Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Física

Estudo do Momento Angular Orbital da Luz na Conversão Paramétrica Descendente e em Informação Quântica

José Henrique Araújo Lopes de Andrade

Maceió
2010

JOSÉ HENRIQUE ARAÚJO LOPES DE ANDRADE

Estudo do Momento Angular Orbital da Luz na Conversão Paramétrica Descendente e em Informação Quântica

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, como partes dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências (Física)

Orientador: Prof. Dr. Dilson Pereira Caetano

Maceió

2010

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

A553e Andrade, José Henrique Araújo Lopes de.
Estudo do momento angular orbital da luz na conversão paramétrica descendente e em informação quântica / José Henrique Araújo Lopes de Andrade. – 2010.
73 f. : il. grafs.

Orientador: Dilson Pereira Caetano.
Dissertação (mestrado em Física da Matéria Condensada) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Física. Maceió, 2010.

Bibliografia: f. 71-73.

1. Momento angular orbital. 2. Conversão paramétrica descendente. 3. Portas lógicas quânticas. I. Título.

CDU: 535.14

Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Física
Programade Pós Graduação em Física

BR 104 km 14. Campus A.C. Simões
Cidade Universitária
Tabuleiro dos Martins
57072-970 Maceió - AL. Brasil
FONE : (82) 3214-1423/FAX : 3214-1645

PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

"Estudo do Momento Angular Orbital da Luz na Conversão Paramétrica Descendente e em Informação Quântica"

por

José Henrique Araújo Lopes de Andrade

A Banca Examinadora composta pelos professores Dilson Pereira Caetano (Orientador), do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Eduardo Jorge da Silva Fonseca, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas e José Augusto Oliveira Huguenin , do Instituto de Física da Universidade Federal Fluminense, consideram o candidato aprovado com grau " A ".

Maceió, 30 de junho de 2010

Dilson Pereira Caetano
Prof. Dílson Pereira Caetano

Prof. Eduardo Jorge da Silva Fonseca

Prof. José Augusto Oliveira Huguenin

Agradecimentos

Dedico meus sinceros agradecimentos:

Ao professor Dilson Pereira Caetano pela ótima orientação, amizade, dedicação, paciência e força de vontade ao longo de todos esses anos fazendo com que eu realizasse mais uma etapa da minha vida acadêmica ;

Aos professores Jandir Miguel Hickmann, Marcio A. R. C. Alencar e Eduardo J. Fonseca que de uma forma ou de outra contribuíram para essa conquista;

À minha avó Antônia que foi mais que uma mãe sempre me apoiando, e me dando carinho e incentivo;

À minha mãe Maria, uma mulher super batalhadora que nunca deixou de me apoiar e me dar força em todos os momentos da minha vida;

À minha namorada Marcela, por toda força e paciência durante todos esses anos que esteve ao meu lado;

À toda minha família, primo(a)s, tio(a)s, pelo apoio e incentivo;

Ao meu amigo e irmão José Pereira que conviveu comigo desde o ensino fundamental sempre compartilhando os momentos bons e ruins ao meu lado;

Aos meus amigos Anderson e Fred que me apoiaram bastante em momentos de dificuldade que passei durante essa etapa;

Aos meus amigos de instituto, Alex, Felipe, Paulo, Lidiane, Socorro, Wandearley, Queila, Geovana, Pablo e Daniela pela boa convivência e momentos de alegria que vivemos juntos;

A todos os professores do Instituto pelo aprendizado.

Resumo

Apresentamos a teoria do momento angular orbital da luz (MAO), baseada nos conceitos básicos do eletromagnetismo, bem como algumas técnicas de geração e caracterização de feixes de luz possuindo MAO. Apresentamos também os processos ópticos não lineares de conversão paramétrica descendente espontânea (CPD) e estimulada (CPDE). Revisamos o problema da conservação do MAO na CPD no regime não colinear, descrevendo os estados de MAO utilizando feixes Laguerre-Gauss. Extendemos este estudo para o caso em que feixes Bessel são usados para descrever os estados de MAO. Nossos resultados mostram que ocorre violação na lei de conservação do MAO, que é atribuída a deformação do espectro angular do feixe de bombeamento (pump) transferido para os fótons gêmeos. Entretanto, esta violação pode ser vantajosa, pois através da violação do MAO conseguimos ter acesso a estados emaranhados de dimensão maior do que aqueles gerados com geometria colinear. Como alternativa para a observação da violação da lei de conservação no processo de conversão paramétrica descendente, propusemos um experimento baseado na CPDE, onde a realização experimental é mais simples. Utilizando o MAO como qubit alvo e a polarização como qubit controle, realizamos experimentalmente um circuito ótico alternativo à proposta de Li-Ping e colaboradores [16] para a implementação da porta lógica C-NOT. Também apresentamos uma aplicação da porta lógica C-NOT para a geração de estados emaranhados de um único fóton, que pode ser implementada com nosso circuito ótico. A geração de estados emaranhados multidimensionais e a implementação de portas lógicas quânticas são importantes para as áreas de informação e computação quântica.

Palavras-chave: Momento angular orbital. Conversão paramétrica descendente. Portas lógicas quânticas.

Abstract

Based on the basic concepts of the electromagnetism, we present the theory of orbital angular momentum of light (OAM), as well as some techniques of generation and characterization of light beams possessing OAM. We also present the nonlinear optical processes of spontaneous parametric downconversion (PDC) and stimulated parametric downconversion (EPDC). We review the issue of the conservation in the noncollinear PDC, using Laguerre-Gauss beams to describe the OAM states of light. We extend this investigation for the case where Bessel beams are used to describe the OAM states. Our results show that there is a violation of the OAM's conservation law due to a deformation in the angular spectrum of the pump beam which is transfer to the twin photons. However, this violation could be advantage since it can be used to have acess to the entangled states with dimension higher that those generated in the collinear PDC. As an alternative to observe the OAM's conservation law in the PDC we have proposed an experiment based on the experimental implementation is more simple. Using OAM as a target qubit and polarization as a control qubit, we experimentally implement an optical circuit for the C-NOT gate, as an alternative to the theoretical proposal of L.Ping and co-workers. We also present an application for the C-NOT gate to generate entangled states of a single photon, which can be implemented with our optical circuit. Generation of multidimesional states and implementation of quantum C-NOT gates are important to the areas of quantum information and quantum computation.

Keywords: Orbital angular momentum. Parametric down conrversion. Quantum logical gates.

0pt0.0pt 0.4pt0.5pt

Sumário

Lista de Figuras

Capítulo 1

INTRODUÇÃO GERAL

O estudo da luz desempenhou um papel fundamental durante o século XX no desenvolvimento de novas teorias físicas. Seja teoricamente ou experimentalmente, o estudo das ondas eletromagnéticas sempre contribuiu para a expansão das fronteiras da ciência. Com a teoria eletromagnética de Maxwell foi possível explicar muitos fenômenos. Em particular demonstrou-se que uma onda eletromagnética transporta energia, momento linear e momento angular [1]. Com a teoria eletromagnética mostrou-se tambémn que o momento angular da luz tem duas componentes. A primeira está associada ao estado de polarização do campo elétrico, correspondendo ao momento angular intrínseco. Os estados do momento angular intrínseco correspondem à polarização circular no sentido horário e à polarização circular no sentido anti-horário. A segunda componente está associada à distribuição transversal do campo elétrico e corresponde ao momento angular orbital.

Em 1992, Allen e colaboradores [2] demonstraram que o momento angular orbital (MAO) é uma conseqüência de feixes com uma distribuição de amplitude que possui uma fase azimutal da forma $\exp(il\phi)$, onde ϕ é a coordenada azimutal e l é um número inteiro. Este resultado é independente dos estados de polarização e é típico para feixes com uma frente de onda helicoidal [2]. Usualmente, feixes de luz possuindo MAO são descritos em termos de modos Laguerre-Gauss (LG). Porém, hoje em dia, vários outros tipos de feixes possuem frente de onda helicoidal, como por exemplo, feixes bessel [3] e feixes Mathieu [4]. Muitos trabalhos têm explorado o uso de feixes possuindo MAO em processo de interação da luz com a matéria. Nesta área, destacam-se dois fenômenos de particular interesse:

a geração de segundo harmônico [5] e a conversão paramétrica descendente espontânea (CPD) [6].

O processo da CPD foi investigado teoricamente pela primeira vez por Klyshko [7] e verificado pela primeira vez por Burnham e Weinberg [8]. Este processo ocorre em um cristal não linear e consiste na absorção de luz em um comprimento de onda e emissão de dois feixes de luz em outros comprimentos de onda. A luz gerada possui uma série de propriedades que não podem ser explicadas pela ótica clássica, sendo necessário o uso da ótica quântica. Neste formalismo, este processo é descrito pela aniquilação de um fóton do feixe de luz incidente e a criação simultânea de um par de fótons associados a luz gerada. Os fótons que constituem o par são chamados de signal e idler. Por serem sempre criados simultaneamente, os fótons gerados na CPD receberam o nome de fótons gêmeos. Os pares de fótons produzidos pela CPD espontânea são gerados em um estado quântico denominado estado emaranhado [9]. De fato, o estado emaranhado de dois fótons tem sido extremamente útil como ferramenta para o estudo teórico e experimental de propriedades essencialmentes quânticas do campo eletromagnético, bem como aplicações em informação e comunicação quântica, tais como teleportação quântica [10], codificação quântica densa [11] e criptografia quântica [12].

A questão da conservação do MAO em diversos processos óticos têm sido basteante investigada no contexto da interação da luz com a matéria. Em particular a maioria das investigações experimentais relacionadas com a conservação do MAO na CPD explora a geometria quasi-colinear, onde o pump, signal e idler propagam-se quase ao longo da mesma direção (separação angular da ordem de $5^o - 7^o$). Foi mostrado que o MAO se conserva na CPD quando consideramos o estado de dois fótons utilizando uma geometria quasi-colinear [13,14]. Por outro lado, Molina e colaboradores [15] mostraram que na geometria não-colinear, ocorre uma violação na lei de conservação do MAO. Neste trabalho, realizamos uma forma alternativa ao trabalho de Molina utilizando uma outra classe de feixes possuindo MAO, denominados de feixes Bessel e ampliaremos nossos estudos para o processo de conversão paramértrica descendente estimulada (CPDE).

O estudo do MAO na CPD para geração de estados emaranhados é de grande importância na área de informação e computação quântica. Com estados deste tipo podemos estudar diversas implementação de protocolos para algoritimos quânticos. Em particular, podemos utilizar o MAO da luz e a polarização para implementar uma porta lógica

C-NOT com elementos óticos lineares, como por exemplo, lentes, espelhos e divisores de feixe. Recentemente, uma proposta teórica para a implementação da porta lógica C-NOT, usando circuitos óticos, foi apresentada [16]. Nesta proposta, o grau de liberdade de polarização foi utilizado como qubit de controle, enquanto o grau de liberdade de MAO foi utilizado como qubit alvo, e vice-versa. No entanto, o circuito proposto pelos autores possui perdas na implementação da porta lógica, pois utiliza além de elementos ópticos lineares, hologramas gerados por computador. Pelo fato de utilizarmos apenas elementos óticos lineares nossa implementação possui uma certa vantagem em relação a proposta da referência [16].

Esta dissertação está organizada como segue. No **capítulo 2**, apresentaremos a teoria do momento angular transportado por um feixe de luz. Veremos que o MAO pode ser decomposto em duas componentes, o momento angular íntrinseco e o momento angular orbital. Apresentaremos também técnicas para a obtenção e caracterização de feixes com MAO. No **capítulo 3** apresentaremos os processos óticos não lineares de CPD e CPDE. Estudaremos a questão da conservação do MAO nestes processos nos regimes colinear e não colinear utilizando feixes Laguerre-Gauss e Bessel para descrever os estados de MAO dos fótons envolvidos no processo. No **capítulo 4**, apresentaremos alguns conceitos básicos de computação quântica, como os qubits e as portas lógicas. Apresentaremos algumas portas lógicas clássicas e quânticas e suas respectivas funções. Realizaremos experimentalmente a porta lógica C-NOT utilizando como qubit controle a polarização e como qubit alvo o MAO, verificando seu funcionamento através de sua tabela verdade. Apresentaremos também três aplicações da porta C-NOT, que são importantes para o estudo de protocolos de informação e computação quântica. Por último, apresentaremos a conclusão geral do trabalho e perspectivas no **capítulo 5**.

Capítulo 2

MOMENTO ANGULAR DA LUZ

Neste capítulo, discutiremos a teoria do momento angular transportado por um feixe de luz. O momento angular da luz pode ser decomposto em duas componentes. A primeira componente está associada ao estado de polarização do campo elétrico e corresponde à polarização circular. Esta componente é denominada momento angular intrínseco. A segunda componente corresponde ao momento angular orbital e está associada à distribuição transversal do modo do campo eletromagnético. Discutiremos também alguns métodos de geração feixes com MAO, bem como algumas maneiras de caracterizá-los.

2.1 Equações de Maxwell e Ondas Eletromagnéticas

A teoria eletromagnética de Maxwell descreve de forma unificada os fenômenos eletromagnéticos e é resumida em um conjunto de quatro equações chamadas equações de Maxwell. No Sistema Internacional de Unidades (SI), as equações de Maxwell podem ser escritas na forma diferencial como:

$$\nabla . \mathbf{D} = 0; \tag{2.1}$$

$$\nabla . \mathbf{B} = 0; \tag{2.2}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \tag{2.3}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \tag{2.4}$$

onde estamos assumindo a ausência de cargas livres e correntes elétricas. **B**, **D**, **E** e **H** são os vetores indução magnética, deslocamento elétrico, campo elétrico e campo magnético, respectivamente [1], que também satisfazem as chamadas relações constitutivas. Para o espaço vazio, as relações constitutivas são:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$$
$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \tag{2.5}$$

onde ϵ_0 e μ_0 são a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética do vácuo, respectivamente.

Uma outra grande contribuição de Maxwell foi a demonstração de que fenômenos eletromagnéticos podem apresentar características ondulatórias. Estes fenômenos são regidos pela equação da onda, obtida através de manipulações matemáticas sobre as equações de Maxwell.

2.1.1 Equação de Helmholtz e Equação Paraxial

Os fenômenos eletromagnéticos são descritos pela equação da onda cuja solução vem sendo aplicada em vários problemas da natureza, desde a vibração de membranas até a propagação de pulsos no espaço com grande êxito. A equação da onda pode ser escrita da seguinte forma:

$$\nabla^2 U = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \tag{2.6}$$

onde u tem dimensões de velocidade e U é a função com caráter ondulatório que deve satisfazer algum conjunto de condições de contorno.

Como solução da equação da onda obtemos as chamadas ondas eletromagnéticas, que são capazes de se propagar tanto no vácuo quanto em um meio caracterizado por sua permeabilidade magnética e por sua permissividade elétrica. Partindo das equações de Maxwell, podemos obter um par de equações para **E** e **H** que descrevem a propagação de ondas eletromagnéticas. Desta forma temos:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0; \tag{2.7}$$

$$\nabla^2\mathbf{H} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} = 0, \tag{2.8}$$

onde $u = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = c$ que é a velocidade da luz no vácuo. Alternativamente, podemos descrever os fenômenos eletromagnéticos introduzindo os conceitos dos potenciais escalar φ e vetorial $\mathbf{A}$, que são definidos através das relações:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{2.9}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \tag{2.10}$$

Realizando algumas substituições temos o seguinte resultado:

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0; \tag{2.11}$$

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}2 = 0, \tag{2.12}$$

Estas equações também descrevem a propagação de ondas eletromagnéticas. Considerando que o campo elétrico associado à onda eletromagnético seja harmônico, ou seja:

$$\mathbf{U} \longrightarrow \mathbf{E}(x, y, z)exp(-i\omega t) \tag{2.13}$$

Obtemos a chamada equação de Helmholtz:

$$\nabla^2\mathbf{E}(x.y.z) + \frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{E}(x, y, z) = 0 \tag{2.14}$$

ou

$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{E}(x, y, z) = 0, \tag{2.15}$$

onde $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ é o módulo ao quadrado do vetor de onda e $\mathbf{E}$(x,y,z) é o vetor campo elétrico. A solução mais simples da equação de Helmholtz em coodenadas cartesianas é da forma:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 exp(i\mathbf{k}.\mathbf{r}). \tag{2.16}$$

Esta solução é denominada onda plana, pois possui uma frente de onda plana.

