UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE
CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

VANESSA DA SILVA ALVES

A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE NÚMERO RACIONAL NO SEXTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Maceió, AL
2012

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE
CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

VANESSA DA SILVA ALVES

A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE NÚMERO RACIONAL NO SEXTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação realizada sob orientação do(a) Prof. Dr. Ediel Azevedo Guerra e apresentada à banca examinadora como requisito parcial à obtenção do Título de Mestra em Ensino de Ciências e Matemática – Área de Concentração "Ensino de Matemática", pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Alagoas.

Maceió, AL
2012

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

A474c Alves, Vanessa da Silva.
A construção do conceito de número racional no sexto ano do ensino fundamental / Vanessa da Silva Alves. – 2012.
183 f. il., fots. color.

Orientador: Ediel Azevedo Guerra.
Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Maceió, 2012.

Bibliografia: f. 156-157.
Apêndices: f. 158-183.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Números racionais. 3. Representações semióticas (Matemática). 4. Zona de desenvolvimento proximal. 5. Engenharia didática. 6. Ensino fundamental. I. Título.

CDU: 510:37

VANESSA DA SILVA ALVES

A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE NÚMERO RACIONAL NO SEXTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada à banca examinadora como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestra em Ensino de Ciências e Matemática – Área de Concentração "Ensino de Matemática", pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Alagoas, aprovada em 10 de abril de 2012.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ediel Azevedo Guerra
(Presidente)

Prof.ª Dr.ª Abigail Fregni Lins.
(Membro externo – UEPB)

Prof. Dr. Amauri da Silva Barros
(Membro interno – PPGECIM/UFAL)

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus pais,

Luciane da Silva Alves e José Carlos da Silva Alves.

AGRADECIMENTOS

São muitos os objetivos almejados ao longo de uma vida. Uns, serão atingidos, outros, ficarão no meio do caminho e não passarão de sonhos.

Na busca por se atingir os objetivos traçados, percorremos a escada da vida, na qual subimos degrau por degrau em busca da realização do que foi planejado.

E não se pode esquecer que nenhuma conquista é somente a conquista de uma só pessoa, pois toda conquista pode e deve ser compartilhada com aqueles que ajudaram a vencer todos os empecilhos que se fizeram presentes durante todo o percurso.

Por este motivo, venho a agradecer:

A Deus pelo dom da vida, pela sua misericórdia, por ter me dado condições de desfrutar desse momento de superação, de satisfação e de dever cumprido, por nunca ter me abandonado diante dos obstáculos vivenciados, por ter me dado a determinação necessária para prosseguir na caminhada e por ter colocado ao meu lado pessoas tão especiais e que sempre me deram o apoio necessário.

Aos meus pais, Luciane da Silva Alves e José Carlos da Silva Alves, pelo amor, pelo apoio, e por acreditarem e apoiarem as minhas escolhas, pela compreensão dos meus momentos de ausência, necessários para o cumprimento dessa tarefa.

Aos meus irmãos, José Carlos da Silva Alves Jr e Valéria da Silva Alves, por sempre estarem ao meu lado.

Ao meu namorado, Mykhael N. Lima de Albuquerque, por ter me apoiado e compartilhado de todo o processo de execução desta pesquisa, me incentivando a traçar o meu caminho e acalentando minhas angústias.

Ao meu orientador, professor Dr. Ediel Azevedo Guerra, por toda a dedicação, preocupação e paciência dispensadas durante todo o período do mestrado e também pela partilha de seus conhecimentos, tão preciosos em todas as etapas de desenvolvimento dessa tarefa.

Ao professor Dr. Amauri Barros, por todo o incentivo e atenção, tão importantes para nos mantermos ativos durante todo o processo.

A professora Dra. Abigail Fregni Lins, a quem tive o prazer de conhecer no momento de qualificação deste trabalho e cujas contribuições foram riquíssimas para a lapidação do mesmo.

A todos os professores do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática - PPGECIM - que contribuíram para a minha formação por meio de seus conhecimentos e dedicação.

Aos colegas de turma Wellington Araújo e Vívia Dayana e também aos demais colegas da turma pela amizade e pelo companheirismo, buscando na interação e na união, vencermos os obstáculos que se fizeram presentes durante o curso.

A secretária do PPGECIM, Mônica Barros por sua paciência, amizade, boa vontade e profissionalismo que tanto me auxiliaram a superar os momentos de angústia vivenciados durante todo o curso.

Aos meus amigos Anna Nery, Ana Paula, Dayane, Jancineide, Fábio e Patrícia, por toda a amizade, apoio, incentivo e preocupação dispensadas em todo trabalho.

A coordenação, direção e corpo docente da Escola Municipal Major Nelson Augusto do Nascimento, pelo apoio e compreensão necessários à realização e concretização deste trabalho.

Aos alunos que fizeram parte desta pesquisa, pela aceitação, pela dedicação com que abraçaram esta proposta e mostraram que os obstáculos não são maiores que a nossa força de vontade e por me mostrarem que por maiores que sejam as dificuldades encontradas em nosso ambiente escolar, na família, na política educacional de um modo geral, ainda não serão suficientes para destruir um sonho e impedir o alcance de uma meta traçada.

Enfim, agradeço a todos aqueles que participaram da minha caminhada e contribuíram direta ou indiretamente com a minha conquista.

Obrigada!

Vanessa da Silva Alves

EPÍGRAFE

[...] o objetivo do ensino da Matemática, em formação inicial, não é nem formar futuros matemáticos, nem dar aos alunos instrumentos que só lhes serão eventualmente úteis muito mais tarde, e sim contribuir para o desenvolvimento geral de suas capacidades de raciocínio, de análise e de visualização.

(Duval, 2009)

RESUMO

Este trabalho consiste no desenvolvimento, na aplicação e na análise de uma sequência didática destinada à promoção da apropriação do conceito de número racional por alunos do sexto ano do Ensino Fundamental. Foram utilizados o conceito de zona de desenvolvimento proximal de Vygotsky e os conceitos de tratamento e conversão desenvolvidos por Duval. Acredita-se, conforme Duval, que a conceituação só pode ocorrer quando o aluno é capaz de realizar os tratamentos e as conversões dos objetos matemáticos e, segundo Vygotsky, que o processo de ensino e aprendizagem deve ser voltado para as necessidades dos sujeitos. Essa pesquisa tem como fundamento teórico-metodológico a Engenharia Didática, uma metodologia que busca estudar os trabalhos desenvolvidos em sala de aula por meio de um processo de validação interno, isto é, confrontando aquilo que o aluno sabia antes de ter contato com o instrumento didático com aquilo que ele conseguiu compreender após a realização do trabalho. A sequência didática proposta pode propiciar aos alunos a apropriação do conceito de número racional, isto é, eles foram capazes de realizar os tratamentos e as conversões com as seguintes formas de representação do número racional: em língua natural, decimal, figural e fracionária. Fato que pode auxiliar os alunos na realização de atividades cotidianas que envolvam este objeto matemático.

Palavras-chave: Número Racional. Representações Semióticas. Zona de Desenvolvimento Proximal. Engenharia Didática.

ABSTRACT

This work was developed from the preparation, implementation and analysis of a didactical sequence aimed to promoting the learning of concept of rational number by students in the sixth year of elementary school. We used the concept of zone of proximal development by Vygotsky and the treatment and conversion concepts developed by Duval. It is believed, in accordance with Duval, that the concept can only occur when the student is able do the treatments and the conversions of mathematical objects and, in accordance to Vygotsky, that the process of teaching and learning should be geared to the needs of individuals. This research is theoretically and methodologically basad the Didactic Engineering, methodology aimed to studying the work in the classroom by internal validation, that is, comparing what the student knew before having contact with an educational tool to learn what he achieved after the completion of the work. The didactical sequence proposed could provide students with the appropriation of the concept of rational number, that is, they managed to make the treatments and conversions with the following forms of representation of rational numbers: natural language, decimal, fractional and figural. This form, assisting them in performing daily activities that involve on mathematical object.

Keywords: Rational Number. Semiotic Representations. Zone of Proximal Development. Didactic Engineering.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Esta dissertação, intitulada **"**A construção do conceito de número racional no sexto ano do Ensino Fundamental**"** é fruto da minha prática como professora da disciplina de Matemática na Educação Básica. O interesse pela conceituação do número racional emergiu de observações feitas em sala de aula durante a realização de atividades diversas na Educação Básica, tanto em escolas públicas quanto em particulares dos municípios de Maceió e Barra de Santo Antônio: verifiquei que no processo de ensino e aprendizagem de alguns novos conteúdos os alunos não conseguiam responder as questões propostas pelo fato de não saberem operar com os números racionais, mesmo quando pareciam ter compreendido as definições relativas ao conteúdo que fora ministrado na aula. Esse fato foi observado, por exemplo, no ensino do conceito de função no primeiro ano do Ensino Médio, quando muitos alunos conseguiram determinar o tipo de função envolvido na solução da questão, mas não conseguiram determinar a sua expressão algébrica porque nos dados se encontravam números racionais na representação fracionária.

Como se sabe, o sexto ano é um momento marcante no processo de ensino e aprendizagem dos alunos, pois é o período no qual os alunos deixam as séries iniciais, onde o ensino é promovido por uma única professora, e ingressam numa nova sistemática de ensino, no qual o processo educativo passa a ser conduzido por vários professores. É nessa etapa que muitas lacunas na aprendizagem de Matemática se manifestam.

Diante das falhas na aprendizagem dos alunos nesse momento de sua aprendizagem, a questão do ensino dos números racionais assume uma posição prioritária, ocupando um lugar de verdadeiro divisor de águas entre aqueles que prosseguirão os estudos matemáticos com êxito e aqueles que apresentarão grandes dificuldades de apropriação dos conhecimentos matemáticos nas séries subsequentes.

Não compreender a conceituação de número racional e as várias formas de representação do mesmo – fracionária, decimal, fração decimal, figural e a língua natural – pode acarretar em frustrações na aprendizagem de diversos outros conceitos matemáticos, na incapacidade de se resolver problemas dessa área nos quais os números racionais aparecem como dados da questão, e na aprendizagem de disciplinas afins, tais como geografia, ciências, física, química.

Além da importância direta na aprendizagem de conteúdos matemáticos, os números racionais também estão muito presentes no cotidiano dos alunos. A observação do sistema monetário e situações habituais de compra e venda de produtos básicos nos setores de alimento e vestuário, mostra a necessidade de saber operar com os números decimais. Pode-se então dizer que aprender o conceito de número racional é importante para a inserção dos cidadãos no mercado de trabalho e para a realização de algumas de suas necessidades elementares de compra de produtos.

A observação da prática do ensino no sexto ano do Ensino Fundamental tem revelado que muitos alunos chegam a essa série com um pequeno domínio das operações de soma, subtração e multiplicação dos números naturais e sem quase nenhum domínio da divisão. Apresentam também pouco domínio da leitura e interpretação de textos. Diante dessa constatação, a questão que se coloca é a de como promover adequadamente o ensino do conceito de número racional a alunos que dominem superficialmente as operações de soma, subtração, multiplicação e que quase nada saibam acerca da operação de divisão. Desse modo, o problema da presente pesquisa é justamente tentar responder o seguinte questionamento: **Como realizar uma abordagem dos números racionais de modo que um aluno do sexto ano do Ensino Fundamental consiga compreender seu conceito e estabelecer relações entre suas diversas formas de representações?**

Esse estudo tem por objetivo geral propor uma sequência didática de ensino do conceito de números racionais no sexto ano do Ensino Fundamental, visando auxiliar os alunos na conceituação desse objeto matemático, assim como, ajudar outros professores no processo de ensino e aprendizagem dos números racionais a partir das considerações que aqui se farão presentes. Pretende-se especificamente:

a) identificar na literatura existente a importância do estudo dos números racionais e analisar os tipos de registros semióticos mobilizados na aprendizagem dos mesmos;
b) identificar as dificuldades dos alunos no que diz respeito à compreensão das quatro operações básicas da aritmética;

Nota-se que, por conta da sua importância, o conceito de número racional tem sido objeto de estudo de vários trabalhos de pesquisa na área da Educação Matemática (cf. CATTO, 2000; BEZERRA, 2001; IGLIORI e MARANHÃO, 2010, dentre outros). Tais estudos serviram de referência bibliográfica na tarefa de elaboração de uma proposta didática para a aprendizagem do conceito de número racional. Utilizei como referencial teórico neste trabalho a abordagem dos registros de representações semióticas de Duval e o conceito de zona de desenvolvimento proximal de Vygotsky por meio da metodologia da Engenharia Didática. Conforme as teorias contempladas nesta pesquisa, o aluno ocupa o centro do processo de ensino e aprendizagem, cabendo ao professor propor e mediar as ações que deverão ser realizadas em sala de aula estimulando os alunos a registrarem todo o processo de desenvolvimento das questões propostas na busca pela aquisição de conceitos matemáticos que ainda não foram amadurecidos. A partir desses registros, foi feita a análise do que foi compreendido pelos alunos, das lacunas ainda existentes e das tomadas de decisões que venham a proporcionar uma aprendizagem mais uniforme dentro do grupo em estudo.

Por meio do desenvolvimento do trabalho brevemente exposto acredita-se hipoteticamente que **a sequência didática desenvolvida no presente trabalho, a partir da teoria dos registros de representações semióticas e da criação de zonas de desenvolvimento proximal, será capaz de propiciar ao aluno a conceituação dos números racionais, a partir da realização dos tratamentos e das conversões entre os sistemas de representações figural, decimal, fracionário e língua natural.**

O presente trabalho foi dividido em quatro capítulos.

No Capítulo 1 são apresentadas algumas considerações histórico-epistemológicas do número racional a partir das considerações de Caraça (1951). No Capítulo 2 são expostas as teorias desenvolvidas por Duval e por Vygotsky a partir de obras desses autores e também de obras de autores que já estudaram as teorias citadas. No Capítulo 3 está desenvolvida uma análise didática na qual são apresentadas obras que foram consideradas relevantes para o presente estudo e que, na maioria dos casos, os autores nortearam suas respectivas pesquisas nas teorias em estudo nesta. No Capítulo 4 apresenta-se um panorama do trabalho desenvolvido, assim como a fundamentação metodológica do mesmo, isto é, a descrição e análise acerca da sequência didática que foi aplicada aos alunos do sexto ano do Ensino Fundamental.

Acredita-se, portanto, que a teoria dos registros de representação semiótica e o conceito de zona de desenvolvimento proximal forneceram subsídios suficientes para a realização deste estudo e que se o professor conseguir fazer com que o aluno aprenda significativamente o conceito dos números racionais estará contribuindo para que este aluno obtenha êxito no estudo de diversos outros conteúdos não apenas da Matemática, mas também em todas as outras disciplinas afins e na própria vida cotidiana.

