



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CENTRO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM ENGENHARIA CIVIL**



ESDRAS JONATHAN HONORATO COSTA

**HOMOGENEIZAÇÃO DE COMPÓSITOS REFORÇADOS POR FIBRAS
CONSIDERANDO EFEITOS DE INTERFASES**

**Maceió
2017**

ESDRAS JONATHAN HONORATO COSTA

**HOMOGENEIZAÇÃO DE COMPÓSITOS REFORÇADOS POR FIBRAS
CONSIDERANDO EFEITOS DE INTERFASES**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil

Área de concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Severino Pereira Cavalcanti Marques

Co-Orientador: Prof. Dr. William Wagner Matos Lira

Maceió

2017

**Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central**

Bibliotecária Responsável: Janaina Xisto de Barros Lima

C837h Costa, Esdras Jonathan Honorato.
Homogeneização de compósitos reforçados por fibras considerando efeitos de interfaces / Esdras Jonathan Honorato Costa. – 2017.
151 f.: il.

Orientador: Severino Pereira Cavalcanti Marques.
Coorientador: William Wagner Matos Lira.
Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil: Estruturas) – Universidade Federal de Alagoas. Centro de Tecnologia. Maceió, 2017.

Bibliografia: f. 111-115.
Apêndices: f. 116-151.

1. Materiais compósitos – Propriedades efetivas. 2. Compósitos reforçados por fibras. 3. Micromecânica. 4. Ciência dos materiais. I. Título.

CDU: 624.016

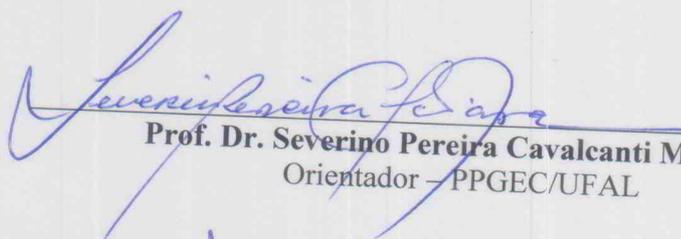


**HOMOGENEIZAÇÃO DE COMPÓSITOS REFORÇADOS POR FIBRAS
CONSIDERANDO EFEITOS DE INTERFASE**

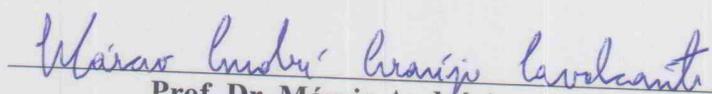
ESDRAS JONATHAN HONORATO COSTA

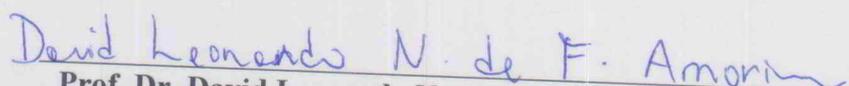
Dissertação submetida à banca examinadora do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas e aprovada no dia 27 do mês de abril do ano de 2017.

Banca Examinadora:


Prof. Dr. Severino Pereira Cavalcanti Marques
Orientador – PPGEC/UFAL


Prof. Dr. William Wagner Matos Lira
(Coorientador - PPGEC/UFAL)


Prof. Dr. Márcio André Araújo Cavalcante
(Avaliador Interno - PPGEC/UFAL)


Prof. Dr. David Leonardo Nascimento de Figueiredo Amorim
(Avaliador Externo – UFS)

AGRADECIMENTOS

Ao meu pai Luiz Palmeira e à minha mãe Maria Cenilza por serem minha base de vida, ensinando-me os princípios e conceitos éticos que possuo hoje.

Aos meus irmãos: Jeremias Christian, Israel Shalom e Sayonara Palmeira pelo companheirismo e compreensão.

À mulher que aos poucos conquistou meu coração, Poliana da Silva Santos, por se preocupar comigo e por me aturar nos meus momentos de chatice.

Ao professor Severino Pereira Cavalcanti Marques que demonstrou dedicação e entusiasmo na orientação, através de suas ideias e conselhos importantíssimos para o desenvolvimento da pesquisa e da elaboração do texto que culminou nesse trabalho.

Ao professor William Wagner de Matos Lira por sempre gerar debates importantes para melhoria do texto e da pesquisa desenvolvida nesse trabalho.

À UFAL por me acolher desde a etapa de estudante de graduação passando pela etapa de estudante de mestrado até a etapa de engenheiro da instituição. Sendo que, durante a última etapa pude galgar cargo de chefia na instituição. Agradeço aos amigos obtidos durante a graduação, durante o mestrado e durante o período no GPOS, na DAOSE e da DMPV, setores estes da Superintendência de Infraestrutura da UFAL. Agradeço de forma especial aos superintendentes professora Nélia Henrique Callado e professor Márcio Gomes Barboza pelo apoio e incentivo profissional.

Ao amigos que foram obtidos durante o breve período como professor substituto do Campus Sertão, campus esse da UFAL.

Ao IFAL que me proporciona uma nova dimensão na minha carreira, onde atualmente leciono no curso de técnico de edificações do Campus Coruripe. Agradeço ao amigos que a instituição me deu a oportunidade de obter.

Por fim, aos professores do programa de pós-graduação em Engenharia Civil da UFAL, pelos conhecimentos transmitidos ao longo do curso. E aos amigos de turma pelo companheirismo e auxílio durante as aulas.

*"What we know is a drop, what we don't know is an ocean."
Isaac Newton*

RESUMO

Considerando as importantes aplicações dos materiais compósitos reforçados por fibras em engenharia, a caracterização dos mesmos se mostra como um tema de grande relevância. Dentro deste campo de estudos, as técnicas de homogeneização apresentam um grande potencial de aplicabilidade. Devido às dificuldades de se conhecer com precisão os detalhes da microestrutura de tais materiais, as estratégias de substituição do meio real por outro homogeneizado equivalente se destacam como uma solução prática. Dentre tais técnicas destaca-se a modelagem via micromecânica. Assim, os modelos micromecânicos encontram ampla aplicação na caracterização de compósitos reforçados por fibras. Dentro desse contexto, este trabalho tem por objetivo apresentar técnicas de homogeneização aplicadas em compósitos reforçados por fibras curtas e longas para determinação de propriedades termoelásticas efetivas. A influência das interfases nas propriedades efetivas de compósitos reforçados por fibras longas unidirecionais é estudada, assim como a influência da orientação das fibras e a da razão de aspecto em compósitos reforçados por fibras curtas distribuídas randomicamente. Para materiais com fibras distribuídas randomicamente utilizam-se modelos analíticos e, para materiais com distribuição periódica utiliza-se, além dos modelos analíticos, o método dos elementos finitos. Os resultados são verificados através de vários exemplos usando dados experimentais disponíveis na literatura ou através de comparação entre os métodos. A comparação dos resultados permite avaliar a influência da razão de aspecto, do raio e da orientação das fibras em compósitos reforçados por fibras curtas randomicamente distribuídas; além de verificar a influência das interfases, da espessura da interfase e do raio em compósitos reforçados por fibras longas unidirecionais.

Palavras-Chave: Compósitos reforçados por fibras, propriedades efetivas, micromecânica, interfase.

ABSTRACT

Considering the important applications of fiber-reinforced composite materials in engineering, the characterization of these materials is a highly relevant topic. Within this field of study, homogenization techniques present a great applicability potential. Due to the difficulties of knowing precisely the details of the microstructure of such materials, the strategy of replacing the real medium with another equivalent homogenized stands out as a practical solution. Among these techniques, micromechanical modeling stands out. Thus, the micromechanical models find wide application in the characterization of fibers reinforced composites. In this context, this work aims to present homogenization techniques applied in composites reinforced by short and long fibers for determination of effective thermoelastic properties. The influence of the interphases on the effective properties of composites reinforced by unidirectional long fibers is studied, as well as the influence of fiber orientation and aspect ratio on composites reinforced by randomly distributed short fibers. For materials with randomly distributed fibers, analytical models are used while for materials with periodic distribution, the finite element method is used in addition to the analytical models. Results are verified through several examples using experimental data available in the literature or by comparison of methods. The comparison of the results allows to evaluate the influence of the aspect ratio, radius size and fiber orientation on composites reinforced by randomly distributed short fibers; besides to verify the influence of the interphases, the thickness of the interphase and the size of the radius in composites reinforced by unidirectional long fibers.

Keywords: fiber-reinforced composites, effective properties, micromechanics, interphase.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.1 - Fluxograma da metodologia adotada no presente trabalho.....	6
Figura 2.1 - (a) Compósito com microestrutura randômica caracterizado por um elemento de volume representativo. (b) Compósito com microestrutura periódica definida por uma célula unitária.....	10
Figura 2.2 – Utilização do EVR em processos de homogeneização	12
Figura 2.3 – Condições de contorno homogêneas em tensão aplicadas no EVR.....	16
Figura 2.4 – Condições de contorno homogêneas em deformação aplicadas no EVR.	17
Figura 2.5 – EVR e célula unitária em material compósito periódico.	20
Figura 2.6 – Plano transversal de um material compósito reforçado com fibras contínuas unidirecionais (à esquerda). Célula unitária, em destaque os eixos de coordenadas locais (à direita).....	21
Figura 2.7 – Representação de célula unitária quadrada.	22
Figura 2.8 – Representação de célula unitária hexagonal.	22
Figura 2.9 – Condição de contorno homogênea em deformação aplicada ao EVR periódico.	24
Figura 3.1 – Problema da inclusão elipsoidal de Eshelby	26
Figura 3.2 – Resolução do problema de Eshelby: (a) problema inicial; (b) e (c) corte; (d) aplicação do campo de deformação arbitrário; (e) aplicação de forças para que a inclusão volte ao estado original; (f) colagem.	27
Figura 3.3–Método da inclusão equivalente.....	28
Figura 3.4–Parâmetros geométricos da inclusão elipsoidal	30
Figura 3.5 – Representação do modelo de Mori-Tanaka: (a) EVR, (b) Aplicação do método da inclusão equivalente (c) Material homogeneizado.	32
Figura 3.6–Processo de homogeneização utilizado no modelo auto-consistente: (a) EVR, (b) compósito com única inclusão inserida em matriz constituída do material homogêneo efetivo e (c) material equivalente homogeneizado.	34
Figura 3.7 – Representação do modelo auto-consistente generalizado. Inclusão na região central, matriz na anula e material efetivo na região externa as circunferências.	35
Figura 3.8: Parâmetros da orientação da inclusão elipsoidal	45
Figura 3.9: Etapas de homogeneização para compósitos reforçados por fibras curtas distribuídas aleatoriamente.....	47

Figura 4.1 – Corpos de prova com dimensões 110mm x 220mm, contendo perólas de EPS com diâmetro de 1,0mm; 2,5mm e 6,3mm, respectivamente.....	49
Figura 4.2 – Variação do módulo de elasticidade efetivo de amostras de concretos leve de EPS	50
Figura 4.3: Variação do módulo de elasticidade longitudinal.....	51
Figura 4.4: Variação do módulo de elasticidade transversal.....	52
Figura 4.5: Variação do coeficiente de Poisson.....	52
Figura 4.6: Influência da razão de aspecto no módulo de Young efetivo do compósito.....	53
Figura 4.7: Influência da razão de aspecto no coeficiente de Poisson efetivo do compósito...	54
Figura 4.8: Módulo de Young: matriz de poliéster e fibras de sisal.....	55
Figura 4.9: Módulo de Young: matriz de epóxi e fibras de vidro.....	56
Figura 4.10: Variação do coeficiente de expansão térmica.....	57
Figura 4.11: Variação do coeficiente de expansão térmica para compósito poroso.....	58
Figura 4.12: Influência da razão de aspecto no coeficiente de expansão térmica efetivo.....	59
Figura 4.13: Variação da condutividade térmica com a fração volumétrica de fibras.....	60
Figura 4.14: Variação da condutividade térmica.....	61
Figura 5.1 - Compósito reforçado por fibras unidirecionais.....	64
Figura 5.2 - Metodologia usada para incorporar o efeito da interfase.....	67
Figura 5.3 - Célula unitária hexagonal compatibilizada por uma retangular.....	75
Figura 5.4 - Célula unitária quadrada gerada através do algoritimo desenvolvido no presente trabalho.....	75
Figura 5.5 - Célula unitária hexagonal gerada através do algoritimo desenvolvido no presente trabalho.....	76
Figura 6.1: Variação do módulo de deformação volumétrica.....	78
Figura 6.2: Variação do módulo de elasticidade transversal com o aumento do raio da fibra.....	78
Figura 6.3: Variação do módulo de cisalhamento transversal com o aumento do raio da fibra.....	79
Figura 6.4: Variação do módulo de cisalhamento com a espessura da interfase para célula unitária quadrada.....	81
Figura 6.5: Variação do módulo de cisalhamento com a espessura da interfase para célula unitária hexagonal.....	81

Figura 6.6: Variação da condutividade térmica efetiva com a fração volumétrica de fibras.....	83
Figura 6.7: Efeito de tamanho do raio das fibras na condutividade térmica efetiva.....	84
Figura 6.8: Variação da condutividade térmica com o aumento do raio da fibra.....	85
Figura 6.9: Coeficiente de expansão térmica transversal efetivo em função da fração volumétrica de fibras.....	86
Figura 6.10: Coeficiente de expansão térmica longitudinal efetivo em função da fração volumétrica de fibras.....	87
Figura 6.11: Módulo de elasticidade longitudinal efetivo.....	88
Figura 6.12: Módulo de elasticidade transversal efetivo.....	88
Figura 6.13: Módulo de cisalhamento longitudinal efetivo.....	89
Figura 6.14: Módulo de cisalhamento transversal efetivo.....	89

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CCA	<i>Composite Cylinder Assemblage</i> (Conjunto de Compósito Cilindrico)
DQEM	<i>Differential Quadrature Element Method</i> (Método de elemento de quadratura diferencial)
EVR	Elemento de Volume Representativo
MEF	Método dos Elementos Finitos
TVF	Teoria dos Volumes Finitos
VAMUCH	<i>Variational Asymptotic Method for Unit Cell</i> (Método Assintótico Variacional para Célula Unitária)

LISTA DE SÍMBOLOS

T	Temperatura
q	Fluxo de calor
K	Condutividade térmica
σ_{ji}	Tensor de tensão
C_{ijkl}	Tensor de Rigidez
\mathbb{C}	
ε_{kl}	Tensor de deformações
u_i	Deslocamento na direção i
λ	Constante de Lamé
μ	Constante de Lamé, Módulo de Cisalhamento
E	Módulo de elasticidade longitudinal
ν	Coefficiente de Poisson
G	Módulo de Cisalhamento
k	Módulo Bulk
T_0	Temperatura de referência
α	Coefficiente de expansão térmica
α^{hom}	Coefficiente de expansão térmica homogeneizado
α_m	Coefficiente de expansão térmica da matriz
α_i	Coefficiente de expansão da inclusão
δ_{ij}	Delta de Kronecker
β_{ij}	Tensor termoelástico
f	Fração volumétrica de fibra ou inclusão
f_m	Fração volumétrica de matriz
f_i	Fração volumétrica de interfase

$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$	Tensão média
$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$	Deformação média
$\langle \boldsymbol{\sigma}_m \rangle$	Tensão média na matriz
$\langle \boldsymbol{\sigma}_i \rangle$	Tensão média na inclusão
$\langle \boldsymbol{\varepsilon}_m \rangle$	Deformação média na matriz
$\langle \boldsymbol{\varepsilon}_i \rangle$	Deformação média na inclusão
V_m	Volume de matriz
V_i	Volume de inclusão
V	Volume total
\mathbb{C}_m	Tensor de rigidez da matriz
\mathbb{C}_i	Tensor de rigidez da inclusão
$\boldsymbol{\Sigma}$	Tensão macroscópica
\boldsymbol{E}	Deformação macroscópica
$\mathbf{T}(\mathbf{x})$	Vetor força
$\mathbf{n}(\mathbf{x})$	Vetor normal
$\mathbf{u}(\mathbf{x})$	Vetor deslocamento
\mathbb{D}	Tensor de flexibilidade
\mathbb{D}_m	Tensor de flexibilidade da inclusão
\mathbb{D}_i	Tensor de flexibilidade da inclusão
\mathbb{A}_i	Tensor de concentração de deformação para a inclusão
\mathbb{A}_m	Tensor de concentração de deformação para a matriz
$[C]$	Matriz constitutiva
\mathbb{B}_i	Tensor de concentração de tensão para a inclusão
\mathbb{B}_m	Tensor de concentração de tensão para a matriz
\mathbb{I}	Tensor identidade
$\boldsymbol{\varepsilon}^*$	<i>Eingstrain</i>

\mathbb{S}	Tensor de Eshelby
\mathbb{C}^{hom}	Tensor de rigidez homogeneizado
ΔT	Variação de temperatura
p	Vetor posição da inclusão elipsoidal
p_1, p_2, p_3	Componentes do vetor posição da inclusão elipsoidal
ψ	Função de distribuição de probabilidade
θ, ϕ	Ângulos que indicam a orientação da inclusão
β	Razão de aspecto

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	1
1.1. OBJETIVOS.....	4
1.2. METODOLOGIA	5
1.3. DELIMITAÇÕES DO TRABALHO.....	7
1.2. ESTRUTURAÇÃO DO TRABALHO	7
2. DEFINIÇÕES SOBRE COMPÓSITOS.....	9
2.1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....	9
2.2. MICROESTRUTURA E FASES	9
2.3. ELEMENTO DE VOLUME REPRESENTATIVO (EVR)	11
2.4. CONCEITOS DE MICROMECAÂNICA	13
2.4.1. <i>Condições de contorno homogêneas</i>	15
2.4.2. <i>Tensores de concentração de tensão e deformação</i>	18
2.5. CONCEITOS DE MICROMECAÂNICA APLICADOS A MATERIAIS PERIÓDICOS	20
2.5.1. <i>Célula Unitária</i>	20
2.5.2. <i>Condições de contorno homogêneas em compósitos periódicos</i>	23
3. MODELOS MICROMECAÂNICOS DE CAMPOS MÉDIOS	26
3.1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....	26
3.2. PROBLEMA DA INCLUSÃO EQUIVALENTE.....	26
3.3. MODELOS MICROMECAÂNICOS PARA SÓLIDOS ELÁSTICOS	31
3.3.1. <i>Modelo de Mori-Tanaka</i>	31
3.3.2. <i>Modelo Auto-Consistente</i>	33
3.3.3. <i>Auto-Consistente Generalizado</i>	35
3.3.4. <i>Esquema Diferencial</i>	37
3.4. MODELOS MICROMECAÂNICOS PARA CONDUTIVIDADE TÉRMICA	38
3.4.1. <i>Modelo de Mori-Tanaka</i>	38
3.4.2. <i>Modelo de Hashin</i>	39
3.5. MODELOS MICROMECAÂNICOS PARA COEFICIENTE DE DILATAÇÃO TÉRMICA	39
3.5.1. <i>Modelo de Mori-Tanaka</i>	39
3.5.2. <i>Modelo de Hashin</i>	41
3.5.3. <i>Modelo de Lu</i>	41
3.5.4. <i>Modelo de Levin</i>	43

3.6.	EFEITO DE ORIENTAÇÃO DE FIBRAS	45
4.	APLICAÇÕES PARA COMPÓSITOS COM MICROESTRUTURA RANDÔMICA	48
4.1.	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	48
4.2.	PROPRIEDADES MECÂNICAS	48
4.2.1.	<i>Aplicação dos modelos micromecânicos de campos médios</i>	<i>48</i>
4.2.1.1.	<i>Concreto leve com pérolas de EPS.....</i>	<i>48</i>
4.2.1.2.	<i>Compósito reforçado por fibras curtas.....</i>	<i>50</i>
4.2.2.	<i>Efeito da razão de aspecto nas propriedades mecânicas efetivas.. ..</i>	<i>53</i>
4.2.3.	<i>Compósito com matriz de poliéster e fibras de sisal.....</i>	<i>54</i>
4.2.4.	<i>Compósito com matriz epóxi e fibras de vidro.....</i>	<i>55</i>
4.3.	COEFICIENTE DE EXPANSÃO TÉRMICA	57
4.3.1.	<i>Caso de um compósito reforçado por fibras curtas.....</i>	<i>57</i>
4.3.2.	<i>Caso de um compósito poroso.....</i>	<i>58</i>
4.3.3.	<i>Influência da razão de aspecto no coeficiente de expansão térmica.</i>	<i>59</i>
4.4.	CONDUTIVIDADE TÉRMICA.....	60
4.4.1.	<i>Caso de um compósito reforçado por fibras curtas.....</i>	<i>60</i>
4.4.2.	<i>Caso de um compósito poroso.....</i>	<i>61</i>
5.	HOMOGENEIZAÇÃO DE COMPÓSITOS COM FIBRAS LONGAS UNIDIRECIONAIS.....	63
5.1.	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	63
5.2.	PROPRIEDADES MECÂNICAS EFETIVAS.....	63
5.2.1.	<i>Modelo de Mori-Tanaka.....</i>	<i>63</i>
5.2.2.	<i>Composite Cylinder Assemblage (CCA).....</i>	<i>64</i>
5.3.	CONDUTIVIDADE TÉRMICA EFETIVA	69
5.3.1.	<i>Modelo de Mori-Tanaka.....</i>	<i>69</i>
5.3.2.	<i>Composite Cylinder Assemblage (CCA).....</i>	<i>70</i>
5.4.	COEFICIENTE DE EXPANSÃO TÉRMICA EFETIVO.....	71
5.4.1.	<i>Modelo de Lu.....</i>	<i>71</i>
5.4.2.	<i>Composite Cylinder Assemblage (CCA).....</i>	<i>72</i>
5.5.	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA DETERMINAÇÃO DE PROPRIEDADES EFETIVAS.....	73
6.	APLICAÇÕES PARA COMPÓSITOS COM MICROESTRUTURA PERIÓDICA	77
6.1.	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	77

6.2.	PROPRIEDADES MECÂNICAS EFETIVAS.....	77
6.2.1.	<i>Aplicação dos modelos micromecânicos.....</i>	77
6.2.2.	<i>Influência do raio das fibras sobre as propriedades mecânicas efetivas.....</i>	79
6.2.3.	<i>Influência da espessura da interfase sobre as propriedades mecânicas efetivas.....</i>	80
6.3.	CONDUTIVIDADE TÉRMICA EFETIVA	82
6.3.1.	<i>Aplicação dos modelos micromecânicos.....</i>	82
6.3.2.	<i>Influência do raio das fibras sobre as propriedades mecânicas efetivas.....</i>	84
6.4.	COEFICIENTE DE EXPANSÃO TÉRMICA EFETIVA	86
6.5.	COMPARAÇÃO ENTRE MODELO NUMÉRICO E ANALÍTICO.....	87
	CONCLUSÃO.....	91
	REFERÊNCIAS	93
	APÊNDICE	98
	APÊNDICE A - Célula unitária quadrada com interfase.....	98
	APÊNDICE B - Célula unitária hexagonal com interfase	113

1. INTRODUÇÃO

Os avanços da ciência e da tecnologia têm proporcionado um grande impulso nas investigações sobre o desenvolvimento e comportamento de materiais. A cada dia cresce a demanda por materiais com desempenho avançado e características especiais em importantes áreas da ciência e nos mais diversos setores industriais. Os esforços empenhados para suprir esta crescente necessidade têm tido como evidente consequência uma substancial evolução na tecnologia de fabricação e projeto de novos materiais. Este fato tem motivado uma considerável incrementação nos modelos teóricos e estudos experimentais visando à descrição e o entendimento do comportamento físico dos materiais.

Muitos destes novos materiais manufaturados consistem em combinações discretas de duas ou mais fases, o que atribui aos mesmos uma microestrutura heterogênea. Tais materiais, conhecidos como compósitos, têm encontrado um amplo leque de relevantes aplicações tecnológicas. Isso decorre da vantagem que, se bem projetados, os materiais compósitos podem exibir características desejáveis que não são observadas em seus constituintes separadamente.

Avaliação das propriedades macroscópicas de materiais compósitos é um importante tema da engenharia de materiais. No que se referem às propriedades efetivas elásticas dos compósitos, as técnicas micromecânicas são hoje amplamente aplicadas e têm sido bem sucedidas (Dutra *et al.*, 2009).

Como um caso desta classe de materiais heterogêneos, destacam-se os materiais reforçados por fibras. Vários materiais, tais como metais, cerâmicas e polímeros, são empregados como matriz destes materiais compósitos. As fibras utilizadas no reforço da matriz geralmente caem dentro de uma das quatro categorias a seguir (American Concrete Institute, 1996): naturais (sisal, coco e bambu), sintéticas (acrílico, aramida, carbono, nylon, poliéster, polietileno e polipropileno), fibras de vidro e aço. A adição de fibras pode ser efetuada com diversos objetivos, dentre os quais, minimizar o surgimento e propagação de trincas (Bentur & Mindess, 1990), aumentar a rigidez e a resistência mecânica do compósito (Dutra, 2012), e aumentar a resistência térmica do material (Hashin, 1990).

Os compósitos reforçados por fibras são classificados em duas grandes categorias: compósitos reforçados por fibras curtas (ou fibras descontínuas) e por fibras longas (ou fibras contínuas). As fibras longas apresentam maior eficiência como reforço estrutural (Agarwal *et al.*, 2014), enquanto que as fibras curtas proporcionam facilidade na fabricação do compósito e menor custo econômico.

Frequentemente, o estudo do comportamento de materiais compósitos é feito através de técnicas de homogeneização. Usando-se essas técnicas, obtêm-se informações sobre a resposta macroscópica do material, a qual tem grande importância em muitas situações práticas. Dentre os procedimentos de homogeneização, destacam-se aqueles baseados na micromecânica de campos médios (Nemat-Nasser & Hori, 1999; Berryman *et al.*, 2002). Os modelos que se enquadram nesta categoria se fundamentam nos resultados obtidos por Eshelby (1957).

A literatura técnica apresenta um grande número de trabalhos experimentais voltados para a determinação de propriedades mecânicas de materiais compósitos reforçados por fibras. Entretanto, ferramentas teóricas para simulação do efeito da microestrutura dos materiais compósitos são desejadas, uma vez que elas contribuem para a redução da quantidade de testes experimentais empregados para o projeto ou caracterização de propriedades de tais materiais.

Hine *et al.* (1993) e Wetherhold & Scott (1990) investigaram a influência do comprimento e da orientação das fibras sobre as propriedades termomecânicas dos compósitos de fibras descontínuas, considerando compósitos com fibras de comprimento médio inferior a 1 mm. Chen & Cheng (1996) propuseram um modelo baseado em Eshelby (1957) e Mori-Tanaka (1973), o qual inclui a interação entre as fibras desalinhadas, mas apenas para a distribuição de orientação planar e distribuição transversalmente isotrópica de fibras. Para isto, utiliza-se a função de distribuição de probabilidade desenvolvida por Kacir *et al.* (1975), a qual assume orientação planar e tem a capacidade para descrever qualquer distribuição unidirecional ou aleatória planar de fibras. Pan (1996) apresentou uma metodologia para descrever as propriedades elásticas efetivas de compósitos reforçados por fibras distribuídas aleatoriamente. Ele também analisa a relação entre as propriedades efetivas do material e a fração volumétrica de fibras ou a fração superficial de fibras. Hashin (2002) apresentou uma metodologia para determinação de propriedades elásticas efetivas de compósitos reforçados por fibras unidirecionais revestidas por uma interfase fina. Benveniste (2006) utilizou

expansão em séries de Taylor para deduzir um modelo de homogeneização que considera uma fina camada anisotrópica entre duas fases anisotrópicas. Lu (2013) apresentou uma modificação do modelo de Mori-Tanaka aplicado ao coeficiente de expansão térmica, onde tal modificação pode ser aplicada em compósito reforçado por fibras longas alinhadas ou em fibras descontínuas distribuídas randomicamente.

Os métodos analíticos tradicionais consideram as interfaces (regiões de contato entre os constituintes) como perfeitas, ou seja, assumem que através das mesmas os campos de deslocamentos e de tensões são contínuos (Hashin, 1990).

Para determinar as propriedades termomecânicas de compósitos reforçados por fibras contínuas unidirecionais são usualmente aplicados modelos analíticos simplificados oriundos da micromecânica (Halpin & Kardos, 1976). No entanto, devido às suas hipóteses simplificadoras (por exemplo, compósito bifásico com fibras e matriz isotrópicas), tais modelos analíticos têm aplicação limitada, o que leva à necessidade do uso de ferramentas mais versáteis, como os métodos numéricos (Bayat & Aghdam, 2012).

Os métodos numéricos, especialmente o Método dos Elementos Finitos (MEF) (Bathe & Wilson, 1976; Zienkiewicz & Taylor, 1988; Cook et al., 2002) e a Teoria de Volumes Finitos (TVF) (Basal & Pindera, 2003; Zhong *et al.*, 2004; Cavalcante, 2006; Aquino, 2010; Escarpini Filho, 2010), têm sido amplamente aplicados para determinação de propriedades efetivas de compósitos reforçados por fibras contínuas. Sun & Vaidya (1996) estudaram a aplicação do método de elementos finitos em compósitos reforçados por fibras contínuas, usando células unitárias quadradas e hexagonais. Michel *et al.* (1999) apresentaram um abordagem computacional baseada no método dos elementos finitos para obtenção de propriedades efetivas de compósitos com microestrutura periódica com constituintes lineares e não lineares. Chen & Liu (2004) desenvolveram um elemento de volume representativo para ser utilizado no método de elementos finitos para materiais reforçados por nanotubos de carbono. Cavalcante (2006) apresentou uma formulação para modelagem do comportamento termomecânico transiente de estruturas de materiais compósitos pela teoria de volumes finitos. Aquino (2010) deduziu uma formulação geometricamente não linear para a formulação paramétrica da teoria de volumes finitos. Usando essa última teoria, Escarpini Filho (2010) apresentou uma análise de estruturas de materiais compósitos viscoelásticos lineares. Bayat & Aghdam (2012) desenvolveram um método para determinação dos campos

de tensão e deformação e das propriedades efetivas de compósitos reforçados por fibras longas, baseando-se na micromecânica e no *differential quadrature element method* (DQEM).

A presença de interfases como zonas de transição entre as fibras e a matriz pode ter forte influência no comportamento macroscópico dos materiais compósitos. Isto, por exemplo, ocorre no caso de materiais com alta fração volumétrica de fibras de pequenos diâmetros, devido ao elevado valor da área superficial destas últimas e, conseqüentemente, maior volume relativo de interfase. Um fator complicador na caracterização de compósitos que apresentam interfases com influência relevante é que, usualmente, as dimensões e as propriedades destas últimas são desconhecidas.

Matzenmiller & Gerlach (2006) encontraram as propriedades mecânicas efetivas de compósitos reforçados por fibras de vidro através do método das células generalizado, adotando uma célula unitária quadrada e condições de contorno periódicas, assumindo que a região de interfase é isotrópica. Yu *et al.* (2013) propuseram uma estratégia inversa baseada no método dos elementos finitos e no modelo de Kriging (Sakata *et al.*, 2008) para identificar as propriedades das interfases. Bovik (1994) desenvolveu uma metodologia analítica, utilizando uma expansão da série de Taylor, para substituir uma interfase fina por uma interface. Benveniste (2006) generalizou o modelo de Bovik (1994) para o caso tridimensional com interfase anisotrópica entre dois meios anisotrópicos.

Como pode ser visto acima, existe uma grande quantidade de trabalhos disponíveis na literatura acerca da problemática abordada. No entanto, esses trabalhos são baseados em modelos bifásicos tradicionais ou consideram a interfase substituindo-a por uma interface através de metodologias analíticas. Além disso, tais modelos não são capazes de evidenciar a influência do tamanho do raio das fibras longas ou a orientação e a razão de aspecto das fibras curtas na determinação de propriedades efetivas de compósitos reforçados por fibras. Por outro lado, é desejável considerar os efeitos anteriormente citados e estudar a influência dos mesmos nas propriedades efetivas dos compósitos reforçados por fibra.

1.1 Objetivos

Com base nas colocações anteriores, o objetivo desse trabalho é apresentar um estudo sobre modelos micromecânicos para determinação das propriedades efetivas elásticas e térmicas de compósitos reforçados por fibras contínuas e descontínuas. As análises consideram a

heterogeneidade presente na microestrutura, a orientação e a razão de aspecto das fibras e a presença de interfases em compósitos com microestrutura periódica. Para compósitos reforçados por fibras contínuas unidirecionais também é utilizado um modelo de homogeneização baseado no método dos elementos finitos.

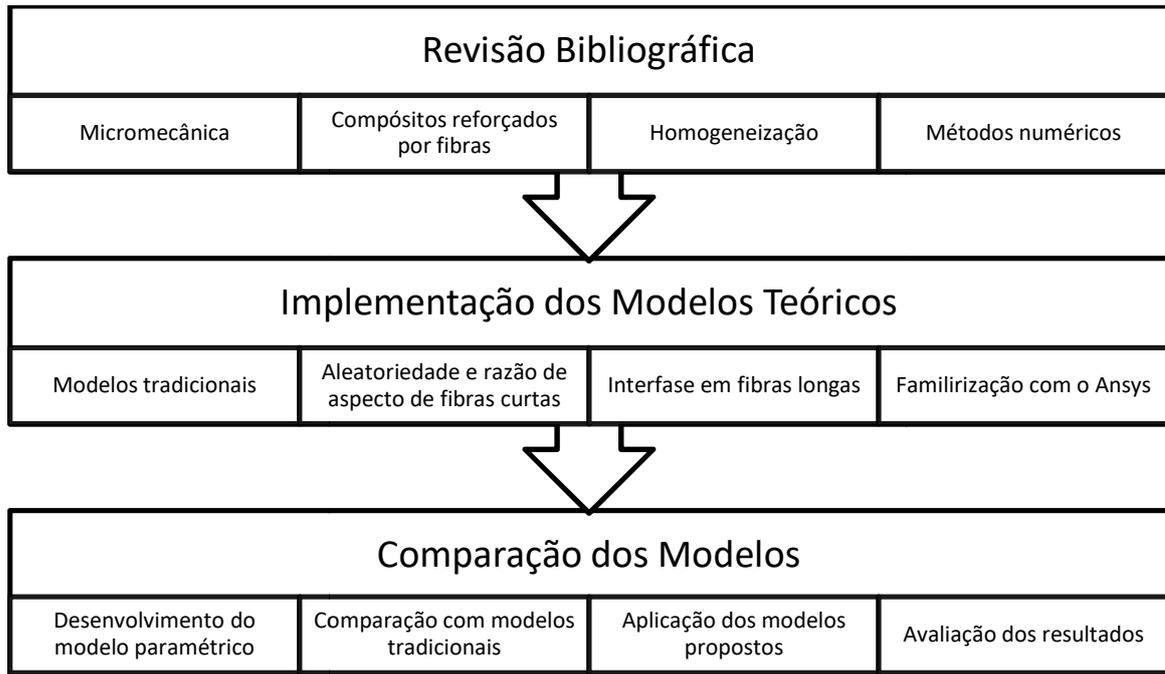
Como objetivos específicos do presente trabalho, podem ser citados os seguintes:

- Aplicar técnicas de homogeneização para compreensão das propriedades efetivas de compósitos com microestrutura randômica e com microestrutura periódica;
- Estudar a influência da direção das fibras curtas nas propriedades efetivas dos compósitos;
- Estudar a influência da interfase no comportamento efetivo de compósitos reforçados por fibras unidirecionais;
- Desenvolver um modelo paramétrico (*template*), utilizando os mecanismos oferecidos pelo Ansys® para geração de células unitárias quadradas e hexagonais para simulação de um material compósito com microestrutura periódica através do método dos elementos finitos.
- Fortalecer a linha de pesquisa voltada para o estudo de novos materiais no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas.