Em muitas situações podemos encontrar feixes de luz descritos por ondas planas que possuem vetores de onda que fazem um pequeno ângulo com o eixo de propagação. Definindo a direção de propagação como sendo o eixo z, vamos escrever o campo elétrico associado ao feixe de luz da seguinte forma:

$$\mathbf{E}(x,y,z) = \mathbf{E}(x,y)exp(ikz). \tag{2.17}$$

Onde $\mathbf{E}(x,y) = E(x,y)\hat{x}$, ou seja, estamos considerando que o campo oscila apenas em uma direção. Para que este feixe não tenha uma dispersão angular grande devido à difração, E(x,y) deve variar muito pouco em um intervalo da ordem do comprimento de onda. Tratemos o caso em que essa variação é lenta o suficiente para que possamos desconsiderar o termo $\frac{\partial E^2}{\partial z^2}$ em relação ao termo $\frac{\partial E}{\partial z}$, ou seja, coonsideramos que $\left|\frac{\partial E^2}{\partial z^2}\right| \ll \left|\frac{\partial E}{\partial z}\right|$. Esta aproximação é conhecida como aproximação paraxial. Usando a aproximação paraxial podemos obeter a denominada equação paraxial:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2ik\frac{\partial}{\partial z}\right) E(x,y) = 0 \tag{2.18}$$

A equação paraxial governa a propagação da luz levando em conta a difração, que é um efeito intrínseco do espaço, representado por $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) E(x,y) = 0$.

Nesta dissertação estaremos focados em dois tipos de feixes de luz. O primeiro, denominado feixe Laguerre-Gaussiano, é solução da equação paraxial de Helmholtz em coordenadas cilíndricas, e o segundo tipo de feixe utilizado são os feixes Bessel que são soluções exatas da equação de Helmholtz em coordenadas cilíndricas. Apresentaremos a seguir soluções da equação paraxial em coordenadas cartesianas e cilíndricas. Também apresentaremos soluções da equação de Helmholtz em coordenadas cilíndricas.

2.1.2 Modos do campo eletromagnético

Modos Hermite-Gaussianos (HG)

A solução mais geral da equação paraxial em coordenadas cartesianas são os modos Hermite-Gaussianos dados por:

$$\begin{aligned} HGn,m = {} & \frac{A_{n,m}}{w(z)} H_n\left(\sqrt{2}\frac{x}{w(z)}\right) H_m\left(\sqrt{2}\frac{y}{w(z)}\right) exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{w(z)^2}\right\} \\ & \times exp\left\{-i\left(k\frac{x^2+y^2}{2R(z)} - \frac{n+m+1}{2} arctan\frac{z}{z_r}\right)\right\}, \end{aligned} \tag{2.19}$$

onde

$$w(z) = \left(\sqrt{w_0 \left(1 + \frac{z^2}{z_r^2} \right)} \right) \tag{2.20}$$

$$R(z) = z \left(1 + \frac{z_R^2}{z} \right), \tag{2.21}$$

A_{mn} é uma constante de normalização, w(z) é a cintura do feixe, R(z) é o raio do feixe em z, H_n e H_m são os polinômios de Hermite de ordens m e n, respectivamente, w_0 é a cintura mínima do feixe e Z_R é uma distância característica do feixe ao longo da sua direção de propagação denominada comprimento Rayleigh e é definida por:

$$Z_R = \frac{\pi w_0}{\lambda} \tag{2.22}$$

A ordem do modo é dada por $N = n + m$. Na fig. 2.1 mostramos os perfis de intensidade dos modos Hermite-Gaussianos de diferentes ordens. Os modos Hermite-Gaussianos formam uma base ortonormal de soluções da equação paraxial em coordenadas cartesianas.

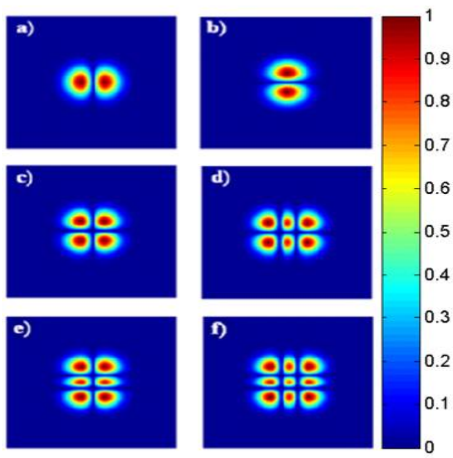


Figura 2.1: Perfis de intensidade dos modos Hermite-Gaussianos: (a) HG_{10}, (b)HG_{01}, (c)HG_{11}, (d) HG_{21}, (e)HG_{12}, (f)HG_{22}.

Modos Laguerre-Gaussianos (LG)

Os modos de Laguerre-Gaussianos são soluções da equação paraxial de Helmholtz em coordenadas cilíndricas dados por:

$$LG_{lp}(r,z,\phi) = \left(\sqrt{\frac{2p!}{\pi w^2(z)(p+\mid l\mid)!}}\right)\left[\frac{\sqrt{2}r}{w(z)}\right]^{|l|} exp\left[-\frac{r^2}{w^2(z)}\right] L_p^l\left(\frac{2r^2}{w^2(z)}\right)$$
$$\times exp\left\{i\left[kz-(2p+\mid l\mid+1)arctan\left(\frac{z}{z_R}\right)+\frac{kr^2}{2R(z)}+l\phi\right]\right\}, \quad (2.23)$$

onde $w(z)$, Z_R e $R(z)$ são mesmos das equações 2.20, 2.22 e 2.21, respectivamente. L_p^l são os polinômios associados de Laguerre. Da mesma forma que os modos Hermite-Gaussianos, os modos Laguerre-Gaussianos formam uma base ortonormal de soluções da equação paraxial, mas agora em coordenadas cilíndricas. Feixes de luz que possuem uma fase azimutal dada por $exp(il\varphi)$, como os feixes Laguerre-Gaussianos, têm frente de onda em forma de hélice, ou seja, são feixes com frente de onda helicoidal. A presença deste tipo de fase faz com que o feixe apresente uma singularidade na fase, ou seja, a fase é indeterminada, portanto, a intensidade do feixe deve ser nula no centro. Na óptica tais singularidades são conhecidas como vórtices ópticos [17,18]. Os perfis de intensidade de alguns modos Laguerre-Gaussianos são mostrados na fig. 2.2(a-c). Sempre que tivermos o índice radial p igual a zero e o índice azimultal l diferente de zero, o perfil de intensidade tem uma forma anelar, com uma região central escura de extensão dependente da ordem do modo.

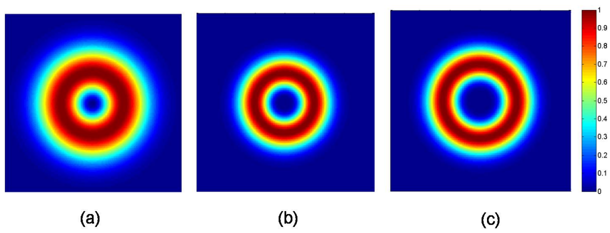


Figura 2.2: Perfis de intensidade dos modos Laguerre-Gaussianos: (a) modo LG_0^1. (b) modo (LG_0^2). e (c) modo LG_0^3.

Como os modos HG e LG são soluções da mesma equação mas em coordenadas distintas, é de se esperar que eles possuam uma relação entre si. Para o caso particular dos modos de primeira ordem, temos a seguinte relação:

$$LG_0^{\pm}1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(HG_{1,0} \pm iHG_{0,1}), \quad (2.24)$$

que está ilustrada na fig. 2.3.

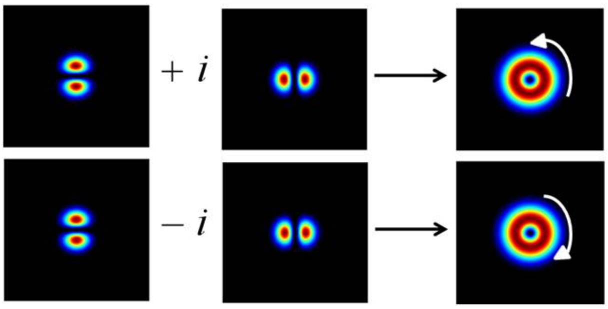


Figura 2.3: Relação entre os modos HG e os modos LG de primeira ordem.

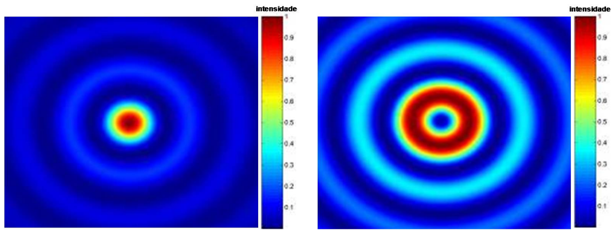
Feixes Bessel

Em 1987, Durnin [3] impressionou a comunidade científica da área, obtendo uma solução para a equação de onda cujo perfil transversal do feixe era dado por uma função de Bessel. Tal solução, hoje conhecida como feixe Bessel, não sofre modificações transversais devido à difração, mantendo seu perfil transversal ao longo da propagação. Tais feixes são soluções exatas da equação de Helmholtz em coordenadas cilíndricas. A expressão geral de um feixe Bessel de ordem l é dada por:

$$E(\rho.\phi, z) = E_0 J_l(\alpha\rho) exp(il\phi) exp(i\beta z) \tag{2.25}$$

onde E_0 é uma constante, J_l é a função de Bessel de ordem l, α e β são as componentes transversal e longitudinal do vetor de onda, respectivamente.

Um feixe Bessel é gerado por uma superposição de ondas planas cujos vetores de onda se localizam na superfície de um cone, onde o ângulo de abertura desse cone é igual a θ. Durnin e colaboradores [19] mostraram que é possível gerar um feixe Bessel utilizando aberturas finitas. Neste caso, foi mostrado que os feixes Bessel são capazes de se propagar por longas distâncias mantendo o perfil transversal aproximadamente inalterado. Estas distâncias dependem dos parâmetros de preparação do feixe. Além de possuírem propriedades não difratantes, os feixes Bessel de alta ordem transportam momento angular orbital [20]. Entre as aplicações dos feixes Bessel, uma que vem causando grande impacto é o uso dos feixes Bessel como pinças ópticas [21, 22], onde é possível aprisionar e mover pequenas partículas. Na fig. 2.4, mostramos o perfil de intensidade de feixes Bessel de ordens $l = 0$ e $l = 4$.



(a) (b)

Figura 2.4: Perfil transversal do feixe Bessel de ordens: (a)$l = 0$ e (b) $l = 4$.

2.2 Teoria do Momento Angular da Luz (Intrínseco e Orbital)

No vácuo, a densidade de momento angular $\mathbf{j}$ de uma onda eletromagnética é calculada através da relação:

$$\mathbf{j} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \epsilon_0 \mathbf{r} \times [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] \tag{2.26}$$

Alternativamente, podemos escrever a expressão para $\mathbf{j}$ como:

$$\mathbf{j} = \epsilon_0 \mathbf{r} \times [\sum_{j=1}^{3} (E_j \nabla A_j) - (\mathbf{E}.\nabla \mathbf{A})] \tag{2.27}$$

ou

$$\mathbf{j} = \epsilon_0 \{\sum_{j=1}^{3} [E_j (\mathbf{r} \times \nabla) A_j - \mathbf{r} \times (\mathbf{E}.\nabla)\mathbf{A}]\}, \tag{2.28}$$

onde utilizamos a relação $\mathbf{E} \times \mathbf{B} = \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{3} (E_j \nabla A_j) - (\mathbf{E}.\nabla)\mathbf{A}$

Utilizando as seguintes relações:

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{E}.\nabla)\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{3} \nabla_j [(E_j \mathbf{r} \times \mathbf{A})] - \mathbf{r}, \tag{2.29}$$

$$(\mathbf{E}.\nabla)\mathbf{r} = \mathbf{E}, \tag{2.30}$$

$$\nabla.\mathbf{E} = 0, \tag{2.31}$$

podemos reescrever a densidade de momento angular como:

$$\mathbf{j} = \epsilon_0 \left\{ \sum_{j=1}^{3} [E_j(\mathbf{r} \times \nabla) A_j] - \sum_{j=1}^{3} [\nabla_j (E_j \mathbf{r} \times \mathbf{A})] + \mathbf{E} \times \mathbf{A} \right\} \tag{2.32}$$

Portanto, o momento angular total é obtido integrando a densidade do momento angular em todo espaço, ou seja,

$$\mathbf{J} = \epsilon_0 \{ \sum_{j=1}^{3} \int [E_j(\mathbf{r} \times \nabla) A_j] d\nu - \sum_{j=1}^{3} \int [\nabla_j (E_j \mathbf{r} \times \mathbf{A})] d\nu + \int (\mathbf{E} \times \mathbf{A}) d\nu \} \tag{2.33}$$

Aplicando o teorema da divergência a segunda integral desta equação, obtemos:

$$\int [\nabla_j (E_j \mathbf{E} \times \mathbf{A})] d\nu = \oint E_j (\mathbf{r} \times \mathbf{A}) ds_j. \tag{2.34}$$

Se supormos que o campo elétrico se anula quando $r \to \infty$, a integral de superfície na equação anterior é nula. Finalmente o momento angular total do campo eletromagnético é dado por:

$$\mathbf{J} = \epsilon_0 \int (\mathbf{E} \times \mathbf{A}) d\nu + \epsilon_0 \sum_{j=1}^{3} \int [E_j (\mathbf{r} \times \nabla) A_j] d\nu \tag{2.35}$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{S} + \mathbf{L}, \tag{2.36}$$

onde $\mathbf{S} = \epsilon_0 \int (\mathbf{E} \times \mathbf{A}) dv$ está associado ao momento angular intrínseco, ou de spin, pelo fato de ser independente da posição $\mathbf{r}$. Por outro lado, a quantidade $\mathbf{L} = \epsilon_0 \sum_{j=1}^{3} \int [E_j(\mathbf{r} \times \nabla) A_j] dv$, está associada ao momento angular orbital, pois depende explicitamente da posição $\mathbf{r}$.

2.2.1 Momento Angular Intrínseco

Considere uma onda circularmente polarizada que se propaga no vácuo ao longo da direção z. O vetor campo elétrico é expresso da seguinte forma:

$$\mathbf{E}_{\mp} = \hat{x} E_0 cos(kz - \omega t) \mp \hat{y} E_0 sin(kz - \omega t), \tag{2.37}$$

onde, E_0 é a amplitude da onda, $\hat{x}$ e $\hat{y}$ são vetores unitários nas direções x e y, respectivamente, ω é a freqüência angular e k é o módulo do vetor de onda $\mathbf{k}$. $\mathbf{E}_{-}$ representa uma onda circularmente polarizada no sentido horário e $\mathbf{E}_+$ representa uma onda circularmente polarizada no sentido anti-horário. Admitindo a ausência de cargas e correntes elétricas no vácuo, o potencial escalar é nulo ($\varphi = 0$) e o campo elétrico pode ser escrito como:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \tag{2.38}$$

Assim, o potencial vetor $\mathbf{A}$ é dado por:

$$\mathbf{A}_\mp = -\int \mathbf{E}_\mp dt = \hat{x}\frac{E_0}{\omega} sin(kz - \omega t) \pm \hat{y}\frac{E_0}{\omega} cos(kz - \omega t). \tag{2.39}$$

Desta forma, o momento angular intrínseco da onda é:

$$\mathbf{S} = \epsilon_0 \int (\mathbf{E}_\mp) \times \mathbf{A}_\mp d\nu = \pm \frac{\epsilon_0 E_0^2}{\omega} \hat{z} \int d\nu \tag{2.40}$$

O sentido do momento angular intrínseco depende dos estados de polarização, ou seja, se a onda é circularmente polarizada no sentido horário ou anti-horário. Note que quando a onda é polarizada linearmente o momento angular intrínseco é nulo, pois $\mathbf{E} \times \mathbf{A} = 0$. A densidade de energia da onda é expressa por:

$$u = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 \mathbf{E}.\mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}.\mathbf{B}\right) \tag{2.41}$$

Substituindo a equação 2.39 na equação $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, teremos:

$$\mathbf{B} = \pm \hat{x}\frac{E_0 k}{\omega} sin(kz - \omega t) + \hat{y}\frac{E_0 k}{\omega} cos(kz - \omega t). \tag{2.42}$$

Portanto,

$$u = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E_0^2 + \frac{1}{\mu_0}\frac{k^2 E_0^2}{\omega^2}\right) \tag{2.43}$$

$$u = \epsilon_0 E_0^2 \tag{2.44}$$

Calculando a relação entre o momento angular intrínseco da onda circularmente polarizada e sua energia encontramos:

$$\frac{(\mathbf{S})_z}{U} = \pm \frac{\int \frac{\epsilon_0 E_0^2}{\omega}}{d} \nu \int \epsilon_0 E_0^2 d\nu = \pm \frac{1}{\omega} \tag{2.45}$$

Agora aplicando as equações (2.37) e (2.42) na expressão para a densidade de momento linear da onda, obtemos:

$$\mathbf{p} = \epsilon 0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{\epsilon 0 E_0^2 k}{\omega} \hat{z} \tag{2.46}$$

Calculando a razão entre o spin da onda circularmente polarizada e o seu momento linear, encontramos:

$$\frac{(\mathbf{S})_z}{(P)_z} = \pm \frac{\int \frac{\epsilon_0 E_0^2}{\omega}}{d} \nu \int \frac{\epsilon_0 E_0^2 k}{\omega} d\nu = \pm \frac{1}{k} \tag{2.47}$$

Os resultados obtidos nas equações (2.45) e (2.47) são os mesmos encontrados na mecânica quântica para a razão entre o spin do fóton ($\pm\hbar$) e sua energia ($\hbar\omega$) e a razão entre o spin do fóton e seu momento linear ($\hbar k$). Portanto, podemos interpretar que uma onda circularmente polarizada no sentido horário ou anti-horário é constituída por fótons com spin bem definido de $+\hbar$ ou $-\hbar$, ou seja, a onda circularmente polarizada no sentido horário (sentido anti-horário) tem seu vetor momento angular intrínseco paralelo (antiparalelo) ao vetor momento linear. Esta predição teórica foi verificada experimentalmente por Beth [23] em 1936.