CAPÍTULO 1
OS NÚMEROS RACIONAIS: ALGUMAS CONSIDERAÇÕES HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICAS

Este capítulo tem como foco a evolução histórico-epistemológica dos números racionais tendo como referência principal a obra “Conceitos Fundamentais da Matemática” de Bento de Jesus Caraça (1951).

Caraça (1951) visualizava a ciência de duas maneiras: em uma, a ciência era aquela apresentada nos livros didáticos, de modo organizado, sem conflitos e cujos conceitos bastavam a si próprios sem muito interferir no cotidiano e sem sofrer influência do meio; em outra, a ciência era vista como algo mais inquietante, que sofre influência do meio e o influencia também. Conforme Caraça (1951, p. XIV):

> Sem dúvida, a Matemática possui problemas próprios, que não têm ligação imediata com outros problemas da vida social. Mas, não há dúvida também de que aos seus fundamentos mergulham tanto como os de outro qualquer ramo da Ciência, na vida real; uns e outros entroncam na mesma madre.

Adotando então a segunda maneira de conceber a ciência, Caraça (1951) realizou uma abordagem da Matemática não como um conjunto de conceitos prontos e acabados que só servem para os estudiosos da área, mas como uma gama de conceitos desenvolvidos ao longo da história, de modo não retilíneo, completamente influenciado pelas necessidades da humanidade e construído para suprir essas necessidades.

Será iniciado um passeio pela criação dos números racionais e as motivações e fundamentações para a criação dos mesmos.

Não se pode falar em números racionais sem antes fazer menção aos números naturais. Isso se dá pelo fato de uma necessidade bem primitiva do homem, a contagem. Desde os primórdios, o homem era obrigado a resolver problemas cotidianos por meio da contagem. Fosse para saber a quantidade de comida que precisaria para se sustentar, para saber quanto teria que devolver de troco, para caçar, para formar grupos para a realização de alguma tarefa, enfim, a contagem, desde o início, está presente no cotidiano do ser humano e a necessidade de contagem deu origem ao mais elementar conjunto numérico, o conjunto dos números naturais, N = {1, 2, 3, 4, 5, 6,...}. E, ao contrário do que se imagina, os números naturais não foram criados para que o homem pudesse realizar contagens e sim, o processo de contagem foi o que originou os números naturais. Quanto tempo levou para que a humanidade chegasse ao ponto em que se encontra esse conjunto atualmente, não se pode afirmar. Porém, estudos com povos de tribos africanas que viviam em situações primitivas mostraram que seus membros apenas conheciam até o número 6, posto que suas necessidades diárias só os fizeram desenvolver este conhecimento até esse ponto. Assim, com o passar dos anos, quanto mais desenvolvida economicamente ficava a sociedade, mais o conjunto dos números naturais era consolidado, até que chegou ao patamar que se tem atualmente.

Com o desenvolvimento, novos problemas foram surgindo e as necessidades do homem não era apenas a de contar, a sociedade passou a ter necessidade de medir comprimentos e áreas, por exemplo, tarefas que os números inteiros não bastavam para desenvolvê-las.

De acordo com Caraça (1951), uma das relações mais primitivas é aquela referente a terra. Seja a relação que o homem precisa estabelecer entre a quantidade de terra e a quantidade de semente que poderá semear, seja a relação entre a quantidade de terra e os valores dos impostos a serem pagos ao Estado por ela, seja a relação entre a quantidade de terra e o seu valor para venda, enfim, a terra, fonte de sustento dos povos mais primitivos, representa um campo precioso no desenvolvimento dos números. Foi por conta das necessidades advindas do trabalho na agricultura que o campo numérico dos racionais surgiu. Quando se remete aos primórdios, o ato de medir era necessidade do proprietário de terra.

Caraça (1951, p. 32) apresenta em seu texto uma passagem histórica, escrita por Heródoto no século V antes de Cristo, que diz o seguinte:

> Disseram-me que este rei (Sesóstras) tinha repartido todo o Egipto entre os egípcios e que tinha dado a cada um uma porção igual e rectangular de terra, com a obrigação de pagar por ano um certo tributo. Que se a porção de algum fosse diminuída pelo rio (Nilo), ele fosse procurar o rei e lhe expusesse o que tinha acontecido à sua terra, a fim de saber de quanto ela estava diminuída e de só fazer pagar o tributo conforme o que tivesse sobrado de terra.

Provavelmente dessa forma surgiu a geometria: o cálculo das áreas.

Mas não só o trabalho com a terra necessita de medições. Saber medir é necessidade de todos que vivem em sociedade, seja na confecção de uma roupa, seja num canteiro de obras, seja no comércio, enfim, medir faz parte do cotidiano de todos. Mas o que é medir? Caraça (1951) define o ato de medir como sendo uma atividade de comparar duas grandezas para se descobrir qual é a maior, qual é a menor e quantas vezes uma cabe na outra. Para descobrir quantas vezes uma grandeza é maior (ou menor) do que a outra, Caraça (1951) enfatiza a necessidade de se estabelecer três etapas: a escolha da unidade, a comparação com a unidade, a expressão do resultado dessa comparação com um número.

Se forem considerados dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ com o objetivo de medi-los, tem-se que passar pelas três etapas citadas acima. Dessa forma:

1ª etapa: defina $\overline{CD}$ como sendo a unidade;

2ª etapa: faça coincidir os extremos A e C de cada segmento, conforme a figura abaixo, para fazer a comparação do segmento com a unidade.

A ________________________________ B

C __________ D

3ª etapa: o número que expressa essa comparação é o número 3, pois o segmento $\overline{AB}$ é três vezes maior que o segmento $\overline{CD}$.

Nesse exemplo a unidade escolhida foi o segmento $\overline{CD}$, que cabe três vezes em $\overline{AB}$. Porém, poderia ter sido escolhido como unidade o segmento $\overline{AB}$ e se assim fosse, não existiria no campo dos números inteiros um número para representar quantas vezes $\overline{AB}$ cabe em $\overline{CD}$, pois $\overline{AB}$ é maior do que $\overline{CD}$. Esse exemplo mostra o quanto é importante a escolha da unidade, porque é em função dela que a medida será expressa, demonstra também que os números inteiros não são suficientes para o ato de medir. Caraça (1951) defende que a escolha da unidade pode ocorrer de modo que torne a atividade de comparar mais cômoda. Por exemplo, é mais interessante utilizar um quilômetro como unidade para medir uma estrada ao invés de utilizar um centímetro.

Generalizando o que foi exposto acima, se a medida do segmento considerado como unidade é q e a medida do segmento que se quer medir em função dessa unidade é p, o número que expressa a medida do segmento que se quer medir é a razão $\frac{p}{q}$. Se p fosse divisível por q, a medida seria um número inteiro e não existiria problema algum. Se p não fosse divisível por q, a medida não existia no campo numérico dos inteiros e, dessa forma, houve a necessidade de criação de um campo numérico que contemplasse esse novo tipo de número, o número fracionário. Surgiu então, o conjunto dos números racionais formado pelos números inteiros mais os números fracionários.

De acordo com Caraça (1951), dois princípios matemáticos regem a construção desse novo campo numérico: o princípio da extensão e o princípio da economia.

O princípio da extensão permitiu a criação de novos números como complementação aos números inteiros, por conta da constatação de que esses últimos eram insuficientes para a realização de algumas atividades cotidianas. Por outro lado, o princípio de economia garantiu a existência de um número para representar todos os casos de medição no qual a medida fosse representada por um número fracionário e que esta medida fosse representada por um número inteiro sempre que na razão $\frac{p}{q}$ o número inteiro p fosse divisível por q, onde p é o elemento a ser medido e q a unidade escolhida.

Assim, definiu-se que todo número que pudesse ser representado da forma $\frac{p}{q}$ seria denominado racional, onde p é o numerador e q, o denominador. Sendo uma generalização dos números inteiros, os números racionais conservam algumas propriedades desses, mas também acrescentam novas condições à sua existência.

Conforme as considerações de Caraça (1951), o surgimento dos números racionais ocorreu por conta do desenvolvimento social do homem que o fez sentir a necessidade de realizar medições para as quais os números inteiros eram insuficientes para expressar as medidas. Nos dias atuais, devido ao nível de desenvolvimento social, comercial e tecnológico, as atividades realizadas pelo homem demandam mais dos números racionais na representação fracionária ou na representação decimal que dos números inteiros.

CAPÍTULO 2
FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA: DUVAL E VYGOTSKY

O pesquisador russo Lev Vygotsky formulou uma influente teoria psicológica do desenvolvimento e da aprendizagem e preocupou-se com a ação pedagógica e o papel do professor e do aluno no processo de ensino e aprendizagem. Segundo Vygotsky, a atividade semiótica é fundamental no desenvolvimento das funções psicológicas superiores dos seres humanos. No que diz respeito à aprendizagem, ele propôs o conceito de zona de desenvolvimento proximal, o qual tem sido de grande relevância nas pesquisas acerca das estratégias didáticas de ensino em várias áreas do conhecimento humano.

Duval, por sua vez, propôs em seu trabalho que “a originalidade da atividade Matemática está na mobilização de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo momento de registro de representação” (DUVAL, 2010, p. 14).

De acordo com Vygotsky (1998), para se compreender o desenvolvimento cognitivo, é necessário que se estabeleça referência ao contexto social, cultural e histórico. Segundo ele, “as origens das formas superiores de comportamento consciente deveriam ser achadas nas relações sociais que o indivíduo mantém com o mundo exterior” (VYGOTSKY, 1988, p. 25). Isso vem do fato de Vygotsky acreditar que as funções psicológicas superiores são formadas por meio da interação entre os indivíduos para a compreensão do meio, apreendendo assim, o conhecimento histórica e culturalmente construído. A interação citada acima ocorre de modo dinâmico, isto é, o homem não só é produto de seu meio como também o transforma: “Suas proposições contemplam a dupla natureza do ser humano, membro de uma espécie biológica que só se desenvolve no interior de um grupo cultural” (OLIVEIRA, M., 1992, p. 24).

Dentro dessa abordagem, a aprendizagem de crianças se processa nas relações sociais e culturais, historicamente desenvolvidas, de modo que a criança é um ser ativo dentro desse processo e o conhecimento é estabelecido por meio da interação com o adulto ou outra criança mais experiente, com o objetivo de compreensão do meio.

A criança depende da interação com o outro para aprender e, consequentemente, desenvolver-se cognitivamente. Vygotsky acreditava que a aprendizagem é que promove o desenvolvimento. Então é porque a criança aprende que ela se desenvolve e não o contrário. É nesse momento em que o outro, como mediador, assume um papel fundamental no processo de aprendizagem e desenvolvimento, pois se as ações dos sujeitos não fossem mediadas pelas experiências de outros indivíduos, os mediadores, sempre se estaria partindo do marco inicial para a realização de determinadas tarefas e o desenvolvimento caminharia em passos mais estreitos. Segundo a teoria socio-histórica, se forem dadas condições adequadas a uma criança, ela será capaz de, inicialmente, apreender o que lhe é transmitido, repetindo as ações dos adultos e, posteriormente, por meio da interação, construir sua própria visão sobre o que foi observado em seu meio. Este processo no qual o conhecimento parte do meio para o indivíduo, nesta ordem, é denominado de lei da dupla estimulação, conforme afirma Martins (1997, p. 114), baseado na teoria de Vygotsky: "Tudo que está no sujeito existe antes no social (interpsicologicamente) e quando é aprendido e modificado pelo sujeito e desenvolvido para a sociedade passa a existir no plano intrapsicológico (interno ao sujeito)". Desse modo, para que o sujeito possa construir um conceito matemático é necessário que o mesmo utilize registros de representações semióticas para representar os objetos matemáticos e assim conseguir interagir com os outros sujeitos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem.

Em sua obra *Semiósis e pensamento humano*, Duval (2009, p. 29) afirma que "não é possível estudar os fenômenos relativos ao conhecimento sem se recorrer à noção de representação" e desenvolve uma teoria que analisa os processos de ensino e aprendizagem em Matemática a partir de registros de representações semióticas e da capacidade de se realizar a conversão entre dois os mais destes registros, além da possibilidade de realização de tratamento inerente a cada registro deste.

Duval (2009, p. 15) denominou por "*semiósis* a apreensão ou a produção de uma representação semiótica" e *noésis* "a apreensão conceitual de um objeto". Conforme Duval (2010), as representações semióticas (*semiósis*) não desempenham a função de comunicar as representações mentais (*noésis*), mas são fundamentais para as atividades cognitivas. Para o autor, é a partir da *semiósis* que se desenvolve a *noésis*, ou seja, é por meio da capacidade de representação dos objetos matemáticos e da realização de conversões entre os distintos modos de representação de um mesmo objeto que os conceitos matemáticos são atingidos.

Na teoria de Duval distinguem-se dois tipos de atividades semióticas qualitativamente distintas: o tratamento e a conversão, as quais Duval (2009, p. 39) define da seguinte maneira:

> Um tratamento é uma transformação que se efetua no interior de um mesmo registro, aquele onde as regras de funcionamento são utilizadas; um tratamento mobiliza, então, apenas um registro de representação. A conversão é, ao contrário, uma transformação que faz passar de um registro a outro. Ela requer então a coordenação dos registros no sujeito que a efetua.

Para que se possa ter um melhor entendimento quanto aos conceitos de tratamento e de conversão, serão esboçados dois exemplos a seguir com o uso dos números racionais.

Considera-se primeiramente a seguinte operação: 0,5 + 1,2 = 1,7. Neste caso, tem-se a realização de um tratamento com os números racionais 0,5 e 1,2. Note que o número racional resultante é também representado na forma decimal, ou seja, não houve mudança de uma forma de representação para outra. Por outro, ao realizar os seguintes cálculos: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0{,}5 + 0{,}25 = 0{,}75$, realizou-se primeiramente uma conversão (mudou-se a forma de representação dos números racionais $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$, passando da forma de representação fracionária para a forma de representação decimal) e, logo após, realizou-se um tratamento entre esses mesmos números racionais, porém, representados na forma decimal como 0,5 e 0,25, respectivamente.

Quanto às representações semióticas, Duval (2009, p. 32) afirma que:

> a especificidade das representações semióticas consiste em serem relativas a um sistema particular de signos, a linguagem, a escrita algébrica ou os gráficos cartesianos, e em poderem ser convertidas em representações “equivalentes” em um outro sistema semiótico, mas podendo tomar significações diferentes para o sujeito que as utiliza. A noção de representação semiótica pressupõe, então, a consideração de sistemas semióticos diferentes e de uma operação cognitiva de conversão das representações de um sistema semiótico para um outro.

