho até formar o retângulo ABGE, assim obtendo duas figuras iguais, ABDC e DGEC. As áreas de uma e outra representam a soma dos termos da sequência dada. Portanto, o dobro dessa soma será igual a área do retângulo ABGE, ou seja

$$(\overline{AC} + \overline{CE}).\overline{AB.}$$

Ora, $\overline{AC} + \overline{CE}$ exprime a soma do $1°5°$ termos da sequência; $\overline{AB}$ representa o número de termos da sequência dada, portanto, o dobro da soma S. Então,

$$2S = (\text{a soma do primeiro e do último termos}).(\text{número de termos})$$

ou,

$$S = \frac{(\text{primeiro termo} + \text{último termo}).(\text{número de termos})}{2}.$$

1.3 FIBONACCI

Leonardo Fibonacci (Leonardo filho de Bonaccio, c. 1175-1250), que viveu no século XIII, era considerado o matemático mais talentoso da Idade Média. Também chamado como Leonardo de Pisa (Leonardo Pisano), Fibonacci nasceu em Pisa, centro comercial importante, onde seu pai era ligado aos negócios mercantis. Muitas das grandes cidades comerciais italianas daqueles tempos mantinham entrepostos em várias partes do mundo mediterrâneo. Esse foi o caminho que levou Fibonacci a receber parte de sua educação em Bejaia, norte da África, onde seu pai desempenhava uma função alfandegária. As atividades do seu pai despertaram rapidamente no garoto um interesse por aritmética que se canalizou, posteriormente, para extensas viagens para o Egito, à Sicília, à Grécia e Síria, onde pode entrar em contato direto com os métodos matemáticos orientais e árabes. Fibonacci estava muito convencido da supe-

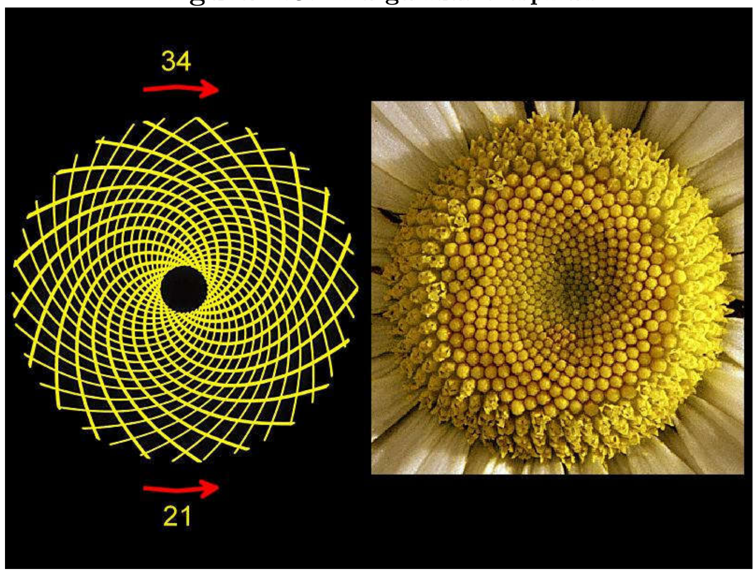
Figura 1.4: Leonardo Fibonacci

Fonte: Disponível em < http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm41/quemefib.htm>. Acesso em 20 abr. 2013

rioridade prática dos métodos indo-arábicos de cálculo que em 1202, logo depois de retornar à sua cidade natal, publicou sua obra mais famosa intitulada Liber Abaci. Uma segunda versão do Liber Abaci surgiu em 1228, e é através dela que conhecemos esse trabalho. O trabalho se ocupa de aritmética e álgebra elementar, embora em essência, uma pesquisa independente, mostra a influência das álgebras de al-Khowârizmi e Abû Kâmil. O livro ilustra com profusão e defende a notação indo-arábica, muito se devendo a ele pela introdução desses numerais na Europa. O livro traz quinze capítulos que tratam de vários assuntos, e contém ainda uma farta coleção de problemas que, durante séculos, serviu de inspiração a autores de textos. Um problema intessante dessa coleção, provavelmente oriundo de um problema muito mais antigo do papiro de Rhind, e o seguinte: Há sete senhoras idosas na estrada de Roma. Cada senhora tem sete mulas; cada mula transporta sete sacos; cada saco contém sete pães; com cada pão há sete facas; para cada faca há sete bainhas. Entre mulheres, mulos, sacos, pães, facas e bainhas, quantos estão na estrada de Roma?". Outros problemas, como: "Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, a partir de um único casal, se cada casal procria a cada mês um novo casal que se torna produtivo depois de dois meses?", deu origem a importante sequência de Fibonacci $(1, 1, 2, 3, 5, 8, \cdots, x, y, x+y, \cdots)$ que produzida começando-se pelo número 1 e somando os dois números anteriores após os dois primeiros.

Na natureza, a sequência de Fibonacci aparece com grande frequência criando alguns tipos de desenhos, incluindo grande variedade de espirais (dois conjuntos de espirais distintos, desenvolvendo-se nos sentidos horário e anti-horário, cada conjunto formado de um número predeterminado de espirais). Por exemplo: as margaridas tem 21 espirais no sentido horário e 34 no sentido anti-horário, na casca do pinheiro cônico 5 em um sentido e 8 em outro, na casca do abacaxi 8 e 13 e nas folhas de inúmeras árvores. Esses números de espirais descritos acima (dois a dois) corresponde a dois números adjacentes de sequência de Fibonacci. A sequência de Fibonacci, além de estar curiosamente relacionada com a Botânica, também exerce forte influência na arte e na Arquitetura. A relação entre quaisquer dois números adjacentes de Fibonacci, depois do 3, é de cerca de $1 : 1,6$. Essa é a chamada relaçao de ouro, ou seção de ouro, que tem uma ligação, curiosamente, com a estética. A relação, mais precisamente igual a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, é encontrada no cotidiano, desde os edifícios da Grécia antiga até as obras primas de arte.

Figura 1.5: Margaridas e espirais



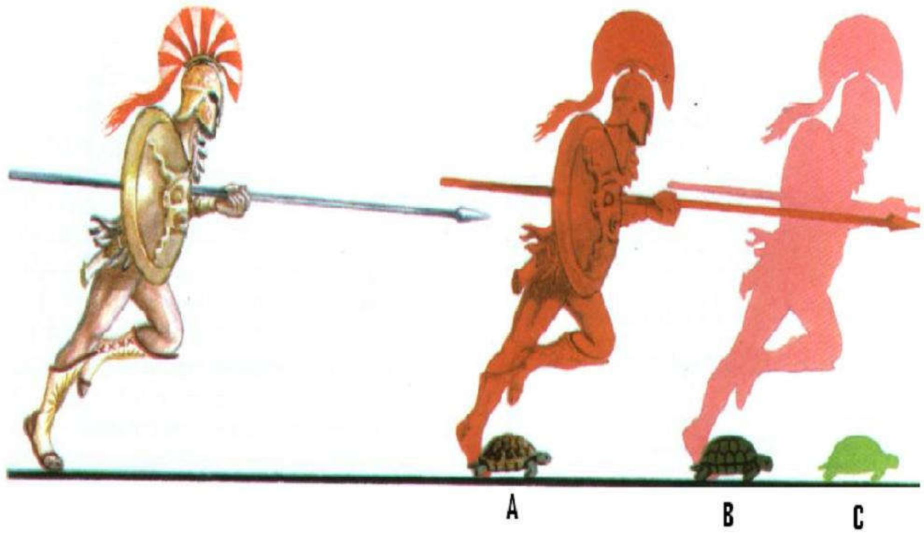
Fonte: Disponível em < http://www. britton.disted.camosun.bc.ca >. Acesso em 20 abr. 2013

1.4 PARADOXO DE ZENÃO

O filósofo Zenão de Eléia (c.450 a. C.) chamou a atenção dos seus companheiros da época com os seus paradoxos—uma proposição que, embora válida logicamente, desafia o bom senso. Zenão era fascinado pela ideia do infinito. Sentia que a ciência não podia adequar-se à realidade sem levar em conta os modos pelos quais o infinito parece surgir em toda parte da natureza. Propôs um paradoxo hoje famoso, a respeito de um simples problema de movimento: como pode um ponto móvel passar por um número infinito de posições num tempo finito? Se o veloz Aquiles[1]disputa uma corrida com uma tartaruga(animal considerado muito lento), dando-lhe ao menos um palmo de vantagem, como poderá (pela rigorosa lógica grega) alcançá-la? Quando Aquiles tiver corrido um palmo, a tartaruga também avançou, digamos, um décimo de palmo. E quando Aquiles cobrir esse décimo de palmo, a tartaruga terá novamente avançado mais um pouquinho.

[1](Guerreiro mitológico grego, que tinha o poder da invulnerabilidade, ou seja, nada penetrava o corpo de Aquiles, herói da guerra de Tróia)

Figura 1.6: Aquiles e a Tartaruga



Fonte: Disponível em < http://www.projetophronesis.com >. Acesso em 20 abr. 2013

Zenão confundiu seus companheiros argumentando que o herói Aquiles, por mais rápido que fosse, não conseguiria ultrapassar a lenta tartaruga que partira à sua frente, pois quando atingisse o ponto de partida da tartaruga, A, esta já se deslocara para B. Quando ele alcançasse B, a tartaruga já haveria avançado para C. Dessa forma, dizia Zenão, a tartaruga estaria sempre à frente, mesmo que fosse por uma distância mínima. Considere que o veloz Aquiles comece a corrida dez metros à frente da lenta tartaruga. Em pouco tempo, Aquiles atinge a marca dos 10 m, mas neste intervalo de tempo a tartaruga caminhou 1 m. Em seguida, Aquiles percorre esse metro adicional, mas a tartaruga não está mais lá, pois percorreu mais $\frac{1}{10}$ de metro. Quando Aquiles cobre este $\frac{1}{10}$ de metro adicional, a tartaruga está $\frac{1}{100}$ m à frente. E depois, $\frac{1}{1000}m$ à frente, e depois $\frac{1}{10000}m$, etc. Sendo assim, segundo Zenão, Aquiles nunca alcançaria a tartaruga, pois ela estaria $10m, 1m, \frac{1}{10}m, \frac{1}{100}m, \cdots, \frac{1}{10^n}$ à sua frente.

