UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO – MESTRADO

MARIA PATRÍCIA FELIX

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS SOBRE CONCEITOS GEOMÉTRICOS: ESTRATÉGIAS DE ALUNOS DO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Maceió
2016

MARIA PATRÍCIA FELIX

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS SOBRE CONCEITOS GEOMÉTRICOS: ESTRATÉGIAS DE ALUNOS DO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós- Graduação em Educação da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestra em Educação.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Mercedes Bêtta Quintano Carvalho Pereira dos Santos

Maceió

2016

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário Responsável: Valter dos Santos Andrade

F316r Felix, Maria Patricia.
Resolução de problemas sobre conceitos geométricos: estratégias de alunos do 9º ano do Ensino Fundamental / Maria Patricia Felix. – 2016.
80 f. : il.

Orientadora: Mercedes Bêtta Quintano Carvalho Pereira dos Santos.
Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Alagoas. Centro de Educação. Programa de Pós-Graduação em Educação. Maceió, 2016.

Bibliografia: f. 67-69.
Apêndices: f. 70-80.

1. Geometria – Estudo e ensino. 2. Matemática – Resoluções de problemas. 3. OBEDUC. 4. Estratégia de ensino. I. Título.

CDU: 372.851.4

Universidade Federal de Alagoas
Centro de Educação
Programa de Pós-Graduação em Educação

Resolução de problemas sobre conceitos geométricos: Estratégias dos alunos do 9° ano do ensino fundamental.

MARIA PATRÍCIA FELIX

Dissertação submetida à banca examinadora, já referendada pelo Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 03 de fevereiro de 2016.

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Mercedes Bêtta Quintano Carvalho Pereira dos Santos
(PPGE/CEDU/UFAL)
(Orientadora)

Prof. Dr. Elton Casado Fireman (PPGE/CEDU/UFAL)
(Examinador Interno)

Prof. Dr. Carloney Alves de Oliveira (PPGECIM/UFAL)
(Examinador Externo)

À minha mãe, Maria Alzira Felix, e ao meu pai, Manoel Felix, pelo incentivo, amor e dedicação durante todos os anos de minha vida, para que eu pudesse estudar.
Aos meus irmãos, pela força e apoio ao longo de toda a minha vida escolar e acadêmica, por tantas palavras de amor e carinho.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por seu imenso amor, por me proporcionar tantos momentos para aprender e compartilhar os ensinamentos vivenciados ao longo de toda a minha vida.

À orientadora, Prof.ª Dr.ª Mercedes Carvalho, pelo trabalho orientado, realizado com muita competência e dedicação; pelos momentos de aprendizagem e por se colocar sempre à disposição para ajudar e compartilhar os conhecimentos da educação matemática e da formação de professores no Estado de Alagoas.

Ao Observatório de Educação (OBEDUC), projeto *Universidade e Escola Básica: Espaços Colaborativos – Regiões Nordeste e Centro-Oeste*, financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), por proporcionar momentos ricos em conhecimentos entre a escola básica e a universidade, do qual tive o privilégio de fazer parte.

À Universidade Federal de Alagoas e ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Educação (PPGE), pelos valiosos conhecimentos ofertados.

Aos professores Dr. Marcelo Bairral, Dr. Carloney Alves de Oliveira e Dr. Elton Casado Fireman, pelas sugestões e orientações no exame de qualificação, que contribuíram para a evolução desta dissertação.

Aos professores, gestores e colaboradores das escolas participantes desta pesquisa, pelas valiosas contribuições.

À direção e à coordenadora pedagógica da Escola Estadual Dr. Miguel Guedes Nogueira, nas pessoas de Carlos André Santos da Silva e Marisa Novaes, e da Escola Estadual Jornalista Freitas Neto, nas pessoas de Nívea Simone Costa Sales Melo e Valdimar Alves.

Aos amigos do grupo OBEDUC, e à Débora Meneses, por tantos momentos de trocas de conhecimentos, compartilhados em nossas práticas docentes.

Especialmente à amiga Juliane Medeiros dos Santos, por tantos momentos dedicados a compartilhar comigo as situações vivenciadas na Educação Básica, pela parceria nas formações do grupo OBEDUC e no universo acadêmico. Agradeço o apoio durante os momentos do Mestrado, pelo companheirismo e amizade durante todo o percurso até aqui trilhado. Por tantos outros que ainda virão, meus sinceros agradecimentos, minha amiga!

Aos colegas da turma do Mestrado em Educação do ano de 2014, em especial aos amigos Reinaldo Batista, Isabela Macena, Luciene Amaral, Vanda, Iraci e Eudimar, pelos momentos vivenciados ao longo do curso e pela amizade nos momentos em que se fizeram presentes.

Ao professor do IM/UFAL, Msc. Paulo Roberto Lemos de Messias, pela amizade e companheirismo ao longo de minha graduação em Matemática e pela atenção dada em todos os momentos deste estudo.

À amiga Maria Dayane, pelos momentos em que pôde compartilhar comigo os estudos desenvolvidos nessa investigação. E a todos que, diretamente ou indiretamente, me apoiaram e se mostraram prestativos durante todo o percurso deste trabalho. Agradeço a todos!

“Não me julgo, de maneira alguma, capaz de apresentar aqui qualquer processo de investigação que não tenha sido já há muito tempo percebido por todos os homens de talento, e de forma alguma prometo que o leitor encontrará aqui qualquer completa novidade neste assunto.”

(BERNARD BOLZANO, 1844)

RESUMO

Esta pesquisa investiga as estratégias de resolução de problemas de três turmas do 9º ano, e como esses alunos descrevem suas estratégias para resolver problemas que envolvem conceitos geométricos. O objetivo da pesquisa é verificar como os alunos reconhecem os problemas matemáticos; como se apropriam dos conceitos, se as suas estratégias são articuladas pelo ponto de vista da geometria e como esses alunos descrevem seu pensamento matemático, no tocante à resolução de problemas, bem como investigar as diferentes estratégias utilizadas pelas turmas, relacionando os conceitos de que o aluno se apropriou ao resolver as questões; identificar a utilização da linguagem geométrica na resolução de problemas matemáticos e como as definições geométricas são articuladas e entendidas pelos alunos. Utilizou-se a fundamentação teórica sobre resolução de problemas a partir dos estudos de Carvalho (2007), Ponte (2006), e Palhares (2004), e os estudos de Geometria em Almouloud (2013) e Brasil (1998), entre outros. A investigação caracterizou-se como um estudo de caso numa abordagem qualitativa. Analisaram-se 192 soluções, em uma atividade proposta às turmas investigadas, contendo dois problemas matemáticos, num total de 96 alunos de uma turma de ensino regular de três escolas públicas, duas no interior de Alagoas e uma na capital alagoana, participante do Projeto Observatório da Educação – OBEDUC. Os resultados obtidos evidenciaram que os alunos possivelmente não têm o hábito de resolver problemas, o que os leva a não desenvolver o conhecimento matemático e a não minorar as dificuldades conceituais no que se refere aos conhecimentos geométricos, bem como às demais áreas da Matemática. Constatou-se também que os alunos procuraram lançar mão de estratégias sem a utilização de fórmulas prontas. Este estudo ressalta o quanto a prática de resolver problemas se faz necessária em sala de aula, seja para explorar os conceitos matemáticos, seja ela para articular as mais diferentes metodologias de ensino.

Palavras-chave: Estratégias de Ensino. Ensino de geometria. Obeduc. Resolução de Problemas.

ABSTRACT

This dissertation brings an investigation about the problem resolution strategy from three classes of the 9 grade and along with them to describe their strategies to resolve problems involving geometric concept. This research has like objective to verify the way these students recognize the mathematics problems, the way they appropriate the concepts, if their strategies are articulated with the point of view of the geometry as well as the way they describe their mathematic thoughts concerning the problem resolution such as investigate the different strategies used by the respective classroom associating the concepts whereof themselves appropriated in order to resolve the questions, identify the use of the geometric language in the mathematics problem resolution but also the geometric concepts are articulated and understood for them. The theoretical framework guide this study about the problem resolutions shows the theories such as: Carvalho (2007), Ponte (2006), Palhares (2004), and about the Geometric studies theories such as: Almouloud (2013) and Brasil (1998), among others. The investigation was characterized like a study of case in a qualitative approach. It were analyzed 192 solutions through the survey offered for them including two mathematical problems for a total of 96 students of three public schools regular classroom, two of them situated in Alagoas and another one in the Capital of Alagoas, involved in an (Educational Observatory Project) - Projeto Observatório da Educação – OBEDUC. The results achieved showed the students do not have the habit to resolve problems, limiting them to develop the mathematical knowledge and easy the difficulties of conception relating to the geometrics knowledge as well as about questions mathematics. It was found also the students gave up on using strategies without the use of ready patterns. This study emphasizes the importance of the problems resolve practice in the classroom aiming to explore the mathematical concepts or articulate the different teaching methodologies.

Key-work: Teaching Strategies, Geometry Teaching. Obeduc. Problems Resolution.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CEP	Comitê de Ética em Pesquisa
CNS	Conselho Nacional de Saúde
CONEP	Comissão Nacional de Ética Em Pesquisa
IFAL	Instituto Federal de Alagoas
IM	Instituto de Matemática
MMM	Movimento de Matemática Moderna
OBEDUC	Observatório de Educação
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
TCLE	Termo de Consentimento Livre Esclarecido
UEPB	Universidade Estadual da Paraíba
UFAL	Universidade Federal de Alagoas
UFMS	Universidade Federal do Mato Grosso do Sul
UNEB	Universidade do Estado da Bahia

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A investigação apresenta análises das estratégias dos alunos para resolver problemas que envolvem conceitos geométricos. A análise foi aplicada em três escolas públicas, duas do interior alagoano, no município de Atalaia, outra no município de Rio Largo, e uma terceira escola na capital de Maceió. Para tanto, será verificado como esses alunos reconhecem os problemas matemáticos; como se apropriam dos conceitos; se as suas estratégias são articuladas pelo ponto de vista da geometria; e como esses alunos descrevem seu raciocínio matemático no tocante à resolução de problemas. Pretende-se investigar as diferentes estratégias utilizadas pelas turmas, relacionando os conceitos de que o aluno se apropriou ao resolver as questões; identificar a utilização da linguagem geométrica na resolução de problemas matemáticos e como as definições geométricas são articuladas e entendidas pelos alunos.

A pesquisa evidenciou a importância do estudo de geometria para a construção do pensamento matemático, reiterando o quão é importante se trabalhar com atividades que agucem o interesse dos alunos, despertem sua curiosidade por conhecer as definições e o hábito de resolver problemas. Isso se dá não somente por meio de recursos tecnológicos, mas tornando os conceitos interessantes aos olhos dos alunos, levando o significado dos conceitos em sua efetividade para a sala de aula, mediante a prática de resolver problemas associados aos mais diferentes conceitos. Nesse sentido, buscou-se investigar como os alunos descrevem as estratégias, através de problemas matemáticos que evidenciam os conceitos da Geometria. O propósito era identificar como os alunos empregam esses conceitos e sua capacidade de compreensão geométrica.

Para essa investigação, o trabalho apresenta-se segmentado em cinco capítulos, como segue.

No primeiro capítulo, constam a apresentação dos percursos acadêmico e profissional da autora da investigação, as inquietações e motivações que nortear ama pesquisa, o interesse em estudar o tema e a problemática em questão, descrevendo-se também os objetivos pretendidos na análise da pesquisa.

No segundo e terceiro capítulos, apresentam-se tópicos breves que são relevantes na discussão sobre o tema e problema de pesquisa, tais como: o ensino e aprendizagem da geometria, a resolução de problemas e o erro como fonte de informação no ensino e aprendizagem. Para subsidiar as discussões trazidas nesta investigação, foram realizadas leituras acerca dos seguintes referenciais teóricos: Almouloud (2013), Carvalho (2007), Ponte (2006), Palhares (2004), Brasil (1998), Ribeiro; Cury (2015), Polya (2006) e Cury (2015), entre outros.

O quarto capítulo traz a delineação do caminho metodológico utilizado, descrevendo-se todo o percurso trilhado para a posterior análise dos dados.

No quinto capítulo foi realizada a análise dos dados, sendo destacadas as estratégias dos alunos e os caminhos que buscaram para chegar à solução, a fim de perceber se os alunos lançam mão dos conceitos geométricos e como desenvolvem tal estratégia. Para a análise dos dados foram tomados como referências Fiorentini; Lorenzato (2006) e Bardin (2011).

Em seguida, as considerações finais, em que se apresenta um resumo do que se evidenciou na investigação, destacando também a importância do estudo de geometria, seguida por Referências Bibliográficas e pelos anexos das atividades realizadas pelos alunos das turmas investigadas.

1.1 Percurso

Meu percurso em busca de respostas às atividades matemáticas durante minha educação básica levou-me até a licenciatura em Matemática e à sala de aula como escolha profissional.

A partir do 9º ano do ensino fundamental II, despertei o interesse por entender com mais propriedade os conceitos matemáticos que estudava, ao ingressar no Instituto Federal de Alagoas (IFAL), no curso de Edificações e Saneamento, e ter o apoio dos meus professores da época, que me auxiliaram a entender as definições. Assim, comecei a dedicar à Matemática um olhar especial.

Em 2002, fiz vestibular para o curso de Matemática na Universidade Federal de Alagoas (UFAL) e decidi ingressar na licenciatura e atuar como professora. Terminei o curso em 2007, e nessa ocasião já lecionava na rede pública de Alagoas, sobretudo nas turmas do 9º ano Ensino Fundamental.

Em minha prática procurei estudar mais para poder explicar com clareza a disciplina para meus alunos, pois ainda era forte, em minha memória, a época em que era estudante da educação básica e não entendia de forma satisfatória a Matemática e seus conceitos.

Ao longo desse período lecionei em diversas escolas públicas e particulares. Tive a oportunidade de me aperfeiçoar cada vez mais. Encontrei ao longo desse caminho alunos brilhantes que me encantaram com sua maneira de pensar a Matemática e resolver os problemas que lhes eram propostos. Com o interesse na Pós-Graduação, cursei disciplinas com a intenção de retomar meus estudos. As discussões e as leituras que fiz, naquele ano, e os questionamentos que surgiram ao longo dos estudos levaram-me a pensar mais sobre minha prática pedagógica.

Naquele mesmo ano fiz uma especialização na qual realizei estudo teórico, descrevendo atividades em que a geometria é posta como um meio facilitador na compreensão de conceitos matemáticos. Nessa ocasião, apresentei situações e estratégias de ensino que tratavam sobre conceitos que envolvem geometria ou mesmo problemas algébricos que podem ser vistos na perspectiva geométrica, possibilitando assim aos alunos uma aprendizagem mais efetiva nas atividades desenvolvidas em sala de aula.

Continuei meus estudos e minhas atividades nas escolas públicas e privadas de Maceió até o momento em que, lecionando na educação básica em uma escola estadual, fui convidada a ingressar no Observatório de Educação (OBEDUC) [1], projeto em rede que trata sobre o ensino da Matemática em três estados: Alagoas, Paraíba e Mato Grosso do Sul.

Por ser a professora que ensinava no 6º ano em uma das escolas campo da pesquisa, esse convite para mim foi relevante, pela oportunidade de contribuir tanto para os índices de aprendizagem naquela instituição de ensino, quanto de aprimorar minha prática docente, ajudando meus alunos no entendimento dos conceitos matemáticos e resgatando a geometria de forma mais efetiva em sala de aula. Com a oportunidade de participar do OBEDUC, retomei leituras e estudos e vislumbrei a possibilidade de ingressar no Mestrado em Educação.

Estando atualmente no Programa de Pós-Graduação em Educação, na linha de processos educativos como aluna do Mestrado, pude mais uma vez dar continuidade à proposta de estudar a geometria e como esta área do conhecimento pode desenvolver nos alunos tanto o raciocínio lógico como habilidades dedutivas, sequenciais e lógico-matemáticas. Tais estudos proporcionaram-me uma melhor percepção matemática no tocante aos conceitos de álgebra e geometria, bem como evidenciaram o quanto as ações didáticas em sala de aula, mediante a resolução de problemas que envolvem geometria, beneficiam o aluno, com o desenvolvimento de múltiplas capacidades no que se refere à aprendizagem matemática.

Dada a importância que o ensino de geometria e de seus conceitos traz para o desenvolvimento lógico-matemático dos alunos em seus mais diferentes níveis, decidi

---

[1] É um projeto em rede, entre as instituições Universidade Federal do Mato Grosso do Sul (UFMS), Universidade Estadual da Paraíba (UEPB) e Universidade Federal de Alagoas (UFAL), que tem como finalidade proporcionar, por meio de práticas colaborativas e trabalhos didáticos desenvolvidos entre Universidade e Escola, ações educativas voltadas para a sala de aula.

investigar como os alunos se apropriam dos conceitos de geometria e como solucionam os problemas. Com esse objetivo, tinha como proposta inicial desenvolver uma pesquisa de cunho colaborativo com a professora titular do 8º ano. Chegamos a iniciar o trabalho, porém, depois de três meses de trabalho desenvolvido com a professora de Matemática, ela desistiu de participar da investigação. Como consta no Termo de Consentimento Livre Esclarecido (TCLE), Capítulo IV. 3, subitem d, da Resolução 466/12 do Conselho Nacional de Saúde (CNS)/Comissão Nacional de Ética em Pesquisa (CONEP) e do regimento interno Comitê de Ética em Pesquisa (CEP)/Universidade Federal de Alagoas (UFAL), a professora poderá deixar a pesquisa em qualquer fase do desenvolvimento.

Diante do exposto, e para o cumprimento do prazo legal junto à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), optou-se por investigar as estratégias dos alunos em situações-problema que envolvem conceitos geométricos, reorganizando a pesquisa a partir das atividades dos alunos, não fazendo parte, entretanto, entrevistá-los.

1.2 Problemática

A investigação justifica-se por situações percebidas ao longo da atuação em meu percurso docente e das análises efetuadas quando os alunos resolviam estratégias geométricas. Assim, ao lidar diretamente com alunos, percebia que eles apresentavam melhor entendimento conceitual quando os problemas matemáticos eram vistos sob o enfoque da visualização.

A geometria enfatizava aspectos que ofereciam aos alunos uma gama de possibilidades para conjecturar suas soluções, pelo fato de os problemas facultarem a possibilidade de levantar hipóteses e se familiarizar com os conceitos matemáticos, levando-os a amadurecer o pensamento matemático geométrico.

As dificuldades na compreensão envolvendo conceitos algébricos quando os alunos são submetidos a situações em que devem interpretar, generalizar e abstrair problemas de ordem algébrica constituem uma dificuldade muito comum enfrentada na educação básica e mesmo nas atividades que envolvem o ensino superior. Trabalhos como o de Cardia (2007) evidenciam essas dificuldades relacionadas a conceitos algébricos nos mais diferentes níveis.

Pensar numa maneira em que esses conceitos se tornem efetivamente significativos para os alunos requer do educador a busca de mecanismos que propiciem um ambiente de ensino e aprendizagem em que os agentes envolvidos compreendam de forma efetiva, por meio das práticas didáticas, os conceitos e as definições das diversas áreas do Ensino de

Matemática. Nesse sentido,

> os saberes experienciais surgem como núcleo vital do saber docente, núcleo a partir do qual os professores tentam transformar suas relações de exterioridade com os saberes em relações de interioridade com sua própria prática. Os saberes experienciais não são saberes como os demais; são, ao contrário, formados de todos os demais saberes, mas retraduzidos, "polidos" e submetidos às certezas construídas na prática e na experiência (TARDIF, 2013, p. 54).