Esse recorte enfatiza a necessidade de o sujeito compreender e saber distinguir o representante (registro semiótico de representação) do representado (objeto matemático) para que os sistemas de representações “equivalentes” sejam sempre associados a um mesmo elemento matemático. No que diz respeito ao ensino dos números racionais para alunos do terceiro ciclo, os PCN (BRASIL, 1998, p.67) mostram que:

> O uso de símbolos e da linguagem Matemática para representar números pode ser estudado do ponto de vista histórico e também do ponto de vista prático. Neste ciclo, os alunos têm boas condições para perceber que os números têm múltiplas representações e compreender melhor as relações entre representações fracionárias e decimais, frações equivalentes, escritas percentuais e até a notação científica.

Vale ressaltar que um mesmo objeto matemático pode ser representado por vários sistemas de representações semióticas, isto é, por vários signos, e o desenvolvimento está relacionado à aprendizagem, que por sua vez, está interligada a capacidade de utilização dos signos.

O uso dos signos não é algo tão trivial, pois os signos não são criados por cada sujeito individualmente, e sim são desenvolvidos histórica e culturalmente, tendo suas significações preestabelecidas pela sociedade na qual o sujeito está inserido. Para a aprendizagem, quanto à utilização e a significação dos signos, Vygotsky enfatiza a interação entre os sujeitos e os conhecimentos prévios que cada um adquire antes de frequentar a escola. O autor acredita que “a aprendizagem escolar nunca parte do zero. Toda aprendizagem da criança na escola tem uma pré-história” (VYGOTSKY, 1988, p. 109), isto é, antes de chegar à escola a criança já aprendeu alguns conceitos advindos da interação com os adultos ao seu redor. Ela já passou por experiências que a fez ter noção de quantidade e de nomenclaturas, por exemplo. Para Vygotsky (1988, p.110):

> Pela sua importância, este processo de aprendizagem, que se produz antes que a criança entre na escola, difere do modo essencial do domínio de noções que se adquirem durante o ensino escolar. Todavia, quando a criança, com as suas perguntas, consegue apoderar-se dos nomes dos objetos que a rodeiam, já está inserida numa etapa específica de aprendizagem. Aprendizagem e desenvolvimento não entram em contato pela primeira vez na idade escolar, portanto, mas estão ligados entre si desde os primeiros dias de vida da criança.

No entanto, não se pode afirmar que a aprendizagem pré-escolar sempre será complementada pela aprendizagem escolar, há momentos em que ambas divergem, mas independentemente desse fato, negar a existência das mesmas é inaceitável. Vygotsky (2005, p. 135) afirmou que “embora os conceitos científicos e espontâneos se desenvolvam em direções opostas, os dois processos estão intimamente relacionados. É preciso que um conceito espontâneo tenha alcançado um certo nível para que a criança possa absorver um conceito científico correlato.” Assim, o conhecimento precedente à vida escolar não deve ser ignorado e sim explorado para que o professor possa por meio da mediação auxiliar a criança a converter este conhecimento empírico em conhecimento científico, reforçando e aprofundando o conhecimento prévio da criança ou corrigindo-o no caso do mesmo está incoerente com o conhecimento científico.

Além disso, recomenda-se que os conceitos sejam abordados em conexão com o cotidiano do aluno, sempre que possível. De acordo com a teoria de Vygotsky, os conceitos apenas serão apropriados pelos sujeitos quando os mesmos aprenderem a fazer uso social dele.

Quando se fala na relação existente entre desenvolvimento e aprendizagem, Vygotsky aponta pelo menos dois níveis de desenvolvimento da criança: um primeiro, denominado nível de desenvolvimento efetivo (ou real) e o segundo, chamado nível de desenvolvimento potencial. Ao considerar a existência desses dois níveis de desenvolvimento da criança, Vygotsky acredita que os processos mentais não são determinados apenas pelo desenvolvimento biológico de cada criança, pois, se assim ocorresse, todas as crianças pertencentes a uma mesma faixa etária seriam capazes de desempenhar sempre as mesmas atividades, independentemente de seu grau de dificuldade. Quando se observa a área educacional, não se teria, por exemplo, alunos que sempre estudaram em uma mesma escola, com os mesmos professores, tendo acesso ao mesmo ensino, e apresentando níveis de desempenho na aprendizagem diferentes. Conforme expressado por Vygotsky (1988, p.111), a partir de uma de suas experiências:

> Suponhamos que submetemos a um teste duas crianças, e que estabelecemos para ambas uma idade mental de sete anos. Mas quando submetemos as crianças a provas posteriores, sobressaem diferenças substanciais entre elas. Com o auxílio de perguntas-guia, exemplos e demonstrações, uma criança resolve facilmente os testes, superando em dois anos o seu nível de desenvolvimento efetivo, enquanto a outra resolve testes que apenas superam em meio ano o seu nível de desenvolvimento efetivo.

Com isso, observa-se que há uma diferença entre o que uma criança consegue realizar sozinha e o que ela consegue realizar com o auxílio de outra pessoa mais experiente, seja um adulto ou outra criança que adquiriu mais experiência. Dessa forma, a aprendizagem não depende apenas do fator biológico, mas também da interação com o outro.

O que a criança consegue realizar sozinha é denominado *nível de desenvolvimento efetivo (ou real)* e o que ela consegue desenvolver como o auxílio de uma pessoa mais experiente, o mediador, é chamado *nível de desenvolvimento potencial*. A dinâmica desse processo é que o que a criança consegue hoje fazer apenas mediante o auxílio dos adultos pode, depois, ser realizado por ela sozinha. Assim, o que hoje faz parte do nível de desenvolvimento potencial poderá ser incorporado às estruturas cognitivas da criança e passar, amanhã, a fazer parte do nível de desenvolvimento efetivo.

A distância entre o nível de desenvolvimento efetivo e o nível de desenvolvimento potencial é denominada *zona de desenvolvimento proximal*. De acordo com Moreira (2009, p.21):

> A zona de desenvolvimento proximal define as funções que ainda não amadureceram, mas que estão no processo de maturação. É uma medida do potencial de aprendizagem; representa a região na qual o desenvolvimento cognitivo ocorre; é dinâmica e está constantemente mudando.

Dessa forma o ensino apenas será interessante para o processo de desenvolvimento cognitivo do aprendiz se a ele forem incorporadas novas informações. Ou seja, o professor, como mediador indispensável no processo de ensino e aprendizagem, deverá identificar o nível de desenvolvimento efetivo do aluno e buscar criar uma situação em que “diante de situações em que precisa manipular conceitos e realidades que já conhece, para chegar a saberes até então ignorados, o aluno sugere respostas e chega a resultados que lhes permitem alcançar novos níveis de conhecimento, informações e raciocínio” (MARTINS, 1997, p. 117). O professor passa a mediar a aprendizagem dos conhecimentos científicos utilizando os conhecimentos espontâneos dos alunos. Segundo os PCN (BRASIL, 1998, p.63):

> [...] o professor deve organizar seu trabalho de modo que os alunos desenvolvam a própria capacidade para construir conhecimentos matemáticos e interagir de forma cooperativa com seus pares, na busca de soluções para problemas, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

O papel do professor no processo de ensino e aprendizagem na concepção de Vygotsky é o de mediador. Isto significa que no decorrer das aulas é necessária a interação com o outro e o professor é quem vai fazer a vinculação entre o conhecimento pré-escolar do sujeito e o conhecimento científico. Para compreender melhor como essa mediação ocorre é interessante retomar e aprofundar os conceitos de instrumento e signo, uma vez que os mesmos são utilizados na mediação.

No processo de ensino e aprendizagem o professor faz uso de instrumentos e de signos para levar o seu aluno a compreender o significado de algo. De acordo com Moreira (2009, p. 19) “um instrumento é algo que pode ser usado para fazer alguma coisa; um signo é algo que significa alguma coisa”. O instrumento pode ser visto como um material concreto, que tem uma utilidade prática. O signo é algo utilizado para lembrar alguma coisa, está diretamente ligado à cultura do indivíduo, pode ser uma palavra, um gesto, pode ser um desenho, ou seja, pode ser qualquer coisa que forneça pistas acerca do que se quer trabalhar. Observa-se que os registros de representação semióticos são os signos que servem para expressar os objetos matemáticos e o que se apreendeu sobre eles.

A fala é um signo que desempenha um papel muito importante para o desenvolvimento cognitivo. Pelo uso da linguagem o aprendiz consegue cada vez mais realizar abstrações e se desligar dos objetos concretos rumo às abstrações. Assim, a fala é um grande responsável pelo desenvolvimento cognitivo. Moreira (2009, p. 21) afirma que “a inteligência prática se refere ao uso de instrumentos e a inteligência abstrata se refere ao uso de signos, dos quais a linguagem é o mais importante para o desenvolvimento cognitivo”. No ensino da Matemática, o professor pode propor situações-problema cotidianas e perguntar aos alunos o que eles sugerem como solução e, a partir das sugestões fornecidas pelos alunos, o professor poderá mediar as informações, dialogar com os alunos sobre o que é válido e o que é questionável e também introduzir os conceitos científicos a eles dando significado por meio de situações-problema relacionadas à vida cotidiana dos alunos, sempre que possível.

Como os objetos matemáticos não podem ser visualizados por instrumentos (telescópios, lupas, etc) e o único meio de alcançá-los é por meio das representações semióticas, faz-se necessário saber fazer uso dos diversos sistemas de representação para um mesmo objeto, para que o mesmo seja compreendido. Esse procedimento não é algo trivial para os sujeitos. Isso ocorre porque os alunos não conseguem distinguir a representação semiótica do objeto matemático que está sendo representado não conseguindo, por exemplo, compreender que 1,5 e $\frac{3}{2}$ são representações semióticas distintas de um mesmo número racional e, segundo Duval (2009, p.18):

> [...] de maneira mais significativa, uma tal separação persiste mesmo após, no processo de ensino, tendo sido bastante utilizados esses diferentes sistemas semióticos de representação. Essa separação, à qual se presta geralmente pouca atenção, resulta do fenômeno da não-congruência entre as representações de um mesmo objeto que enfatizam sistemas semióticos diferentes.

Duval classifica as conversões em duas Categorias: conversões congruentes e as conversões não-congruentes. E, para que a passagem de um sistema de representação semiótico para outro se dê de maneira espontânea, é necessário que haja congruências entre os mesmos. O autor determina que dois sistemas de representações semióticas são congruentes quando eles atendem a todas as seguintes condições:

- correspondência semântica entre as unidades significantes que a constituem;
- mesma ordem possível de apreensão dessas unidades nas duas representações;
- conversão de uma unidade significante da representação de partida em uma só unidade significante na representação de chegada.

Pode-se dizer que uma conversão é congruente quando a mudança de um registro de representação a outro ocorre de modo natural. A congruência entre dois sistemas de representação não é necessariamente algo recíproco, isto é, pode ocorrer da conversão entre os mesmos ser congruente em um sentido e não ser congruente no sentido inverso.

A partir dos resultados de testes realizados sobre a conversão entre sistemas de representações semióticas, Duval (2009, p. 19) afirma que “[...] toda tarefa na qual a conversão das representações é congruente dá lugar a uma taxa elevada de sucesso. Toda tarefa na qual a conversão não é congruente dá lugar a uma taxa mais ou menos fraca de sucesso, conforme o grau da não congruência.”

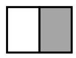
Segundo Duval, para que se tente obter êxito quanto às atividades que envolvem diferentes sistemas de representação, não basta fazer uso do ensino tradicional, precisa-se realizar um ensino específico no qual seja explorado cada tipo de sistema de representação assim como suas particularidades, levando o aluno a descobrir quando é mais interessante utilizar uma ou outra representação, por exemplo. Esse trabalho tende a despertar uma tomada de iniciativas por parte dos alunos, uma vez que o ensino deixa de ser o decorar fórmulas prontas para ser a análise de qual atitude deverá ser adotada para se obter êxito na questão.

Duval (2009, p. 19) afirma que:

> [...] quando um tal tipo de trabalho é proposto, constata-se uma modificação completa nas iniciativas e atitudes dos alunos para efetuar os tratamentos matemáticos, para os controlar, para a rapidez de execução e também para o interesse colocado na tarefa. Não tem simplesmente sucesso, mas modificações da qualidade de produções. Esse salto qualitativo no desenvolvimento das competências e das performances aparece ligado à coordenação de sistemas semióticos nos alunos.

Além disso, Duval (2009) propõe que a análise da aquisição do conhecimento matemático confere os três seguintes fenômenos:

- diversidade dos registros de representação semiótica - este fenômeno aponta que está na diversidade dos registros de representações semióticas a delimitação das questões de aprendizagens específicas, isto é, variar os registros de representação é abordar um número maior de conceitos referentes a um determinado conteúdo, assim, ao utilizar a linguagem natural, os símbolos, os gráficos, as tabelas, etc, está se buscando uma abordagem mais completa do conteúdo que se quer ensinar, fazendo com que o sujeito seja levado a compreender as diversas formas de representação do objeto matemático em estudo.

- diferenciação entre representante e representado - saber distinguir o objeto matemático de sua representação é essencial para a aquisição dos conceitos matemáticos. Os tratamentos e as conversões apenas serão realizados de modo favorável quando esta distinção estiver bem definida para o sujeito. Saber compreender, por exemplo, que na seguinte situação a parte pintada da figura , 0,5 e $\frac{1}{2}$ representam o mesmo número racional é fundamental para a conceituação de tal sistema numérico.

- coordenação entre os diferentes registros - a aprendizagem Matemática poderá ser verificada quando o sujeito for capaz de transitar de um registro de representação semiótico para outro de modo espontâneo. Esse fenômeno, na maioria dos casos não ocorre naturalmente, principalmente porque existem as conversões congruentes e as não-congruentes, sendo estas últimas as mais complexas para o aluno.

Observa-se abaixo qual a função das representações semióticas e das representações mentais para a realização de tratamentos e definição do objeto matemático:

Quadro 1 - Representações semióticas e representações mentais

Semióticas	Mentais
São necessárias à função de tratamento.	Não servem para a função de tratamento.
Podem ser apreendidas sob o aspecto de representante ou sob o aspecto do que se representa.	Servem apenas para o aspecto do que é representado.

Fonte: autora norteada pelas considerações de Duval.

Vygotsky (1962, pp. 46-47, 132, 145-149 apud DUVAL, 2009, p. 47) comenta que:

> Naturalmente, podemos sempre ter o "sentimento" de que estamos efetuando o tratamento no nível das representações mentais sem mobilizar explicitamente representações semióticas. Essa ilusão introspectiva apega-se ao desconhecimento de um fato genético e cultural fundamental: o desenvolvimento das representações mentais está ligado à aquisição e à interiorização de sistemas de representações semióticas, a começar pelo da linguagem ordinária.