1.5 NÚMEROS POLIGONAIS

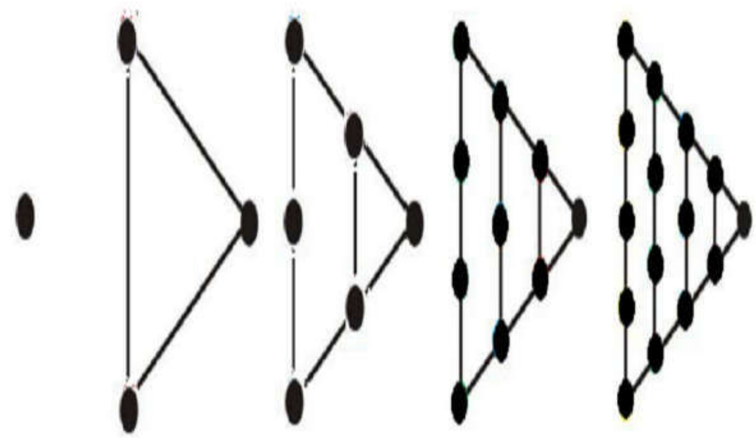
Os Pitagóricos tinham por hábito atribuir propriedades geométricas aos números naturais. Isto deu origem ao conceito de sequências de números figurativos, que são números naturais provenientes da contagem de pontos em certos arranjos geométricos.

Um número é dito *poligonal* se ele pode ser representado por um arranjo geométrico regular de pontos igualmente espaçados. Se o arranjo der forma a um polígono regular, o número é chamado de número poligonal, ou seja, um número que pode ser arranjado como um polígono regular. Os matemáticos antigos descobriram que os números poderiam ser arranjados em determinadas maneiras quando foram representados por pedras, seixos ou por sementes. Serão apresentados alguns tipos de números poligonais.

1.5.1 NÚMEROS TRIANGULARES

Um número triangular, notado por T_n, é um número figurativos que pode ser representado por fileiras de pontos formando triângulos da seguinte maneira: a primeira fileira contém um único elemento, a segunda fileira contém dois elementos, e assim sucessivamente, de maneira que cada fileira subseqüente contém um elemento a mais do que a precedente. Os números triangulares estão representados geometricamente pelos padrões a seguir: Podemos observar,

Figura 1.7: **Números Triangulares**



Fonte: Autor, 2013.

com clareza, que:

$$T_1 = 1$$

Pois só temos apenas uma fileira, logo um só ponto;

$$T_2 = 1 + 2 = 3$$

Pois temos duas fileiras, uma com um ponto e a outra com dois pontos;

1. De maneira análoga, temos que:

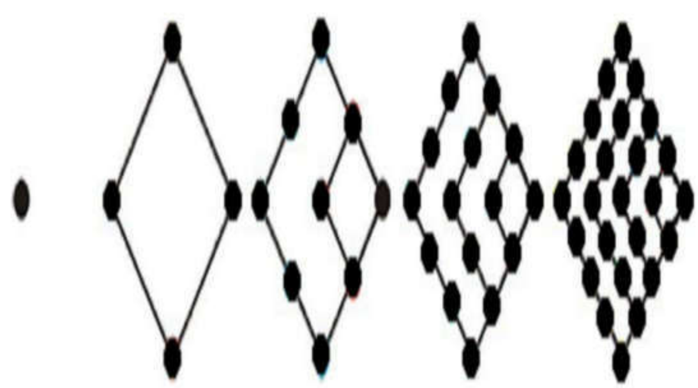
$$
\begin{aligned}
T_3 &= 1+2+3=6;\\
T_4 &= 1+2+3+4=10;\\
T_5 &= 1+2+3+4+5=15;\\
&\vdots\\
T_n &= 1+2+3+4+\cdots+n=\frac{n\,(n+1)}{2}.
\end{aligned}
$$

Verifica-se que o número de pontos em cada uma destas formações triangulares é, evidentemente, a soma dos termos de uma sequência numérica que pod ser deduzida da forma de Gauss. Assim, os (n) primeiros números triangulares são $\left(1,3,6,10,15,\cdots,\frac{n(n+1)}{2}\right)$. Como um número triangular é um número obtido, adicionando-se todos os inteiros positivos até o n-ésimo termo, logo, a soma parcial de n termos da sequência $(1,2,3,4,5,\cdots,n)$ representa o número triangular.

1.5.2 NÚMEROS QUADRADOS

Um *número quadrado*, chamado também *quadrado perfeito* e denotado por Q_n, pode ser representado por uma grade quadrada de pontos e podem ser representados geometricamente pelos padrões a seguir: Podemos observar, de acordo com a figura, que:

Figura 1.8: Números Quadrados



Fonte: Autor, 2013.

$$Q_1 = 1 = 1^2$$

pois temos somente um ponto;

$$Q_2 = 1 + 3 = 4 = 2^2$$

Pela figura, vemos que para completar o quadrado precisamos do ponto já dado e mais três pontos;

$$Q_3 = 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$

Temos os quatro pontos dados mais cinco que formam o quadrado;

Analogamente,

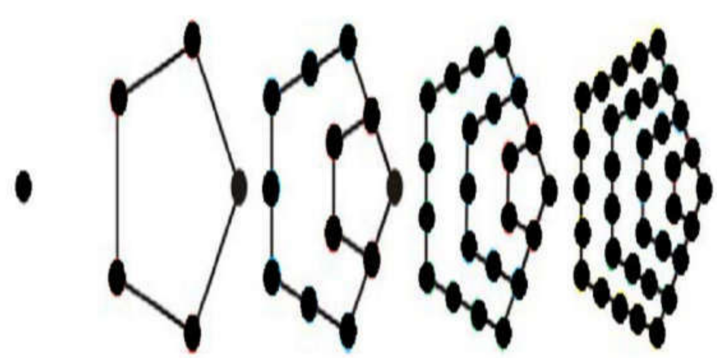
$$\begin{aligned} Q_4 &= 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2; \\ Q_5 &= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2; \\ &\vdots \\ Q_n &= 1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n-1) = \frac{(1 + 2n - 1)\,n}{2} = n^2. \end{aligned}$$

O número de pontos em cada uma dessas formações quadradas é, também, a soma dos termos de uma sequência numérica. Assim, os primeiros números quadrados são: $(1, 4, 9, 16, 25, ...)$.

1.5.3 NÚMEROS PENTAGONAIS

Os *números pentagonais* são números figurativos que representam pentágonos, denotados por P_n, e podem ser expressos conforme a figura abaixo. Podemos observar, de acordo com a

Figura 1.9: Números Pentagonais



Fonte: Autor, 2013.

figura, que:

$$
\begin{aligned}
P_1 &= 1; \\
P_2 &= 1+4=5; \\
P_3 &= 1+4+7=12 \\
&\vdots \\
P_n &= 1+4+7+10+13+...+(3n-2)
\end{aligned}
$$

A soma parcial de n termos da sequência $(1, 4, 7, 13, \cdots, (3n-2))$,resulta num número pentagonal P_n, e a sua soma fornece a fórmula geral dos números pentagonais:

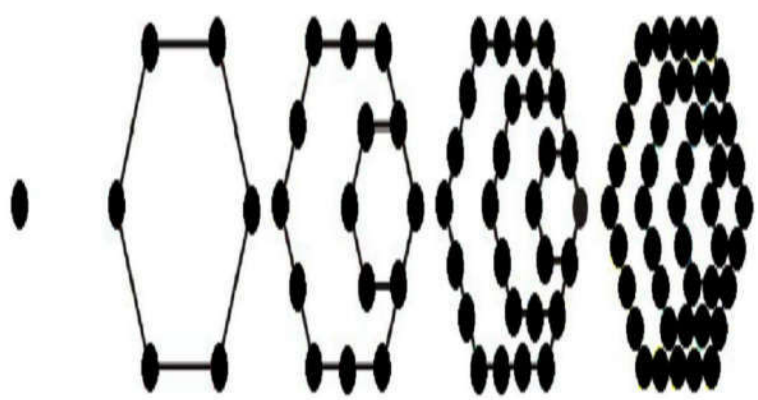
$$P_n = \frac{n\,(1+3n-2)}{2} = \frac{n\,(3n-1)}{2}.$$

Assim os primeiros n números pentagonais são $\left(1, 5, 12, 22, \cdots, \frac{n(3n-1)}{2}\right)$.

1.5.4 NÚMEROS HEXAGONAIS

Os *números hexagonais*, denotados por H_n, podem ser expressos conforme a figura abaixo. De forma análoga, aos números anteriores, a sequência de números hexagonais é tal que

Figura 1.10: **Números Hexagonais**



Fonte: Autor, 2013.

qualquer número é a soma dos termos de uma progressão aritmética de razão 4, como a seguir: $(1, 5, 9, 13, (4n-3))$. Uma vez que o n-ésimo termo da progressão aritmética acima é $(4n-3)$, a soma dos primeiros n termos é:

$$H_n = \frac{n\,(1+(4n-3))}{2} = \frac{n\,(4n-2)}{2} = n\,(2n-1)\,.$$

Assim os primeiros n números hexagonais são $(1, 6, 15, 28, \cdots, n\,(2n-1))$.

Podemos generalizar os números poligonais, com uma fórmula que se aplica a polígonos de qualquer número k de lados. As sequências de números poligonais são infinitas, mas podemos determinar qualquer um de seus termos por meio de simples substituições. Para deduzirmos a fórmula, basta perceber que as seqüência de números poligonais formam uma progressão aritmética. A tabela a seguir mostra os números poligonais já obtidos acima, entre outros, e também mostra a expressão geral do n-ésimo número k-gonal.