É nessa hora que o professor tem papel fundamental, desenvolvendo ações para os alunos "lerem e interpretarem as informações nele contidas, criando uma estratégia de solução, aplicando e confrontando a solução encontrada" (CARVALHO, 2007, p. 18). O professor, nesse contexto, torna-se um mediador na compreensão dos conceitos e das definições matemáticas.

Ao estar em sala de aula com conteúdos que tratem do aspecto geométrico, é comum ao professor exemplificar a situação com gráficos e/ou desenhos, algo que venha a facilitar a aprendizagem dos alunos. Tais estratégias, quando utilizadas, tornam-se mais eficientes e concretas, exprimindo de forma mais efetiva seu raciocínio e o desenvolvimento de suas deduções. De acordo com Lima e Carvalho (2014, p.84), "as experiências no mundo físico – movimentação, manuseio, visualização e representação gráfica –, todas envolvendo a percepção sensorial, são fundamentais para o ensino e a aprendizagem da geometria". Cabe ao educador estar sempre preocupado no que se refere aos conceitos, que devem ficar muito bem definidos para os alunos, proporcionando assim uma aprendizagem satisfatória.

> É imprescindível que, simultânea e progressivamente, sejam propostas aos alunos atividades que favoreçam o ensino e a aprendizagem dos conceitos matemáticos associados aos fenômenos e aos objetos físicos, bem como às suas representações. Tais conceitos, e as relações entre elas, fornecem modelos abstratos do mundo físico ou de suas representações gráficas. Esses modelos – que são entes abstratos – fazem parte do conhecimento matemático sistematizado que deve ser adquirido ao longo das várias fases da escolaridade (LIMA; CARVALHO, 2014, p.84).

O aspecto geométrico traz a possibilidade de evidenciar as situações-problema de forma visual, momento em que o aluno percebe o que está a ocorrer num determinado problema matemático. Duval (2013, p.16) nomeia essa situação como uma conversão: "as conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registro, conservando os mesmos objetos denotados: por exemplo, passar da escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica".

Mesmo com toda a importância que o ensino de álgebra possui para a formação do desenvolvimento matemático dos alunos, esta ainda é uma área que carrega muitos obstáculos para a aprendizagem dos alunos mesmo no ensino superior, situação percebida "pela quantidade de trabalhos sobre ela desenvolvidos, pela abrangência de seus conteúdos em livros-textos de qualquer nível de ensino ou pelas dificuldades em seu ensino e aprendizagem" (RIBEIRO; CURY, 2015, p. 9), principalmente quando se trata de entender os primeiros conceitos. Nesse caso, os conceitos geométricos podem ser mais bem compreendidos, pois o aspecto visual da geometria, os desenhos e as imagens fazem com que os alunos conjecturem caminhos estratégicos para solucionar o problema, e mesmo quando não o solucionam, através das intervenções do professor no processo de descoberta da resposta, é possível ao aluno explorar ideias para a solução.

Por isso,

> são importantes as atividades que envolvam as representações gráficas – desenhos e outras imagens gráficas – desses objetos. Essas experiências constituem-se nas primeiras explorações e abstrações dos objetos físicos, do espaço e dos movimentos, que são fundamentais para a aprendizagem da geometria. Em particular, aquelas que envolvem as representações gráficas vão acompanhar o ensino e a aprendizagem durante toda a formação em geometria (LIMA; CARVALHO, 2014, p. 84).

É comum, durante a prática docente, deparar com situações em que esses alunos obtêm uma compreensão mais satisfatória quando os conceitos matemáticos são apresentados geometricamente, tornando as atividades mais participativas e de mais fácil entendimento pelos alunos.

Mediante uma busca no repositório da CAPES, procurou-se analisar algumas das produções mais recentes no que se refere ao ensino de geometria. Foram selecionados trabalhos como o de Fassio (2011); nele, a autora analisa o desenvolvimento de alunos do ensino fundamental e apresenta um estudo integrado a diferentes recursos didáticos, proposta desenvolvida juntamente com um projeto que envolveu a universidade e a escola. Teve por objetivo analisar as potencialidades desses recursos e privilegiar atitudes investigativas de professores e alunos. A autora ressalta a importância da geometria para o desenvolvimento do aluno, destacando que as aptidões na construção geométrica se desenvolvem por meio de diferentes situações didáticas. O trabalho apresenta resultados que podem contribuir para diminuir as dificuldades de ensino-aprendizagem da geometria na educação básica.

Já Silva (2013) apresenta uma proposta para o ensino de geometria espacial por meio de *software*, estratégia que o autor defende por ser um recurso que facilita a visualização geométrica das figuras, dada a integração dos conceitos matemáticos aos recursos tecnológicos. A proposta foi pensada de forma integrada na forma de projeto, visando ao desenvolvimento das potencialidades que o recurso traz para a aprendizagem da geometria.

O trabalho de Nunes (2010) compreende uma investigação que envolve o interesse em trabalhar geometria euclidiana, numa abordagem dinâmica, com alunos de licenciatura em

Matemática na Universidade do Estado da Bahia (UNEB). O objetivo da investigação foi revelar as potencialidades da metodologia de ensino-aprendizagem – avaliação de Matemática por meio da resolução de problemas com geometria. Tal metodologia propicia uma melhora na aprendizagem no que se refere ao ensino de Matemática.

Zukauskas (2012), em sua pesquisa de mestrado, apresenta resultados da realização de uma atividade extraclasse que utiliza a modelagem como método de ensino, apresentando uma proposta motivadora para o ensino de geometria. A atividade foi aplicada a alunos do 6º ano do ensino fundamental II e objetivou apresentar o conteúdo de geometria associado à modelagem matemática. A proposta mostrou que os alunos se sentiram motivados a participar pela própria dinâmica das atividades, trabalhando na construção de figuras. A autora concluiu que a atividade favoreceu a aprendizagem dos conceitos geométricos e que facultou momentos de motivação, pelo fato de alguns alunos participarem das atividades e interagirem com os pares; no entanto, também revelou obstáculos conceituais, em momentos nos quais os alunos se sentiam desanimados, situação evidenciada por não conhecerem os conceitos matemáticos tratados na dinâmica proposta.

A pesquisa de Velho (2014) objetiva analisar as contribuições da Etnomatemática como método de ensino para potencializar a aprendizagem em geometria. A autora opina que a metodologia empregada é favorável ao ensino e à aprendizagem dos conceitos matemáticos, pois os alunos interagem, traçam estratégias e participam das situações propostas.

Ballejo (2015) busca destacar de que maneira o *software* Geogebra contribui na construção dos conceitos de área e perímetro. A atividade foi proposta a uma turma de 6º ano. Nessa investigação, a autora desenvolveu a pesquisa em etapas, das quais se destaca a análise dos conteúdos nos livros didáticos e a aplicação das atividades que incluem geometria no *software* Geogebra. Ballejo (2015) conclui o trabalho enfatizando a relevância do aplicativo para o ensino de matemática, porquanto os estudantes se sentiam motivados a estudar quando as aulas envolviam diferentes recursos, o que possibilitou uma melhor compreensão dos conceitos matemáticos.

No trabalho de dissertação de Cardia (2007), a autora investiga as situações que interferem na aprendizagem de expressões algébricas e expõe uma proposta de ensino que integra os conceitos apresentados ao ensino de geometria, mediante uma proposta de ensino articulado.

Dessa forma, busca-se investigar como os alunos do 9º ano do ensino fundamental II descrevem suas estratégias de resolução para resolver problemas que envolvem conceitos geométricos.

A partir da questão tratada, adotaram-se estratégias que viabilizassem a busca pelas respostas, e de como o conhecimento geométrico pode vir a tornar uma questão de mais fácil compreensão, viabilizando assim entender melhor as definições e os conceitos da Matemática, por possibilitar aos sujeitos situações para levantar hipóteses, característica própria da geometria, pois “os problemas de geometria referem-se a um registro espacial, que dá lugar às formas de interpretação autônoma” (FASSIO, 2011, p. 8).

Nota-se que ao resolver certo problema matemático, dá-se lugar inicialmente a imaginar como solucionar aquela situação, de que maneira aquela condição matemática se constitui para se obter possíveis respostas que podem emergir daquela situação. Imagina-se logo a constituição geométrica do problema. Fassio (2011, p.7) observa: “Quando imaginamos a construção de um determinado objeto, como, por exemplo, uma caixa, não se pode iniciar sua construção sem, antes, formar uma imagem mental do objeto, que ainda não pode ser visto com os próprios olhos”. Nesse sentido, ressalta-se como o ensino de geometria é importante na construção do conhecimento matemático, e como o aluno se beneficia dos aspectos visuais proporcionados por essa área de ensino.

O capítulo que segue refere-se ao ensino de geometria e de situações vivenciadas por professores e alunos no processo de construção do pensamento matemático, bem como a importância dessa área de estudo para a formação do aluno.

2 O ENSINO E A APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA

Tratar do ensino de geometria no Brasil é reportar-se a momentos vivenciados por professores ao longo da trajetória do que foi o currículo da Matemática no decorrer dos tempos. Meneses (2007), em sua pesquisa de dissertação, relata muitos dos processos históricos pelos quais passou o ensino da geometria, bem como as dificuldades que os professores enfrentaram quando dos processos de mudanças.

Reportar-se ao ensino de geometria traz também de imediato os benefícios que esse estudo proporciona aos alunos no processo de construção dos conceitos matemáticos, possibilitando-lhes aumentar suas percepções lógicas no que se refere ao processo de conhecimento, principalmente quando eles são sujeitos ativos, que fazem inferências e participam, seja de forma individual ou em grupos, e aventam as possibilidades de resolução de problemas geométricos, bem como nas mais diferentes áreas do saber. "É importante destacar que as situações de aprendizagem precisam estar centradas na construção de significados, na elaboração de estratégias e na resolução de problemas, em que o aluno desenvolve processos importantes como intuição, analogia, indução e dedução" (BRASIL, 1998, p. 63).

O ensino de geometria proporciona aos alunos capacidades como desenvolver o pensamento espacial e o raciocínio lógico-matemático, por trabalhar toda a questão visual e perceptiva do aluno (BRASIL, 1998). É nessa hora que a figura do professor se faz necessária, ao adquirira função de "organizador da aprendizagem [...], situação em que precisará escolher os problemas que possibilitam a construção de conceitos e procedimentos, e alimentar os processos de resolução que surgirem, sempre tendo em vista os objetivos a que se propõe atingir" Brasil (1998, p. 38).

Hoje, os movimentos de educação e a formação de professores buscam um resgate na prática da resolução de problemas e nas situações em que os conceitos de geometria estão em evidência. A geometria "deve ser considerada um instrumento para a compreensão, descrição e interação com o espaço em que se vive, por ser o campo mais intuitivo e concreto da matemática e o mais ligado à realidade" (NACARATO; PASSOS, 2003, p. 29). Dessa forma, situações que exigem a mobilidade de raciocínio levam os alunos a perceber o que está a ocorrer, na tentativa de inserir ou excluir hipóteses.

Durante o processo de aprendizagem em sala de aula, o aluno percebe inicialmente a geometria por sua questão visual, pelo que analisa das características das figuras, e começa a fazer suas conjecturas e a aperfeiçoar o pensamento geométrico. De acordo com os

Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (1998), é cada vez mais primordial que o aluno seja capaz de se superar em seu desenvolvimento nas capacidades lógico-matemáticas, mediante a intervenção do professor ou das interações com o meio em que vive, o que contribuirá para o seu desenvolvimento intelectual.

Desse modo, “investigações geométricas constituem experiências de aprendizagem importantes para prosseguir estas recomendações curriculares” (PONTE *et al.*, 2006, p. 83), pois é nessas ocasiões que os alunos se apropriam dos conceitos matemáticos – algébricos ou geométricos – e constroem toda a formação do conhecimento matemático.

Autores como Pavanello e Andrade (2002), entre outros, observaram como a geometria é pouco ensinada em nossas escolas, devido aos professores considerarem que lhes falta conhecimento em relação a esse conteúdo. Tais estudos apontam a necessidade de buscar alternativas, como formações de professores e inserção de metodologias que potencializem os conceitos envolvendo as áreas de Matemática, assim como os estudos de geometria, práticas essas que resgatam nos professores formas de uma melhor compreensão sobre os conteúdos ensinados, visando superar as dificuldades constatadas nos espaços de aprendizagem.

É importante que o professor intente superar os obstáculos ao longo da vida docente e adote uma postura particular de suprir as carências verificadas ao longo da formação inicial, pois é na sala de aula que se dão as mais diversas situações vivenciadas pelos autores no processo de ensino-aprendizagem (TARDIF, 2013); é na sala de aula que aluno e professor aprendem e compartilham nos momentos de formação.

Diante dessas preocupações, trazer um novo olhar para as definições e conceitos matemáticos é essencial na relação ensino-aprendizagem das práticas de ensino da geometria nas escolas.

> A situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las (BRASIL, 1998, p. 40).

Fazem-se imprescindíveis atividades com resolução de problemas, nas quais estejam inseridos recursos que auxiliem o entendimento do conceito e tornem mais acessível a compreensão das definições, bem como atividades que integrem as construções geométricas. Nunes *et al*. (2014) reforçam, em suas investigações e trabalhos, como o ensino de geometria é importante para a constituição do pensamento matemático, destacando que essa área de ensino pode “levar o aluno a observar, identificar e pensar geometricamente” (2014, p. 101), o que é essencial para a formação do pensamento geométrico.

> A resolução de problemas em qualquer nível de escolaridade dá oportunidade ao aluno de explorar, investigar, manipular, conjecturar, falar, escrever, analisar, experimentar, refletir, abstrair, argumentar e generalizar acarretando, então, a mobilização de um conjunto de conhecimentos que possibilitarão a produção de outros (NUNES *et al*., 2014, p. 110).

A geometria nesta perspectiva valoriza aspectos que levam o aluno a um entendimento mais satisfatório. Muitas têm sido as mobilizações nas formações de professores que trazem o resgate para o ensino de geometria, visando a um aluno potencialmente mais crítico no tocante ao desenvolvimento de estudos posteriores, bem como minorando as dificuldades trazidas pelos professores de Matemática, dificuldade essa devida a um período de mudança curricular, no qual os aspectos voltados para análise e observação, assim como as construções, ficaram comprometidos (PONTE *et al.*, 2006).

De acordo com (BRASIL, 1998), os professores têm autonomia de buscar novas estratégias e meios de inserir práticas didáticas no desenvolvimento da aprendizagem dos alunos. Na geometria é possível explorar caminhos de formas diversas para incrementar a participação dos alunos, retendo sua atenção e aperfeiçoando-a com problemas matemáticos nos mais diferentes espaços, por ser, ela própria, uma ciência em que a visualização contribui para a percepção de hipóteses do problema. Além da questão visual, pertinente ao aspecto geométrico, há também as diferentes possibilidades de os alunos conjecturarem e investigarem suas soluções, pensando em diferentes estratégias. Mesmo quando eles estão equivocados nas discussões das soluções, o aspecto visual ajuda os alunos a perceberem o erro ou o acerto.

Para Pavanello e Andrade, (2002. p.78), "há a possibilidade de existirem dois tipos de pensamento: um que se poderia chamar de visual – o qual predomina na geometria – e outro, sequencial, como o utilizado para verificar as etapas de uma dedução e que pode ser expresso na álgebra".

Segundo os PCN (1998), a participação ativa do aluno contribui para o desenvolvimento de atitudes favoráveis em relação à Matemática; confere confiança na própria capacidade para elaborar estratégias pessoais diante de situações problema, promove a troca de experiências com seus pares como forma de aprendizagem e aguça a sensibilidade pela observação das formas geométricas no dia a dia.

Portanto, o estudo de geometria deve ser sempre visto como um desafio a ser desvendado, fazendo com que os indivíduos superem as dificuldades do raciocínio e conduzindo para a abstração, a partir da visualização de figuras e da análise geométrica de problemas matemáticos, sejam eles algébricos ou aritméticos.

2.1 Geometria Movimento de Matemática Moderna[2] (MMM) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)

Com o MMM, o ensino de Matemática e de suas subáreas do desenvolvimento passa pela organização curricular, o que gerou consequências até os dias atuais. Objetiva-se com isso alcançar o "pleno" desenvolvimento do ensino-aprendizagem da Matemática. Esse período foi marcado por mudanças no cenário econômico do país e do mundo, o que se refletiu na forma como se pensava o ensino de Matemática para a época, que "se caracterizava pela ênfase nas ideias e formas da matemática clássica" (FIORENTINI, 1995, p. 5). Foi o período em que se privilegiou uma Matemática formal, centrada nas definições, axiomas e teoremas. "O ensino proposto fundamentava-se em grandes estruturas que organizavam o conhecimento matemático contemporâneo e enfatizava a teoria dos conjuntos, as estruturas algébricas, a topologia etc." (BRASIL, 1998, p. 19).

Ao vivenciar uma fase da Matemática em que tudo deveria ser analisado através de provas e demonstrações, e com ênfase nas teorias algébricas, inicia-se um declínio com relação ao ensino de Matemática e ao ensino da geometria. Muitos professores da época tiveram dificuldades para aplicar o que a nova proposta trazia e não acompanharam as mudanças advindas das "novas" propostas educacionais, mesmo tendo sido sua "implantação, primeiramente através de cursos ministrados a professores, a partir de 1961, e de livros didáticos, a partir de 1963" – Rios *et al.*(2011 apud MORAIS; ONUCHIC, 2014, p. 26).

A proposta ganhou um caráter muito distante do que se desejava, pois muitas foram as dificuldades dos alunos, e "somado a isso, o despreparo dos professores para desempenhar o trabalho sob essa abordagem" – Morais; Onuchic (2014, p. 27). Isso gerou muitas consequências que perduram até hoje, pois a intenção era uma proposta que contribuísse para o ensino e a aprendizagem da Matemática, porém pouco se fez para que essa aprendizagem se tornasse efetiva aos sujeitos envolvidos, não subsidiando os professores com formações constantes e ações em sala de aula. O resultado foi o crescente afastamento do modelo geométrico das escolas brasileiras e um aumento dos obstáculos enfrentados no ambiente escolar. Hoje, o ensino de Matemática carrega resquícios do que foi o movimento curricular no Brasil, e os efeitos dos aspectos negativos legados pela proposta, como o distanciamento das teorias geométricas.

Atualmente, vem se incorporando aos poucos uma nova visão para se aprender e

---

[2] Movimento de proposta de renovação curricular que chegou ao Brasil nos anos de 1960, concebido como uma forma alternativa para o ensino de Matemática.

ensinar Matemática; sobretudo no tocante à educação básica, algumas práticas privilegiam as ações de retomada dos conceitos que envolvem questões e metodologias para a valorização do ensino de Geometria, busca-se instigar os alunos com atividades e recursos articulados à geometria e à resolução de problemas. Os PCN colocam em evidência o que se pretende alcançar e desenvolver no aluno, bem como o que se objetiva nas práticas da escola – caráter lógico-matemático e pensamento espacial –, a fim de que o aluno seja capaz de resolver problemas "acerca de conceitos e procedimentos matemáticos e de ampliar a visão que tem dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança" (BRASIL, 1998, p. 40). Ao contrário do que se vivia e se pretendia no formalismo matemático trazido pelo MMM, a partir dos PCN se vivencia mais uma vez uma diretriz com vistas a uma melhor qualidade do ensino da Matemática. Assim,

> os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive (BRASIL, 1998, p. 51).