2.2.2 Momento Angular Orbital

Em 1992, Allen e colaboradores demonstraram teoricamente que feixes de luz com uma estrutura de fase azimutal $exp(il\varphi)$ possuem MAO de $l\hbar$ por fóton ao longo da direção de propagação, onde l é o índice azimutal. Este resultado é independente dos estados de polarização e é típico para feixes com uma frente de onda helicoidal [2]. Para feixes com uma frente de onda helicoidal, o vetor de Poynting tem uma componente azimutal, que produz um momento angular orbital na direção de propagação do feixe. Usualmente, feixes de luz possuindo momento angular orbital são descritos em termos de modos Laguerre-Gauss (LG). Apresentaremos a seguir a teoria do MAO.

Admitindo que um feixe de luz monocromática tenha polarização linear e seja definido pelo seguinte potencial vetor:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r}) exp[i(kz - \omega t)]\hat{x}, \tag{2.48}$$

onde $\hat{x}$ é o vetor unitário na direção do eixo x, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ é o módulo do vetor de onda, λ é o comprimento de onda do feixe, ω é a freqüência angular e $u(\mathbf{r})$ é uma função complexa que descreve a distribuição de amplitude do feixe, e é solução da equação paraxial. Este potencial satisfaz o calibre de Coulomb $\nabla.\mathbf{A} = 0$.

Vamos agora calcular a densidade do momento angular total, dada pela eq.(2.26). Visto que os campos são complexos, vamos calcular primeiro a parte real de $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$, ou seja:

$$Re(\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*) = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{B} + (\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*)). \tag{2.49}$$

Para um vetor potencial dado pela eq. (2.48) as expressões para os campos elétrico e magnético são:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = i\omega u exp[i(kz - \omega t)]\hat{z} \tag{2.50}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \left[\frac{\partial u}{\partial z} + iku\right] exp[i(kz - \omega t)]\hat{y} - \frac{\partial u}{\partial y} exp[i(kz - \omega t)]\hat{z} \tag{2.51}$$

Com isso,

$$\mathbf{E}^* \times \mathbf{B} = -i\omega u^* \left[\frac{\partial u}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial u}{\partial z}\hat{z}\right] + \omega k \mid u \mid^2 \hat{z}, \tag{2.52}$$

ou

$$\mathbf{E}^* \times \mathbf{B} = -i\omega u^* \nabla u + \omega k \mid u \mid^2 \hat{z}, \tag{2.53}$$

onde usamos o fato de que $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$.

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B}^* = i\omega u \nabla u^* + \omega k \mid u \mid^2 \hat{z}. \tag{2.54}$$

Portanto, a média temporal da densidade de momento linear do campo eletromagnético é dada por:

$$\langle \mathbf{p} \rangle = Re[\epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}^*] = \frac{\epsilon_0}{2}[\mathbf{E}^* \times \mathbf{B} + \mathbf{E} \times \mathbf{B}^*] = \frac{i\omega\epsilon_0}{2}(u\nabla u^* - u^*\nabla u) + \epsilon_0 \omega k \mid u \mid^2 \hat{z}. \tag{2.55}$$

Vamos considerar que a função complexa $u(\mathbf{r})$ tenha a forma

$$u(r, \varphi, z) = u_0(r, z) exp(il\varphi), \tag{2.56}$$

onde l é o índice azimutal. Dentro da aproximação paraxial podemos desprezar os termos com $\frac{\partial u}{\partial z}$ comparados com ku na média temporal da densidade de momento linear. Por conseguinte, a densidade de momento linear é expressa como:

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \frac{i\omega\epsilon_0}{2}\left(u_0\frac{\partial u_0{}^*}{\partial r} - u_0^*\frac{\partial u_0}{\partial r}\right)\hat{r} + \frac{l\epsilon_0\omega}{r} \mid u_0 \mid^2 \hat{\varphi} + \epsilon_0\omega k \mid u_0 \mid^2 \hat{z}, \tag{2.57}$$

onde $\hat{r}$, $\hat{\varphi}$ e $\hat{z}$ são versores unitários correspondentes ao sistema de coordenadas cilíndricas. Na equação acima podemos notar que a média temporal do vetor de Poynting, que é dado por $c^2\langle \mathbf{p} \rangle$, descreve uma trajetória na forma de um helicóide ao longo da direção de propagação. Além disso, a componente $\hat{r}$ está relacionada com a dispersão do feixe, a componente $\hat{\varphi}$ é responsável pelo do momento angular orbital na direção de propagação e a componente $\hat{z}$ relaciona-se com o momento linear na direção z.

Calculando a média temporal da densidade de momento angular, temos:

$$\langle \mathbf{l} \rangle = -\frac{l\epsilon_0\omega}{r}z \mid u_0 \mid^2 \hat{r} + \frac{i\omega\epsilon_0}{2}\left[\left(u_0\frac{\partial u_0{}^*}{\partial r} - u_0^*\frac{\partial u_0}{\partial r}\right)z + 2ikr \mid u_0 \mid^2\right]\hat{\varphi} + l\epsilon_0\omega \mid u_0 \mid^2 \hat{z}. \tag{2.58}$$

Integrando $\langle \mathbf{l} \rangle$ e $\langle \mathbf{p} \rangle$ sobre o perfil do feixe, constatamos que restará apenas a componente paralela ao sentido de propagação, pois as outras componentes são simétricas em relação ao eixo z. Consequentemente, o mesmo acontecerá integrando no volume do feixe. Sabendo que a densidade de energia do feixe é $u = cp_z = \epsilon_0\omega^2 \mid u_0 \mid^2$, então o momento angular orbital por unidade de energia do feixe, é dado por:

$$\frac{\mathbf{L}_z}{U} = \frac{\int \mathbf{l} d\nu}{\int u d\nu} = \frac{\int l\epsilon_0\omega \mid u_0 \mid^2 d\nu}{\int \epsilon_0\omega^2 \mid u_0 \mid^2 d\nu} = \frac{l}{\omega}, \tag{2.59}$$

e a razão entre o momento angular orbital e o momento linear é da forma:

$$\frac{\mathbf{L}_z}{P_z} = \frac{\int \mathbf{l} d\nu}{\int \mathbf{p} d\nu} = \frac{\int l\epsilon_0\omega \mid u_0 \mid^2 d\nu}{\int \epsilon_0\omega k \mid u_0 \mid^2 d\nu} = \frac{l}{k} = l\frac{\lambda}{2\pi} \tag{2.60}$$

Como o feixe é polarizado linearmente, então o momento angular não poder ser devido ao spin. Evidentemente, a eq. (2.59) é equivalente à relação entre o momento angular de spin do fóton e sua energia, $\pm\frac{1}{\omega}$, para um feixe de luz polarizado circularmente e aparece devido ao termo de fase azimutal. A analogia entre óptica paraxial e mecânica quântica sugere que feixes com variação de fase de $exp(il\varphi)$ sejam auto-modos do operador momento angular orbital $\mathbf{L}_z$. Assim sendo, um feixe com dependência azimutal de $exp(il\varphi)$ possui momento angular orbital de $l\hbar$ por fóton. A maior parte da literatura a respeito de feixes com momento angular orbital tem sido dedicada aos modos Laguerre-Gauss (LG) que foram apresentados anteriormente.

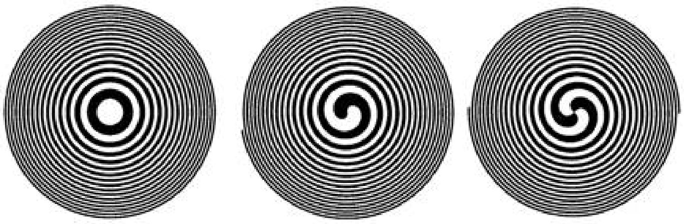
2.3 Geração e Caracterização de Feixes Possuindo M.A.O

Feixes com momento angular intrínseco (ou de spin) podem ser facilmente gerados usando placas de quarto de onda para converter luz linearmente polarizada em luz circularmente polarizada. Existem vários componentes para gerarmos feixes de luz posuindo MAO, como SLM (Spatial Light Modulator)[24], conversor de modos, mascaras de fase, e etc. Porém, um dos métodos mais simples e de baixo custo faz uso de hologramas gerados por computador. Discutiremos, a seguir, dois métodos de se obter feixes com MAO, bem como algumas maneiras de caracterizá-los.

2.3.1 Geração de feixes possuindo MAO através do método holográfico

Uma das maneiras mais simples de se obter feixes com MAO é através de hologramas gerados por computador. Essencialmente, um holograma nada mais é do que a gravação do padrão de interferência entre o feixe de interesse com um feixe de referência, que em geral é uma onda plana. Um primeiro método consiste em obtermos uma onda helicoidal através da reconstrução holográfica, utilizando como hologramas placas zonais espirais (PZE). As PZE's são uma variação das placas zonais de Fresnel [25]. Estas placas podem ser confeccionadas através de impressões dos padões de interferência entre o feixe de interesse alinhado com um feixe de referência. A fig. 2.2(a-c) ilustra placas com helicidades 0, $+1$ e $+2$.

Ao contrário da placa zonal de Fresnel mostrada na fig.2.5(a), as $PZE's$ mostradas nas fig's. 2.5(b) e 2.5(c), focalizam o feixe incidente provocando uma quebra de simetria azimutal da fase. Para obtermos um feixe colimado, usamos uma lente esférica na configuração confocal com a PZE. A fig. 2.6 ilustra o arranjo experimental típico para a geração de um feixe possuindo MAO usando uma PZE.



(a) $l = 0$ (b) $l = +1$ (c) $l = +2$

Figura 2.5: Máscaras usadas para gerar os modos LG. Em (a) uma placa zonal de Fresnel $l = 0$. Em (b) e em (c) temos duas placas zonais espirais (PZE) com helicidade $l = +1$ e $l = +2$, respectivamente.

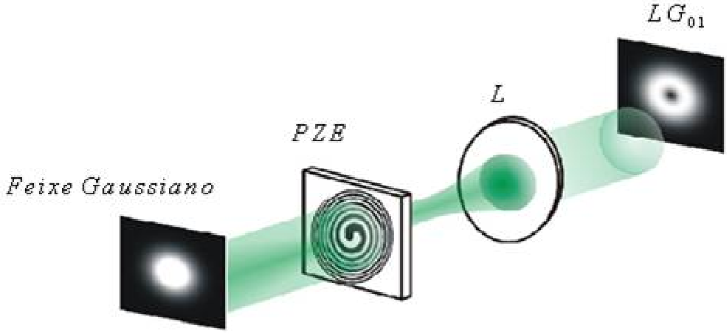


Figura 2.6: Montagem experimental para a geração de um modo Laguerre-gauss de ordem 1.

Outro tipo de holograma muito utilizado são as chamadas máscaras de amplitudes ou de fase, que funcionam como uma grade de difração cuja as ordens de difração são os modos com diferentes helicidades. A fig. 2.7(a-c) ilustra hologramas gerados a partir de feixes com MAO $l = 1$, $l = 2$ e $l = 3$, respectivamente. Esse tipo de holograma possui uma modulação espacial que produz um defeito topológico responsável pela geração dos modos nas diferentes ordens de difração. Para um holograma mostrado na fig. 2.7(a), teremos as várias ordens de difração como mostrado na fig. (2.8).

O método de geração de feixes através de hologramas nos permite gerar outros tipos de feixes possuindo MAO, como por exemplo os feixes Bessel. O método de produção de feixes com MAO por hologramas ou máscaras construído a base de filmes fotográficos é muito simples e de baixo custo. Porém, podemos nos deparar com limitações quando realizamos experimentos que necessitem de feixes com alta intensidade, pois podemos danificar o holograma devido a incidência de luz com alta intensidade. Desta forma, esse

(a) $l = 1$ (b) $l = 2$ (c) $l = 3$

Figura 2.7: Grades de difração geradas por computador com: (a) $l = 1$, (b) $l = 2$ e em (c) $l = 3$.

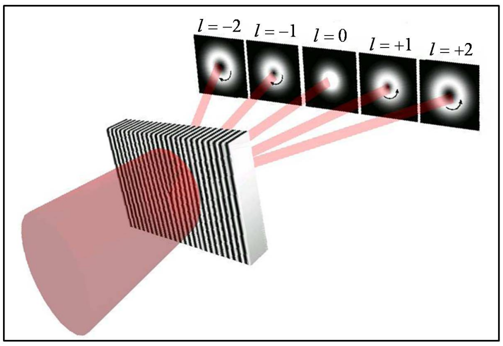


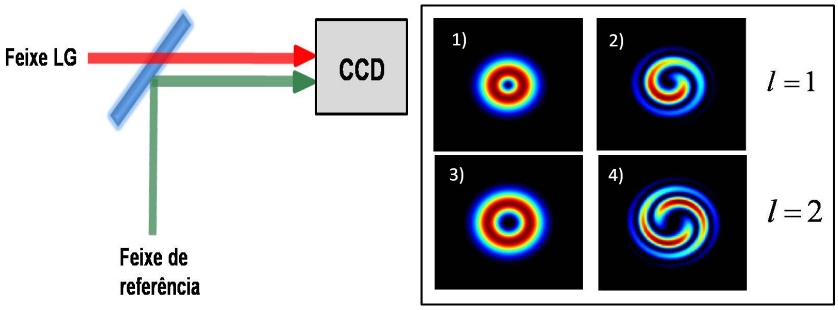
Figura 2.8: Geração de modos LG na diferentes ordens de difração [26].

método se torna limitado quando potências superiores a potência máxima suportada pelo filme são necessárias. Utilizando conversores de modos, baseados em lentes cilíndricas, e axicons podemos gerar feixes de luz possuindo MAO de maior potência.

2.3.2 Caracterização de Feixes possuindo MAO

A observação da intensidade do perfil anelar, como os mostrados na fig. 2.2, não é suficiente para verificarmos se o feixe possui MAO. Para confirmarmos a presença do MAO é necessário uma análise da estrutura de fase da frente de onda. Para isto, dispomos de alguns métodos interferométricos para a caracterização de feixes possuindo MAO. O primeiro método e mais imediato para verificarmos a existência de MAO em feixes de luz, consiste em fazermos a interferência do feixe com uma onda de referência, como é mostrado na fig. 2.9(a). Na fig. 2.9(b), são mostrados o perfil do feixe e o padrão de interferência com uma onda plana. Portanto, se a interferência fornecer apenas uma espiral, o feixe possui MAO de ordem 1. Caso a interferência possua n espirais concêntrica, o feixe possui

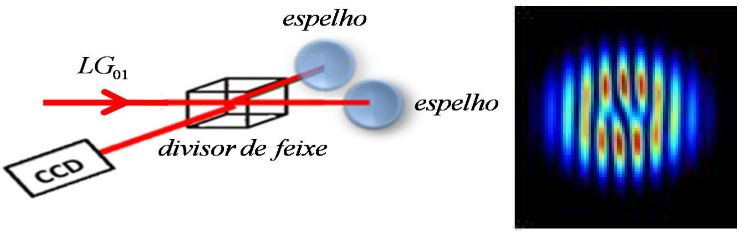
MAO de ordem n.



(a) (b)

Figura 2.9: (a) Esquema para medir a ordem do MAO; (b)(1 e 2) perfil de intensidade e interferência do modo LG_0^1 com onda plana e (b)(3 e 4) perfil de intensidade e interferência do modo LG_0^2 com onda plana.