1.2 Metodologia

A metodologia adotada para atingir os objetivos do presente trabalho pode ser dividida em três grandes etapas, conforme ilustrado na Figura 1.1.

Figura 1.1 - Fluxograma da metodologia adotada no presente trabalho



Fonte - Autor, 2017.

A atividade de revisão bibliográfica envolve o estudo da sobre micromecânica, compósitos reforçados por fibras, homogeneização e métodos numéricos. O estudo da micromecânica exige conhecimento de matemática tensorial enquanto métodos numéricos requer conhecimento sobre cálculo integral.

Na segunda etapa é realizada a implementação computacional dos modelos teóricos estudados. Nessa etapa é feito o estudo da estratégia utilizada para levar em conta a aleatoriedade das fibras curtas na matriz e da consideração da razão de aspecto nessas mesmas fibras. Em seguida é realizada a familiarização com o programa comercial Ansys®, para poder compreender seu uso e sua linguagem para construção de malhas; e a familiarização com o *plugin* VAMUCH, ao qual é acoplado ao Ansys® para modelagem de células unitárias. O estudo da estratégia que considera os efeitos de interfase em fibras longas unidirecionais também é executado nesse momento.

Na última etapa desenvolve-se um modelo paramétrico na linguagem do Ansys® para pré-processamento de células unitárias quadrada e hexagonal. Para considerar os efeitos da aleatoriedade e da razão de aspecto de fibras curtas acopla-se aos modelos tradicionais as estratégias estudadas na etapa anterior. Para avaliar os modelos escolhe-se os exemplos a serem modelados, de tal forma que a validação da metodologia adotada tenha como referência outros modelos numéricos, experimentais e teóricos. Para finalizar é feita a simulação

numérica e/ou analítica dos exemplos escolhidos com a discussão dos resultados de cada exemplo.

As abordagens analítica e numérica que consideram a interfase, se apresentam como a principal contribuição do presente trabalho, juntamente com os modelos paramétricos que seguem no apêndice.

1.3 Delimitações do trabalho

Para alcançar os objetivos propostos neste trabalho, alguns pontos importantes são considerados da seguinte maneira: as fases são constituídas por materiais com comportamento elástico; em materiais compósitos reforçados por fibras curtas as mesmas são distribuídas randomicamente, visto que esta é a distribuição mais usual dessas fibras; em materiais compósitos reforçados por fibras longas elas estarão alinhadas na mesma direção; não se considera a presença de interfases para compósitos reforçados por fibras curtas devido à intensa interação entre as interfases das fibras curtas distribuídas randomicamente, tornando a modelagem complexa.

1.4 Estruturação do trabalho

No Capítulo 2 são apresentados conceitos presentes na micromecânica, tais como microestrutura e fase, condições de contorno homogêneas e elemento de volume representativo. Também é apresentado o conceito de célula unitária para estudo de materiais periódicos. Expressões básicas da micromecânica são mostradas nesse capítulo.

No Capítulo 3 são apresentados modelos micromecânicos de campos médios, os quais são aplicados no processo de homogeneização de materiais compósitos reforçados por fibras curtas distribuídas aleatoriamente. São apresentados modelos para determinação de propriedades mecânicas, condutividade térmica e coeficiente de dilatação térmica. Posteriormente, apresenta-se uma formulação para considerar os efeitos da orientação das fibras nas propriedades efetivas. O Capítulo 4 expõe os resultados para os compósitos reforçados por fibras curtas distribuídas aleatoriamente.

No Capítulo 5 são apresentados métodos analíticos e numérico para homogeneização de compósitos com microestrutura periódica. Tais métodos determinam propriedades mecânicas, térmicas e coeficiente de dilatação térmica efetivos. Nesse capítulo são apresentados modelos que consideram o efeito da interfase em tais compósitos. No Capítulo 6 são apresentadas as aplicações dos métodos descritos no capítulo anterior para compósitos com microestrutura periódica.

No Capítulo 7 são apresentadas as conclusões do presente trabalho além das propostas para trabalhos futuros. Em seguida, têm-se as referências bibliográficas e os apêndices (com os códigos que geram células unitárias quadradas e hexagonais).

2. DEFINIÇÕES SOBRE COMPÓSITOS

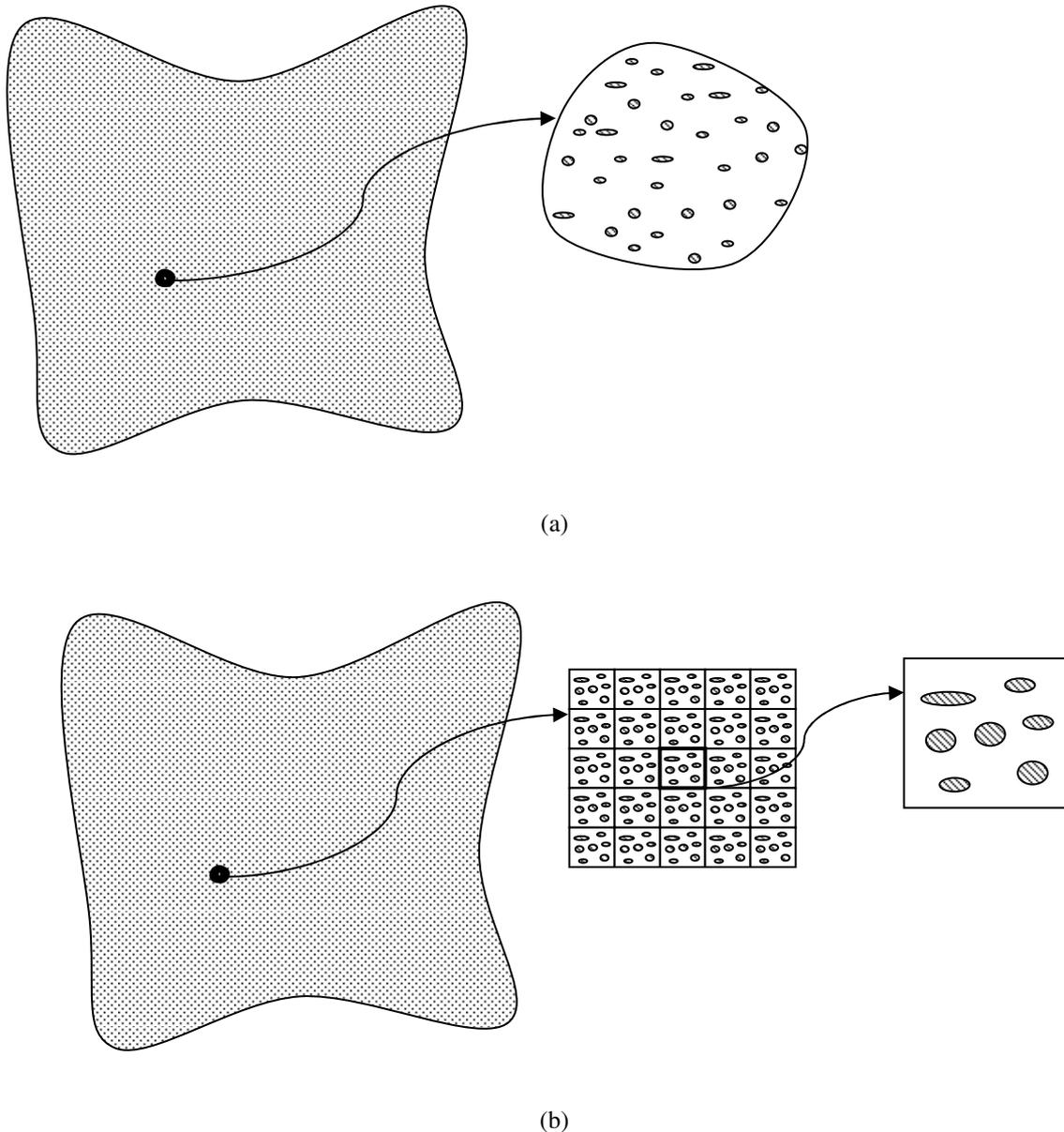
2.1 Considerações iniciais

A mecânica do contínuo e a teoria de transferência de calor clássicas tratam de meios idealizados, onde, considerando um ponto infinitesimal e sua vizinhança, admite-se que a distribuição de material, as tensões, as deformações, o fluxo de calor e o campo de temperatura são essencialmente uniformes (Nemat-Nasser & Hori, 1999). Entretanto, verifica-se que todos os materiais reais revelam uma multiplicidade de heterogeneidades, mesmo se macroscopicamente pareçam ser homogêneos. Estas heterogeneidades podem existir na forma de fissuras, vazios, partículas, inclusões, etc. Consequentemente, tais campos citados não se apresentam de forma uniforme neste nível de escala. O comportamento destas heterogeneidades, bem como os seus efeitos sobre as propriedades e o desempenho global de um material é o objetivo principal das investigações micromecânicas.

2.2 Microestrutura e fases

Muitos problemas de grande importância prática necessitam de soluções envolvendo grandezas e efeitos que se manifestam na microestrutura dos materiais. A avaliação de propriedades efetivas de materiais compósitos está inserida nesse rol de problemas que necessitam de estudos que considerem aspectos microestruturais, tais como geometria, distribuição e interação das fases constituintes. As diversas fases de um compósito, as quais podem ser distribuídas aleatória ou periodicamente na matriz (Figura 2.1), possuem grande influência sobre as propriedades efetivas do material. Uma descrição precisa do relacionamento entre a microestrutura e o comportamento efetivo de um material envolve, em geral, uma complexa análise multiescala.

Figura 2.1 - (a) Compósito com microestrutura randômica caracterizado por um elemento de volume representativo. (b) Compósito com microestrutura periódica definida por uma célula unitária.



Fonte: Autor, 2017.

Usando as técnicas de homogeneização, o comportamento constitutivo macroscópico de um material, caso a condição de homogeneidade estatística seja satisfeita, pode ser obtido através de análises envolvendo escalas menores (Allen, 2001).

A principal limitação dos modelos convencionais está relacionada à hipótese simplificadora de que o tamanho da escala local é muito menor que o tamanho da escala global. Fisicamente, essa hipótese indica que a microestrutura corresponde a um ponto na macroestrutura. De

acordo com Bazant & Planas (1998) essa simplificação impossibilita a modelagem do efeito de tamanho e, segundo Kouznetsova (2002), impossibilita a localização de deformações (alto gradiente de deformações) na escala global, pois o gradiente do campo de deformações se apresenta na mesma ordem de grandeza da microestrutura.

As técnicas de homogeneização são definidas como o processo matemático de determinação das medidas médias atuantes na microestrutura e da relação constitutiva global. Essas técnicas estão baseadas nos teoremas de campos médios (Nemat-Nasser & Hori, 1999). Considerando uma medida qualquer, a média volumétrica da mesma é definida como:

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{V} \int_V f(\mathbf{x}) dV \quad (2.1)$$

onde

$\langle f(\mathbf{x}) \rangle$: média volumétrica da medida,

f : função que define a medida,

\mathbf{x} : vetor de coordenadas,

V : volume do elemento.

Aplicando o teorema da divergência, a integral volumétrica da equação (2.1) torna-se uma integral de superfície. Através desta transformação as estratégias de homogeneização suscitam condições de contorno aplicadas na superfície do elemento.

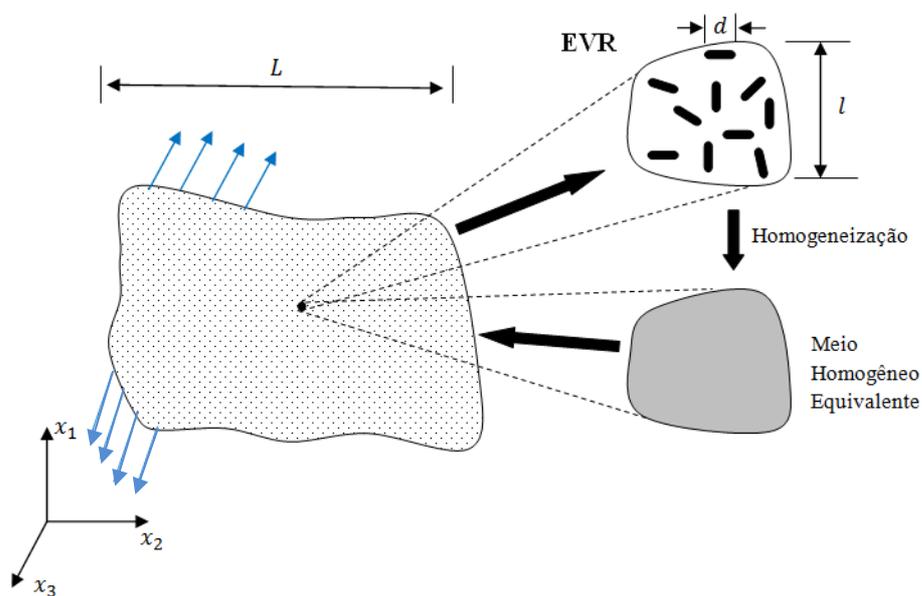
A metodologia abordada no presente trabalho considera uma região do material em que sua microestrutura e as frações volumétricas de cada fase sejam representativas da macroestrutura. Tal abordagem é realizada em mesoescala usando o conceito de Elementos de Volume Representativo (EVR) para compósitos com distribuição randômica e célula unitária para compósitos com distribuição periódica.

2.3. Elemento de volume representativo (EVR)

Técnicas de homogeneização da micromecânica têm como objetivo substituir uma estrutura heterogênea complexa do material por uma homogênea fictícia, ambas apresentando globalmente o mesmo comportamento. O processo de homogeneização está baseado no

conceito de elemento de volume representativo (EVR) e no meio homogêneo equivalente (Figura 2.2), os quais são análogos, ou seja, as suas respostas globais para qualquer campo a eles aplicados devem ser a mesma. Em outras palavras, o meio homogêneo equivalente deve ser tal que os campos de tensão e deformação macroscópicos, deduzidos da escala macroscópica através da resolução de um problema mecânico em uma estrutura homogênea constituída por este material homogêneo fictício, sejam os valores médios, calculados sobre o EVR, dos campos de tensão e deformação locais. Estes, por sua vez, são deduzidos da escala microscópica quando as heterogeneidades da microestrutura são consideradas no processo de cálculo.

Figura 2.2 – Utilização do EVR em processos de homogeneização



Fonte: Autor, 2017.

É necessário que a dimensão característica d das heterogeneidades seja muito menor do que a dimensão característica l do EVR (Figura 2.2). Além disso, l deve ser suficientemente menor que a dimensão característica L da estrutura. É importante ressaltar que a menor dimensão característica d deve ser compatível com o uso das hipóteses adotadas na mecânica do contínuo. A equação seguinte representa a separação de escalas necessária durante o processo de homogeneização (Zaoui, 2002):

$$d_0 \ll d \ll l \ll L \quad (2.2)$$

onde d_0 é a menor dimensão abaixo da qual a mecânica do contínuo não é mais válida.

O EVR é, portanto, o volume ou parte da estrutura do material capaz de representar de forma suficientemente precisa o comportamento global do material, possuindo todas as informações para a descrição geométrica e mecânica do meio heterogêneo.

2.4. Conceitos da micromecânica

A micromecânica de meios efetivos, também denominada de teoria micromecânica de campos médios, admite que os campos de tensões e deformações dentro de cada fase do material compósito podem ser representados por suas médias volumétricas, ou seja, $\langle \boldsymbol{\sigma}_m \rangle$ e $\langle \boldsymbol{\varepsilon}_m \rangle$ para a matriz e $\langle \boldsymbol{\sigma}_i \rangle$ e $\langle \boldsymbol{\varepsilon}_i \rangle$ para as inclusões. O volume do EVR apresenta-se em duas partes: V_m , volume da matriz, V_i , volume da inclusão; sendo que $V_m + V_i = V$, onde V é o volume total do EVR. Então as médias volumétricas da tensão e da deformação na matriz e na fibra podem ser calculadas da seguinte forma:

$$\langle \boldsymbol{\sigma}_m \rangle = \frac{1}{V_m} \int_{V_m} \boldsymbol{\sigma}_m(\boldsymbol{x}) dV \quad (2.3)$$

$$\langle \boldsymbol{\sigma}_i \rangle = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \boldsymbol{\sigma}_i(\boldsymbol{x}) dV \quad (2.4)$$

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}_m \rangle = \frac{1}{V_m} \int_{V_m} \boldsymbol{\varepsilon}_m(\boldsymbol{x}) dV \quad (2.5)$$

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}_i \rangle = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \boldsymbol{\varepsilon}_i(\boldsymbol{x}) dV \quad (2.6)$$

Nas equações acima, \boldsymbol{x} representa o vetor posição de um ponto no interior da fase correspondente.

Pode-se também considerar o volume total do EVR, com isso, as expressões da tensão e da deformação médias no EVR são dadas pelas seguintes equações:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) dV \quad (2.7)$$

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) dV \quad (2.8)$$

Se a matriz e a inclusão se comportam como materiais elásticos, as relações constitutivas entre as tensões e deformações médias podem ser expressas de acordo com as equações abaixo:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \mathbb{C} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \quad (2.9)$$

$$\langle \boldsymbol{\sigma}_m \rangle = \mathbb{C}_m : \langle \boldsymbol{\varepsilon}_m \rangle \quad (2.10)$$

$$\langle \boldsymbol{\sigma}_i \rangle = \mathbb{C}_i : \langle \boldsymbol{\varepsilon}_i \rangle \quad (2.11)$$

onde \mathbb{C} , \mathbb{C}_m , \mathbb{C}_i são respectivamente os tensores de rigidez elástico do material compósito, da matriz e das inclusões.

Através das equações (2.3)-(2.8), obtém-se as seguintes equações para as tensões e deformações médias no compósito em função dos tensores de tensão e deformação médios de cada fase:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{V} \left[\frac{V_m}{V_m} \int_{V_m} \boldsymbol{\sigma}_m(\mathbf{x}) dV + \sum_{i=1}^n \frac{V_i}{V_i} \int_{V_i} \boldsymbol{\sigma}_i(\mathbf{x}) dV \right] \quad (2.12)$$

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{V} \left[\frac{V_m}{V_m} \int_{V_m} \boldsymbol{\varepsilon}_m(\mathbf{x}) dV + \sum_{i=1}^n \frac{V_i}{V_i} \int_{V_i} \boldsymbol{\varepsilon}_i(\mathbf{x}) dV \right] \quad (2.13)$$

Substituindo as equações (2.3)-(2.6) nas equações (2.12) e (2.13), obtêm-se as seguintes expressões:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = f_m \langle \boldsymbol{\sigma}_m \rangle + \sum_{i=1}^n f_i \langle \boldsymbol{\sigma}_i \rangle \quad (2.14)$$

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = f_m \langle \boldsymbol{\varepsilon}_m \rangle + \sum_{i=1}^n f_i \langle \boldsymbol{\varepsilon}_i \rangle \quad (2.15)$$

Nas equações acima, f_m e f representam as frações volumétricas da matriz e das inclusões, respectivamente, sendo estas definidas por

$$f_m = \frac{V_m}{V} \quad (2.16)$$

$$f = \frac{V_i}{V} \quad (2.17)$$

2.4.1. Condições de contorno homogêneas

A formulação do comportamento macroscópico por meio da homogeneização recorre à resolução de um problema auxiliar de contorno colocado sobre o EVR, também conhecido por problema de concentração. Esse problema trata da modelagem mecânica das interações entre as fases do material heterogêneo a ser analisado e da determinação dos campos de tensão e deformação locais no interior do EVR, $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ e $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$, respectivamente, através do conhecimento das tensões e deformações macroscópicas, $\boldsymbol{\Sigma}$ e \mathbf{E} .

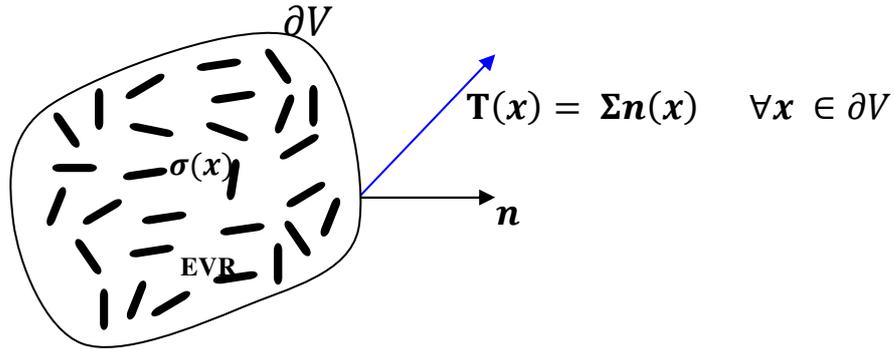
Para resolução desse problema, duas condições de contorno são normalmente adotadas na definição da solitação sobre o EVR: condição de contorno homogênea em deformação ou em tensão.

No caso de condições de contorno homogêneas em tensão, tensões superficiais são admitidas prescritas no contorno \mathbf{T} (Figura 2.3) e definidas por:

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{n}(\mathbf{x}) \quad (2.18)$$

onde o tensor constante $\boldsymbol{\Sigma}$ é o tensor de tensão macroscópica conhecida e $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ é o vetor normal ao contorno do EVR.

Figura 2.3 – Condições de contorno homogêneas em tensão aplicadas no EVR.



Fonte: Autor, 2017.

Aplicando o teorema da divergência na equação (2.7) e considerando as tensões superficiais (2.18) para condições de contorno homogêneas em tensão, a média volumétrica da tensão no EVR é dada por:

$$\langle \sigma \rangle = \frac{1}{\partial V} \oint_{\partial V} \Sigma \mathbf{n}(x) \partial V \quad (2.19)$$

Na equação acima, o tensor de tensão macroscópico Σ é constante, então para condições de contorno homogêneas em tensão, tem-se que:

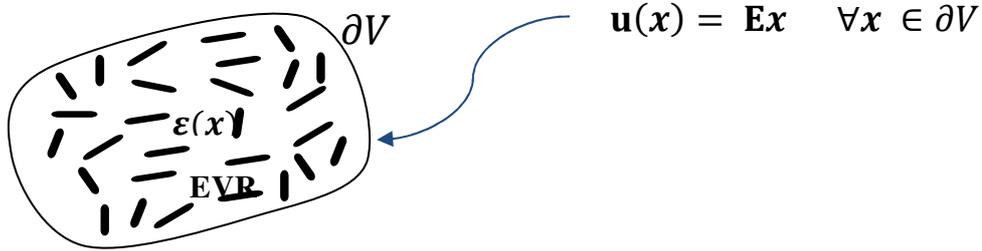
$$\Sigma = \langle \sigma \rangle \quad (2.20)$$

Da mesma forma, condições de contorno homogênea em deformação são associadas a deslocamentos prescritos no contorno \mathbf{u} (Figura 2.4) dados por:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}\mathbf{x} \quad (2.21)$$

onde \mathbf{E} é o tensor constante de deformação macroscópico e \mathbf{x} é um vetor posição do contorno do EVR.

Figura 2.4 – Condições de contorno homogêneas em deformação aplicadas no EVR.



Fonte: Autor, 2017.

Aplicando o teorema da divergência na equação (2.8) e considerando os deslocamentos prescritos no contorno (2.21) para condições de contorno homogêneas em deformação, a média volumétrica da deformação no EVR é dada por:

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{1}{\partial V} \oint_{\partial V} \frac{\partial(\mathbf{E}x)}{\partial x} \partial V \quad (2.22)$$

Como na equação acima o tensor de deformação macroscópico \mathbf{E} é constante, então para condições de contorno homogêneas em deformação, têm-se que:

$$\mathbf{E} = \langle \epsilon \rangle \quad (2.23)$$

Embora, em princípio, as abordagens em tensão homogênea e deformação homogênea não sejam equivalentes, elas tendem a ser quando $d \ll l$ (Hill, 1967; Mandel, 1972).

A relação (2.24), conhecida como Lema de Hill (1967), desempenha um papel fundamental na discussão de propriedades efetivas de materiais compósitos. Segundo Hill (1967), o EVR definido de acordo com seu lema garante uma equivalência energética das condições de contorno homogêneas, no sentido das matrizes constitutivas de rigidez e de flexibilidade do material efetivo poderem ser obtidas a partir da inversão da outra.

$$\langle \sigma : \epsilon(\mathbf{u}) \rangle = \langle \sigma \rangle : \langle \epsilon(\mathbf{u}) \rangle \quad (2.24)$$

Uma definição mais exigente para o EVR é a apresentada por Hill (1967), em que no EVR as condições de contorno homogêneas em tensão produzem condições de contorno homogêneas

em deformação, e reciprocamente, o que acontece somente para alguns modelos da micromecânica.

2.4.2. Tensores de concentração de tensão e deformação

Definem-se como tensores de concentração os tensores que relacionam quantidades médias do compósito com aquelas correspondentes às fases constituintes. No que segue, são deduzidos os tensores de concentração de tensão e de deformação para o caso de compósitos de duas fases.

Através das equações (2.9)-(2.11) e (2.14), pode-se escrever:

$$(\mathbb{C} - \mathbb{C}_m): \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \sum_{i=1}^n f(\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m): \langle \boldsymbol{\varepsilon}_i \rangle \quad (2.25)$$

Analogamente, pode-se determinar uma equação semelhante à Equação (2.25), em termos de tensores de flexibilidade e tensões médias:

$$(\mathbb{D} - \mathbb{D}_m): \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \sum_{i=1}^n f(\mathbb{D}_i - \mathbb{D}_m): \langle \boldsymbol{\sigma}_i \rangle \quad (2.26)$$

Admitindo-se a existência de duas fases, as equações (2.25) e (2.26) são reescritas da seguinte forma:

$$(\mathbb{C} - \mathbb{C}_m): \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = f(\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m): \langle \boldsymbol{\varepsilon}_i \rangle \quad (2.27)$$

$$(\mathbb{D} - \mathbb{D}_m): \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = f(\mathbb{D}_i - \mathbb{D}_m): \langle \boldsymbol{\sigma}_i \rangle \quad (2.28)$$

Isolando os tensores de tensões e deformações da inclusão, obtêm-se as expressões:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}_i \rangle = \frac{1}{f}(\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m)^{-1}: (\mathbb{C} - \mathbb{C}_m): \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \quad (2.29)$$

$$\langle \boldsymbol{\sigma}_i \rangle = \frac{1}{f}(\mathbb{D}_i - \mathbb{D}_m)^{-1}: (\mathbb{D} - \mathbb{D}_m): \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \quad (2.30)$$

Com base nas equações (2.29) e (2.30), definem-se os tensores de concentração de tensão e deformação para a inclusão, respectivamente, através das equações seguintes:

$$\mathbb{A}_i = \frac{1}{f} (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m)^{-1} : (\mathbb{C} - \mathbb{C}_m) \quad (2.31)$$

$$\mathbb{B}_i = \frac{1}{f} (\mathbb{D}_i - \mathbb{D}_m)^{-1} : (\mathbb{D} - \mathbb{D}_m) \quad (2.32)$$

Com isso, pode-se escrever as equações (2.29) e (2.30) da seguinte forma:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}_i \rangle = \mathbb{A}_i : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \quad (2.33)$$

$$\langle \boldsymbol{\sigma}_i \rangle = \mathbb{B}_i : \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \quad (2.34)$$

De forma similar, definem-se os tensores de concentração de deformação \mathbb{A}_m e de tensão \mathbb{B}_m da matriz através das expressões

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}_m \rangle = \mathbb{A}_m : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \quad (2.35)$$

$$\langle \boldsymbol{\sigma}_m \rangle = \mathbb{B}_m : \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \quad (2.36)$$

sendo

$$\mathbb{A}_m = -\frac{1}{f_m} (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m)^{-1} : (\mathbb{C} - \mathbb{C}_i) \quad (2.37)$$

$$\mathbb{B}_m = -\frac{1}{f_m} (\mathbb{D}_i - \mathbb{D}_m)^{-1} : (\mathbb{D} - \mathbb{D}_i) \quad (2.38)$$

Para o caso de compósitos bifásicos, pode-se obter uma relação entre os tensores de concentração de tensão da matriz e da inclusão na forma:

$$f_m \mathbb{B}_m + f \mathbb{B}_i = \mathbb{I} \quad (2.39)$$

Analogamente,

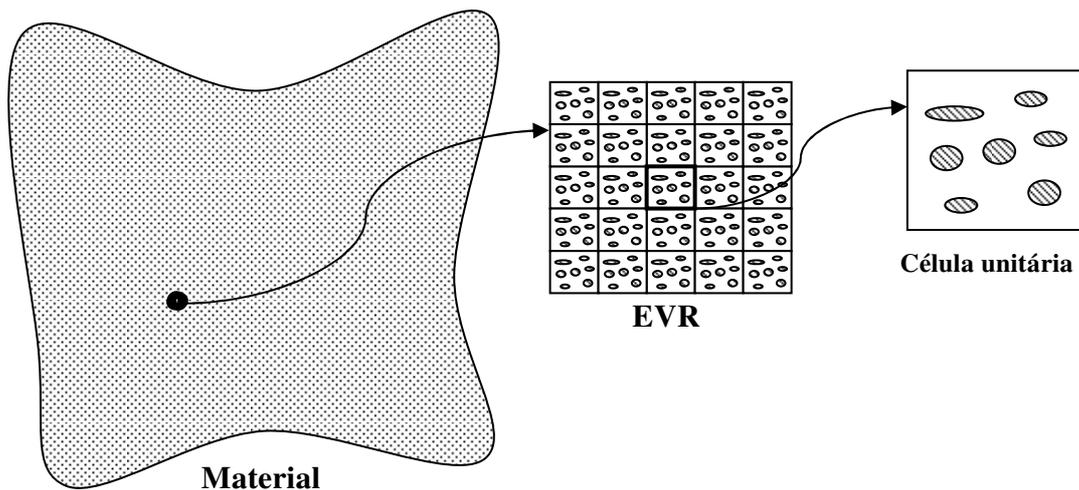
$$f_m \mathbb{A}_m + f \mathbb{A}_i = \mathbb{I} \quad (2.40)$$

2.5. Conceitos de micromecânica aplicados a materiais periódicos

2.5.1. Célula Unitária

Quando se trata de materiais compósitos em que a distribuição de inclusões aparece de forma periódica, o EVR se apresenta como um volume composto por blocos de repetição definidos como células unitárias (Figura 2.5). De acordo com Drago & Pindera (2007), as células unitárias são colocadas lado a lado em uma série infinita, de modo a formar o material heterogêneo. A célula unitária não é uma representação de EVR, pois não atende a desigualdade (2.2), entretanto, um conjunto de células unitárias forma o EVR, como apresentado na Figura 2.5.

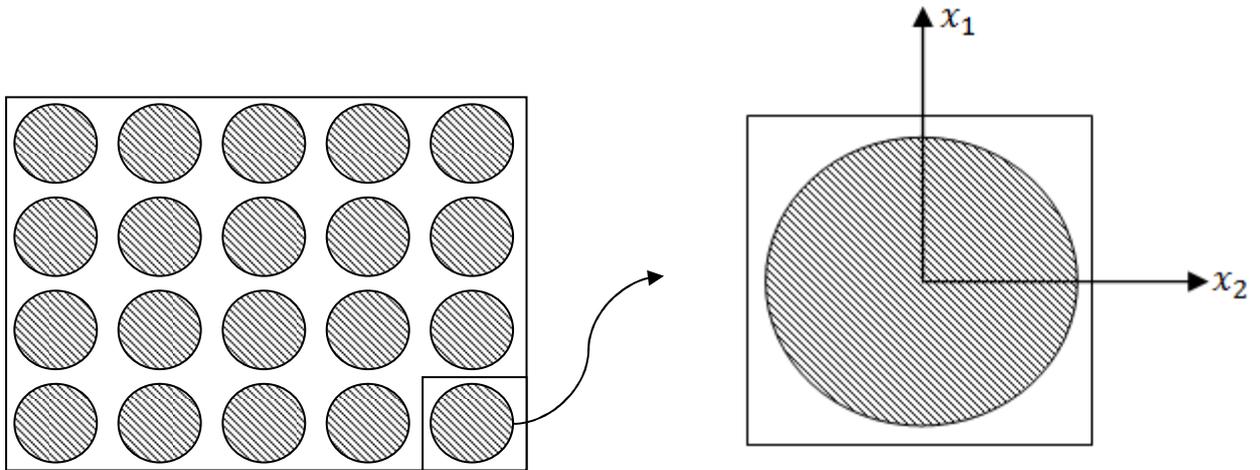
Figura 2.5 – EVR e célula unitária em material compósito periódico.



Fonte: Autor, 2017.

Para compósitos reforçados por fibras unidirecionais, em que as fibras se apresentam de forma periódica na matriz, a célula unitária é obtida com apenas uma fibra. O plano perpendicular ao eixo da fibra é um plano de simetria (Rencis & Huang, 1992). A Figura 2.6 apresenta uma célula unitária de um material compósito reforçado por fibras unidirecionais.

Figura 2.6 – Plano transversal de um material compósito reforçado por fibras contínuas unidirecionais (à esquerda). Célula unitária, em destaque os eixos de coordenadas locais (à direita).



Fonte: Autor, 2017.

Na direção do eixo da fibra, os campos de tensão e de deformação são invariantes. No plano de simetria o campo de deformação independe da coordenada do eixo da fibra. Essa condição é conhecida como estado plano de deformação generalizado. Sendo assim, o campo de deslocamento pode ser expresso como:

$$u = u(x_1, x_2) \quad (2.41)$$

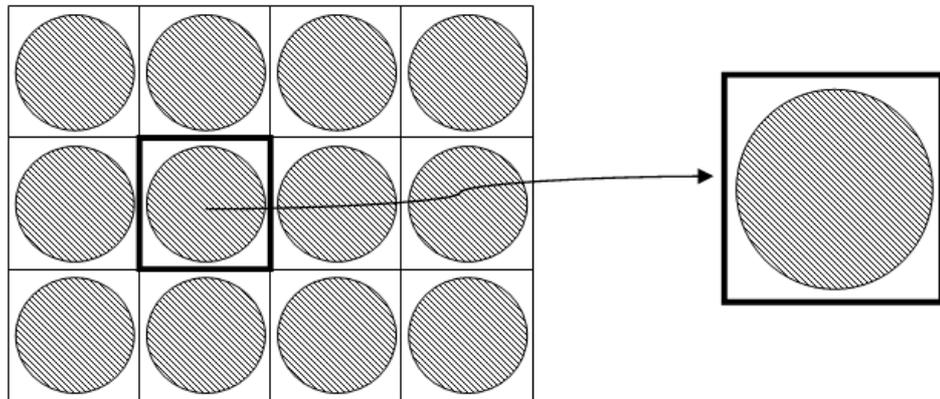
$$v = v(x_1, x_2) \quad (2.42)$$

$$w = \varepsilon_{z0} \cdot x_3 \quad (2.43)$$

onde x_1 e x_2 são coordenadas dos eixos descritos na Figura 2.6 e x_3 é a coordenada do eixo longitudinal da fibra, u , v e w são deslocamentos, sendo que u e v estão contidos no plano de simetria e w no eixo longitudinal, e ε_{z0} é uma deformação constante na direção da fibra.