Isso significa que quando fazemos um cálculo mental estamos utilizando, mesmo que indiretamente as representações semióticas, pois estas já foram interiorizadas.

Segundo Duval (2009), são três as atividades cognitivas de representação referentes à semiósis: a formação, o tratamento e a conversão.

A *formação* refere-se à formação de registros de representação "seja para 'exprimir' uma representação mental, seja para 'evocar' um objeto real" (DUVAL, 2009, p. 53). Ao realizar este procedimento de formação, o sujeito seleciona as características do objeto matemático que ele quer representar, criando assim uma representação conforme a sua visão do objeto e das características relevantes para o determinado momento. Ou seja, a formação de uma representação é dada a partir de um ou mais signos que tenham relação com o objeto matemático a ser representado. Esses signos são cultural e historicamente desenvolvidos e utilizados por outros sujeitos, como, por exemplo, a linguagem natural, os símbolos matemáticos, os gráficos, os sólidos geométricos, etc. Duval (2009, p. 55) afirma que "uma representação semiótica não deve sair do domínio definido pelas regras que constituem um sistema semiótico", isto é, o representante precisa atender às características inerentes ao objeto matemático representado.

As outras duas atividades referem-se às transformações. O *tratamento* é a transformação dentro (interna) de um mesmo registro de representação semiótico. Na maioria dos casos, o tratamento é diretamente relacionado a um determinado sistema de representação. Quando nos referimos aos números racionais, por exemplo, os tratamentos inerentes a forma de representação decimal são diferentes dos tratamentos inerentes à forma de representação fracionária. O modo de tratar a expressão na forma de representação decimal 1,5 + 0,4 é completamente diferente da forma de tratamento utilizada para se calcular $\frac{3}{2} + \frac{4}{10}$.

A *conversão* seria a transformação de um registro de representação semiótico em outro, ou seja, uma transformação externa ao registro de representação de partida. Por realizar esta passagem de um registro de representação semiótica a outro, para que a conversão seja realizada se faz necessário que o sujeito tenha consciência do que é o objeto representado e do que foi utilizado para se fazer esta representação. Quando não se tem essa percepção entre representante e representado bem definida, a conversão fracassa e a aprendizagem fica comprometida. Duval (2009, p. 59) cita um caso comumente observado entre os alunos e que diz respeito ao estudo em questão, números racionais:

> [...] por mais que eles saibam efetuar a adição de dois números com sua escritura decimal e com sua escritura fracionária, certos alunos não se preocupam de forma alguma em pensar em converter a escritura decimal de um número em escritura fracionária (e reciprocamente), ou mesmo fracassam quando se asseguram que isto é necessário no desenvolvimento de um cálculo.

Isso ocorre porque a maneira de operar com a forma de representação fracionária não é a mesma da forma de representação decimal, não podendo ser aplicado o mesmo tratamento para ambos os casos.

Observa-se, então, que a aprendizagem que tem por objetivo a aquisição da realização de atividades de tratamento é diferente daquela que visa pela realização de atividades de conversão, sendo esta última a mais completa por exigir do sujeito a distinção entre representante e representado, assim como os tratamentos inerentes a cada forma de representação.

Outro ponto importante é notar que as regras de conversões são de sentido único, isto é, uma vez que uma regra de conversão seja estabelecida para a passagem do sistema de representação semiótico A para o sistema de representação semiótico B, nesse sentido $A \rightarrow B$, esta mesma regra de conversão não será necessariamente válida no sentido contrário, $B \rightarrow A$. Exemplificando a situação acima, considere a seguinte conversão: $\frac{1}{2}$ = 0,5. Neste caso, para passar do registro de representação fracionário para o registro de representação decimal, basta realizar a operação de divisão do numerador pelo denominador do número fracionário, encontrando como resultado 0,5, sua representação na forma decimal. O mesmo não poderia ser feito para converter 0,5 em $\frac{1}{2}$, ou seja, a conversão de A para B não implica na conversão de B para A. Por conta da sua complexidade, a partir de experiências realizadas em sala de aula, Duval (2009, p. 63) afirma que "*a conversão das representações semióticas constitui a atividade cognitiva menos espontânea e mais difícil de adquirir para a grande maioria dos alunos*. (grifo do autor)".

A atividade de conversão não é tão natural como se pensava, mas pode ser mais ou menos complexa para o sujeito, dependendo do tipo de conversão considerada.

Estão elencados abaixo os obstáculos, possíveis motivos para o baixo desempenho dos alunos quanto à aprendizagem dos números racionais, indicados pelos PCN (BRASIL, 2008, p. 101):

> - cada número racional pode ser representado por diferentes (e infinitas) escritas fracionárias: por exemplo, $\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}$, são diferentes representações de um mesmo número;
> - a comparação entre racionais: acostumados com a relação 3 > 2, terão de compreender uma desigualdade que lhes parece contraditória, ou seja, $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$;
> - se o 'tamanho' da escrita numérica, no caso dos naturais, é um bom indicador da ordem de grandeza (8345 > 83), a comparação entre 2,3 e 2, 125 já não obedece ao mesmo critério;
> - se, ao multiplicar um número natural por outro natural (sendo este diferente de 0 ou 1) a expectativa é a de encontrar um número maior que ambos, ao multiplicar 10 por $\frac{1}{2}$, se surpreenderão ao ver que o resultado é menor do que 10;
> - se a sequência dos números naturais permite estabelecer sucessor e antecessor, para os racionais isso não faz sentido, uma vez que entre dois números racionais quaisquer é sempre possível encontrar outro racional;
> - assim, o aluno deverá perceber que entre 0,8 e 0,9 estão números como 0,81, 0, 815 ou 0,87.

Tais obstáculos serão considerados no presente estudo e cogitadas soluções, ou, pelo menos, modos de amenizar a incidência dos mesmos.

Portanto, foi norteado pela teoria dos registros de representações semióticas, pelos pontos abordados da teoria socio-histórica de Vygotsky e nas considerações dos PCN, que o presente trabalho foi desenvolvido e, acredita-se que os alunos envolvidos no mesmo terão oportunidades melhores no prosseguimento dos estudos, além de ser mais uma oportunidade de divulgação e de contribuição bibliográfica da teoria dos registros de representações semióticas no meio acadêmico.

CAPÍTULO 3
ANÁLISE DIDÁTICA

Na busca por melhorias no processo de ensino e aprendizagem em Matemática, vários pesquisadores têm se interessado pelo estudo dos números racionais. Alguns, inclusive, utilizaram a teoria desenvolvida por Duval ou a teoria desenvolvida por Vygotsky para nortear suas pesquisas.

São apresentadas neste capítulo algumas considerações de pesquisadores que demonstraram uma preocupação com o ensino da Matemática e cujos trabalhos foram considerados como relevantes para o presente estudo.

Bryant e Nunes (1997) desenvolveram um estudo que teve por objetivo explorar o modo como as crianças aprendem Matemática e também como essa aprendizagem influencia o pensamento da criança. Os autores defendem um ensino que dê condições para as crianças se tornarem numeralizadas, isto é, capazes de dominar as operações matemáticas e saber utilizá-las para resolver situações cotidianas. Conforme os autores (BRYANT E NUNES, 1997, p. 19):

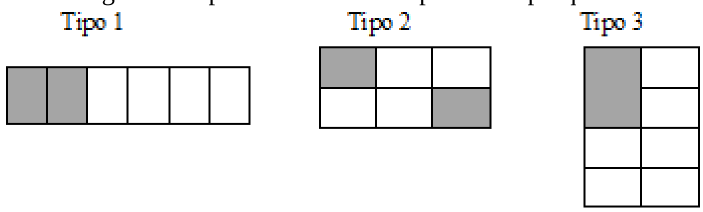
> Ser numeralizado, como se vê, não é o mesmo que saber calcular, mesmo que os empregadores possam, às vezes, pensar isso [...] É ser capaz de pensar sobre e discutir relações numéricas e espaciais utilizando as convenções (ou seja, sistema de numeração e medida, terminologia como volume de área, ferramentas como calculadoras e transferidores, etc) da nossa própria cultura.

Para ser numeralizada, a criança precisa ser lógica, saber utilizar sistemas convencionais e saber utilizar o pensamento matemático de modo apropriado para resolver situações cotidianas.

Bryant e Nunes (1997) acreditam que, mais que as outras disciplinas, a Matemática está intimamente ligada à Lógica e um dos critérios para que a criança desenvolva o raciocínio matemático é a compreensão de alguns conceitos lógicos, tais como a conservação e a transitividade para que se possa distinguir quando uma mudança implicará em uma alteração numérica e quando isso não ocorrerá. Defendem que as crianças precisam aprender sistemas convencionais para se tornarem numeralizadas, tais como, o sistema métrico e os sistemas de numeração e estes podem variar conforme a cultura na qual o sujeito está inserido.

Em relação à resolução de situações, Bryant e Nunes (1997, p. 30) defendem que "*temos que entender a situação-problema a fim de pensar matematicamente sobre ela*" (grifo dos autores) e isso será possível se houver a compreensão do pensamento matemático. Bryant e Nunes dedicaram um capítulo do livro para a compreensão dos números racionais e aqui são apontados os pontos julgados como mais relevantes para essa pesquisa. Os autores começam com uma crítica ao ensino dos números racionais na representação fracionária por meio do significado parte-todo, chamam a atenção para uma aprendizagem aparente, na qual a criança apenas relaciona corretamente o número racional a uma determinada quantidade indicada de modo figural por conta de um sistema de dupla contagem. Essa preocupação surgiu a partir da comprovação, por meio de pesquisas realizadas por outros autores, de que os alunos são conduzidos a contar o número de partes pintadas na figura e indicar esse número no numerador e também contar o número total de partes e indicar esse número no denominador, fato que não comprova a apropriação do conceito de número racional, pelo contrário, causa uma concepção errônea no sistema cognitivo do aluno. Em uma das pesquisas analisadas pelos autores, a pesquisadora utilizou problemas dos três tipos indicados na figura abaixo:

Figura 1- Tipos de itens contemplados na pesquisa.



Fonte: Baseado na figura 8.2 de Bryant e Nunes (1997, p. 193).

Nessa pesquisa apenas 4% dos alunos conseguiu responder corretamente as questões do tipo 3 e esse percentual pode ser justificado pelo fato de que “[...] pedir às crianças que identifiquem frações em diagramas que não podem ser resolvidos por contagem dupla e requerem em termos de relação parte-todo” (BRYANT e NUNES, 1997, p.192) irá apresentar resultados satisfatórios apenas de alunos que, de fato, compreendem o significado de número envolvido na questão enquanto que os auto índices de acertos apresentados para questões do tipo 1 e 2 podem ser um indicativo de utilização apenas de dupla contagem. A maioria dos erros dos alunos foi decorrente do uso da dupla contagem para indicar a parte pintada na figura, o que demonstra que, se a abordagem não for apropriada e as questões propostas não envolverem as diversas formas de representação figural do número racional, pode-se sugerir uma aprendizagem aparente, decorrente não da apropriação do conceito de número racional por meio da conversão de tais registros, mas de uma memorização da técnica de dupla contagem que não faz sentido algum para o aluno que apenas a reproduz sem entender o significado de número que está inserido na questão proposta.

Essa análise é de grande valia para o trabalho que está sendo proposto na presente pesquisa, pois, apesar de se ter iniciado a abordagem dos números racionais por meio da representação fracionária no seu significado parte-todo, é possível verificar que houve a preocupação quanto à minimização desse tipo de erro ao se observar a Oficina I, presente no Capítulo 4 desse trabalho e também algumas das atividades que foram propostas nos Instrumentos de Verificação de Aprendizagem, nos Apêndices.

Outro aspecto enfatizado pelos autores diz respeito à necessidade do uso de frações equivalentes para adicionar ou subtrair frações. Em uma das pesquisas que foram analisadas, mostra-se que, apesar de crianças terem demonstrado saber calcular frações equivalentes, elas não as utilizaram para realizar somas e subtrações, estendendo para os números fracionários os procedimentos utilizados com os números naturais, isto é, somando ou subtraindo diretamente numerador com numerador e denominador com denominador, indicando mais uma vez a não apropriação do número racional.

Mesmo não tendo norteado o trabalho nas considerações de Duval, Bryant e Nunes (1997) abordam a importância da representação quando concordam com outros autores quanto à necessidade de mudar da representação da língua natural, em situações problemas cotidianas, para a representação simbólica (numérica) para que o aluno se aproprie do conhecimento matemático e consiga representar simbolicamente uma situação cotidiana que ele consegue resolver de maneira informal, mas não sabe representá-la matematicamente. Em uma das situações discutidas foi pedido que o aluno considerasse duas pizzas iguais, sendo uma dividida em seis partes iguais e a outra dividida em oito partes iguais e se questionou quando ele estaria comendo um pedaço maior de pizza, se ao comer uma fatia da primeira pizza ou da segunda. Esse problema foi resolvido empiricamente com facilidade pelos alunos, porém, quando eles tentaram resolver simbolicamente eles não souberam identificar que $\frac{1}{6}$ é maior que $\frac{1}{8}$ e, inclusive indicaram que $\frac{1}{8}$ era maior porque 8 é maior que 6. Algumas sugestões são fornecidas para que esse tipo de erro possa ser minimizado e uma delas é justamente trabalhar junto ao aluno as conversões entre a representação na língua natural e a representação simbólica, o que um dos autores chama de “mover para frente e para trás”, e conduzir o aluno formalizar as soluções de situações cotidianas.

Sabe-se que, até mesmo por carência de outros recursos, um dos principais instrumentos utilizados pelos professores para o ensino da Matemática é o livro didático. Catto (2000), norteada pela teoria dos registros de representações semióticas, desenvolveu a análise de duas coleções de livros didáticos, com o objetivo principal de investigar até que ponto era apresentado os diversos registros de representação do número racional e como eram trabalhados os tratamentos e as possibilidades de conversão entre dois registros distintos. Os registros de representação dos números racionais apreciados foram: o simbólico (correspondendo aos registros de representação numérico e algébrico), o figural (descrevendo um conjunto discreto ou contínuo) e a linguagem natural.