É um dos grandes desafios do ensino pensar a geometria e suas abordagens de modo a trazer práticas que de fato melhorem os níveis de compreensão dos alunos e deem aos professores suporte para atuar de forma satisfatória no aperfeiçoamento dessas propostas. Nas formações de professores e documentos oficiais, verifica-se o quanto o ensino de geometria tem sido incorporado, e incentivado cada vez mais, no sentido de buscar, de forma plena, levar o conhecimento matemático à sala de aula.

> As atividades geométricas centram-se em procedimentos de observação, representação e construção de figuras, bem como no manuseio de instrumentos de medidas que permitam aos alunos fazer conjecturas sobre algumas propriedades dessas figuras. Assim, o estudo do espaço e das formas privilegiará a observação e a compreensão de relações e a utilização das noções geométricas para resolver problemas, em detrimento da simples memorização (BRASIL, 1998, p. 68).

É a partir de atividades que incentivem a construção do pensamento matemático que é possível levar os conteúdos de forma mais concreta aos alunos (BRASIL, 1998). Algumas dessas ações já vêm sendo realizadas e divulgadas em pesquisas, como é o caso da geometria associada aos recursos tecnológicos, que constitui um exemplo à investigação de Ballejo (2015); nesta, a autora propõe uma integração dos conceitos matemáticos e *software* Geogebra, ou mesmo a prática de estimular os alunos com problemas em que eles se sintam desafiados, como é o caso de questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas

Públicas (OBMEP) [3], dentre outras que se destacam por reduzir as dificuldades em sala de aula. Mesmo quando os alunos erram em suas atividades, é por meio de suas investigações e de suas conjecturas que eles são levados a aprender, pois é nesses momentos que efetivamente o conhecimento se constitui.

O capítulo seguinte aborda questões relacionadas ao ensino de geometria e resolução de problemas. Enfatiza a importância dessa área de estudo e destaca os problemas matemáticos e a abordagem geométrica como um fator relevante para a construção e a apreensão dos conceitos matemáticos. Evidencia o quanto a geometria proporciona aos alunos, nos mais diferentes níveis de escolaridade, capacidades para raciocinar e levantar hipóteses potencializando o conhecimento matemático. Também apresenta uma reflexão sobre a análise dos erros cometidos pelos alunos, situação que pode ser mediada pelos professores para enfrentar as dificuldades dos alunos, e assim "usar os erros como trampolins para a aprendizagem" Borasi (apud RIBEIRO; CURY, 2015, p. 73).

---

[3] Tem como objetivo despertar o estudo da Matemática, incentivando e revelando talentos na área. http://www.obmep.org.br/apresentacao.html

3 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E GEOMETRIA

A aprendizagem por resolução de problemas é um momento que possibilita aos alunos explorar suas estratégias e propor uma solução para um problema; é uma prática que privilegia os sujeitos de aprendizagem e aguça os seus sentidos na tentativa de se chegar a um resultado. Assim, a metodologia de ensino “traz implícita a convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver essas estratégias de resolução” Brasil (1998, p. 40).

Nesse cenário, a geometria também ganha um espaço relevante no contexto da aprendizagem, pois “os problemas de geometria vão fazer com que o aluno tenha seus primeiros contatos com a necessidade e as exigências estabelecidas por um raciocínio dedutivo” Brasil (1998, p.86). Assim, a geometria vem ganhando significativo espaço nos dias atuais, como exemplo, nas formações de professores, nas provas e exames em que os alunos são instigados a resolver problemas matemáticos. Os conceitos que destacam a geometria desfrutam de um percentual considerável. Nesse âmbito, é importante que os problemas matemáticos sejam sempre explorados de forma articulada, pois a integração entre as áreas de geometria, álgebra e aritmética proporcionam conhecimentos relevantes para a formação do desenvolvimento lógico-matemático.

A geometria, por privilegiar o aspecto visual, possibilita a inferência de conjecturas e a formulação de hipóteses a partir de definições prévias que lhes são asseguradas no universo escolar. Duval (apud Almouloud, 2013, p. 128) afirma que “os problemas de geometria apresentam uma grande originalidade em relação a muitas tarefas matemáticas que podem ser propostas aos alunos”, situação constatada pelo aspecto visual e investigativo, pois a figura e/ou o desenho são facilitadores quando se deseja construir um raciocínio para uma situação a solucionar.

Algumas das iniciativas de formação dos alunos e de estímulo ao raciocínio matemático vêm sendo exploradas em exames nacionais como a Provinha Brasil[4] e a OBMEP, que facultam ao aluno desenvolver a compreensão dos conceitos da Matemática, bem como apresentar aspectos de uma aprendizagem que favoreça e estimule os conhecimentos por meio de problemas desafiadores. Nota-se, nas edições da OBMEP, o quanto é estimulada a resolução de problemas em que o aluno é levado a fazer suas suposições, aplicar situações matemáticas que envolvem lógica matemática e investigar a

[4] Instrumento pedagógico, sem finalidade classificatória, que fornece informações sobre o processo de alfabetização e de Matemática a professores e gestores das redes de ensino.

solução procurada por meio de suas conjecturas e tentativas. Ponte *et. al* (2006, p. 51) sugere que “a realização de investigação proporciona, muitas vezes, o estabelecimento de conexão com outros conceitos matemáticos e até extra matemáticos”.

Muitos desses problemas trazem do aspecto geométrico o desenvolvimento da dedução matemática por meio da percepção oriunda do desenho e da questão visual. Para Almouloud (2013), isso evidencia a geometria como área importante da Matemática, e relevante na formação do aluno e no desenvolvimento de outros conhecimentos científicos.

Hoje, caso se observem os programas de formação e as provas nacionais a nível classificatório, nota-se um retorno de questões de geometria associado à resolução de problemas, visando estimular o raciocínio. Essa é uma prática em que os alunos são levados a pensar os conceitos matemáticos sob o olhar das estratégias, aperfeiçoando a visão geométrica; é então que os alunos apresentam suas soluções, seu pensamento matemático e sua maneira de criar uma estratégia. Mesmo quando o aluno tem dificuldades, ele é levado a fazer suas conjecturas e aprende, ao ser instigado, a aplicar os seus conhecimentos para solucionar o problema. Assim, o aluno é levado a “interpretar as informações nele contidas, criar uma estratégia de solução, aplicar e confrontar a solução encontrada” (CARVALHO, 2007, p.18).

As estratégias dos alunos revelam a observação e a dedução de ideias apresentadas, com as possíveis soluções para um dado problema matemático. São momentos que levam o aluno a conceber as soluções com um olhar e um pensamento investigativos:

> Envolvem quatro momentos principais. O primeiro abrange o reconhecimento da situação, a sua exploração preliminar e a formulação de questões. O segundo momento refere-se ao processo de formulação de conjecturas. O terceiro inclui a realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas. E, finalmente, o último diz respeito à argumentação, à demonstração (PONTE *et al.*,2006, p. 20).

De forma bastante pontual, Almouloud (2013) relata as pesquisas e os estudos que enfatizam os problemas enfrentados pelos alunos quando o assunto é a aprendizagem dos conceitos geométricos. Nesse mesmo contexto, o autor descreve as formas de apreensão e de facilitação para se entender de forma mais efetiva esses conceitos, a saber:

> *visualização,* para a exploração heurística de uma situação complexa; *construção de configurações*, que pode ser trabalhada como um modelo, em que as ações realizadas representadas e os resultados observados são ligados aos objetos matemáticos representados; *raciocínio*, que é o processo que conduz para a prova e a explicação (DUVAL, 1995 apud ALMOULOUD, 2013, p. 126).

Muitas vezes, ao tentar solucionar um problema, é o momento em que se pensa na solução de forma "superficial", fazendo uma primeira leitura, momento em que é necessário perceber, reconhecer e visualizar o problema e uma possível solução. É comum organizar os dados e os condicionantes que possivelmente trarão a solução ao problema; é também o momento em que os sujeitos investigam a resposta que poderá conter a solução do problema.

Assim, o autor pontua de forma sequencial o processo de interpretação até se chegar às soluções de problemas matemáticos, em especial aqueles que envolvem o trato geométrico. Quando se permite expor estratégias matemáticas e que o aluno participe do processo de construção da formação dos conceitos, criam-se "possibilidades ao aluno de lançar mão de diferentes estratégias para resolver os problemas propostos, permitindo que use seus conhecimentos e sua criatividade" (CARVALHO, 2007, p. 17).

Ainda no que diz respeito à forma de conceber o entendimento e os conceitos matemáticos, Duval (1995 apud Almouloud, 2013, p.127) enumera quatro momentos em que os alunos se portam nas situações de resolução de problemas que envolvem geometria:

> *Sequencial:* é solicitada nas tarefas de construção ou nas tarefas de descrição com objetivo de reproduzir uma figura; *Perceptiva:* é a interpretação das formas da figura em uma situação geométrica; *Discursiva:* é a interpretação dos elementos da figura geométrica, privilegiando a articulação dos enunciados, levando em consideração a rede semântica de propriedades do objeto; *Operatória:* está centrada nas modificações possíveis de uma figura de partida e na reorganização perceptiva que essas modificações sugerem.

Com isso, percebe-se a importância do ensino e aprendizagem nos seus diferentes contextos e na geometria, no intuito de conferir aos alunos possibilidades para solucionar e desenvolver estratégias matemáticas que lhes deem oportunidade para formular seus conceitos e compreender de forma mais efetiva as definições matemáticas.

3.1 O erro como fonte de informação no ensino e aprendizagem

Tratar sobre o erro nem sempre é uma tarefa fácil. Quando se está em um espaço de aprendizagem, em muitos casos a exposição e o medo de cometer erros fazem com que muitos alunos guardem as dúvidas e só consigam expressá-las de forma escrita. É uma situação que ocorre com frequência nos espaços de aprendizagem.

Hoje, muitos estudos se debruçam sobre os possíveis erros cometidos em testes de avaliação, questionários de pesquisa ou mesmo na sala de aula. Os erros estão sendo vistos como "fonte de informação; se o aluno erra ao dar uma resposta e explica como 'pensou' para encontrá-la, o professor sabe onde e quando intervir" (CARVALHO, 2007, p. 20).

A partir das situações em sala de aula e dos testes avaliativos é possível mediar o processo de aprendizagem, e isso não só unicamente quando o aluno acerta ou quando apresenta uma estratégia em que algum conceito não atende aos comandos iniciais da questão; essa estratégia também é passível de avaliação pelo professor, no sentido de compreender tanto o processo de ensino e aprendizagem como o que aquela informação "errada" pode significar. A possibilidade de construir significados ajuda os alunos a aprender até nessas situações, pois "qualquer produção, seja aquela que apenas repete uma resolução-modelo, seja a que indica a criatividade do estudante, tem características que permitem detectar as maneiras como o aluno pensa e, mesmo, que influências ele traz de sua aprendizagem anterior, formal ou informal" (CURY, 2015, p.15). É na maneira como pensa, faz suas investigações e aplica os conceitos que sinalizará como o professor deve conduzir-se para ajudar nos direcionamentos que serão tomados na proposta de ensino.

Os estudos das áreas da Matemática de forma geral apresentam índices elevados de alunos que demonstram dificuldades com relação aos seus conceitos. Mesmo nos conceitos básicos de geometria, muitos dos alunos evidenciam fragilidades conceituais. Shulman (1986, p.10 apud RIBEIRO; CURY 2015, p.82) considera que "o estudo sobre as concepções errôneas dos estudantes e sua influência sobre a aprendizagem subsequente têm sido um dos tópicos mais férteis para a pesquisa sobre cognição", possibilitando entender como esse aluno pensa as suas estratégias e quais as dificuldades no tocante aos conceitos matemáticos.

Em seu livro *Álgebra para a formação do professor: explorando os conceitos de função*, os autores (RIBEIRO; CURY, 2015, p.82) abordam as dificuldades relacionadas ao ensino de funções, defendem que se deve buscar entender e conhecer as dificuldades que os matemáticos da Antiguidade sentiam ao relacionar os conceitos matemáticos e sustentam a ideia de entender as circunstâncias dos erros dos alunos: "acreditamos que o conhecimento das dificuldades enfrentadas pelos povos antigos pode auxiliar os professores a entender melhor certos erros cometidos pelos estudantes". Isso exige do professor um papel de investigador do espaço de aprendizagem, na busca de uma postura que contribuirá para uma melhor compreensão das etapas que constituem a aprendizagem.

Trabalhar com uma metodologia que investigue os erros dos alunos implica criar estratégias também para o professor, em sua formação inicial e continuada. Isso demanda que o professor esteja preparado para os desafios dessa prática de análise. Ball; Thames; Phelps (2008 apud RIBEIRO; CURY 2015, p. 83) "consideram essencial que o professor reconheça quando os alunos dão uma resposta errada ou quando os livros-texto utilizados apresentam alguma definição equivocada". É nesse sentido que se fazem constantes as práticas de formação dos professores, ações nas quais se começa a dispor de um olhar para novas inserções em sala de aula.

No capítulo que segue são apresentados todo o processo de coleta de dados e as características dessa investigação. Traça-se o contexto em que a pesquisa se desenvolveu, bem como se apresentam os procedimentos utilizados para a análise dos dados.

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Nesta pesquisa foi realizada uma investigação de cunho qualitativo, na modalidade de estudo de caso, buscando “retratar a realidade de forma profunda e mais completa possível, enfatizando a interpretação ou a análise do objeto, no contexto em que ele se encontra” (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p. 110). Esta abordagem evidencia a “escolha adequada de métodos e teorias convenientes; no reconhecimento e na análise de diferentes perspectivas; nas reflexões dos pesquisadores a respeito de suas pesquisas como parte do processo de produção do conhecimento” (FLICK, 2009, p. 23).

Nesse tipo de estudo, há uma preocupação essencial com os acontecimentos e evidências retratados na realidade dos sujeitos em pesquisa. “A abordagem qualitativa busca investigar e interpretar o caso como um todo orgânico, uma unidade em ação com dinâmica própria, mas que guarde forte relação com seu entorno ou contexto sociocultural” (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p. 110-111). No contexto investigado também foram considerados alguns dados quantificáveis, visto que “essas quantificações podem ajudar a qualificar melhor uma análise” Fiorentine; Lorenzato (2006, p.110).

Ainda segundo os autores, sendo um estudo de caso caracterizado por “ser qualquer sistema delimitado que apresenta algumas características singulares e que fazem por merecer um investimento investigativo especial por parte do pesquisador” (2006, p. 110), o presente estudo busca evidenciar procedimentos e estratégias da realidade particular investigada. Com relação a tais particularidades do estudo de caso, Yin (2005, p. 26) assevera que “o poder diferenciador do estudo de caso é sua capacidade de lidar com uma ampla variedade de evidências – documentos, artefatos, entrevistas e observações”.

Nesse contexto, os autores destacam a aproximação desse tipo de metodologia da forma real dos contextos vivenciados pelos sujeitos de pesquisa:

> o pesquisador procura revelar a multiplicidade de dimensões presentes numa determinada situação ou problema, focalizando-o como um todo. Esse tipo de abordagem enfatiza a complexidade natural das situações, evidenciando a inter-relação dos seus componentes (LUDKE; ANDRÉ, 1986, p.19).

Este estudo intenta interpretar as estratégias destacadas pelos sujeitos de pesquisa, evidenciando as mais variadas situações que foram percebidas em seu percurso.

4.1 Procedimentos para a coleta de dados

4.1.1 Cenário da Pesquisa

Fizeram parte deste estudo três classes do 9º ano do ensino fundamental de três diferentes escolas públicas, aqui denominadas de escola A, escola B e escola C. A escola A e a escola B pertencem à rede municipal de ensino de Atalaia e Rio Largo, respectivamente. Os mencionados municípios são pequenos e próximos à capital alagoana; essas escolas têm boa estrutura e ensino fundamental regular. O quadro docente é acessível e se interessou pela investigação. Yin (2005, p. 104) destaca que “os informantes podem ser extraordinariamente compatíveis e acessíveis, ou o local pode ser geograficamente conveniente”.

A escola C é da rede estadual de Alagoas e fez parte do OBEDUC. Como já citado na apresentação, inicialmente a proposta de investigação deste estudo era fazer um trabalho colaborativo junto à professora do 8º ano do ensino fundamental II, da escola participante do OBEDUC. O trabalho foi iniciado; entretanto, de acordo com o TCLE, Capítulo IV. 3, subitem d, da Resolução 466/12 do CNS-CONEP e do regimento interno CEP-UFAL, a professora poderá deixar a pesquisa em qualquer fase, sem penalização alguma. Diante desse fato, decidiu-se focalizar a estratégia dos alunos, ressaltando que não faz parte do trabalho entrevistá-los, tão somente analisar as suas estratégias. Para tanto, foi mantida a escola que já faz parte do OBEDUC e buscaram-se duas outras a partir dos critérios já explicitados.

4.1.2 Sujeitos

Os sujeitos participantes desta investigação totalizam 96alunos, na faixa etária entre 13 e 15 anos, das três escolas participantes da pesquisa. Todos os alunos eram do 9º ano do Ensino Fundamental II da rede pública de ensino de Alagoas. A escola A teve a participação de 24 alunos; a escola B, de 36 alunos; e a escola C, também de 36 alunos.

Optou-se pelos alunos do 9º ano, obedecendo a critérios como: idades numa média em comum, conteúdos e momentos de aprendizagem iguais para todos os sujeitos e por estarem na fase final do ensino fundamental II. Acredita-se que este último fator encontre os sujeitos com conhecimentos de álgebra e geometria que podem facilitar o que é proposto neste estudo.

Preservando a integridade dos alunos e a ética entre os estudos quanto à identidade dos sujeitos e da escola, os professores de cada uma das turmas foram informados sobre a perspectiva da pesquisa e seus objetivos, momento em que lhes foi apresentada a proposta das atividades, para que tomassem ciência de como seriam as análises das estratégias com suas respectivas turmas e de como será desenvolvida a pesquisa até o final do estudo, assinando por fim o TCLE.

Para tanto, foram priorizadas situações-problema que visaram aguçar os sentidos dos alunos no que tange ao aspecto geométrico, para verificar como estes alunos respondem às propostas apresentadas e quais estratégias adotam.

Os alunos foram identificados por números. Durante a realização das atividades nas turmas, os alunos não tiveram nenhum contato direto com o responsável pela pesquisa, ficando assim o momento de aplicação das atividades livre de qualquer interferência conceitual do autor desta investigação. A fim de salvaguardar a identidade dos alunos participantes das três turmas em pesquisa, eles foram nomeados da seguinte forma:

Quadro 1 – Caracterização dos sujeitos por escola

Escolas	Sujeitos	Identificação dos Sujeitos
Escola A = EA	a1 ... a24	EAa1...EAa24
Escola B = EB	a1...a36	EBa1...EBa36
Escola C =EC	a1...a36	ECa1...ECa36

Fonte: Autora (2016)

Ao elaborar as atividades para os sujeitos de pesquisa das três escolas, considerou-se:

1. Como os alunos desenvolvem as estratégias de resolução dos problemas propostos;
2. Como eles visualizam as definições e teorias matemáticas, associando-as ao estudo da geometria;
3. Quais as suas percepções geométricas utilizadas nas questões, bem como a forma desenvolvida para se chegar à solução do problema;
4. A possibilidade de uma resolução fora do padrão convencional e raciocínio empregado nas questões;
5. Analisar o erro como fonte de informação para a construção do conhecimento.