Um método alternativo, consiste em montarmos um interferômetro de Michelson que é composto de um divisor de feixe e dois espelhos como mostrado na fig. 2.10(a). O interferômetro é ligeiramente desalinhado a fim de produzir franjas de interferência. Neste caso, observamos defeitos topológicos contendo bifurcações, onde l é um numero inteiro que indica a ordem do MAO do modo. A fig. 2.10(b) mostra o padrão de interferência de dois feixes LG_0^1 ligeiramente desalinhados, de modo que a singularidade de fase de um seja iluminada pelo anel de intensidade do outro.



(a) (b)

Figura 2.10: a) Interferômetro de Michelson:(b) Interferência entre dois modos LG_0^1.

A caracterização de feixes possuindo MAO pode ser feita também através de métodos difrativos. No decorrer desta dissertação utilizaremos um método difrativo elaborado pelo grupo de J.M Hickmann [36] que consiste em produzir redes triangulares através da incidência de feixes possuindo MAO em aberturas triangulares que estão correlacionadas com o índice azimutal l. Desta forma, após incidir um feixe possuindo MAO em uma abertura triangular medimos a intensidade do padrão de difração através de uma câmera

CCD (charge-coupled device). Os resultados teóricos e experimentais estão mostrados na figura 2.11.

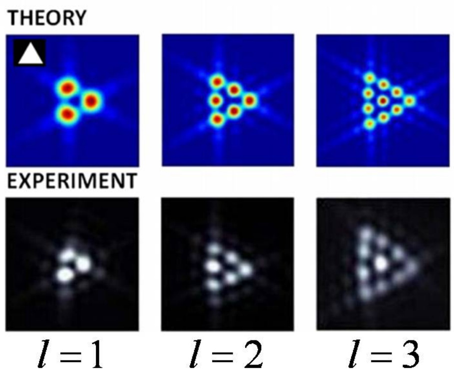


Figura 2.11: Resultados para a difração de um feixe de luz possuindo MAO por uma abertura tringular. Resultados teoricos e experimentais para $l = 1$, $l = 2$ e $l = 3$ [36].

Da figura 2.11, nós podemos observar que o valor de l está diretamente relacionado com os máximos de difração que formam a rede tringular. O valor total do índice azimutal é dado por $l = N - 1$, onde N é o número de máximos de difração de qualquer lado do triângulo. Para o caso onde o índice azimutal do feixe incidente for negativa, o deslocamento espacial estará na direção oposta e o padrão de difração triandular será rotacionado de 180º em relação ao anterior, como mostra a figura 2.12 (a) e 2.11(b).

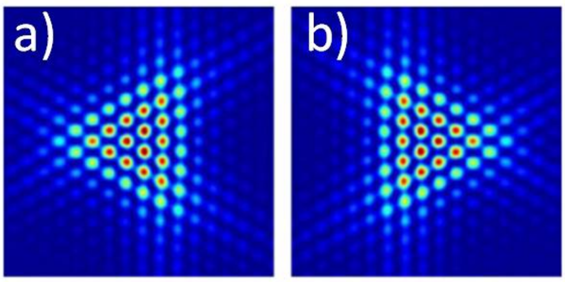


Figura 2.12: Efeito da mudança de sinal do índice azimultal l nos padrões de difração por uma abertura triangular. a) Feixe incidente possuindo $l = 7$. b) Feixe incidente possuindo $l = -7$ [36].

2.4 Conclusão

Utilizando a teoria eletromagnética, vimos que o momento angular total de um feixe de luz pode ter duas componentes bem definidas: o momento angular intrínseco, que depende apenas do estado de polarização do feixe e o momento angular orbital, que depende da estrutura de fase azimutal. Dentro da aproximação paraxial mostramos que um feixe de luz linearmente polarizado com uma fase azimutal $exp(il\varphi)$ possui momento angular orbital bem definido na direção de propagação. Diferentemente do momento angular intrínseco, que tem exclusivamente dois estados independentes, correspondendo às polarizações circular no sentido horário e anti-horário, o momento angular orbital tem um número ilimitado de estados, correspondendo a todos os valores inteiros de l. Discutimos também alguns métodos para geração e caracterização de feixes de luz possuindo MAO.

Capítulo 3

CONSERVAÇÃO DO MAO NA CONVERSÃO PARAMÉTRICA DESCENDENTE ESPONTÂNEA E ESTIMULADA

Neste capítulo, apresentaremos os processos ópticos não lineares de conversão de frequência, conversão paramétrica descendente espontânea (CPD) e conversão paramétrica descendente estimulada (CPDE). Investigaremos a questão da conservação do MAO nestes processos de conversão de frequência para as geometrias colinear e não-colinear e suas aplicações na geração de estados emaranhados multidimensionais.

3.1 Conversão Paramétrica Descendente Espontânea

Conversão paramétrica descendente é um processo óptico não linear no qual um fóton de frequência ω_p é convertido espontaneamente em dois outros fótons de frequência ω_s e ω_i, denominados fótons gêmeos. Este processo ocorre em um meio não linear de segunda ordem. Usaremos ao longo deste trabalho a convenção de chamar o feixe do laser que incide no meio não-linear de pump e os fótons convertidos de signal e idler. Neste processo observamos a conservação de energia

$$\hbar\omega_p = \hbar\omega_s + \hbar\omega_i \tag{3.1}$$

e de momento linear

$$\hbar\mathbf{k}_p = \hbar\mathbf{k}_s + \hbar\mathbf{k}_i \tag{3.2}$$

A eq. (3.2) é conhecida como a condição de casamento de fase, podendo ser do tipo I ou do **tipo II**. No casamento de fase do **tipo I**, ilustrado na fig. 3.1, as polarizações dos fótons signal e idler são iguais e ortogonais à do pump. Por exemplo, se a polarização do pump é vertical, teremos signal e idler com polarizações horizontais. No casamento de fase do **tipo II**, ilustrado na fig. 3.2, signal e idler têm polarizações ortogonais entre si. Neste caso podemos ter a polarização do pump vertical, a do signal horizontal e a do idler vertical. Uma propriedade importante dos fótons signal e idler é que eles são gerados simultaneamente. Desta forma, além de serem altamente correlacionados na energia e no momento, signal e idler são também no tempo de emissão.

Na fig. 3.3 ilustramos o esquema de detecção em coincidência, onde mostramos os detectores D_s e D_i, que, tipicamente, são baseados em foto-diodos de avalanche. Os fótons que chegam a esses detectores são selecionados por uma pequena abertura, conhecida como íris. Em seguida, usamos um filtro de interferência com largura de banda estreita para selecionar os fótons gêmeos espectralmente. Após os fótons gêmeos serem selecionados, a detecção dos mesmos é feita através de contagens de fótons em coincidência. Os sinais de saída do sistema de detecção são enviados para um módulo de contagem de pulsos que fornece as taxas de contagem simples e em coincidência.

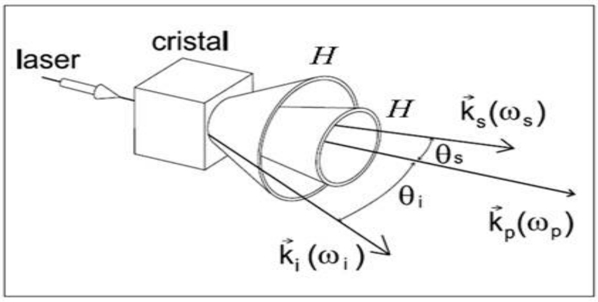


Figura 3.1: Representação da emissão de fótons gêmeos na conversão paramétrica descendente do tipo I.

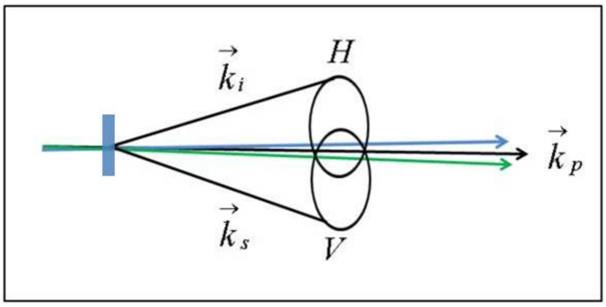


Figura 3.2: Representação da emissão de fótons gêmeos na conversão paramétrica descendente do tipo II.

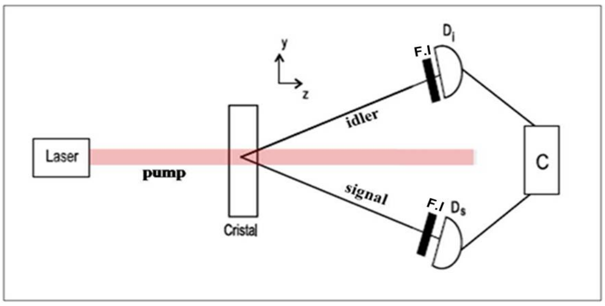


Figura 3.3: Representação da detecção dos fótons F.I é um filtro de interferência centrados para o comprimento de onda dos fótons gerados Di e Ds são, respectivamente, os detectores idler e signal; C é o sistema eletrônico de coincidências.

3.1.1 Estado Quântico da Luz gerada na CPD

Utilizando teoria de perturbação podemos escrever o estado quântico $|\psi\rangle$ dos dois fótons na saída do cristal não linear como:

$$| \psi\rangle = \alpha \mid 0,0\rangle - \frac{i}{\hbar}\int_0^{\tau} dt H_I(t) \mid 0,0\rangle, \tag{3.3}$$

onde $\mid 0,0\rangle$ é o estado de vácuo, τ é o tempo de interação e H_I é o Halmitoniano efetivo na representação de interação é dado por [6-8]:

$$H_I = \epsilon_0 \int_V d^3V \chi^{(2)} \vdots E_p^+ E_s^- E_i^- + c.c, \tag{3.4}$$

onde ϵ_0 é a permissividade no vácuo, $\chi^{(2)}$ é o tensor susceptibilidade não-linear de segunda ordem, V é o volume do cristal iluminado pelo feixe de bombeamento, $E^{(+)}$ e $E^{(-)}$ são as partes positiva e negativa do operador campo elétrico. Com isso, podemos escrever o estado quântico dos fótons gêmeos da seguinte forma:

$$|\psi\rangle = \alpha|0,0\rangle + \beta \int d\mathbf{k}_s \int d\mathbf{k}_i sinc\left[\frac{1}{2}(\omega_s + \omega_i - \omega_p)t\right] \Phi(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i)|1, \mathbf{k}_s\rangle|1, \mathbf{k}_i\rangle, \tag{3.5}$$

onde os coeficientes α e β são tais que $\langle\psi|\psi\rangle = 1$, com $|\alpha|^2 \gg |\beta|^2$. O coeficiente β nos fornece a amplitude de probabilidade de geração dos fótons gêmeos e depende das dimensões do cristal e da não linearidade do cristal, entre outros fatores constantes. Considerando apenas os eventos pós-selecionados pela detecção de 1 fóton com vetor de onda $\mathbf{k}_s$, em coincidência com com a detecção de 1 fóton com vetor de onda $\mathbf{k}_i$, podemos ignorar a componente de vácuo e tratar o estado $|\ \psi\rangle$ como um estado de dois fótons. A função $\Phi(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i)$ expressa o espectro de emissão dos fótons gêmeos e é dada por:

$$\Phi(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i) = \int d\mathbf{k}_p \nu(\mathbf{k}_p) \left[\frac{\omega_s\omega_i\omega_p}{n^2(\mathbf{k}_s)n^2(\mathbf{k}_i)n^2(\mathbf{k}_p)}\right]^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{3} sinc\left[\frac{1}{2}(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_p)_j L_j\right], \tag{3.6}$$

onde $\mathbf{k}_p$ é o vetor de onda do feixe de bombeamento, l_j é a dimensão do cristal, com $i = x, y, z$, $\mathbf{k}_s$ e $\mathbf{k}_i$ são os vetores de onda dos feixes convertidos signal e idler, respectivamente, $\nu(\mathbf{k}_p)$ é o espectro angular do feixe de bombeamento no plano do cristal e os n($\mathbf{k}_m$) com $m = s, i, p$, são os índices de refração linear do cristal. Faremos agora uma série de aproximações que simplificam a expressão do estado dos fótons gêmeos. Primeiramente, vamos supor que as frequências angulares de interesse estão bem definidas pelo esquema de detecção, através do uso de filtros de interferência com larguras de banda muito estreita comparada com a frequência central dos fótons detectados. Com isso podemos usar a aproximação monocromática, ou seja $\omega_p = \omega_s + \omega_i$, desta forma:

$$sinc\left[\frac{1}{2}(\omega_s + \omega_i - \omega_p)t\right] = 1. \tag{3.7}$$

Consideremos também que o feixe de bombeamento e os feixes convertidos propagam-se próximos aos seus respectivos eixos de propagação, isso significa que $|\mathbf{q}| \ll |\mathbf{k}|$ para os três modos envolvidos, sendo $\mathbf{q}$ a componente transversal do vetor de onda $\mathbf{k}$. Assim, os índices de refração $n(\mathbf{k}_s)$, $n(\mathbf{k}_i)$ e $n(\mathbf{k}_p)$ podem ser tratados como constantes. Temos também que na aproximação do cristal fino, L_z é pequeno comparado com $|\mathbf{q}_s|^{-1}$ e $|\mathbf{q}_i|^{-1}$. Portanto, o espectro angular pode ser escrito como:

$$\Phi(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i) \approx \nu(\mathbf{q}_p) = \nu(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i). \tag{3.8}$$

Com todas essas aproximações, o estado dos fótons gêmeos toma a forma:

$$|\psi\rangle \propto \alpha|vac\rangle + \beta' \int d\mathbf{q}_s \int \mathbf{q}_i \nu(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i) \mid 1, \mathbf{q}_s\rangle |1, \mathbf{q}_i\rangle, \tag{3.9}$$

Nesta expansão, observamos que o espectro angular é transferido para o estado de dois fótons. Uma característica marcante deste resultado é o fato de que o espectro angular dos fótons gerados não pode ser fatorado pelo produto do espectro angular do idler e do signal. Como conseguência, temos a preparação de um estado emaranhado no grau de liberdade de momento transverso.

Para observarmos o efeito dessa transferência, calculamos a taxa de contagem em coincidência $C(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i)$ entre os fótons signal e idler, que é proporcional à função de correlação de quarta ordem [6]:

$$G^{(2,2)}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i) = \langle \psi \mid \hat{E}_s^{(-)}(\mathbf{r}_s) \hat{E}_i^{(-)}(\mathbf{r}_i) \hat{E}_i^{(+)}(\mathbf{r}_i) \hat{E}_s^{(+)}(\mathbf{r}_s) \mid \psi \rangle, \tag{3.10}$$

onde o operador campo elétrico pode ser escrito em termos de uma expansão em ondas planas da seguinte forma:

$$\hat{E}_i^{(+)}(\mathbf{r}_i) = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{k}_i \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0}} \hat{a}(\mathbf{k}_i) exp[i\mathbf{k}_i.\mathbf{r}_i]. \tag{3.11}$$

Com isso a taxa de contagem em coincidência para o feixe signal, por exemplo, é dada por:

$$C(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i) \propto \left| \int d\mathbf{q}_s \int d\mathbf{q}_i \nu(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_c) \right.$$
$$\left. \times exp\left[i\left(\mathbf{q}_s.\rho - \frac{q_s^2}{2k_s} z_s \right) \right] exp\left[i\left(\mathbf{q}_i.\rho - \frac{q_i^2}{2k_i} z_i \right) \right] \right|^2 \tag{3.12}$$

Vimos, então, que o espectro angular do pump é transferido para o estado dos fótons gêmeos, o qual detectamos através da taxa de contagem em coincidência.

3.2 Conversão Paramétrica Descendente Estimulada

Uma configuração típica do processo de CPDE está ilustrado na figura 3.4. Um cristal não linear é bombeado por um feixe de laser de forma a produzir dois outros feixes, signal e idler, pelo processo de CPD. Um segundo laser, denominado de feixe auxiliar, é alinhado com o feixe signal, de forma que ocorra um casamento completo de modos entre eles, ou seja, os feixes signal e auxiliar devem ter a mesma direção de propagação, a mesma frequência e a mesma polarização. Desta forma, a emissão de fótons nos modos do feixe signal acoplados com o laser é aumentada devido à emissão estimulada pelo feixe auxiliar. Uma consequência imediata deste processo é o aumento da taxa de emissão do feixe idler, já que os fótons signal e idler são gerados aos pares.

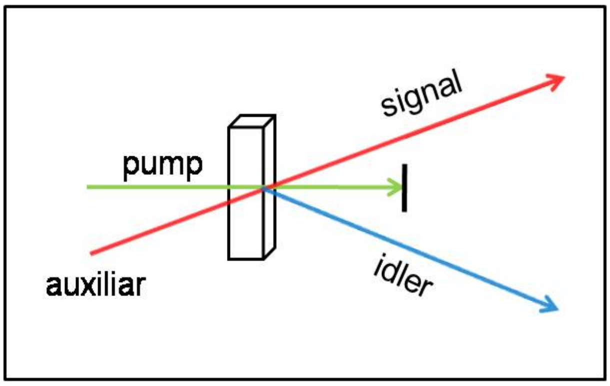


Figura 3.4: Esquema do processo de CPDE, mostrando as direções de propagação do pump, auxiliar, signal e idler.