Tabela 1.1: Números Poligonais

Número poligonal	Termo Geral: $a_n = a_1 + (n-1)\,r$	Soma dos termos : $S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2}$
Triangular	$a_n = n$	$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$
		$T_{3(n)} = \frac{n^2+n}{2}$
Quadrado	$a_n = 2n-1$	$S_n = n^2$
		$Q_{4(n)} = n^2$
Pentagonal	$a_n = 3n-2$	$S_n = \frac{n(3n-1)}{2}$
		$P_{5(n)} = \frac{3n^2-n}{2}$
Hexagonal	$a_n = 4n-3$	$S_n = \frac{n(4n-2)}{2}$
		$H_{6(n)} = 2n^2 - n$
Heptagonal	$a_n = 5n-4$	$S_n = \frac{n(5n-3)}{2}$
		$H_{7(n)} = \frac{5n^2-3n}{2}$
Octagonal	$a_n = 6n-5$	$S_n = \frac{n(6n-4)}{2}$
		$O_{8(n)} = 3n^2 - 2n$
Nonagonal	$a_n = 7n-6$	$S_n = \frac{n(7n-5)}{2}$
		$N_{9(n)} = \frac{7n^2-5n}{2}$
Decagonal	$a_n = 8n-7$	$S_n = \frac{n(8n-6)}{2}$
		$D_{10(n)} = 4n^2 - 3n$
k- gonal	$a_n = (k-2)\,n - (k-3)$	$S_n = \frac{n[(k-2)n-(k-4)]}{2}$
		$P_{k(n)} = \frac{n}{2}\left[2 + (k-2)(n-1)\right]$

2 EXEMPLOS DE SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

Neste capítulo apresentaremos alguns exemplos e problemas que envolvam sequências, com as respectivas resoluções, sem o uso de fórmulas.Usaremos um método recursivo, partindo dos casos mais simples, para chegar no padrão da sequência. Usaremos também o método de Gauss para resolver somas de sequências do tipo $x, x+y, x+2y, \cdots, x+ny$ e um outro método para resolver somas de sequências do tipo $x, xy, xy^2, \cdots xy^n$.

2.1 CURIOSIDADES

2.1.1 A TORRE DE HANÓI

Figura 2.11: Torre de Hanói

Fonte: Disponível em < http://www.puzzlemuseum.com >. Acesso em 20 abr. 2013

Torre de Hanói, também conhecida como torre de Braminismo, um jogo criado pelo matemático francês Edouard Lucas(1883), foi inspirada de uma Lenda Hindu. A lenda antiga relata que no grande templo de Benares, cidade Santa da Índia, debaixo da cúpula que marca o centro do mundo, há uma placa de bronze sobre a qual estão fixadas três hastes de diamante.

Em uma destas hastes, o deus Brama, no momento da criação do mundo, colocou 64 discos de ouro puro, formando uma torre, de forma que o disco maior ficasse sobre a placa de bronze e os outros decrescendo até chegar ao topo. A atribuição que os monges, que viviam no templo, receberam foi de transferir a torre, de uma haste para outra, usando a terceira como auxiliar com as restrições de movimentar um disco por vez e de nunca colocar um disco maior sobre um menor. Os monges deviam trabalhar com eficiência noite e dia e quando terminassem o trabalho o templo seria transformado em pó e o mundo acabaria.

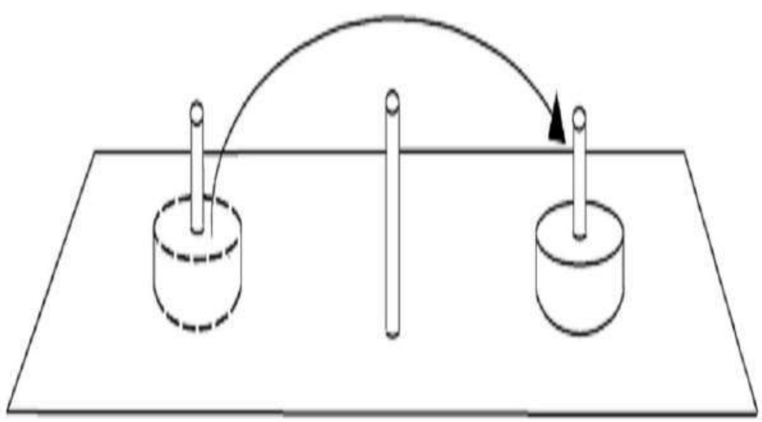
Vamos ver o que acontece se o número de discos for n. Seja a_n **o número mínimo** de movimentos para transferir a torre de uma haste para outra.

Para $n = 0$, é fácil ver, que $a_0 = 0$, pois se não temos discos não temos movimentos. Pela figura vemos, claramente, que para um disco teremos apenas um movimento, isto é,

$$\text{Para } n = 1 \text{ temos } a_1 = 1$$

Ainda, de acordo com as figuras, temos:

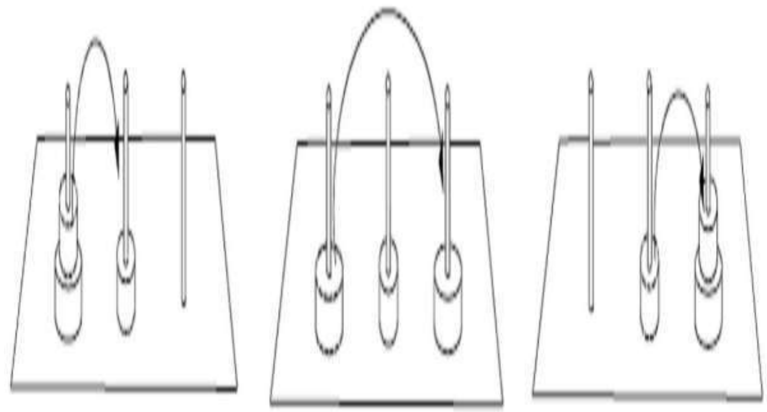
Figura 2.12: **Torre de Hanói com um disco**



Fonte: Autor, 2013

$$\text{Para } n = 2 \text{ temos } a_2 = 3 = 2a_1 + 1;$$

Figura 2.13: **Torre de Hanói com dois discos**

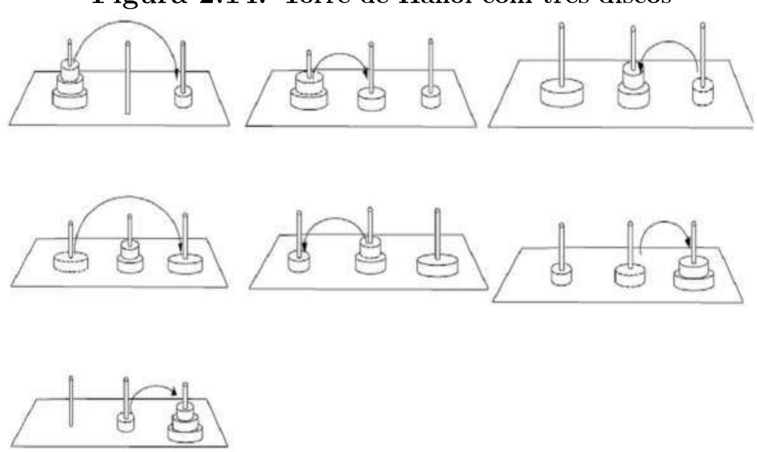


Fonte: Autor, 2013

$$n = 3 \to a_3 = 7 = 2a_2 + 1;$$

Note que para $n = 3$ primeiramente movemos dois discos, fazendo três movimentos, em

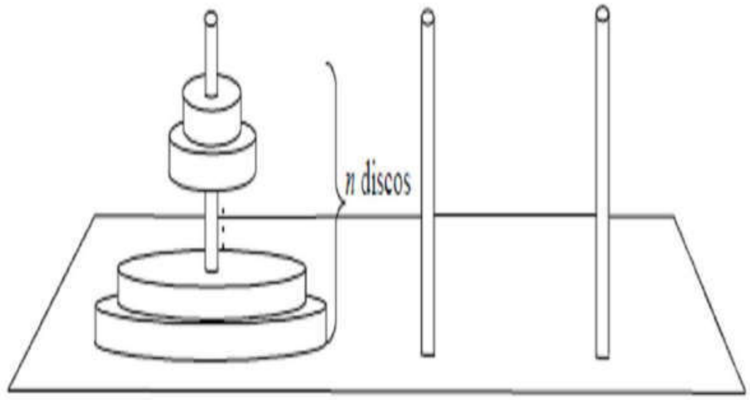
Figura 2.14: **Torre de Hanói com três discos**



Fonte: Autor, 2013

seguida movemos o terceiro disco somando mais um movimento e por fim movemos os dois primeiros discos, somando assim mais três movimentos e perfazendo um total de 2 vezes os movimentos para dois discos mais um. Agora, tomemos uma torre com n discos. Imagine que sabemos resolver o problema com $n - 1$ discos.

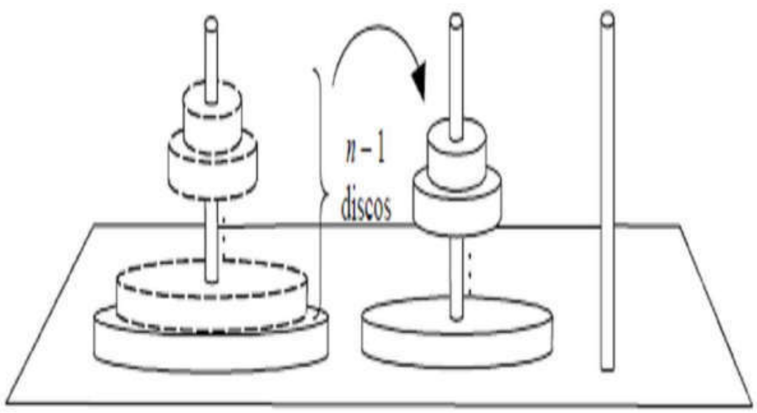
Figura 2.15: **Torre de Hanói com n discos**



Fonte: Autor, 2013

Podemos mover os $n-1$ discos para uma haste vazia:

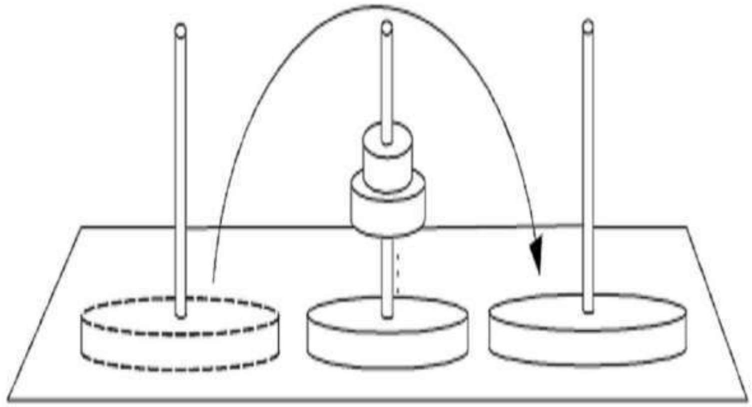
Figura 2.16: **Torre de Hanói com n discos**