4.1.3 Instrumentos

Na investigação que segue, os instrumentos utilizados na coleta de dados foram:

Atividade Pré-Teste

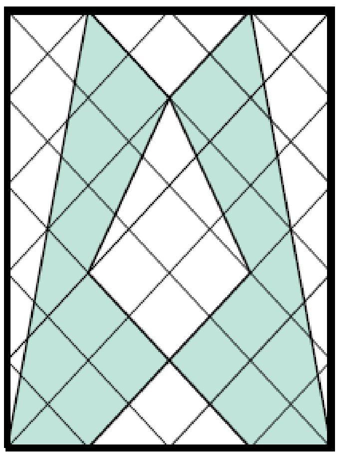
Uma atividade pré-teste foi elaborada e aplicada com os respectivos alunos, quando a proposta de investigação deste estudo era fazer um trabalho colaborativo junto à professora do 8º ano do ensino fundamental II, da escola participante do OBEDUC. As questões escolhidas envolviam dois problemas, retirados da OBMEP, a fonte, foi utilizada por trazer aspectos muito particulares da abordagem geométrica, e por esses tipos de problemas matemáticos, possibilitar ao aluno, resolver grande maioria de suas questões por meio do raciocínio, associado à compreensão de operações fundamentais da Matemática. Como foi a primeira coleta de dados, iniciada na investigação, a mesma foi aplicada apenas para a escola C, pois a atividade pré-teste trouxe evidencias, que não atenderiam ao problema de pesquisa, ora investigado. Mas trouxeram informações que subsidiaram uma adaptação a atividade final para as turmas investigadas.

Na atividade pré-teste utilizou-se a relação de conceitos matemáticos que priorizam a visão geométrica; o objetivo foi investigar como esses alunos solucionam os problemas matemáticos, a fim de analisar as estratégias dos alunos, e quais os conceitos priorizados nas resoluções dos problemas propostos. Esta atividade constituiu-se de duas questões:

Quadro 2: Atividade Pré-Teste – Questão 1

1) O retângulo ao lado, que foi recortado de uma folha de papel quadriculado, mede 4 cm de largura por 5 cm de altura. Qual é a área da região cinzenta?

   a) $10cm^2$
   b) $11cm^2$
   c) $12,5cm^2$
   d) $13cm^2$
   e) $14,5cm^2$



Fonte: OBMEP 2012, nível 2, questão 6

Quadro 3: Atividade Pré-Teste – Questão 2

2) A figura foi formada por oito trapézios isósceles idênticos, cuja base maior mede 10 cm. Qual é a medida, em centímetros, da base menor de cada um desses trapézios?

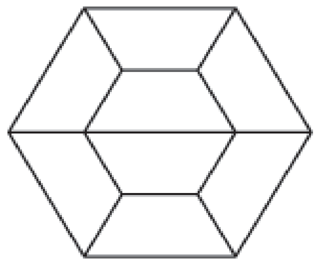
a) 4 cm

b) 4,5 cm

c) 5 cm

d) 5,5 cm

e) 6 cm



Fonte: OBMEP 2012, nível 2, questão 8

Como citado anteriormente, os problemas matemáticos foram retirados da OBMEP por consistirem essencialmente em situações matemáticas que estimulam o raciocínio, utilizam conhecimentos básicos na resolução de problemas e ressaltam os aspectos voltados para a geometria em grande parte das questões.

A análise destas atividades revelou que com problemas matemáticos que envolvem múltipla escolha, os alunos foram resolvendo de forma aleatória até chegar a um dos itens enumerados nas questões; os alunos ficaram condicionados a marcar o primeiro resultado que encontraram nos itens, mesmo que aquela não fosse a solução correta.

Cury (2015, p. 52) enfatiza situações de erro ou do "chute", ao realizar um questionário de atividades de pesquisa e perceber que, "apesar da solicitação dos pesquisadores para que os alunos somente assinalassem uma das alternativas, após terem resolvido a questão no espaço correspondente, muito deles 'chutaram' uma resposta qualquer, que pode ter sido correta ou não". Foram situações em que o aluno não registrou nenhuma estratégia matemática no desenvolvimento do problema.

Para tanto, foram retirados os itens de múltipla escolha, isso porque na escola C, quando aplicada à atividade denominada atividade pré-teste, esse tipo de questão fez com que os alunos não apresentassem estratégias, o que seria essencial ao que se propõe investigar.

4.2 Atividade Final

As atividades aplicadas atendem ao nível de alunos em curso nos respectivos anos escolares em análise; foram questões em que sobressaem conceitos geométricos, mas que também podem ser resolvidas por outras estratégias. O objetivo de trazer tais problemas deve-se à própria característica da pesquisa, a saber: envolver conceitos matemáticos que destaquem a geometria.

Para a atividade final optou-se por apresentar somente o enunciado dos problemas e os condicionantes que ajudaram os alunos a expressar suas estratégias; bem como foi mantido o primeiro problema matemático, da atividade pré-teste, por verificar nesse problema possibilidades de os alunos levantarem hipóteses que estão relacionadas aos conceitos geométricos proporcionados pelo aspecto visual da questão em análise, situações estas que ajudaram a elencar as categorias e subcategorias de análise.

Observou-se que o segundo problema trabalhado na atividade pré-teste apresentava um aspecto mais puramente geométrico, assemelhando-se ao primeiro problema. Selecionou-se um outro em substituição ao segundo da atividade pré-teste, por entender que o novo problema traz um aspecto mais algébrico, por evidenciar o conceito de sistemas de equação em sua solução, e tendo também uma solução por meio geométrico, abordando ideias de áreas e perímetro, o que poderá fornecer respostas ao problema de pesquisa e possibilitar a análise de como o aluno conduz suas estratégias. As questões também foram da OBMEP, adaptando-as para o tipo de questões abertas, o que possivelmente viabilizaria o contexto investigado.

Quadro 4– Problemas[5] aplicados às turmas do 9º ano do Ensino Fundamental II

Problema	Conceito	Enunciado
1	Semelhança Áreas Composição e Decomposição Perímetro	**Problema 1** – O retângulo ao lado, que foi recortado de uma folha de papel quadriculado, mede 4 cm de largura por 5cm de altura. Qual é a área da região em cinzenta?
2	Área Perímetro Sistemas de Equação	**Problema 2** – A figura mostra um retângulo de área 720 cm^2 formado por nove retângulos menores e iguais. Qual é o perímetro, em centímetros, de um dos retângulos menores?

Fonte: A autora (2016)

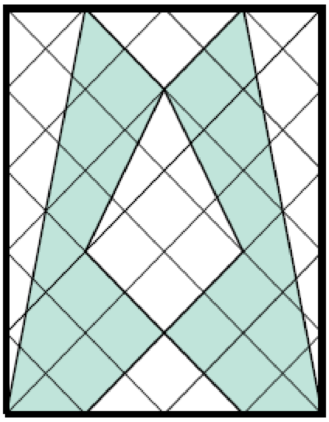
Os problemas foram selecionados do nível 2 da OBMEP ano 2012, pois são questões que possibilitam a utilização das definições e os conceitos matemáticos de forma adequada para o nível do 9º ano e retratam conceitos de que teoricamente os alunos já deveriam ter

[5] Problemas extraídos do *site* da http://www.obmep.org.br/provas.htm

conhecimento por ocasião das séries anteriores; são, porém, questões que podem ser solucionadas com um conhecimento básico de aritmética, bem como de perímetro e áreas.

Quadro 5 – Problema envolvendo semelhança/áreas/composição e decomposição de figuras, aplicado às turmas do 9º ano do Ensino Fundamental II

Problema 1 – O retângulo ao lado, que foi recortado de uma folha de papel quadriculado, mede 4 cm de largura por 5cm de altura. Qual é a área da região cinzenta?



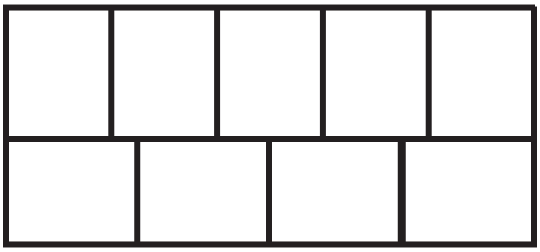
Explique como você resolveu.

Fonte: OBMEP 2012, nível 2, questão 6

O primeiro problema possibilita ao aluno obter a resposta seguindo essencialmente dois caminhos: um que privilegia o aspecto geométrico, em que a visualização e a dedução se destacam para os aspectos relacionados à congruência, composição, decomposição de figuras, áreas e perímetro; e outro que utiliza o cálculo de área de triângulos, com base na malha quadriculada.

Quadro 6 – Problema envolvendo a ideia de áreas e perímetro de figuras, aplicado às turmas do 9º ano do Ensino Fundamental II

Problema 2 – A figura mostra um retângulo de área 720 cm^2 formado por nove retângulos menores e iguais. Qual é o perímetro, em centímetros, de um dos retângulos menores?



Explique como você resolveu.

Fonte: OBMEP 2012, nível 2, questão 15

O segundo problema matemático é, em sua essência, mais algébrico; foi o problema mais diferenciado no que se refere aos conceitos de geometria, pois seria solucionado quase em sua totalidade pelos professores de Matemática mediante o uso de sistemas de equações. O problema foi pensado com o objetivo de perceber qual a estratégia usada pela maioria dos alunos, ou mesmo qual artifício matemático será usado, articulando os conhecimentos adquiridos.

4.3 Procedimentos de análises

Os problemas abordam os conceitos de áreas, perímetros, congruência, sistemas de equações e composição e decomposição de figuras, totalizando 192 soluções analisadas.

Os procedimentos de análises se pautaram por Fiorentini; Lorenzato (2006) e Bardin (2011). Nesta perspectiva,

> os resultados brutos são tratados de maneira a serem significativos e válidos. Operações estatísticas simples (percentagens), ou mais complexas (análise fatorial), permitem estabelecer quadros de resultados, diagramas, figuras e modelos, os quais põem em relevo as informações fornecidas pela análise. (BARDIN, 2011, p. 131).

Buscou-se com isso compreender as estratégias utilizadas pelos sujeitos de pesquisa na resolução dos problemas matemáticos envolvendo conteúdos que tragam em sua especificidade a geometria (composição, decomposição, áreas, perímetro, ou outra ideia que expresse o raciocínio geométrico), mas que também podem ser solucionados utilizando álgebra e aritmética, sistemas de equações, como no caso observado no problema 2.

Analisou-se cada problema a fim de observar de forma minuciosa o caminho de resolução apresentada pelos sujeitos da pesquisa, de maneira a entender os resultados obtidos. De acordo com Gomes (1999 apud FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p. 134), “a análise e a interpretação estão contidas num mesmo movimento: o de olhar atentamente para os dados da pesquisa”.

Já Bardin (2011) reforça um leque de possibilidades que podem ser captadas durante a análise, de maneira a retratar também a flexibilidade das descobertas e os entendimentos dentro dos limites baseados nos referenciais teóricos.

Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 134) estruturaram o processo de categorização e organização das análises: “o conjunto das categorias deve estar relacionado a uma ideia ou conceito central capaz de abranger todas as categorias”. Ainda segundo esses autores, os dados coletados até a fase de análise são momentos em que se pensa a formação das categorias a serem analisadas e que se classificam em:

> *Definidas a priori,* nesse momento o autor destaca um momento das análises, aquele em que o pesquisador vai a campo com algumas categorizações preestabelecidas e que poderão ser referenciadas ou não nas literaturas referendadas. *Emergentes,* são as categorias que irão surgir a partir das observações, das atividades que serão propostas para os sujeitos de pesquisa, e de todo o processo contínuo das coletas de dados. *Mistas,* são as categorias obtidas a partir do cruzamento de informações e interpretações baseadas na coleta de dados e no que dizem os teóricos que embasam as literaturas em estudo (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p. 134).

Ao se investigar as estratégias dos alunos que envolvem geometria, foram observados que artifícios os alunos utilizam para resolver os problemas matemáticos, se utilizaram ideias com conceitos geométricos e qual percurso encaminha para a solução. As respostas foram analisadas quantitativa e qualitativamente.

Os materiais para a realização da análise bem como a organização dos dados intentaram auxiliar na compreensão das análises; os materiais foram organizados em categorias. Categorizar “tem como primeiro objetivo (da mesma maneira que a análise documental) fornecer, por condensação, uma representação simplificada dos dados brutos” (BARDIN, 2011, p.148-149). Objetivou-se com isso apropriar-se de forma mais efetiva das informações reveladas na coleta.

O teste foi realizado com os 96 alunos, e as duas questões evidenciavam aspectos geométricos. O intuito era perceber as estratégias dos alunos, como solucionaram os problemas que traziam em sua essência o aspecto da geometria, e como articularam os conhecimentos e a solução. Com relação a esse agrupamento de informações, Bardin (2011, p. 148) ressalta que essa classificação integra o momento de “repartir os elementos e, portanto, procurar ou impor certa organização às mensagens”.

Assim, foi criado um código de identificação para cada escola; cada uma das turmas investigadas tinha a seguinte nomenclatura: EAa1...EAa24, EBa1...EBa36, ECa1...ECa36. Após a aplicação das atividades, separaram-se as questões em branco das que foram respondidas; em seguida, as questões respondidas foram classificadas em: questões corretas, parcialmente corretas e erradas; as estratégias foram escaneadas para uma segunda análise de observação.

Com objetivo de uniformizar as soluções apresentadas pelos alunos, considerou-se:

Correta – quando o aluno, a partir de conceitos e definições, utilizou estratégias e chegou à solução correta.

Parcialmente Correta – quando a estratégia do aluno apresentou coerência no raciocínio para traçar um caminho para a solução.

Errada – a questão foi resolvida de maneira incorreta, utilizando-se de conceitos que não atendam ao enunciado da questão.

Branco – quando os alunos não tentaram, não entenderam ou não souberam resolver o que o comando da questão apresentava.

A partir da organização e da separação das atividades apresentadas, passou-se para a segunda etapa da análise dos dados: a análise do conteúdo das respostas dos alunos, escolhendo as estratégias Corretas e Parcialmente Corretas, tendo em vista que o objetivo era analisar as estratégias geométricas das soluções dos alunos. As Erradas também foram analisadas, com o propósito de estudar o erro como uma forma de conhecer as dificuldades apresentadas pelos sujeitos de pesquisa. A grande quantidade de questões em branco, parcialmente corretas e erradas evidenciou dificuldades recorrentes no que se refere aos conceitos de geometria. Nesse sentido, optou-se por investigar os erros, pois surgiram ao longo da investigação dados não previstos *a priori.*

> Os dados não são coisas isoladas, acontecimentos fixos, captados num instante de observação. Eles se dão num contexto fluente de relações: são “fenômenos” que não se restringem às percepções sensíveis e aparentes, mas se manifestam numa complexidade de oposição, revelações e ocultamentos (CHIZZOTTI, 2005, p. 84).

Com o objetivo de se perceber nas estratégias dos alunos evidências sobre respostas ao problema de pesquisa, e como os alunos estão integrando os conceitos geométricos que são próprios do ensino fundamental, elegeu-se a categoria análise: estratégias geométricas e resolução de problemas, verificando nas estratégias dos alunos que foram consideradas Corretas e Parcialmente Corretas, evidências que levaram à inferência de alguns resultados.

Com isso, a categoria foi ainda subclassificada qualitativamente, “por apresentar certas características particulares. É válida, sobretudo, na elaboração das deduções específicas sobre um acontecimento ou uma variável de inferência precisa” (BARDIN, 2011, p. 145).

As subcategorias consideradas foram as seguintes:

1) ***Geometria e Álgebra*** – quando o aluno fez uso de sua estratégia, utilizando a geometria e a álgebra de forma articulada;
2) ***Geometria***– percepção, visualização e dedução. Quando o aluno fez uso do raciocínio dedutivo e da representação visual;
3) ***Álgebra e Aritmética*** – quando o aluno se utilizou das operações fundamentais e dos conceitos algébricos;
4) ***Aritmética e representações pictóricas*** – quando o aluno fez uso de desenhos ou rascunhos associados a cálculos operatórios para chegar à solução.

No que se refere às atividades consideradas erradas, conservaram-se os caminhos através das estratégias equivocadas, buscando entender as dificuldades pontuais nos conceitos evidenciados de Matemática, pois, no que se refere às estratégias erradas, Cury (2015, p. 65) destaca “na análise das respostas dos alunos o importante não é o acerto ou o erro em si – que são pontuados em uma prova de avaliação de aprendizagem –, mas as formas de se apropriar de um determinado conhecimento, que emergem na produção escrita e que podem evidenciar dificuldades de aprendizagem”.

O ato de analisar e investigar soluções e/ou respostas dos alunos proporcionou um olhar mais atento para as ações de formação de professor e para as práticas articuladas em sala de aula, de maneira a conhecer melhor as dificuldades dos alunos e saber conduzir uma melhor estratégia em sala de aula, a partir das dificuldades que geram os erros frequentes. Sobre a importância de se analisar detidamente as respostas dos alunos, Cury enfatiza:“o trabalho investigativo sobre as respostas pode levar em conta a tarefa inicial de correção, mas é necessário ter um objetivo nessa pesquisa, levantando questões (ou hipóteses) que possam ser investigadas (2015, p. 65)”.

No que tange à análise dos erros apresentados nas estratégias dos alunos, elegeram-se as seguintes subcategorias, nomeadas por:

1) ***Erro do procedimento por desconhecimento conceitual*** – quando houve um erro quanto ao procedimento adotado, ou mesmo quando este erro ocorreu em decorrência de um desconhecimento conceitual, o aluno não responde, pois lhe falta o conhecimento de conteúdo e das propriedades pertinentes a cada conhecimento

matemático, ou ainda, são usados de maneira errada e inadequada, por não serem entendidos.

2) ***Tentativa e erro*** – utilizaram-se várias tentativas para solucionar o problema, com inserção de soluções rasuradas, riscos, explorando informações do problema e conjecturando sobre os artifícios para solucionar e/ou formular o raciocínio.

3) ***Exprimiu resposta aleatória ("Chute")*** – utilizaram-se símbolos numéricos para representar uma solução, que forneceu um resultado de maneira aleatória e/ou incoerente com as informações do problema.

Os dados coletados bem como as interpretações e os registros trazidos na investigação foram relevantes, inferindo-se a partir dessas análises que,

> tendo à sua disposição resultados significativos e fiéis, pode-se então propor inferências e adiantar interpretações a propósito dos objetivos previstos – ou que digam respeito a outras descobertas inesperadas. Por outro lado, os resultados obtidos, a confrontação sistemática com o material e o tipo de inferências alcançadas podem servir de base a outra análise disposta em torno de novas dimensões teóricas, ou práticas (BARDIN, 2011, p.131-132).

Foram revelados dados importantes sobre o ensino da geometria, assim como as dificuldades apresentadas pelos alunos e a importância de se inserir os conceitos geométricos articulados à resolução de problemas no ensino de Matemática.

No capítulo seguinte, observa-se a análise dos dados, momento em que são destacadas informações relevantes para a investigação, pois se verificam as estratégias dos alunos e os caminhos que desenvolveram para tentar solucionar os problemas apresentados.

5 ANÁLISE DOS DADOS

5.1 Análise quantitativa das estratégias dos alunos em todas as escolas

Foi realizado um levantamento das resoluções dos alunos nas três escolas, identificando quantitativamente o número de acertos, acertos parciais, erros e questões que foram deixadas em branco. Bardin (2011, p. 145) considera a análise quantitativa um processo importante e destaca "que a observação é mais bem controlada". Quanto aos aspectos quantitativos, foram organizados os dados numéricos relativos às primeiras informações coletadas, como segue:

Quadro 7 – Apresentação dos dados quantitativos por /problemas/escolas

	Problema 1					Problema 2				
	EA	**EB**	**EC**	**TOTAL**	**%**	**EA**	**EB**	**EC**	**TOTAL**	**%**
Corretas	**0**	**0**	**0**	**0**	**0,00**	**0**	**2**	**0**	**2**	**2,08**
Parcialmente Corretas	**4**	**22**	**5**	**31**	**32,29**	**6**	**15**	**27**	**48**	**50,00**
Erradas	**12**	**4**	**4**	**20**	**20,83**	**3**	**9**	**0**	**12**	**12,50**
Em branco	**8**	**10**	**27**	**45**	**46,88**	**15**	**10**	**9**	**34**	**35,42**

Fonte: Escolas participantes da investigação (Ea,Eb,Ec)

No que se refere às informações acima, nenhum aluno apresentou uma solução que levasse à resposta totalmente correta no problema 1, nas três escolas. Já no problema 2, observam-se na escola EB apenas duas soluções consideradas corretas.