Para estudar as propriedades transversais do feixe idler, vamos calcular sua distribuição transversal de intensidade usando o formalismo multimodo da CPD estimulada, baseado no tratamento apresentado na secção anterior para a CPD espontânea. Para um cristal não linear fino centrado na origem e bombeado ao longo da direção de propagação z, o estado da luz produzida pela CPD estimulada nas aproximações paraxial e monocromática, pode ser escrito como:

$$| \psi\rangle = \alpha|\nu_s(\mathbf{q})\rangle|0\rangle + \beta \int d\mathbf{q}_i \int d\mathbf{q}_s \nu_p(\mathbf{q}_i + \mathbf{q}_s)|1;\mathbf{q}_i\rangle\hat{a}^\dagger(\mathbf{q}_s)|\nu_s(\mathbf{q})\rangle, \tag{3.13}$$

onde $|\nu_s(\mathbf{q})\rangle$ representa o estado coerente multimodo associado ao feixe auxiliar com vetor de onda transverso $\mathbf{q}$, $|1;\mathbf{q}_c\rangle$ representa o estado de um fóton com vetor de onda transverso

$\mathbf{q}_i$ e $\nu_a(\mathbf{q}_a)$ é o espectro angular do feixe auxiliar, que corresponde a transformada de Fourier da distribuição de amplitude transversal. A intensidade do feixe complementar $I(\mathbf{r}_i)$, detectada em uma posição $\mathbf{r}_i$, é obtida através do calculo da função de correlação de segunda ordem, ou seja,

$$I(\mathbf{r}_i) = \langle\psi|\hat{E}_i^{(-)}(\rho, z_i)\hat{E}_i^{(+)}(\rho, z_i)|\psi\rangle, \tag{3.14}$$

onde ρ e z são as componentes transversal e longitudinal, respectivamente, do vetor $\mathbf{r}_i$, $\hat{E}_i^{(-)}(\rho, z)$ e $\hat{E}_i^{(+)}(\rho, z)$ são os operadores de campo que contém a informação da propagação do feixe idler do cristal até o plano de detecção. Considerando a propagação livre até o plano de detecção na aproximação paraxial, temos que:

$$\hat{E}_i^{(+)}(\rho, z) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{16\pi^3\epsilon_0}}e^{ikz_i}\int d\mathbf{q}_i\hat{a}(\mathbf{q}_i)exp\left[i\left(\mathbf{q}_i.\rho - \frac{q_i^2}{2k_i}z\right)\right], \tag{3.15}$$

e

$$\hat{E}_i^{(+)}(\rho_i, z) = [\hat{E}_i^{(+)}(\rho_i, z)]^\dagger \tag{3.16}$$

Assim, a distribuição de intensidade pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} I(\mathbf{r}_i) \propto \int d\mathbf{q}_i \int d\mathbf{q}_s \int d\mathbf{q}_i' \int d\mathbf{q}_s' \nu_p(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i)\nu_p^*(\mathbf{q}_s' + \mathbf{q}_i') \\ \times exp\left[i\left(\mathbf{q}_i.\rho_i' - \frac{q_i^2}{2k_i}z\right)\right] exp\left[i\left(\mathbf{q}_i'.\rho_i - \frac{q_i'^2}{2k_i}z\right)\right] \\ \times\langle\nu_s(\mathbf{q}_s')|\hat{a}(\mathbf{q}_s')\hat{a}^\dagger(\mathbf{q}_s)|\nu_s((\mathbf{q}_s))\rangle\langle 0, \mathbf{q}_i'|0, \mathbf{q}_i\rangle. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Utilizando a relação de comutação

$$\left[\hat{a}(\mathbf{q}_s'), \hat{a}^\dagger(\mathbf{q}_s)\right] = \delta(\mathbf{q}_s' - \mathbf{q}_s), \tag{3.18}$$

e a representação integral do espectro angular do feixe laser

$$\nu(\mathbf{q}_i + \mathbf{q}_s) = \int d\rho W(\rho)exp([-i(\mathbf{q}_i + \mathbf{q}_s).\rho]), \tag{3.19}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned}
I(\mathbf{r}_i) \propto \int d\mathbf{q}_i \int d\mathbf{q}_s \int d\mathbf{q}'_i \int d\mathbf{q}'_s \\
\times \int d\rho W(\rho) exp([-i(\mathbf{q}_i + \mathbf{q}_s).\rho] \\
\times \int d\rho' W^*(\rho') exp([-i(\mathbf{q}'_i + \mathbf{q}'_s).\rho'] \\
\times exp\left[i\left(\mathbf{q}_i.\rho'_i - \frac{q_i^2}{2k_i}z\right)\right] exp\left[i\left(\mathbf{q}'_i.\rho_i - \frac{q_i'^2}{2k_i}z\right)\right] \\
\times[\delta(\mathbf{q}'_s - \mathbf{q}_s) + \nu_s^*(\mathbf{q}_s)\nu_s(\mathbf{q}'_s)].
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Resolvendo as integrais em momento transverso, notando que

$$\int d\mathbf{q}_i exp\left[i\mathbf{q}_i.(\rho_i - \rho) - i\frac{q_i^2}{2k_i}z\right] = exp\left[i|\rho_i - \rho|^2 \frac{k_i}{2z}\right] \tag{3.21}$$

e

$$\int d\mathbf{q}_s exp(-i\mathbf{q}_s.\rho)\nu_s^*(\mathbf{q}_s) = W_s^*(\rho) \tag{3.22}$$

obtemos a seguinte expressão para a intensidade do feixe idler:

$$I(\mathbf{r}_i) \propto \int d\rho |W(\rho)|^2 + \left| \int d\rho W_p(\mathbf{p}) W_s^*(\rho) exp\left[i|\rho_i - \rho|^2 \frac{k_i}{2z}\right]\right|^2. \tag{3.23}$$

Desta forma, encontramos duas contribuições para a intensidade do feixe idler. A primeira é devido ao processo de emissão espontânea, dada pelo primeiro termo da eq. (3.23), que é constante com relação à variável de posição transversal $\mathbf{p}_i$. A segunda é devido ao processo de emissão estimulada, que é sugerida pela presença do perfil do feixe auxiliar no segundo termo da eq. (3.23). A distribuição da intensidade do feixe idler depende da amplitude do feixe laser e do complexo conjungado da amplitude do feixe auxiliar, com ambas as amplitudes definidas no plano do cristal. A exponencial complexa no integrando corresponde ao propagador de Fresnel até a posição $\mathbf{r}_i$. Note que a propagação se dá com o número de onda do feixe idler, pois a intensidade calculada é a do feixe idler. Desta forma, o processo de emissão estimulada não só aumenta a taxa de emissão do feixe idler, mas também altera suas características transversais.

3.3 Violação do MAO na CPD Espontânea

Como citado na introdução geral desta dissertação, vimos que a maioria dos estudos da CPD explorando a questão da conservação do MAO foram realizados utilizando uma geometria quasi-colinear. Nesta seção, estamos interesados em estudar a CPD para explorar a questão da conservação do MAO na geometria não-colinear, em especial para uma classe de feixes denomidados feixes Bessel.

A lei de conservação do MAO na CPD espontânea é descrita pela relação:

$$\hbar l_p = \hbar l_s + \hbar l_i. \tag{3.24}$$

onde l_p é o índice azimutal correspondente ao pump, l_s e l_i são os índices azimutais correspondentes aos fótons signal e idler, respectivamente. Tais índices rotulam os estados de MAO dos fótons envolvidos no processo. Na figura 3.5 apresentamos um esquema da geometria da CPD espontânea que será utilizado em nossos cálculos.

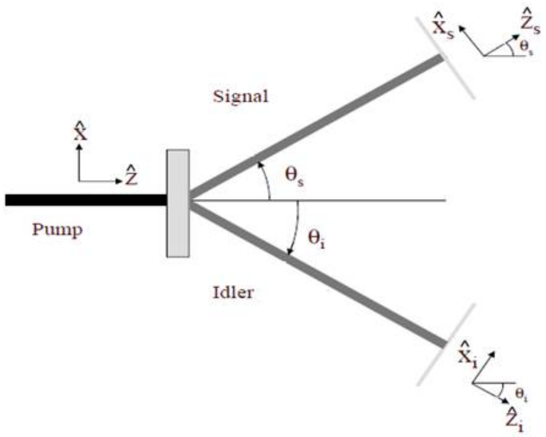


Figura 3.5: Esquema do processo de CPD, mostrando as direções de propagação do pump, signal e idler.

Como mostrado na seção 3.1, podemos escrever o estado quântico $|\psi\rangle$ dos fótons gêmeos gerados na CPD da seguinte forma:

$$|\psi\rangle = \alpha|0,0\rangle - \beta \int_0^\tau dt H_I(t)|0,0\rangle, \tag{3.25}$$

sendo $|0,0\rangle$ o estado de vácuo e H_I o hamiltoniano de interação.

O campo do pump será tratado classicamente e escrito como

$$\mathbf{E}_p(x,y,z,t) = \hat{e}_p \int d\mathbf{q}\hat{\Phi}(\mathbf{q}) exp[ik_p z + i\mathbf{q}.\mathbf{x} - i\omega_p t] + c.c, \tag{3.26}$$

onde ω_p é a frequência amgular do pump, $k_p(\mathbf{q}) = \sqrt{(\omega_p n_p/c)^2 - |\mathbf{q}|^2}$ é o vetor de onda longitudinal, $\mathbf{q}$ é o vetor de onda transverso e $\hat{\Phi}(\mathbf{q})$ é o espectro angular do pump no cristal. Por causa das condições de casamento de fase impostas pelo cristal, os vetores de onda dos modos signal e idler são definidos a partir de um vetor de onda central de forma que $\mathbf{k}_s = \mathbf{k}_s^0 + \triangle\mathbf{k}_s$ e $\mathbf{k}_i = \mathbf{k}_i^0 + \triangle\mathbf{k}_i$, com $|\triangle\mathbf{k}_s| \ll |\mathbf{k}_s^0|$ e $|\triangle\mathbf{k}_i| \ll |\mathbf{k}_i^0|$. Os vetores centrais $\mathbf{k}_s^0$ e $\mathbf{k}_i^0$ são definidos pelos ângulos azimutais $\varphi_s^0 = 0$ e $\varphi_i^0 = \pi$ e os ângulos polares θ_s^0 e θ_i^0. Desta forma, os vetores centrais podem ser escritos como:

$$\mathbf{k}_s^0 = (\omega_s m_s/c)[sin\theta_s^0\hat{x} + cos\theta_s^0\hat{z}] \tag{3.27}$$

e

$$\mathbf{k}_i^0 = (\omega_i m_i/c)[-sin\theta_i^0\hat{x} + cos\theta_i^0\hat{z}]. \tag{3.28}$$

Os incrementos nos vetores de onda $\triangle\mathbf{k}_s$ e $\triangle\mathbf{k}_i$, podem ser expressos em termos das componentes de frequência transversais p, q como $\triangle\mathbf{k}_s = p_s cos\theta_s\hat{x} + q_s\hat{y} - p_s sin\theta_s\hat{z}$ e $\triangle\mathbf{k}_i = p_i cos\theta_i\hat{x} + q_i\hat{y} - p_i sin\theta_i\hat{z}$ [27]. Adotando a configuração **tipo I** para a CPD espontânea caso degenerado, $\theta_s^0 = \theta_i^0$ e $\omega_s = \omega_i$ e todas as aproximações estudadas anteriormente, podemos escrever o estado final dos fótons signal e idler como:

$$|\psi\rangle \sim const \int dp_s dq_s dp_i dq_s \Phi[cos\theta_s(p_s+p_i),(q_s+q_i)]\hat{a}_s^\dagger(p_s+q_s)\hat{a}_i^\dagger(p_i+q_i)|0,0\rangle, \tag{3.29}$$

onde estamos interessados apenas nos estados pós selecionados. Esse estado é uma superposição coerente de um número infinio de autoestados dos operadores de MAO que serão representados pelos modos LG e Bessel estudados no capítulo 1.

Determinaremos a seguir as amplitudes de probabilidade de encontrarmos os fótons signal e idler em determinados estados de MAO. Para isso, vamos decompor o estado final na base de autoestados de MAO descritos por modos LG. Assim:

$$|\psi\rangle = \sum_{l_s,p_s}\sum_{l_i,p_i} C_{l_s,l_i}|l_s,p_s\rangle|l_i,p_i\rangle. \tag{3.30}$$

Desta forma, utilizando a condição de normalização $\langle\psi|\psi\rangle$=1, obtemos as amplitudes de probabilidade para os modos LG através da seguinte expressão:

$$C_{l_s,l_i} \sim const \int dp_s dq_s dp_i dq_s \Phi[cos\theta_s(p_s+p_i),(q_s+q_i)][LG_p^l(p_s,q_s)]^*[LG_p^l(p_i,q_i)]^*, \tag{3.31}$$

onde $LG_p^l(p,q)$ é a transformada de Fourier de $LG_p^l(x,y)$. Esta expressão pode ser escrita no domínio espacial como [15]:

$$C_{l_s,l_i} \sim const \int dxdy\Phi\left(\frac{x}{cos\theta_s},y\right)[LG_p^l(x,y)]^*[LG_p^l(x,y)]^*, \tag{3.32}$$

onde $\Phi(x,y)$ é a distribuição de amplitude espacial transversa.

Os cálculos das amplitudes de probabilidade não são simples de serem realizados analiticamente. Portanto, realizamos os cálculos numéricos usando o programa MATLAB. Vamos avaliar a eq. (3.32) utilizando como pump um modo LG com $l_p = 4$ e variando os valores de l_s e l_i entre -1 e 5. Os modos do feixes signal e idler também são escolhidos sendo modos LG. Os valores das amplitudes de probabilidade são normalizados pelo maior valor obtido. Para o caso $\theta_s = \theta_i = 0$, obtemos o gráfico com os valores do módulo ao quadrado dessas amplitudes. O resultado está mostrado na figura 3.6. Note que apenas as probabilidades no qual l_i e l_s satisfazem a lei de conservação dada na eq. (3.24) aparecem na figura. Como exemplo, escolhendo o estado com $l_s = 1$ e $l_1 = 3$, claramente observamos que este estado satizfaz a lei de conservação regida pela eq. (3.24). Portanto, verificamos que a lei de conservação do MAO, no regime colinear, é válida para os modos Laguerre-Gaussianos.

Podemos fazer a mesma análize utilizando como pump, signal e idler feixes Bessel com $l_p = 4$ para descrever os estados de MAO. O resultado está mostrado na figura 3.7. Observamos que a conservação do MAO para essa classe de feixe no regime colinear é confirmada.

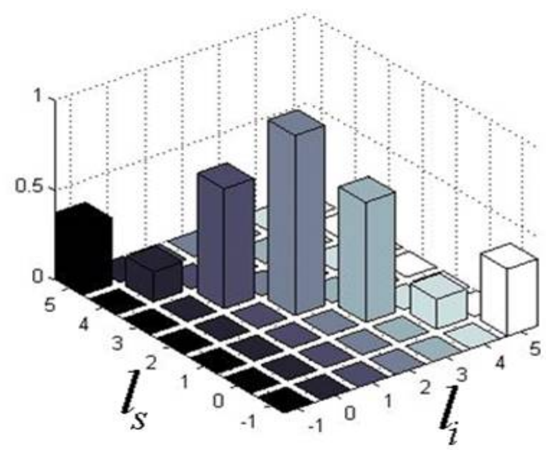


Figura 3.6: Probabilidade $|C_{l_s,l_i}|^2$ de encontrarmos o estado $|l_s;l_i,\rangle$, utilizando como pump um modo LG com $l_p = 4$ e $\theta_s = \theta_i = 0$.

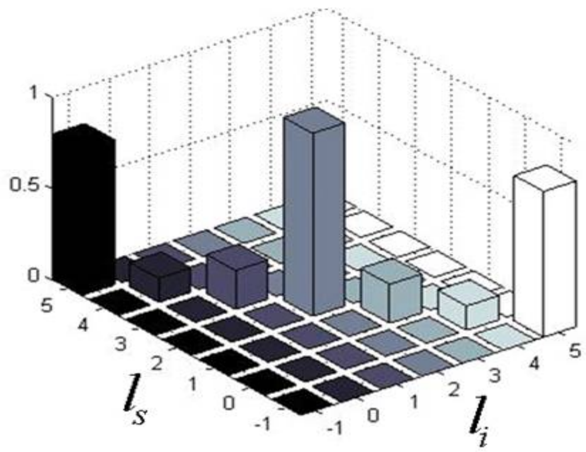


Figura 3.7: Probabilidade $|C_{l_s,l_i}|^2$ de encontrarmos o estado $|l_s;l_i,\rangle$, utilizando como pump um modo Bessel com $l_p = 4$ e $\theta_s = \theta_i = 0$.