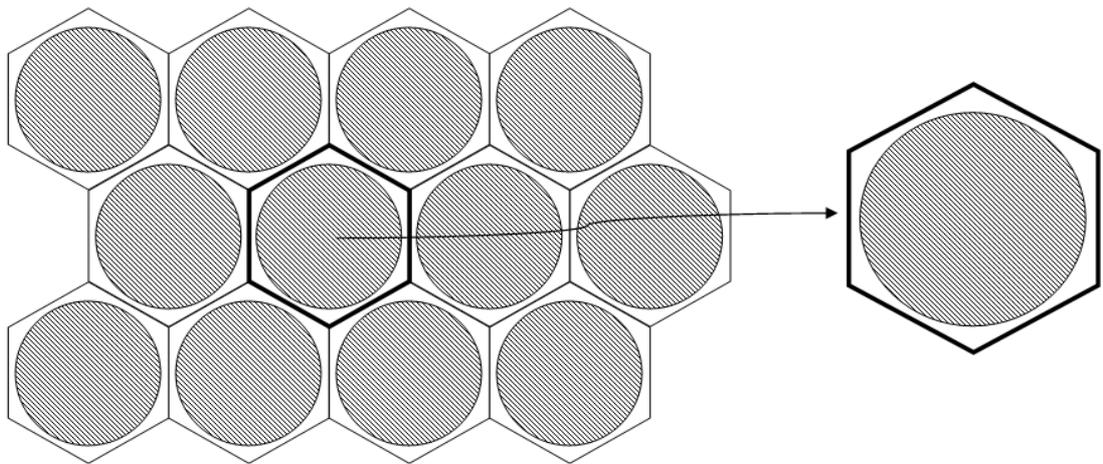
A análise micromecânica de compósitos reforçados por fibras contínuas unidirecionais pode ser simplificada em um problema bidimensional através da condição de estado plano de deformação generalizado descrito anteriormente. A Figura 2.7 e a Figura 2.8 mostram os casos de célula unitária quadrada e célula unitária hexagonal, respectivamente.

Figura 2.7 – Representação de célula unitária quadrada.



Fonte: Autor, 2017.

Figura 2.8 – Representação de célula unitária hexagonal.



Fonte: Autor, 2017.

A fração volumétrica de fibras na célula unitária deverá ser equivalente à encontrada no compósito em análise. Considerando que a fibra possui raio a e que a metade do lado do quadrado ou a apótema do hexágono seja b , tem-se as frações volumétricas de fibras para as células unitárias quadrada e hexagonal, respectivamente dada por:

$$f = \frac{\pi a^2}{4b^2} \quad (2.44)$$

$$f = \frac{\pi a^2}{2\sqrt{3}b^2} \quad (2.45)$$

Cada geometria de célula unitária possui uma fração volumétrica de fibras limite. Tal limite é obtido quando $a = b$, assumindo tal condição, obtém-se as frações volumétricas máximas para células unitárias quadrada e hexagonal, respectivamente:

$$f = \frac{\pi}{4} \approx 78,54\% \quad (2.46)$$

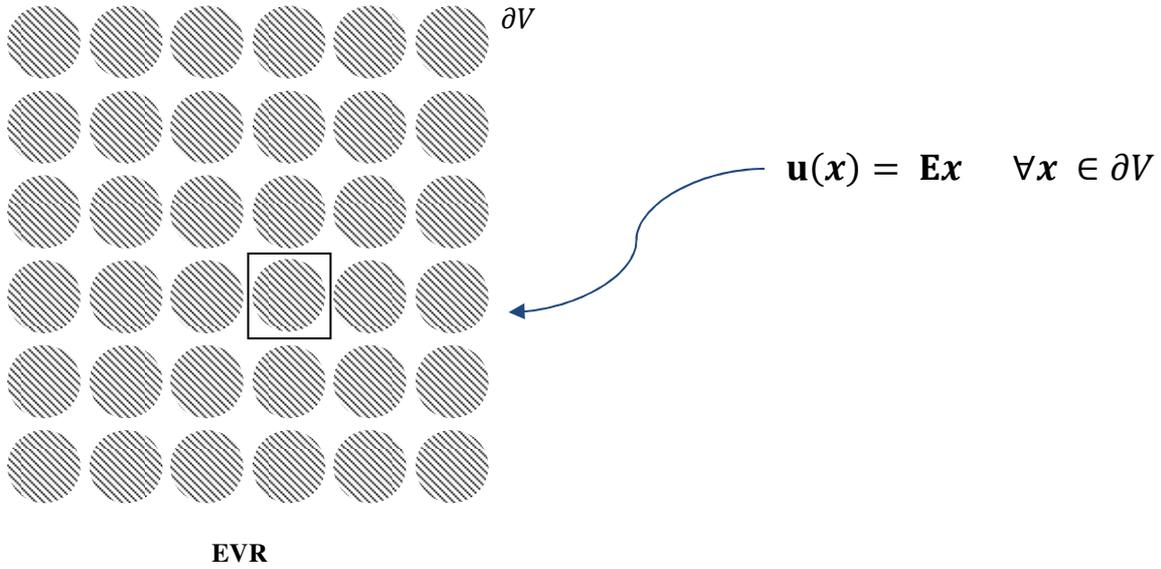
$$f = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 90,69\% \quad (2.47)$$

Comparando as duas geometrias para célula unitária percebe-se que a fração volumétrica máxima no caso hexagonal é maior. Tal geometria também é muito utilizada para representar fibras unidirecionais distribuídas aleatoriamente pelo motivo da condição de isotropia transversal ser melhor representada por essa distribuição.

2.5.2. Condições de contorno homogêneas em compósitos periódicos

Em compósitos periódicos, o EVR se apresenta como um conjunto de células unitárias. A aplicação da condição de contorno homogênea em deformação no EVR (Figura 2.9) faz surgir na célula unitária um campo de deformação. O campo de deformação local $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x})$ pode ser dividido entre a deformação global \mathbf{E} , que seria o campo de deformação real na célula unitária, se fosse homogênea, e uma correção $\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{x})$, que representa a presença de heterogeneidades e a periodicidade no EVR. Esta correção deriva de um campo de deslocamento \boldsymbol{u}^* . Tal deslocamento é periódico, sendo que o período deste deslocamento é o comprimento da célula unitária. A deformação global \mathbf{E} é a deformação do compósito e $\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{x})$ é, portanto, uma variação sobre esta deformação. A deformação perturbadora na célula unitária $\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{x})$ é periódica, visto que deriva de um deslocamento periódico e, assim como o deslocamento, seu período depende do tamanho característico da célula unitária. As equações (2.48) e (2.49) apresentam respectivamente o campo de deslocamento e o campo de deformação que surgem na célula unitária devido à aplicação da condição de contorno homogênea no EVR.

Figura 2.9 – Condição de contorno homogênea em deformação aplicada ao EVR periódico.



Fonte: Autor, 2017.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}\mathbf{x} + \mathbf{u}^*(\mathbf{x}) \quad (2.48)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{E} + \boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{x}) \quad (2.49)$$

Devido a periodicidade de \mathbf{u}^* e $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ todos os componentes de \mathbf{u}^* e $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ possuem valores idênticos em pontos correspondentes no sistema local da célula unitária que são deduzidos pela translação paralela às direções de invariância (Michel *et al.*, 1999).

A deformação média no compósito é obtida aplicando-se a equação (2.1) à equação (2.49), considerando-se o teorema da divergência, tem-se:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{\partial V} \oint_{\partial V} \mathbf{E} \partial V + \frac{1}{\partial V} \oint_{\partial V} \boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{x}) \partial V \quad (2.50)$$

onde a primeira parcela representa a condição de contorno homogênea em deformação similar a equação (2.22), e a segunda parcela representa a deformação perturbadora que surge na célula unitária.

De forma análoga obtém-se:

$$\langle \sigma \rangle = \frac{1}{\partial V} \oint_{\partial V} \Sigma \mathbf{n}(\mathbf{x}) \partial V + \frac{1}{\partial V} \oint_{\partial V} \sigma^* \partial V \quad (2.51)$$

onde σ^* é a tensão perturbadora que surge na célula unitária.

Aplicando condições de contorno periódicas na célula unitária, a parcela devida à perturbação na célula unitária, tanto em deformação quanto em tensão, se torna nula devido à periodicidade. Sendo assim, as equações (2.50) e (2.51) tornam-se as equações (2.22) e (2.19) respectivamente. E as equações (2.20) e (2.23) se tornam válidas para células unitárias.

Sendo assim, métodos analíticos ou numéricos que utilizam células unitárias para determinação de propriedades efetivas de compósitos periódicos, consideram a célula unitária em estado plano de deformação e aplicam condições de contorno periódicas à mesma. Tais condições permitem que as condições de contorno homogêneas aplicadas ao EVR possam obter a resposta efetiva do material.

3. MODELOS MICROMECAÑICOS DE CAMPOS MÉDIOS

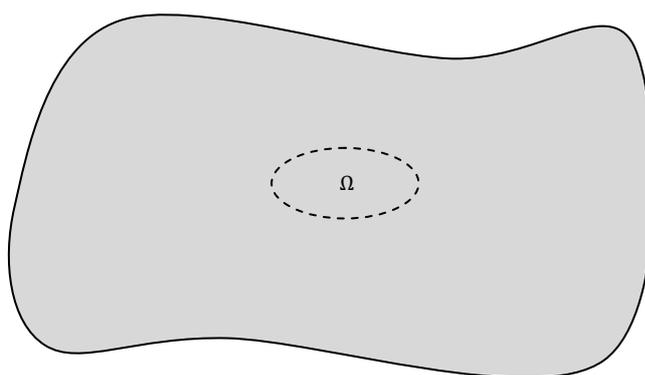
3.1 Considerações iniciais

Neste capítulo são apresentados vários modelos para determinação de propriedades efetivas de compósitos reforçados por fibras curtas. Tais modelos, em sua maioria, são baseados na abordagem proposta por Eshelby (1957), conhecida como teoria de homogeneização de campos médios. Além disto, apresenta-se também uma metodologia para consideração da orientação randômica das fibras. Vale ressaltar que os modelos clássicos fundamentados na teoria de campos médios são formulados para fibras com a mesma orientação.

3.2 Problema da inclusão equivalente

Inicialmente, Eshelby (1957) considerou um corpo homogêneo, elástico e infinito, contendo em seu interior uma região pequena elipsoidal Ω constituída pelo mesmo material (Figura 3.1).

Figura 3.1 – Problema da inclusão elipsoidal de Eshelby

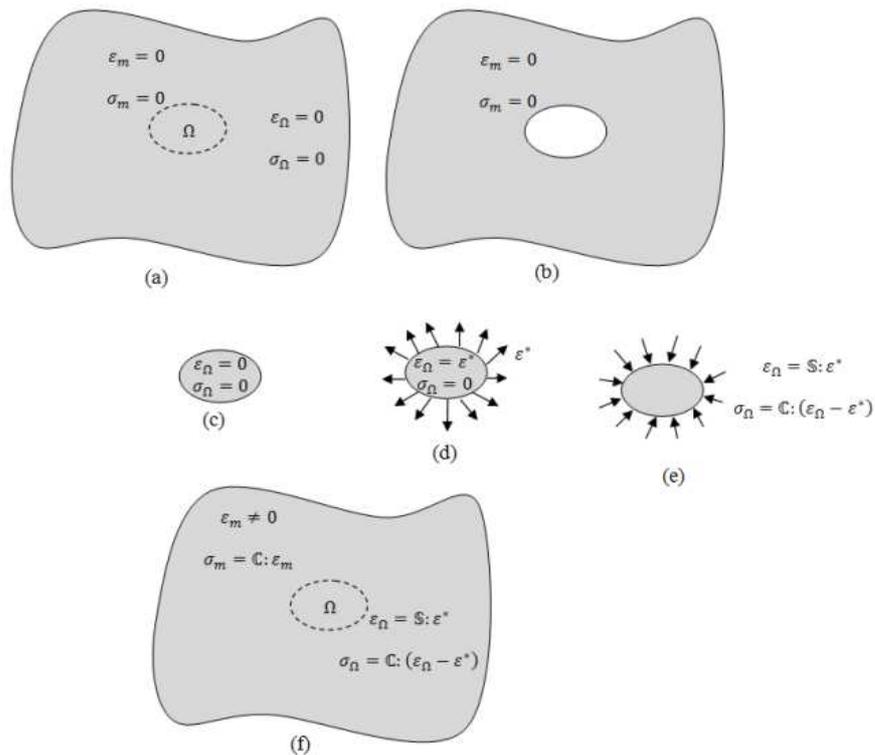


Fonte – Autor, 2017.

Admitiu-se que a região Ω sofra uma transformação geométrica tal que, na ausência do material circundante corresponderia a uma deformação homogênea arbitrária $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ (*eigstrain*). Eshelby (1957) resolveu o problema de determinação dos campos de tensão e deformação do

corpo e do elipsoide, devidos à presença de $\boldsymbol{\varepsilon}^*$, usando artifícios estratégicos de corte, deformação, colagem e remoção de forças (Figura 3.2).

Figura 3.2 – Resolução do problema de Eshelby: (a) problema inicial; (b) e (c) corte; (d) aplicação do campo de deformação arbitrário; (e) aplicação de forças para que a inclusão volte ao estado original; (f) colagem.



Fonte – Autor, 2017.

Com a resolução desse problema, Eshelby obteve a relação a seguir:

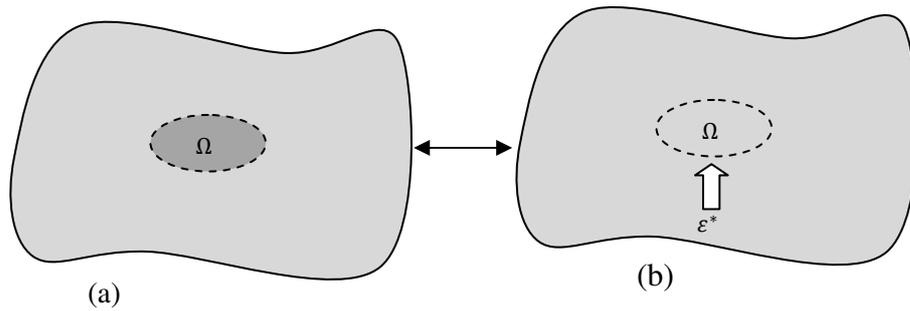
$$\boldsymbol{\varepsilon}^\Omega = \mathbb{S} : \boldsymbol{\varepsilon}^* \quad (3.1)$$

onde, para relacionar a deformação que ocorre na inclusão $\boldsymbol{\varepsilon}_\Omega$ com a deformação imposta $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ (*eingstrain*), é deduzido um tensor de 4ª ordem \mathbb{S} , denominado tensor de Eshelby.

Eshelby (1957) concluiu também que ao aplicar uma condição de contorno homogênea em deformação (ver seção 2.4.1), o campo de deformação na inclusão elipsoidal é uniforme. Tal conclusão tem grande importância na determinação das propriedades efetivas de compósitos, como mostrado neste capítulo.

No problema inicial de Eshelby, tanto a inclusão como a matriz eram constituídas pelo mesmo material. Porém, no caso de compósitos reais, as inclusões (fibras ou partículas) são constituídas por materiais diferentes da matriz. Eshelby transformou o problema da inclusão com material diferente da matriz no seu problema inicial; para isso substituiu a inclusão real por uma equivalente de mesmo material da matriz e impôs a ela um campo de deformação uniforme $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ (Figura 3.3).

Figura 3.3 – Método da inclusão equivalente.



Fonte – Autor, 2017.

Eshelby, para obter a solução para o problema da inclusão equivalente, determinou o campo de deformação uniforme $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ que deve ser imposto na inclusão, considerada como constituída pelo material da matriz (Figura 3.3(b)), para que os campos de tensão e de deformação resultantes na mesma coincidam com aqueles gerados dentro da inclusão do problema original (Figura 3.3(a)). A relação entre a deformação dentro da inclusão $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ e a *eigenstrain* $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ foi obtida na seguinte forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \mathbb{C}_m^{-1} : (\mathbb{C} - \mathbb{C}_i) : \boldsymbol{\varepsilon}_i \quad (3.2)$$

Com as relações (3.1) e (3.2), as expressões para os tensores de concentração de deformação e de tensão na inclusão podem ser expressas, respectivamente, como:

$$\mathbb{A}_i = [\mathbb{I} - \mathbb{S} : \mathbb{C}_m^{-1} : (\mathbb{C}_m - \mathbb{C}_i)]^{-1} \quad (3.3)$$

$$\mathbb{B}_i = \mathbb{C}_i : [\mathbb{I} - \mathbb{S} : \mathbb{C}_m^{-1} : (\mathbb{C}_m - \mathbb{C}_i)]^{-1} : \mathbb{D} \quad (3.4)$$

O problema de Eshelby, apresentado acima, envolve apenas uma inclusão, enquanto que nos compósitos reais, em geral, existem muitas inclusões e, dependendo da distância entre elas, o efeito de suas interações deverá ser considerado. O método de Eshelby é utilizado como base

por vários autores para formular novos modelos que considerem tal efeito sobre as propriedades efetivas do compósito e de seus campos de tensão e deformação. Além disso, o método da inclusão equivalente considera materiais elásticos lineares, sendo modificado por outros autores visando a consideração de materiais elásticos não lineares, como Hill (1967) e Suquet (1997).

O tensor de Eshelby depende da geometria da inclusão e do material da matriz, e se apresenta na seguinte forma geral:

$$S = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{2211} & S_{2222} & S_{2233} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{3311} & S_{3322} & S_{3333} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{2323} & 0 & 0 & S_{2332} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{3131} & 0 & 0 & S_{3113} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{1212} & 0 & 0 & S_{1221} \\ 0 & 0 & 0 & S_{3223} & 0 & 0 & S_{3232} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{1331} & 0 & 0 & S_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{2112} & 0 & 0 & S_{2121} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

cujas componentes exibem as seguintes simetrias:

$$S_{ijkl} = S_{jikl} = S_{ijlk} \quad (3.6)$$

e, em geral,

$$S_{ijkl} = S_{klij} \quad (3.7)$$

Usando geometrias particulares ou aproximações geométricas do elipsóide, o tensor de Eshelby pode ser obtido para outros tipos de inclusões, tais como: esféricas, cilíndricas e discos achatados.

Considerando os parâmetros geométricos do elipsóide mostrado na Figura 3.4, as componentes do tensor de Eshelby podem ser expressas genericamente por:

$$S_{ijij} = \frac{1}{2}Q(r_i^2 + r_j^2)I_{ij} + \frac{1}{2}R(I_i + I_j) \quad (3.8)$$

$$S_{iijj} = Qr_j^2 I_{ij} + RI_i \quad \text{para } i \neq j \quad (3.9)$$

sendo

$$Q = \frac{3}{8\pi(1 - \nu_m)} \quad (3.10)$$

$$R = \frac{1 - 2\nu_m}{8\pi(1 - \nu_m)} \quad (3.11)$$

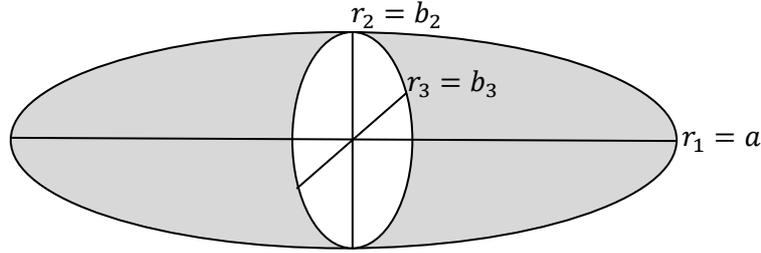
$$I_i = 2\pi a b_2 b_3 \int_0^\infty \frac{du}{(r_i^2 + u)\Delta} \quad (3.12)$$

$$I_{ii} = 2\pi a b_2 b_3 \int_0^\infty \frac{du}{(r_i^2 + u)^2 \Delta} \quad (3.13)$$

$$I_{ij} = \frac{2}{3} \pi a b_2 b_3 \int_0^\infty \frac{du}{(r_i^2 + u)(r_j^2 + u)\Delta} \quad (i \neq j) \quad (3.14)$$

$$\Delta = (a^2 + u)^{\frac{1}{2}} (b_2^2 + u)^{\frac{1}{2}} (b_3^2 + u)^{\frac{1}{2}} \quad (3.15)$$

Figura 3.4 – Parâmetros geométricos da inclusão elipsoidal.



Fonte – Autor, 2017.

Para fibras cilíndricas curtas, têm-se $r_2 = r_3 = d/2$ e $r_1 = l$; sendo d o diâmetro da fibra e l o comprimento da fibra. A razão de aspecto é definida como $r = d / l$. Neste caso, as componentes do tensor de Eshelby são dadas por:

$$S_{1111} = \frac{2 - \nu_m}{1 - \nu_m} r^2 \left(\ln(2/r) - \frac{5 - 2\nu_m}{2(2 - \nu_m)} \right) \quad (3.16)$$

$$S_{2222} = \frac{5 - 4\nu_m}{8(1 - \nu_m)} - \frac{1 - 2\nu_m}{4(1 - \nu_m)} r^2 \left(\ln(2/r) - \frac{1 - 8\nu_m}{4(1 - 2\nu_m)} \right) \quad (3.17)$$

$$S_{2211} = \frac{\nu_m}{2(1 - \nu_m)} - \frac{1 + \nu_m}{2(1 - \nu_m)} r^2 \left(\ln(2/r) - \frac{3 + 2\nu_m}{2(1 + \nu_m)} \right) \quad (3.18)$$

$$S_{2233} = \frac{1 - 4\nu_m}{8(1 - \nu_m)} - \frac{1 - 2\nu_m}{4(1 - \nu_m)} r^2 \left(\ln(2/r) - \frac{5 - 8\nu_m}{4(1 - 2\nu_m)} \right) \quad (3.19)$$

$$S_{1122} = -\frac{1 - 2\nu_m}{2(1 - \nu_m)} r^2 \left(\ln(2/r) - \frac{3 - 4\nu_m}{2(1 - 2\nu_m)} \right) \quad (3.20)$$

$$S_{2323} = \frac{3 - 4\nu_m}{8(1 - \nu_m)} \quad (3.21)$$

$$S_{1212} = \frac{1}{4} \quad (3.22)$$

3.3. Modelos micromecânicos para sólidos elásticos

Neste tópico são apresentados os modelos micromecânicos utilizados no presente trabalho para determinação de propriedades efetivas mecânicas de sólidos elásticos. Todos os modelos consideram que a matriz e as fibras são constituídos por material elástico linear.

3.3.1. Modelo de Mori-Tanaka

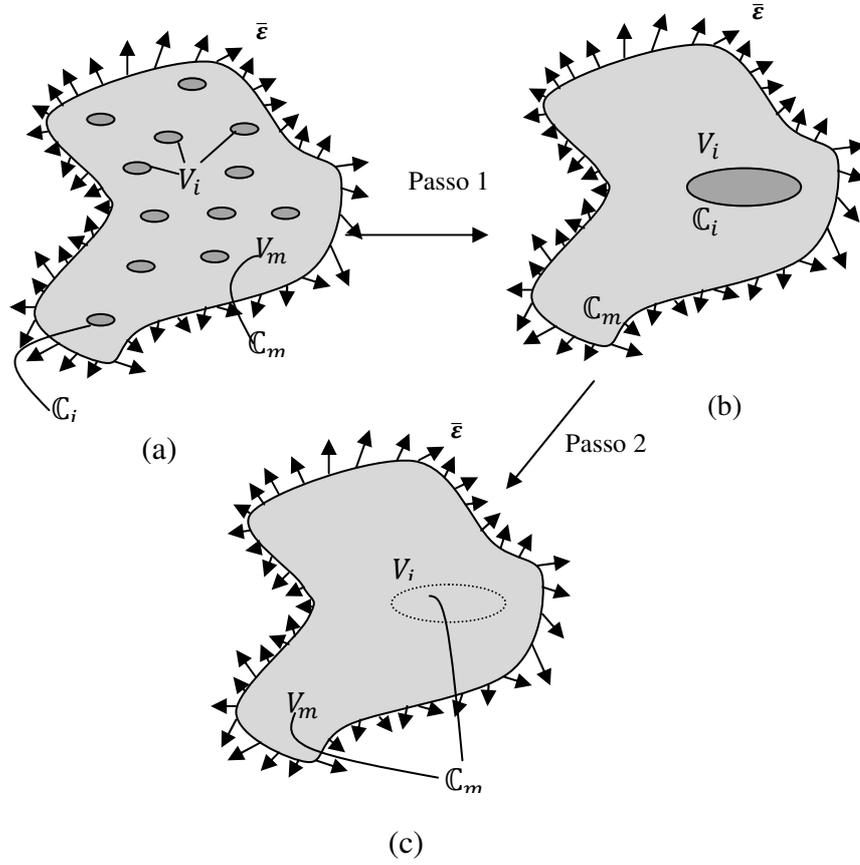
Mori & Tanaka (1973) desenvolveram um lema que mostra que a deformação média numa matriz elipsoidal circunscrita a uma inclusão também elipsoidal é nula desde que seja imposto um campo de deformação uniforme $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ na inclusão.

A partir deste lema, Mori & Tanaka (1973) propuseram um modelo em que a inclusão é submetida a um campo de deformação homogêneo $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ e o material heterogêneo a uma perturbação $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ não uniforme devido às interações entre as inclusões. A metodologia de homogeneização correspondente a este modelo é executada em dois passos:

Passo 1 - o material compósito é substituído por outro contendo uma única inclusão, com a mesma fração volumétrica e condições de contorno (Figura 3.5);

Passo 2 - Aplica-se o método da inclusão equivalente para homogeneização do compósito. A Figura 3.5 apresenta um esquema ilustrativo destes passos.

Figura 3.5 – Representação do modelo de Mori-Tanaka: (a) EVR, (b) Aplicação do método da inclusão equivalente (c) Material homogeneizado.



Fonte – Autor, 2017.

Os tensores de concentração de deformação da inclusão e da matriz do modelo de Mori-Tanaka são expressos, respectivamente, por:

$$\mathbb{A}_i = [\mathbb{I} - \mathbb{S} : (\mathbb{C}_m^{-1}) : (\mathbb{C}_m - \mathbb{C}_i)]^{-1} \quad (3.23)$$

$$\mathbb{A}_m = [f \mathbb{A}_i + (1 - f) \mathbb{I}]^{-1} \quad (3.24)$$

Pode-se escrever uma expressão para o tensor de rigidez do material efetivo como segue:

$$\mathbb{C}^{hom} = [f \mathbb{C}_i : \mathbb{A}_i + (1 - f) \mathbb{C}_m] : \mathbb{A}_m \quad (3.25)$$

3.3.2. Modelo Auto-Consistente

O modelo auto-consistente (Hill,1965; Budiansky, 1965; Berryman 1980 a,b), assim como o modelo anterior, utiliza o método da inclusão equivalente. Considerando as várias inclusões elipsoidais como sendo uma inclusão única, com mesma fração volumétrica, envolvida por uma matriz infinita, como ilustrado na Figura 3.6.

A homogeneização realizada por esse modelo se dá em dois passos: no primeiro o compósito real é substituído por outro com inclusão única, com mesma fração volumétrica, envolvida por matriz infinita constituída por um material homogeneizado efetivo com as propriedades efetivas do compósito real; no segundo passo é aplicado o método da inclusão equivalente de Eshelby

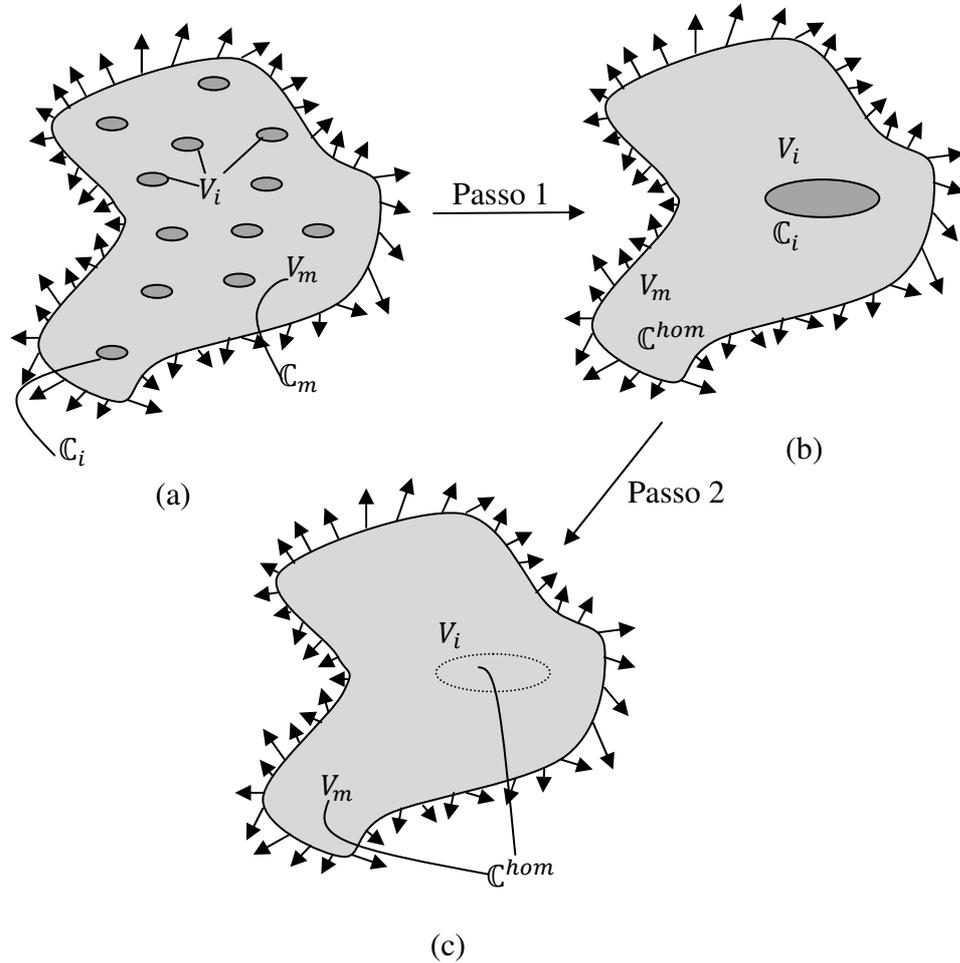
Aplicando o método da inclusão equivalente (Equação 3.3), considerando-se a substituição das propriedades da matriz pelas propriedades efetivas \mathbb{C}^{hom} o tensor de concentração de deformação na inclusão expresso por:

$$\mathbb{A}_i = [\mathbb{I} - \mathbb{S}^{hom} : (\mathbb{C}^{hom})^{-1} : (\mathbb{C}^{hom} - \mathbb{C}_i)]^{-1} \quad (3.26)$$

Usando as equações 3.26 e 2.41, é obtida uma representação implícita do tensor de rigidez efetiva na forma da equação algébrica não-linear:

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}_m + f_i(\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m) : [\mathbb{I} - \mathbb{S}^{hom} : (\mathbb{C}^{hom})^{-1} : (\mathbb{C}^{hom} - \mathbb{C}_i)]^{-1} \quad (3.27)$$

Figura 3.6 – Processo de homogeneização utilizado no modelo auto-consistente: (a) EVR, (b) compósito com uma única inclusão inserida em matriz constituída do material homogêneo efetivo e (c) material equivalente homogeneizado.



Fonte – Autor, 2017.

Devido à formulação matemática implícita do modelo auto-consistente, pode-se utilizar uma estratégia iterativa de solução descrita pela expressão de recorrência abaixo:

$$\mathbb{C}_{n+1}^{hom} = \mathbb{C}_m + f_i(\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m) : [\mathbb{I} - \mathbb{S}_n^{hom} : (\mathbb{C}_n^{hom})^{-1} : (\mathbb{C}_n^{hom} - \mathbb{C}_i)]^{-1} \quad (3.28)$$

onde $n + 1$ indica o número do passo iterativo.

Nesse procedimento iterativo podem-se adotar as seguintes condições iniciais:

$$\mathbb{C}_1^{hom} = \mathbb{C}_m \quad (3.29)$$

$$\mathbb{S}_1^{hom} = \mathbb{S} \quad (3.30)$$

e o critério de convergência

$$\frac{\|C_n^{hom} - C_{n-1}^{hom}\|}{\|C_{n-1}^{hom}\|} \leq tol \quad (3.31)$$

onde tol é a tolerância adotada.

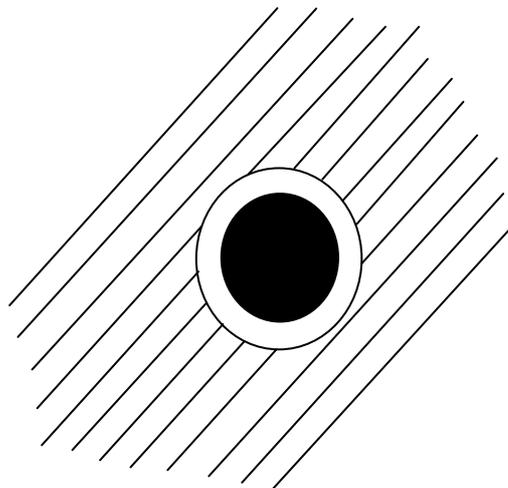
Pode ser mostrado que no método auto-consistente, as propriedades efetivas do compósito não se alteram com a permutação das fases (matriz e inclusão).

3.3.3. Auto-consistente generalizado

O modelo auto-consistente generalizado, originalmente deduzido por Christensen & Lo (1979) e depois por Christensen (1990), apresenta uma estratégia de homogeneização mais elaborada em relação ao método auto-consistente. Diferente do modelo anterior, que considera a inclusão inserida em um meio efetivo infinito, este modelo considera a inclusão envolvida por uma camada de matriz, que é inserida em um meio efetivo infinito.

O modelo auto-consistente generalizado foi deduzido para inclusões esféricas ou cilíndricas, sendo a região anular constituído pelo material da matriz com a mesma geometria da inclusão (Figura 3.7). Por ser composta por inclusão, matriz e meio efetivo, esta metodologia também é conhecida como modelo de três fases.

Figura 3.7 – Representação do modelo auto-consistente generalizado (Inclusão - região central; matriz – região anelar e material efetivo - região mais externa).



Fonte – Autor, 2017.

Christensen & Lo (1979) deduziram o modelo auto-consistente generalizado com base na teoria da elasticidade, diferentemente daqueles anteriores que são baseados na teoria de campos médios. Como consequência, este modelo não faz uso do tensor de Eshelby.

O módulo de cisalhamento efetivo é encontrado através da solução positiva da equação quadrática abaixo:

$$A \left(\frac{\mu^{hom}}{\mu_m} \right)^2 + B \left(\frac{\mu^{hom}}{\mu_m} \right) + C = 0 \quad (3.32)$$

onde A, B e C são constantes que dependem das propriedades elásticas μ_m , μ_i , ν_m , ν_i e da fração volumétrica de inclusão f . As expressões para essas três constantes dependem da geometria da inclusão.