O estudo inicial revelou a grande quantidade de alunos que deixaram de responder aos problemas, sem nem mesmo fazer tentativas para chegar à resposta. Isso leva a conjecturar que esses alunos possivelmente não conhecem as definições e os procedimentos adotados, "buscando para isso abordar conceitos relacionados e explorar diferentes estratégias de resolução" Nunes *et al.* (2014, p. 101).

Observou-se também que no problema 2 houve mais tentativas de se chegar à solução. Os alunos, em sua grande maioria, partiram de um conceito correto e iniciaram de forma coerente a estratégia apresentada, mas a maioria não logrou sucesso na solução do problema, apresentando dificuldades de conhecimento matemático – tanto de ordem algébrica quanto ao utilizarem concepções geométricas. É um momento que confirma serem pertinentes as discussões em sala de aula, em que o professor pode mediar os conhecimentos, diminuindo as lacunas encontradas durante o desenvolvimento das questões. As intervenções e discussões realizadas no ambiente escolar "são, pois, fundamentais para que os alunos, por um lado, ganhem um entendimento mais rico do que significa investigar e, por outro, desenvolvam a capacidade de comunicar matematicamente e de refletir sobre o seu trabalho e o seu poder de argumentação" – Ponte *et al.* (2006, p. 41).

No problema 1, na escola EA, houve muitas soluções incoerentes e poucas tentativas de se chegar à solução da questão, o que foi um dado importante, pois se conjecturou que a questão da malha quadriculada fosse mais fácil aos alunos, situação também privilegiada pela figura, pois elas "formam um suporte intuitivo importante nos passos da demonstração em geometria e dão uma visão maior do que o enunciado" Duval (1995 apud Almouloud, 2013, p. 130); isso, de alguma forma, tornaria o problema de fácil resolução. Nessa direção, há indícios de que esses alunos durante as aulas de Matemática do ensino fundamental não trabalharam a resolução de problemas que atentem para os conceitos geométricos, já que tiveram dificuldade de formular suas hipóteses, bem como de se expressarem na linguagem matemática e escrita (PONTE *et al.*, 2006), já que não foram observadas nas resoluções estratégias diversificadas de soluções para os problemas apresentados, conforme Carvalho (2007), Ponte (2006) e Polya (2006).

Para as três escolas esperava-se que o índice de acertos para o problema 1 seria mais satisfatório, por ser a malha quadriculada muito discutida nos 6º e 7º anos, nos conceitos iniciais relativos a áreas e perímetro. Nota-se com isso que os alunos não estavam familiarizados com tais tipos de problemas. Polya (2006, p. 3) observa: "se o aluno conseguir resolver o problema que lhe é apresentado, terá acrescentado alguma coisa à sua capacidade de resolver problemas".

De forma geral, os alunos apresentaram pouco nível de entendimento dos conceitos postos no problema, confundindo bastante as ideias de área e perímetro, e não fazendo distinção entre as unidades de medida mencionadas nas questões.

No problema 2, na escola B, dois alunos conseguiram, de forma aceitável, chegar à solução do problema. Vale ressaltar que foram os únicos entre os 96 sujeitos desta investigação. Foi uma solução muito interessante trazida pelos alunos, pois é um problema em que a maioria das soluções é obtida por meio de um sistema de equação, e revelou-se nas duas estratégias dos alunos EBa8 e EBa18 que eles utilizaram técnicas que exploram a visualização e a utilização de cálculos aritméticos por meio de tentativas, deduzindo assim a resposta correta. Desse modo, infere-se que os alunos entenderam o aspecto geral da questão, separando as hipóteses e confrontando os dados, conduzindo assim a uma interpretação da questão, o que lhes possibilitou acertá-la (ALMOULOUD, 2013). Nas demais soluções, os alunos utilizaram as definições matemáticas para encontrar a área do retângulo menor e não concluíram a solução apresentada de forma correta, pois utilizaram ideias equivocadas sobre os conceitos de área e perímetro.

Houve situações no problema 2 em que os alunos usaram estratégias aceitáveis que levariam ao cálculo final se estivessem bem articuladas as definições; em outras poucas situações, os sujeitos começaram a estratégia com caminhos que não satisfaziam o enunciado nem levariam à possível solução, revelando dificuldades no entendimento conceitual ou mesmo desconhecimento das definições.

De maneira geral, a grande maioria iniciou as estratégias e não conseguiu concluir o raciocínio coerentemente. A quantidade de questões em branco foi bem expressiva, o que foi observado também nas duas escolas citadas anteriormente. Isso, de maneira geral, denota um ponto de fragilidade e/ou não conhecimento dos conceitos matemáticos, revelando que os alunos não sabem ou não entenderam e não interpretaram o que se pretendia com os problemas matemáticos.

5.2 As estratégias corretas e parcialmente corretas, observadas as subcategorias

No universo de amostra desta investigação, que corresponde a 192 resoluções relacionadas a dois problemas propostos, apresentam-se informações das três escolas no que diz respeito ao quantitativo de questões corretas e parcialmente corretas.

Quadro 8 – Quantidade de estratégias consideradas corretas e parcialmente corretas

Escolas	Problema 1		Problema 2	
	Corretas	Parcialmente Corretas	Corretas	Parcialmente Corretas
A	0	4	0	6
B	0	22	2	15
C	0	5	0	27
Total	**0**	**31**	**2**	**48**

Fonte: Escolas participantes da investigação (Ea,Eb,Ec)

As resoluções consideradas parcialmente corretas do problema 1 totalizam 31 soluções. No problema 2, trata-se de 50 soluções, sendo duas consideradas corretas e 48 parcialmente corretas. Neste caso, têm-se 81 soluções distribuídas e definidas *a priori*.

Estas resoluções estão organizadas, a partir de agora, de acordo com as subcategorias assinaladas, pois foi possível observar que os alunos nas estratégias utilizaram esquemas, algoritmos, desenhos, fórmulas e equações, para só então analisar como foi estruturada cada estratégia.

Quadro 9 – Estratégias de solução dos alunos nas subcategorias.

Problemas	Estratégias de Soluções Corretas e Parcialmente Corretas			
	Geometria e álgebra	Geometria – percepção, visualização e dedução	Álgebra e aritmética	Aritmética e representações pictóricas
Problema 1	–	6	24	1
Problema 2	–	3	46	1

Fonte: A autora (2016)

5.2.1 Estratégias do Problema 1 consideradas corretas

Em relação ao problema 1, não foram encontradas soluções corretas nem estratégias que trouxessem um resultado que encaminharia completamente para a solução da questão. Isso revela como o estudo de geometria ainda é visto com tantas dificuldades pelos alunos nas escolas. As ações didáticas ainda são pouco trabalhadas, mesmo com toda relevância que essa área de conhecimento proporciona aos sujeitos de aprendizagem para "desenvolver as habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de busca de soluções para problemas" Nunes *et al.* (2014, p. 102). Percebe-se que as ações didáticas e a formação de professores devem ser mais fortalecidas, com o objetivo de minorar as dificuldades que ainda são evidenciadas nas salas de aulas.

Sobre o problema 1, obtiveram-se apenas soluções parcialmente corretas.

5.2.2 Estratégias do Problema 1 consideradas parcialmente corretas

Como citado anteriormente, no problema 1 obteve-se um total de 31 soluções parcialmente corretas, organizadas de acordo com cada subitem:

Geometria e a álgebra – quando o aluno fez uso de sua estratégia utilizando a geometria e os aspectos visuais e lógicos, articulados ao conhecimento de álgebra. Com relação às subcategorias geometria e álgebra, não houve nenhum aluno que tenha iniciado o problema calculando as áreas, subdividindo as áreas ou fazendo aproximações para cada quadradinho empregado na questão. Em nenhum instante os alunos fizeram uso das mais diversas formas de registros escritos, sejam eles figurais, privilegiando a geometria, ou mesmo escritos algébricos, que facilitariam aos alunos fazer melhor suas conjecturas a respeito do problema solicitado. Com respeito a isso, Almouloud (2013, p. 129-130) destaca que

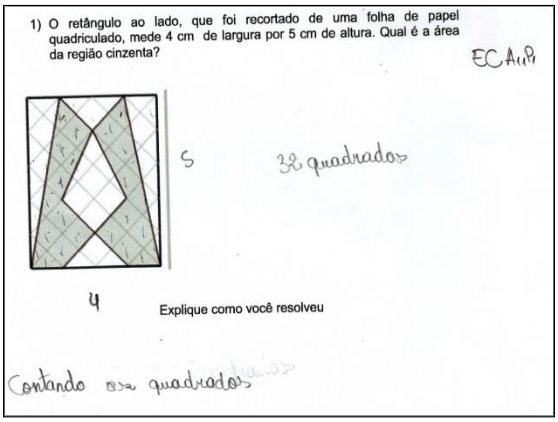
> o processo de resolução de problema envolve, entre outros, a interpretação do enunciado, procedendo às devidas conversões (registros discursivo, figural, matemático). Essas conversões não só colaboram na compreensão do problema, como são também fatores facilitadores na resolução.

Se os alunos tivessem pensado nos dados da questão e destacado conjecturas a partir do problema solicitado, esse conjunto de ações traria aos sujeitos possíveis ideias para iniciar um caminho matemático.

Geometria– usa-se prioritariamente a percepção, a visualização e o raciocínio dedutivo.

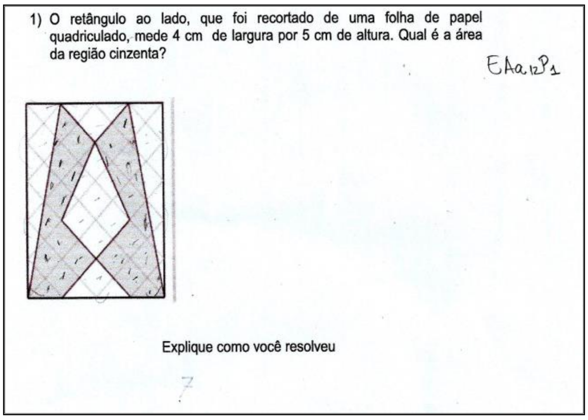
Analisando as estratégias dos alunos que envolveram percepção geométrica, deduções e visualização, percebe-se que este obteve o segundo maior resultado, com 19% das soluções apresentadas, o que revela um quadro bem fragilizado com relação ao ensino de geometria.

Figura 1 – Estratégia do problema 1 – ECa11



Fonte: ECa11

Figura 2 – Estratégia do Problema 1 – EAa12



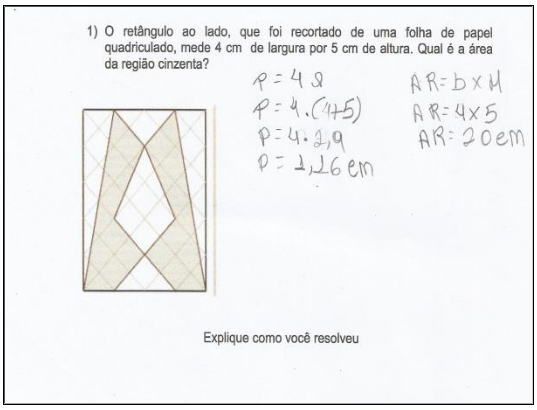
Fonte: EAa12

Os alunos ECa11 e EAa12 conjecturaram sua estratégia articulada à ideia de composição e formulação de regularidades que cheguem a uma possível aproximação do resultado da questão. Fizeram referência aos comprimentos da figura apresentada e realizaram tentativas para uma possível solução. Percebe-se nas estratégias acima que os alunos priorizaram a visualização e o raciocínio dedutivo, porém não estão familiarizados com problemas matemáticos no nível apresentado, que envolvem visualização e percepção matemática. Ponte *et al.* (2006, p. 33) asseveram que "as conjecturas podem surgir ao aluno de diversas formas, por exemplo, por observação direta dos dados, por manipulação dos dados ou por analogia com outras conjeturas". Ressaltam também que é nessa hora que os alunos iniciam um raciocínio que possibilita explorar uma direção coerente para a solução, fazendo-se necessária a intervenção do professor, a nortear o caminho da solução (PONTE *et al.*, 2006).

Álgebra e Aritmética– operações fundamentais aritméticas e conceitos algébricos.

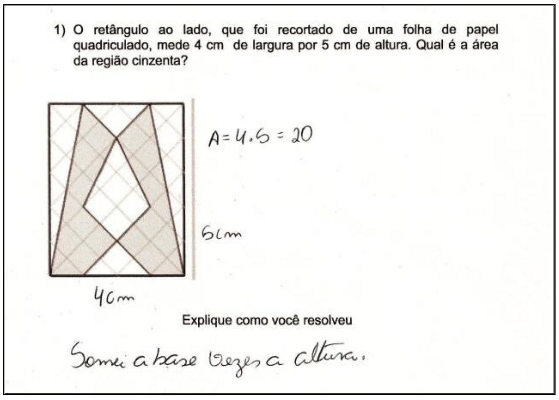
Houve também muitas tentativas de se chegar à solução do problema com o uso predominante da aritmética. Observa-se um total de 24 soluções no problema 1, o que caracteriza mais de 75%, numa amostra de 31 soluções apresentadas.

Figura 3 – Estratégia do Problema 1-EBa4



Fonte: EBa4

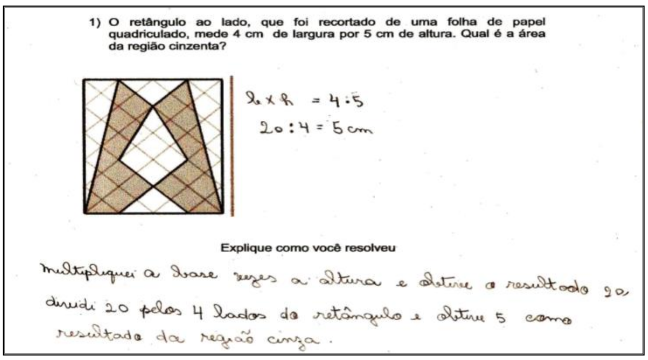
Figura 4 – Estratégia do Problema 1- EAa5



Fonte: EAa5

Percebe-se, pelas soluções trazidas pelos alunos, o uso predominante de tentativas por meios algébricos, associado à aritmética operatória.

Figura 5 – Estratégia do Problema1 – EBa11



Fonte: EBa11

Resultado percebido na maioria das respostas analisadas, situação também em que o aluno redigiu sua estratégia e fez uso de cálculo para explicá-la. Notam-se muitas dificuldades conceituais e desconhecimento em relação aos conceitos de geometria.

Já no que se refere à álgebra, mesmo com um alto índice de soluções que trazem um caminho mais algébrico, percebe-se pelas soluções que esse processo de construir a afirmação dos conceitos matemáticos não é compreendido pelos alunos. Nessa linha de pensamento, Ribeiro; Cury (2015, p. 73) destacam que “não basta ao professor conhecer os conceitos que vai lecionar ‘apenas’; ele precisa ter uma visão das metodologias e de outras questões referentes ao ensino, bem como daquelas que dizem respeito aos estudantes”. Com relação a isso, os autores afirma:

> Consideramos que uma das possibilidades é discuti-los em cursos de formação inicial e continuada de professores de Matemática, para que não se percam as oportunidades de mudança que são apontadas nas dissertações ou teses. Não havendo discussão sobre questões aplicadas aos alunos e sobre metodologias indicadas para o ensino de cada tópico, perde-se a oportunidade de debater as questões fundamentais para a prática escolar, ou seja, não se possibilitam oportunidades de desenvolver o conhecimento específico do conteúdo, o conhecimento dos alunos e do ensino (RIBEIRO, CURY, 2015, p. 70-71).

Quanto às estratégias de cálculo apresentadas, os alunos compreendem como calcular a área da figura. Porém, ao calcular a área solicitada no seu desenho, o aluno tentou articular o resultado encontrado com alguma relação entre as informações do problema, mediante uma estratégia que não levaria à solução. Isso revela que os alunos, estão mais familiarizados com o cálculo de áreas simples.

Mesmo sendo a estratégia algébrica o resultado mais expressivo apresentado pelos alunos, notam-se muitas dificuldades no que se refere aos conceitos algébricos. Kieran (2004 apud RIBEIRO; CURY, 2015, p. 13) menciona que: “Os livros-textos de álgebra reforçam, em geral, os aspectos transformacionais, com ênfase em regras a serem seguidas para a manipulação de expressões simbólicas, ao invés de atentar para as noções conceituais, que sustentam essas regras”.

No tocante aos cálculos de EBa11, o sujeito em sua estratégia dividiu a área do retângulo por quatro, sendo “quatro” os quatro lados do retângulo, cometendo assim equívocos relacionados às definições das figuras planas. Não fez distinção entre as unidades de área e o perímetro, fato notado quando divide 24, encontrando cinco centímetros, concluindo assim que esta era a área da região solicitada. Infere-se que ao dividir por quatro, o aluno fez referência aos lados da figura, não conhecendo as propriedades básicas de geometria.

Com relação a situações que levem em conta o ensino e a aprendizagem de Matemática, e particularmente o ensino das propriedades geométricas, Almouloud (2013, p. 131) afirma:

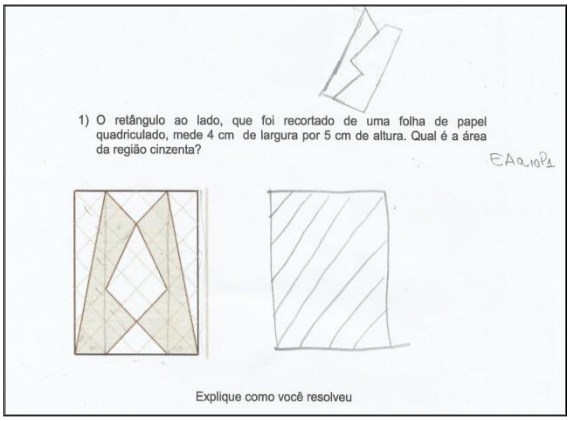
> O processo de aquisição dos conhecimentos, em particular dos conhecimentos em geometria, apoia-se sobre: a) construções geométricas (conversão do registro discursivo ao figural); b) atividades de resolução de problemas geométricos; c) atividades de formulação (registro discursivo); d) observação de provas associadas à

> tomada de decisões; e) entendimento e redação da solução de problemas.

É nesses momentos que se pode pensar no ensino de matemática de forma a integrá-la mais efetivamente nos procedimentos metodológicos em sala de aula, e nas inserções dos conceitos matemáticos de forma articulada.

Aritmética e representações Pictóricas – fez uso de desenhos ou rascunhos associados a cálculos operatórios para chegar à solução.

Figura 6 – Estratégia do Problema 1 – EAa10



Fonte: EAa10

Utilizou composição para chegar ao resultado, priorizando a visualização. Ao tentar uma representação mais acessível do problema, articulou os conceitos matemáticos às informações do problema e aos conhecimentos prévios. O aluno refez o desenho e buscou uma saída para o problema, situação que se infere ser familiar ao aluno. "Isso evidencia como os alunos procuram integrar os seus conceitos matemáticos na investigação" (PONTE *et al.*, 2006, p. 32).