Vejamos agora os casos em que a geometria dos fótons convertidos na CPD é não-colinear, ou seja, $\theta_s = \theta_i = 45^o$ e $\theta_s = \theta_i = 60^o$, mantendo $l_p = 4$. Como foi feito anteriormente, calculamos numericamente as amplitudes de probabilidade C_{l_s,l_i} primeiramente para os modos LG, figuras (3.8) e (3.9), e em seguida para os modos Bessel figuras (3.10) e (3.11). Para estes casos, observamos uma violação na lei de conservação do MAO. Note, por exemplo, se escolhermos $l_s = l_i = 1$ na figura (3.8) e (3.9), observamos que este estado não satisfaz a lei de conservação regida pela eq. (3.24). Essa violação é observada porque o perfil do pump, transferido para os fótons gêmeos, é deformado a medida que aumentamos o ângulo de emissão dos fótons gêmeos [28]. As figuras 3.12 (a-c) e 3.13 (a-c)

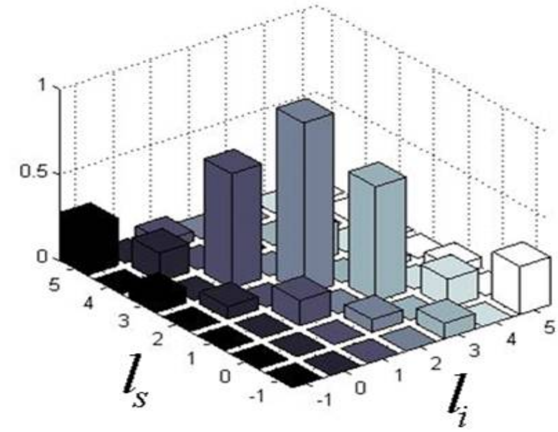


Figura 3.8: Probabilidade $|C_{l_s,l_i}|^2$ de encontrarmos o estado $|l_s;l_i,\rangle$, utilizando como pump um modo LG com $l_p = 4$ e $\theta_s = \theta_i = 45^o$.

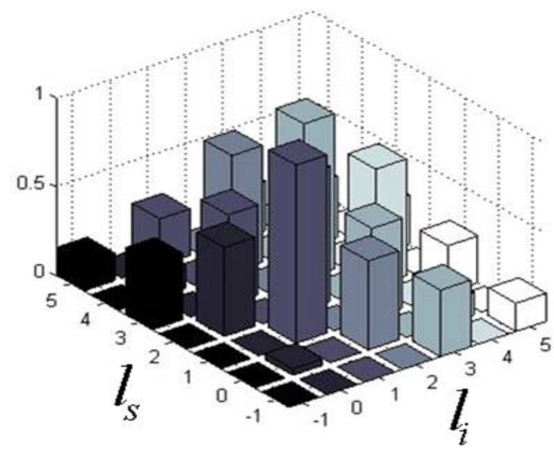


Figura 3.9: Probabilidade $|C_{l_s,l_i}|^2$ de encontrarmos o estado $|l_s;l_i,\rangle$, utilizando como pump um modo LG com $l_p = 4$ e $\theta_s = \theta_i = 60^o$.

ilustram os perfis de intensidade do pump para os feixes LG e Bessel, respectivamente. Notamos que em ambos os casos o perfil apresenta uma quebra da sua simetria cilíndrica.

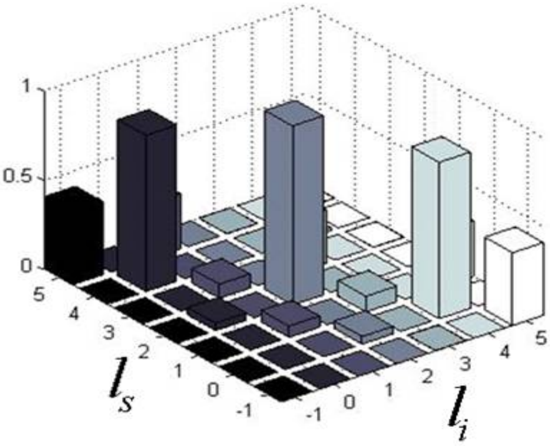


Figura 3.10: Probabilidade $|C_{l_s,l_i}|^2$ de encontrarmos o estado $|l_s; l_i,\rangle$, utilizando como pump um modo Bessel com $l_p = 4$ e $\theta_s = \theta_i = 45^o$.

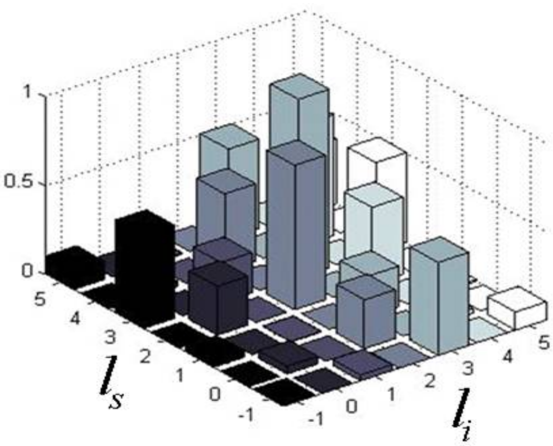


Figura 3.11: Probabilidade $|C_{l_s,l_i}|^2$ de encontrarmos o estado $|l_s; l_i,\rangle$, utilizando como pump um modo Bessel com $l_p = 4$ e $\theta_s = \theta_i = 60^o$.

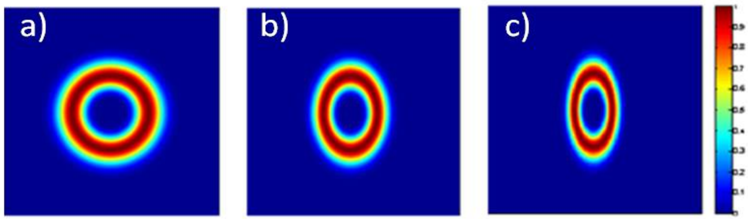


Figura 3.12: Perfis de intensidade do pump $l_p = 4$, que é transferido para o estado dos fótons gêmeos, para:(a) $\theta = 0$, (b) $\theta = 45^o$ e (c) $\theta = 60^o$ (feixe Laguerre-Gauss).

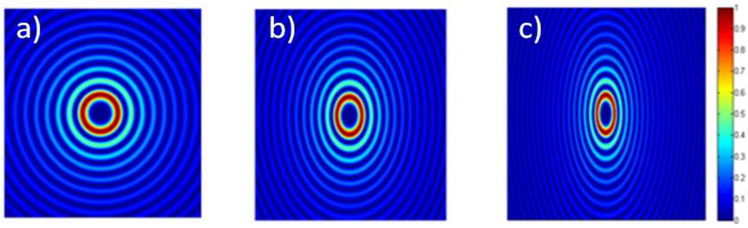


Figura 3.13: Perfis de intensidade do pump $l_p = 4$, que é transferido para o estado dos fótons gêmeos, para:(a) $\theta = 0$, (b) $\theta = 45^o$ e (c) $\theta = 60^o$ (feixe Bessel).

Podemos avaliar a violação da lei de conservação do MAO projetando o estado do fóton signal em um estado com MAO bem definido e adicionando todas as amplitudes de probabilidade não nulas de encontrar o fóton idler em um dado valor l_i. Ou seja, calculamos a quantidade $\delta = \sum_{l \neq l_p} P_l$, com $P_l = |C_l^2| / \sum\limits_{i=-\infty}^{+\infty} |C_i^2|$, que nos fornece a probabilidade de detectar uma coincidência entre um fóton signal com momento angular não paraxial e um fóton idler com momento angular paraxial $l_i \hbar$. A figura 3.14 mostra os valores de δ obtidos para o pump com $l_p = 4$ e $l_p = 10$ em função de θ_s. Na figura 3.14, vemos que a violação na conservação do MAO para um pump com $l_p = 4$ se torna percepitível a partir de 10^o e vai crescendo de maneira acentuada de acordo com o aumento do ângulo de emissão dos fótons gêmeos. Para o caso em que $l_p = 10$ essa violação é observada a partir de um ângulo de aproximadamente 20^o. Observamos também que a violação atinge um valor máximo em 35^o quando $l_p = 4$ e em 70^o quando $l_p = 10$.

Embora observamos a violação da conservação do MAO na CPD espontânea no regime não-colinear, tanto para os feixes Laguerre-Gaussianos quanto para os feixes Bessel, os resultados encontrados serão aplicados no estudo de informação e computação quântica como veremos na próxima secção.

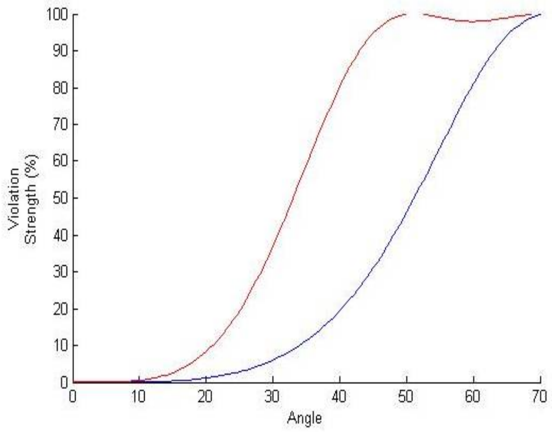


Figura 3.14: Violação da lei de conservação $l_s + l_i = l_p$ para um pump com $l_p = 4$ e $l_p = 10$

3.4 Geração de Estados Emaranhados Multidimensionais Usando o MAO e a CPD

A conservação do momento linear e da energia na CPD espontânea permite que possamos gerar estados de fótons emaranhados nestes graus de liberdade. Além disso, é possível gerar fótons emaranhados em polarização, com aplicações em testes fundamentais da mecânica quântica e informação quântica. Neste caso, são gerados estados emaranhados bidimensionais, correspondendo aos estados de Bell.

A observação da conservação do MAO na CPD espontânea permite a geração de estados emaranhados neste grau de liberdade, em particular, a geração de estados emaranhados multidimensionais, expandindo as possibilidades de estudo sobre fundamentos de mecânica quântica e as aplicações do emaranhamento na área de informação quântica. Devido à violação do MAO no processo de CPD espontânea no regime não colinear, podemos ter acesso a esses estados emeranhados com dimensões maiores daquelas obtida quando ocorre a conservação. Por exemplo, para o caso onde ocorre a conservação do MAO ($\theta_s = \theta_i = 0$) figura 3.9, nossos resultados mostram que podemos ter acesso, efetivamente, a um estado emaranhado de dimensão 3, como descrito na equação abaixo:

$$|\psi\rangle = \alpha|l_s = 5, l_i = -1\rangle + \beta|l_s = 2, l_i = -2\rangle + \gamma|l_s = -1, l_i = 5\rangle. \qquad (3.33)$$

Estamos considerando um estado efetivo como aquele constituído por auto-estados de

MAO com maior amplitude de probabilidade. Já para o caso em que ($\theta_s = \theta_i = 60^o$) fig. 3.11, efetivamente, podemos ter acesso a estados emeranhados de dimensão 7, como mostrado na equação abaixo:

$$|\psi\rangle = \alpha|l_s = 5, l_i = 3\rangle + \beta|l_s = 4, l_i = -2\rangle + \gamma|l_s = 3, l_i = 3\rangle$$
$$+\delta|l_s = 2, l_i = 2\rangle + \kappa|l_s = 2, l_i = 4\rangle + \omega|l_s = 3, l_i = 5\rangle + \epsilon|l_s = 4, l_i = 4\rangle. \quad (3.34)$$

Tais estados são de grande importância no estudos de protocolos para implementação de algoritmos quânticos.

3.5 Proposta para a Observação da Violação do MAO na CPD Estimulada

Já foi demonstrado que o MAO da luz é conservado no processo de CPD estimulada no regime colinear [29]. O experimento consiste em preparar o pump ou o feixe auxiliar em um modo LG_0^1 e analisar o feixe idler, ou seja, medir sua distribuição transversal de intensidade e sua estrutura de fase. O arranjo experimental é mostrado na figura 3.15, onde o pump é um modo LG_0^1 e o feixe auxiliar é um modo LG_0^0. Desta forma, Após a geração dos fótons gêmeos pelo processo de CPD estimulada, o feixe complementar passa por um interferômetro de Michelson, desalinhado na direção transversal e, em seguida, é detectado.

O interferômetro de Michelson é utilizado para caracterizarmos os feixes com MAO, como vimos no capítulo 1. As figuras 3.16(a) e 3.16(b) mostram a medida da saída do interferômetro. Notamos que o padrão de interferência para do feixe idler na saída do interferômetro é característico de um feixe LG de primeira ordem.

Como podemos observar, no estudo da CPDE apenas medidas de intensidade e de estrutura de fase são necessárias para caracterizar o estado de MAO do feixe gerado. Assim, podemos estudar experimentalmente, de forma mais simples, a violação da lei de conservação do MAO no processo de conversão paramétrica descendente usando a CPDE no regime não colinear. Ao contrário da CPD, onde a verificação da violaçao da lei de conservação no regime não colinear faz uso de detecção dos fótons gêmeos em coincidência

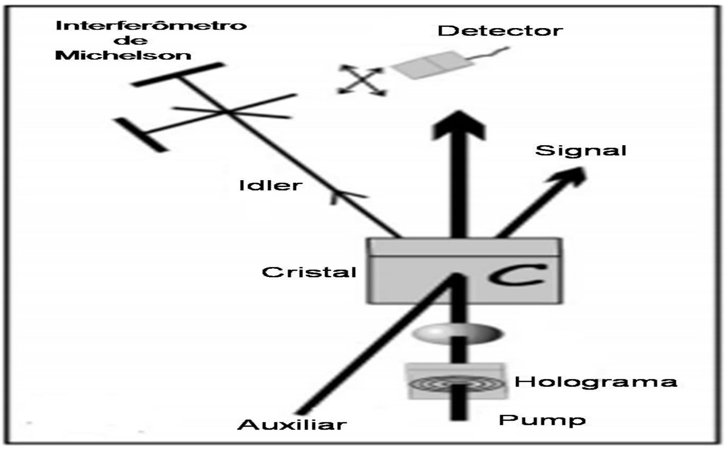
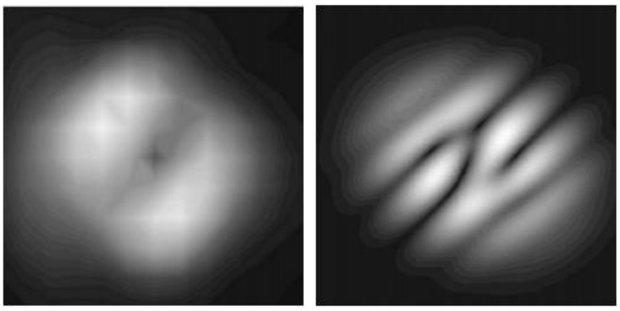


Figura 3.15: Arranjo experimental para a conservação do MAO na CPDE



(a) (b)

Figura 3.16: a) perfil de intensidade do feixe idler para um pump LG_0^1 b) Padrão de interferência na saída do interferômetro de Michelson.

após discriminação dos estados de MAO, na CPDE podemos simplesmente medir o perfil de intensidade do feixe idler e sua estrutura de fase, como realizado na Ref. [29]. Note também que podemos calcular teoricamente tanto o perfil de intensidade como a estrutura de fase do feixe idler usando os procedimentos teóricos apresentados nas seções anteriores.

3.6 Conclusão

Apresentamos os processos óticos não lineares de conversão de frequência, CPD e CPDE. Vimos que no regime colinear a lei de conservação do MAO é obedecida tanto para o caso em que descrevemos os estados de MAO usando feixes Laguerre-Gauss quanto feixes Bessel. Já no regime não-colinear, a conservação do MAO é violada para ambos os feixes.

Apresentamos também uma proposta para o estudo da violação da lei de conservação do MAO na conversão paramétrica descendente usando o processo de CPDE. Embora tenhamos uma violação da lei de conservação do MAO no regime não-colinear, podemos aproveitar este efeito para gerar estados emaranhados multidimensionais neste grau de liberdade com dimensões maiores do que quando utilizamos a CPD no regime colinear.