Fonte: Autor, 2013

Depois movemos o disco maior para a outra haste vazia:

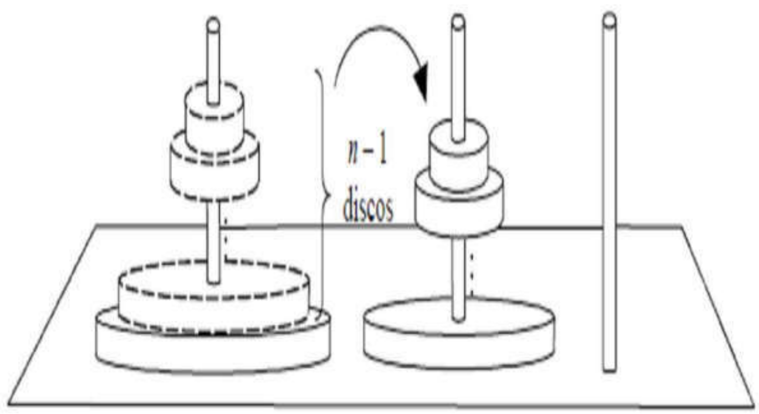
Figura 2.17: **Torre de Hanói com n discos**



Fonte: Autor, 2013

Por fim, movemos os $n-1$ discos para a haste com o disco maior: Assim, para resolver

Figura 2.18: **Torre de Hanói com n discos**



Fonte: Autor, 2013

o problema com n discos teremos duas vezes a quantidade de movimentos para $n-1$ discos mais um . Recursivamente temos que:

$$a_n = 2a_{n-1} + 1$$

E ainda que,

$$\begin{aligned}
a_2 &= 2a_1 + 1;\\
a_3 &= 2a_2 + 1;\\
a_4 &= 2a_3 + 1;\\
&\vdots\\
a_n &= 2a_{n-1} + 1
\end{aligned}$$

Multiplicando a primeira equação por 2^{n-2}, a segunda por $2^{n-3}, \cdots$, a $(n-1)-ésima$ por 2 e a $n-ésima$ por 2^0 e depois somando ambos os membros da igualdade obtida , teremos:

$$a_n = 2^{n-1}a_1 + \left(2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-2}\right)$$

Precisamos determinar a soma da sequência acima dada por $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-2}$. Usaremos o seguinte método. Seja

$$S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-2}$$

multiplicando ambos os membros por 2 temos,

$$2S = 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-2} + 2^{n-1}$$

fazendo agora $2S + (-S)$, isto é,

$$2S - S = 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-2} + 2^{n-1} - 2^0 - 2^1 - 2^2 - \cdots - 2^{n-2}$$

Daí,

$$S = 2^{n-1} - 1.$$

Como $a_1 = 1$ e $S = 2^{n-1} - 1$, logo

$$\begin{aligned}
a_n &= 2^{n-1}.1 + 2^{n-1} - 1\\
a_n &= 2.2^{n-1} - 1 = 2^n - 1.
\end{aligned}$$

O que prova a expressão

$$a_n = 2^n - 1.$$

De acordo com a lenda , os sacerdotes precisariam de $2^{64} - 1$ movimentos para finalizar o trabalho. Mesmo se eles fizessem um movimento por segundo, eles precisariam de 86400 movimentos por dia, 31536000 movimentos por ano, isto resultaria em mais de 500 bilhões de anos para realizar o trabalho.

2.2 SITUAÇÕES DO COTIDIANO

2.2.1 ACRÉSCIMOS SUCESSIVOS

O salário em uma certa empresa aumenta 3% ao ano. Então, para $n > 1$, temos recursivamente:

$$\begin{aligned} S_2 &= 1,03S_1; \\ S_3 &= 1,03S_2; \\ S_4 &= 1,03S_3; \\ &\vdots \\ S_{n-1} &= 1,03S_{n-2}; \\ S_n &= 1,03S_{n-1}; \end{aligned}$$

O salário S_n, de um funcionário, no $n-ésimo$ ano será igual ao salário S_{n-1} do ano anterior mais o aumento do salário, que é igual a 3% do salário S_{n-1}. Multiplicando membro a membro as $(n-1)$ equações acima, obteremos:

$$S_n = (1,03)^{n-1}S_1.$$

Concluímos que o salário no $n-ésimo$ ano é igual a $(1,03)^{n-1}$ vezes o salário no primeiro ano. Desta forma, para saber o salário de um funcionário no $n-ésimo$ ano de trabalho basta saber seu salário inicial e o número de anos de trabalho.

2.2.2 A REGA DA HORTA

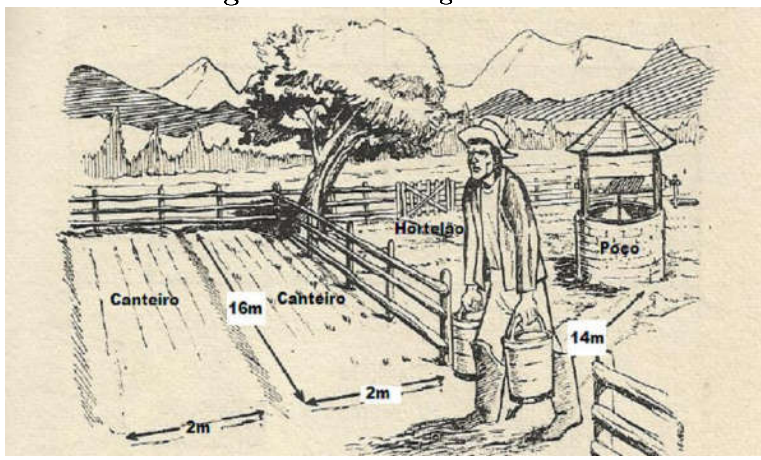
Numa horta há 40 canteiros, cada qual com 16m de comprimento por 2m de largura. Para regá-lo, o hortelão carrega baldes com água do poço, situado a 14m da extremidade da horta (vide figura), rodeando o canteiro pelo sulco de separação. A água que o hortelão carrega, dá pra regar somente um canteiro. Qual o comprimento do caminho percorrido pelo hortelão para regar a horta toda? Para regar o primeiro canteiro, o hortelão tem que fazer um caminho igual a

$$a_1 = 14 + 16 + 2 + 16 + 2 + 14 = 64$$

Para regar o segundo, percorre

$$a_2 = 14 + 2 + 16 + 2 + 16 + 2 + 2 + 14 = 64 + 4 = a_1 + 4$$

Figura 2.19: **A rega da horta**



Fonte: Autor, 2013

Para regar o terceiro, percorre

$$a_3 = 14 + 2 + 2 + 16 + 2 + 16 + 2 + 2 + 2 + 14 = 64 + 4 + 4 = a_2 + 4$$

Recursivamente, temos:

$$\begin{aligned} a_4 &= a_3 + 4; \\ a_5 &= a_4 + 4; \\ a_6 &= a_5 + 4; \\ &\vdots \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + 4; \\ a_n &= a_{n-1} + 4. \end{aligned}$$

Somando membro a membro as n equações acima e fazendo as devidas simplificações obteremos

$$a_n = 64 + 4n.$$

Daí, para regar a horta toda, o hortelão tem que percorrer

$$S_{40} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{39} + a_{40}$$

Que pelo método de Gauss, já apresentado, temos:

$$\begin{aligned} S_{40} &= (a_1 + a_{40}) \cdot 20 = (64 + 224) \cdot 20 \text{ daí}, \\ S_{40} &= 5760m. \end{aligned}$$

2.2.3 CORRIDA DE TÁXI

Uma pessoa deseja viajar de táxi de uma cidade A para uma cidade B, durante o dia, no estado de Alagoas. Sabendo que durante o dia o taxímetro cobra bandeira 1, o valor por quilômetro rodado é R\$1,84 e que a bandeirada custa R\$3,35. Qual o valor a ser pago por essa pessoa?

Solução: seja n o número de quilômetros rodados, a_n o valor a ser pago pela rodada e considere que (hipoteticamente) o carro não tenha interrupções, pois existe uma taxa adicional de R\$11,05 por hora (tempo parado).

Para $n = 1, 2, 3, 4, \cdots, m$ temos:

$$\begin{aligned}
\text{Para } n &= 1 \text{ temos } a_1 = 3,35 + 1 \cdot 1,84 \\
\text{Para } n &= 2 \text{ temos } a_2 = 3,35 + 2 \cdot 1,84 = a_1 + 1,84 \\
\text{Para } n &= 3 \text{ temos } a_3 = 3,35 + 3 \cdot 1,84 = a_2 + 1,84 \\
&\vdots \\
\text{Para } n &= m \text{ temos } a_m = a_{m-1} + 1,84
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
a_1 &= 3,35 + 1,84 \\
a_2 &= a_1 + 1,84 \\
a_3 &= a_2 + 1,84 \\
&\vdots \\
a_m &= a_{m-1} + 1,84.
\end{aligned}$$

Somando membro a membro as m equações e fazendo as devidas simplificações temos,

$$a_m = 3,35 + 1,84 \cdot m$$

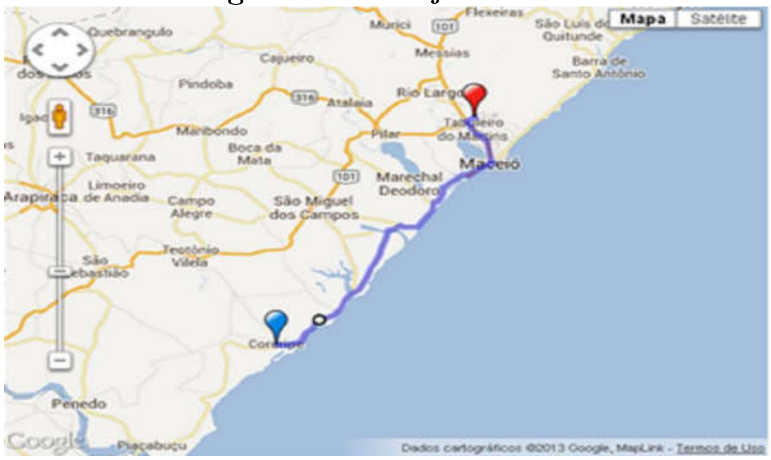
o valor a ser pago por m quilômetros rodados.