Porém, mesmo sendo o fator visual de grande importância para esses alunos, devem-se proporcionar a eles diferentes situações que priorizem resolução de problemas matemáticos em suas diferentes áreas, bem como o ensino da geometria, lançando mão de problemas desafiadores que estimulem nos alunos a construção de "situações de ensino e aprendizagem considerando [...] apreensões: perceptiva, discursiva, operatória e sequencial" Almouloud (2013, p. 131).

Nesse sentido, reitera-se a importância de se trabalhar os conceitos matemáticos de forma articulada, dando relevância às áreas do ensino de matemática, "bem como o importante papel que a geometria desempenha na arte de facilitar a aprendizagem da matemática, por tornar possível o que nem sempre palavras, números e outros símbolos conseguem comunicar" (LORENZATO, 2010, p. 60).

Assim, vale destacar o quanto se tornam imprescindíveis o estudo e a prática de investigações geométricas, que devem ser inseridos de forma mais efetiva nas ações escolares e nos problemas matemáticos trabalhados em sala de aula, porquanto essa área de estudo desempenha um papel fundamental na formação escolar do aluno.

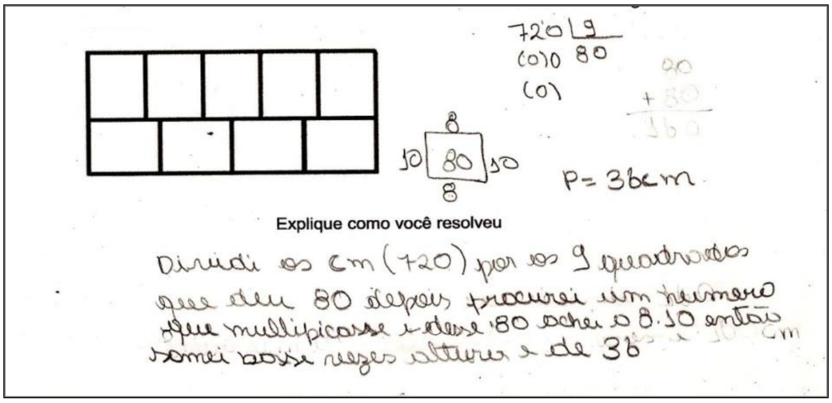
5.2.3 Estratégias do Problema 2 consideradas corretas

No problema 2, nota-se *a priori* um problema essencialmente algébrico, e se esperava que a maioria das soluções lançassem mão de estratégias em que os alunos relacionassem os conceitos de sistemas de equações, fazendo uso de aspectos algébricos.

De fato, as soluções que priorizavam um aspecto mais numérico e algébrico – o uso da dedução e de tentativas – foram consideradas pelos alunos, e estes conduziram a solução a um raciocínio numérico associado a aspectos algébricos.

Na estratégia com soluções corretas, apresentaram-se duas soluções levantadas por dois alunos, com a resolução classificada na categoria de ***Geometria – percepção, visualização e o raciocínio dedutivo.***

Figura 7 – Estratégia do Problema 2 – EBa8



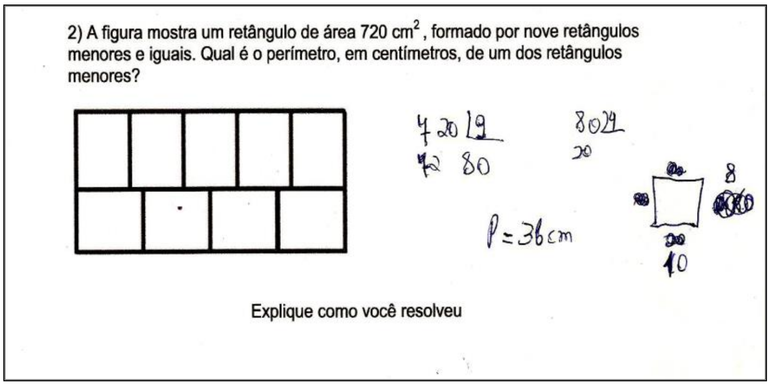
Fonte: EBa8

O aluno fez muitas tentativas e uso da percepção visual; sem utilizar cálculos algébricos de sistema de equação, encontrou a resposta por meio da técnica de tentativas articuladas com os conhecimentos que já adquirira ao longo de sua vida escolar. Sobre esse tipo de estratégia, Palhares (2004, p. 25) assinala que “tentativas não são feitas às cegas, mas orientadas em termos de raciocínio e verificadas. Se satisfazem as condições, constituem solução; caso contrário, deve-se fazer outra tentativa e voltar a testar”.

A maneira mais adotada quando se conhecem todas as definições que subsidiam esse problema é, sem dúvida, o sistema de equações. Talvez pelas dificuldades apresentadas pelos alunos no contexto geral dos conceitos, o aluno fez uso de conhecimentos que lhe são próprios para solucionar o problema matemático; e o fez por meio de estratégias que privilegiaram a figura e os conceitos envolvidos na questão.

A segunda solução também foi muito interessante. Nela, o aluno demonstrou percepção, visualização e dedução ao fazer uso do raciocínio dedutivo e se ancorar na representação visual e nos dados dos problemas para conjecturar as possíveis soluções e chegar à resposta, como segue:

Figura 8 – Estratégia do Problema 2 – EBa18



Fonte: EBa18

O aluno utilizou o procedimento correto para obter a área do retângulo menor. Mesmo não especificando a unidade de área, ele demonstrou conhecimento ao concluir de forma correta o problema: 36 cm. EBa18 apropria-se do raciocínio dedutivo e da visualização trazida na figura para solucionar o problema, articulados às operações fundamentais.

Duval (1995 apud Almouloud, 2013), em seu estudo acerca da formação de conceitos associados à geometria, explicita como ocorrem os momentos de interpretação na construção do conhecimento matemático geométrico: "A forma de apreensão perceptiva é a interpretação das formas da figura em uma situação geométrica, seguida da operatória, que está centrada nas modificações possíveis de uma figura de partida e na reorganização perceptiva Durval (1995 apud ALMOULOUD, 2013, p. 127)".

No tocante a essa questão, em que se privilegiam a visualização e a percepção ao resolver um problema matemático, os alunos se expressam e fazem suas conjecturas nos espaços de aprendizagem. É nesse momento que se

> permite principalmente desenvolver processos e capacidade do pensamento que são o que de mais importante a matemática escolar pode desenvolver num indivíduo,

> uma vez que estas atividades complexas de pensamento estão presentes quando alguém é chamado a analisar, interpretar, criticar ou escolher, quer num contexto educativo quer no dia a dia (PALHARES, 2004, p. 10).

Diante das análises, conclui-se o quanto desenvolver a resolução de problemas se faz relevante nas práticas de sala de aula, proporcionando aos alunos a formação dos conceitos matemáticos, seja na construção do pensamento algébrico, seja nos aspectos que enfocam a geometria. Pois ao ensino de Matemática deve-se

> garantir o desenvolvimento de capacidades, como observação, estabelecimento de relações, comunicação (diferentes linguagens), argumentação e validação de processos e o estímulo às formas de raciocínio, como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa (BRASIL, 1998, p. 56).

5.2.4 Estratégias do Problema 2 consideradas parcialmente corretas

Geometria e álgebra – quando o aluno faz uso de sua estratégia, utilizando a geometria e os aspectos visuais e lógicos, articulados ao conhecimento de álgebra.

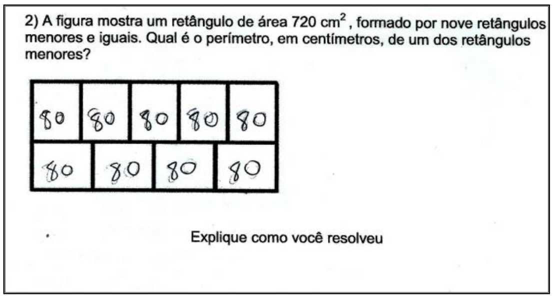
Mesmo o problema sendo mais algébrico por essência, um bom conhecimento de áreas ajudaria bastante os alunos a resolverem com propriedade o problema 2, utilizando conceitos geométricos e também algébricos. Porém, nenhuma solução foi apresentada pelos alunos com estratégias de geometria associada a conceitos algébricos, ou com a associação de duas soluções, ainda que parcialmente. Apesar de se saber o quanto a integração entre as áreas é importante, esta ainda é pouco usada, dada a dificuldade apresentada pelos professores em fazer tais articulações entre as áreas e os diferentes conceitos, prática que exige “identificar pontos de conexão entre os campos, bem como respeitar as características de cada campo (vocabulário, simbologia, regras, conceitos, definições)” (LORENZATO, 2010, p. 60).

É uma prática que deve ser estimulada em sala, assim como apresentar problemas matemáticos instigantes, que ofertem diferentes possibilidades de solução. Nesses momentos, esclarecem Ponte *et al.*(2006, p. 33), os alunos “se dispõem a registrar as suas conjecturas [...] se confrontam com a necessidade de explicitar as suas ideias e estabelecem consensos e um entendimento comum quanto às suas realizações”.

Geometria (Percepção, visualização e dedução) – usou prioritariamente a percepção, a visualização e o raciocínio dedutivo.

Somente em três estratégias, o que equivale a 6% do total de questões Parcialmente Corretas e Corretas, no universo de 50 questões que foram apresentadas, os alunos fizeram uso do raciocínio e da dedução para chegar à solução do problema.

Figura 9 – Estratégia do Problema 2 – ECa5



Fonte: Eca5

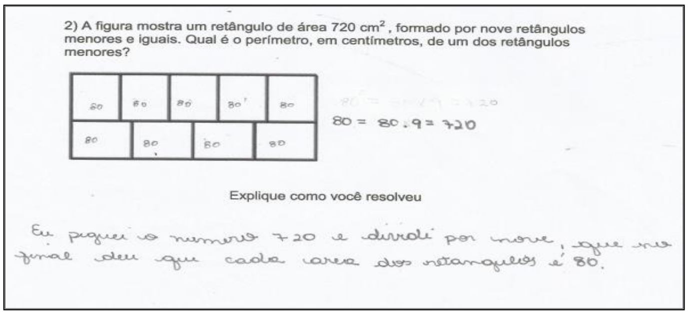
Na solução evidenciada, o aluno se utilizou da questão visual e dos dados do enunciado para chegar à solução, fazendo mentalmente o cálculo e tentando articular os conhecimentos de área e perímetro. Segundo Duval (1995 apud Almouloud, 2013, p. 126), essa é uma das etapas que envolvem raciocínio geométrico, situação em que os alunos se apoiam na “visualização para a exploração heurística de uma situação complexa”. Nota-se também que os alunos compreenderam o enunciado do problema, observando os conceitos que lhes são próprios: “verifica-se que os alunos tendem a apresentar conjecturas [...] que facilitam a compreensão mútua” (PONTE *et al.*, 2006, p. 35), momento em que se privilegia a percepção visual, procedimento evidenciado ao encontrar as áreas dos retângulos pequenos.

Porém o aluno se depara, também, com situações que envolvem os aspectos da construção dos conceitos, para que a aprendizagem, no que se refere à Matemática e ao conhecimento geométrico, possa acontecer de forma satisfatória. Com relação às dificuldades levantadas sobre o conhecimento em geometria, Almouloud (2013) apresenta atividades que foram pensadas com base no esquema criado por Gervazoni Silva de Mello (1999) e destaca que para superar os obstáculos à aprendizagem da geometria, deve-se inicialmente “reconhecer o estatuto: definição, postulados, teoremas (hipóteses/conclusão)” Mello (1999 apud Almouloud, 2013, p. 132), situações essenciais na aquisição dos conceitos matemáticos, bem como de suas subáreas.

Álgebra e Aritmética – operações aritméticas fundamentais e conceitos algébricos.

Observou-se um total de 46 estratégias em que os alunos se apropriaram de conceitos básicos relacionados à álgebra/aritmética, perfazendo um percentual em torno de 92%. Isso revela que os alunos, na grande maioria, utilizam conceitos algébricos para solucionar problemas matemáticos. Mesmo de forma fragilizada, a ideia principal que vem ao raciocínio dos alunos é a de aplicações algébricas.

Figura 10 – Estratégia do Problema 2 – ECa19



Fonte: ECa19

Revela-se o quanto se deve manter a articulação dos conceitos matemáticos associada à prática de trazer metodologias de resolução de problemas e promover de forma mais efetiva ações de formação do professor. Sobre a importância de resolver problemas e sua relevância na apreensão de conceitos nas diferentes áreas de ensino:

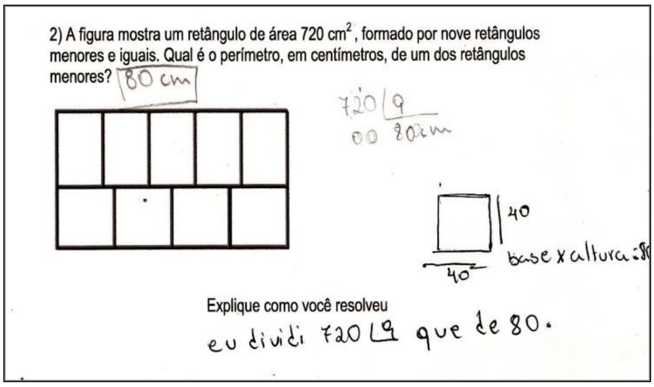
> Os PCN apresentam a resolução de problemas como abordagem preferencial para o ensino de Matemática e consideram que se deve partir de um problema para que, nas tentativas de resolvê-lo, o aluno se aproxime sucessivamente do conceito que, posteriormente, será sistematizado (RIBEIRO; CURY, 2015, p. 51).

Do ponto de vista da aprendizagem e de documentos oficiais como os PCN, não se deve tratar o ensino de matemática fragmentando-o em suas áreas, visto que “as áreas de conteúdo se sobrepõem e se integram” Ribeiro; Cury (2015, p. 52).

Aritmética e representações pictóricas – fez uso de desenhos ou rascunhos associados a cálculos operatórios para chegar à solução.

Observou-se uma solução em que o aluno fez conjeturas tanto com cálculos aritméticos quanto com a estratégia de redesenhar parte da figura proposta, como forma de ajudar na solução do problema. O aluno articula conhecimentos algébricos ao uso de representação com figuras.

Figura 11 – Estratégia do Problema 2 – EBa22



Fonte: EBa22

É uma típica situação em que caberia a figura do professor, pois nota-se que mesmo tentando articular seus conhecimentos prévios, o aluno se vê em dificuldades em conceitos como área e perímetro. Nesse caso, problemas matemáticos e estratégias de resolução por diferentes caminhos assegurariam ao aluno desenvolver as soluções. De fato, “o que realmente interessa é propiciar ao aluno pensar em uma solução, e verbalizá-la para que o professor possa fazer as intervenções necessárias” (CARVALHO, 2007, p. 16).

5.3 Soluções erradas – O erro como fonte de informação

No que se refere às questões erradas, foram analisadas soluções trazidas pelos alunos e as dificuldades que estes apresentaram ao tentar resolver os problemas, buscando-se entender um pouco os obstáculos que perpassam os espaços de ensino e aprendizagem, e apresentando-se, a partir dos erros, possibilidades para entender essas dificuldades e maneiras de encurtar os “entraves” no momento da aprendizagem (CURY, 2015).

Segue o número de ocorrências relacionando a quantidade de erros a cada uma das subcategorias:

Quadro 10 – Estratégias de solução dos alunos de todas as escolas

Problemas	**Quantitativo dos erros segundo as subcategorias**		
	Erro do procedimento por desconhecimentodo conceito	*Tentativa e erros*	Exprimiu resposta aleatória (“Chute”)
Problema 1	17	0	3
Problema 2	12	–	–

Fonte:Autora (2016)

5.3.1 Estratégias do Problema 1, considerando-se os erros dos alunos

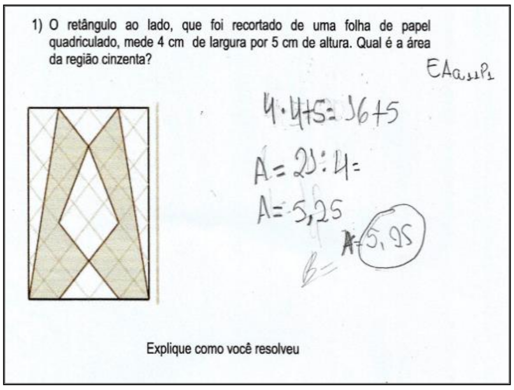
Erro do procedimento por desconhecimento conceitual – erro quanto ao procedimento escolhido. O aluno demonstra desconhecimento dos conceitos adotados, resolvendo o problema de maneira inadequada, por não entender ou não conhecer as propriedades.

No que se refere ao problema 1, a escola A foi a que teve a maior quantidade de questões erradas, chegando a 50% da turma, enquanto nas outras escolas esse percentual não ultrapassou 15%. Na solução levantada pelo aluno caracterizado por EAa11, nota-se que ele realiza as operações fundamentais para solucionar ou mesmo encontrar uma estratégia que levasse à resposta, apresentando entretanto uma resposta incoerente. Percebe-se pela resposta do aluno que ele tenta incorporar uma estratégia relacionando os dados da questão a uma expressão numérica, o que evidencia os conhecimentos construídos ao longo da vida escolar, pois se entende que EAa11 relaciona os dados do problema com a expressão $4.4 + 5$, sendo quatro os quatro lados da figura, e 4 e 5 os dados do problema, encontrando uma igualdade de $16 + 5$; o aluno faz corretamente a divisão, encontrando $5{,}25$, porém há muitas lacunas conceituais no que diz respeito aos conceitos de área na malha quadriculada e perímetro.

Nota-se, na análise desse aluno, que ele aplica os conhecimentos que já possui (CARVALHO, 2007) e faz relações com os dados da questão para encontrar a resposta. Na dissertação de Silva (2006, p. 103), a autora destaca que “falta uma reflexão na forma de ensinar e aprender Matemática, além de aproveitar momentos de sala de aula para rever estes erros”. É um momento em que se faz necessária a presença do professor, considerando os erros como informação ou parâmetro na condução das práticas que serão desenvolvidas em sala de aula, e fazendo intervenções necessárias à aprendizagem dos alunos (PONTE, 2006).

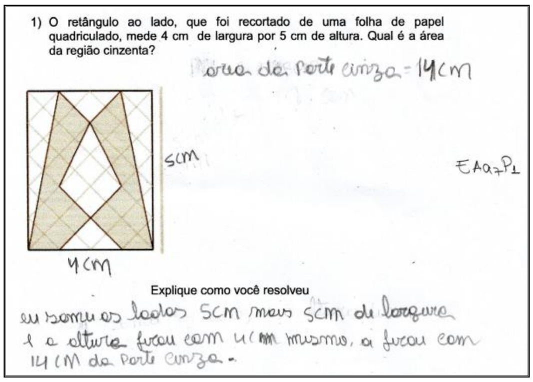
Na resolução EAa7, o aluno faz uso de somas para obter a solução do problema. De maneira errônea conclui a questão, dando como resposta 14cm, cometendo erro também no uso das unidades de área. O aluno, nesse caso, poderia trabalhar a aproximação a partir da área de um quadrado pequeno. Já o professor poderia partir do erro do aluno para formular situações-problema em que o caminho inicial de respostas partisse da estratégia apresentada pelos alunos. Com relação a isso, Ribeiro; Cury (2015, p.74) destacam sobre a análise dos erros que “pesquisadores se preocupam em detectar erros e dificuldades dos estudantes, para poder criar estratégias de ensino que venham a auxiliá-los na aprendizagem dos conceitos em questão”. Situação bem pertinente aos resultados trazidos pelos alunos analisados.