Para as aplicações em compósitos com fibras longas cilíndricas, os coeficientes do modelo auto-consistente generalizado, apresentados na equação (3.32), são dados pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned} A = & 3f_i(1 - f_i)^2 \left[\frac{\mu_i}{\mu_m} - 1 \right] \left[\frac{\mu_i}{\mu_m} + \eta_i \right] \\ & + \left[\frac{\mu_i}{\mu_m} \eta_m + \eta_i \eta_m - \left(\frac{\mu_i}{\mu_m} \eta_m - \eta_i \right) f_i^3 \right] \left[\eta_m f_i \left(\frac{\mu_i}{\mu_m} - 1 \right) \right. \\ & \left. - \left(\frac{\mu_i}{\mu_m} \eta_m + 1 \right) \right] \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} B = & -6f_i(1 - f_i)^2 \left[\frac{\mu_i}{\mu_m} - 1 \right] \left[\frac{\mu_i}{\mu_m} + \eta_i \right] \\ & + \left[\frac{\mu_i}{\mu_m} \eta_m + \left(\frac{\mu_i}{\mu_m} - 1 \right) f_i + 1 \right] \left[(\eta_m - 1) \left(\frac{\mu_i}{\mu_m} + \eta_i \right) \right. \\ & \left. - 2f_i^3 \left(\frac{\mu_i}{\mu_m} \eta_m - \eta_i \right) \right] \\ & + (\eta_m + 1) f_i \left[\frac{\mu_i}{\mu_m} - 1 \right] \left[\frac{\mu_i}{\mu_m} + \eta_i + \left(\frac{\mu_i}{\mu_m} \eta_m - \eta_i \right) f_i^3 \right] \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned}
C = 3f_i(1 - f_i)^2 & \left[\frac{\mu_i}{\mu_m} - 1 \right] \left[\frac{\mu_i}{\mu_m} + \eta_i \right] \\
& + \left[\frac{\mu_i}{\mu_m} \eta_m + \left(\frac{\mu_i}{\mu_m} - 1 \right) f_i + 1 \right] \left[\frac{\mu_i}{\mu_m} + \eta_i \right. \\
& \left. + \left(\frac{\mu_i}{\mu_m} \eta_m - \eta_i \right) f_i^3 \right]
\end{aligned} \tag{3.35}$$

sendo $\eta_m = (3 - 4v_m)$ e $\eta_i = (3 - 4v_i)$.

As expressões das constantes da equação (3.32) para inclusões esféricas podem ser encontradas no trabalho de Christensen & Lo (1979).

3.3.4. Esquema Diferencial

O modelo conhecido como esquema diferencial tem como fundamento uma ideia semelhante àquela do modelo auto-consistente, entretanto, é feita em passos diferenciais. A metodologia desenvolvida no esquema diferencial incrementa a fração volumétrica da inclusão em passos diferenciais.

Esse modelo é descrito por uma equação diferencial ordinária não-linear em que o tensor de rigidez efetivo é uma função da fração volumétrica da inclusão. A equação que rege o modelo esquema diferencial pode ser escrita na forma

$$\frac{d\mathbb{C}^{hom}}{df} = \frac{1}{1-f} (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}^{hom}(f)) : \mathbb{A}_i \tag{3.36}$$

onde

$$\mathbb{A}_i = \{\mathbb{I} - \mathbb{S} : (\mathbb{C}^{hom})^{-1} : (\mathbb{C}^{hom} - \mathbb{C}_i)\}^{-1} \tag{3.37}$$

Como condição inicial do processo incremental, usualmente adota-se:

$$\mathbb{C}^{hom}(0) = \mathbb{C}_m \tag{3.38}$$

3.4. MODELOS MICROMECAˆNICOS PARA CONDUTIVIDADE TÉRMICA

A seguir, são apresentados os modelos micromecânicos utilizados no presente trabalho, para determinacao de condutividade térmica efetiva. Todos os modelos consideram que a matriz e as inclusoes, que no caso são fibras, são constituídos por material elástico.

3.4.1. Modelo de Mori-Tanaka adaptado por Hatta & Taya (1986)

O modelo de Mori & Tanaka (1973) apresentado anteriormente foi formulado para determinacao de propriedades mecânicas efetivas. Para o caso de condutividade térmica efetiva, Hatta & Taya (1986) apresentaram uma analogia do método da inclusão equivalente de Eshelby (1957). Na deducao, tais autores consideraram as seguintes analogias:

$$\sigma_{ij} \leftrightarrow q_i \quad (3.39)$$

$$\varepsilon_{ij} \leftrightarrow T_i \quad (3.40)$$

$$C_{ijkl} \leftrightarrow K_{ij} \quad (3.41)$$

Aplicando o método da inclusão equivalente para condutividade térmica, Hatta & Taya (1986) deduz o modelo, análogo ao de Mori-Tanaka, para determinacao de condutividade térmica efetiva através das seguintes equações:

$$\mathbb{A}_i = [\mathbb{I} - \mathbb{S}_t : (K_m^{-1}) : (K_m - K_i)]^{-1} \quad (3.42)$$

$$\mathbb{A}_m = [f\mathbb{A}_i + (1 - f)\mathbb{I}]^{-1} \quad (3.43)$$

onde \mathbb{S}_t é o tensor de Eshelby para condutividade térmica. Para o caso de inclusoes esféricas tal tensor é definido por:

$$S_{1111} = S_{2222} = S_{3333} = \frac{1}{2} \quad (3.44)$$

sendo nulas as demais componentes.

Assim, pode-se escrever uma expressão para o tensor de condutividade térmica do material efetivo como segue:

$$K^{hom} = [fK_i: A_i + (1 - f)K_m]: A_m \quad (3.45)$$

3.4.2. Modelo de Hashin

Usando as mesmas analogias descritas em (3.40) - (3.42), Hashin (1983) desenvolveu um modelo para determinação da condutividade térmica. Tal modelo considera que o gradiente de temperatura na inclusão é uniforme para inclusão elipsoidal submetida a um campo de temperatura linear.

Esse modelo analítico considera compósitos macroscopicamente isotrópicos e compósitos transversalmente isotrópicos, ou seja, compósitos reforçados por fibras curtas distribuídas aleatoriamente e por fibras longas unidirecionais, respectivamente. Para o caso de fibras curtas a expressão deduzida por Hashin (1983) é apresentada a seguir:

$$K^{hom} = K_m + \frac{f_i}{\frac{1}{K_i - K_m} + \frac{f_m}{K_m}} \quad (3.46)$$

3.5. Modelos micromecânicos para coeficiente de dilatação térmica

A seguir, são apresentados os modelos micromecânicos utilizados no presente trabalho, para determinação do coeficiente de dilatação térmica efetiva. Todos os modelos consideram que a matriz e as inclusões, que no caso são fibras, são constituídos por material elástico linear.

3.5.1 Modelo de Mori-Tanaka

Em um material homogêneo com uma matriz de coeficientes de dilatação α , ao aplicar uma variação de temperatura constante ΔT , resulta uma deformação térmica uniforme dada por:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \boldsymbol{\alpha} \Delta T \quad (3.47)$$

Em um EVR constituído de matriz e inclusões com a mudança uniforme de temperatura, surge na matriz uma deformação média perturbadora $\langle \boldsymbol{\varepsilon}_m \rangle$ devido à presença de inclusões na matriz. Para esta deformação perturbadora, tem-se uma tensão média $\langle \boldsymbol{\sigma}_m \rangle$, dada por

$$\langle \bar{\sigma}_m \rangle = \mathbb{C}_m : \langle \bar{\epsilon}_m \rangle \quad (3.48)$$

onde \mathbb{C}_m representa o tensor de rigidez elástico da matriz.

De modo análogo, define-se uma deformação e uma tensão perturbadora na inclusão. E, de acordo com o método da inclusão equivalente, a soma das tensões médias da matriz e das inclusões é dada por:

$$\langle \bar{\sigma}_m \rangle + \langle \bar{\sigma}_i \rangle = \mathbb{C}_i : (\langle \bar{\epsilon}_m \rangle + \langle \bar{\epsilon}_i \rangle - \epsilon_{\Delta T}) = \mathbb{C}_m : (\langle \bar{\epsilon}_m \rangle + \langle \bar{\epsilon}_i \rangle - \epsilon_{\Delta T} - \epsilon^*) \quad (3.49)$$

onde ϵ^* é a *eigenstrain* deduzido por Eshelby (1957).

Considerando a presença da deformação térmica, pode-se definir uma *eigenstrain* total ϵ^{**} da inclusão, como sendo:

$$\epsilon^{**} = \epsilon_{\Delta T} + \epsilon^* \quad (3.50)$$

onde

$$\epsilon_{\Delta T} = (\alpha_i - \alpha_m) \Delta T \quad (3.51)$$

Admitindo-se que o compósito não está submetido a qualquer ação mecânica externa, a média das tensões perturbadoras sobre a matriz e inclusões deve ser igual a zero, ou seja, $\langle \bar{\sigma}_m \rangle + f_i \langle \bar{\sigma}_i \rangle = 0$. Com isto, pode-se escrever

$$\langle \bar{\epsilon}_m \rangle = -f(\langle \bar{\epsilon}_i \rangle - \epsilon_{\Delta T} - \epsilon^*) = -f(\mathbb{S} - \mathbb{I}) : \epsilon^{**} \quad (3.52)$$

Substituindo-se as equações (3.50) e (3.52) em (3.49), tem-se:

$$\{(\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m) : [\mathbb{S} - f(\mathbb{S} - \mathbb{I})] + \mathbb{C}_m\} : \epsilon^{**} = \mathbb{C}_i : \epsilon_{\Delta T} \quad (3.53)$$

resultando na seguinte expressão para a *eigenstrain* total em função de $\epsilon_{\Delta T}$:

$$\epsilon^{**} = \{(\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m) : [\mathbb{S} - f(\mathbb{S} - \mathbb{I})] + \mathbb{C}_m\}^{-1} \mathbb{C}_i : \epsilon_{\Delta T} \quad (3.54)$$

Por outro lado, a deformação média no compósito é dada por:

$$\langle \epsilon \rangle = f_m \langle \bar{\epsilon}_m \rangle + f(\langle \bar{\epsilon}_m \rangle + \langle \bar{\epsilon}_i \rangle) \quad (3.55)$$

Usando (3.49), (3.52), (3.54) e (3.55), tem-se:

$$\langle \epsilon \rangle = f \epsilon^{**} \quad (3.56)$$

A deformação total no compósito pode ser escrita como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{total}} = \boldsymbol{\alpha}_m \Delta T + \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \quad (3.57)$$

Dividindo o segundo termo da equação (3.57) pela variação uniforme de temperatura, e substituindo-se a deformação média no compósito pela equação (3.56), encontra-se:

$$\boldsymbol{\alpha}^{\text{hom}} = \boldsymbol{\alpha}_m + \frac{f \boldsymbol{\varepsilon}^{**}}{\Delta T} \quad (3.58)$$

Usando (3.51) e (3.54) em (3.58), tem-se:

$$\boldsymbol{\alpha}^{\text{hom}} = \boldsymbol{\alpha}_m + f \{ (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m) : [\mathbb{S} - f(\mathbb{S} - \mathbb{I})] + \mathbb{C}_m \}^{-1} \mathbb{C}_i : (\boldsymbol{\alpha}_i - \boldsymbol{\alpha}_m) \quad (3.59)$$

3.5.2 Modelo de Hashin

O modelo de Hashin (1983) apresenta expressões para determinação de coeficiente de dilatação térmica efetiva. Tal formulação analítica possui duas variações: uma para compósitos isotrópicos (fibras curtas) e compósitos transversalmente isotrópicos (fibras longas unidirecionais). Para fibras curtas o modelo considera que as inclusões são randomicamente distribuídas. A equação deduzida por Hashin (1983) é apresentada a seguir:

$$\alpha^{\text{hom}} = \alpha_m + \frac{\alpha_i - \alpha_m}{\frac{1}{k_i} - \frac{1}{k_m}} \left(\frac{1}{k^{\text{hom}}} - \frac{1}{k_m} \right) \quad (3.60)$$

onde k^{hom} é o módulo de deformação volumétrico efetivo dado por:

$$k^{\text{hom}} = k_m + \frac{f_i(k_i - k_m)}{1 + f_m(k_i - k_m)/(k_m + \frac{4G_m}{3})} \quad (3.61)$$

3.5.3 Modelo de Lu

Lu (2013) apresenta um modelo para determinar o coeficiente de expansão térmica efetivo para o caso de compósitos reforçados por fibras curtas distribuídas randomicamente. Este

modelo é deduzido com base no modelo de Mori-Tanaka apresentado na seção 3.4.1. Lu (2013) reescreve a equação (3.53) na forma:

$$(C_{ijkl}^f - C_{ijkl}^m)[(1-f)S_{klmn}\varepsilon_{mn}^{**} + f\varepsilon_{kl}^{**}] + C_{ijkl}^m\varepsilon_{kl}^{**} = C_{ijkl}^i\varepsilon_{kl}^{\Delta T} \quad (3.62)$$

sendo C_{ijkl}^f e C_{ijkl}^m as componentes dos tensores de rigidez da fibra e da matriz, respectivamente.

Como os valores ε_{ij}^{**} , para $i \neq j$, são nulos, a equação (3.62) pode ser decomposta nas seguintes equações lineares:

$$B_1\varepsilon_{11}^{**} + B_2\varepsilon_{22}^{**} + B_3\varepsilon_{33}^{**} = D_0(\alpha_f - \alpha_m)\Delta T \quad (3.63)$$

$$B_3\varepsilon_{11}^{**} + B_4\varepsilon_{22}^{**} + B_5\varepsilon_{33}^{**} = D_0(\alpha_f - \alpha_m)\Delta T \quad (3.64)$$

$$B_3\varepsilon_{11}^{**} + B_5\varepsilon_{22}^{**} + B_4\varepsilon_{33}^{**} = D_0(\alpha_f - \alpha_m)\Delta T \quad (3.65)$$

onde α_f e α_m designam os coeficientes de expansão térmica da fibra e da matriz, respectivamente, e os parâmetros B_i são dados por:

$$B_1 = fD_1 + D_2 + (1-f)(D_1S_{1111} + 2S_{2211}) \quad (3.66)$$

$$B_2 = f + D_3 + (1-f)(D_1S_{1122} + S_{2222} + S_{2233}) \quad (3.67)$$

$$B_3 = f + D_3 + (1-f)(S_{1111} + (1+D_1)S_{2211}) \quad (3.68)$$

$$B_4 = fD_1 + D_2 + (1-f)(S_{1122} + D_1S_{2222} + S_{2233}) \quad (3.69)$$

$$B_5 = f + D_3 + (1-f)(S_{1122} + S_{2222} + D_1S_{2233}) \quad (3.70)$$

sendo

$$D_0 = \frac{3\lambda_f + 2\mu_f}{\lambda_f - \lambda_m} \quad (3.71)$$

$$D_1 = 1 + \frac{2(\mu_f - \mu_m)}{\lambda_f - \lambda_m} \quad (3.72)$$

$$D_2 = \frac{\lambda_m + 2\mu_m}{\lambda_f - \lambda_m} \quad (3.73)$$

$$D_3 = \frac{\lambda_m}{\lambda_f - \lambda_m} \quad (3.74)$$

onde λ e μ representam as constantes de Lamé.

Resolvendo o sistema de equações lineares descrito pelas equações (3.63) - (3.65) e substituindo ε_{ij}^{**} na equação (3.62), tem-se:

$$\alpha^{hom} = \alpha_m + \left\{ \frac{2B_2 + 2B_3 - 2B_1 - B_4 - B_5}{3[2B_2B_3 - B_1(B_4 + B_5)]} \right\} f D_0(\alpha_f - \alpha_m) \quad (3.75)$$

3.5.4 Modelo de Levin

Considere um EVR submetido a duas condições de contorno, uma térmica e a outra mecânica. Tais condições de contorno apresentam a seguinte forma:

$$\begin{cases} \Delta T(\mathbf{x}) = \Delta T^0 \\ \mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (3.76)$$

$$\begin{cases} \Delta T(\mathbf{x}) = 0 \\ \mathbf{T}(\mathbf{x}) = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \cdot \mathbf{n} \end{cases} \quad (3.77)$$

Os campos de deformação para as condições de contorno acima são dados, respectivamente, por:

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \mathbb{D} : \boldsymbol{\sigma}' + \boldsymbol{\alpha} \Delta T \quad (3.78)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbb{D} : \boldsymbol{\sigma} \quad (3.79)$$

Aplicando o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) e usando o teorema da tensão média e o teorema da divergência, obtêm-se:

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}' dV = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \cdot \langle \boldsymbol{\varepsilon}' \rangle V \quad (3.80)$$

$$\int_V \boldsymbol{\sigma}' \cdot \boldsymbol{\varepsilon} dV = 0 \quad (3.81)$$

Substituindo (3.79) em (3.81) e (3.78) em (3.80), resultam, respectivamente, as seguintes expressões:

$$\int_V \boldsymbol{\sigma}' : \mathbb{D} : \boldsymbol{\sigma} dV = 0 \quad (3.82)$$

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} : (\mathbb{D} : \boldsymbol{\sigma}' + \boldsymbol{\alpha} \Delta T) dV = \int_V (\boldsymbol{\sigma} : \mathbb{D} : \boldsymbol{\sigma}' + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\alpha} \Delta T) dV \quad (3.83)$$

Utilizando as equações (3.82) e (3.83), obtém-se:

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\alpha} \Delta T dV = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle : \boldsymbol{\alpha}^{hom} \Delta T \quad (3.84)$$

Usando (3.78) e (3.84), tem-se:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}' \rangle = \boldsymbol{\alpha}^{hom} \Delta T \quad (3.85)$$

Dividindo todos os termos da equação (3.84) por ΔT e decompondo a integral presente na equação (3.84) nos domínios das fases do compósito, obtém-se:

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\alpha} dV = \int_{V_f} \boldsymbol{\sigma}_f : \boldsymbol{\alpha}_f dV + \int_{V_m} \boldsymbol{\sigma}_m : \boldsymbol{\alpha}_m dV = \langle \boldsymbol{\sigma}_f \rangle : \boldsymbol{\alpha}_f V_f + \langle \boldsymbol{\sigma}_m \rangle : \boldsymbol{\alpha}_m V_m \quad (3.86)$$

Considerando as equações (3.85) e (3.86), resulta:

$$\langle \boldsymbol{\sigma}_f \rangle : \boldsymbol{\alpha}_f f + \langle \boldsymbol{\sigma}_m \rangle : \boldsymbol{\alpha}_m f_m = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle : \boldsymbol{\alpha}^{hom} \quad (3.87)$$

Empregando-se as equações (2.34) e (2.39), pode-se escrever (3.85) como segue:

$$\boldsymbol{\alpha}^{hom} = \mathbb{B}_i : \boldsymbol{\alpha}_f f + \mathbb{B}_m : \boldsymbol{\alpha}_m f_m \quad (3.88)$$

Substituindo as expressões (2.32) e (2.38) em (3.88), obtêm-se a seguinte equação para determinação dos coeficientes de dilatação térmica efetivos do compósito:

$$\alpha^{hom} = \alpha_m + (\mathbb{D}_i - \mathbb{D}_m)^{-1} : (\mathbb{D} - \mathbb{D}_m) : (\alpha_f - \alpha_m) \quad (3.89)$$

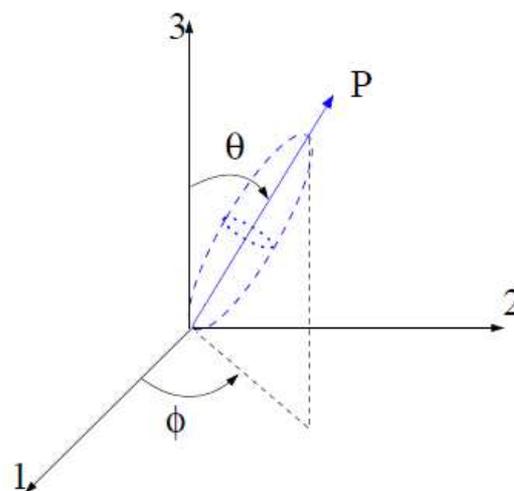
a qual foi deduzida por Levin (1967).

3.6. Efeito de orientação de fibras

Os modelos micromecânicos baseado em campos médios utilizam o tensor de Eshelby, o qual foi formulado para inclusão em uma única direção. Entretanto, em compósitos reais as inclusões geralmente têm orientação aleatória. Sendo a orientação das inclusões um fator importante para as propriedades dos compósitos, ela deve ser considerada no esquema de homogeneização. Assumindo que as inclusões elipsoidais são aleatoriamente distribuídas, a orientação de cada uma delas pode ser representada por um vetor unitário p direcionado ao longo do eixo de revolução do elipsóide, como apresentado na Figura 3.8. Os componentes de p estão relacionados com os ângulos θ e ϕ por:

$$\begin{cases} p_1 = \sin\theta\cos\phi \\ p_2 = \sin\theta\sin\phi \\ p_3 = \cos\theta \end{cases} \quad (3.90)$$

Figura 3.8 - Parâmetros da orientação da inclusão elipsoidal.



Fonte - OUAAR, 2006.

Todas as orientações possíveis para o vetor p podem ser definidas pelos pontos de uma esfera de raio unitário dada por (Ouaar, 2006):

$$\oint dp = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin\theta d\theta d\phi \quad (3.91)$$

Para descrever uma possível orientação de uma fibra no espaço utiliza-se uma função de distribuição de probabilidade ψ . Esta função é definida com base na probabilidade de encontrar uma fibra entre os ângulos θ_1 e $\theta_1 + d\theta$, e, ϕ_1 e $\phi_1 + d\phi$, o que pode ser expresso na forma:

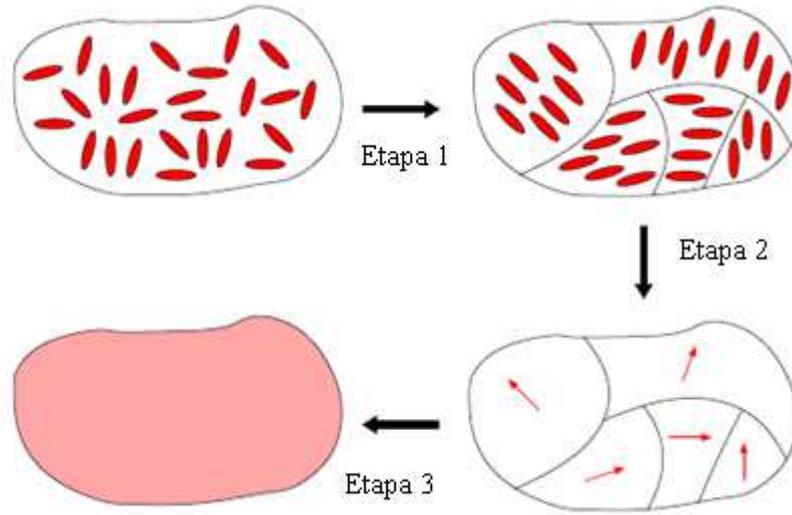
$$P(\theta_1 \leq \theta \leq \theta_1 + d\theta, \phi_1 \leq \phi \leq \phi_1 + d\phi) = \psi(\theta_1, \phi_1) \sin\theta_1 d\theta d\phi \quad (3.92)$$

A função ψ deve atender duas condições para ser considerada uma função de distribuição de probabilidade: a) fibras com a orientação (θ_1, ϕ_1) devem ter a mesma probabilidade que fibras com a orientação $(\theta_1 + \pi, \phi_1 + \pi)$; e b) a soma das probabilidades de encontrar fibras com qualquer orientação deve ser unitária, ou seja:

$$\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \psi(\theta, \phi) \sin\theta d\theta d\phi = 1 \quad (3.93)$$

O processo de homogeneização, considerando a orientação das fibras, é realizado em três etapas (Figura 3.9): 1) as fibras com mesma orientação são agrupadas em subvolumes; 2) efetua-se a homogeneização de cada subvolume; e 3) procede-se a homogeneização dos subvolumes homogeneizados na etapa anterior utilizando a função de distribuição de probabilidade.

Figura 3.9: Etapas de homogeneização para compósitos reforçados por fibras curtas distribuídas aleatoriamente.



Fonte: Ouaar, 2006.

Como exemplo, aplicando-se a função de distribuição de probabilidade no esquema de Mori-Tanaka, descrito na seção 3.2.1, obtem-se:

$$\mathbb{C}^{hom} = [(1 - f)\mathbb{C}_m + f\langle \mathbb{C}_i : \mathbb{A}_i \rangle_\psi] : [f\langle \mathbb{A}_i \rangle_\psi + (1 - f)\mathbb{I}]^{-1} \quad (3.94)$$

onde

$$\langle \mathbb{C}_i : \mathbb{A}_i \rangle_\psi = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \mathbb{C}_i : \mathbb{A}_i \psi(\theta, \phi) \sin\theta d\theta d\phi \quad (3.95)$$

$$\langle \mathbb{A}_i \rangle_\psi = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \mathbb{A}_i \psi(\theta, \phi) \sin\theta d\theta d\phi \quad (3.96)$$

A função de distribuição de probabilidade adotada é $\psi(\theta, \phi) = 1/4\pi$. Observa-se que esta função atende às duas condições mencionadas anteriormente, e estabelece que uma fibra possui a mesma probabilidade de apresentar qualquer orientação, indicando que não há nenhuma orientação mais provável em relação às outras.

4. APLICAÇÕES PARA COMPÓSITOS COM MICROESTRUTURA RANDÔMICA

4.1 Considerações iniciais

O presente capítulo apresenta os resultados de exemplos obtidos através dos modelos descritos no capítulo anterior. Considera-se nas análises compósitos reforçados por fibras curtas e microestrutura randômica. O objetivo de tais exemplos é mostrar aplicações dos referidos modelos para determinação de propriedades efetivas; avaliação do efeito da orientação das fibras nas propriedades mecânicas efetivas e analisar a influência da razão de aspecto da fibra nas respostas efetivas do compósito.

4.2 Propriedades mecânicas

Os exemplos a seguir têm como objetivo apresentar as aplicações dos modelos descritos anteriormente para determinação das propriedades mecânicas efetivas. Serão consideradas a orientação das fibras e a razão de aspecto.

4.2.1. Aplicação dos modelos micromecânicos de campos médios

4.2.1.1. Concreto leve com pérolas de EPS

A construção civil vem desenvolvendo concretos de baixa densidade usados em aplicações onde não se exige grandes esforços. Nesta linha, pode-se citar o concreto leve de EPS, no qual o agregado graúdo tradicional é substituído por EPS (isopor) reduzindo a densidade do material compósito. Além do peso reduzido, o concreto leve de EPS possui boa isolamento térmica e acústica.

Miled *et al.*(2007) estudaram as propriedades mecânicas de concretos leves de EPS. Para isso, os autores utilizaram três diâmetros de pérolas de EPS: 1,0 mm; 2,5 mm e 6,3 mm. Os corpos de prova utilizados nos ensaios mecânicos apresentavam geometria cilíndrica com dimensões de 110 mm x 220 mm. Na Figura 4.1 são apresentados os corpos de provas de concreto leve de EPS utilizados por Miled *et al.*(2007).

Figura 4.1 – Corpos de prova com dimensões 110mm x 220mm, contendo perólas de EPS com diâmetro de 1,0mm; 2,5mm e 6,3mm, respectivamente.

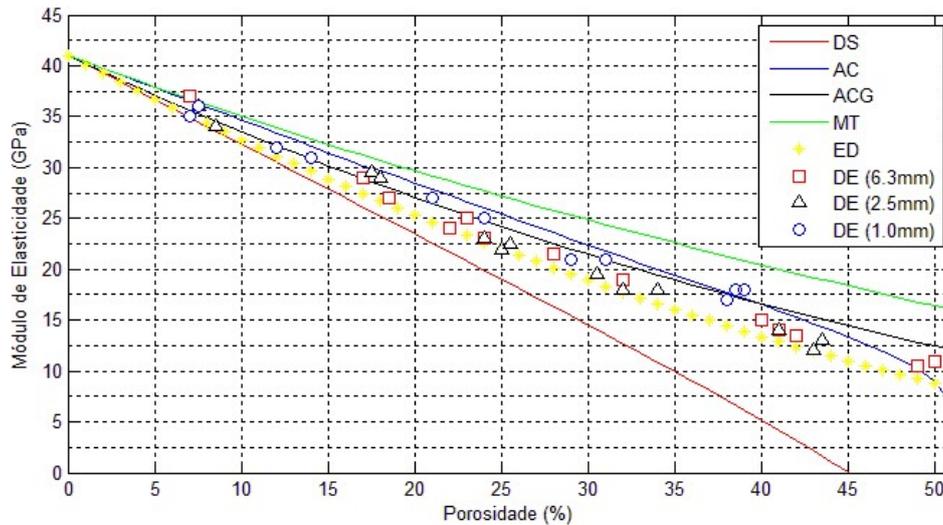


Fonte – Miled *et al.*, 2007.

No presente trabalho apresenta-se uma investigação sobre a variação do módulo de deformação longitudinal efetivo do concreto com a quantidade de EPS empregada na confecção do material. Como o módulo de elasticidade do EPS é muito pequeno, pode-se considerar que as pérolas de EPS são poros contidos na matriz de concreto. Tais poros foram admitidos com geometria esférica e inseridos em uma matriz de concreto com as seguintes propriedades mecânicas: $E_m = 41 \text{ GPa}$ e $\nu_m = 0,2$.

Os resultados obtidos estão apresentados na Figura 4.2, juntamente com dados experimentais. Nesta figura, os símbolos da legenda têm os seguintes significados: DS – Dilute Suspension (método da inclusão equivalente); AC – auto-consistente; ACG – auto-consistente generalizado; MT – Mori-Tanaka; ED – esquema diferencial; DE – dados experimentais (Miled *et al.*, 2007), sendo 6,3mm, 2,5mm e 1,0mm os diâmetros das pérolas de EPS.

Figura 4.2 – Variação do módulo de elasticidade efetivo de amostras de concretos leve de EPS.



Fonte – Autor, 2017.

Para todos os níveis de porosidade, o modelo *Dilute Suspension* forneceu os valores mais baixos para a rigidez efetiva do material, enquanto que o modelo de Mori-Tanaka produziu os valores mais altos. Observa-se pela Figura 4.2 que, para pequenas porosidades, todos os modelos utilizados proporcionaram resultados próximos dos valores experimentais. Esta figura também mostra que o modelo *Dilute Suspension* fornece rigidez nula para porosidade de 45%, o que representa, logicamente, uma inconsistência física. Na realidade, este último modelo é bastante limitado por não considerar os efeitos das interações entre as inclusões do material, como descrito no capítulo 3. Os melhores resultados foram apresentados pelos modelos esquema diferencial, auto-consistente e auto-consistente generalizado. Vale também ressaltar que os modelos micromecânicos empregados não consideram a influência do tamanho dos poros sobre a rigidez efetiva do material. Segundo Miled *et al.* (2007), o módulo de elasticidade do concreto leve de EPS não depende do diâmetro das inclusões, mas depende da porosidade do concreto.

4.2.1.2. Compósito reforçado por fibras curtas

Neste exemplo, quatro modelos micromecânicos descritos no capítulo 3 são aplicados para determinação das propriedades elásticas efetivas de um material compósito reforçado por fibras curtas distribuídas randomicamente. A matriz do material apresenta um módulo de elasticidade longitudinal $E_m = 70 \text{ GPa}$ e um coeficiente de Poisson

$\nu_m = 0,2$, enquanto que para as fibras, os valores destas propriedades são, respectivamente, $E_f = 210 \text{ GPa}$ e $\nu_f = 0,3$.

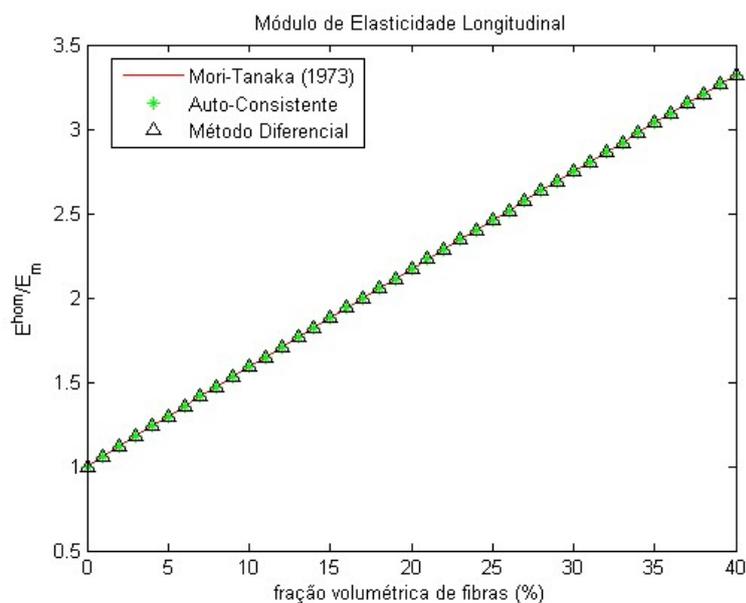
Para considerar a influência das direções das fibras nos compósitos com microestrutura randômica, a estratégia apresentada na seção 3.6 é incorporada nos três modelos micromecânicos de campos médios empregados no estudo de homogeneização (Mori-Tanaka, auto-consistente e esquema diferencial).

O modelo auto-consistente generalizado tem como objetivo determinar o módulo de elasticidade transversal, enquanto a segunda propriedade mecânica efetiva pode ser determinada através de qualquer outro modelo.

O objetivo do exemplo é a avaliação das referidas propriedades efetivas em função da fração volumétrica das fibras usando diferentes modelos micromecânicos e comparar os resultados fornecidos pelos mesmos.

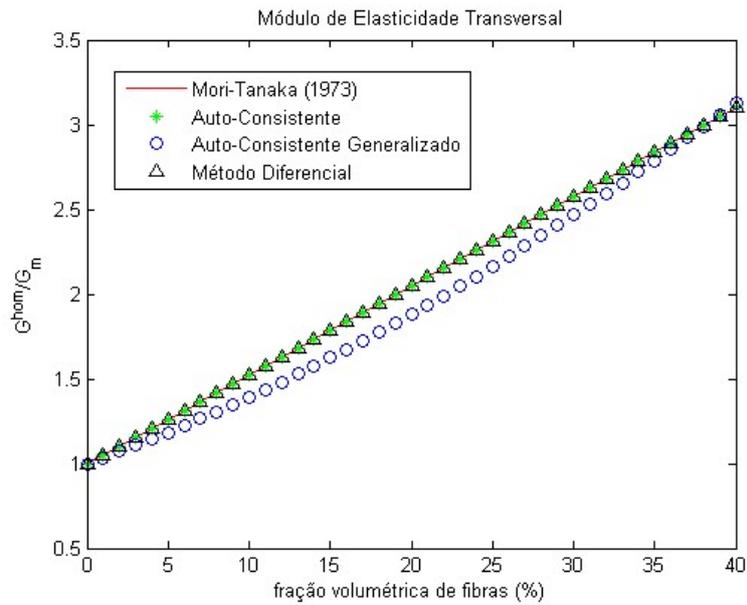
As Figuras 4.3, 4.4 e 4.5 apresentam os valores efetivos (adimensionalizados) obtidos para o módulo de elasticidade longitudinal (E^{hom}), módulo de elasticidade transversal (G^{ho}) e coeficiente de Poisson (ν^{hom}) do compósito em função da fração volumétrica das fibras, a qual é admitida variando entre 0 e 40%. A razão de aspecto adotada é de 0,02.