Suponha agora que a pessoa citada queira ir da cidade de Coruripe-AL para Universidade Federal de Alagoas(UFAL-A.C.Simões). Sabendo que o taxista vai rodar cerca de97,6km o valor a ser pago será:

$$a_{97,6} = 3,35 + 1,84 \cdot 97,6 = 182,95$$

Veja a simulação do trajeto

Figura 2.20: Trajeto do táxi



Fonte: Disponível em < http://www.Google Maps/Google Earth>. Acesso em 20 abr. 2013

2.2.4 A LENDA SOBRE O JOGO DE XADREZ (ADAPTADO DO LIVRO DE MALBA TAHAN)

Figura 2.21: Xadrez

Fonte: Disponível em < http://www.Fonte:gunstaxl.com>. Acesso em 20 abr. 2013

Em um reino muito distante havia um rei que estava muito triste. Sua vida era monótona. Um dia, afinal, o rei foi informado de que um rapaz da época solicitava uma audiência há um bom tempo. Como estivesse, no momento, com boa disposição de ânimo, mandou o rei que trouxessem o desconhecido à sua presença. E o jovem começou a falar :– No lugar em que eu vivia chegou a notícia de que o nosso bondoso rei vivia os dias em profunda tristeza, amargurado pela perda de um filho na guerra. Deliberei, pois, inventar um jogo que lhe desse alegria novamente. E é isto que me traz aqui. Como era muito curioso, não aguentou para saber o que o jovem sábio lhe trouxera. O que o jovem trazia ao rei consistia num grande tabuleiro quadrado, dividido em sessenta e quatro quadradinhos, ou casas, iguais. Sobre esse tabuleiro colocavam-se, não arbitrariamente, duas coleções de peças que se distinguiam, uma da outra, pelas cores branca e preta, repetindo porém, simetricamente, os engenhosos formatos e subordinados a curiosas regras que lhes permitiam movimentar-se por vários modos. O jovem explicou pacientemente ao rei e cortesãos que rodeavam, em que consistia o jogo, ensinando-lhes as regras essenciais. Depois de aprender e gostar do jogo o rei chamou o jovem e disse-lhe:– Quero recompensar-te, meu amigo, por este maravilhoso presente, que de tanto me serviu para o alívio de velhas angústias. Diz-me o que queres, qualquer das maiores riquezas, que te será dado.

– Rei poderoso, não desejo nada. Apenas a gratidão de ter-te feito algum bem que basta, respondeu o jovem.

-Por favor, diga-me o que pode ser-te dado. Ficarei magoado se não aceitar.

– Então, o invés de ouro, prata, palácios, desejo em grãos de trigo. Dar-me-ás um grão de trigo pela primeira casa, dois pela segunda, quatro pela terceira, oito pela quarta, dezesseis pela quinta, e assim sucessivamente, até a sexagésima quarta e última casa do tabuleiro.

Todo mundo ficou espantado com o pedido. Tão pouco!– Insensato, chamou-lhe o rei, donde já se viu tanto desamor pelos bens materiais ? Chamou então, o rei, os algebristas mais hábeis da corte, e ordenou-lhes que calculassem o valor. Após muito tempo, voltaram:– Rei magnânimo! Calculamos o número de grãos de trigo que constituirá o pagamento e obtivemos um número cuja grandeza é inconcebível para a imaginação humana. O jovem abriu mão de seu pedido, mas mostrou ao rei uma nova maneira de pensar.

Vamos resolver o problema. Seja n o número das casas do tabuleiro e a_n o número de grãos. Daí,

$$\begin{aligned} a_1 &= 2^0; \\ a_2 &= 2^1; \\ a_3 &= 2^2; \\ &\vdots \\ a_n &= 2^{n-1} \end{aligned}$$

Somando membro a membro, temos:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{n-1}$$

Como vimos em exemplos anteriores, que:

$$2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

logo, teríamos

$$S_n = 2^n - 1.$$

De acordo com o problema, teríamos

$$S_{64} = 2^{64} - 1$$

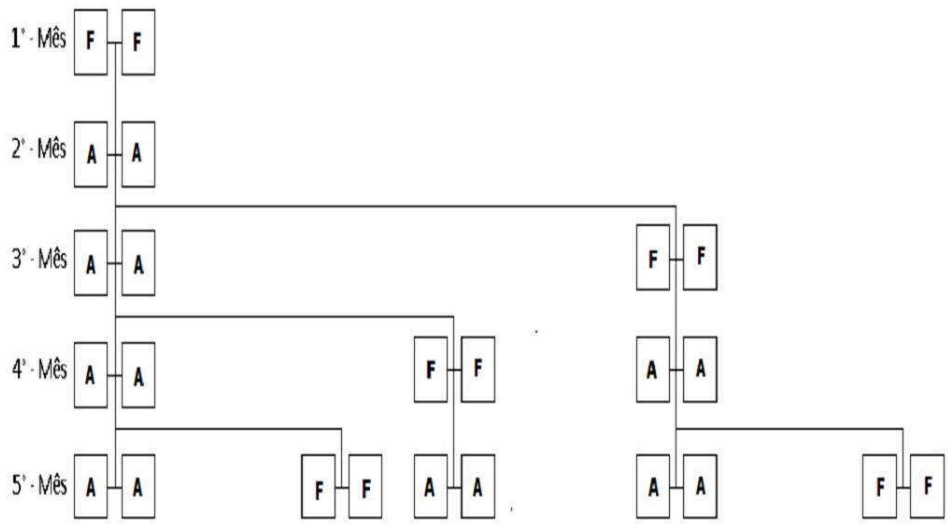
Depois de um trabalhoso cálculo, na época, chegaríamos ao seguinte resultado: $S = 18446744073709551616 - 1 = 18446744073709551615$. Esse número gigantesco, de vinte algarismos, exprime o total de grãos de trigo que impensadamente o lendário Rei prometeu, em má hora, ao não menos lendário jovem inventor do jogo de xadrez. Sabendo que um grão de trigo pesa $0,00526$ gramas, então $2^{64} - 1$ grãos de trigo pesa aproximadamente 97 bilhões de toneladas, e que a produção mundial de trigo em 2013(projeção) é de aproximadamente 695 milhões de toneladas o rei demoraria aproximadamente 139 anos, doando toda a produção mundial(em valores atuais), para pagar o jovem.

2.2.5 O PROBLEMA DOS COELHOS

Este problema sugere uma situação, onde os coelhos são colocados numa área em que nenhum coelho, externo ou interno, pode entrar ou sair do cercado; os coelhos não morrem de velhice, fome ou doença. Para que um par de filhotes possa procriar, é necessário que se passe um mês após o seu nascimento e cada par de coelhos dá a luz a um único par de filhotes a cada mês. Estes serão aptos a procriar no próximo mês. Sendo assim, no primeiro mês, o mês inicial, teríamos um par de coelhos (ainda filhotes). No mês seguinte ainda apenas um par de coelhos (agora adultos), no terceiro mês teremos o par inicial mais o seu par de filhotes. Ao quarto mês o par inicial dá a luz ao seu segundo par de filhotes, ficando um total de três pares de coelhos (o par inicial, o primeiro par de filhotes, agora adultos, e o segundo par de filhotes). Podemos notar que no próximo mês, o quinto, o número de pares de coelhos será a somado número de pares de coelhos do mês atual, mais o número de pares de coelhos do mês anterior. Pois serão estes que irão contribuir com o acréscimo do número de coelhos para o próximo mês, já que quando chegar o quinto mês estarão aptos a procriar. Logo, o quinto mês terá cinco pares de coelhos: os três pares presentes no quarto mês, mais dois pares de filhotes, um par gerado pelo par inicial e o outro pelo primeiro par de filhotes que o par inicial teve.

A figura ilustra os primeiros cinco meses. Os pares de coelhos filhotes são representados pelos quadrados com a letra F e os adultos pelos quadrados com a letra A. Tomando como ponto

Figura 2.22: **Reprodução de coelhos**



Fonte: Autor, 2013

de partida a figura. Seja n o número do referente mês e a_n o número de par de coelhos do referente mês. Então,

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 1; \\
a_2 &= 1; \\
a_3 &= 2 = a_1 + a_2; \\
a_4 &= 3 = a_2 + a_3; \\
a_5 &= 5 = a_3 + a_{4.}
\end{aligned}
$$

Sendo assim, temos recursivamente que:

$$
\begin{cases}
a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \\
\text{com } a_1 = a_2 = 1 \text{ e } n \in \mathbb{N}
\end{cases},
$$

isto é, o número de coelhos de um determinado mês é igual a soma do número de coelhos dos dois meses anteriores (Sequência Fibonacci). Que depois de algumas contas, teríamos:

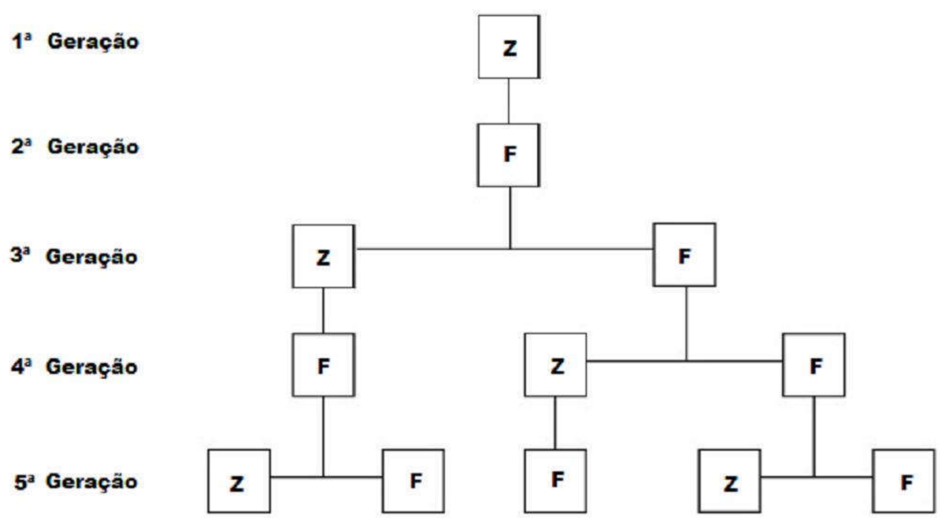
$$a_{12} = 144 \text{ pares de coelhos.}$$

2.3 NA NATUREZA

2.3.1 A COLMEIA DE ABELHAS [ÁRVORE GENEALÓGICA DE UMA ABELHA MACHO (ZANGÃO)]

Na reprodução das abelhas, quando um óvulo não é fertilizado ele gera uma abelha macho, e quando ocorre a fertilização, gera uma abelha fêmea. Assim, uma abelha macho sempre terá como pais apenas uma abelha fêmea, ao passo que a abelha fêmea terá um casal de abelhas como pais. Logo, se analisarmos a árvore genelógica de um zangão, teremos que seu gerador é sempre apenas uma abelha fêmea. Esta, por sua vez, tem um pai e uma mãe gerados por uma abelha fêmea e um par de abelhas macho e fêmea, respectivamente. De acordo com a figura e considerando que a letra Z é a abelha macho (zangão) e a letra F é a abelha fêmea, determinamos o número de abelhas de cada geração: Sendo assim, sejam n o número referente

Figura 2.23: **Árvore genealógica ascendente do zangão**



Fonte: Autor, 2013

a geração e a_n o número de abelhas na respectiva geração, daí:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1; \\ a_2 &= 1; \\ a_3 &= 2; \\ a_4 &= 3; \\ a_5 &= 5; \\ &\vdots \\ a_{n+2} &= a_{n+1} + a_n. \end{aligned}$$

Temos portanto a sequência Fibonacci, que já foi estudada em exemplos anteriores.