Figura 12 – Estratégia do Problema 1- EAa11



Fonte: EAa11

Figura 13 – Estratégia do Problema 1- EAa7

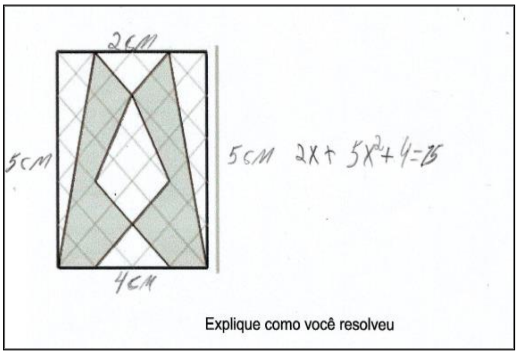


Fonte: EAa7

Exprimiu resposta aleatória (Chute) – utilizou símbolos numéricos para representar uma solução e forneceu um resultado de maneira aleatória e/ou incoerente com as informações do problema.

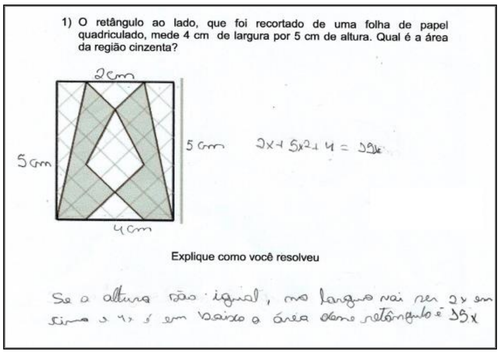
Observou-se também um fato curioso. Na ocasião em que foi aplicada a atividade aos alunos, eles estavam estudando equações do 2º grau, o que fez com que alguns tentassem achar a solução do problema articulando as informações por meio da resolução de uma equação do segundo grau.

Figura 14 – Estratégia do Problema 1- ECa9



Fonte: ECa9

Figura 15 – Estratégia do Problema 1- ECa7



Fonte: ECa7

Isso remete à ideia de que muitas vezes o aluno aplica os conceitos e definições que foram ministrados pelo professor na aula anterior, ou seja, trabalha atividades em que faz a aplicação direta de definições.

Nesse sentido,

> em termos metodológicos, os PCN sustentam que a prática mais frequente em sala de aula consiste em ensinar um conceito e depois apresentar um problema para cuja solução o aluno empregue o referido conceito. Posicionando-se contrário a essa

> prática, os PCN apresentam a resolução de problemas como abordagem preferencial para o ensino de Matemática e consideram que se deve partir de um problema para que, nas tentativas de resolvê-lo, o aluno se aproxime sucessivamente do conceito que, posteriormente, será sistematizado (RIBEIRO; CURY, 2015, p. 51).

Ao analisar as estratégias dos alunos, notam-se conceitos matemáticos empregados de forma equivocada e que não estabelecem nenhum tipo de relação com uma possível estratégia de solução, ou mesmo fora do contexto que a questão solicitava no enunciado. Infere-se, dessa forma, que esses alunos, durante o ensino fundamental, podem não ter sido expostos a situações-problema que exigissem fazer conjecturas e para as quais tivessem de construir estratégias Carvalho (2007), Ponte (2006). A análise leva a concluir que os alunos apresentam muitas lacunas conceituais, mesmo estando no final do ensino fundamental II.

Evidencia-se mais uma vez a importância das atividades que envolvem "resolver problemas; o professor pode questionar seus alunos para que a resolução do problema instigue novas perguntas que envolvam os conceitos trabalhados em aula e também novos conceitos a serem trabalhados" (NUNES *et al.*, 2014, p. 118).

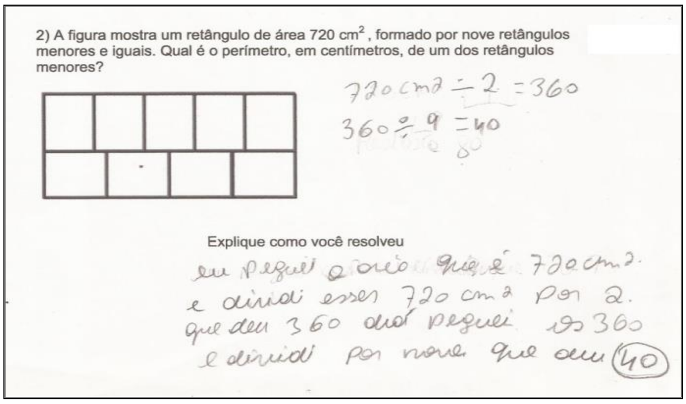
Os alunos que não identificam conceitos relacionados aos problemas propostos revelam conhecimento precário em relação aos conceitos matemáticos – tanto na geometria, quanto na aritmética e na álgebra.

5.3.2 Estratégias do Problema 2, considerando-se os erros dos alunos

No segundo problema, as turmas analisadas apresentaram somente soluções com apenas um tipo de erro: ***Erro de procedimento por desconhecimento conceitual***.

Nas estratégias analisadas, houve casos em que os alunos fizeram a divisão da área total por 2, e uma nova divisão por 9, utilizando cálculos básicos na divisão simples. A falta de atenção ao comando da questão pode ter sido o motivo do erro, pois na figura da questão aparece um segmento de reta paralelo a dois lados da figura.

Figura 16 – Estratégia do Problema 2 – EBa27

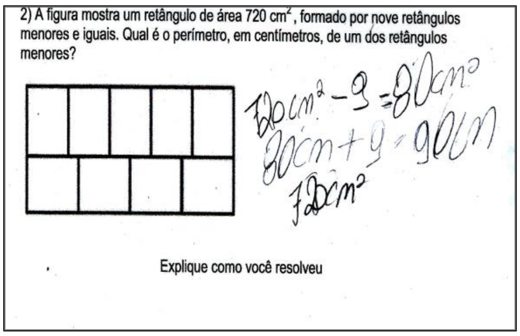


Fonte: EBa27

Nota-se também que os alunos "trocam" os conceitos de áreas e perímetro, ou mesmo acreditam ser aquele o resultado, pois ao fazer divisões sucessivas concluem o raciocínio somente encontrando quocientes. Por várias vezes os alunos trocaram as unidades de medida, representando centímetro como unidade de área, cometendo assim um erro conceitual: ou por dificuldade de diferenciar ou por falta de atenção. Seguem algumas estratégias apresentadas nos erros dos alunos.

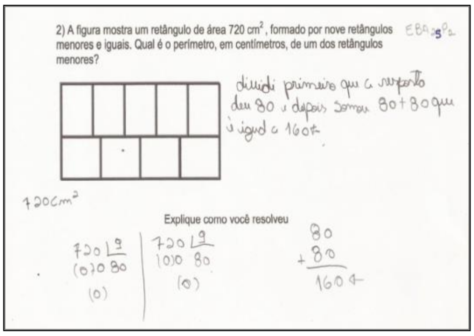
No que tange ao problema 2, percebe-se que a maioria conseguiu calcular a área de cada retângulo pequeno. Mesmo a escola A, que obteve no problema 1 uma quantidade expressiva de erros, no problema 2 esse percentual se reduziu, porém ainda mantendo um índice considerável. Os alunos geralmente partiram de um conceito matematicamente aceitável, mas utilizaram de modo incorreto os conceitos no percurso da questão.
Eis alguns casos:

Figura 17 – Estratégia do Problema 2- EAa6



Fonte: EAa6

Figura 18 – Estratégia do Problema 2 - EBa25

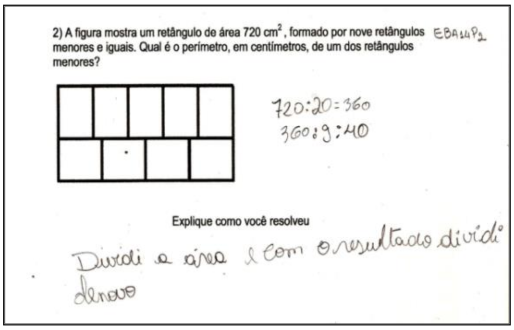


Fonte: EBa25

Essa é uma típica situação em que é necessário ter a figura do professor no percurso da estratégia apresentada, e perceber o erro na tentativa de tornar claros os conceitos inconsistentes no conhecimento do aluno, pois o erro nesse caso será usado para buscar alternativas de melhor compreender as definições matemáticas. Com relação a essa ideia, Carvalho (2007, p. 20) ressalta que, "na aprendizagem, o erro é inevitável, porque se fazem inúmeras tentativas buscando estratégias a partir do que se conhece para solucionar os problemas propostos". Ainda segundo Carvalho (2007, p. 17), a análise do erro é o momento que "possibilita ao aluno lançar mão de diferentes estratégias para resolver os problemas propostos, permitindo que use os seus conhecimentos e a sua criatividade".

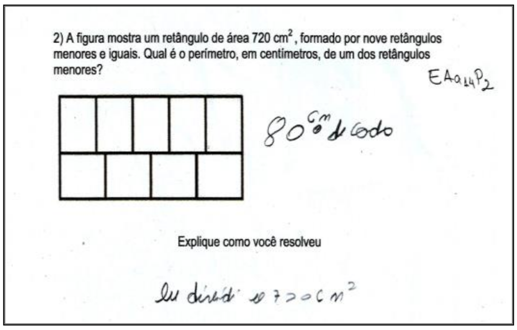
Os resultados também remetem a uma situação bastante preocupante nas escolas investigadas, pois se espera que os alunos que estão nesse nível de escolaridade dominem conceitos como os mencionados nas propostas de investigação; entretanto, mesmo na iminência de ingressar no ensino médio, eles não compreendem satisfatoriamente um problema matemático ou não sabem por onde começar suas estratégias de resolução.

Figura 19 – Estratégia do Problema 2- EBa14



Fonte: EBa14

Figura 20 – Estratégia do Problema 2- EAa14

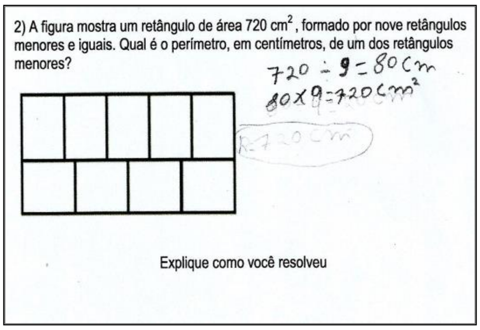


Fonte: EAa14

Observa-se nos problemas que as soluções trazidas pelos alunos revelam pouca compreensão em relação aos conceitos matemáticos e especialmente no que se refere à área e ao perímetro. Faz-se necessário, no nível escolar dos alunos em investigação, interpretar e aplicar conceitos adequadamente através de situações-problemas (BRASIL, 1998). Os alunos demonstram fragilidades conceituais no que se refere aos conhecimentos próprios de séries anteriores, bem como não conseguem viabilizar nenhuma estratégia que possa concluir o raciocínio da questão.

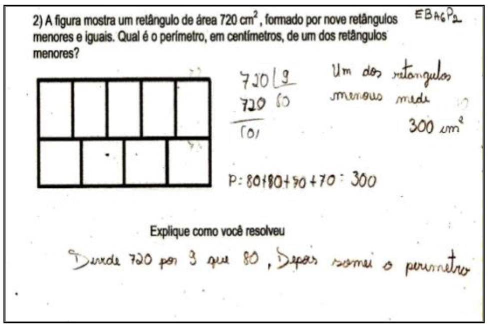
Tal situação é evidenciada pelas dificuldades percebidas nas figuras:

Figura 21 – Estratégia do Problema 2- EAa16



Fonte: EAa16

Figura 22 – Estratégia do Problema 2- EBa6



Fonte: EBa6

Constata-se, pelo cálculo evidenciado em EAa16, que o aluno encontrou corretamente a área menor, mesmo confundindo a unidade e representando a área como $80\ cm$, fazendo posteriormente a verificação e usando a unidade de área na resposta do retângulo maior, de forma correta. Mariotti (1986 apud RIBEIRO; CURY, 2015, p. 76) “acredita que nesse tipo de procedimento está presente a influência de um ‘esquema visual’. Seria uma imagem mental de um procedimento operatório que o aluno gravou sem ter compreendido perfeitamente”.

A respeito de constatações referentes aos conceitos, Miranda (2007 apud CURY, 2010, p. 3) afirma que “a maior parte dos erros são relativos a conteúdos já estudados em séries anteriores, mostrando que os alunos não compreendem os conceitos e que essa incompreensão pode ser um obstáculo que se propaga pelas séries posteriores”.

De modo geral, constatam-se nas turmas investigadas conhecimentos frágeis em relação aos mais diferentes conceitos empregados, na atividade final, mesmo que os alunos hajam demonstrado algum conhecimento parcial. Tal situação é evidenciada pelo alto índice de questões em branco e erradas; mesmo nas questões consideradas parcialmente corretas, nota-se que os alunos, sentem dificuldades em empregar corretamente os conceitos relacionados nos problemas solicitados, ou mesmo ao usarem estratégias que envolvem os conceitos geométricos. Na análise dos erros, percebem-se muitas fragilidades relacionadas aos conceitos matemáticos, situação que deve ser posta para reflexão, visto que os alunos estão na iminência de conclusão do ensino fundamental II e trazem lacunas que refletirão nos resultados do ensino médio e, posteriormente, no curso superior.

O não estudo de geometria por parte dos alunos nas escolas acaba por não desenvolver o pensamento matemático espacial e a capacidade de raciocinar geometricamente, habilidades que são proporcionadas pela área de ensino (LORENZATO, 2010). É nessa reflexão que se destaca como a ênfase em atividades que envolvam problemas matemáticos e no uso dos mais deferentes conceitos se faz necessária em sala de aula. Os PCN ressaltam o quanto o estudo das áreas de Matemática é essencial para o desenvolvimento da aprendizagem dos alunos. No contexto do ensino de geometria e da resolução de problemas, verificou-se como os alunos concebem o entendimento das áreas da Matemática, e em especial a geometria, por ser muito importante para a formação do aluno. Deve-se perceber o quanto a integração entre as áreas (aritmética, álgebra e geometria) proporciona ao aluno melhor compreender as definições matemáticas:

> Assim fazendo, os alunos irão perceber a harmonia, coerência e beleza que a matemática encerra. [...]. Além disso, seriam eliminadas do ensino da matemática algumas prolixidades que nele persistem e, ainda, seria facilitada a muitos estudantes a desejada aprendizagem (LORENZATO, 2010, p. 60).

É nesse contexto que se faz indispensável um olhar atento às metodologias associadas às práticas de resolver problemas, assim como se trabalhar com as áreas de matemática de maneira a viabilizar e/ou promover a articulação entre os conceitos da geometria, da álgebra e da aritmética.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo analisou as estratégias dos alunos, com a intenção de constatar como os alunos do 9º ano solucionam problemas matemáticos que envolvem os conceitos geométricos. Revelou que os alunos da referida série não dominam os problemas elementares, que envolvem os conceitos tratados na investigação. Pela análise dos dados coletados, há indicações que a resolução de problemas – tanto envolvendo os conceitos geométricos como os conceitos elementares de Matemática – possivelmente é pouco ofertada em sala de aula, ou se o é, não há compreensão por parte dos alunos.

Muitas vezes, é a partir dos erros que possíveis apreensões conceituais se efetivam (CARVALHO, 2007). Situações que levem os alunos a momentos de discussão de problemas, por meio de correções coletivas em sala, são consideradas essenciais, pois é nessas ocasiões que se analisam as hipóteses que poderão conduzir à obtenção das respostas (PONTE,2006).

No universo das análises, verificaram-se somente duas soluções totalmente corretas; nelas, os alunos fizeram uso de tentativas e erro, para chegar à solução do problema. Foi um momento em que os dois alunos interpretaram o enunciado das questões e empregaram corretamente os conceitos fornecidos, aplicando corretamente a dedução que o problema solicitava. Os alunos se apropriaram da análise figural do problema e dos conhecimentos básicos da Matemática, solucionando-o de forma satisfatória. O que chamou atenção ao longo desta análise foi o fato de que nenhum dos alunos fez uso da solução por meio algébrico com sistema de equações. Nos dois casos, os alunos pensaram em suas soluções tentando deduzir seus resultados sem o uso de fórmulas estabelecidas, apenas usando estratégias pessoais, associadas a conceitos básicos da Matemática.

Na análise do Problema 1, observou-se que nenhum aluno trouxe uma solução completa e correta para a resolução. Mesmo sendo esse tipo de questão um problema em que se explora a visualização e a dedução dos conceitos empregados, muitos alunos apenas começaram um raciocínio; calcularam a área do retângulo, dado que já constava do enunciado do problema e, a partir daí, tentaram usar as operações fundamentais, o que revela que esses alunos não estão familiarizados comesse tipo de problema matemático. Esperava-se que os alunos observassem a congruência entre as figuras, ou usassem a aproximação por meio da área dos quadrados menores, de maneira que chegassem a encontrar uma aproximação para a área cinzenta; porém o que se evidenciou é que muitos alunos revelam dificuldades conceituais, reforçando o que afirma Almouloud (2013) sobre as lacunas relacionadas ao ensino de geometria.

No que se refere ao problema 2, a pesquisa mostra que os alunos não fazem uso de equações ou sistema de equação do primeiro grau. A grande maioria tenta a solução a partir dos conhecimentos adquiridos ao longo da vida escolar, aplicando cálculos elementares de Matemática. Fizeram uso tão só dos dados da questão e dos conhecimentos básicos. A maioria conseguiu calcular a área do retângulo menor, o que revela que alguns se apropriam corretamente dos conceitos, porém não conseguem atinar com o que a questão solicita, situação típica em que a figura do professor se fará essencial, pois se revelaram dificuldades nos conceitos de áreas, perímetro e interpretação.

Considerando que o objetivo dessa investigação é analisar as estratégias dos alunos em problemas que envolvem geometria, conclui-se que muitos alunos não solucionam as questões pertinentes à geometria; isso implica que os conceitos geométricos são pouco estudados em sala e também na resolução de problemas. Nota-se que, com todas as dificuldades, muitos alunos tentam soluções sem a aplicação de fórmulas prontas,o que foi um resultado positivo, e buscam alternativas para chegar à resposta. A pesquisa evidencia que a maioria dos alunos faz uso da álgebra associada à ideia de aritmética, revelando este estudo que mesmo com alto índice de questões com esse enfoque, grande parte dos alunos traz dificuldades relacionadas à álgebra.

Pelo que se constatou na investigação, deve-se incorporar cada vez mais em sala de aula a prática de resolver problemas, como nos exemplos trazidos pela OBMEP, e o uso de metodologias que auxiliem na compreensão dos conceitos em problemas matemáticos nos quais os alunos possam integrar as diferentes áreas da Matemática. Os PCN (1998) reforçam as atividades que desenvolvem o pensamento matemático dos alunos, prática que pode ser potencializada com recursos didáticos nas mais diferentes formas e mediante o hábito de resolver problemas matemáticos.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. Registros de representação semiótica e compreensão de conceitos geométricos. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Aprendizagem em Matemática:** Registros de representações semióticas.8. ed. Campinas: Papirus, 2013, p. 125-132.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Lisboa, Portugal: Edições 70, 2011.

BALLEJO, C.C. **Aprendizagem de Conceitos de Área e Perímetro com o GeoGebra no 6º ano do Ensino Fundamental.** 2015. 144 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015. Disponível em: <http://repositorio.pucrs.br/dspace/handle/10923/7453>. Acesso em: 21 dez. 2015.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Secretaria de Educação Fundamental, Brasília: MEC/SEF, 1998.