Na realidade, a proposta inicial da autora seria o estudo da função exponencial, porém, quando aplicou o primeiro teste (*a priori*) com alunos das turmas de terceiro ano dos cursos de Eletrônica e de Edificações de uma Escola Técnica Federal, a autora percebeu nas respostas atribuídas às questões várias lacunas quanto à realização dos tratamentos e das conversões de potências cujo número da base assumia uma representação decimal ou fracionária. Diante do resultado inesperado, Catto (2000) decidiu por abandonar a abordagem de um tema mais geral, a função exponencial, e estudar um problema mais específico, a potenciação dos números racionais. Novamente, elaborou um teste para verificar os conhecimentos prévios dos alunos, desta vez, quanto à potenciação dos números racionais e o aplicou a alunos do Ensino Médio e do primeiro ano de um curso de Licenciatura em Matemática. Diante das respostas concernentes ao segundo teste, a autora concluiu que os erros na resolução das questões de potência provavelmente estariam na dificuldade em lidar com os números racionais e suas representações, o que a fez decidir pela abordagem dos números racionais no processo de ensino, por meio da análise de duas coleções de livros didáticos.

Foram escolhidas duas coleções de livros didáticos que abrangem os anos do Ensino Fundamental, na época, ainda reconhecidos como sendo da primeira à oitava série e cuja adaptação ao termo ano foi feito para a apresentação neste trabalho, isto é, o que a autora apresentou como sendo terceira série em seu trabalho, aqui será apresentado como sendo quarto ano e assim sucessivamente. A autora optou pelas coleções do estudo por conta da distinção quanto à abordagem dos conteúdos, enquanto a Coleção de Livros Didáticos 1 (CLD-1) apresenta uma estrutura dos conteúdos de forma “compartimentalizada”, a Coleção de Livros Didáticos 2 (CLD-2) faz uma abordagem em forma de “espiral”.

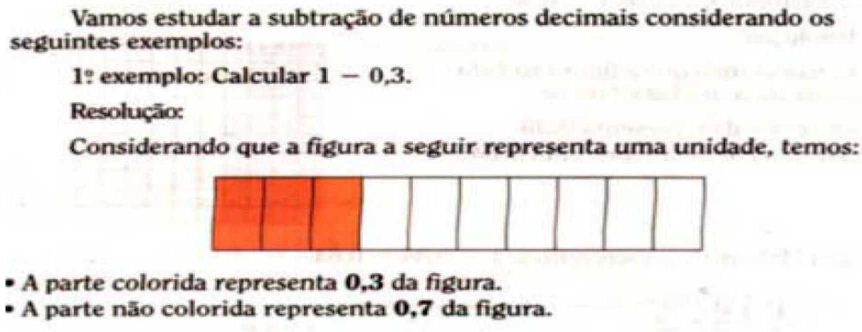
Catto (2000) começou descrevendo as principais características das duas coleções. A CLD-1 é dividida em unidades e estas em capítulos. Cada capítulo inicia com uma abordagem histórica e um exemplo serve como ponto de partida para a introdução dos conceitos, das regras e das propriedades. Ainda segundo a autora, esta coleção enfatiza a resolução de atividades de fixação por meio do uso de algoritmos e os conteúdos, na maioria das vezes, não são relacionados. Quanto à CLD-2, a abordagem dos conteúdos é feita em formato de espiral, isto é, um mesmo conceito é abordado em diversas áreas (aritmética, álgebra, geometria, medidas de grandeza) e também em anos seguintes sobre novas abordagens, os conteúdos e as atividades são apresentados de modo contextualizado, existem seções que estimulam a atividade em grupo, o cálculo mental e o cálculo de estimativas.

Em seguida foi realizada a análise das duas coleções em relação aos registros de representação fracionário e decimal, assim como a articulação entre esses e os outros registros. Houve um pouco de dificuldade na análise nesse formato da CLD-2, pois os conteúdos são apresentados em forma de espiral, o que faz com que um mesmo conteúdo seja abordado várias vezes e em diferentes contextos, não sendo abordado em apenas um momento específico.

Uma consideração que chamou a atenção foi que a conversão entre os registros fracionário e decimal ocorrem raramente na CLD-1 e o enfoque é dado à representação fracionária, fato que pode significar um obstáculo na conceituação do número racional. As conversões são estimuladas do sentido figural para o fracionário, nesta ordem, e, na maioria das vezes, do sentido figural para a linguagem natural. Em relação à representação decimal do número racional, a conversão entre os registros numéricos são mais frequentes.

Outra crítica feita pela autora foi de que a conversão do registro de representação figural para o decimal é apresentado como se ocorresse de modo natural, isto é, sem o uso da fração decimal como intermédio, conforme foi apresentado na questão abaixo e em outras citadas pela autora:

Figura 2 - Exemplo de conversão do registro de representação figural para o decimal.


Vamos estudar a subtração de números decimais considerando os seguintes exemplos:

1º exemplo: Calcular 1 − 0,3.

Resolução:

Considerando que a figura a seguir representa uma unidade, temos:

- A parte colorida representa **0,3** da figura.
- A parte não colorida representa **0,7** da figura.

Fonte: Catto, 2000, p. 67

Porém, sabe-se que a conversão ocorre de modo natural, isto é, há congruência entre os registros de representação, quando a conversão vai do registro de representação figura para o registro de representação fracionário, o que não ocorre quando se solicita uma conversão do registro de representação figural para o decimal, tornando a compreensão mais difícil.

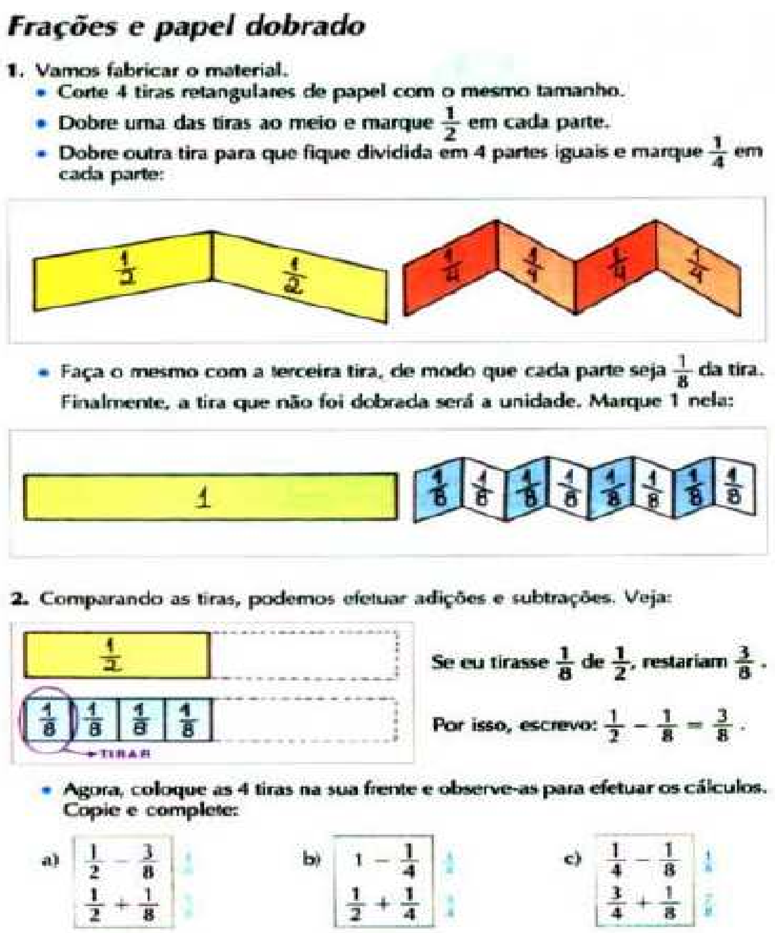
Um dos pontos positivos da CLD-1 é a introdução da porcentagem desde o 5° ano e envolvendo o registro numérico, o símbolo % e a fração decimal. E também o registro decimal relacionado ao estudo das medidas em uma unidade específica no livro do 6° ano.

Ao analisar a CLD-2, algo que chamou a atenção foi que já no 4° ano são apresentados os registros de representação decimal, fracionário e a fração decimal (0,5, $\frac{1}{2}$ e $\frac{5}{10}$), como representantes de um mesmo número, porém, não é feita a articulação entre os diversos registros, usando-os de modo isolado e conforme a adequação a situação proposta. Além disso, a fração surge sem que se tenha feito menção anterior a este termo.

As operações de adição e subtração surgem no livro do 5° ano por meio da articulação entre os registros figurais e fracionários, neste último são realizados os tratamentos.

Na atividade "Ação", o aluno é levado a utilizar objetos concretos para, a partir da manipulação, realizar a conversão do registro figural para o fracionário e tentar tratar este último. A figura 3 ilustra o recorte acima.

Figura 3 - Uso de objeto concerto como meio para a realização de conversões.



Fonte: Catto, 2000, p. 91.

Notou-se também que em alguns momentos a CLD-2 apresenta confusões entre o representante e o representado ao tentar definir os números racionais.

Quanto à análise do número racional em sua representação decimal, a CLD-2 faz a introdução dessa representação com o uso do material dourado. Essa apresentação propicia a articulação entre os registros de representação figural, fração decimal, linguagem natural e decimal. Nesta coleção, CLD-2, as atividades contextualizadas surgem com mais frequência e os números racionais em sua representação decimal são explorados por meio das relações entre quilo e gramas, entre metro, centímetro e milímetro e entre real e centavo em situações cotidianas.

A autora pode concluir que todos os registros foram mobilizados na introdução dos números racionais, mudando na abordagem realizada por cada coleção. Ao final do trabalho foi apresentado o esquema abaixo, que mostra as conversões realizadas mais frequentemente pelas coleções e o sentido adotado. Para a compreensão do esquema, é necessário saber que a autora atribuiu o símbolo F para o registro figural, NF para número fracionário, D para número decimal, FD para fração decimal e LN para linguagem natural.

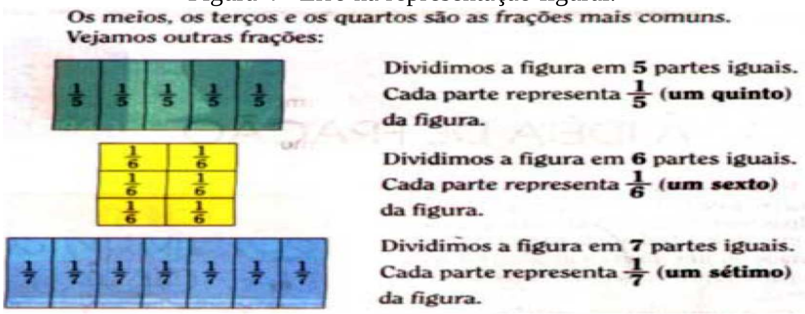
Quadro 2 - Esquema das conversões observadas.

- (F) → (NF) ou (F) → (D) - o sentido mais abordado
- (NF) → (F) ou (D) → (F) - menor freqüência
- (F) → (NF) → (LN) ou (F) → (FD) → (D) - único sentido
- (NF) → (LN) ou (LN) → (NF) – poucos casos

Fonte: Catto, 2000, p. 146.

A leitura desse trabalho foi importante para o desenvolvimento da presente pesquisa, principalmente porque, por meio da análise das duas coleções de livros didáticos, acentuou-se a preocupação quanto ao desenvolvimento da sequência de ensino que é objetivo desse estudo. Por exemplo, na página 57, Catto (2000) chama a atenção quanto à abordagem feita na CLD-1 ao mostrar as representações figurais de $\frac{1}{5}$ e de $\frac{1}{7}$ como sendo retângulos com uma mesma área, não apresentando ao aluno que a quantidade representada por $\frac{1}{5}$ é maior que a quantidade representada por $\frac{1}{7}$, o que poderia dificultar a conceituação do número racional, conforme a figura 5.

Figura 4 - Erro na representação figural.



Fonte: CATTO, 2000, p. 57.

Outro ponto que também contribuiu positivamente foi quanto ao questionamento feito a respeito do uso de várias terminologias para a comparação entre frações, no qual a autora faz menção ao uso das frações equivalentes por meio do concreto (representação geométrica) ao invés de "terminologia desnecessária, como frações aparentes, impróprias,..., mínimo múltiplo comum e menor denominador comum que pouco esclarecem e muito complicam" (CATTO, 2000, p. 59), uma vez que os alunos nem sempre têm maturidade Matemática para tal abordagem.

Após a leitura do trabalho de Catto (2000), algumas modificações foram realizadas no esquema da sequência de ensino na busca por melhorias da mesma.

O trabalho de Bezerra (2001), realizado com alunos do terceiro ano do Ensino Fundamental, no qual o contato com os números racionais foi considerado como inédito, teve por finalidade introduzir o conceito de número racional por meio da representação fracionária e uso dos significados parte-todo e quociente. Neste momento, o autor limitou-se a abordar a fração em apenas dois tipos de registros por considerá-los mais acessíveis aos sujeitos da pesquisa e pelo fato dos mesmos não terem tido contato com esse objeto matemático anteriormente. A fundamentação teórica diverge da adotada na presente pesquisa por não ser a do registro de representação semiótica, porém o autor direcionou o trabalho para a formação do conceito de número fracionário a partir de situações-problemas que tinham relação com o cotidiano dos alunos e estimulou o trabalho em grupo, norteado por Vygotsky. Outro aspecto similar ao da presente pesquisa é que o trabalho desenvolvido por Bezerra (2001) também foi desenvolvido com alunos de classe média e baixa, que vive em condições em que o acesso à cultura é o mínimo possível.

Bezerra (2001), ao contrário do que propõe a maioria dos livros didáticos, optou por introduzir o conceito de número racional a partir de divisões com números naturais no universo das unidades discretas e contínuas, problematizando uma representação para o resto da divisão. Foram realizados dois testes com os sujeitos: pré-teste e o pós-teste, com dois grupos distintos de alunos, os quais foram denominados grupo experimental (o que teve contato com a sequência didática) e grupo controle (o que não teve acesso a sequência didática) e a validação ocorreu por meio da comparação entre os resultados apresentados por ambos os grupos.

O pré-teste é composto por dez questões que contemplam os significados de parte-todo e de quociente dos números racionais na representação fracionária e envolvem variáveis discretas e contínuas. A dinâmica da aplicação desse teste foi fazer com que cada questão fosse apresentada individualmente e que a questão seguinte apenas fosse entregue aos alunos após análise da questão anterior.

O pós-teste é também composto por dez questões e com o intuito de manter o mesmo grau de dificuldade, não fosse por um equívoco em uma das questões na qual um erro de digitação fez com que seu grau de dificuldade fosse elevado.

A análise dos resultados demonstra que os alunos que foram submetidos à sequência didática tiveram uma melhora significativa na formação do conceito de número racional, o que transparece quando o autor aponta que 70% dos alunos do grupo experimental conseguiram resolver corretamente o pós-teste, enquanto que no pré-teste o percentual de acertos tinha sido de apenas 12%.