Capítulo 4

PORTA LÓGICA C-NOT USANDO MAO E POLARIZAÇÃO

Neste capítulo, apresentaremos alguns conceitos básicos para computação quântica. Apresentaremos algumas implementações da porta lógica C-NOT. Em particular, realizaremos a implementação de uma porta C-NOT utilizando polarização e MAO de um único fóton. Por fim, apresentaremos algumas aplicações da porta C-NOT.

4.1 Computação Quântica e Portas Lógicas Universais

4.1.1 Qubit

Assim como a computação clássica codifica a informação na linguagem dos bits (unidade básica de informação com valores 0 ou 1, a computação quântica codifica a informação utilizando sistemas de dois níveis normalmente representados na base $|0\rangle$ ou $|1\rangle$. Esses estados recebem o nome de bit quântico ou qubit. Sendo esses estados vetores do espaço de Hilbert, surge então a primeira diferença fundamental entre os bits clássicos e os bits quânticos: enquanto que os bits clássicos estão exclusivamente nos estados 0 ou 1, os bits quânticos admitem estados de superposições linear, ou seja, podemos ter um bit quântico no estado:

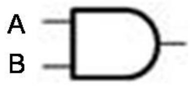
$$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle. \tag{4.1}$$

Dessa forma, a computação quântica não dispõe de dois estados apenas, mas de tantos quantos forem as combinações possíveis de α e β (números complexos) que satisfaçam a condição de normalização $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ [30].

4.1.2 Portas Lógicas

Operações lógicas podem ter um alto nível de complexidade, porém são sempre baseadas em operações lógicas mais elementares. Estas operações lógicas elementares são executadas por componentes chamados de portas lógicas. Portas lógicas são circuitos cujo sinal de saída depende dos sinais de entrada, de acordo com a operação lógica. Em 1864 George Boole criou o que conhecemos hoje como Álgebra Booleana. As operações da álgebra booleana podem ser representados de várias formas. É frequente serem simplesmente escritas como E, OU ou NÃO (são mais comuns os seus equivalentes em inglês: AND, OR e NOT). As portas lógicas que executam tais operações são as portas elementares encontradas na computação clássica. Qualquer operação lógica pode ser construída a partir da combinações dessas portas. A esse conjunto de portas lógicas damos o nome de portas universais. A porta lógica AND é uma operação lógica que resulta em um valor lógico 1 se e somente se todos os valores de entrada tem um valor 1 e resulta em um valor lógico 0 para as demais combinações dos velores de entrada. Equivale a uma multiplicação. A porta lógica OR é uma operação lógica em dois operandos que resulta em um valor lógico 0 se e somente se todos os valores de entrada tem um valor 0 e resulta em um valor lógico 1 para as demais combinações dos valores de entrada. A porta lógica NOT é uma porta que implementa a negação lógica, se temos o valor lógico 1 na entrada a saída será o valor lógico 0 e vice-versa. A fig (4.2 a-c) mostra os símbolos destas portas bem como suas tabelas verdades.

Em 1995, Barenco e colaboradores [31], demostraram que, analogamente ao que ocorre em um computador clássico, no modelo do computador quântico qualquer ação computacional pode ser implementada a partir de portas elementares. Em computação quântica também é possivel demonstrar que um conjunto universal de portas lógicas pode ser representado, por exemplo, utilizando-se as portas conhecidas como Hadamard, T e C-NOT.

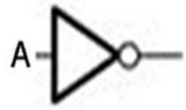


A	B	SAÍDA
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(a) AND

A	B	SAÍDA
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

(b) OR



A	SAÍDA
0	1
1	0

(c) NOT

Figura 4.1: Tabelas verdade. Em (a) Porta lógica AND. Em (b) Porta lógica OR e em (c) Porta lógica NOT.

Por outro lado, existem diferenças entre as portas clássicas e quânticas, sendo a principal delas o fato de que certas operações clássicas, como por exemplo a AND ou a OR, são irreversíveis, ao passo que as operações quânticas são sempre reversíveis, pois estão associadas a transformações unitárias. Existem vários tipos de portas lógicas quânticas, como portas de 1 qubit, 2 qubits e N qubits. Porém estamos interresados apenas nas portas lógicas Hadamard e C-NOT.

Portas Lógicas de 1 qubit

Essas são portas que admitem apenas um qubit na entrada. Assim sendo, o conjunto de portas lógicas de 1 qubit é tão grande quanto o grupo de matrizes unitárias 2×2. Essa é uma característica de certa forma surpreendente das portas lógicas quânticas, dado que no contexto clássico só existe uma porta de 1 bit: a porta NOT. Todas as matrizes de Pauli, por exemplo, podem ser encaradas como portas lógicas quânticas de 1 qubit:

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

onde estamos usando a base computacional nas expressões das matrizes acima. Aqui os vetores da base computacional representam os spins para cima ou para baixo na direção $\hat{z}$ ($|0\rangle = |\uparrow\rangle$ e $|1\rangle = |\downarrow\rangle$). Note que a matriz σ_x desempenha o papel da porta clássica NOT:

$$\sigma_x|0\rangle = |1\rangle \tag{4.2}$$
$$\sigma_x|1\rangle = |0\rangle. \tag{4.3}$$

Aqui abordaremos duas importantes portas lógicas de 1 qubit, a porta **T** (também conhecida como porta $\frac{\pi}{8}$) e a porta **Hadamard**:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix}, \mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

A porta **T** simplesmente introduz uma fase $e^{i\frac{\pi}{4}}$ ao qubit de saída quando o qubit de entrada for $|1\rangle$, e funciona como uma identidade para a entrada $|0\rangle$. Já a porta **Hadamard** opera menos trivialmente, de acordo com as igualdades abaixo:

$$\mathbf{H}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \tag{4.4}$$
$$\mathbf{H}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle). \tag{4.5}$$

A importância da porta **Hadamard** fica evidente nessas equações, afinal ela transforma estados ordinários como $|0\rangle$ e $|1\rangle$ em estados de superposição, o que faz com que esta porta tenha vasta aplicação na elaboração de algoritmos quânticos.

Portas lógicas de 2 qubits controladas

Assim como o conjunto de portas de 1 qubit constitui-se o grupo das matrizes 2×2, as portas de 2 qubits são representadas pelo grupo das matrizes unitárias 4×4. Entretanto, nesta dissertação estamos interessados apenas nas portas de 2 qubits controladas, isto é, aquelas em que um dos qubits é usado como controle sobre a execusão de uma certa operação sobre o outro qubit. O primeiro qubit é chamado de qubit controle e o segundo de qubit alvo. Para denotar as portas de dois qubits controladas, normalmente acrescenta-se a letra **C** (controle) na frente do nome da porta de um qubit associada. Assim, de forma geral, as portas de dois qubits controladas são escritas como **C-U**, onde **U** é uma matriz unitária qualquer. Na base computacional de dois qubits $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$, as portas controladas são dadas em sua forma mais geral por:

$$\mathbf{C\text{-}U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_{11} & u_{12} \\ 0 & 0 & u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}$$

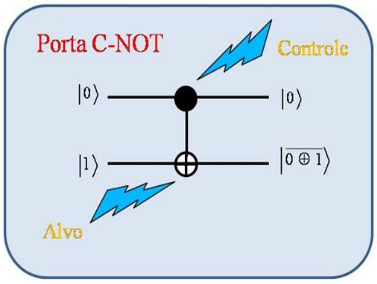
A aplicação dessa matriz aos vetores da base esclarece o funcionamento das portas controladas:

$$\begin{aligned} \mathbf{C\text{-}U}|00\rangle &= |00\rangle \\ \mathbf{C\text{-}U}|01\rangle &= |01\rangle \\ \mathbf{C\text{-}U}|10\rangle &= |1\rangle \otimes \mathbf{U}|0\rangle \\ \mathbf{C\text{-}U}|11\rangle &= |1\rangle \otimes \mathbf{U}|1\rangle \end{aligned}$$

Fica óbvio, a partir destas equações, que a operação **U** só se aplica ao qubit alvo se o qubit controle for $|1\rangle$, caso contrário o estado não sofre qualquer transformação. Aqui, estamos interessados no estudo da porta **C-NOT** quântica, onde sua matriz é mostrada a seguir.

$$\mathbf{C\text{-}NOT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A porta **C-NOT** quântica possui duas entradas e duas saídas, estando os estados de saída condicionados aos de entrada de acordo com a lógica da porta fig. 4.2. Como podemos notar, a lógica envolvida na porta C-NOT é a inversão do qubit alvo toda vez que o qubit controle for 1, mantendo sempre o qubit controle inalterado.



Entrada	Saída
$\|00\rangle$	$\|00\rangle$
$\|01\rangle$	$\|01\rangle$
$\|10\rangle$	$\|11\rangle$
$\|11\rangle$	$\|10\rangle$

Figura 4.2: Porta Lógica C-NOT e sua tabela verdade.

4.2 Implementação de Circuitos Óticos para Computação Quântica

Desde as primeiras idéias sobre computação quântica, vários sistemas físicos demonstrando a implementação de portas lógicas e algoritimos quânticos foram exeplorados. Entre eles se encontram , pontos quânticos, íons aprisionados, ressonância magnética nuclear (RMN) e junções supercondutoras. Em 2001, Knill, Laflamme e Milburn [32] mostraram que com sistemas óticos lineares, fontes de único fóton e detectores é possível implementar circuitos óticos para computação quântica. Circuitos óticos são arranjos formados pela associação de componentes óticos tais como espelhos, divisores de feixe e placas de ondas, que realizam uma dada operação sobre feixes de luz ou estados de um fóton. Desde então, vários grupos propuseram e demonstraram várias portas lógicas controladas realizadas com ótica linear. Por exemplo, Fiorentino e colaboradores [33, 34] implementaram uma porta C-NOT utilizando polarização e momento de um único fóton. Oliveira e colaboradores [35] implementaram uma porta C-NOT para um único fóton utilizando polarização e modos espaciais transversos do campo eletromagnético.

Recentemente, uma proposta teórica para a implementação da porta lógica CNOT, usando polarização e MAO de um único fóton foi apresentada [16]. Nesta proposta, o grau de liberdade de polarização foi utilizado como qubit de controle, enquanto o grau de liberdade de MAO foi utilizado como qubit alvo, como mostra a tabela da fig. 4.3.

Qubit Alvo	Qubit Controle
$l = par \equiv qubit\, 0$	$H \equiv qubit\, 0$
$l = ímpar \equiv qubit\, 1$	$V \equiv qubit\, 1$

Figura 4.3: Tabela de implementação para a porta C-NOT

Nesta proposta, luz polarizada horizontalmente é transmitida através de dois divisores de feixes polarizados, denominados de PBS_1 e PBS_2, sem modificar seu MAO. Entretanto, luz polarizada verticalmente é refletidada pelo primeiro divisor de feixe polarizado (PBS), então passa através de um holograma gerado por computador (HGC), com $\delta l = 1$, que muda paridade do índice azimutal l e finalmente é refletida ou transmitida dependendo da polarização do feixe que chegará ao segundo PBS. A fig. 4.4 ilustra o aparato experimental para esta proposta. Apresentaremos na próxima seção uma realização experimental alternativa para porta C-NOT utilizando apenas elementos óticos lineares.

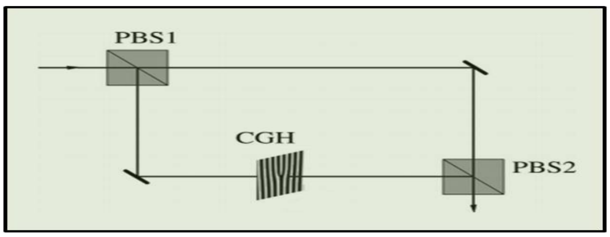


Figura 4.4: Proposta para realização da Porta lógica C-NOT

4.3 Realização Experimental da Porta Lógica C-NOT usando MAO e Polarização

Nesta seção, apresentaremos uma proposta alternativa para a realização da porta lógica CNOT, utilizando apenas elementos lineares. Nossa proposta foi demonstrada experimentalmente, onde o grau de liberdade de polarização atua como qubit de controle, e o de MAO atua como qubit alvo. Na fig 4.5 está mostrada a tabela de implementação para nosso circuito.

Qubit Alvo	Qubit Controle
$l = +1 \equiv qubit\,0$	$H \equiv qubit\,0$
$l = -1 \equiv qubit\,1$	$V \equiv qubit\,1$

Figura 4.5: Implementação da Porta lógica C-NOT.

Aparato Experimental

O experimento consiste em preparar estado possuindo MAO através da técnica de geração de feixes possuindo MAO mostrada na seção 3.3. Para gerarmos os estados de MAO utilizamos um laser de argônio (532nm, 10mW e polarizado verticalmente) que ilumina um holograma gerado por computador. Após o holograma, feixes LG de diferentes ordens são gerados.

Neste trabalho estamos interessados somente no feixe possuindo MAO de $+\hbar$ por fóton, $l = +1$. O feixe selecionado passa pelo circuito ótico, que é composto por dois divisores de feixe polarizados, cuja finalidade é refletir luz verticalmente polarizada e transmitir lus horizontalmente polarizada, um espelho e um penta prisma. Nosso circuito ótico para a implementação da porta C-NOT está mostrado na figura 4.6. A saída do circuito ótico é monitorada por uma câmera CCD (Charge Coupled Device). A verificação na saída do nosso circuito foi feita utilizando um método de caracterização via difração apresentado na secção 2.3.

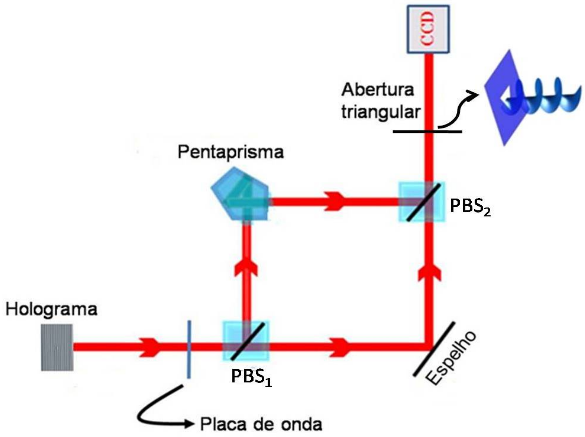


Figura 4.6: Aparato experimental da Porta lógica C-NOT

Entrada		Saída	
H;	$l = 1$	H;	$l = 1$
H;	$l = -1$	H;	$l = -1$
V;	$l = 1$	V;	$l = -1$
V;	$l = -1$	V;	$l = 1$

Figura 4.7: Tabela verdade para a implementação da Porta lógica C-NOT usando Polarização e MAO

Resultados

Para demonstrarmos o funcionamento do circuito ótico iremos verificar se a respectiva tabela verdade, mostrada na fig 4.8. Iremos preparar quatro estados distintos de um único feixe de luz, com MAO $l = \pm 1$ e polarização vertical ou horizontal, ou seja, $|l = +1, V\rangle$, $|l = +1, H\rangle$, $|l = -1, H\rangle$ e $|l = -1, V\rangle$.

Inicialmente, preparamos o primeiro estado com $l = +1$ e polarização vertical. Este feixe é refletido pelo primeiro divisor de feixe polarizado PBS_1, passa por um penta prisma (elemento ótico que inverte a ordem do índice azimutal l do feixe) e em seguida é novamente refletido pelo segundo PBS_2, como mostra a figura 4.9. A figura 4.10 mostra o perfil do feixe na saída da porta bem como seu padrão de difração após passar pela abertura triangular. Desta forma, verificamos através do padrão de difração do feixe que o estado na saída do circuito possui $l = -1$ e a polarização permanece vertical.

Para o segundo estado de entrada temos um feixe com $l = +1$ e polarização horizontal. A polarização foi modificada utilizando uma placa de onda na entrada do circuito. Este feixe é então transmitido pelo primeiro divisor de feixe PBS_1 e em seguida é novamente

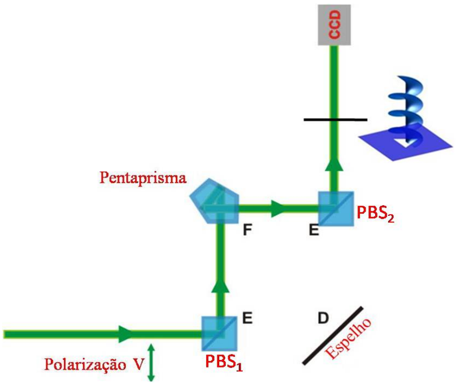


Figura 4.8: Aparato experimental da porta C-NOT com um feixe LG_1^0 polarizado verticalmente na entrada.