3 SEQUÊNCIAS

As sequências (padrões e regularidades) são bastante úteis para o estudante na sua vida, no seu cotidiano e para prosseguimento de seus estudos. Os padrões e as regularidades desempenham um papel importante no ensino da matemática. Em nosso dia-a-dia é freqüente encontrarmos conjuntos cujos elementos estão dispostos numa certa ordem.

Exemplo 3.1. *:*

1. A relação dos nomes de alunos em um diário classe;
2. Os números das casas de uma determinada rua;
3. A relação das notas musicais (dó ré mi fá sol lá si);
4. Os dias da semana e os meses do ano, entre outros.

Se observarmos as coisas ao nosso redor, descobriremos inúmeros tipos de seqüência.

Definição 3.1 **(Sequência).** Sempre que estabelecemos uma ordem para os elementos de um conjunto, descrita pelos números naturais, temos assim uma seqüência.

Definição 3.2 **(Sequência Numérica).** Quando os elementos dessa seqüência são formados de números reais, dá-se o nome de seqüência numérica .

Em uma seqüência, o primeiro elemento é indicado por a_1, o segundo por a_2, o terceiro por a_3,..., o vigésimo por a_{20}, ..., o enésimo elemento por a_n. Podemos representar um sequência numérica da seguinte forma $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$. Existem diferentes tipos de sequências numéricas, porém, para nosso estudo são de grande importância as seqüências cujos elementos (termos) obedecem a uma determinada lei de formação. Assim daremos uma atenção maior para as sequências do tipo:

1. Progressão Aritmética;

2. Progressão Geométrica;

3. Sequência de Fibonacci (Números de Fibonacci).

As definições e propriedades destas sequências serão dedas a seguir.

3.1 PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Progressão aritmética é toda sequência numérica de números $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots)$ na qual, a partir do segundo termo, a diferença de um termo com o seu antecessor é uma constante, isto é, $a_n - a_{n-1} = r \Rightarrow a_n = a_{n-1} + r$ (em particular $a_2 = a_1 + r$). Esta diferença constante (r) é denominada razão da progressão aritmética.

3.1.1 CLASSIFICAÇÃO

Quando a razão das progressões aritméticas é :

1. Positiva os termos crescem constantemente e a progressão aritmética diz-se crescente;

2. Negativa os termos decrescem constantemente e a progressão aritmética diz-se decrescente;

3. Nula os termos nem crescem nem decrescem e a progressão aritmética diz-se constante.

A progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ é limitada quando é composta de um número finito de termos e ilimitada quando é composta de um número infinito de termos.

3.1.2 ENÉSIMO TERMO

Seja a progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ cuja razão é r. De acordo com a definição de progressão aritmética, podemos escrever:

$$
\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + r \\
a_3 &= a_2 + r \\
a_4 &= a_3 + r \\
&\vdots \\
a_{n-1} &= a_{n-2} + r \\
a_n &= a_{n-1} + r
\end{aligned}
$$

Adicionando as $(n-1)$ igualdades, membro a membro, obtemos

$$a_n + (a_2 + a_3 + ... + a_{n-1}) = a_1 + (a_2 + a_3 + ... + a_{n-1}) + (n-1)\,r$$

Somando $[-(a_2 + a_3 + ... + a_{n-1})]$ em ambos os membros da igualdade, teremos

$$a_n = a_1 + (n-1)\,r$$

Expressão do primeiro termo:

$$a_1 = a_n - (n-1)\,r$$

Expressão da razão:

$$r = \frac{a_n - a_1}{n-1}$$

Expressão do número de termos:

$$n = \frac{a_n - a_1}{r} + 1$$

Numa progressão aritmética limitada a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos.

Prova: Seja a progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ limitada. Consideremos os termos a_k e $a_{n-(k-1)}$, que são equidistantes dos extremos.

Temos, pois:

$$\begin{aligned} a_k &= a_1 + (k-1)\,r \\ a_{n-(k-1)} &= a_n - (k-1)\,r \end{aligned}$$

Adicionando membro a membro estas iguldades, obtemos:

$$a_1 + a_n = a_k + a_{n-(k-1)}.$$

Consequência: Numa progressão aritmética de número ímpar de termos, o termo do meio é a média aritmética dos extremos (ou dois termos quaiquer equidistante dos extremos).

3.1.3 SOMA DOS TERMOS DE UMA PROGRESSÃO ARITMÉTICA LIMITADA $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$

A soma dos termos de uma progressão aritmética limitada é igual ao produto da semi-soma dos extremos pelo número de termos, isto é, $\frac{(a_1+a_n)n}{2}$.

Prova: Seja a progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$.

Designando a soma dos n termos por S_n, vem:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

Como a ordem das parcelas não altera a soma, temos:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_3 + a_2 + a_1$$

Adicionando membro a membro estas igualdades, obtemos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + ... + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Mas pelo teorema anterior

$$(a_1 + a_n) = (a_2 + a_{n-1}) = (a_3 + a_{n-2}) = ... = (a_{n-2} + a_3) = (a_{n-1} + a_2) = (a_n + a_1)$$

E ainda, o número de somas é n, temos:

$$2S_n = (a_1 + a_n)\,n$$

Logo,

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2}$$

Observação 3.1.1. Sendo $a_n = a_1 + (n-1)\,r$, temos:

$$S_n = \frac{[a_1 + a_1 + (n-1)\,r]\,n}{2}$$

Logo,

$$S_n = \frac{[2a_1 + (n-1)\,r]\,n}{2}.$$

3.1.4 INTERPOLAÇÃO ARITMÉTICA

Inserir m meios aritméticos entre dois números, a e b, é formar a progressão arimética, cujo primeiro termo é a, o último é b, e que tem m termos entre a e b. A resolução do problema consiste em calcular a razão da progressão que tem $m+2$ termos. Conhecida esta, escreven-se os m ternos entre os números a e b. A plicando a fórmula $r = \frac{a_n - a_1}{n-1}$ para $n = m+2$, obtemos:

$$r = \frac{a_n - a_1}{m+1}.$$

3.2 PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Progressão geométrica é toda sequência de números diferentes de zero $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$, na qual é constante o quociente de cada termo, a partir do segundo termo, com o seu antecessor, isto é,

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \cdots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \cdots = q$$

Este quociente (q) é chamado de razão da progressão geométrica.

3.2.1 CLASSIFICAÇÃO

Nas progressões geométricas de termos positivos, diz-se que a progressão é:

1. Crescente quando a razão for maior que a unidade, isto é, q>1;
2. Decrescente quando a razão for menor que a unidade, isto é, q<1;
3. Estacionária quando a razão for igual a unidade, isto é, $q = 1$.

Dizemos que a progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ é limitada quando é composta de um número finito de termos e ilimitada quando é composta de um número infinito de termos.

3.2.2 PROPRIEDADE

Cada termo de uma progressão geométrica, a partir do segundo, é a média geométrica entre o termo procedente e o seguinte:

$$a_n = \sqrt[2]{a_{n-1}.a_{n+1}}$$

Prova: Seja $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, ...)$ uma progressão geométrica. Pela definição de progressão geométrica temos:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade por $(a_n.a_{n-1})$, obtemos;

$$a_n^2 = a_{n+1}.a_{n-1}$$

Extraindo a raiz quadrada em ambos os membros, temos:

$$a_n = \sqrt[2]{a_{n-1}.a_{n+1}}.$$

3.2.3 ENÉSIMO TERMO

Considere a seguinte progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, ...)$. Por definição, temos

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 q \\ a_3 &= a_2 q \\ a_4 &= a_3 q \\ &\vdots \\ a_{n-1} &= a_{n-2} q \\ a_n &= a_{n-1} q \end{aligned}$$

Multiplicando-se membro a membro as $(n-1)$ igualdades acima, temos que:

$$a_n \left(a_2.a_3.a_4.....a_{n-1}\right) = a_1 \left(a_2.a_3.a_4.....a_{n-1}\right).q^{n-1}$$

Multiplicando agora ambos os lados da igualdade por $\frac{1}{a_2.a_3.a_4.....a_{n-1}}$, obtemos:

$$a_n = a_1.q^{n-1}.$$

Expressão do primeiro termo:

$$a_1 = \frac{a_n}{q^{n-1}}$$

Expressão da razão (q):

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}.$$

Teorema 3.2.1. Numa progressão geométrica limitada, o produto de dois termos equidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos.

Prova: Considere a seguinte progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{p+1}, ..., a_{n-p}, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ na qual os termos a_{p+1} e a_{n-p} são equidistantes dos extremos, visto haver p termos antes de a_{p+1} e n termos depois de a_{n-p}.Consideremos a progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{p+1})$. De acordo com a fórmula $a_n = a_1.q^{n-1}$, temos:

$$a_{p+1} = a_1.q^p \quad (*)$$

Seja agora a progressão geométrica $(a_{p+1}, ..., a_{n-p}, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ cujo primeiro termo é a_{n-p} e o último termo é a_n.