Figura 4.3 - Variação do módulo de elasticidade longitudinal.



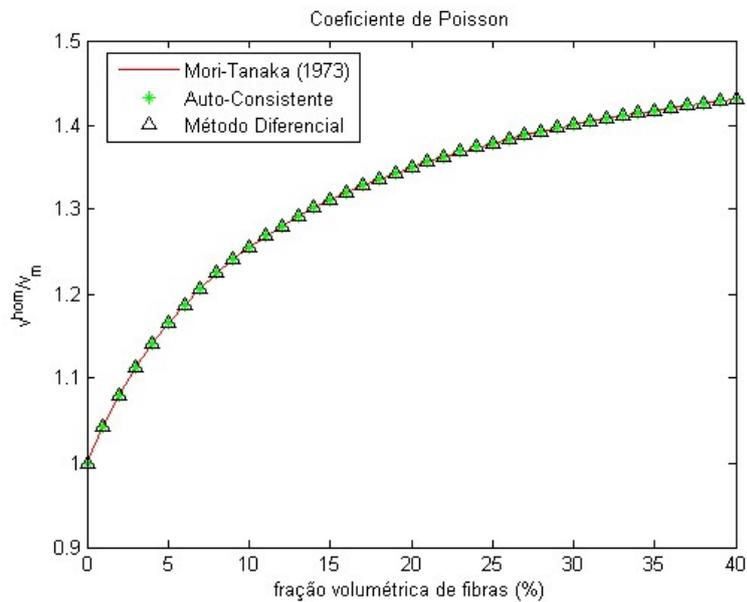
Fonte – Autor, 2017.

Figura 4.4 - Variação do módulo de elasticidade transversal.



Fonte – Autor, 2017.

Figura 4.5 - Variação do coeficiente de Poisson.



Fonte – Autor, 2017.

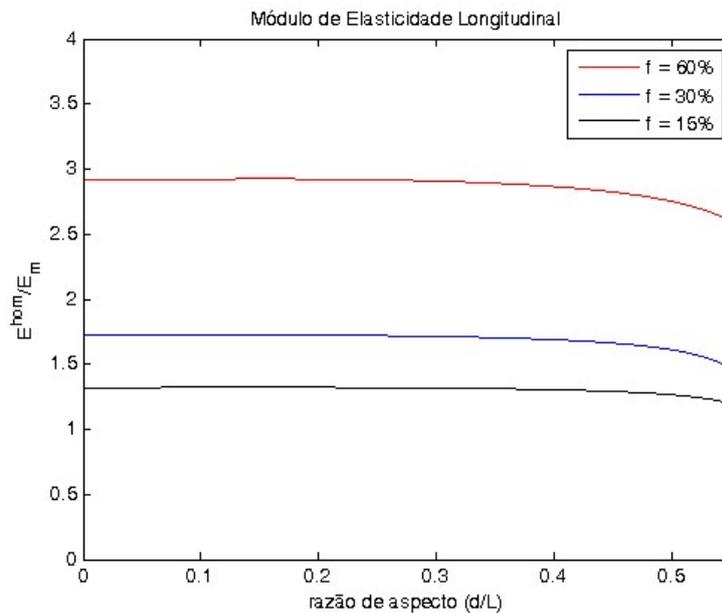
As citadas figuras mostram uma boa concordância dos resultados obtidos pelos modelos de Mori-Tanaka, auto-consistente e esquema diferencial ao longo do intervalo considerado para a fração volumétrica das fibras. A diferença entre os valores obtidos pelo modelo auto-consistente generalizado e aqueles fornecidos pelos outros modelos

utilizados, realçada na Figura 4.4, pode ser atribuída ao fato da estratégia para considerar a aleatoriedade das direções das fibras não ter sido incorporada no primeiro. Assim, tal diferença proporciona uma ideia quantitativa do efeito das direções das fibras sobre as propriedades efetivas do compósito.

4.2.2. Efeito da razão de aspecto nas propriedades mecânicas efetivas

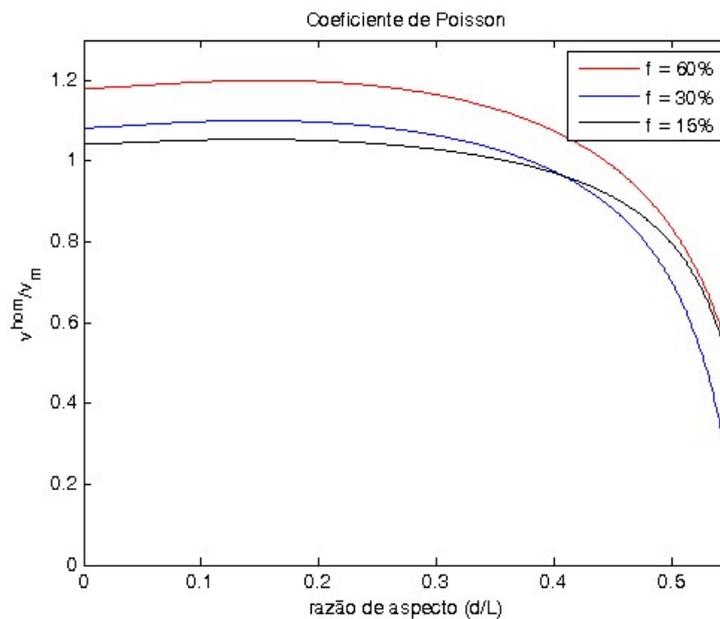
Nos exemplos a seguir, os materiais constituintes do compósito são os mesmos do exemplo anterior. São analisados três exemplos com fração volumétrica de fibras de 15%, 30% e 60% cada, a razão de aspecto (d/l) das fibras varia entre 0,001 e 0,5 em cada um dos três exemplos. Para o estudo da influência da razão de aspecto é aplicado o método de Mori-Tanaka, considerando as fibras distribuídas aleatoriamente. Os resultados são apresentados nas Figuras 4.6 e 4.7.

Figura 4.6 - Influência da razão de aspecto no módulo de elasticidade longitudinal efetivo do compósito.



Fonte – Autor, 2017.

Figura 4.7 - Influência da razão de aspecto no coeficiente de Poisson efetivo do compósito.



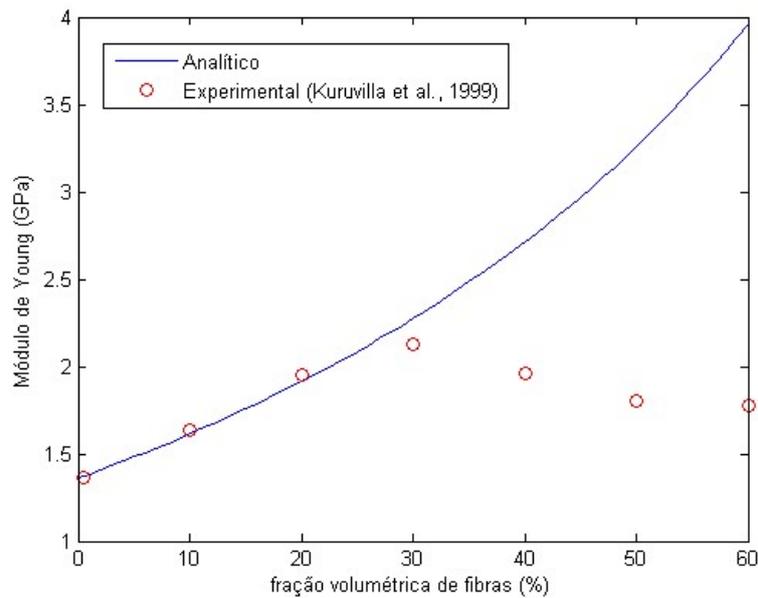
Fonte – Autor, 2017.

Nas Figuras 4.6 e 4.7 observa-se que o aumento na razão de aspecto provoca um pequeno aumento nas propriedades mecânicas efetivas, o que ocorre até uma determinada razão limite. Para valores acima desse limite verifica-se uma redução brusca nas propriedades mecânicas efetivas do compósito reforçado por fibras curtas. Neste caso, a razão de aspecto máxima, para que não ocorra redução nas propriedades efetivas pelo efeito da razão de aspecto, é de aproximadamente $d/l = 0,2$. O resultado demonstra que não há influência da razão de aspecto na resposta mecânica efetiva do compósito para fibras com a razão de aspecto menores que 0,2.

4.2.3. Compósito com matriz de poliéster e fibras de sisal

Neste exemplo, considera-se um compósito constituído por uma matriz de poliéster (módulo de elasticidade 1,36 GPa e coeficiente de Poisson 0,2) e fibras de sisal (módulo de elasticidade 11,5 GPa e coeficiente de Poisson 0,2), cujos resultados experimentais foram obtidos por Kuruvilla *et al.* (1999); a razão de aspecto usada para este exemplo é $d/l = 0,0476$. O modelo analítico utilizado neste exemplo é o modelo de Mori-Tanaka acoplado à metodologia para considerar a aleatoriedade das fibras curtas. Os resultados obtidos para o módulo de Young efetivo do compósito através do modelo de Mori-Tanaka são apresentados na Figura 4.8.

Figura 4.8 - Módulo de Young: matriz de poliéster e fibras de sisal.



Fonte – Autor, 2017.

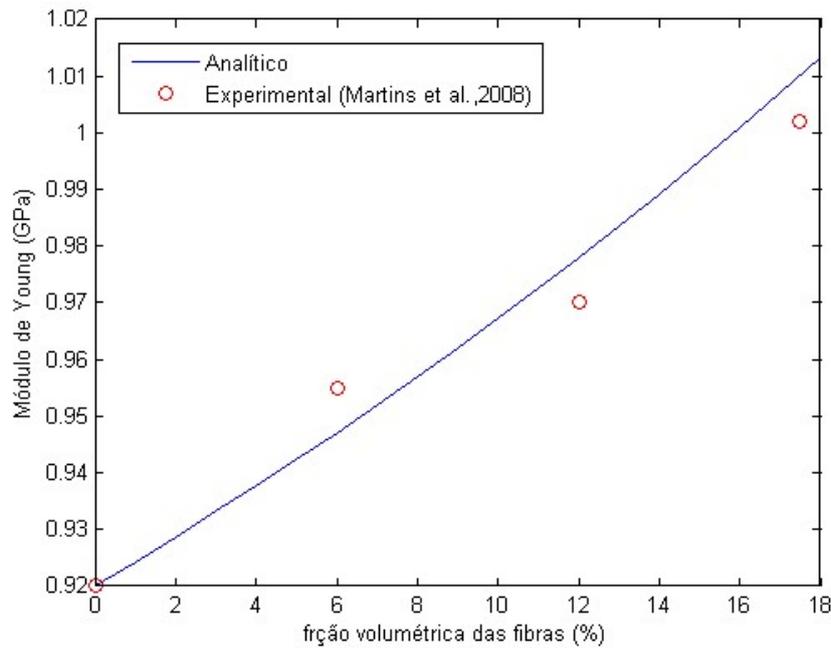
O gráfico apresentado na Figura 4.8 demonstra uma boa aproximação entre os resultados analíticos e os valores experimentais até uma fração volumétrica de fibras próxima a 30%. Entretanto, os valores obtidos com o modelo de Mori-Tanaka divergem daqueles encontrados experimentalmente para frações volumétricas de fibras acima de aproximadamente 30%. Observa-se que os valores teóricos mostram uma contínua tendência de crescimento enquanto que os valores experimentais decrescem. Tal fato pode ser justificado pela redução da trabalhabilidade do compósito com o aumento do teor de fibras, o que não é previsto pelo modelo teórico, e que comumente ocorre para o caso de reforços com fibras de origem vegetal (Savastano Junior & Pimentel, 2000; Rodrigues, 2008). A trabalhabilidade depende de uma série de fatores, incluindo o material que compõe a fibra, a sua fração volumétrica e a geometria da fibra. Segundo Figueiredo (2011) tal efeito reduz a mobilidade relativa das partículas, dificultando a fluidez da mistura. De acordo com Kuruvilla *et al.* (1999), este efeito está relacionado com a intensificação das interações entre as fibras.

4.2.4. Compósito com matriz epóxi e fibras curtas de vidro

O exemplo a seguir considera um compósito com matriz epóxi (módulo de elasticidade 0,92 GPa e coeficiente de Poisson 0,2) reforçada com fibras de vidro (módulo de

elasticidade 85,6 GPa e coeficiente de Poisson 0,22). Os resultados experimentais deste exemplo foram obtidos por Martins *et al.* (2008). A razão de aspecto usada é a mesma determinada no estudo experimental, a qual foi $d/l = 0,0961$. O modelo analítico utilizado é o modelo de Mori-Tanaka acoplado com a abordagem para orientação das fibras, onde as mesmas são distribuídas aleatoriamente. Os resultados obtidos para o módulo de Young efetivo do compósito são apresentados na Figura 4.9.

Figura 4.9 - Módulo de Young: matriz de epóxi e fibras de vidro.



Fonte – Autor, 2017.

A estratégia de utilizar o modelo de Mori-Tanaka acoplado com a abordagem para orientação das fibras apresenta boa concordância com os resultados experimentais obtidos por Martins *et al.* (2008). Como o intervalo da fração volumétrica nesse exemplo é pequeno, o resultado experimental não sofre influência da trabalhabilidade das fibras, por isso, o modelo analítico usado fornece resultados com erros menores que 1%.

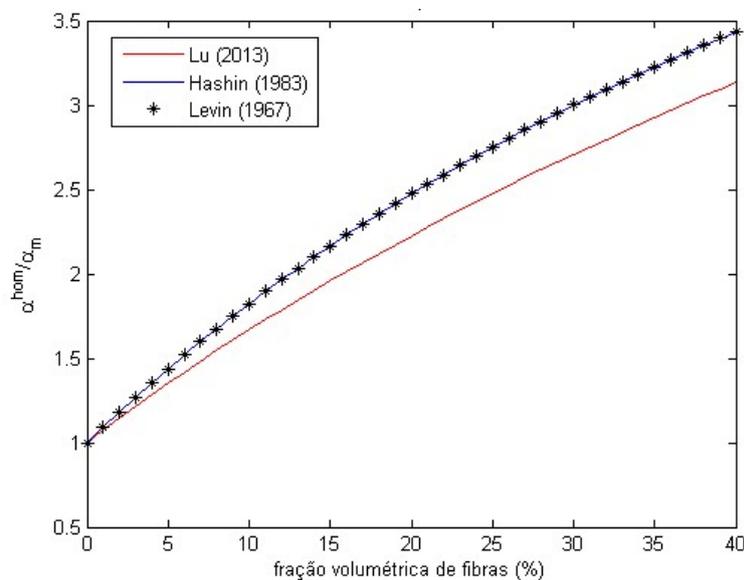
4.3 Coeficiente de expansão térmica

Os exemplos a seguir têm como objetivo apresentar as aplicações dos modelos descritos anteriormente para determinação do coeficiente de expansão térmica efetivo. Serão consideradas a influência da orientação das fibras e da razão de aspecto.

4.3.1. Caso de um compósito reforçado por fibras curtas

No exemplo a seguir, o material compósito possui uma matriz com coeficiente de expansão térmica de $2 \times 10^{-6}/K$ reforçada por fibras curtas distribuídas aleatoriamente e com coeficiente de expansão térmica de $10^{-5}/K$. As propriedades mecânicas dos constituintes desse compósito são as mesmas apresentadas no exemplo 4.2.1.2. A razão de aspecto das fibras adotada é de 0,02. A Figura 4.10 apresenta os resultados obtidos para o coeficiente de expansão térmica efetivo em função da fração volumétrica de fibras através dos modelos desenvolvidos por Lu (2013), Hashin (1983) e Levin (1967).

Figura 4.10 - Variação do coeficiente de expansão térmica.



Fonte – Autor, 2017.

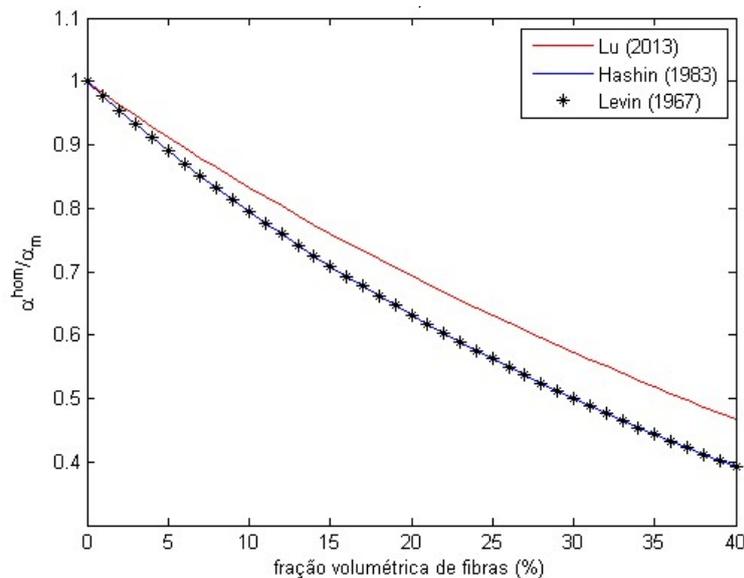
Os resultados dos modelos apresentam a mesma tendência de crescimento com o aumento da fração volumétrica de fibras. Os valores obtidos pelos modelos de Hashin (1983) e Levin (1967) são praticamente coincidentes, com diferença máxima na ordem

de 0,014%. O modelo de Lu (2013) subvalorizou o coeficiente da expansão térmica efetivo, tal situação pode ser explicada pelo fato desse modelo ser baseado no modelo de Mori-Tanaka e, por isso, ser o único modelo que foi aplicado a estratégia que considera a aleatoriedade das fibras curtas. Os modelos de Levin (1967) e Hashin (1983) consideram as fibras curtas alinhadas.

4.3.2. Caso de um compósito poroso

Neste exemplo, considera-se um material poroso cujos poros têm geometria semelhante a de uma fibra curta com razão de aspecto 0,02. O material da matriz é o mesmo do exemplo 4.3.1. Considera-se os poros ocupados por ar, com coeficiente de expansão térmica nulo. Os modelos usados para avaliação do coeficiente de expansão térmica efetivo são os mesmos do exemplo anterior. Os resultados obtidos estão mostrados na Figura 4.11.

Figura 4.11 - Variação do coeficiente de expansão térmica para compósito poroso.



Fonte – Autor, 2017.

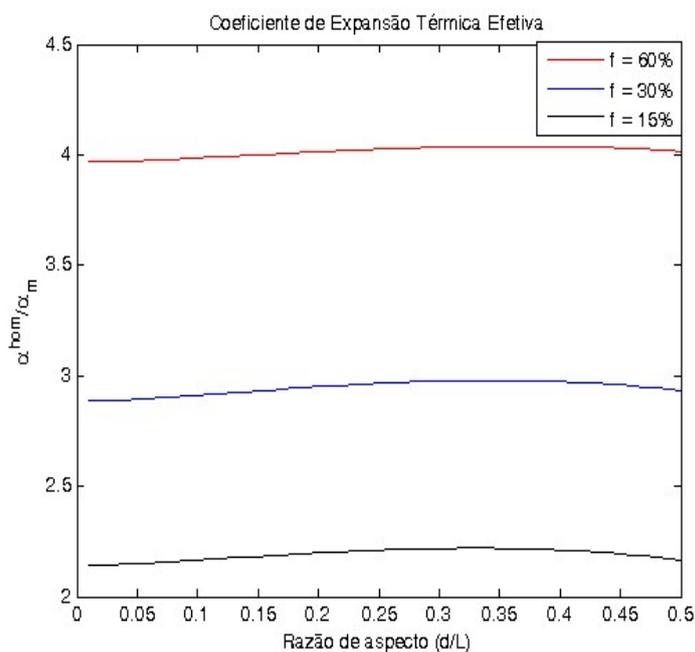
A Figura 4.11 apresenta curvas com tendência de redução na propriedade efetiva com o aumento da fração volumétrica de poros. Esta tendência tem coerência física uma vez que os poros têm coeficiente de expansão térmica menor do que o da matriz. Como no exemplo anterior, os modelos de Hashin (1983) e de Levin (1967) apresentam resultados muito próximos, com diferença máxima na ordem de 0,012% entre eles.

Observa-se também, pela Figura 4.15, que o modelo de Lu (2013) supervaloriza o coeficiente de expansão térmica efetivo para todo o intervalo considerado para a fração volumétrica de fibras. Isso deve-se ao fato de ao modelo de Lu (2013) ser incorporada a estratégia que considera a distribuição randômica das fibras curtas.

4.3.3. Influência da razão de aspecto no coeficiente de expansão térmica

Neste estudo, os materiais constituintes do compósito são os mesmos do exemplo anterior. São executados três exemplos com frações volumétrica de fibras de 15%, 30% e 60% cada. A razão de aspecto (d/l) das fibras varia entre 0,001 e 0,5 para os três exemplos. Para esse estudo da influência da razão de aspecto é aplicado o modelo de Lu (2013) considerando as fibras distribuídas aleatoriamente. Tal modelo é adotado por permitir a com a estratégia que considera a distribuição das fibras. Os resultados são apresentados na Figura 4.12.

Figura 4.12 - Influência da razão de aspecto no coeficiente de expansão térmica efetivo.



Fonte – Autor, 2017.

Na Figura 4.12 observa-se que o gráfico razão de aspecto versus coeficiente de expansão térmica efetivo normalizado possui um limite superior. A razão de aspecto desse limite está aproximadamente entre 0,35 a 0,4. Tratando-se de fibras comerciais de aço ou vidro, utilizadas para concreto, elas não atingem esse limite máximo, pois,

devido a fatores geométricos, a razão de aspecto é muito menor que 0,35. Sendo assim, para tais fibras comerciais, quanto maior a razão de aspecto maior o coeficiente de expansão térmica efetivo para a mesma fração volumétrica.

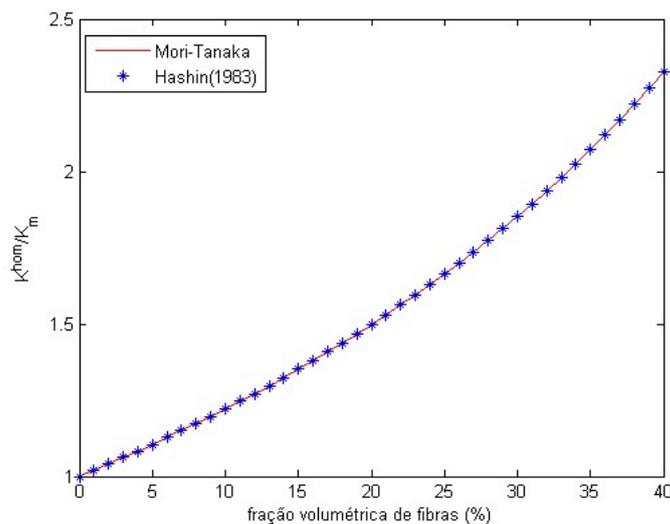
4.4 Condutividade térmica

Os exemplos a seguir têm como objetivo mostrar aplicações dos modelos formulados para determinação de condutividade térmica efetiva apresentados no capítulo 3 deste trabalho.

4.4.1. Caso de um compósito reforçado por fibras curtas

No exemplo a seguir, o material compósito possui uma matriz com condutividade térmica de $1 W/mK$ reforçada por fibras curtas distribuídas aleatoriamente e com condutividade térmica de $666 W/mK$. A razão de aspecto das fibras adotada é de 0,02. A Figura 4.13 apresenta os resultados obtidos para a condutividade térmica efetiva em função da fração volumétrica de fibras através do modelo de Mori-Tanaka (1973) e do modelo de Hashin (1983). As fibras são consideradas distribuídas aleatoriamente na matriz.

Figura 4.13: Variação da condutividade térmica com a fração volumétrica de fibras.



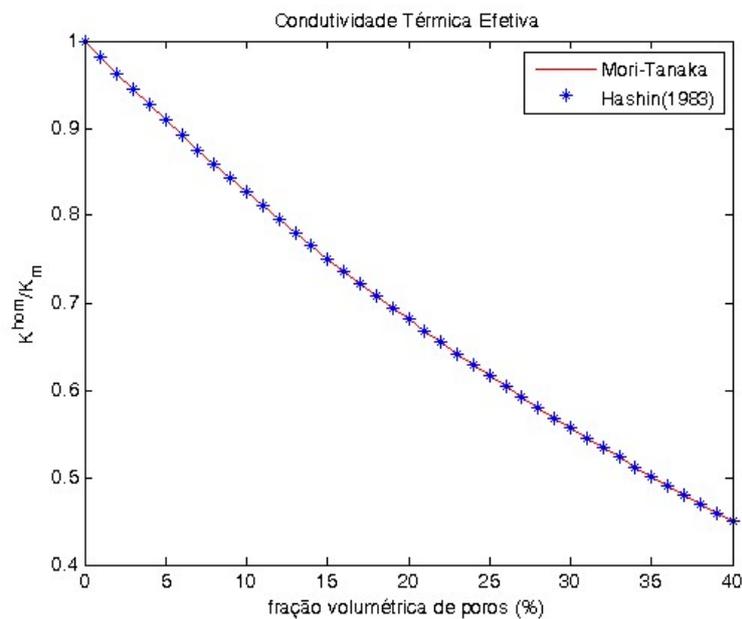
Fonte: Autor, 2017.

Como se observa, os modelos apresentam resultados praticamente coincidentes, com diferença máxima entre eles na ordem 0,015%. As fibras possuem condutividade térmica na ordem de 666 vezes a da matriz, utilizando à regra da mistura a resposta da condutividade térmica efetiva para o compósito com 40% de fibra seria na ordem de 267 W/mK , entretanto ambos os modelos apresentaram valores na ordem de $2,3 \text{ W/mK}$, ou seja, na orden de 116 vezes menor. Pode-se concluir que a fração volumétrica e as propriedades das fases não são os únicos fatores que interferem na resposta térmica efetiva, existindo outros agentes relacionados com a geometria, distribuição e interação das fibras.

4.4.2. Caso de um compósito poroso

Neste exemplo, considera-se um material poroso cujos poros têm geometria esférica. O material da matriz é o mesmo do exemplo anterior. Considera-se os poros ocupados por ar, condutividade térmica $0,02596 \text{ W/mK}$ (Das *et al.*, 2011). A Figura 4.14 apresenta os resultados obtidos.

Figura 4.14 - Variação da condutividade térmica.



Fonte – Autor, 2017.

Como no exemplo anterior, os modelos apresentaram resultados praticamente coincidentes. A condutividade térmica de materiais porosos apresenta uma redução com o aumento da fração volumétrica de poros, visto que a condutividade térmica do ar é

muito menor que a da matriz. Os modelos estudados nesse exemplo apresentaram diferença menor que 1%.

5 HOMOGENEIZAÇÃO DE COMPÓSITOS COM FIBRAS LONGAS UNIDIRECIONAIS

5.1 Considerações iniciais

A maioria dos trabalhos sobre a determinação das propriedades termoelásticas efetivas de materiais compósitos publicados na literatura não considera os efeitos provenientes das interfaces existentes entre as inclusões e a matriz. Estas interfaces, em geral, são camadas finas que podem ser originadas pelo processo de interação química entre os componentes do material ou introduzidas estrategicamente a fim de melhorar as propriedades do compósito. A existência da interface implica que o compósito deve ser modelado como um material com, no mínimo, três fases (matriz, fibras e interfaces). Tal modelagem requer o conhecimento das propriedades da interface, informação raramente disponível, principalmente porque suas propriedades dependem de fatores diversos relacionados à geometria das fases, interações físicas e químicas, etc. (Hashin, 1990). O presente capítulo apresenta alguns métodos utilizados neste trabalho para determinação de propriedades efetivas de compósitos periódicos reforçados por fibras unidirecionais sem e com interfaces.

5.2 Propriedades mecânicas efetivas

A seguir são apresentados os modelos utilizados neste trabalho para determinação de propriedades mecânicas efetivas de compósitos reforçados por fibras longas unidirecionais. São empregados os modelos bifásicos de Mori-Tanaka e CCA (Composite Cylinder Assemblage). Os efeitos introduzidos por interfaces serão considerados através de um procedimento incorporado no modelo CCA.

5.2.1 Modelo de Mori-Tanaka

O modelo de Mori-Tanaka, apresentado na seção 3.3.1 para determinação da rigidez efetiva, pode ser aplicado para compósitos reforçados por fibras longas considerando o tensor de Eshelby para inclusão cilíndrica longa com $r = d/l \approx 0$. Para este caso particular, as seguintes componentes do tensor de Eshelby podem ser deduzidas:

$$S_{2222} \approx \frac{5 - 4\nu_m}{8(1 - \nu_m)} \quad (5.1)$$

$$S_{2211} \approx \frac{\nu_m}{2(1 - \nu_m)} \quad (5.2)$$

$$S_{2233} \approx \frac{1 - 4\nu_m}{8(1 - \nu_m)} \quad (5.3)$$

$$S_{1212} \approx \frac{1}{4} \quad (5.4)$$

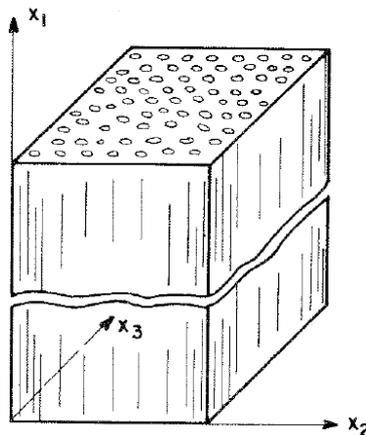
$$S_{2323} \approx \frac{3 - 4\nu_m}{8(1 - \nu_m)} \quad (5.5)$$

onde ν_m é coeficiente de Poisson da matriz. As outras componentes do referido tensor são nulas.

5.2.2 Composite Cylinder Assemblage (CCA)

O material considerado por Hashin (1983) para a dedução do modelo CCA é composto por fibras longas, paralelas e distribuídas randomicamente na seção transversal, envolvidas por uma matriz isotrópica (Figura 5.1). Neste caso, o material compósito é transversalmente isotrópico, ou seja, a relação constitutiva é invariante com a direção no plano $x_2 - x_3$.

Figura 5.1 - Compósito reforçado por fibras unidirecionais.



Fonte - Hashin, 1983.

Para um compósito satisfazendo a citada simetria material, as relações constitutivas efetivas são expressas na forma:

$$\sigma_{11} = n^* \varepsilon_{11} + l^* \varepsilon_{22} + l^* \varepsilon_{33} \quad (5.6)$$

$$\sigma_{22} = l^* \varepsilon_{11} + (k^{hom} + G_T^{hom}) \varepsilon_{22} + (k^{hom} - G_T^{hom}) \varepsilon_{33} \quad (5.7)$$

$$\sigma_{22} = l^* \varepsilon_{11} + (k^{hom} - G_T^{hom}) \varepsilon_{22} + (k^{hom} + G_T^{hom}) \varepsilon_{33} \quad (5.8)$$

$$\sigma_{12} = 2G_L^{hom} \varepsilon_{12} \quad \sigma_{23} = 2G_T^{hom} \varepsilon_{23} \quad \sigma_{13} = 2G_L^{hom} \varepsilon_{13} \quad (5.9)$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E_L^{hom}} - \frac{\nu_L^{hom}}{E_L^{hom}} \sigma_{22} - \frac{\nu_L^{hom}}{E_L^{hom}} \sigma_{33} \quad (5.10)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\nu_L^{hom}}{E_L^{hom}} \sigma_{11} - \frac{\sigma_{22}}{E_T^{hom}} - \frac{\nu_T^{hom}}{E_T^{hom}} \sigma_{33} \quad (5.11)$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\nu_L^{hom}}{E_L^{hom}} \sigma_{11} - \frac{\nu_T^{hom}}{E_T^{hom}} \sigma_{22} - \frac{\sigma_{33}}{E_T^{hom}} \quad (5.12)$$

onde

k^{hom} = módulo volumétrico transversal efetivo

G_T^{hom} = módulo de cisalhamento transversal efetivo

G_L^{hom} = módulo de cisalhamento longitudinal efetivo

E_L^{hom} = módulo de elasticidade longitudinal efetivo

E_T^{hom} = módulo de elasticidade transversal efetivo

ν_L^{hom} = coeficiente de Poisson longitudinal efetivo

ν_T^{hom} = coeficiente de Poisson transversal efetivo

n^* e l^* são propriedades efetivas definidas por:

$$n^* = \frac{(1 - \nu_{23})E_{11}}{1 - \nu_{23} - 2\nu_{12}\nu_{21}} \quad (5.13)$$

$$l^* = \frac{\nu_{21}E_{11}}{1 - \nu_{23} - 2\nu_{12}\nu_{21}} \quad (5.14)$$

Hashin (1972, 1983) apresentam relações diretas para as propriedades elásticas efetivas longitudinais e limites para as propriedades efetivas transversais. Tais expressões são dadas a seguir:

$$k^{hom} = k_m + \frac{f}{\frac{1}{(k - k_m)} + \frac{f_m}{(k_m + G_m)}} \quad (5.15)$$

$$E_L^{hom} = E_m f_m + E f + \frac{4 f_m f (v - v_m)}{\frac{f_m}{k} + \frac{f}{k_m} + \frac{1}{G_m}} \quad (5.16)$$

$$G_L^{hom} = G_m + \frac{f}{\frac{1}{G - G_m} + \frac{f_m}{2G_m}} \quad (5.17)$$

$$v_L^{hom} = v_m f_m + v f + \frac{f_m f (v - v_m) \left(\frac{1}{k_m} - \frac{1}{k} \right)}{\frac{f_m}{k} + \frac{f}{k_m} + \frac{1}{G_m}} \quad (5.18)$$

$$G_T^{hom1} = G_m + \frac{f}{\frac{1}{G - G_m} + \frac{f_m}{2G_m}} \quad (5.19)$$

$$G_T^{hom2} = G_m \left\{ 1 + \frac{(1 + \beta_m) f}{\rho_2 - f \left[1 + \frac{3\beta_m^2 f_m^2}{(\alpha_2 f^3 + 1)} \right]} \right\} \quad (5.20)$$

$$\frac{4}{E_T^{hom}} = \frac{1}{G_T^{hom(\pm)}} + \frac{1}{k^{hom}} + \frac{4(v_L^{hom})^2}{E_L^{hom}} \quad (5.21)$$

$$v_{T(\pm)}^{hom} = \frac{E_T^{hom}}{2G_T^{hom}} - 1 \quad (5.22)$$

onde

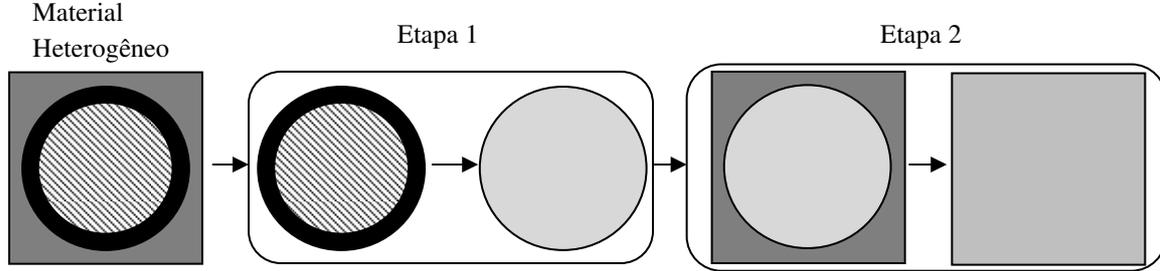
$$\alpha_2 = \frac{(\beta_m - \gamma\beta)}{(1 + \gamma\beta)} \quad \rho_2 = \frac{(\gamma + \beta_m)}{(\gamma - 1)} \quad \beta_m = \frac{1}{(3 - 4v_m)} \quad \beta = \frac{k^f}{(k^f + 2G_L^f)} \quad \gamma_2 = \frac{G_L^f}{G_m} \quad (5.23)$$

e os limites para o G_T^{hom} dependem da relação entre os módulos transversais de cisalhamento dos materiais, se $G_i > G_f$ o limite superior é $G_{T+}^{hom} = G_T^{hom1}$ e o inferior $G_{T-}^{hom} = G_T^{hom2}$, se $G_i < G_f$ os limites superior e inferior são, respectivamente, $G_{T+}^{hom} = G_T^{hom2}$ e $G_{T-}^{hom} = G_T^{hom1}$; e o índice (\pm) indica que, para determinar o limite superior de uma propriedade, é necessário usar o limite superior da propriedade de referência, de forma análoga para o limite inferior.