A leitura deste trabalho também foi relevante para se ter acesso a outras abordagens e enfatizar que a preocupação pela conceituação dos números racionais deve ser estimulada desde os primeiros anos escolares, conforme rege os PCN. Pelo que foi constatado por meio dos testes realizados com os sujeitos da presente pesquisa, o contato dos mesmos com os números racionais também é quase que inédito, o que fez com que alguns pontos da sequência de ensino adotada por Bezerra (2001) norteassem a elaboração de algumas questões da sequência didática desse trabalho.

Dentre os vários trabalhos apreciados, a maioria apresentava uma proposta de ensino para os números racionais em suas diversas formas de representação. Mas, será que alguém já se preocupou em estudar, não o que nem como os alunos podem vir a se apropriar do conceito de número racional, mas o que os sujeitos conseguiram aprender após anos de estudo formal? A resposta para esse questionamento é sim e as considerações que serão apresentadas a seguir dizem respeito ao trabalho desenvolvido por Rodrigues (2005) com 13 alunos do 9° ano (na época oitava série) do Ensino Fundamental, 31 alunos do 3° ano do Ensino Médio e também com 29 alunos de alguns cursos da área de ciências exatas do Ensino Superior, cujo objetivo era verificar quanto do conceito de número fracionário em seus significados de parte-todo e de quociente foi apropriado por tais alunos.

A pesquisa é fundamentada basicamente nas concepções de Caraça sobre os números racionais, nos princípios das psicologias de Vygotsky e Vergnaud e nas ideias de alguns pesquisadores que desenvolveram trabalhos com os números racionais. Constou de um instrumento de verificação composto por 48 questões envolvendo o número fracionário nos significados de parte-todo e quociente. Algumas das questões foram inéditas, criadas pelo próprio pesquisador e as demais foram reproduzidas de trabalhos desenvolvidos por outros autores.

Como uma das preocupações de Rodrigues (2005) foi não ter obstáculos gerados por conta de os alunos terem tido acesso a uma precária formação educacional, os sujeitos selecionados eram pertencentes a instituições de ensino renomadas, das quais, os alunos do Ensino Médio e do Ensino Superior passaram por rigorosos testes de admissão nas mesmas e os alunos do Ensino Fundamental eram de uma escola particular considerada modelo.

O instrumento utilizado é extenso e por este motivo, o autor decidiu por dividi-lo em três cadernos de questões, contendo o primeiro 6 grupos de 3 questões cada e os outros dois cadernos com 5 grupos de 3 questões cada.

Inicialmente foi feita a análise quantitativa dos dados de cada grupo de 3 questões e, em seguida, a análise qualitativa com base nos dados apresentados na primeira análise.

Norteado pelos dados da análise quantitativa, o autor, ao realizar a análise qualitativa notou que os sujeitos não souberam responder a um número consideravelmente grande de questões que exigiam a apropriação do significado da fração como parte-todo, quando esse todo, a unidade, poderia ser confundido. Em uma das questões propostas, foram apresentadas duas pizzas, nas quais existia uma representação que indicava as fatias que haviam sido consumidas e fatias que não tinham sido consumidas. Foi solicitado dos alunos que supusessem poder deslocar as fatias de uma pizza para outra e perguntou-se quanto de uma pizza restaria. Nessa situação, muitos sujeitos se confundiram ao escolher a unidade, que seria uma pizza, tomando a unidade referencial como sendo as duas pizzas. Para o autor, esse tipo de erro representa um lacuna na apropriação desse conceito relacionado ao número racional, posto que os sujeitos participantes da pesquisa já tinham passado pelo ensino formal de tal objeto matemático.

O autor faz uma crítica quanto ao ensino dos números racionais por meio da significação parte-todo da representação fracionária pelo fato de alguns professores não chamarem a atenção dos alunos para a condição de que esse tipo de representação só é válido quando a unidade é dividida em partes iguais e que é necessário definir a unidade antes da realização de qualquer procedimento.

Outro ponto que chamou a atenção na análise qualitativa foi quando o autor apontou que um erro na solução de uma questão por parte dos alunos, provavelmente, fora ocasionado pelo fato de a questão ter sido mal elaborada. Isso mostra o quanto é importante que educadores planejem suas aulas que, na medida do possível, tentem se colocar na posição de aluno e verifiquem se os enunciados das questões que são propostas estão claros e atendem ao nível dos sujeitos que deverão resolvê-las.

Várias outras considerações foram realizadas, porém foram expostas aqui as mais relevantes para a presente pesquisa. Em linhas gerais, o autor enfatiza que o professor precisa ter uma preocupação maior ao explorar o conceito de número racional, principalmente na representação fracionária para que o aluno possa compreender que uma fração é um número, é um objeto matemático, e não números naturais sobrepostos.

Um dos grandes enigmas existentes no campo educacional é a aprendizagem escolar. Amorim (2007) é mais uma pesquisadora que, preocupada em contribuir para a melhoria da aprendizagem escolar, mais especificamente, da aprendizagem da Matemática, desenvolveu um trabalho com 23 alunos do 6° ano (na época, ainda quinta série) de uma escola pública, no qual ela utilizou como aporte teórico a teoria socio-histórica para verificar como ocorreu a apropriação da significação do conceito de número racional nos alunos selecionados.

A autora fez uso dos conceitos de zona de desenvolvimento proximal, do estágio de desenvolvimento dos conceitos e da inter-relação entre os conceitos cotidianos e científicos para elaboração do trabalho.

Dentre as considerações apontadas por Amorim (2007), uma é o fato dos números racionais serem objeto de pesquisa de inúmeros pesquisadores por constituírem a introdução de um novo campo numérico que inquieta os alunos por romperem com o que até então era algo seguro e de fácil entendimento, isto é o que autora determinou como sendo a lógica dos números naturais.

Amorim (2007) faz algumas críticas ao ensino tradicional dos números racionais e enfatiza dois pontos dessa abordagem. O primeiro, no qual a noção de fração é apresentada apenas pela figura geométrica dividida em partes iguais para a qual o aluno atribuirá uma fração para representação do número de partes pintadas. Nessa abordagem, a autora acredita que o aluno apenas coloca na parte de cima de um traço horizontal o número que representa a quantidade de partes pintadas e na parte de baixo o número que representa o total de partes, criando a ideia de que a fração é um número natural sob outro. O segundo aspecto é referente ao “ensino” das operações de adição e de subtração de frações pelo processo de mínimo múltiplo comum, no qual o aluno memoriza e aplica uma técnica, sem ter noção da necessidade da mesma. A abordagem defendida pela autora é a que utiliza frações equivalentes, pois auxilia na formação da significação do conceito.

Mesmo não utilizando a teoria dos registros de representação semiótica como fundamentação teórica, a autora, baseada nos apontamentos de outros autores e utilizando outros termos, compartilha do pressuposto de que há necessidade de articulação entre as diversas representações do número racional para que a conceituação seja atingida.

Como referência para o estudo dos números racionais, Amorim (2007) amparou-se em Caraça e sobre tais considerações mostra todo o processo do desenvolvimento desse campo numérico, segundo esse autor.

Amorim (2007) baseia-se na teoria de Caraça para desenvolver as atividades, ou seja, parte do concreto para depois acrescentar as propriedades e as operações fundamentais com os números racionais. A autora inicia o trabalho com os alunos abordando um pouco da história dos números racionais e, em seguida propõe a seguinte atividade: solicita aos alunos que comparem as medidas de dois segmentos, sendo um de medida 2 e o outro de medida 14, e pede que verifiquem quantas vezes o menor cabe no maior. Nessa etapa inicial não encontrou dificuldades e as respostas foram unânimes. Em seguida pede que repitam o procedimento, porém, desta vez com um segmento medindo 2 e o outro medindo 15 e, dessa vez, as respostas são várias e nenhuma se apresenta correta. Essa atividade serviu para motivar os alunos quanto ao estudo dos números racionais, pois fez com eles tivessem uma sensação similar à apresentada nos livros de história da Matemática quanto ao surgimento dos números racionais, ou seja, a necessidade de um novo campo numérico, visto que os números naturais não eram suficientes para resolver alguns problemas propostos. Se a situação citada anteriormente fosse analisada do ponto de vista da teoria socio-histórica, estaria observando a construção de uma zona de desenvolvimento proximal por estar proporcionando ao aluno o contato com conceitos que ainda não foram formados, mas que podem vir a amadurecer por meio de uma mediação apropriada. Diante dessas e de outras atividades propostas que partiram desse mesmo princípio, houve a introdução do número misto logo no início do trabalho, o que não é comum, visto que os livros didáticos abordam esse tipo de número ao final da apresentação dos números racionais e em uma parte isolada do conteúdo. De tal modo, a abordagem mostrou-se inovadora e significativa pelo fato de poder mostrar a partir dos números mistos o que é considerado como parte inteira e o que é considerado como parte fracionária.

A próxima etapa foi abordar o conceito de equivalência entre números fracionários. Nesse momento a autora propõe atividades com objetos manipulativos e media a atividade pedindo aos alunos que façam comparações entre as partes do inteiro. São utilizadas como medidas o inteiro, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{8}$. Além da ideia de equivalência, a operação de adição de frações também é introduzida. No início os alunos mostram um grande apego aos algoritmos dos números naturais e os estendem para os números racionais. Por exemplo, ao serem indagados quando é $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ a resposta unânime é $\frac{2}{8}$. Esse equívoco foi amenizado pela mediação da professora e da pesquisadora no decorrer do trabalho.

Dando sequência ao trabalho, Amorim (2007) media atividades que têm como objetivo encontrar frações respectivamente equivalentes a duas frações dadas e cujos denominadores são iguais. Para tanto, são utilizadas réguas de madeira para representar o inteiro, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{6}$. A autora mostra aos alunos, a partir da manipulação das réguas de madeira e da construção de segmentos com o uso da régua numerada, que para encontrar frações respectivamente equivalentes a duas frações dadas e com mesmo denominador é suficiente multiplicar o numerador e o denominador da primeira fração pelo denominador da segunda fração e vice-versa, mas tudo isso feito a partir da manipulação de objetos e das figuras para que não seja realizado um procedimento de decorar "macetes". Uma das dificuldades ainda encontrada nesse momento é a dificuldade dos alunos quanto ao uso correto da régua, pois nas séries anteriores eles só utilizaram esse instrumento para fazer linhas e não para mentir.

Após a realização das partes citadas, Amorim (2007) dá continuidade ao trabalho explorando as quatro operações fundamentais com os números racionais: adição, subtração, multiplicação e divisão de um modo mais específico.

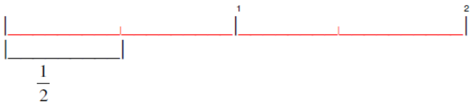
Em relação à adição, apesar de todos os procedimentos realizados anteriormente, ao propor uma situação de soma entre duas frações, a autora observa que as respostas dadas são frutos da concepção de adição com números naturais, ou seja, os alunos somam numerador com numerador e denominador com denominador. Então, novamente se utiliza os segmentos de reta para mostrar a maneira correta de adicionar frações e para que seja ultrapassado o limite do desenvolvimento efetivo são utilizadas perguntas-guias. Por exemplo, para se calcular o valor da expressão $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ a autora, por meio de questionamentos aos alunos, chega à seguinte representação: traça um segmento de reta de 6 cm e pede que este seja divido ao meio, encontrando assim o segmento metade com 3 cm. Em seguida, do segmento metade pede que seja identificado $\frac{1}{3}$, encontrando um segmento de 1 cm e observa que três desse mesmo segmento, ou seja, $\frac{3}{6}$, representa $\frac{1}{2}$ do segmento unidade. Assim, a fração $\frac{1}{2}$ é equivalente à fração $\frac{3}{6}$. Procede da mesma maneira e conclui que a fração equivalente a $\frac{1}{3}$ é $\frac{2}{6}$. Então, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$. Após vários exercícios, a notação algébrica, do tipo $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = (\frac{a}{b}).(\frac{d}{d}) + (\frac{c}{d}).(\frac{b}{b}) = (\frac{a.d + c.b}{b.d})$ é introduzida, o que gera um desconforto por parte dos alunos que, após a mediação da pesquisadora podem verificar o significado da expressão.

Quanto à subtração, o estudo segue o mesmo percurso da adição, a apresentação do número fracionário e a sua interpretação algébrica por meio do uso de réguas de madeira e de segmentos de reta.

Em seguida, é apresentada aos alunos a operação de multiplicação entre números racionais na representação fracionária e figural (por meio de segmentos de reta). A autora não se contém em dizer aos alunos que para multiplicar dois números fracionários é suficiente multiplicar o numerador da primeira fração com o numerador da segunda fração e realizar o mesmo procedimento com os denominadores, conforme abordado nos livros didáticos. Amorim (2007) utiliza as réguas de madeira e a representação figural dos números racionais envolvidos para mostrar aos alunos que este procedimento de fato é válido, porém tem um significado como, por exemplo, a autora auxilia os alunos a resolverem $\frac{1}{4} \cdot . \frac{1}{2}$ por meio da construção de um segmento de reta de medida 8 cm, o qual representa a unidade (o todo). Depois, pede que os alunos dividam esse segmento ao meio para que obtenham a metade, $\frac{1}{2}$ (4 cm), em seguida, solicita que os mesmos dividam o segmento metade em quartos. Ao tomar $\frac{1}{4}$ da metade os alunos percebem que esse mesmo segmento representa $\frac{1}{8}$ (1 cm) do segmento unidade-todo, ou seja, $\frac{1}{4} \cdot . \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. Procede desse modo em outros exemplos até que utiliza a síntese da multiplicação entre dois números racionais com a representação fracionária apresentada por Caraça (2003) da seguinte maneira: $\frac{r}{s} \cdot . \frac{p}{q} = \frac{\frac{p.r}{s}}{q}$, cuja leitura é: multiplicar uma fração $\frac{r}{s}$ por $\frac{p}{q}$ é tomar q partes de p vezes a fração $\frac{r}{s}$.

Ao realizar o estudo da divisão entre dois números racionais na representação fracionária, Amorim (2007) segue com a ideia de construção de segmentos de reta para representar a operação. Inicia com um exemplo no qual o dividendo é um número fracionário e o divisor é um número inteiro, isto é, $\frac{1}{2}$: 2. Pede aos alunos que construam um segmento unidade com 8 cm, que marquem a sua metade, um segmento de 4 cm e observem quantas vezes duas unidades cabem em $\frac{1}{2}$. Por meio do esquema apresentado abaixo, mostra aos alunos que apenas $\frac{1}{4}$ de duas unidades cabem em $\frac{1}{2}$ da unidade. Concluindo, então que $\frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{4}$.

Figura 5 - Representação figural da divisão $\frac{1}{2}$: 2.