CARDIA,L.S.F. **Integrando a geometria com a álgebra na construção de expressões algébricas.** 2007. 375 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo. 2007. Disponível em: <http://www.sapientia.pucsp.br//tde_busca/arquivo.php?codArquivo=5309>. Acesso em: 21 dez. 2015.

CARVALHO, Mercedes. **Problemas? Mas que problemas?!**: estratégias de resolução de problemas matemáticos em sala de aula. 3. ed. Petrópolis: Vozes, 2007.

CURY, H. N. **Análise de erros:** O que podemos aprender com as respostas dos alunos. 2. ed.1. reimp. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

CHIZZOTI, Antonio. **Pesquisa em ciências humanas e sociais**. 7. ed. São Paulo: Cortez, 2005.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Aprendizagem em Matemática:** registros de representações semióticas. 8. ed. Campinas: Papirus, 2013.

ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 10, 2010. Salvador. **Análise de Erros.** Salvador: Via Litterarum, 2010. [p. 11]. Disponível em: <http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/ENEM10/?info_type=invitation&lang_user=> Acesso em: 21 dez. 2015.

FASSIO, S. A. O. **Da Cartolina ao Computador:** uma Proposta para estudo de Geometria. 2011. 158 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista. Rio Claro. 2011. Disponível em: <http://www.athena.biblioteca.unesp.br/exlibris/bd/brc/33004137031P7/2011/fassio_sao_me_rcla.pdf>. Acesso em: 23 dez. 2015.

FIORENTINI, Dario. Alguns modos de ver e conceber o ensino da Matemática no Brasil. **Revista Zetetikê**, Ano 3, n. 4. Unicamp: Campinas – SP, p. 1-33, 1995.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigações em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006.

FLICK, Uwe. **Introdução à pesquisa qualitativa.** 2 ed. São Paulo: ARTMED, 2002.

LIMA, Paulo F.; CARVALHO, João B. P. A geometria escolar hoje: conversas com o professor que ensina matemática. In: SILVA, Maria Célia Leme da; VALENTE, Wagner Rodrigues (Orgs.). **A geometria nos primeiros anos escolares:** histórias e perspectivas atuais. Campinas: Papirus, 2014.

LORENZATO, Sergio. **Para aprender Matemática**. 3. ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2010. (Coleção Formação de Professores).

LUDKE, Menga e ANDRÉ, Marli E. D. A. **Pesquisa em Educação:** abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MENESES,R.S. **Uma história da geometria escolar no Brasil:** de disciplina a conteúdo de ensino. 2007. 172 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo. 2007. Disponível em: <http://www.sapientia.pucsp.br//tde_busca/arquivo.php?codArquivo=4929>. Acesso em:23 dez. 2015.

MORAIS, R.Santos; ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. Uma Abordagem Histórica da Resolução de Problemas. In: ONUCHIC, de la Rosa *et al.* (org.). **Resolução de Problemas:** teoria e prática**.** Jundiaí: Paco Editorial, 2014, p. 17-27.

NACARATO, A.M.;PASSOS,C.L.B. **A geometria nas séries iniciais:** uma análise sob a perspectiva da prática pedagógica e da formação de professores. São Carlos: EdUFSCar, 2003.

NUNES, C. Barros; *et al.* Espaço e Forma. In: ONUCHIC, de la Rosa *et al.* (org.). **Resolução de Problemas:** teoria e prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014, p. 101-118.

NUNES, C. B. **O Processo Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Geometria através da Resolução de Problemas:** Perspectivas Didático-Matemáticas na Formação Inicial de Professores de Matemática. 2010. 430 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Federal Paulista. Rio Claro. 2010. Disponível em: <http://www.athena.biblioteca.unesp.br/exlibris/bd/brc/33004137031P7/2010/nunes_cb_dr_rcla.pdf>. Acesso em: 20 dez. 2015.

OBMEP, 2012. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas_static/pf1n2-2012.pdf>. Acesso em: 20 dez. 2015.

PAVANELLO, R.M.; ANDRADE, R. N. G. Formar professores para ensinar geometria: um desafio para as licenciaturas em Matemática. In: **Educação Matemática em Revista**. Ano 9, ed. especial, março de 2002.

PALHARES, Pedro. **Elementos de Matemática**: para professores do Ensino Básico. Lisboa/Porto: Lidel, 2004.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas.** Tradução Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

PONTE, João Pedro da *et al.* **Investigações matemáticas na sala de aula.** 1. ed. 2. reimp. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

RIBEIRO, A. J; CURY, H. Noronha. **Álgebra para a formação do professor**: Explorando os conceitos de equação e de função. Belo Horizonte: Autentica Editora, 2015 – (Coleção Tendências em educação Matemática).

SILVA, M. M. **Dificuldades de Alunos do Ensino Médio em questões de Matemática do Ensino Fundamental**. 20/01/2006. 200 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2006. Disponível em:<http://www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/ResultadoPesquisaObraForm.do?first=50&skip=49000&ds_titulo=&co_autor=&no_autor=&co_categoria=&pagina=981&select_action=Submit&co_midia=2&co_obra=&co_idioma=1&colunaOrdenar=NO_AUTOR&ordem=desc>. Acesso em:20 dez. 2015.

SILVA, A. R. **Uma Proposta para o ensino de Geometria Espacial Métrica no Ensino Médio**. 2013. 94 f. Dissertação (Mestrado em Matemática). Programa de Pós Graduação Profissional em Matemática. Universidade Federal de Lavras. Lavras/MG. 2013. Disponível em: http://repositorio.ufla.br/jspui/handle/1/787 Acesso em: 20 dez. 2015.

TARDIF, Maurice. **Saberes docentes e formação profissional**. 4. ed. Rio de Janeiro: Vozes, 2013.

VELHO, E. M. M. A**prendizagem da Geometria:** a Etnomatemática Como Método de Ensino. 2014. 152 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. 2014. Disponível em: <http://repositorio.pucrs.br/dspace/handle/10923/5933>. Acesso em: 20 dez. 2015.

YIN, Robert K. **Estudo de Caso**: planejamento e métodos/ Robert K. Yin; trad. Daniel Grassi. 3.ed. Porto Alegre: Bookman, 2005. 212 p.

ZUKAUSKAS, N. S. T. **Modelação Matemática no ensino Fundamental:** Motivação dos Estudantes em Aprender Geometria. 2012. 189 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. 2012. Disponível em: <http://repositorio.pucrs.br/dspace/handle/10923/3125>. Acesso em 20 dez. 2015.

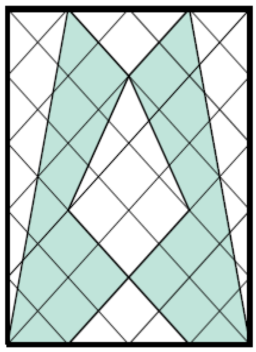
APÊNDICES

APÊNDICE A – ATIVIDADE PRÉ-TESTE

ESCOLA:____
SÉRIE:____
ALUNO:____IDADE:___

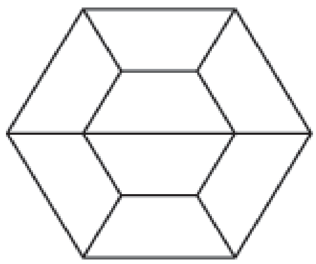
ATIVIDADE PRÉ-TESTE

1) O retângulo ao lado, que foi recortado de uma folha de papel quadriculado, mede 4 cm de largura por 5 cm de altura. Qual a área da região cinzenta?



a) 10 cm^2
b) 11 cm^2
c) 12,5 cm^2
d) 13cm^2
e) $14,5^2$cm

2) A figura foi formada por oito trapézios isósceles idênticos, cuja base maior mede 10 cm. Qual é a medida, em centímetros, da base menor de cada um desses trapézios?



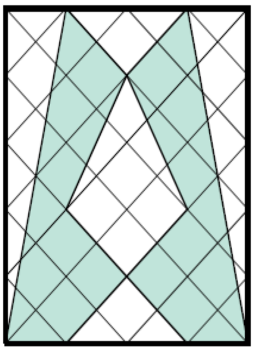
a) 4
b) 4,5
c) 5
d) 5,5
e) 6

APÊNDICE B – ATIVIDADE FINAL

ESCOLA:____
SÉRIE:____
ALUNO:____IDADE:___

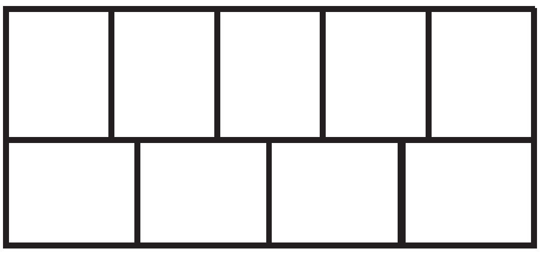
ATIVIDADE FINAL

1) O retângulo ao lado, que foi recortado de uma folha de papel quadriculado, mede 4 cm de largura por 5 cm de altura. Qual a área da região cinzenta?



Explique como você resolveu.

2) A figura mostra um retângulo de área 720 cm^2 formado por nove retângulos menores e iguais. Qual é o perímetro, em centímetros, de um dos retângulos menores?



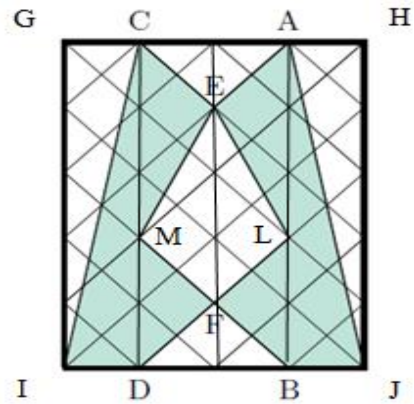
Explique como você resolveu.

APÊNDICEC – Solução 1 – Problema 1 – Atividade Final

Conceitos envolvidos: conceitos geométricos/congruência/composição e decomposição/áreas/ perímetro

Para as soluções dessa questão, tem-se um retângulo que foi retirado de uma malha quadriculada, de lados que medem 4 cm e 5 cm. De antemão, nota-se que a diagonal de cada quadradinho pequeno mede1 cm.

Sejam G, H, I e J os vértices do retângulo e L e M os pontos de intersecção das retas traçadas com a figura cinzenta, conforme afigura abaixo. É possível decompor este retângulo em triângulos traçando uma reta que ligue os pontos A e B, outra ligando os pontos C e D, e um segmento ligando os pontos E e F.



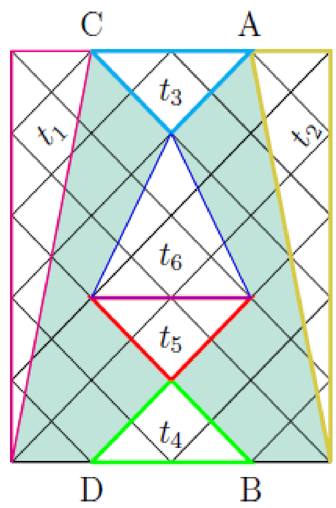
Ao se fazer isso, observa-se que o triângulo ABJ é congruente aos triângulos AHJ, DCI e CGI pelo caso LLL (significa que todos os lados são congruentes), ou seja, têm-se quatro triângulos congruentes: dois cinzentos e dois brancos. Fazendo a mesma observação, tem-se que o triângulo AEL é congruente aos triângulos ELF, FME e CME pelo caso LLL, obtendo, da mesma forma, quatro triângulos congruentes: dois cinzentos e dois brancos.

Para finalizar, aplica-se o mesmo raciocínio, concluindo que o triângulo FDB é congruente aos triângulos MFD, LFB e CAE pelo caso LLL, em que dois triângulos são cinza e dois são brancos. Portanto, obtém-se a mesma quantidade de figuras formadas pela área cinza e pela área branca.

Logo, conclui-se que a região cinzenta tem área igual à região pintada de branco. Pelos dados da questão, sabe-se que o retângulo GHIJ tem medidas 4cm por 5cm, o que implica que sua área é $20\ cm^2$. Quer-se saber a região pintada de cinza. Se a área da região cinza é exatamente igual à área da figura branca, então a região cinza é metade da área do retângulo. Logo, tem-se $\frac{1}{2} \times 20\ cm^2 = 10\ cm^2$.

APÊNDICE D – Solução 2 – Problema 1 –Atividade Final

Conceitos envolvidos: Área/Perímetro



Observando nesse caso que cada diagonal do quadrado tem medida igual a 1 cm, é possível confirmar as medidas que foram expostas no enunciado da questão, e consequentemente calcular a área total do retângulo, fazendo $A = b \times h \therefore 4\ cm \times 5\ cm = 20\ cm^2$. Em cada uma das quadrículas, nota-se que a figura proposta apresenta uma disposição de seis triângulos, em que é possível obter todas as medidas adequadas à solução do problema proposto, como mostra a figura. Logo, tem-se o cálculo de cada área de forma separada, assim:

$$A_{t=}\ 20\ cm^2.$$

Como a diagonal de cada quadrado tem a medida de 1cm, calculam-se as seis áreas, como segue:

$$A_1 = A_2 = \frac{b \times h}{2} = \frac{1\ cm \times 5\ cm}{2} = 2{,}5\ cm^2$$

$$A_3 = A_4 = A_5 = \frac{b \times h}{2} = \frac{2\ cm \times 1\ cm}{2} = 1\ cm^2$$

$$A_6 = \frac{b \times h}{2} = \frac{2\ cm \times 2\ cm}{2} = 2\ cm^2$$

Logo, a área pintada de cinzenta será dada pela diferença entre as áreas total e o somatório das áreas parciais:

$$A_{cinzenta} = A_t - A_{parciais}$$

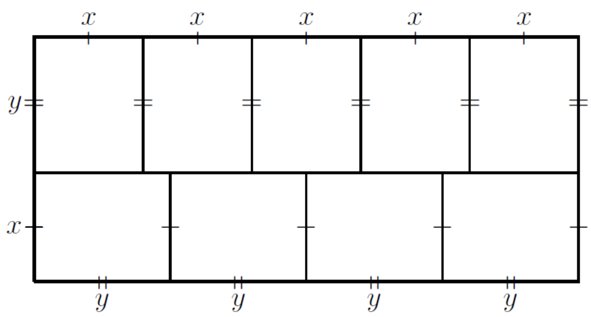
$$A_{cinzenta} = 20\ cm^2 - (2 \times 2{,}5 + 3 \times 1 + 2)\ cm^2$$

$$A_{cinzenta} = 20\ cm^2 - 10\ cm^2 \therefore A_{cinzenta} = 10\ cm^2$$

APÊNDICE E – Problema 2– Solução 1 –Atividade Final

Conceitos Envolvidos: algébrico/aritmético – sistemas de equações

Sendo todos os retângulos menores iguais, conclui-se que eles têm a mesma base e a mesma altura. Percebe-se que os retângulos são iguais, mas estão posicionados de maneira diferente.



Nota-se que uma das bases do retângulo tem medida $5x$ enquanto a outra base tem como medida $4y$. Nesse caso conclui-se também que $5x = 4y$, o que implica que $y = \frac{5}{4}x$. Sabe-se que a área do retângulo é dada pelo produto da área da base pela altura, sendo a base igual a $5x$ e a altura dada pela soma de $x + y$. Com os dados apresentados pelo problema, forma-se um sistema de equação, dado por

$$\begin{cases} 5x = 4y \therefore y = \dfrac{5x}{4} \\ 5x.(x + y) = 720 \end{cases}$$

Fazendo as substituições convenientes à solução do problema, obtém-se:

$$5x.\left(x + \frac{5}{4}x\right) = 720$$

$$5x.\left(\frac{9x}{4}\right) = 720$$

$$\frac{45x^2}{4} = 720$$

$$45x^2 = 2880 \therefore x^2 = 64$$

$$x = \pm\sqrt{64}$$

$$x = 8\ cm$$

Substituindo adequadamente o valor de x:

$$\frac{5}{4}x = \frac{5}{4} \times 8 = \frac{40}{4} = 10\ cm$$

Logo, como a questão se reporta ao perímetro do retângulo menor, tem-se:

$$2p = x + x + y + y \therefore 2x + 2y = 2 \times 8\ cm + 2 \times 10 = 36\ cm.$$

APÊNDICE F – Problema 2 – Solução 2 – Atividade Final

Conceitos Geométricos – perímetro/área/visualização e raciocínio dedutivo

Dividindo a área total pela quantidade de retângulos menores, tem-se: $720\ cm^2 \div 9 = 80\ cm^2$, em que 9 representa a quantidade de retângulos pequenos e iguais. Com isso obtém-se a área de cada retângulo menor, que é $80\ cm^2$.

Neste momento, passa-se a saber a medida dos lados do retângulo menor. Pela figura abaixo, tem-se $y = base$ e $x = altura$, com $x < y$, e escrevendo as possibilidades para escrever 80 como produto de dois números, pois para uma área de 80 cm^2 têm-se algumas possibilidades para validar, de acordo com os dados da questão. Escrevendo essas possibilidades, segue:

1ª Possibilidade: $1cm \times 80\ cm$

2ª Possibilidade: $2cm \times 40\ cm$

3ª Possibilidade: $4cm \times 20\ cm$

4ª Possibilidade: $5cm \times 16\ cm$

5ª Possibilidade: $8cm \times 10\ cm$

Com os dados descritos, há cinco possibilidades de a área ser 80 cm^2, mas qual que deverá satisfazer o problema? Com os dados da questão, nota-se que os valores das medidas dos lados, além de satisfazer a condição $x \times y = 80\ cm^2$, que é a área do retângulo pequeno, devem que satisfazer a condição de área do retângulo maior, em que $(y + x) \times 5y = 720\ cm^2$, ou seja, tem de satisfazer as condições das duas áreas: o retângulo menor, cuja área é $80\ cm^2$, e o retângulo maior, cuja área é $720\ cm^2$.

Desse modo, analisa-se cada uma das possibilidades acima. Para isso:

1) Suponha que os lados do retângulo menor fossem $x = 1\ cm$ e $y = 80\ cm.$ Nesse caso, os lados do retângulo maior seriam $320\ cm$ por $81\ cm,$ que seria igual a $25.920\ cm^2$ (não satisfaz)

2) Suponha que os lados do retângulo menor fossem $x = 2\ cm$ e $y = 40\ cm.$ Nesse caso, os lados do retângulo maior seriam$160\ cm$ por $42\ cm,$ o que seria igual a $6.720\ cm^2$ (não satisfaz)

3) Suponha que os lados do retângulo menor fossem $x = 4\ cm$ e $y = 20\ cm.$ Nesse caso, os

lados do retângulo maior seriam $80\ cm$ por $24\ cm$, o que seria igual a $1.920 cm^2$ (não satisfaz)

4) Suponha que os lados do retângulo menor fossem $x = 5\ cm$ e $y = 16\ cm$. Nesse caso, os lados do retângulo maior seriam $64\ cm$ por $21\ cm$, o que seria igual a $1.344 cm^2$ (não satisfaz)

5) Suponha que os lados do retângulo menor fossem $x = 8\ cm$ e $y = 10\ cm$. Nesse caso, os lados do retângulo maior seriam $40\ cm$ por $18\ cm$, oque seria igual a $720\ cm^2$ (satisfaz aos critérios do problema).

Portanto, sendo $x = 8\ cm$ e $y = 10\ cm$os lados do retângulo pequeno, seu perímetro é equivalente a

$$2p = x + x + y + y \therefore 2x + 2y = 2 \times 8\ cm + 2 \times 10 = 36\ cm,$$

o que permite trabalhar a resolução da questão tendo uma visão mais geométrica e a partir de tentativas e erros, para se chegar à resposta desejada.