Aplicando a fórmula $a_n = a_1.q^{n-1}$, vem:

$$a_n = a_{n-1}.q^p \rightarrow a_{n-1} = \frac{a_n}{q^p} \quad (**)$$

Multiplicando, membro a membro, as igualdades $(*)$ e $(**)$, obtemos:

$$a_{p+1}.a_{n-p} = a_1.a_n.$$

Consequência: Numa progressão geométrica de número ímpar de termos, o termo do meio é a média geométrica dos extremos (ou dois termos quaiquer equidistante dos extremos).

3.2.4 PRODUTO DOS TERMOS DE UMA PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Considere a progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$. Denotando por P o produto dos termos da progressão geométrica, isto é,

$$P = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

ou, como a ordem dos fatores não altera o produto, podemos escrever;

$$P = a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdots a_3 \cdot a_2 \cdot a_1$$

Multiplicando, membro a membro, as igualdades acima, vem que:

$$P^2 = (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_2 \cdot a_{n-1}) \cdot (a_3 \cdot a_{n-2}) \cdots (a_{n-2} \cdot a_3) \cdot (a_{n-1} \cdot a_2) \cdot (a_n \cdot a_1).$$

Como os produtos entre parênteses são iguais, ou seja,

$$(a_1 \cdot a_n) = (a_2 \cdot a_{n-1}) = (a_3 \cdot a_{n-2}) = \cdots = (a_{n-2} \cdot a_3) = a_{n-1} \cdot a_2 = (a_n \cdot a_1).$$

temos que;

$$P^2 = (a_1 \cdot a_n)^n$$

Donde;

$$P = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

3.2.5 INTERPOLAÇÃO GEOMÉTRICA

Dados dois números, a_1 e a_n, inserir entre eles m meios geométricos é formar uma progressão geométrica com $(m+2)$ termos, na qual a_1 é o primeiro termo e a_n o último termo, ou seja, a_1 e a_n são os extremos da progressão geométrica. A progressão geométrica tendo $m+2$ dois termos e sendo conhecido o primeiro termo, basta calcular a razão (q). Substituindo na fórmula

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

n por $m+2$, teremos:

$$q = \sqrt[m+1]{\frac{a_n}{a_1}}.$$

3.2.6 SOMA DOS TERMOS DE UMA PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

i) A soma dos termos de uma progressão geométrica limitada é calculada por meio da fórmula seguinte:

$$S_n = \frac{a_n.q - a_1}{q-1}$$

ou pela fórmula:

$$S_n = a_1.\frac{(q^n - 1)}{q-1}$$

Prova: Seja $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ uma progressão geométrica e

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

a soma dos termos da progressão geométrica.

Multiplicando S_n por q, obtemos:

$$q.S_n = q.a_1 + q.a_2 + q.a_3 + \cdots + q.a_{n-2} + q.a_{n-1} + q.a_n$$

Daí,

$$q.S_n = a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n + a_{n+1}$$

Fazendo a subtração

$$S_n - q \cdot S_n = a_1 - a_{n+1}$$

Temos ainda que,

$$S_n\,(1-q) = a_1 - a_1 \cdot q^n$$

e finalmente

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}.$$

ii) A soma dos termos de uma progressão geométrica decrescente e ilimitada é dada pela fórmula seguinte:

$$S = \frac{a_1}{1-q}.$$

Prova: Basta fazer $n \to \infty$ em Sn. Neste caso

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \text{ , pois } |q| < 1.$$

Logo, temos que:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = a_1 \frac{1-0}{1-q},$$

isto é,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}.$$

3.3 SOMA TELESCÓPICA

Em matemática, a soma telescópica é uma soma da seguinte forma:

$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + ... + (a_n - a_{n-1})$$

Esta soma pode ser simplificada:

$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + ... + (a_n - a_{n-1}) = a_n - a_1.$$

Podemos escrever essa soma do seguinte modo

$$\sum_{k=1}^{n} (a_n - a_{n-1}) = a_n - a_{1.}$$

Prova: Desenvolvendo o somatório $\sum_{k=1}^{n} (a_n - a_{n-1})$, obtemos a soma

$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + ... + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_n - a_{n-1})$$

associando os termos de forma diferente, obtemos,

$$a_n + (a_2 - a_2) + (a_3 - a_3) + (a_4 - a_4) + ... + (a_{n-1} - a_{n-1}) + (a_{n-2} - a_{n-2}) - a_1,$$

donde concluímos a fórmula. c.q.d.

Naturalmente qualquer sequência de termos b_n pode ser escrita como uma soma telescópica:

$$b_n = b_1 + (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + ... + (b_n - b_{n-1}) \,.$$

3.4 RECORRÊNCIA LINEAR

Muitas sequências são definidas por uma relação de recorrência, ou seja, recursivamente. Definir recursivamente é criar uma expressão que permite determinar qualquer termo da sequência em função do(s) antecessor(es) imediatos. A relação de recorrência aparece em todo tipo de aplicação. Para achar uma expressão fechada para alguma aplicação, teremos três etapas:

i. Considerar casos simples, para melhor compreender o problema;

ii. Determine uma expressão matemática e prove sua validade (essa expressão é a relação de recorrência onde um termo depende dos antecessor(es) imediatos;

iii. Determine uma forma fechada para expressão matemática (essa forma fechada é a solução da relação de recorrência).

3.4.1 RECORRÊNCIA LINEAR DE PRIMEIRA ORDEM

É uma relação de recorrência linear onde cada termo depende apenas do seu antecessor imediato.

Vamos separar a recorrência linear de primeira ordem, em três partes:

1. Do tipo

$$\begin{cases} x_0 = a \\ \\ x_{n+1} = x_n + k\,(n)\,, \text{ onde } k(n) = bn + c \;, \; n \in \mathbb{N} \text{ e } b, c \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Para resolver uma equação desse tipo seguimos de tal modo:

Tomamos $n = 0, 1, 2, 3, 4, ..., n-1$, isto é,

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + k(0); \\ x_2 &= x_1 + k(1); \\ x_3 &= x_2 + k(2); \\ &\vdots \\ x_n &= x_{n-1} + k(n-1); \end{aligned}$$

Somando membro a membro as n equações, obtemos;

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-1} + k\,(0) + \cdots + k\,(n-1)$$

Somando $[-\,(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1})]$ em ambos os membros da igualdade, temos

$$x_n = x_0 + k\,(0) + \cdots + k\,(n-1)$$

Se $b = 0$, logo

$$x_n = a + nc, \text{ pois } x_0 = a.$$

Caso contrário, $k\,(0) + k\,(1) + \cdots + k\,(n-1)$ é a soma de n termos de uma sequência numérica, isto é,

$$\begin{aligned} k\,(0) &= c \\ k\,(1) &= b + c \\ k\,(2) &= 2b + c \\ &\vdots \\ k\,(n-1) &= (n-1)\,b + c \end{aligned}$$

E como $k\,(0) + k\,(1) + ... + k\,(n-1) = \frac{(c+(n-1)b+c)n}{2} \rightarrow x_n = a + \frac{((n-1)b+2c)n}{2}$.

Observação 3.4.1. Se no tipo de recorrência acima tivermos $k\,(n) = b^n + c$ teremos então que:

1) $b = 0 \rightarrow x_n = a + nc$, como já tinhamos visto;

2) $b \neq 0$ e $c = 0 \rightarrow x_n = x_0 + k\,(0) + .. + k\,(n-1) \rightarrow x_n = a + b^0 + b^1 + \cdots + b^{n-1} \rightarrow x_n = a + b^0 \frac{b^n - 1}{b-1}$.

2. Relação de recorrência do tipo
   $$\begin{cases} x_0 = a \\ \\ x_{n+1} = bx_n, \text{ com } a, b \in \mathbb{R}. \end{cases}$$
   Para determinar a solução de uma equação desse tipo, seguimos o processo:

   Tome $n = 0, 1, 2, 3, ..., n-1$, isto é,
   $$\begin{aligned} x_1 &= bx_0; \\ x_2 &= bx_1; \\ x_3 &= bx_2; \\ &\vdots \\ x_n &= bx_{n-1}; \end{aligned}$$
   Multiplicando membro a membro as n equações e depois dividindo ambos os membros por $(x_1.x_2.x_3.....x_{n-1})$ obtemos:
   $$x_n = b^n x_0$$
   Mas $x_0 = a$ (dado), logo
   $$x_n = b^n a.$$

3. Relação de recorrência do tipo
   $$\begin{cases} x_0 = a \\ \\ x_{n+1} = bx_n + c, \text{ com } a, b, c \in \mathbb{R}. \end{cases}$$
   Tome $n = 0, 1, 2, 3, ..., n-1$, logo
   $$\begin{aligned} x_1 &= bx_0 + c; \\ x_2 &= bx_1 + c; \\ x_3 &= bx_2 + c; \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= bx_{n-2} + c; \\ x_n &= bx_{n-1} + c. \end{aligned}$$
   Multiplicamos a primeira equação por b^{n-2} , a segunda por b^{n-3},...,a $(n-1) - ésima$

por b e a $n-ésima$ por b^0, obtendo

$$\begin{aligned}
b^{n-2}x_1 &= b^{n-1}x_0 + cb^{n-2};\\
b^{n-3}x_2 &= b^{n-2}x_1 + cb^{n-3};\\
b^{n-4}x_3 &= b^{n-3}x_2 + cb^{n-4};\\
&\vdots\\
bx_{n-1} &= b^2x_{n-2} + cb;\\
x_n &= bx_{n-1} + c.
\end{aligned}$$

Somando membro a membro as n equações acima e fazendo as devidas simplificações, obtemos

$$x_n = b^{n-1}x_0 + c\left(b^0 + b^1 + ... + b^{n-2}\right)$$

Sabemos que $b^0 + b^1 + \cdots + b^{n-2} = 1\frac{b^{n-1}-1}{b-1}$ e $x_0 = a$, logo

$$x_n = b^{n-1}a + c\frac{b^{n-1}-1}{b-1}.$$

3.4.2 RECORRÊNCIA LINEAR DE SEGUNDA ORDEM

Estudaremos somente as recorrências lineares de segunda ordem homogênias, com coeficientes constantes, que são sequências recursivas onde cada termo depende de dois antecessores imediatos, isto é,

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0, com\ q \neq 0.$$

Se $q = 0$, a recorrência é , na verdade, uma recorrência linear de primeira ordem.