Fonte: Amorim, 2007, p.132.

A presente ideia não é compreendida inicialmente pela maioria dos alunos, pelo fato de estarem acostumados a operar com os números naturais, não conseguem compreender que 2 unidades não cabem nenhuma vez inteira em $\frac{1}{2}$ de uma unidade. Amorim (2007) tenta preencher as lacunas existentes procedendo da mesma forma com a expressão $2 : \frac{1}{2}$. A autora realiza vários outros exemplos, mostra a síntese pela qual a divisão pode ser realizada via multiplicação entre a fração dividendo e o inverso da fração divisor, mas para alguns alunos é mesmo muito difícil a compreensão de tal operação.

Pode-se considerar que a leitura dessa dissertação foi apropriada para esta pesquisa, porque além de demonstrar uma preocupação com o processo de ensino e aprendizagem dos números racionais é também uma aplicação da teoria desenvolvida por Vygotsky na Educação Matemática e tem considerações relevantes. A autora mostra-se contrária à postura da maioria dos professores ao se preocuparem apenas que os alunos se apropriem de uma memorização rápida de procedimentos relativos aos vários conteúdos propostos pelos currículos oficiais e pelos livros didáticos, sem que haja uma qualidade no processo de ensino e aprendizagem e sem a preocupação com o tempo necessário para que cada aluno atinja um nível de desenvolvimento efetivo razoável para o nível escolar em que se encontra. Porém, vale ressaltar que tal estudo não está de acordo com os pressupostos da presente pesquisa por não ter mobilizado os vários registros de representações semióticas, tendo se limitado apenas ao registro fracionário e ao figural quando da realização das atividades.

Várias são as formas de representação dos números racionais e, quando se fala da representação fracionária se pode encontrar situações diversas no cotidiano, possíveis de serem representadas por uma fração. Uma das funções da fração é representar situações que envolvem a representação dos valores na forma de razão. Existem situações que podem ser representadas tanto na forma de fração como na forma de razão sem perda de significado.

Mas qual a maneira mais acessível ao aluno, a representação na forma de fração ou a representação na forma de razão?

Bryant, Campos, Magina e Nunes (2009), norteados pelo trabalho de outros autores, desenvolveram um trabalho no qual eles abordam justamente essas duas formas de representação e suas peculiaridades e, mesmo não sendo o foco do presente trabalho, é interessante apresentar os registros feitos a partir da leitura desse material, pois apresenta pontos relevantes para a elaboração de materiais de aprendizagem.

Os autores iniciam falando um pouco sobre a diferença entre valores intensivos e valores extensivos, e segundo eles “as quantidades intensivas são representadas por dois números, formando uma razão ou fração” (BRYANT, CAMPOS, MAGINA E NUNES, 2009, p.153) enquanto que as quantidades extensivas podem ser representadas por um único valor. É sobre as quantidades intensivas que os autores fazem a análise. Eles consideram o trabalho desenvolvido por outro autor, no qual alunos foram avaliados sobre a capacidade de resolverem problemas idênticos nas seguintes condições:

1. Com materiais manipuláveis e linguagem de frações;
2. Com materiais manipuláveis e linguagem de razões;
3. Sem materiais manipuláveis e linguagem de frações;
4. Sem materiais manipuláveis e linguagem de razões.

Os alunos dessa pesquisa tinham entre 8 e 10 anos e uma das questões propostas foi a seguinte (BRYANT, CAMPOS, MAGINA E NUNES, 2009, p.156):

> Duas garotas estão fazendo suco.
> **Linguagem de frações:** A receita indica que elas devem usar um terço de suco concentrado e dois terços de água.
> **Linguagem de razões:** A receita indica que elas devem usar um vidro de suco concentrado para cada dois vidros de água.
> Elas querem fazer 18 litros de suco para a festa da escola. Quanto de suco concentrado e quanto de água elas devem usar?
> (grifo dos autores)

Ao analisar as soluções apresentadas pelos alunos, é observado que, poder utilizar ou não os materiais manipulativos, não indica uma alteração significativa nos resultados. Por outro lado, os índices são alterados significativamente quando se observa o número de acertos em relação à linguagem de frações e a linguagem de razões. Os alunos demonstram ter mais domínio quando a linguagem é de razões, com exceção apenas dos alunos de 10 anos quando utilizam os materiais. Foi demonstrado que o número de acertos não está relacionado ao fato de os alunos já terem tido contato com o conceito de razão na vida escolar, pois não o tiveram, mas sim por essa linguagem proporcionar o estabelecimento de um raciocínio mais simples de relação de um para muitos, no qual os mesmos consideram a relação de um vidro de suco concentrado para dois de água, então concluem que dois vidros de suco concentrado estão para quatro de água, e assim até completar a quantidade que fora solicitada.

Em relação ao índice de acertos serem menor na linguagem de frações, pode-se dizer que este fato ocorre porque, principalmente, as crianças menores, de 8 e 9 anos, não têm domínio do raciocínio fracionário. Em relação às crianças de 10 anos, o número de acertos na linguagem de frações é melhor quando eles utilizam os materiais manipuláveis e a estratégia mais aplicada é relacionar a fração ao seu significado de divisão, isto é, os alunos notaram que precisam preparar 18 litros de suco e como as quantidades de suco concentrado e de água estão relacionadas a terços, então eles dividem 18 por 3, obtendo 6 (que é um terço) e descobrem que precisam de 12 vidros de água para 6 vidros de suco concentrado.

Os autores sugerem que se estabeleça a relação entre as duas linguagens para que o aluno possa perceber o que há em comum entre ambas e as particularidades de cada uma.

A obra de Catto (2000) também despertou o interesse de Igliori e Maranhão (2010), que desenvolveram um trabalho de cunho educacional com a finalidade de contribuir para a compreensão de algumas atividades relacionadas ao ensino e a aprendizagem do conceito de número racional, a partir da teoria em questão, desenvolvida por Duval. As autoras afirmam que “as implicações da não acessibilidade de um aluno ao conceito de número racional podem acarretar graves prejuízos à aprendizagem dos diversos ramos da Matemática” (IGLIORI e MARANHÃO, 2010, p. 57, IN MACHADO, 2010). Nessas palavras, é notória a preocupação das autoras com a aprendizagem dos alunos frente aos números racionais, assim como a importância de tal conteúdo para a vida escolar dos mesmos.

A partir da análise de algumas atividades Matemáticas realizadas por alunos do Ensino Médio no trabalho de Catto (2000), Igliori e Maranhão (2010), mostram que:

> [...] um sucesso em Matemática não se constitui necessariamente em um sucesso cognitivo. Um aluno pode dar uma resposta matematicamente certa, mas não mobilizar, de modo coerente, consistente, as unidades cognitivas específicas do funcionamento de um, entre dois, dos registros que se apresentam.

Para exemplificar uma situação na qual isso ocorra, as autoras relatam o modo como um aluno do Ensino Médio resolveu a seguinte questão: Calcule $(\frac{3}{2})^{-2}$. “E um dos alunos realizou os seguintes procedimentos: $(\frac{3}{2})^{-2} = (1{,}5)^{-2} = \frac{1}{(1{,}5)^{-2}} = \frac{1}{2{,}25}$” (CATTO, 2000, p. 2).

Nessa questão, observa-se que a resposta está matematicamente correta, mas, indicar como resposta $\frac{1}{2,25}$ significa que o aluno ainda não compreende como realizar a conversão do sistema de representação fracionário para o decimal, quando o denominador não é um número inteiro. O que implica dizer que existe uma lacuna na conceituação dos números racionais e que se essa mesma pergunta for formulada a partir de outro sistema de representação, pode ser que o aluno não consiga sequer encontrar uma resposta matematicamente correta.

As autoras abordam também a importância de se colocar para os alunos enunciados de questões claros, para que os mesmos não gerem ambiguidade que possam induzir o aluno a realizar registros inadequados para os objetivos do professor.

Nesta obra, fica clara a importância da aplicação da teoria dos registros de representações semióticas no processo de ensino e aprendizagem em Matemática assim como no processo avaliativo.

Um dos mais recentes trabalhos apreciados norteado pela teoria dos registros de representação semiótica foi o de Neres (2010) que em sua tese de doutorado buscou verificar se esta teoria seria capaz de melhorar o desempenho dos alunos em Matemática, mais especificamente, na resolução de situações-problemas com números naturais. O foco do trabalho de Neres (2010), apesar de não ser a formação do conceito de número racional, é interessante para a presente pesquisa por ser mais uma aplicação da teoria de Duval e por abordar um conceito que é compreendido como pré-requisito para a apropriação do conceito de número racional, os números naturais.

Neres (2010) procura identificar dificuldades de aprendizagem na resolução de problemas envolvendo as operações com números naturais, propõe situações de ensino com base na teoria em estudo e nas dificuldades de aprendizagem identificadas, analisa os resultados das situações de ensino vivenciadas à luz do referencial adotado. Enfatiza ainda que a teoria de Duval vem sendo discutida e estudada em diferentes Universidades do Brasil, por várias correntes metodológicas da Educação e da Educação Matemática e que tem como pressuposto a compreensão Matemática a partir da coordenação de pelo menos dois registros de representações semióticas.

Os sujeitos da pesquisa foram os 30 alunos do 6° ano A do COLUN, Colégio Universitário da Universidade do Maranhão, e o pesquisador contou com o auxílio da professora de Matemática da respectiva turma e de uma bolsista, aluna do sétimo período do curso de Licenciatura em Matemática da UFMA. Como o pesquisador não faz parte do corpo docente do COLUN, ele participou do planejamento pedagógico em janeiro e em agosto do ano de 2009, junto à professora da turma, para deixá-la a par da teoria dos registros de representação semiótica, de como seria a sua aplicação e também para discutirem e desenvolverem as atividades que comporiam os instrumentos de avaliação. Os cinco instrumentos, denominados pelo autor de instrumentos avaliativos e de verificação de desempenho, foram elaborados conjuntamente pelo pesquisador, pela professora e pela bolsista e continha questões já abordadas em livros didáticos e também questões inéditas elaboradas pelo pesquisador. A quantidade de questões de cada instrumento variou em um número entre 5 e 10.

O primeiro instrumento aplicado tem a função de verificar a compreensão em Matemática dos sujeitos envolvidos na pesquisa e serve de parâmetro para a coleta de dados da pesquisa. Os resultados demonstram um desempenho apenas regular por parte dos alunos e o autor aponta que as dificuldades surgem principalmente quando a questão envolve a conversão entre dois registros, os alunos também não sabem tratar os números naturais, além de demonstrar falta de atenção e de compreensão na leitura dos enunciados. Por exemplo, o problema 4, apresentado nas tabelas abaixo, é considerado como sendo um problema trivial e mesmo assim a maioria dos alunos não consegue converter para a linguagem numérica o que estava escrito na língua natural.

Quadro 3 - Algumas soluções construídas pelos alunos na pesquisa de Neres.

Quarto Problema	Tipos de Respostas Construídas
Represente o número doze de duas maneiras. Pode usar o ábaco, se quiser.	Doze e XII Outra solução: XII e representação num ábaco, mas de forma incorreta Outra solução: I. II. Outra solução: apenas XII. Outra solução: R=12, XXI, doze, 21.

Problema	Alunos Presentes	Sem Solução	Uma Solução Correta	Uma Solução Correta e uma Errada	Duas Soluções Corretas
Represente o número doze, de duas maneiras. Pode usar o ábaco, se quiser.	27	06	09	06	06
-	93,3%	22,2%	33,4%	22,2%	22,2%

Fonte: p. Neres, 2010, p. 88 e 89

Desse modo, após a conclusão dessa etapa, algumas medidas foram tomadas, dentre elas: realização de novas dicussões sobre a teoria de Duval entre pesquisador, professora da turma e bolsista, esse aspecto foi relevante pois o pesquisador não teve contato com a turma durante as aulas, apenas orientou a professora e a bolsista para que elas conduzissem o trabalho (essa medida foi tomada porque a professora da turma mostrou-se incomodada com a ideia de ter a presença de um pesquisador avaliando a sua prática pedagógica). A professora foi orientada a acrescentar às suas aulas questões que envolvessem conversões congruentes e não-congruentes, além de trabalhar com os tratamentos para os numéros naturais e solicitar dos alunos, sempre que possível, que explicassem suas soluções.

Com o objetivo de verificar o desempenho dos alunos quanto aos conteúdos abordados nos dois meses anteriores, é aplicado o segundo instrumento de verificação de aprendizagem cujo resultado não é satisfatório, pois os alunos demonstram uma melhora quanto ao tratamento dos dados, mas apresentaram grandes difuculdades quando as questões que exigiam a conversão e os tratamentos ao mesmo tempo. O pesquisador atribuiu esse resultado ao fato de a professora ter dado muita importância aos tratamentos em detrimento das conversões. Do mesmo modo que ocorreu para o primeiro instrumento, após a aplicação desse segundo, o pesquisador, a professora e a bolsista reuniram-se para que fossem tomadas novas medidas para o prosseguimento da pesquisa e, desta vez, o pesquizador solicitou que a professora enfatizasse as aulas em exercícios que envolvessem conversões não-congruentes e os tratamento simultaneamente, que revisasse os tratamentos para números naturais.

Já no terceiro instrumento, o dempenho dos alunos melhorou significativamente em relação aos anteriores. No quadro abaixo, está apresentada algumas das soluções apresentadas pelos alunos para o segundo problema desse intrumento, no qual 84% consegue respondê-la e modo correto. Note que esta questão, apesar de simples, exige a realização da conversão da linguagem natural para o registro numérico e alguns alunos vão além do pedido na questão e realizam os devidos tratamentos para a solução da expressão encontrada.

Quadro 4 - Conversão do registro linguagem natural para o registro numérico realizado por alunos na pesquisa de Neres.

Segundo Problema	Soluções dadas pelos Alunos
José tem dezoito figurinhas. Foi jogar com seu irmão, perdeu seis figurinhas; depois jogou com seu primo e ganhou quatro. Escreva a expressão numérica que representa esse problema e represente também no gráfico abaixo.	18 – 6 + 4 = 12 + 4 = 16 Outra Solução: 18 – 6 + 4 Outra Solução 18 + 6 + 4 = (errada) Outra solução 18 – 6 + 4 = 18 – 10 (errada) Outra Solução: 18 – 6 + 4 = 12 + 4 = 16 Outra Solução: (18 – 6) + 4 =

Fonte: Neres, 2010, p. 112.

Nos dois instrumentos subsequentes, os resultados se mantêm bons e o autor conclui que a aplicação da teoria dos registros de representação semiótica favorece a aprendizagem Matemática.