A metodologia adotada neste trabalho realiza a homogeneização em duas etapas (Figura 5.2). Na primeira etapa considera-se a fibra revestida pela interfase e obtêm-se as propriedades homogeneizadas da fibra efetiva (fibra + interfase). Na segunda etapa, a fibra efetiva é considerada envolvida pelo material da matriz. Esta metodologia tem como pressuposto que, como a interfase é considerada fina se comparada ao raio da fibra, os campos uniformes na

fibra serão também uniformes no contorno da fibra efetiva. Tal situação é considerada na solução de cilindros concêntricos da teoria da elasticidade linear.

Figura 5.2 - Metodologia usada para incorporar o efeito da interfase.



Fonte – Autor, 2017.

Para a primeira etapa, considerando a fibra revestida pela interfase e aplicando as relações (5.15) - (5.18), obtêm-se as propriedades longitudinais homogeneizadas da fibra efetiva:

$$k^{fe} = k_i + \frac{f_f}{\frac{1}{(k_f - k_i)} + \frac{f_i}{(k_i + G_i)}} \quad (5.24)$$

$$E_L^{fe} = E_i f_i + E_f f_f + \frac{4f_i f_f (\nu_f - \nu_i)}{\frac{f_i}{k_f} + \frac{f_f}{k_i} + \frac{1}{G_i}} \quad (5.25)$$

$$G_L^{fe} = G_i + \frac{f_f}{\frac{1}{(G_f - G_i)} + \frac{f_i}{(2G_i)}} \quad (5.26)$$

$$\nu_L^{fe} = \nu_i f_i + \nu_f f_f + \frac{f_i f_f (\nu_f - \nu_i) \left(\frac{1}{k_i} - \frac{1}{k_f} \right)}{\frac{f_i}{k_f} + \frac{f_f}{k_i} + \frac{1}{G_i}} \quad (5.27)$$

onde os índices i , f e fe indicam interfase, fibra e fibra efetiva, respectivamente, sendo $f_i + f_f = 1$, pois na primeira etapa o material é composto apenas de fibra e interfase, sendo:

$$f_i = \frac{V_i}{V_i + V_f} \quad f_f = \frac{V_f}{V_i + V_f} \quad (5.28)$$

O modelo CCA não consegue obter as propriedades transversais homogeneizadas diretamente. Entretanto, de acordo com Hashin (1972,1983), G_T^{fe} pode ser limitada pelo princípio dos extremos (Noble & Sewell, 1971). Campos admissíveis de tensão e deformação são determinados no compósito cilíndrico revestido por uma casca. Os limites para o G_T^{fe}

dependem da relação entre os módulos transversais de cisalhamento dos materiais. Se $G_i > G_f$ o limite superior é G_T^{fe1} e o inferior G_T^{fe2} . Se $G_i < G_f$ os limites superior e inferior são, respectivamente, G_T^{fe2} e G_T^{fe1} .

As propriedades G_T^{fe1} e G_T^{fe2} são apresentadas, respectivamente, nas equações a seguir:

$$G_T^{fe1} = G_i + \frac{f_f}{\frac{1}{(G_f - G_i)} + \frac{f_i}{2G_i}} \quad (5.29)$$

$$G_T^{fe2} = G_i \left\{ 1 + \frac{(1 + \beta_i)f_f}{\rho - f_f \left[1 + \frac{(3\beta_i^2 f_i^2)}{(\alpha f_f^3 + 1)} \right]} \right\} \quad (5.30)$$

onde

$$\alpha = \frac{(\beta_i - \gamma\beta_f)}{(1 + \gamma\beta_f)} \quad \rho = \frac{(\gamma + \beta_i)}{(\gamma - 1)} \quad \beta_i = \frac{1}{(3 - 4\nu_i)} \quad \beta_f = \frac{k_f}{(k_f + 2G_f)} \quad \gamma = \frac{G_f}{G_i} \quad (5.31)$$

Os limites para o módulo transversal de Young e para o coeficiente de Poisson são obtidos, respectivamente, através das expressões abaixo, derivadas da teoria da elasticidade:

$$\frac{4}{E_{T(\pm)}^{fe}} = \frac{1}{G_{T(\pm)}^{fe}} + \frac{1}{k^{fe}} + \frac{4(\nu_L^{fe})^2}{E_L^{fe}} \quad (5.32)$$

$$\nu_{T(\pm)}^{fe} = \frac{E_{T(\pm)}^{fe}}{2G_{T(\pm)}^{fe}} - 1 \quad (5.33)$$

Com as propriedades da fibra efetiva, na segunda etapa da metodologia adotada, aplica-se o método CCA, considerando a fibra efetiva envolvida pela matriz. Para esta situação, as expressões utilizadas no processo de homogeneização são as seguintes:

$$k^{hom} = k_m + \frac{f^{fe}}{\frac{1}{k^{fe} - k_m} + \frac{f_m}{k^{fe} + G_L^{fe}}} \quad (5.34)$$

$$E_L^{hom} = E_m f_m + E_L^{fe} f^{fe} + \frac{4f_m f^{fe} (\nu_L^{fe} - \nu_m)}{\frac{f_i}{k^{fe}} + \frac{f_2}{k_m} + \frac{1}{G_m}} \quad (5.35)$$

$$G_L^{hom} = G_m + \frac{f^{fe}}{\frac{1}{(G_L^{fe} - G_m)} + \frac{f_m}{2G_m}} \quad (5.36)$$

$$v_L^{hom} = v_m f_m + v_L^{fe} f^{fe} + \frac{f_m f^{fe} (v_L^{fe} - v_m) (1/k_m - 1/k^{fe})}{\frac{f_m}{k^{fe}} + \frac{f^{fe}}{k_m} + \frac{1}{G_m}} \quad (5.37)$$

$$G_T^{hom1} = G_m + \frac{f^{fe}}{\frac{1}{(G_L^{fe} - G_m)} + \frac{f_m}{2G_m}} \quad (5.38)$$

$$G_T^{hom2} = G_m \left\{ 1 + \frac{(1 + \beta_m) f^{fe}}{\rho_2 - f^{fe} \left[1 + \frac{3\beta_m^2 f_m^2}{(\alpha_2 (f^{fe})^3 + 1)} \right]} \right\} \quad (5.39)$$

$$\frac{4}{E_{T(\pm)}^{hom}} = \frac{1}{G_{T(\pm)}^{hom}} + \frac{1}{k^{hom}} + \frac{4(v_L^{hom})^2}{E_L^{hom}} \quad (5.40)$$

$$v_{T(\pm)}^{hom} = \frac{E_{T(\pm)}^{hom}}{2G_{T(\pm)}^{hom}} - 1 \quad (5.41)$$

onde

$$\alpha_2 = \frac{(\beta_m - \gamma \beta^{fe})}{(1 + \gamma \beta^{fe})} \quad \rho_2 = \frac{(\gamma + \beta_m)}{(\gamma - 1)} \quad \beta_m = \frac{1}{(3 - 4v_m)} \quad \beta^{fe} = \frac{k^{fe}}{(k^{fe} + 2G_L^{fe})} \quad \gamma_2 = \frac{G_L^{fe}}{G_m} \quad (5.42)$$

5.3 Condutividade térmica efetiva

Nesta seção são descritos os modelos de Mori-Tanaka e CCA para determinação da condutividade térmica efetiva de compósitos reforçados por fibras longas unidirecionais. Tal como no caso de homogeneização mecânica, a presença de interfases é levada em conta através de uma metodologia aplicada em conjunto com o modelo CCA.

5.3.1 Modelo de Mori-Tanaka

Tratando-se do processo de homogeneização de condutividade térmica efetiva de compósitos reforçados por fibras longas, paralelas e distribuídas randomicamente, aplica-se o modelo de Mori-Tanaka apresentado na seção 3.4.1. No presente caso, considerando o compósito reforçado por fibras longas unidirecionais, as componentes do tensor de Eshelby são:

$$S_{1111} = S_{2222} = \frac{1}{2} \quad (5.43)$$

com as demais componentes nulas.

5.3.2 Composite Cylinder Assemblage (CCA)

Hashin (1983) deduziu expressões para determinação de condutividade térmica efetiva de compósitos transversalmente isotrópicos reforçados por fibras longas, paralelas e distribuídas aleatoriamente através do modelo CCA. Para isso, Hashin se baseou na analogia entre o módulo de cisalhamento longitudinal e a condutividade térmica transversal. Esta analogia pode ser notada também em análises numéricas para os casos de fibras circulares e células unitárias quadradas (Springer & Tsai, 1967). As expressões são apresentadas a seguir:

$$K_L^{hom} = (1 - f)K_m + fK_i \quad (5.44)$$

$$K_{T(-)}^{hom} = K_m + \frac{f}{\frac{1}{K_i - K_m} + \frac{1-f}{2K_m}} \quad (5.45)$$

$$K_{T(+)}^{hom} = K_i + \frac{1-f}{\frac{1}{K_m - K_i} + \frac{f}{2K_i}}$$

Para homogeneização de compósitos que apresentam interfaces, o presente trabalho emprega a mesma metodologia aplicada para obtenção de propriedades mecânicas efetivas apresentada na seção 5.2.2 (Figura 5.2), isto é, o processo se desenvolve em duas etapas.

Na primeira etapa, as fibras são consideradas como revestidas por interfaces e, para este conjunto bifásico, aplica-se o método CCA. Desta forma, obtém-se para a condutividade térmica longitudinal da fibra efetiva:

$$K_L^{fe} = f_i K_i + f_f K_f \quad (5.46)$$

onde K_i e K_f são as condutividades térmicas da interface e da fibra, respectivamente.

Para a condutividade térmica transversal são obtidos através das equações (5.44) e (5.45) os seguintes limites superior e inferior:

$$K_{T(+)}^{fe} = K_f + \frac{f_i}{\frac{1}{K_i - K_f} + \frac{f_f}{2K_f}} \quad (5.47)$$

$$K_{T(-)}^{fe} = K_i + \frac{f_f}{\frac{1}{K_f - K_i} + \frac{f_i}{2K_i}} \quad (5.48)$$

Na segunda etapa, considera-se a fibra efetiva, cuja propriedades foram obtidas na primeira etapa, revestida pelo material da matriz. De forma similar, usando as equações (5.44) e (5.45) com as propriedades da fibra efetiva em (5.46), (5.47) e (5.48), a condutividade térmica longitudinal efetiva e os limites da condutividade térmica transversal efetiva são dados, respectivamente, por:

$$K_L^{hom} = f_m K_m + f_{fe} K_L^{fe} \quad (5.49)$$

$$K_{T(+)}^{hom} = \langle K_{T(\pm)}^{fe} \rangle + \frac{f_m}{\frac{1}{K_m - \langle K_{T(\pm)}^{fe} \rangle} + \frac{f_{fe}}{2 \langle K_{T(\pm)}^{fe} \rangle}} \quad (5.50)$$

$$K_{T(-)}^{hom} = K_m + \frac{f_{fe}}{\frac{1}{\langle K_{T(\pm)}^{fe} \rangle - K_m} + \frac{f_m}{2K_m}} \quad (5.51)$$

onde $\langle K_{T(\pm)}^{fe} \rangle$ é a condutividade média na fibra efetiva.

5.4 Coeficiente de expansão térmica efetivo

A seguir são apresentados os modelos de Lu (2013) e CCA (Hashin, 1983) formulados para avaliação de coeficiente de expansão térmica efetivo. A influência de interfases também é considerada neste caso.

5.4.1 Modelo de Lu

Para os coeficientes de expansão térmica efetivos, utiliza-se o modelo de Lu (2013) descrito na seção 3.5.3, particularizado para compósitos reforçados por fibras longas. Tal particularização leva às seguintes expressões para os coeficientes de expansão térmica efetivos do compósito:

$$\alpha_L^{hom} = \alpha_m + \left\{ \frac{2B_2 - B_4 - B_5}{2B_2B_3 - B_1(B_4 + B_5)} \right\} f_f D_0 (\alpha_f - \alpha_m) \quad (5.52)$$

$$\alpha_T^{hom} = \alpha_m + \left\{ \frac{B_3 - B_1}{2B_2B_3 - B_1(B_4 + B_5)} \right\} f_f D_0 (\alpha_f - \alpha_m) \quad (5.53)$$

onde B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 e D_0 estão apresentados nas equações (3.65) - (3.69) respectivamente.

5.3.2 Composite Cylinder Assemblage (CCA)

O modelo de Hashin (1983) para materiais transversalmente isotrópicos é também usado neste trabalho para determinação do coeficiente de expansão térmica efetivo de compósitos reforçados por fibras longas, paralelas e randomicamente distribuídas. Para compósitos transversalmente isotrópicos, têm-se:

$$\alpha_L^{hom} = \alpha_m + \frac{\alpha_i - \alpha_m}{\frac{1}{k_i} - \frac{1}{k_m}} \left[\frac{3(1 - 2\nu_L^{hom})}{E_L^{hom}} - \frac{1}{k_m} \right] \quad (5.54)$$

$$\alpha_T^{hom} = \alpha_m + \frac{\alpha_i - \alpha_m}{\frac{1}{k_i} - \frac{1}{k_m}} \left[\frac{3}{2k^{hom}} - \frac{3(1 - 2\nu_L^{hom})\nu_L^{hom}}{E_L^{hom}} - \frac{1}{k_m} \right] \quad (5.55)$$

onde ν_L^{hom}, E_L^{hom} e k^{hom} são propriedades mecânicas efetivas deduzidas pelo método CCA através das expressões:

$$\nu_L^{hom} = \nu_m f_m + \nu_f f_f + \frac{(\nu_f - \nu_m) f_m f_f \left(\frac{1}{k_m} - \frac{1}{k_f} \right)}{\frac{f_m}{k_f} + \frac{f_f}{m} + \frac{1}{G_m}} \quad (5.56)$$

$$E_L^{hom} = E_m f_m + E_f f_f + \frac{4(\nu_f - \nu_m) f_m f_f}{\frac{f_m}{k_f} + \frac{f_f}{k_m} + \frac{1}{G_m}} \quad (5.57)$$

$$k^{hom} = k_m + \frac{f_f}{\frac{1}{k_f - k_m} + \frac{f_m}{k_m + G_m}} \quad (5.58)$$

Para homogeneização de compósitos que apresentam interfaces, o presente trabalho emprega a mesma metodologia aplicada anteriormente para o modelo CCA, onde tal metodologia está sintetizada na Figura 5.2, isto é, o processo se desenvolve em duas etapas.

Na primeira etapa, obtém-se para o coeficiente de expansão térmica longitudinal e transversal da fibra efetiva (fibra + interface), respectivamente:

$$\alpha_L^{fe} = \alpha_i + \frac{\alpha_f - \alpha_i}{\frac{1}{k_f} - \frac{1}{k_i}} \left[\frac{3(1 - 2\nu_L^{fe})}{E_L^{fe}} - \frac{1}{k_i} \right] \quad (5.59)$$

$$\alpha_T^{fe} = \alpha_i + \frac{\alpha_f - \alpha_i}{\frac{1}{k_f} - \frac{1}{k_i}} \left[\frac{3}{2k^{fe}} - \frac{3\nu_L^{fe}(1 - 2\nu_L^{fe})}{E_L^{fe}} - \frac{1}{k_i} \right] \quad (5.60)$$

onde k^{fe} , E_L^{fe} e ν_L^{fe} estão descritas nas equações (5.24), (5.25) e (5.26), respectivamente.

Na segunda etapa, obtém-se o coeficiente de expansão térmica longitudinal e transversal efetivo através das equações (5.54), (5.55), dados respectivamente por:

$$\alpha_L^{hom} = \alpha_m + \frac{\alpha_L^{fe} - \alpha_m}{\frac{1}{k^{fe}} - \frac{1}{k_m}} \left[\frac{3(1 - 2\nu_L^{hom})}{E_L^{hom}} - \frac{1}{k_m} \right] \quad (5.61)$$

$$\alpha_T^{hom} = \alpha_m + \frac{\alpha_T^{fe} - \alpha_m}{\frac{1}{k^{fe}} - \frac{1}{k_m}} \left[\frac{3}{2k^{hom}} - \frac{3\nu_L^{hom}(1 - 2\nu_L^{hom})}{E_L^{hom}} - \frac{1}{k_m} \right] \quad (5.62)$$

onde k^{fe} , k^{hom} , ν_L^{hom} , E_L^{hom} , α_L^{fe} , α_T^{fe} são dados pelas equações (5.24), (5.34), (5.37), (5.35), (5.59) e (5.60).

5.5 Método dos elementos finitos para determinação de propriedades efetivas

A seguir é apresentada uma metodologia baseada no método dos elementos finitos para determinação de propriedades efetivas de compósitos reforçados por fibras longas unidirecionais. Essa metodologia considera a presença da interface e é aplicada em células unitárias quadrada e hexagonal.

No presente trabalho é utilizado o método variacional assintótico para homogeneizar materiais originalmente heterogêneos e obter as propriedades efetivas através de uma análise micromecânica em uma microestrutura periódica representativa do material heterogêneo, a

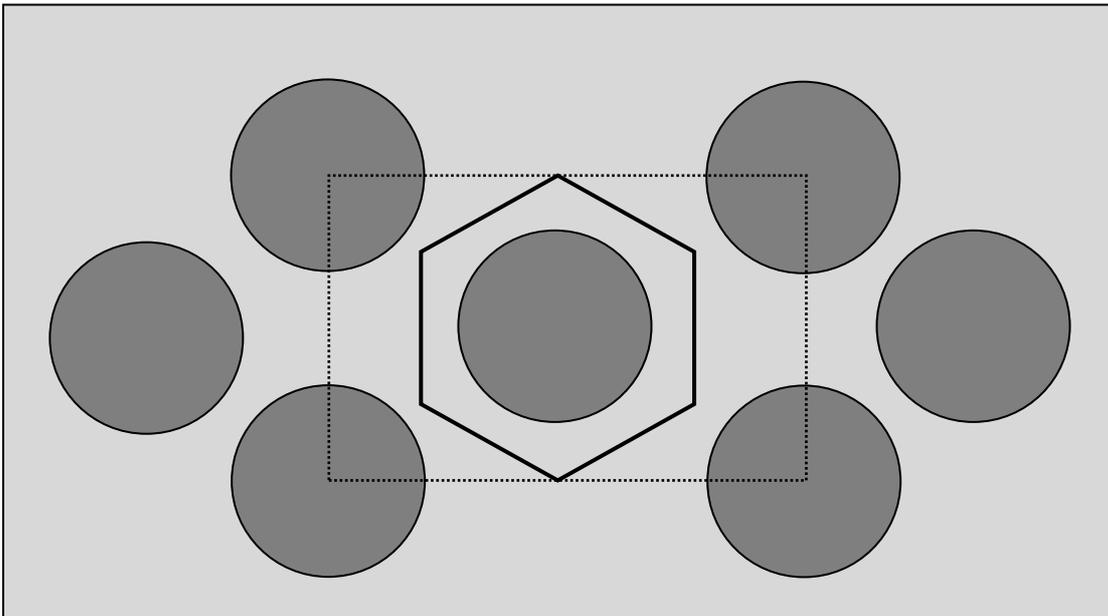
célula unitária. Yu & Tang (2007) desenvolveram um algoritmo baseado nesse método e denominado VAMUCH (*Variational Asymptotic Method for Unit Cell*), o qual é executado em conjunto com o *software* ANSYS®. Este algoritmo necessita de uma malha de elementos finitos da célula unitária, incluindo toda a geometria e propriedades dos materiais como dados de entrada para calcular as propriedades efetivas.

O algoritmo VAMUCH trabalha com células unitárias com apenas dois materiais: fibra e matriz. Por isto, torna-se necessário adicionar ao algoritmo dados e parâmetros necessários para incorporação da interfase. Para estes casos, no presente trabalho foi implementado um modelo paramétrico usando os recursos do ANSYS® para realizar o pré-processamento de células unitárias quadradas e hexagonais que trabalha em conjunto com o VAMUCH, para que o mesmo possa considerar a interfase em sua análise numérica.

Neste modelo paramétrico é considerado o elemento quad8 em todas as fases da célula unitária. Este é um elemento quadrilateral de oito nós com três graus de liberdade de translação e três graus de liberdade de rotação por nó. São usadas funções de interpolação de segunda ordem para a geometria, deslocamento e rotação. Para determinação da matriz de rigidez do utilizando-se o esquema de integração Gaussiana com quatro pontos.

A quantidade de números de nós nas interfaces, matriz-interfase e interfase-fibra é a mesma em ambas as fases. Para o processo de homogeneização, são aplicadas nas células unitárias condições de contorno periódicas permitindo a representação do material por um conjunto infinito de células unitárias, que consideradas individualmente possuem as propriedades efetivas do compósito. . A distribuição hexagonal de fibras pode ser representada por uma célula unitária retangular, como ilustrado na Figura 5.3.

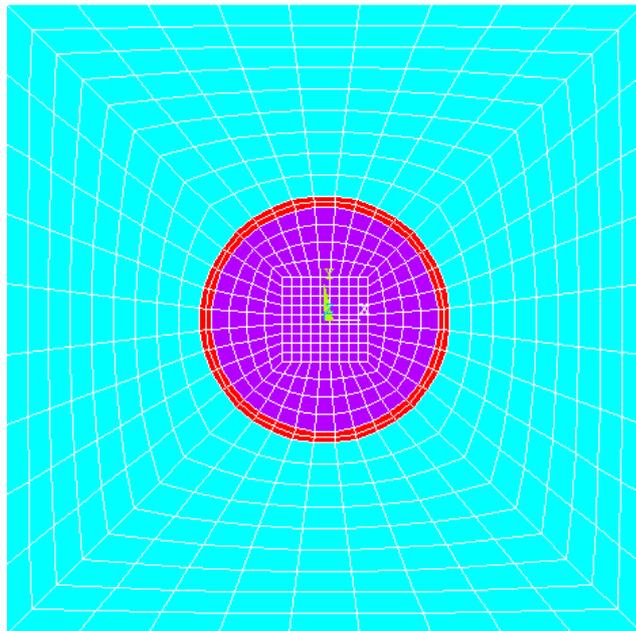
Figura 5.3 - Célula unitária hexagonal reletida pela geometria retangular.



Fonte – Autor, 2017.

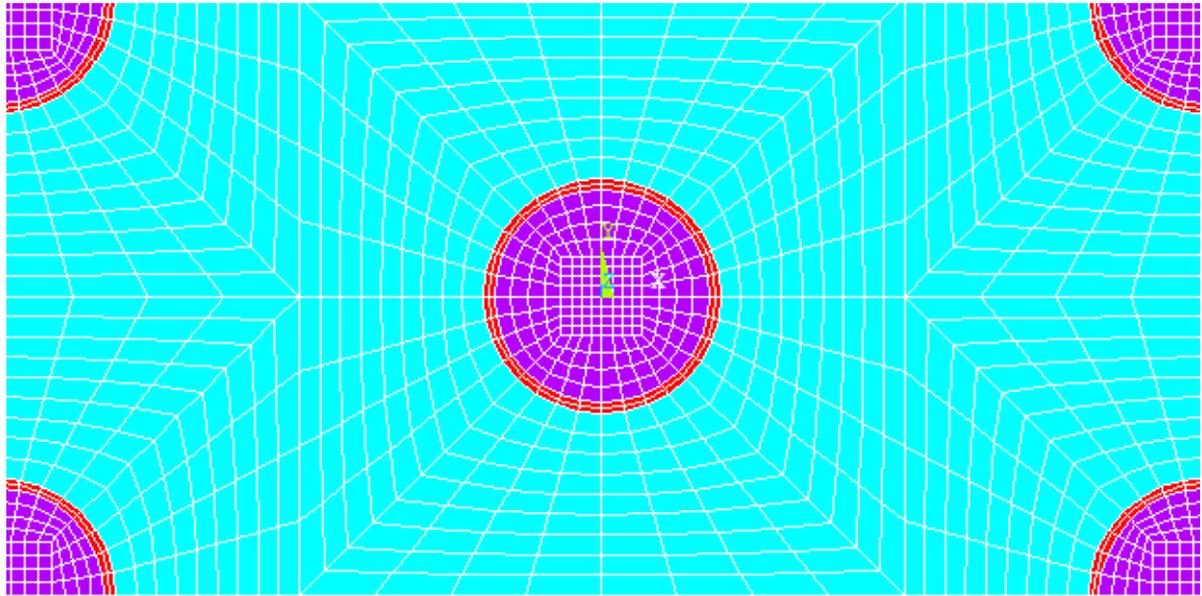
As Figuras 5.4 e 5.5 ilustram, respectivamente, as discretizações geradas pelo citado modelo numérico paramétrico de pré-processamento para os casos de células unitárias quadrada e hexagonal.

Figura 5.4 - Célula unitária quadrada gerada através do modelo numérico desenvolvido no presente trabalho.



Fonte – Autor, 2017.

Figura 5.5 - Célula unitária hexagonal gerada através do modelo numérico desenvolvido no presente trabalho.



Fonte – Autor, 2017

Apresenta-se no apêndice A o modelo paramétrico para construção da célula unitária quadrada com interfase e, no apêndice B, para célula unitária hexagonal com interfase. Ambos os modelos paramétricos devem trabalhar em conjunto com o ANSYS® e o VAMUCH.

6. APLICAÇÕES PARA COMPÓSITOS COM MICROESTRUTURA PERIÓDICA

6.1 Considerações iniciais

O presente capítulo apresenta os resultados obtidos através dos modelos para compósitos com microestrutura periódica descritos no capítulo anterior. Serão considerados tanto compósitos em que as fibras são revestidas por interfases quanto compósitos ideais bifásicos em que as fibras e a matriz são unidas por interfaces perfeitas. Devido à complexidade em mensurar as propriedades das interfases em estudos experimentais, nos exemplos tratando de compósitos com interfases, somente serão apresentadas comparações entre resultados numéricos e analíticos.

6.2 Propriedades mecânicas efetivas

Para compósitos reforçados por fibras contínuas serão comparados os resultados de modelos que consideram os efeitos da interfase com outros que desconsideram tais efeitos. O objetivo é estudar a influência da presença de interfases nas propriedades efetivas de compósitos unidirecionais com microestrutura periódica.

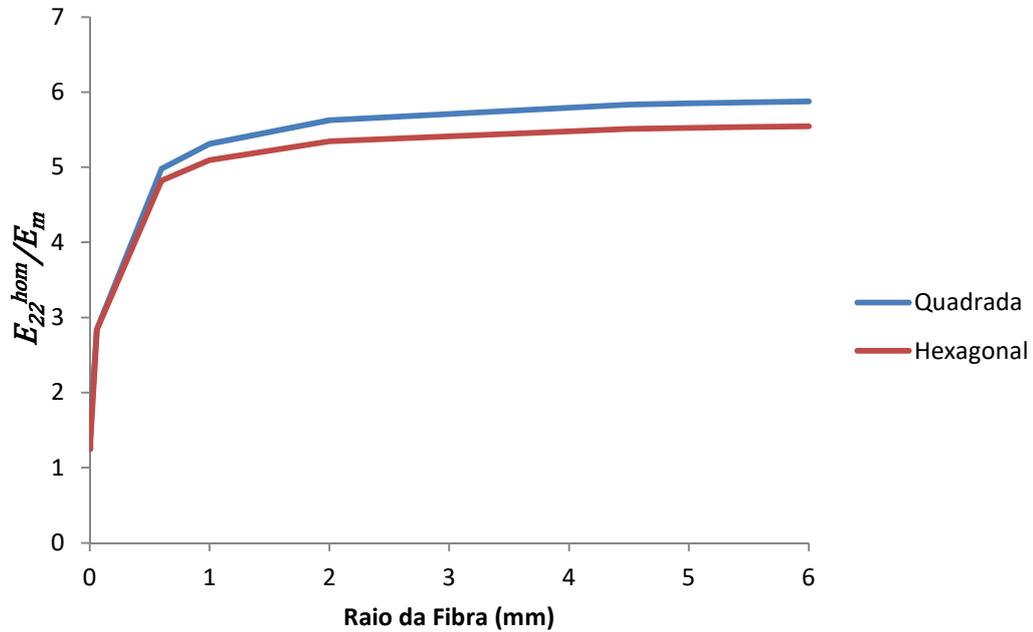
6.2.1. Influência do raio das fibras sobre as propriedades mecânicas efetivas

Os modelos analíticos de homogeneização de materiais bifásicos não detectam o efeito do raio das fibras sobre as propriedades efetivas, pois consideram a fração volumétrica de fibras e alguns detalhes relacionados à forma da fibra e, por isso, os valores estimados das propriedades mecânicas efetivas devem ser os mesmos para qualquer valor de raio da fibra desde que não haja variação na fração volumétrica. No exemplo a seguir, comparam-se os resultados obtidos via método dos elementos finitos para as propriedades efetivas com a variação do raio das fibras, mantendo-se constantes a fração volumétrica.

As propriedades da matriz, das fibras e da interfase do material considerado são as mesmas do exemplo anterior. A espessura da interfase é de 1 μm e o raio da fibra tem variação de 6 μm a

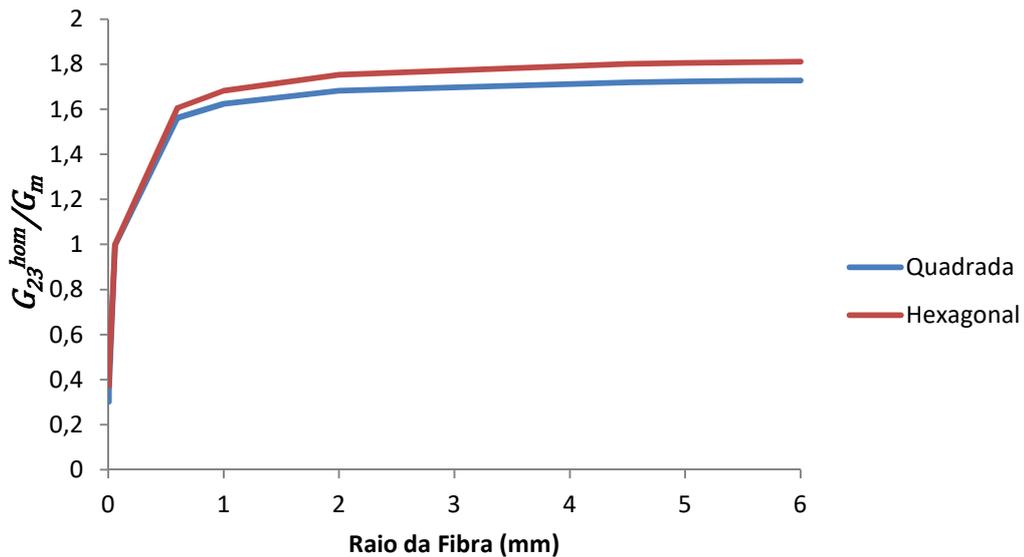
6 mm. A fração volumétrica é mantida constante em 30% de fibras. Os resultados obtidos para as propriedades efetivas E_{22}^{hom} e G_{23}^{hom} estão apresentados nas Figura 6.1 e Figura 6.2.

Figura 6.1: Variação do módulo de elasticidade transversal com o aumento do raio da fibra.



Fonte: Autor, 2017.

Figura 6.2: Variação do módulo de cisalhamento transversal com o aumento do raio da fibra.



Fonte: Autor, 2017.

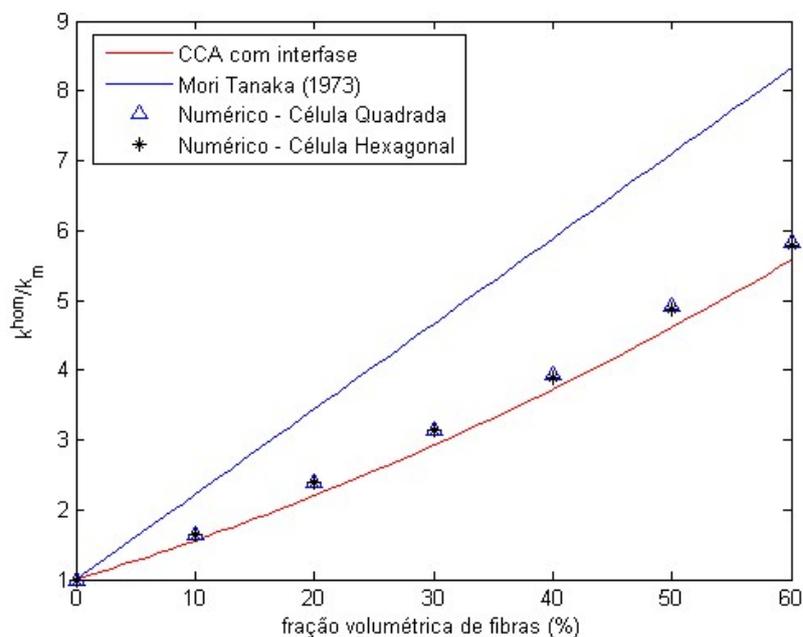
O raio da fibra apresentou influência nas propriedades efetivas, entretanto, a partir de determinado raio, o valor da propriedade efetiva mantém-se com uma variação desprezável.

Nas Figuras 6.1 e 6.2, esse raio limite obedece à relação $r_{lim} \approx 1000t_i$, sendo t_i a espessura da interfase. Isso indica que, para raios de fibra maiores que o r_{lim} , a influência sobre a resposta efetiva do material torna-se desprezável.