Recorrência desse tipo é associada a equação do segundo grau,

$$x^2 + px + q = 0$$

determinada de equação característica. Como $q \neq 0$ não teremos 0 (zero) como raiz da equação característica.

Teorema 3.4.1. Se as raízes de $x^2+px+q = 0$ são x_1 e x_2 com $x_1 \neq x_2$, então $a_n = C_1x_1^n+C_2x_2^n$ é solução da recorrência $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$, para quaisquer valores constantes de C_1 e C_2.

Prova: Substituindo $a_n = C_1x_1^n + C_2x_2^n$ na recorrência $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$, obtemos

$$C_1x_1^{n+2} + C_2x_2^{n+2} + p\left(C_1x_1^{n+1} + C_2x_2^{n+1}\right) + q\left(C_1x_1^n + C_2x_2^n\right) =$$

$$C_1x_1^n\left(x_1^2 + px_1 + q\right) + C_2x_2^n\left(x_2^2 + px_2 + q\right)$$

Mas $x_1^2 + qx_1 + q = 0$ e $x_2^2 + qx_2 + q = 0$, logo:

$$C_1x_1^n.0 + C_2x_2^n.0 = 0 \quad \text{c.q.d.}$$

Teorema 3.4.2. Se as raízes de $x^2+px+q = 0$ são iguais $x_1 = x_2 = x$, então $a_n = C_1x^n+C_2nx^n$ é solução da recorrência $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$, para quaisquer valores constantes de C_1 e C_2.

Prova: Se as raízes são iguais então, pela relação da soma das raízes, $x = -\frac{p}{2}$. Substituindo $a_n = C_1x^n + C_2nx^n$ na recorrência $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ obtemos,

$$C_1x^{n+2} + C_2(n+2)x^{n+2} + p[C_1x^{n+1} + C_2(n+1)x^{n+1}] + q\left(C_1x^n + C_2nx^n\right) =$$

$$C_1x^n\left(x^2 + px + q\right) + C_2nx^n\left(x^2 + px + q\right) + C_2x^{n+1}\left(2x + p\right)$$

Mas $x^2 + px + q = 0$ e $x = -\frac{p}{2} \to 2x = -p$, logo:

$$C_1x^n.0 + C_2nx^n.0 + C_2x^{n+1}\left(-p + p\right) = 0 \text{ c.q.d.}$$

3.4.3 PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA

É uma forma geral de provar que alguma afirmação (propriedades) sobre o natural n é válida para todo $n \geq 1$. Primeiro provamos a proposição para o menor valor de n, 1; este é o primeiro passo da indução. Depois provamos a afirmação para $n > 1$, supondo que ela já foi provada para todos os valores naturais entre 1 e $(n-1)$, inclusive; este segundo passo é a indução propriamente dita. Em outras palavras, seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Agora suponha que

1. $P(1)$ é válida ;

2. Para todo valor do número natural n, a validade de $P(n)$ acarreta a validade de $P(n+1)$.

   Então, pelo princípio da indução matemática, $P(n)$ é válida para qualquer número natural n.

Com efeito, se chamarmos de X o conjunto dos números naturais n para os quais $P(n)$ é válida, veremos que $1 \in X$ em virtude de 1) e que $n \in X$ em virtude de 2). Logo, pelo princípio da indução matemática, concluímos que $X = \mathbb{N}$.

Relações de recorrência são ideais para usar o princípio da indução matemática.

3.5 SEQUÊNCIA FIBONACCI

A seqüência dos números de Fibonacci é definida por meio de uma simples recorrência. Denotaremos F_n como o n-ésimo número de Fibonacci. A partir de dois termos iniciais ($F_0 = 0$ e $F_1 = 1$) os termos subseqüentes são obtidos pela soma dos dois termos imediatamente anteriores. Assim, como $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$, segue que $F_3 = F_1 + F_2 = 1 + 1 = 2$. Genericamente, a lei de recorrência para a seqüência de números de Fibonacci é escrita por $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, isto é, são simples números inteiros definidos pela relação de recorrência

$$\begin{aligned} F_1 &= 1; \\ F_2 &= 1; \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ para } n \geq 1. \end{aligned}$$

Os primeiros termos da seqüência de Fibonacci são:

n	■	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
F_n	□	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

A simplicidade desta regra-a relação de recorrência mais simples possível na qual cada número depende de dois prévios- é reponsável pelo fato de os números de Fibonacci aparecerem em uma ampla variedade de situações.

3.5.1 PROPRIEDADES DA SEQUÊNCIA FIBONACCI

A seguir, apresentam-se alguns resultados e/ou propriedades relacionados com a Sequência de Fibonacci. Começa-se com uma propriedade referente à soma dos n primeiros números da Sequência de Fibonacci:

Teorema 3.5.1. A soma S_n $n > 1$, dos n primeiros números da Sequência de Fibonacci é dada por

$$S_n = a_{n+2} - 1.$$

Prova: Tem-se que

$$\begin{aligned}
a_1 + a_2 &= a_3 \rightarrow a_1 = a_3 - a_2 \\
a_2 + a_3 &= a_4 \rightarrow a_2 = a_4 - a_3 \\
a_3 + a_4 &= a_5 \rightarrow a_3 = a_5 - a_4 \\
&\vdots \\
a_n + a_{n-1} &= a_{n+1} \rightarrow a_{n-1} = a_{n+1} - a_n \\
a_{n+1} + a_n &= a_{n+2} \rightarrow a_n = a_{n+2} - a_{n+1}
\end{aligned}$$

Somando membro a membro as igualdades e simplificando termo a termo todas essas igualdades, obtém-se

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n = a_{n+2} - 1.$$

A próxima propriedade refere-se à soma dos quadrados dos n primeiros números de Fibonacci:

Teorema 3.5.2. A soma S_{n^2} dos quadrados dos n primeiros números de Fibonacci é dada por

$$S_{n^2} = a_n a_{n+1}$$

Prova: Temos que $a_1 = a_2 = 1$, daí tem-se que

$$(a_1)^2 = a_1 a_2$$

e, para $k > 1$,

$$a_k a_{k+1} - a_{k-1} a_k = a_k \left(a_{k+1} - a_{k-1}\right) = a_k a_k = (a_k)^2 \qquad (*)$$

já que, pela identidade $a_k = a_{k+1} - a_{k-1}$.Fazendo-se $k = 2, 3, 4, ..., n$ na igualdade $(*)$, obtém-se que

$$\begin{aligned}
(a_1)^2 &= a_1 a_2 \\
(a_2)^2 &= a_2 a_3 - a_1 a_2 \\
(a_3)^2 &= a_3 a_4 - a_2 a_3 \\
&\vdots \\
(a_{n-1})^2 &= a_{n-1} a_n - a_{n-2} a_{n-1} \\
(a_n)^2 &= a_n a_{n+1} - a_{n-1} a_n
\end{aligned}$$

Somando membro a membro todas as n igualdades e simplificando a expressão resultante, tem-se

$$S_{n^2} = (a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2 + (a_4)^2 + ... + (a_{n-2})^2 + (a_{n-1})^2 + (a_n)^2 = a_n a_{n+1}.$$

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo mostrar que as sequências numéricas podem ser trabalhadas de forma não conteudistas no ensino médio, sem o uso necessário de fórmulas e regras tão comuns no ensino de Matemática nas escolas públicas. A maneira diferente como são trabalhadas essas sequencias caracterizam um ensino motivador que contribuirá para o sucesso no ensino da Matemática.

Essa proposta é importante pois incentiva o professor trabalhar a realidade dos alunos, ensinando-os a desenvolver habilidades com o seu cotidiano de maneira lúdica e diferente, assim, permite aos alunos a criticidade, tão diferente da abstração. Saber trabalhar essas questões é de fundamental importância para o sucesso no ensino de sequências numéricas no ensino médio.

Mostramos aqui que com algumas definições e com o uso de Recorrência, podemos resolver vários problemas de sequência numérica.

Acreditamos que esta pesquisa contribuirá para uma melhor reflexão das práticas pedagógicas de muitos profissionais envolvidos com o ensino da Matemática e servirá para discutimos qual o melhor caminho para fazer com que os alunos eliminem as dificuldades do ensino desta disciplina e que essas propostas os incentive-os a gostar de aprender com o seu cotidiano.

Referências

[1] BOYER, Carl Benjamin, 1906-1976. História dqa Matemática. [A history of mathematics]. Elza F. Gomide(Trad.). 2ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1999.

[2] Perelman. Álgebra Recreativa. Milton da Silva Rodrigues (Trad). 3 ed. São Paulo: Editora Fulgor Limitada, 1986.

[3] POLYA, J. P. Aarte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático; trdução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo, 2^a reimpressão -Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

[4] Glenn, Willian H. Matemática Sem Problemas. Vol. 1 São Paulo. Ed. José Olympio 1972

[5] Johnson, Bonovan A.Matemática Sem Problemas. Vol.1 São Paulo. Ed. José Olympio 1972.

[6] Tahan, Malba, 1895-1974. O Homem que Calculava. 35^a ed., Record 1990.

[7] Pinto, Herbert F. Progressões. Rio de Janeiro: editora Científica 1966

[8] Eves,Howard. Introdução à História da Matemática/Howard Eves; tradução: Hygino H. Domingues.3^a reimpressão. -Campinas, SP: Editora da UNICAMP,2004.

[9] Bergamini, David. As Matemáticas.2^a edição, Rio de Janeiro. Ed. José Olympio, 1969

[10] Lima, Elon Lages, et al. A matemática do ensino médio, Vol. 2, (5^a edição), Coleção do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.

[11] Lima, Elon Lages, et al. A matemática do ensino médio, Vol. 1, (5^a edição), Coleção do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, 2004

[12] Graham, Ronald L.,Matemática Concreta: Fundamentos para a ciência da computação/Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, Oren Patashnik; tradução Valéria de Magalhães Iorio. [Reimpr.]. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

[13] LIMA, Elon Lages; et al. A Matem atica do Ensino M edio, Volume 2, 6^a ed., Rio de Janeiro: SBM, 2006.