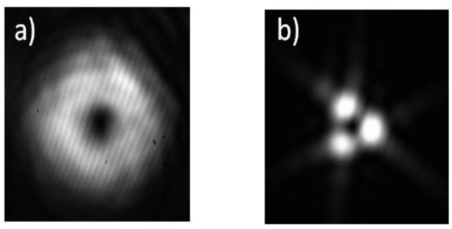


Figura 4.9: a) perfil transversal do feixe na saída da porta C-NOT; b) Padrão de difração após passar por uma fenda triangular mostrando que $l = -1$

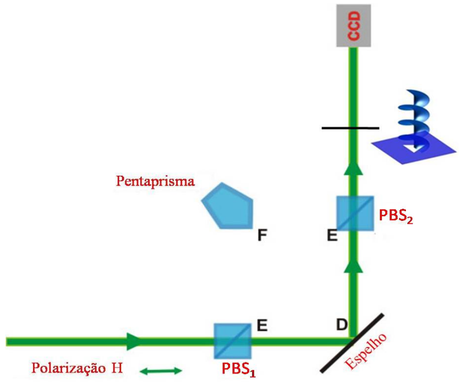


Figura 4.10: Aparato experimental da porta C-NOT com um feixe LG_1^0 polarizado horizontalmente na entrada.

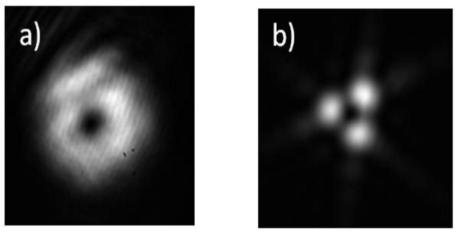


Figura 4.11: a) perfil transversal do feixe na saída da porta C-NOT; b) Padrão de difração após passar pela abertura triangular mostrando que $l = +1$

transmitido pelo segundo divisor sem sofrer nenhuma transformação, como mostra a fig. 4.11. Com isso temos na saída do nosso circuito um estado com $l = +1$ e polarização horizontal. A fig. 4.12 mostra o perfil do feixe na saída da porta bem como seu padrão de difração após passar pela abertura triangular.

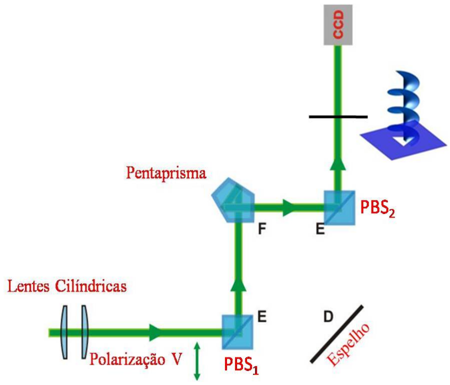


Figura 4.12: Aparato experimental da porta C-NOT com um feixe LG^0_{-1} polarizado verticalmente na entrada.

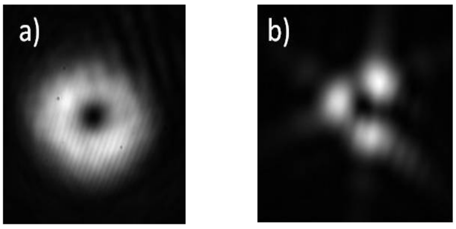


Figura 4.13: a) perfil transversal do feixe na saída da porta C-NOT; b) Padrão de difração após passar por uma fenda triangular mostrando que $l = +1$

Para preparar o terceiro estado de entrada, modificamos o índice azimutal l utilizando um par de lentes cilíndricas. Desta forma, temos um estado com $l = -1$ e polarização vertical. Como anteriormente, o feixe é refletido pelo primeiro divisor de feixe, passa pelo pentaprisma e é novamente refletido pelo segundo divisor de feixe, como mostra a fig. 4.13. Assim, temos na saída do nosso circuito um estado com $l = +1$ e com polarização horizontal. Na fig. 4.14 temos o perfil do feixe na sáida do circuito, bem como o seu padrão de difração após passar pelo abertura triangular.

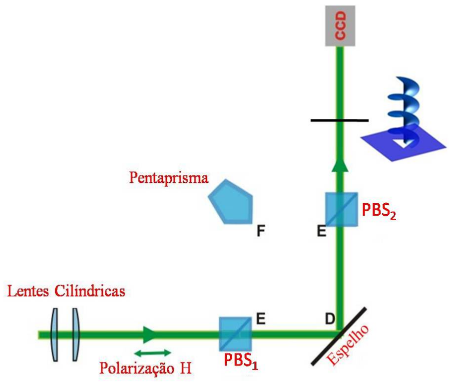


Figura 4.14: Aparato experimental da porta C-NOT com um feixe LG^0_{-1} polarizado horizontalmente na entrada.

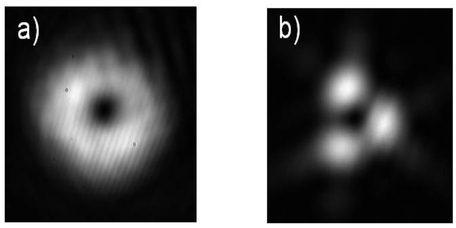


Figura 4.15: a) perfil transversal do feixe na saída da porta C-NOT; b) Padrão de difração após passar por uma fenda triangular mostrando que $l = -1$

Por fim, preparamos nosso quarto estado com $l = -1$ e polarização horizontal. Desta forma, o feixe é transmitido pelo primeiro divisor de feixe sem sofrer nenhuma transformação e em seguida é novamente transmitido pelo segundo divisor, como mostra a fig. 4.15. Com isso, obtemos um estado com $l = -1$ e polarização horizontal na saída do circuito. Na fig. 4.16 temos o perfil do feixe na sáida do circuito, bem como o seu padrão de difração após passar pelo abertura triangular.

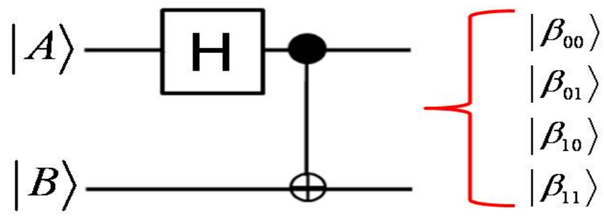


Figura 4.16: circuito para geração de estados emaranhados.

Desta forma, verificamos o funcionamento da porta lógica C-NOT utilizando MAO e polarização, como está mostrado na tabela verdade da fig 4.8. Vemos que o qubit alvo só é modificado quando o qubit controle tiver valor numérico 1, ou seja, possuir polarização vertical. Um fator relevante em nosso circuito é o fato da ausência de perdas, pois só utilizamos elementos óticos lineares. A ausência de perdas é importante para que possamos realizar geração de estados maximamente emaranhados sem a necessidade de utilizarmos algoritmos de destilação quântica.

4.4 Aplicação da Porta Lógica C-NOT para geração de estados emaranhados de um fóton

Geração de estados emaranhados de um fóton

Vamos considerar um circuito como o mostrado na fig. 4.17, que é composto de um porta Hadamard seguida de uma porta C-NOT, vamos considerar os quatro estados da base computacional $|00\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |11\rangle$ como estados iniciais para este circuito.

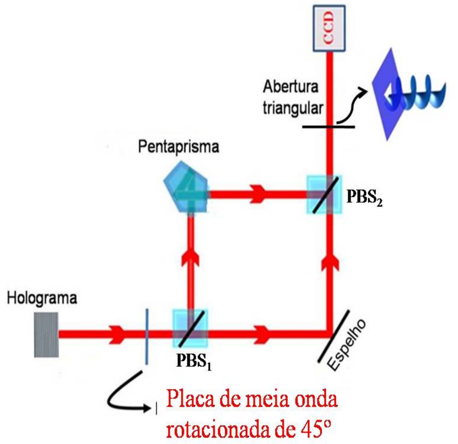


Figura 4.17: Arranjo experimental para geração de estado emaranhado de um único fóton utilizando a implementação da porta lógica C-NOT

O funcionamento deste circuito se dá da seguinte forma: Primeiro, a porta Hadamard transforma em estado simples em um estado de superposição. Assim, este estado atua como qubit controle na entrada da porta C-NOT, e o qubit alvo é invertido apenas quando o qubit controle é 1. Por exemplo, se o estado de entrada for $|00\rangle$, a porta Hadamard tranforma esse estado em uma superposição $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|0\rangle$ e em seguida a porta C-NOT nos fornece como estado de saída o estado $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$. Desta forma, os estados sa saída do circuito são:

$$|\beta_{00}\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}; \tag{4.6}$$

$$|\beta_{01}\rangle = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}; \tag{4.7}$$

$$|\beta_{10}\rangle = \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}; \tag{4.8}$$

$$|\beta_{11}\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}, \tag{4.9}$$

que são conhecidos como estado de Bell. Podemos construir um circuito igual ao da figura 4.17 implementando a porta Hadamard utilizando uma placa de meia onda rotacionada de 45° em nosso circuito da porta C-NOT, como mostrado na figura 4.18.

Desta forma, obteremos estados emaranhados de um único fóton em dois graus de liberdade, como por exemplo:

$$|\beta_{00}\rangle = \frac{|H, l = +1\rangle + |V, l = -11\rangle}{\sqrt{2}}; \tag{4.10}$$

$$|\beta_{01}\rangle = \frac{|H, l = -1\rangle + |V, l = +10\rangle}{\sqrt{2}}. \tag{4.11}$$

Tais estados podem ser úteis para o estudo de novos algoritmos quânticos como teletransporte e a porta lógica swap.

4.5 Conclusão

Neste capítulo apresentamos as idéias básicas da computação quântica, qubits e portas lógicas. Baseado na proposta de Knill, Laflamme e Milborn, implementamos um circuito ótico correspondente à porta lógica C-NOT. Como qubit controle utilizamos a polarização e como qubit alvo utilizamos o MAO de um único fóton. Por fim, discutimos uma aplicação de nosso circuito para a geração de estados emaranhados de um fóton.

Capítulo 5

CONCLUSÃO GERAL

Nesta dissertação de mestrado, estudamos o momento angular orbital nos processos de conversão paramétrica descendente espontânea e estimulada, bem como em informação quântica. No capítulo 2 estudamos a teoria do MAO, mostrando que este pode ser decomposto em duas componentes: o momento angular intrínseco e o momento angular orbital. Apresentamos também algumas técnicas de geração de feixes possuindo momento angular orbital como, por exemplo, a técnica através de hologramas gerados por computaror que foi utilizada no decorrer desta dissertação. Além disso, apresentamos algumas maneiras de como caracterizar esses feixes de luz, em particular utilizamos a técnica de caracterização via difração por uma abertura triangular. Os processos de conversão paramétrica foram estudados no capítulo 3. Neste capítulo, investigamos a questão da conservação do momento angular orbital na geometria não-colinear baseado nos trabalhos de Molina e colaboradores. Estendemos este trabalho para uma outra família de feixes possuindo momento angular orbital, denominados de feixe Bessel. Verificamos que a violação na geometria não colinear é observada independente da escolha do feixe, Laguerre-Gaussianos ou Bessel. Essa violação é decorrente da deformação do feixe pump, transferido para os fótons gêmeos, a medida que aumentamos o ângulo de emissão entre eles. Também apresentamos uma proposta experimental para observarmos a violação da conservação do MAO na conversão paramétrica descendente usando a CPDE, onde a realização experimental é mais simple. No capítulo 4 estudamos alguns conceitos básicos de computação quântica, como qubits e portas lógicas. Realizamos um circuito ótico para a implementação da porta C-NOT utilizando como qubit controle o grau de liberdade de polarização e como qubit alvo o grau de liberdade de momento angular orbital. Verificamos experimentalmente seu funcionamento e sua vantagem em relação ao trabalho de Li-Ping e colaboradores [16]. Por fim, mostramos uma aplicação do nosso circuito para geração de estados emaranhados de um fóton e em dois graus de liberdade.

Como perspectivas esperamos realizar o experimento do estudo da conservação do momento angular na conversão paramétrica descendente estimulada, onde mediremos o perfil de intensidade e a estrutura de fase do feixe idler para verificar a lei de conservação do momento angular. Pretendemos estudar novos algoritmos quânticos utilizando nosso circuito da porta lógica C-NOT, como por exemplo, teletransporte utilizando o estado emaranhado de um único fóton e a porta lógica SWAP.

Referências

[1] J. D. Jackson, Classical Electrodynamics, 3nd ed, Wiley, New York, (1999).

[2] L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw, and J. P. Woerdman, Phys. Rev. A **45**, 8185 (1992).

[3] J. Durnin, J. Opt. Soc. Am. A **4**, 651 (1987).

[4] P. A.Franken, A. E. Hill, C. W. Peters, and G. Weinreich, Phys. Rev. Lett., **118** (1961).

[5] J. Durnin, J. J. Miceli Jr., and J. H. Eberly, Phys. Rev. Lett. **58**, 1499 (1987).

[6] L. Mandel and E. Wolf, Optical Coherence and Quantum Optics. New York,: Cambrige University Press, (1995).

[7] D. N. Klyshko. JETP, 28:522, 1969.

[8] D.C. Burnham and D.L. Weinberg. Phys. Rev. Lett., 25:84, (1970).

[9] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, Phys. Rev. Lett. **47**, 777 (1935).

[10] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau et al. Phys.Rev. Lett., **70**, 1895 (1993).

[11] K. Mattle, H. Weinfurter, P. G. Kwiat, and A. Zeilinger, Phys. Rev. Lett. **76**, 4656 (1996).

[12] T. Jennewein, C. Simon, G. Weihs, H. Weinfurter, and A. Zeilinger, Phys. Rev. Lett. **84**, 4729 (2000).

[13] A. Mair, A. Vaziri, G. Weils, and A. Zeilinger Nature **412**, 313 (2001).

[14] H. H Arnaut and G.A. Barbosa, Phys. Rev. Lett. **85**, 286 (2000).

[15] G. Molina-Terriza, et al., Opt. Communication. **228**, 155 (2003).

[16] Li-Ping Deng, Haibo Wang, and Kaige Wang J. Opt. Soc. Am. B **24**, 2517 (2007).

[17] I. Freund, N. Shvartsman, Phys. Rev. A **50**, 5164 (1994).

[18] M.S.Soskin,V.N.Gorshkov,andM.V.Vasnetsov,Phys.Rev.A **56**, 4064 (1997).

[19] J.Durnin,J.J.MiceliJr.,andJ.H.Eberly,Phys.Rev.Lett. **58**, 1499 (1987).

[20] K. Volke-Sepulveda, V. Garcés-Chéz, S. Chávez-Cerda, J. Arlt, and K. Dholakia, J.Opt. B: Quantum and Semiclass. Opt. **4**, S82 (2002).

[21] J.Arlt,V.Garcés-Chávez,W.Sibbett,andK.Dholakia,Opt.Commun. **197**, 239(2001).

[22] V. Garcés-Chávez, D. McGloin, H. Melville, W. Sibbett, and K. Dholakia, Nature **419**, 145 (2002).

[23] R. A. Beth, Phys. Rev. 50, 115 (1936).L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw, and J. P. Woerdman, Phys. Rev. A 45, 8185 (1992).

[24] E. Yao, S. Franke-Arnold, J. Courtial, S. Barnett and M. Padgett. Opt. Soc. Am. **14**, 9071 (2006).

[25] Eugene Hecth, Optics, 3rd ed, Addison-Wesley Longman, EUA , (1998).

[26] J. A. O. Huguenin, tese de doutorado apresentada ao instituto de física da Universidade Federal Fluminense (2006).

[27] A. Joobeur, B. E. A. Saleh, T. S. Larchuk, M. C. Teich, Phys. Rev. A **53**, 4360 (2000).

[28] G. Molina-Terriza, S. Minardi, Y. Deyanova, C. I. Osorio, M. Hendrych, J. P. Torres, Phys. Rev. A **72**, 065802 (2005).

[29] D. P. Caetano, M. P. Almeida, J. A. Huguenin, B. Coutinho dos Santos, e A. Z. Khoury, Phys. Rev. A **66**, 041801 (2002).

[30] M. A. Nielsuen and I. L. Chuang, Quantum Computation and Quantum Information, Cambridge (2003).

[31] A.Barenco, C. H. Bennett, R. Cleve, D. P. DiVincenzo, N. Margolus, P. Shor, T. Sleater, J. A. Smolin, H. Weinfurter, Phys. Rev. A, **52**, 3457-3467, (1995).

[32] Knill, E., Laflamme, R.e Milburn, G. J. Nature **409**, 46-52 (2001).

[33] M. Fiorentino, T. Kim, and F. N. C. Wong, Phys. Rev. A **72**, 012318 (2005).

[34] M. Fiorentino and F. N. C. Wong, Phys. Rev. Lett. **93**, 070502 (2004).

[35] A. N. de Oliveira, S. P. Walborn, and C. H. Monken, J. Opt. Soc. Am. B **7**, 288292 (2005).

[36] J.M. Hickmann, E.J.S. Fonseca, W. C. Soares, S. Cháves Cerda, Phys. Rev. Lett. , 053904 (2010)