6.2.2. Aplicação dos modelos micromecânicos

No próximo exemplo são considerados dois modelos analíticos e o modelo de elementos finitos com células quadrada e hexagonal para avaliar o módulo volumétrico efetivo (k^{hom}) de um compósito. Os modelos analíticos utilizados são o CCA, com a metodologia que incorpora o efeito da interfase, e o modelo de Mori & Tanaka que não considera a interfase, ou seja, modelo bifásico matriz-fibra. As propriedades mecânicas da matriz e das fibras são: $E_m = 3,11 \text{ GPa}$, $\nu_m = 0,34$, $E_f = 77 \text{ GPa}$ e $\nu_f = 0,2$. A interfase adotada possui módulo de elasticidade longitudinal menor que os das outras fases e, por isso, será denominada de interfase fraca. As propriedades mecânicas da interfase são $E_i = 0,02799 \text{ GPa}$ e $\nu_i = 0,34$. O raio da fibra e a espessura da interfase adotado está de acordo com a relação limite obtida no exemplo anterior, por isso adota-se raio da fibra de 1mm e espessura da interfase de 1 μm . Os resultados obtidos para a variação do módulo volumétrico homogeneizado em função da fração volumétrica de fibras podem ser visualizados na Figura 6.3.

Figura 6.3: Variação do módulo de elasticidade volumétrico efetivo.



Fonte: Autor, 2017.

O gráfico acima evidencia a influência da interfase no módulo de elasticidade volumétrico efetivo. Verifica-se que com o aumento da fração volumétrica, aumenta-se a diferença entre os resultados do modelo analítico bifásico e o resultado dos outros modelos considerados. A estratégia proposta neste trabalho de aplicar o CCA em duas etapas apresenta boa concordância com os resultados numéricos que consideram os efeitos das interfases.

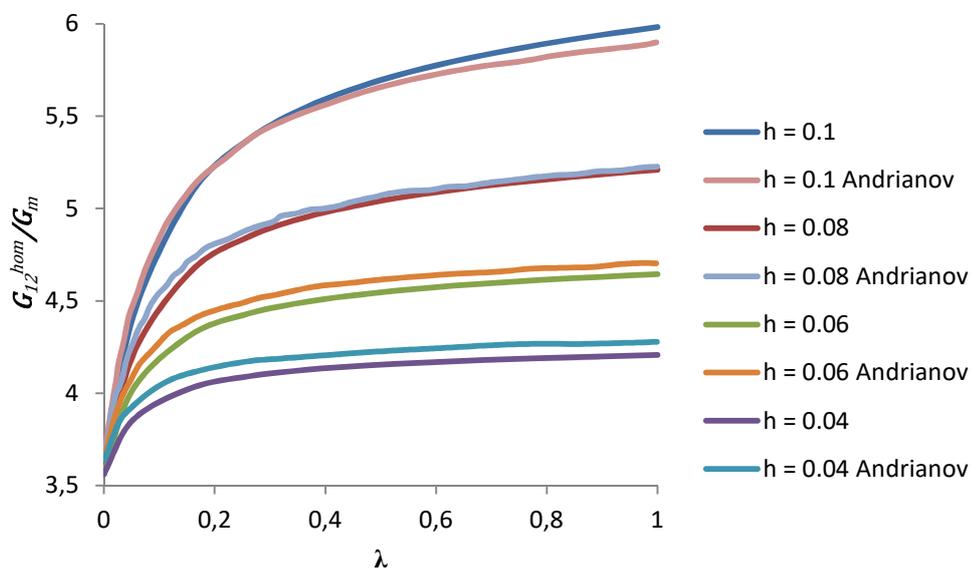
No caso de interfase de baixa rigidez, situação comum na prática, o modelo bifásico de Mori-Tanaka, que não considera a interfase, apresentou valores do módulo de elasticidade volumétrico efetivo maiores do que aqueles obtidos através dos três modelos que consideram os efeitos de interfases.

6.2.3. Influência da espessura da interfase sobre as propriedades mecânicas efetivas

No exemplo a seguir, analisa-se a influência da espessura das interfases nas propriedades mecânicas efetivas do material. Para tal, utilizam-se o método dos elementos finitos e o método analítico desenvolvido por Andrianov *et al.* (2008).

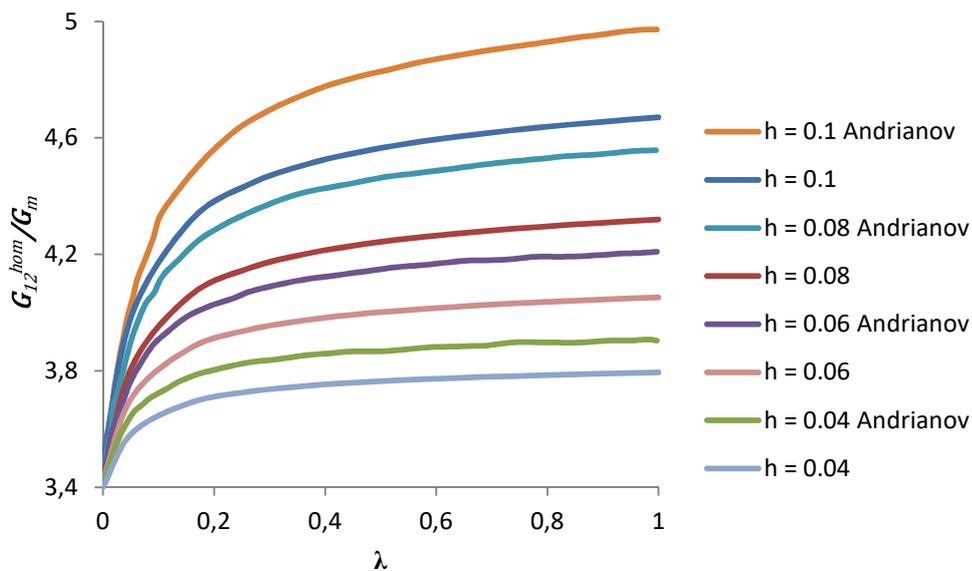
Nesse exemplo, os dados da matriz e da fibra são, respectivamente: $G_m = 0,416 \text{ GPa}$, $\nu_m = 0,2$, $G_f = 8,33 \text{ GPa}$ e $\nu_f = 0,2$. Andrianov *et al.* (2008) consideram o módulo de elasticidade transversal da interfase variando entre G_m e G_f . No estudo, admite-se que as fibras têm raio constante $r = 1\text{mm}$. Este valor é adotado de acordo com o r_{lim} encontrado no primeiro exemplo desse capítulo. Nesse caso, a variável $h = t_i/r$ depende apenas da espessura da interfase t_i . Outra variável adimensional é $\lambda = (G_i - G_m)/(G_f - G_m)$. Para interfase que apresenta as propriedades mecânicas da fibra, têm-se $\lambda = 1$, enquanto que para o caso de interfase que apresenta as propriedades mecânicas da matriz tem-se $\lambda = 0$. A fração volumétrica de fibras é mantida constante com valor de 60% de fibras. Os resultados obtidos por Andrianov *et al.* (2008) e pelo método dos elementos finitos são apresentados na Figura 6.4 para célula unitária quadrada e na Figura 6.5 para célula unitária hexagonal.

Figura 6.4: Variação do módulo de cisalhamento com a espessura da interfase para célula unitária quadrada.



Fonte: Autor, 2017.

Figura 6.5: Variação do módulo de cisalhamento com a espessura da interfase para célula unitária hexagonal.



Fonte: Autor, 2017.

Observa-se nas Figuras 6.4 e 6.5 que o aumento da espessura da interfase influencia fortemente no módulo de cisalhamento efetivo. Espessuras de interfase diferentes fornecem valores diferentes para o módulo de cisalhamento efetivo. A influência da espessura da interfase se apresenta mais acentuada para pequenos valores de λ , sendo desprezível para valores de λ próximos a 1. Isso indica que, para cada espessura existe um valor limite para λ , a partir do qual o seu aumento fornece variação desprezível na resposta efetiva. O método dos elementos finitos aplicado a célula unitária quadrada apresentou uma razoável concordância com o modelo de Andrianov *et al.* (2008). O método dos elementos finitos aplicado ao caso de célula unitária hexagonal apresentou resultados com a mesma tendência de crescimento daqueles obtidos através do modelo de Andrianov *et al.* (2008), conforme pode ser visto na Figura 6.5. Por outro lado, neste caso, a diferença entre os valores fornecidos pelos dois métodos é mais acentuada do que para células unitárias quadradas.

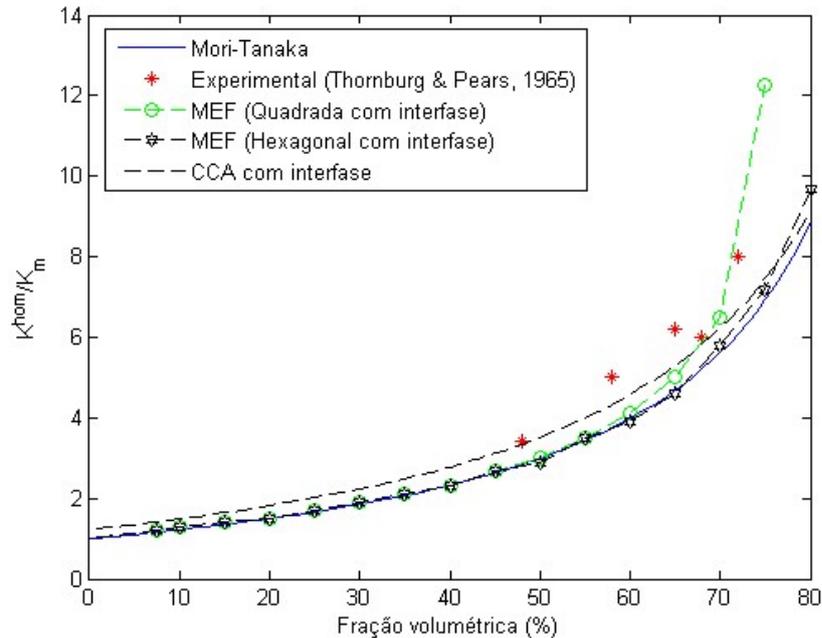
6.3 Condutividade térmica efetiva

Para compósitos reforçados por fibras contínuas, serão comparados os resultados de modelos que consideram os efeitos de interfases com outros que desconsideramos mesmos.. O objetivo é estudar a influência da presença de interfases na condutividade térmica efetiva de compósitos reforçados por fibras longas unidirecionais.

6.3.1. Aplicação dos modelos micromecânicos

No presente exemplo, determina-se a condutividade térmica efetiva de um compósito com microestrutura periódica considerando efeito de interfase. As propriedades da matriz e das fibras são respectivamente: $K_m = 1 \text{ W/mK}$ e $K_f = 666 \text{ W/mK}$. A interfase adotada apresenta condutividade térmica $K_i = 0,01 \text{ W/mK}$. A espessura da interfase é mil vezes menor que o raio da fibra. Consideram-se o modelo de Mori & Tanaka (bifásico), o CCA em duas etapas (matriz, fibra, interfase) e o modelo de elementos finitos aplicado a célula quadrada e hexagonal. Os resultados obtidos pelos modelos estão apresentados na Figura 6.6, juntamente com valores experimentais encontrados por Thornburg & Pears (1965).

Figura 6.6: Variação da condutividade térmica efetiva com a fração volumétrica de fibras.



Fonte: Autor, 2017.

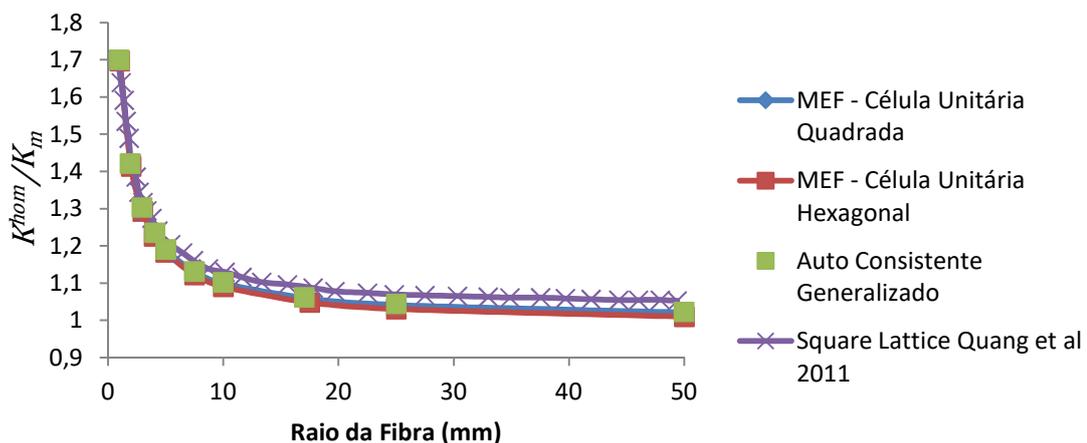
Os resultados experimentais de Thornburg & Pears (1965) foram obtidos para frações volumétricas de fibras entre 40% e 75%, região da curvatura mais acentuada no gráfico. A metodologia apresentada no item 5.3.2, que usa o CCA considerando a interfase, é a que proporciona os menores erros quando comparado com os valores experimentais. O método numérico com célula unitária quadrada segue a mesma tendência de crescimento apresentada pelos resultados experimentais.

A interfase utilizada no presente exemplo possui condutividade térmica muito inferior a das outras fases. Com interfase nessa condição os modelos bifásicos deveriam apresentar valores da propriedade efetiva maiores se comparado com modelos que considere a presença da interfase. Entretanto, nesse exemplo, o modelo bifásico apresentou resultados próximos aos dos modelos trifásicos. Isso deve-se ao fato da interfase considerada ser uma interfase fina, indicando que para compósitos reforçados por fibras com interfase com espessura muito pequena comparada ao raio das fibras, modelos bifásicos se apresentam como uma solução prática para determinação da condutividade térmica efetiva.

6.3.2. Influência do raio das fibras sobre a condutividade térmica efetiva

Considera-se primeiro o exemplo de um compósito reforçado por fibra submetido a um fluxo de calor normal à direção das fibras. Para este exemplo, as condutividades térmicas da matriz e da fibra são $K_m = 0,1 W/mK$ e $K_f = 1 W/mK$, respectivamente. O raio das fibras varia entre 1 mm a 50 mm. Considera-se uma interfase fina ($t_i = 20 nm$) e altamente condutora térmica ($K_i = 50 W/mK$), quando comparada com as outras fases. A fração volumétrica é mantida constante em 30% de fibras. Comparam-se os resultados encontrados pelo modelo de elementos finitos aplicado a células unitárias quadradas e hexagonais com aqueles obtidos por Quang *et al.* (2011) e pelo modelo auto consistente generalizado. Tal comparação é apresentada na Figura 6.7.

Figura 6.7: Efeito de tamanho do raio das fibras na condutividade térmica efetiva.

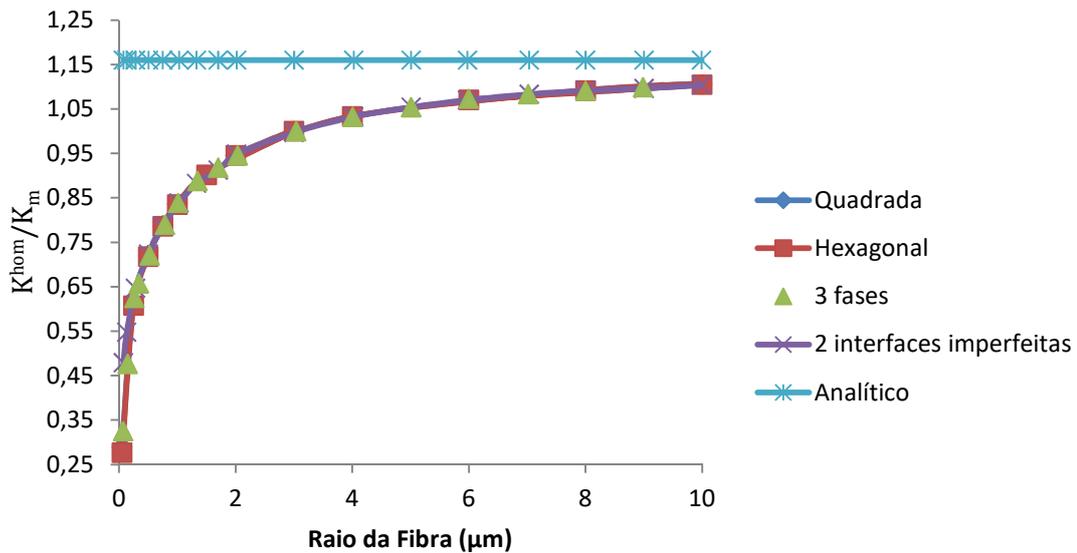


Fonte: Autor, 2017.

No segundo exemplo considera-se um compósito reforçado por fibra submetido a um fluxo de calor normal à direção das fibras. Diferentemente do exemplo anterior, o valor da condutividade térmica da interfase é inferior ao das outras fases. As condutividades térmicas da matriz, da fibra e da interfase são, respectivamente: $K_m = 178 W/mK$, $K_f = 300 W/mK$ e $K_i = 2,918 W/mK$. A fração volumétrica de fibras é de 30% e o raio da fibra varia de $0,05 \mu m$ a $10 \mu m$. A interfase possui espessura de $20 nm$. Na Figura 6.8 comparam-se os resultados obtidos pelo modelo de elementos finitos aplicado a célula quadrada e hexagonal com aqueles obtidos por Escarpini Filho & Marques (2014) para material trifásico (matriz, fibra e interfase) com interfaces perfeitas e material bifásico (matriz e fibra) com interfaces imperfeitas. Os resultados numéricos são comparados com os obtidos por uma formulação de

micromecânica analítica apresentada em Nan *et al.* (1997), que prevê a condutividade térmica efetiva de materiais compósitos com resistência térmica interfacial em termos de uma abordagem de meio efetivo combinada com o conceito essencial da resistência de contato térmico de Kapitza.

Figura 6.8: Variação da condutividade térmica com o aumento do raio da fibra.



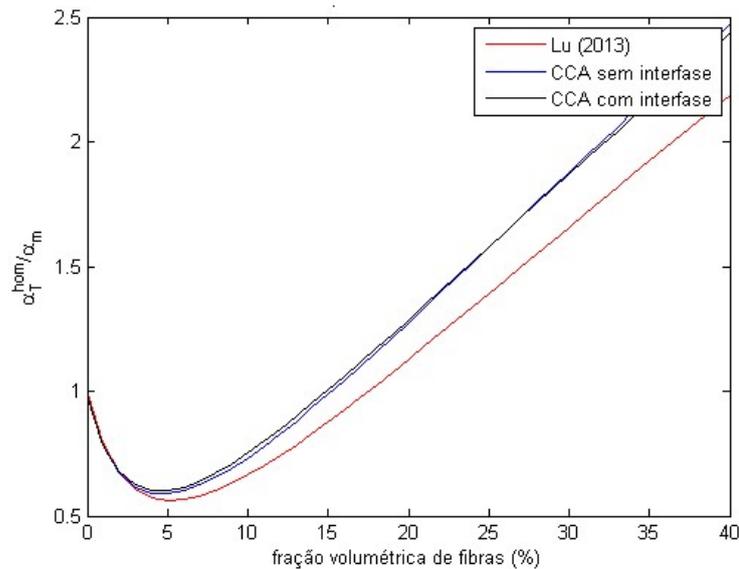
Fonte: Autor, 2017.

Observa-se nas Figuras 6.7 e 6.8 que, para interfase com valor de condutividade térmica maior que a das outras fases, o aumento do raio da fibra implica em uma diminuição na condutividade térmica efetiva, enquanto que para interfase com condutividade térmica menor que a das outras fases ocorre o inverso. Com o aumento do raio das fibras, considerando a mesma fração volumétrica de fibras, a fração volumétrica de interfase torna-se menor, pois, com raios de fibras maiores, é necessária uma quantidade menor de fibras para manter a mesma fração volumétrica de fibras. Por isso, para interfase com valor de condutividade térmica maior que das outras fases, a situação de máxima condutividade térmica efetiva é quando se têm fibras com os menores raios possíveis, aumentando a quantidade de fibras e, conseqüentemente, aumentando a fração volumétrica de interfase. Porém, para interfase fraca, a situação de máxima condutividade térmica efetiva é quando as fibras possuem os maiores raios possíveis. É importante ressaltar, com base na Figura 6.8, que existe um tamanho de raio de fibra em que, mesmo com interfase, a estimativa da condutividade térmica efetiva de compósito reforçado por fibras pode ser realizada através dos modelos micromecânicos para compósitos bifásicos.

6.4 Coeficiente de expansão térmica efetiva

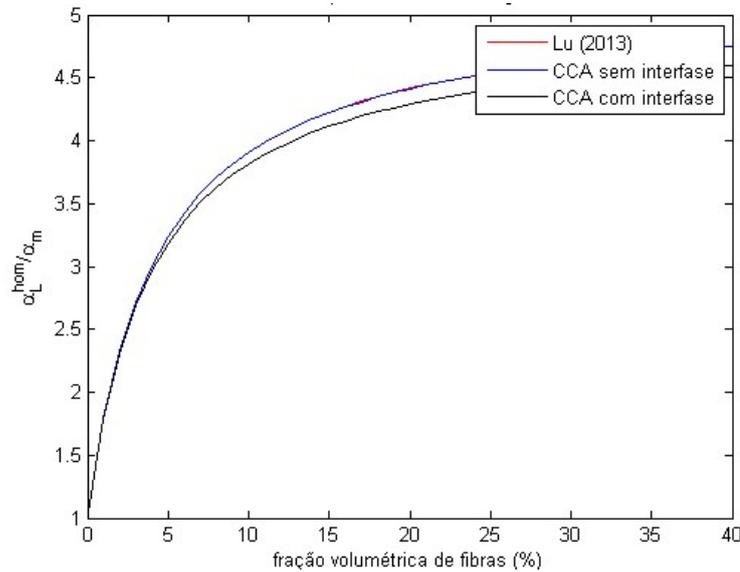
No exemplo a seguir, o material compósito é constituído por uma matriz com coeficiente de expansão térmica de $2 \times 10^{-6}/K$, reforçada por fibras longas distribuídas periodicamente na matriz e com coeficiente de expansão térmica de $10^{-5}/K$. O coeficiente de expansão térmica adotado para a interfase é de $10^{-7}/K$. As propriedades mecânicas dos constituintes deste compósito são as mesmas apresentadas no exemplo 6.2.1. As Figuras 6.9 e 6.10 apresentam os resultados obtidos para o coeficiente de expansão térmica efetivo em função da fração volumétrica de fibras usando os modelos desenvolvidos por Lu (2013), Hashin (1983) e o CCA com interfase apresentado na seção 5.3.2. deste trabalho.

Figura 6.9: Coeficiente de expansão térmica transversal efetivo em função da fração volumétrica de fibras.



Fonte: Autor, 2017.

Figura 6.10: Coeficiente de expansão térmica longitudinal efetivo em função da fração volumétrica de fibras.



Fonte: Autor, 2017.

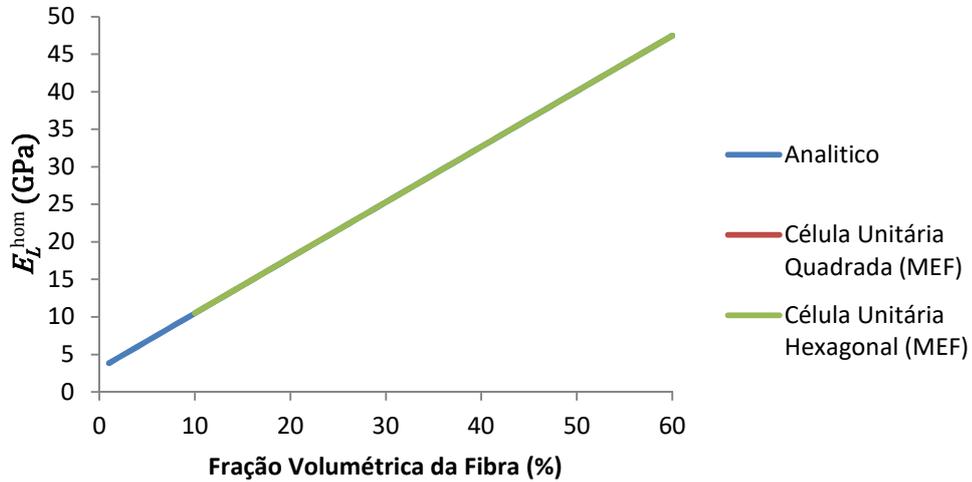
Os resultados dos modelos apresentam a mesma tendência de crescimento com o aumento da fração volumétrica de fibras. Para o caso do coeficiente de expansão térmica transversal efetivo, não houve variações consideráveis nos resultados fornecidos pelo modelo CCA bifásico e o CCA com a consideração da interfase. Os valores fornecidos pelos modelos de CCA sem interfase e Lu (2013) para o coeficiente de expansão térmica longitudinal efetivo são praticamente coincidentes, enquanto o modelo que considera a interfase apresentou valores inferiores. Isto se deve ao fato do coeficiente de expansão térmica da interfase ser menor que a dos outros constituintes.

6.5 Comparação entre modelo numérico e analítico

Nesse tópico apresenta-se uma comparação entre os resultados fornecidos pelo método numérico, descrito na seção 5.4, com aqueles fornecidos pelo modelo analítico CCA com a técnica implementada no presente trabalho (seção 5.2.2) para considerar a interfase. Células unitárias quadradas e hexagonais são consideradas nas avaliações numéricas. As propriedades mecânicas da matriz e da fibra são respectivamente: $E_m = 3,11 \text{ GPa}$, $\nu_m = 0,34$, $E_f = 77 \text{ GPa}$ e $\nu_f = 0,2$. A interfase é considerada com as seguintes propriedades

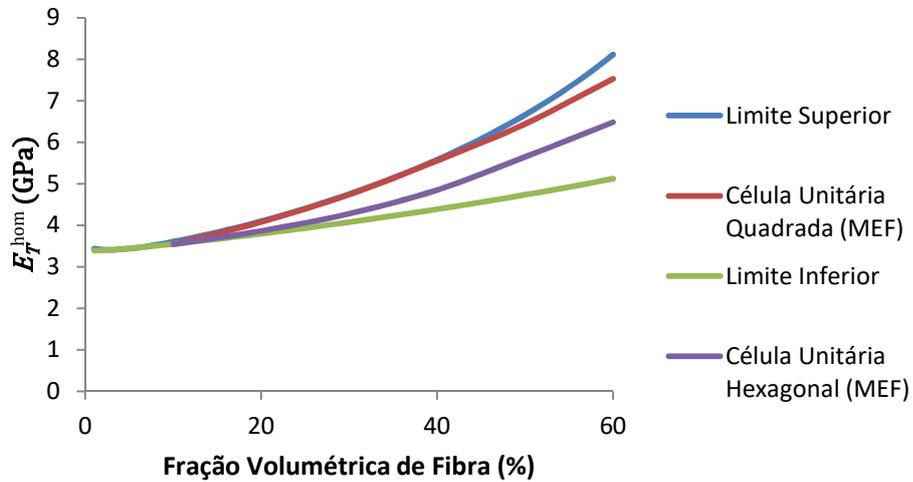
$E_i = 0,02799 \text{ GPa}$ e $\nu_i = 0,34$. A espessura da interfase tem $1 \mu\text{m}$ e o raio da fibra é de 1 mm . Os resultados obtidos estão apresentados nas Figuras 6.11 - 6.14.

Figura 6.11: Módulo de elasticidade longitudinal efetivo.



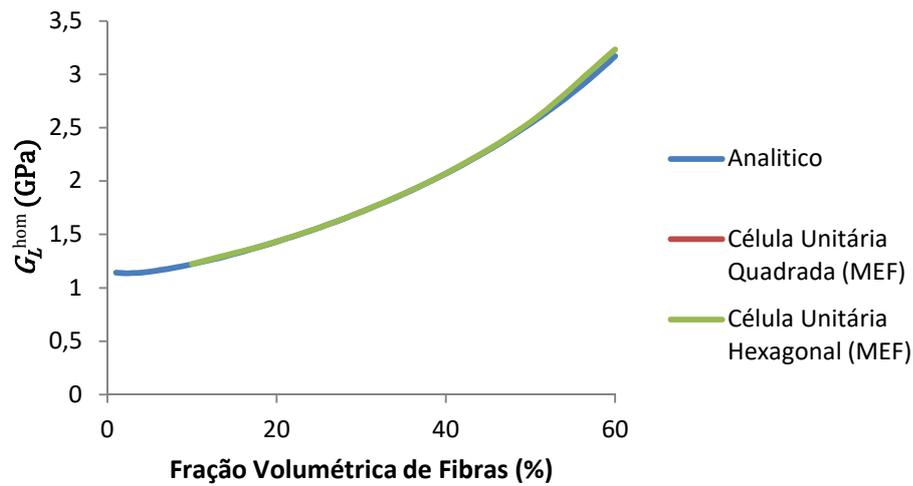
Fonte: Autor, 2017.

Figura 6.12: Módulo de elasticidade transversal efetivo.



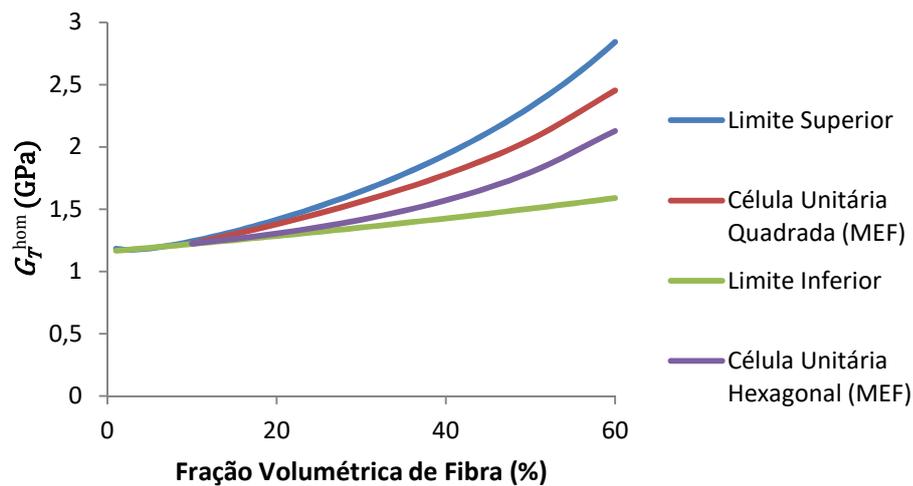
Fonte: Autor, 2017.

Figura 6.13: Módulo de cisalhamento longitudinal efetivo.



Fonte: Autor, 2017.

Figura 6.14: Módulo de cisalhamento transversal efetivo.



Fonte: Autor, 2017.

Os resultados mostram uma boa aproximação dos valores fornecidos pelo método numérico em relação a aqueles do modelo analítico para as propriedades efetivas longitudinais E_L^{hom} e G_L^{hom} . No caso de propriedades efetivas transversais, o modelo analítico utilizado fornece os limites superior e inferior (seção 5.2.2). Conforme se observa nas Figuras 6.12 e 6.14, os valores numéricos destas últimas propriedades efetivas se encontram dentro dos referidos limites obtidos pelo método analítico. As Figuras 6.12 e 6.14 também mostram que os valores numéricos obtidos através da célula unitária quadrada estão mais próximos do limite superior

das propriedades efetivas transversais fornecido pelo método analítico. Os valores obtidos através da célula unitária hexagonal estão mais próximos do limite inferior.

CONCLUSÃO

As propriedades efetivas de um material compósito formado por uma matriz reforçada por fibras são influenciadas pelas propriedades de suas fases. O presente estudo apresentou modelos para determinação de propriedades efetivas de compósitos reforçados por fibras com distribuição randômica e periódica. Para o caso de distribuição randômica de fibras foram empregados modelos analíticos que não consideravam o efeito da interfase na resposta efetiva. A direção das fibras e a razão de aspecto de fibras curtas foram consideradas. Para homogeneização de compósitos com microestrutura periódica foram utilizados modelos analíticos e numéricos através do método dos elementos finitos. Células unitárias com geometria quadrada e hexagonal foram estudadas. A influência da interfase na resposta efetiva foi considerada para compósitos reforçados por fibras unidirecionais.

O efeito da orientação das fibras foi incorporado ao modelo de Mori & Tanaka e apresentou boa concordância com valores experimentais. Para fibras vegetais, devido à perda de trabalhabilidade com o aumento da fração volumétrica de fibras, verificou-se que houve divergência entre o resultado teórico e o experimental para altos teores de fibras em distribuição randômica.

A razão de aspecto das fibras possui influência nas propriedades efetivas de compósitos reforçados por fibras curtas randomicamente distribuídas. Razão de aspecto pequena é a condição que produz maiores valores para as propriedades efetivas mecânicas, enquanto para o coeficiente de expansão térmica existe uma razão de aspecto que fornece o limite superior, a qual encontra-se entre 0,2 e 0,35 para os compósitos estudados.

Para a condutividade térmica efetiva de compósitos reforçados por fibras curtas foram utilizados dois modelos analíticos: Mori-Tanaka e Hashin. Ambos os modelos apresentaram resultados em concordância.

Para compósitos reforçados por fibras longas com distribuição periódica, foram apresentados modelos analíticos bifásicos como também uma estratégia analítica que incorpora efeitos de interfaces.. Os resultados dos modelos analíticos foram comparados com outros obtidos

através do método dos elementos finitos, evidenciando-se a influência das interfaces sobre as propriedades efetivas dos compósitos.

O efeito dos raios de fibras longas foi estudado verificando-se que com o aumento dos mesmos. Mantendo-se constante a fração volumétrica de fibras, o valor da propriedade efetiva tende ao valor obtido por um modelo analítico bifásico. Essa influência do raio das fibras longas se apresentou de forma similar tanto para propriedades elásticas quanto para térmicas.

A espessura da interface apresentou uma considerável influência nas propriedades elásticas de compósitos reforçados por fibras longas. Na comparação de resultados entre o modelo analítico de Andrianov *et al.* (2008) e o modelo de elementos finitos houve boa concordância para células unitárias quadradas enquanto o mesmo não se verificou para aquelas com geometria as hexagonal.

Através dos resultados obtidos via método dos elementos finitos para compósitos reforçados por fibras unidirecionais periódicas, concluiu-se que os valores encontrados para as propriedades elásticas são bastante próximos daqueles determinados a partir do modelo CCA empregando a estratégia que incorpora os efeitos da interface. Tal metodologia se apresentou com respostas satisfatórias, comparadas aos resultados numéricos, podendo ser adequadamente indicada para estimar propriedades efetivas longitudinais e limites para as propriedades efetivas transversais de compósitos reforçados por fibras unidirecionais periódicas considerando a interface.

Apesar de diversos trabalhos já terem sido desenvolvidos e publicados sobre homogeneização de compósitos reforçados por fibras, considera-se que muito há ainda que percorrer no campo da investigação desta importante área. Algumas propostas de trabalhos futuros são: formulação de modelos que considerem a influência da interface nas propriedades efetivas de compósitos reforçados com fibras curtas distribuídas randomicamente; estudos teóricos/experimentais que permitam a determinação de propriedades termomecânicas das interfaces dos compósitos; análise de resistência de compósitos considerando a presença de interfaces.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGARWAL, G., PATNAIK, A., SHARMA, R. K.. **Comparative investigations on three-body abrasive wear behavior of long and short glass fiber-reinforced epoxy composites**. *Advanced Composites Materials*, v. 23:4, p. 291-317, 2014.

AGHDAM, M. M. **Finite element micromechanical modelling of yield and collapse behaviour of metal matrix composites**. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 48, p. 499-528, 2000.

ALLEN, D. H. **Homogenization Principles and their Application to Continuum Damage Mechanics**. *Composites Science and Technology*, v. 61, p. 2223-2230, 2001.

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. State-of-the-art report on fiber reinforced concrete, in: **Manual of concrete Practice**. 93, Detroit, Michigan (ACI 544.1R-96), 1996.

ANDRIANOV, I. V., DANISHEVS'KYY, V. V., KALAMKAROV , A. L. **Micromechanical analysis of fiber-reinforced composites on account of influence of fiber coatings**. *Composites: Part B*, v. 39, p. 874-881, 2008.

AQUINO, C. T. **Uma formulação geometricamente não linear da teoria paramétrica de volumes finitos**. Dissertação de mestrado – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, Alagoas, Brasil, 2010.

Bansal, Y. and Pindera, M.-J. **Efficient Reformulation of the Thermoelastic Higher-Order Theory for FGMs**. *J. Therm. Stresses*, 26(11/12), pp. 1055-1092, 2003.

BAYAT, M., AGHDAM, M. M. **A micromechanics-based analysis of effects of square and hexagonal fiber arrays in fibrous composites using DQEM**. *European Journal of Mechanics A/Solids*, v. 32, p. 32-40, 2012.

BATHE, Klaus-Jürgen; WILSON, Edward L. **Numerical methods in finite element analysis**. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1976.

BAZANT, Z. P., PLANAS, J. **Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials**. CRC Press, Evanston, USA, 1998.

BENVENISTE, Y. **A general interface model for a three-dimensional curved thin anisotropic interphase between two anisotropic media**. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 54, p. 708-734, 2006.

BENTUR, A., MINDESS, S. **Fiber Reinforced Cementitious Composites**. Elsevier Science Publishers, New York, USA, 1990.

BERRYMAN, J.G. **Long-wavelength propagation in composite elastic media - I. Spherical inclusions.** J. acoust. Soc. Am., v. 68, p. 1809–1819, 1980a.

BERRYMAN, J.G. **Long-wavelength propagation in composite elastic media - II. Ellipsoidal inclusions.** J. acoust. Soc. Am., v. 68, p. 1820–1831, 1980b.

BERRYMAN, J.G., PRIDE, S.R. & WANG, H.F. **A differential scheme for elastic properties of rocks with dry or saturated cracks.** Geophys. J. Int., v. 151, p. 597-611, 2002.

BOVIK, P. **On the modelling of thin interface layers in elastic and acoustic scattering problems.** Q. J. Mech. Appl. Math., v.47, p. 17–42, 1994.

BUDIANSKY, B. **On the elastic moduli of some heterogeneous materials.** J. Mech. Phys. Solids, v. 13, p. 223–227, 1965.

CAVALCANTE, M. A. A. **Modelagem do comportamento termo-mecânico transiente de estruturas de materiais compósitos pela teoria de volumes finitos.** Dissertação de mestrado – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, Alagoas, Brasil, 2006.

CHEN, C-H., CHENG C-H. **Effective elastic moduli of misoriented short-fiber composites.** Int. J. Solids Structures, v. 33, n.17, p. 2519-2539, 1996.

CHEN, X. L., LIU, Y. J. **Square representative volume elements for evaluating the effective material properties of carbon nanotube-based composites.** Computational Materials Science, v. 29, p. 1–11, 2004.

CHRISTENSEN, R., LO, K. **Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models.** J. Mech. Phys. Solids, v. 27, p. 315-330. 1979.

CHRISTENSEN, R. **A critical evaluation for a class of micro-mechanics models.** J. Mech. Phys. Solids, v. 38, n. 3, p. 379-404, 1990.

COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E.; WITT, R. J. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**, Fourth Edition, John Wiley & Sons, Inc, 2002.

DRAGO A. S., PINDER M. J. **Micro-macromechanical analysis of heterogeneous materials: macroscopically homogeneous vs periodic microstructures.** Compos Sci Technol., v. 67, n. 6, p.1243–1263, 2007.

DUTRA, V. F. P., MAGHOUS, S., CAMPOS FILHO, A., PACHECO, A. R. **A micromechanical approach to elastic and viscoelastic properties of fiber reinforced concrete.** Cement and Concrete Research, v. 40, p. 460-472, 2009.

DUTRA, V. F. P. **Um modelo constitutivo para o concreto reforçado com fibras de aço via teoria da homogeneização.** Tese de Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Rio Grande do Sul, Brasil, 2012.

ESCARPINI FILHO, R. S. **Análise de estruturas de materiais compósitos viscoelásticos lineares através da teoria de volumes finitos.** Dissertação de mestrado – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, Alagoas, Brasil, 2010.

ESCARPINI FILHO, R., MARQUES, S. P. C. **A Model for Evaluation of Effective Thermal Conductivity of Periodic Composites with Poorly Conducting Interfaces.** *Materials Research*, v. 17, n. 5, p. 1344-1355, 2014.

ESHELBY, J.D. **The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems.** *Proc. Roy. Soc. London A*, v. 241, p. 376–396, 1957.

HALPIN, J. C., KARDOS, J. L. **The Halpin-Tsai equations: A review.** *Polymer Engineering & Science*, v. 16, n. 5, p. 344-352, 1976.

HASHIN, Z. **Theory of fiber reinforced materials.** NASA CR - 1972.

HASHIN, Z. **Analysis of Composite Materials.** *Journal of Applied Mechanics*, v. 50, p. 481-505, 1983.

HASHIN, Z. **Thermoelastic properties of fiber composites with imperfect interface.** *Mechanics of Materials*, v. 8, p. 333-348, 1990.

HASHIN, Z. **Thin interphase/imperfect interface in elasticity with application to coated fiber composites.** *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 50, p. 2509 – 2537, 2002.

HATTA, H., TAYA, M. **Equivalent inclusion method for steady state heat conduction in composites.** *Int. J. Engng. Sci.*, v. 24, n. 7, p. 1159-1172, 1986.

HILL, R. **A self-consistent mechanics of composite materials.** *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 13, n. 4, p. 213-222, 1965.

HILL, R. **The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals.** *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 15, n. 2, p. 79-95, 1967.

HINE, P. J.; DUCKETT, R.A; WARD, I. M. **Modelling the elastic properties of fiber-reinforced composites: II Theoretical predictions.** *Comp. Sci. Technol.*, v. 49, p. 13-21, 1993.

KACIR, L., NARKIS, M., ISHAI, O. **Oriented short glass-fiber composites: 1. Preparation and statistical analysis of aligned fiber materials.** *Polym. Eng. Sci.*, v. 15, p. 525-531, 1975.

KOUZNETSOVA, V. G. **Computational homogenization for the multi-scale analysis of multi-phase materials.** Ph.D. Dissertation, TU-Eindhoven, Eindhoven, Holanda, 2002.

KURUVILLA, J., MEDEIROS, E. S., CARVALHO, L.H. **Compósitos de Matriz Poliéster Reforçados por Fibras Curtas de Sisal.** *Polímeros: Ciência e Tecnologia*, v. 9, n. 4, p. 136-141, 1999.

LEVIN, V. M. **Thermal Expansion Coefficient of Heterogeneous Materials.** Mechanics of Solids, v. 2, p. 58-61, 1967.

LU, P. **Further studies on Mori-Tanaka models for thermal expansion coefficients of composites.** Polymer, v. 54, p. 1691-1699, 2013.

MANDEL, J. **Plasticité classique et viscoplasticité,** CISM Courses and Lectures n. 97, Springer-Verlag, Berlin, Deutschland, 1972.

MARTINS, R.R.; PIRES, A.T.N.; AL-QURESHI, H.A.; BARRA; G.M.O. **Estudo da viabilidade de utilização de fibras naturais curtas em matrizes de resina epóxi.** Revista Matéria, v. 13, n. 4, p. 605 – 610, 2008.

MATZENMILLER, A., GERLACH, S. **Parameter identification of elastic interphase properties in fiber composites.** Composites Part B: Engineering, v. 37, p. 117-126, 2006.

MICHEL, J.C., MOULINEC, H., SUQUET, P. **Effective properties of composite materials with periodic microstructure: a computational approach.** Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., v. 172, p. 109-143, 1999.

MILED, K., SAB, K., Le ROY, R. **Particle size effect on EPS lightweight concrete compressive strength: Experimental investigation and modelling.** Mechanics of Materials, v. 39, p. 222-240, 2007.

MORI, T., TANAKA, M. **Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions.** Acta Metal., v.21, p. 571, 1973.

NAN, C. W. BIRRINGER R., CLARKE D. R., GLEITER H. **Effective thermal conductivity of particulate composites with interfacial thermal resistance.** Journal of Applied Physics, v. 81, n. 10, p. 6692-6699, 1997.

NEMAT-NASSER, S., HORI, M. **Micromechanics: Overall properties of heterogeneous materials.** Second Ed., Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1999.

NOBLE, B., SEWELL, M. J. **On dual extremum principles in applied mathematics.** J. Inst. Maths. Applics, v. 9. p. 123-193, 1971.

OUAAR, A. **Micromechanics of rate-independent multi-phase composites. Application to Steel Fiber-Reinforced Concrete,** Tese de D.Sc., Center for Systems Engineering and Applied Mechanics, Université Catholique de Louvain, Faculté des Sciences Appliquées, Louvain, Belgium, 2006.

PAN, N. **The elastic constants of randomly oriented fiber composites: a new approach to prediction.** Science and Engineering of Composite Materials, v. 5, n 2, p. 63-72, 1996.

QUANG, H. L.; PHAN, T. L.; BONNET, G. **Effective thermal conductivity of periodic composites with highly conducting imperfect interfaces.** International Journal of Thermal Sciences, v. 50, p.1428-1444, 2011.

RENCIS, J.J., HUANG, Q. **Boundary element formula for generalized plane strain.** Eng. Anal. Boundary Elements, v. 9, p. 263-271, 1992.

RODRIGUES, J. DA S. **Comportamento mecânico de material compósito de matriz poliéster reforçado por sistema híbrido fibras naturais e resíduos da indústria madeireira.** Dissertação de mestrado. Instituto de Tecnologia, Universidade Federal do Pará, Belém, Pará, Brasil, 2008.

SAKATA S, ASHIDA F, ZAKO M. **Kriging-based approximate stochastic homogenization analysis for composite materials.** Comput. Methods. Appl. Mech. Eng., v. 197, p. 1953–1964, 2008.

SAVASTANO JUNIOR, H., PIMENTEL, L. L. **Viabilidade do aproveitamento de resíduos de fibras vegetais para fins de obtenção de material de construção.** Rev. Bras. Eng. Agríc. Ambiental, v.4, n.1, p. 103-110, 2000.

SPRINGER, G. S., TSAI, S. W. **Thermal conductivities of unidirectional materials.** Journal of Composites Materials, v. 1, p. 166-173, 1967.

SUN, C. T.; VAIDYA, R. S. **Prediction of composite properties from a representative volume element.** Composites Science and Technology, v. 56, p. 171-179, 1996.

SUQUET, P. **Effective behavior of nonlinear composites** – In: Suquet, P. (ed.) Continuum Micromechanics. Springer-Verlag: p. 197-264, 1997.

THORNBURG, J. D., PEARS, C. D. **Prediction of the thermal conductivity of filled and reinforced plastic.** ASME Paper 65 - WA/HT-4, 1965.

YU, M., ZHU, P., MA, Y. **Identification of the interface properties of hollow spheres filled syntactic foams: An inverse strategy combining microstructural modeling with Kriging metamodel.** Composites Science and Technology, v. 74, p. 179-185, 2013.

WETHERHOLD, R. C., SCOTT, P. D. **Prediction of thermoelastic properties in short-fiber composites using image analysis techniques.** Comp. Sci. Technol., v. 37, p. 393-410, 1990.

YU, W., TANG, T. **Variational asymptotic method for unit cell homogenization of periodically heterogeneous materials.** International Journal of Solids and Structures, v. 44, p. 3738-3755, 2007.

ZAOUI, A. **Continuum Micromechanics: Survey.** Journal of Engineering Mechanics, v. 128, n. 8, p. 808-816, 2002.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method**, Fourth Edition, McGraw-Hill, 1988.

ZHONG, Y., BANSAL, Y. AND PINDER, J.-M. **Efficient Reformulation of the Thermal Higher-Order Theory for FGMs with Variable Thermal Conductivity,** Int. J. Comput. Eng. Sci., 5(4), pp. 795-831, 2004.

APÊNDICE

Apêndice A - Célula unitária quadrada com interfase

!Código escrito na linguagem do ANSYS^(R).

!Obs.: O símbolo ! no início da frase indica que a linha é apenas um comentário e que não faz parte da linguagem

!Iniciando o código definindo que a análise será estrutural, 1 indica que a flag será usada e 0 indica que a flag não será usada.

```
*SET,K,0.009
```

```
/NOPR
```

```
/PMETH,OFF,0
```

```
KEYW,PR_SET,1
```

```
KEYW,PR_STRUC,1
```

```
KEYW,PR_THERM,0
```

```
KEYW,PR_FLUID,0
```

```
KEYW,PR_ELMAG,0
```

```
KEYW,MAGNOD,0
```

```
KEYW,MAGEDG,0
```

```
KEYW,MAGHFE,0
```

```
KEYW,MAGELC,0
```

```
KEYW,PR_MULT1,0
```

```
KEYW,PR_CFD,0
```

/GO

!Iniciando o elemento que será usado, no código damos duas opções. A que inicia com ! !não está sendo usada. Pode apenas usar uma das opções

/prep7

!ET,1,PLANE183

ET,1,PLANE82

!Definindo constantes que serão usadas no código

*SET,PI,4*atan(1)

!R1 é o raio da fibra, unidade mm

*SET,R1,1

!cf é fração volumétrica de fibras

*SET,cf,0.4

!AT é a área total

*SET,AT,PI*R1*R1/cf

*SET,inc,2

!Definindo as propriedades dos materiais

*SET,Em,3.11

*SET,vm,0.34

*SET,Km,1

*SET,Alm,5E-10

*SET,Ef,77

*SET,vf,0.2

*SET,Kf,0.1

*SET,AIf,3E-10

*SET,Ei,K*Em

*SET,Ki,50

*SET,vi,0.34

*SET,Ali,K*Alm

!Pode-se definir a interfase de duas formas: passando a espessura ou a fração volumétrica da interfase

! se for dada a espessura (h)

*SET,h,0.02

*SET,R2,R1+h

*SET,Ai,(PI*R2*R2)-(PI*R1*R1)

*SET,ci,Ai/At

!onde Ai é a área da interfase e ci a fração volumétrica da interfase

! se for dada a fração de interfase

!*SET,ci,0.00075

!*SET,R2,sqrt((ci*at/pi) + R1*R1)

!Definindo o comprimento do quadrado (L) e parametros geometricos da malha

*SET,L,sqrt(PI*R1*R1/cf)

*SET,disc1,4*inc+1

*SET,disc2,4*inc+1

*SET,disc3,2*inc

*SET,disc4,inc

! Aplicando as propriedades nos elementos da matriz

MPTEMP,,,,,,,,

MPTEMP,1,0

MPDATA,EX,1,,Em

MPDATA,KXX,1,,Km

MPDATA,PRXY,1,,vm

MPDATA,ALPX,1,,Alm

! Aplicando as propriedades nos elementos da fibra

MPTEMP,,,,,,,,

MPTEMP,1,0

MPDATA,EX,2,,Ef

MPDATA,KXX,2,,Kf

MPDATA,PRXY,2,,vf

MPDATA,ALPX,2,,Alf

! Aplicando as propriedades nos elementos da interfase

MPTEMP,,,,,,,,,

MPTEMP,1,0

MPDATA,EX,3,,Ei

MPDATA,KXX,3,,Ki

MPDATA,PRXY,3,,vi

MPDATA,ALPX,3,,Ali

!Definindo os nós do contorno

K,1,-L/2,-L/2,0,

K,2,L/2,-L/2,0,

K,3,L/2,L/2,0,

K,4,-L/2,L/2,0,

LSTR, 1, 2

LSTR, 2, 3

LSTR, 3, 4

LSTR, 4, 1

!Definindo os nós da fibra

FLST,2,2,8

FITEM,2,0,0,0

FITEM,2,R1,0,0

CIRCLE,P51X

!Definindo os nós da interfase

FLST,2,2,8

FITEM,2,0,0,0

FITEM,2,R2,0,0

CIRCLE,P51X

LSTR, 1, 3

LSTR, 4, 2

FLST,2,4,4,ORDE,4

FITEM,2,6

FITEM,2,8

FITEM,2,10

FITEM,2,12

LSBL,P51X, 14

FLST,2,4,4,ORDE,4

FITEM,2,5

FITEM,2,7

FITEM,2,9

FITEM,2,11

LSBL,P51X, 13

FLST,2,2,4,ORDE,2

FITEM,2,20

FITEM,2,23

LCOMB,P51X, ,0

FLST,2,2,4,ORDE,2

FITEM,2,8

FITEM,2,16

LCOMB,P51X, ,0

FLST,2,2,4,ORDE,2

FITEM,2,6

FITEM,2,15

LCOMB,P51X, ,0

FLST,2,2,4,ORDE,2

FITEM,2,14

FITEM,2,19

LCOMB,P51X, ,0

FLST,2,2,4,ORDE,2

FITEM,2,22

FITEM,2,25

LCOMB,P51X, ,0

FLST,2,2,4,ORDE,2

FITEM,2,12

FITEM,2,18

LCOMB,P51X, ,0

FLST,2,2,4,ORDE,2

FITEM,2,21

FITEM,2,24

LCOMB,P51X, ,0

FLST,2,2,4,ORDE,2

FITEM,2,10

FITEM,2,17

LCOMB,P51X, ,0

! Gerando linhas adicionais

LSTR, 4, 16

LSTR, 14, 16

LSTR, 3, 19

LSTR, 19, 17

LSTR, 2, 15

LSTR, 15, 13

LSTR, 1, 20

LSTR, 20, 18

RECTNG,-L/2,L/2,-L/2,L/2,

K,,-0.75*R1/2,-0.75*R1/2,0,

K,,0.75*R1/2,-0.75*R1/2,0,

K,,0.75*R1/2,0.75*R1/2,0,

K,,-0.75*R1/2,0.75*R1/2,0,

LSTR, 9, 10

LSTR, 10, 11

LSTR, 11, 12

LSTR, 12, 9

LSTR, 12, 14

LSTR, 11, 17

LSTR, 10, 13

LSTR, 9, 18

!Dividindo áreas para criação de nós intermediários

FLST,3,32,4,ORDE,2

FITEM,3,1

FITEM,3,-32

ASBL, 1,P51X

! discretizacao1 - radial

FLST,5,16,4,ORDE,7

FITEM,5,6

FITEM,5,8

FITEM,5,10

FITEM,5,12

FITEM,5,14

FITEM,5,18

FITEM,5,-28

CM,_Y,LINE

LSEL, , , ,P51X

CM,_Y1,LINE

CMSEL,,_Y

!*

LESIZE,_Y1, , ,disc1, , , ,1

! discretizacao 2 - matriz circunferencial

FLST,5,4,4,ORDE,2

FITEM,5,33

FITEM,5,-36

CM,_Y,LINE

LSEL, , , ,P51X

CM,_Y1,LINE

CMSEL,,_Y

!*

LESIZE,_Y1, , ,disc2, , , ,1

!*

! discretizacao 3 - fibra circunferencial

FLST,5,4,4,ORDE,2

FITEM,5,29

FITEM,5,-32

CM,_Y,LINE

LSEL, , , ,P51X

CM,_Y1,LINE

CMSEL,,_Y

!*

LESIZE,_Y1, , ,disc3, , , ,1

! discretizacao 4 - interfase

FLST,5,4,4,ORDE,4

FITEM,5,7

FITEM,5,11

FITEM,5,15

FITEM,5,17

CM,_Y,LINE

LSEL, , , ,P51X

CM,_Y1,LINE

CMSEL,,_Y

!*

LESIZE,_Y1, , ,disc4, , , ,1

! definindo mat 1

TYPE, 1

MAT, 1

REAL,

ESYS, 0

SECNUM,

!gerando malha da matriz

FLST,5,4,5,ORDE,2

FITEM,5,10

FITEM,5,-13

CM,_Y,AREA

ASEL, , , ,P51X

CM,_Y1,AREA

```
CHKMSH,'AREA'  
  
CMSEL,S,_Y  
  
!*  
  
MSHKEY,1  
  
AMESH,_Y1  
  
MSHKEY,0  
  
!*  
  
CMDELE,_Y  
  
CMDELE,_Y1  
  
CMDELE,_Y2  
  
  
! definindo mat 2  
  
TYPE, 1  
  
MAT, 2  
  
REAL,  
  
ESYS, 0  
  
SECNUM,  
  
  
  
! gerando malha da fibra  
  
FLST,5,5,5,ORDE,5  
  
FITEM,5,3  
  
FITEM,5,6
```

FITEM,5,-7

FITEM,5,9

FITEM,5,14

CM,_Y,AREA

ASEL, , , ,P51X

CM,_Y1,AREA

CHKMSH,'AREA'

CMSEL,S,_Y

!*

MSHKEY,1

AMESH,_Y1

MSHKEY,0

!*

CMDELE,_Y

CMDELE,_Y1

CMDELE,_Y2

! definindo mat 3

TYPE, 1

MAT, 3

REAL,

ESYS, 0

SECNUM,

! gerando malha da interfase

FLST,5,4,5,ORDE,4

FITEM,5,2

FITEM,5,4

FITEM,5,-5

FITEM,5,8

CM,_Y,AREA

ASEL, , , ,P51X

CM,_Y1,AREA

CHKMSH,'AREA'

CMSEL,S,_Y

!*

MSHKEY,1

AMESH,_Y1

MSHKEY,0

!*

CMDELE,_Y

CMDELE,_Y1

CMDELE,_Y2

Apêndice B - Célula unitária hexagonal com interfase

!Código escrito na linguagem do ANSYS (R) .

!Obs.: O símbolo ! no início da frase indica que a linha é apenas um comentário e que não faz parte da linguagem

!Iniciando o código definindo que a análise será estrutural, 1 indica que a flag será usada e 0 indica que a flag não será usada.

```
*SET,K,0.009
```

```
/NOPR
```

```
/PMETH,OFF,0
```

```
KEYW,PR_SET,1
```

```
KEYW,PR_STRUC,1
```

```
KEYW,PR_THERM,0
```

```
KEYW,PR_FLUID,0
```

```
KEYW,PR_ELMAG,0
```

```
KEYW,MAGNOD,0
```

```
KEYW,MAGEDG,0
```

```
KEYW,MAGHFE,0
```

```
KEYW,MAGELC,0
```

```
KEYW,PR_MULTI,0
```

```
KEYW,PR_CFD,0
```

```
/GO
```

/prep7

!ET,1,PLANE183

ET,1,PLANE82

*SET,pi,4*atan(1)

*SET,R1,10

*SET,cf,0.462

*SET,AT,PI*R1*R1/cf

*SET,inc,2

!prop materiais

*SET,Em,3.11

*SET,vm,0.34

*SET,Km,1

*SET,Alm,5E-10

*SET,Ef,77

*SET,vf,0.2

*SET,Kf,0.1

*SET,Alf,3E-10

*SET,Ei,K*Em

*SET,Ki,50

*SET,vi,0.34

*SET,Ai,K*Alm

! se for dada a espessura

*SET,h,0.02

*SET,R2,R1+h

*SET,Ai,(PI*R2*R2)-(PI*R1*R1)

*SET,ci,Ai/At

! se for dada a fracao de interfase

!*SET,ci,0.00075

!*SET,R2,sqrt((ci*at/pi) + R1*R1)

*SET,L,sqrt(PI*R1*R1/0.3)

*SET,disc1,4*inc+1

*SET,disc2,4*inc+1

*SET,disc3,2*inc

*SET,disc4,inc

! matriz

MPTEMP,,,,,,,,

MPTEMP,1,0

MPDATA,EX,1,,Em

MPDATA,KXX,1,,Km

MPDATA,PRXY,1,,vm

MPDATA,ALPX,1,,Alm

!fibra

MPTEMP,,,,,,,,

MPTEMP,1,0

MPDATA,EX,2,,Ef

MPDATA,KXX,2,,Kf

MPDATA,PRXY,2,,vf

MPDATA,ALPX,2,,Alf

! interfase

MPTEMP,,,,,,,,

MPTEMP,1,0

MPDATA,EX,3,,Ei

MPDATA,KXX,3,,Ki

MPDATA,PRXY,3,,vi

MPDATA,ALPX,3,,Ali

K,1,-L/2,-L/2,0,

K,2,L/2,-L/2,0,

K,3,L/2,L/2,0,

K,4,-L/2,L/2,0,

LSTR, 1, 2

LSTR, 2, 3

LSTR, 3, 4

LSTR, 4, 1

FLST,2,2,8

FITEM,2,0,0,0

FITEM,2,R1,0,0

CIRCLE,P51X

FLST,2,2,8

FITEM,2,0,0,0

FITEM,2,R2,0,0

CIRCLE,P51X

LSTR, 1, 3

LSTR, 4, 2

FLST,2,4,4,ORDE,4

FITEM,2,6

FITEM,2,8

FITEM,2,10

FITEM,2,12

LSBL,P51X, 14

FLST,2,4,4,ORDE,4

FITEM,2,5

FITEM,2,7

FITEM,2,9

FITEM,2,11

LSBL,P51X, 13

FLST,2,2,4,ORDE,2

FITEM,2,20

FITEM,2,23

LCOMB,P51X, ,0

FLST,2,2,4,ORDE,2

FITEM,2,8

FITEM,2,16

LCOMB,P51X, ,0

FLST,2,2,4,ORDE,2

FITEM,2,6

FITEM,2,15

LCOMB,P51X, ,0

FLST,2,2,4,ORDE,2

FITEM,2,14

FITEM,2,19

LCOMB,P51X, ,0

FLST,2,2,4,ORDE,2

FITEM,2,22

FITEM,2,25

LCOMB,P51X, ,0

FLST,2,2,4,ORDE,2

FITEM,2,12

FITEM,2,18

LCOMB,P51X, ,0

FLST,2,2,4,ORDE,2

FITEM,2,21

FITEM,2,24

LCOMB,P51X, ,0

FLST,2,2,4,ORDE,2

FITEM,2,10

FITEM,2,17

LCOMB,P51X, ,0

! gerando linhas adicionais

LSTR, 4, 16

LSTR, 14, 16

LSTR, 3, 19

LSTR, 19, 17

LSTR, 2, 15

LSTR, 15, 13

LSTR, 1, 20

LSTR, 20, 18

RECTNG,-L,L,-L/2,L/2,

K,,-0.75*R1/2,-0.75*R1/2,0,

K,,0.75*R1/2,-0.75*R1/2,0,

K,,0.75*R1/2,0.75*R1/2,0,

K,,-0.75*R1/2,0.75*R1/2,0,

LSTR, 9, 10

LSTR, 10, 11

LSTR, 11, 12

LSTR, 12, 9

LSTR, 12, 14

LSTR, 11, 17

LSTR, 10, 13

LSTR, 9, 18

RECTNG,-L/2,L/2,-L/2,L/2,

RECTNG,-L,-L/2,-L/2,0,

RECTNG,-L,-L/2,L/2,0,

RECTNG,L,L/2,-L/2,0,

RECTNG,L,L/2,L/2,0,

!Criar os semi circulos nas bordas

CYL4, -L, -L/2, R1, 0, R1, 90, 0

CYL4, -L, L/2, R1, 270, R1, 360, 0

CYL4, L, L/2, R1, 180, R1, 270, 0

CYL4, L, -L/2, R1, 90, R1, 180, 0

CYL4, -L, -L/2, R2, 0, R1, 90, 0

CYL4, -L, L/2, R2, 270, R1, 360, 0

CYL4, L, L/2, R2, 180, R1, 270, 0

CYL4, L, -L/2, R2, 90, R1, 180, 0

RECTNG,-L,-L+R1/2,-L/2,-L/2+R1/2,

RECTNG,-L,-L+R1/2,L/2,L/2-R1/2,

RECTNG,L,L-R1/2,L/2,L/2-R1/2,

RECTNG,L,L-R1/2,-L/2,-L/2+R1/2,

$$K_{,, -L+R1*\cos(\text{PI}/4), -L/2+R1*\cos(\text{PI}/4), 0}$$

$$K_{,, -L+R2*\cos(\text{PI}/4), -L/2+R2*\cos(\text{PI}/4), 0}$$

$$K_{,, L-R1*\cos(\text{PI}/4), -L/2+R1*\cos(\text{PI}/4), 0}$$

$$K_{,, L-R2*\cos(\text{PI}/4), -L/2+R2*\cos(\text{PI}/4), 0}$$

$$K_{,, L-R1*\cos(\text{PI}/4), L/2-R1*\cos(\text{PI}/4), 0}$$

$$K_{,, L-R2*\cos(\text{PI}/4), L/2-R2*\cos(\text{PI}/4), 0}$$

$$K_{,, -L+R1*\cos(\text{PI}/4), L/2-R1*\cos(\text{PI}/4), 0}$$

$$K_{,, -L+R2*\cos(\text{PI}/4), L/2-R2*\cos(\text{PI}/4), 0}$$

!Diagonal dos quadrados dos cantos

$$\text{LSTR, } 71, 27$$

$$\text{LSTR, } 74, 30$$

$$\text{LSTR, } 77, 36$$

$$\text{LSTR, } 84, 37$$

$$\text{LSTR, } 27, 36$$

$$K_{,, 0, L/2, 0}$$

$$K_{,, 0, -L/2, 0}$$

$$\text{LSTR, } 93, 94$$

!dividir areas

FLST,3,102,4,ORDE,2

FITEM,3,1

FITEM,3,-102

ASBL, 1,P51X

! discretizacao1 - radial

FLST,5,66,4,ORDE,53

FITEM,5,41

FITEM,5,49

FITEM,5,81

FITEM,5,-96

FITEM,5,104

FITEM,5,107

FITEM,5,109

FITEM,5,111

FITEM,5,114

FITEM,5,117

FITEM,5,-118

FITEM,5,120

FITEM,5,122

FITEM,5,124

FITEM,5,127

FITEM,5,129

FITEM,5,-131
FITEM,5,133
FITEM,5,-134
FITEM,5,149
FITEM,5,152
FITEM,5,155
FITEM,5,158
FITEM,5,-162
FITEM,5,164
FITEM,5,-169
FITEM,5,171
FITEM,5,-176
FITEM,5,178
FITEM,5,-183
FITEM,5,185
FITEM,5,186
FITEM,5,188
FITEM,5,190
FITEM,5,194
FITEM,5,190
FITEM,5,192
FITEM,5,194
FITEM,5,-198

CM,_Y,LINE

LSEL, , , ,P51X

CM,_Y1,LINE

CMSEL,,_Y

!*

LESIZE,_Y1, , ,disc1, , , ,1

! discretizacao 2 - matriz circunferencial

FLST,5,20,4,ORDE,20

FITEM,5,5

FITEM,5,9

FITEM,5,13

FITEM,5,16

FITEM,5,105

FITEM,5,108

FITEM,5,115

FITEM,5,125

FITEM,5,147

FITEM,5,148

FITEM,5,150

FITEM,5,151

FITEM,5,153

FITEM,5,154

FITEM,5,156

FITEM,5,157

FITEM,5,187

FITEM,5,189

FITEM,5,191

FITEM,5,193

CM,_Y,LINE

LSEL, , , ,P51X

CM,_Y1,LINE

CMSEL,,_Y

!*

LESIZE,_Y1, , ,disc2, , , ,1

!*

! discretizacao 3 - fibra circunferencial

FLST,5,20,4,ORDE,18

FITEM,5,29

FITEM,5,-32

FITEM,5,136

FITEM,5,138

FITEM,5,140

FITEM,5,142

FITEM,5,161

FITEM,5,163

FITEM,5,164

FITEM,5,168

FITEM,5,170

FITEM,5,171

FITEM,5,175

FITEM,5,177

FITEM,5,178

FITEM,5,182

FITEM,5,184

FITEM,5,185

CM,_Y,LINE

LSEL, , , ,P51X

CM,_Y1,LINE

CMSEL,,_Y

!*

LESIZE,_Y1, , ,disc3, , , ,1

! discretizacao 4 - interfase

FLST,5,28,4,ORDE,18

FITEM,5,7

FITEM,5,11

FITEM,5,15

FITEM,5,17

FITEM,5,66

FITEM,5,68

FITEM,5,70

FITEM,5,72

FITEM,5,74

FITEM,5,76

FITEM,5,78

FITEM,5,80

FITEM,5,110

FITEM,5,112

FITEM,5,119

FITEM,5,132

FITEM,5,199

FITEM,5,-210

CM,_Y,LINE

LSEL, , , ,P51X

CM,_Y1,LINE

CMSEL,,_Y

!*

LESIZE,_Y1, , ,disc4, , , ,1

!definindo mat 1

TYPE, 1

MAT, 1

REAL,

ESYS, 0

SECNUM,

!gerando malha da matriz

FLST,5,16,5,ORDE,10

FITEM,5,19

FITEM,5,20

FITEM,5,23

FITEM,5,24

FITEM,5,27

FITEM,5,-30

FITEM,5,43

FITEM,5,-46

FITEM,5,59

FITEM,5,-62

CM,_Y,AREA

ASEL, , , ,P51X

CM,_Y1,AREA

CHKMSH,'AREA'

CMSEL,S,_Y

!*

MSHKEY,1

AMESH,_Y1

MSHKEY,0

!*

CMDELE,_Y

CMDELE,_Y1

CMDELE,_Y2

! definindo mat 2

TYPE, 1

MAT, 2

REAL,

ESYS, 0

SECNUM,

! gerando malha da fibra

FLST,5,24,5,ORDE,6

FITEM,5,35

FITEM,5,-42

FITEM,5,47

FITEM,5,-58

FITEM,5,63

FITEM,5,-66

CM,_Y,AREA

ASEL, , , ,P51X

CM,_Y1,AREA

CHKMSH,'AREA'

CMSEL,S,_Y

!*

MSHKEY,1

AMESH,_Y1

MSHKEY,0

!*

CMDELE,_Y

CMDELE,_Y1

CMDELE,_Y2

! definindo mat 3

TYPE, 1

MAT, 3

REAL,

ESYS, 0

SECNUM,

! gerando malha da interfase

FLST,5,16,5,ORDE,8

FITEM,5,21

FITEM,5,22

FITEM,5,25

FITEM,5,26

FITEM,5,31

FITEM,5,-34

FITEM,5,67

FITEM,5,-74

CM,_Y,AREA

ASEL, , , ,P51X

CM,_Y1,AREA

CHKMSH,'AREA'

CMSEL,S,_Y

!*

MSHKEY,1

AMESH,_Y1

MSHKEY,0

!*
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
CMDELE,_Y2