Vários outros textos foram apreciados, mas os que foram apresentados se mostraram mais relevantes para o presente trabalho e provocaram alterações no mesmo.

CAPÍTULO 4
METODOLOGIA – A ENGENHARIA DIDÁTICA

A presente pesquisa caracteriza-se como sendo de cunho qualitativo e foi realizada por meio da elaboração, aplicação e análise de uma sequência didática cujo objetivo é a aquisição, por parte dos alunos envolvidos, do conceito de número racional. Foi utilizada como fundamentação metodológica a Engenharia Didática.

4.1 – DESCRIÇÃO SUMÁRIA DA ENGENHARIA DIDÁTICA

A abordagem metodológica adotada, a Engenharia Didática, surgiu no início da década de 80 e a justificativa encontrada na literatura para a escolha da mesma pode ser observada nas palavras de Almouloud e Coutinho (2008, p. 66), pois para esses autores a Engenharia Didática "pode ser utilizada em pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem de um dado conceito", ou, segundo Artigue (1998, p. 285, *apud* MACHADO, IN: MACHADO 2010, p. 235), a Engenharia Didática é caracterizada "[...] como um esquema experimental baseado sobre 'realizações didáticas' em sala de aula, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação e a validação e análise de sequências de ensino".

Carneiro (2005, p. 91), norteado pelas considerações de Artigue, afirma que a Engenharia Didática é composta por quatro fases:

1ª fase: análises prévias;

2ª fase: concepção e análise *a priori* de experiências didático-pedagógicas a serem desenvolvidas na sala de aula de Matemática;

3ª fase: implementação da experiência, ou experimentação;

4ª fase: análise *a posteriori* e validação da experiência.

Segue-se a descrição de cada fase da engenharia didática para esta pesquisa.

4.1.1 - Análises prévias

O que Carneiro (2005) denomina por análises prévias, Machado (2010, p. 238, IN: MACHADO, 2010) denomina por análises preliminares e afirma que elas "são feitas através de considerações sobre o quadro teórico didático geral e sobre os conhecimentos didáticos já adquiridos sobre o assunto em questão".

Nesta pesquisa, nas análises prévias, foram realizados os seguintes procedimentos:

- **Análise epistemológica dos números racionais:** consiste no levantamento histórico da evolução do conceito de números racionais.

- **Análise didática:** compreende um diagnóstico acerca dos métodos como os números racionais estão sendo ensinados e do funcionamento do sistema de ensino no Município de Barra de Santo Antônio e, em específico, no povoado de Santa Luzia.

- **Análise cognitiva:** analisa as dificuldades de aprendizagem dos alunos com relação aos números racionais e as dificuldades e obstáculos que surgem ao longo da construção do conhecimento.

A análise epistemológica é norteada pelas considerações de Caraça (1951), a partir das quais foi descrito em que condições os números racionais surgiram. Essa análise compreende o Capítulo 1 desse trabalho.

A análise didática é formada por duas etapas. Na primeira etapa é realizado um estudo da literatura existente sobre o ensino dos números racionais e os resultados obtidos são apresentados no Capítulo 3 desse material. O que se pode observar é que o ensino dos números racionais geralmente ocorre como em uma via de mão única, isto é, ou se apresenta o número racional na representação fracionária e se realizam os tratamentos inerentes a esse, ou se realiza o mesmo procedimento por meio da representação decimal. Tanto nas sequências didáticas propostas nos trabalhos lidos, quanto na análise de livros didáticos realizada por alguns pesquisadores pouco se observa a relação existente entre o número racional na representação fracionária e na representação decimal. Em alguns casos, pela ênfase atribuída a apenas uma das formas de representação, é como se um número racional representado na forma de fração fosse diferente desse mesmo número racional representado na forma decimal, o que, segundo Duval (2009) não contribui para a conceituação desse campo numérico.

A segunda etapa da análise didática é composta pelas considerações da autora desse trabalho (pelo fato da mesma lecionar na escola na qual a pesquisa foi desenvolvida e ser conhecedora do cenário escolhido) e de um questionário socioeconômico aplicado aos alunos. Nessa análise é observado que os sujeitos envolvidos na pesquisa são membros de famílias que vivem situação de pobreza, que dependem bastante do dinheiro advindo de programas sociais do Governo Federal, que não têm acesso à cultura a não ser durante os momentos que estão na escola e cujos pais na maioria dos casos são ausentes na vida escolar dos mesmos.

A escola na qual a sequência didática foi aplicada fica em uma comunidade carente e alguns alunos têm dificuldade de ir à escola em dias chuvosos, seja porque a rua onde moram fica alagada, seja porque moram em morros que ficam escorregadios e perigosos por conta das águas das chuvas. Esse foi um dos obstáculos encontrados para a aplicação da sequência didática, pois a previsão era de iniciar os trabalhos no mês de maio de 2011, o que não pode ocorrer porque a maioria dos alunos estava faltando às aulas por não terem condições de sair de casa. Então, as atividades com a turma só puderam ser iniciadas em setembro de 2011, quando as chuvas na região diminuíram e a frequência dos alunos melhorou.

Outro obstáculo foi a falta de participação dos pais na educação dos filhos. Fato constatado pelo comparecimento de apenas seis dos trinta e sete pais esperados na reunião na qual foi explicado como o trabalho que seria realizado com os alunos e perguntado sobre o consentimento dos pais quanto à participação dos filhos no mesmo. Diante da frustração da reunião, houve a necessidade da autora ampliar a frequência de dias na escola, indo à mesma em dias nos quais não estaria lecionando para receber os pais que não compareceram à reunião e explicar todo o projeto aos mesmos. Essa etapa perdurou entre os meses de maio a julho e mesmo assim os resultados de alguns alunos não foram considerados neste estudo por conta do não comparecimento dos pais para a assinatura do Termo de Consentimento e Livre Esclarecimento, TCLE.

Em relação ao sistema educacional atuante neste povoado do município de Barra de Santo Antônio, observou-se que, por parte da gestão escolar, não houve empecilho para a realização das atividades e o projeto foi aceito desde o primeiro momento pelo fato de representar uma possível melhoria na qualidade do ensino para aqueles alunos e por não interferir no funcionamento habitual das aulas, uma vez que as atividades foram desenvolvidas nos horários destinados às aulas de Matemática. Por parte da secretaria de educação do referido município, durante o tempo em que autora encontra-se lecionando no município, a mesma não tomou conhecimento de projetos voltados para a consolidação da formação do professor de Matemática nem incentivos para a promoção da aprendizagem dos alunos. Pelo contrário, assim como em vários locais deste país, as salas, desde as séries iniciais do Ensino Fundamental encontram-se lotadas com alunos que apresentam muitas dificuldades quanto à aprendizagem e cujos professores não conseguem atender de modo adequado a todos os alunos por conta da superlotação. Dessa forma, a promoção dos alunos a série seguinte ocorre mesmo sem o sujeito ter atingido o nível mínimo exigido para tanto. Fato constatado no primeiro teste realizado com os alunos envolvidos na pesquisa, no qual eles chegaram ao sexto ano do Ensino Fundamental sem saber somar números naturais ou escrever corretamente os mesmos.

Para a análise cognitiva, são aplicados dois questionários, um contendo doze questões, denominado Teste 1 – Verificação dos conhecimentos prévios, e outro, contendo nove questões, denominado Instrumento de Verificação de Aprendizagem 1. O Teste 1 foi aplicado para verificar se os alunos envolvidos na pesquisa tinham algum conhecimento sobre os números racionais nas representações fracionária, decimal e figural. O Instrumento de Verificação de Aprendizagem 1 foi aplicado para verificar até que ponto os alunos se apropriaram do conceito de número natural.

Com as análises prévias, foi possível entender que o trabalho proposto com este estudo naquela comunidade escolar seria desafiador, mas a vontade de verificar se algo poderia ser feito para melhorar a aprendizagem de alunos que vivem em situações tão difíceis fez com que a proposta fosse posta em prática e os resultados serão apresentados adiante.

4.1.2 - A análise *a priori*

A segunda fase, concepção e análise *a priori* de experiências didático-pedagógicas a serem desenvolvidas na sala de aula de Matemática, Machado (2010, p. 238, In: MACHADO, 2010) acredita que “comporta uma parte de descrição e outra de previsão e está centrada nas características de uma situação adidática que se quis criar e que se quis aplicar aos alunos visados pela experimentação”. Nesse momento, o ensino tradicional não tem lugar, pois, o professor é convidado a criar situações de ensino que sejam desafiadoras para os alunos.

Na Engenharia didática são definidas duas variáveis sobre as quais o trabalho é realizado: a variável global e as variáveis locais. Nessa pesquisa, é considerada como variável global a elaboração da sequência didática que tem por objetivo auxiliar os alunos na conceituação dos números racionais. Como variáveis locais, são consideradas as escolhas feitas no momento da elaboração de cada questão que compõe a sequência didática, assim como o público e o tempo de duração da mesma.

A variável global, a sequência didática, tem por objetivo auxiliar os alunos na conceituação dos números racionais, assim como ajudar outros professores no processo de ensino e aprendizagem deste campo numérico, os números racionais, a partir da reprodução da sequência de ensino em seus ambientes escolares.

As variáveis locais são consideradas para a elaboração de cada uma das cinco oficinas componentes da sequência didática e o critério de escolha é definido a partir da proposta de conteúdos apontada nos PCN e as considerações de Duval e Vygotsky. Assim, para a Oficina I é adotada a apresentação do número racional na representação fracionária nos significados de parte-todo e quociente, para a Oficina II a abordagem escolhida é o conceito de frações equivalentes, para a Oficina III escolhe-se as operações de adição e subtração entre números racionais na representação fracionária, para a Oficina IV o sistema monetário e o sistema métrico são utilizados para introduzir os números racionais na representação decimal e fazer conversão entre as representações decimal e fracionária, para a oficina V é reservado o estudo das porcentagens como mais uma aplicação cotidiana do número racional. Além desses pontos, também são considerados os resultados das análises prévias para nortear essa parte do trabalho.

O público ao qual se destina este estudo são alunos que estão cursando o sexto ano do Ensino Fundamental em uma escola pública localizada no povoado de Santa Luzia, no município de Barra de Santo Antônio, no estado de Alagoas. Os alunos estão em uma faixa etária que varia de 12 a 17 anos.

Os alunos participantes dessa pesquisa moram em comunidades carentes, muitos são membros de famílias cuja maior parte da renda é fruto dos programas social do Governo Federal. Os pais desses alunos são, em sua maioria, analfabetos ou analfabetos funcionais. Alguns desses alunos precisam trabalhar para ajudar na composição da renda familiar.

A sequência didática tem duração de 24 horas/aulas de 60 min cada.

A previsão é de que a sequência didática para o ensino dos números racionais, aplicada a partir da teoria dos registros de representações semióticas e da criação de zonas de desenvolvimento proximal seja capaz de propiciar ao aluno a aquisição da conceituação dos números racionais, a partir da realização dos tratamentos e das conversões entre os sistemas de representações figural, decimal, fracionário e língua natural.

4.1.3 - A experimentação

A terceira fase, a experimentação, Machado (2010, In: MACHADO, 2010, p. 244) define como sendo “a fase da realização da engenharia didática com uma certa população de alunos. Ela se inicia no momento em que se dá o contato pesquisador/professor observador(es) com a população de alunos objeto da investigação”.

Neste momento, foi explicado ao grupo de alunos envolvidos na pesquisa todos os procedimentos pelos quais eles passariam, os objetivos da pesquisa, o estabelecimento do contrato didático. Foi aplicada a sequência didática desenvolvida na segunda fase e registradas todas as observações feitas durante a experimentação.

A descrição de como ocorreu a aplicação da proposta didática, como ela foi ministrada, de que forma se deu a participação do público e que tipo de material pode ser coletado para posterior análise é apresentada na sessão 4.2.3.

4.1.4 - A análise *a posteriori* e validação

Na quarta fase, análise *a posteriori* e validação da experiência, foram tratados os dados obtidos no momento da experimentação e confrontadas a análise *a posteriori* com a análise *a priori* para identificar se os resultados validaram ou refutaram a hipótese levantada no início da pesquisa/engenharia, isso porque, conforme Artigue (1996, p. 197) "a validação é essencialmente interna, fundada no confronto entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*". Nesse confronto, analisou-se aquilo que foi considerado como hipótese pelo pesquisador e o que foi validado ou não com a experiência.

Assim como ocorre com a terceira fase, esta quarta fase também será descrita a seguir, na sessão 4.2.4.

Com a Engenharia Didática a ser proposta, não se almeja encontrar a verdade sobre algum método de ensino, ou seja, não se busca um método infalível que seja aplicável a todas as situações possíveis e útil para todas as pessoas, mas sim, procura-se uma maneira que, talvez, seja produtiva e eficaz para certo grupo de pessoas em determinadas condições.

4.2 - DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Neste momento são apresentados todos os procedimentos realizados na Engenharia Didática, desde as análises prévias e *a priori*, essenciais para a construção da sequência didática, até os resultados obtidos com a aplicação do objeto de ensino, a sequência didática, ou seja, as análises *a posteriori* e a validação.

4.2.1 – Análises prévias

Vygotsky sugere um ensino escolar conduzido pela e para a vida cotidiana dos alunos por acreditar que quando os alunos descobrem que os conceitos científicos lhes são úteis para a realização de tarefas diárias, sentem-se mais motivados a estudar e consequentemente ficam propensos à aprendizagem. Uma das considerações de Vygotsky é conhecer o público para o qual é desenvolvida a proposta de ensino e, para atender a esse critério e adaptar a sequência didática às necessidades dos alunos envolvidos na pesquisa, foi aplicado um Questionário socioeconômico. Para verificar os conhecimentos prévios dos alunos, foram desenvolvidos o Teste 1 - verificação dos conhecimentos prévios e o Instrumento de Verificação da Aprendizagem – 1. As questões componentes desses dois instrumentos foram desenvolvidas pela pesquisadora para atender as considerações de Duval, ou seja, verificar até que ponto os alunos conseguem realizar os tratamentos e as conversões com números racionais.

Dessa forma, os três questionários, compõem as análises prévias do presente trabalho, cujas descrições e análises são apresentadas a seguir.

I - O questionário socioeconômico

No questionário socioeconômico, presente no Apêndice A, especulou-se a faixa etária dos alunos, o número de vezes em que ocorreu uma reprovação escolar, a simpatia pela Matemática, o nível de escolaridade dos pais, a participação dos pais nas atividades escolares, o trabalho dos pais e dos alunos, a facilidade de acesso à escola quanto à distância e também em relação aos dias chuvosos, a concepção acerca da utilidade da Matemática que é estudada na escola e o interesse dos mesmos pela participação no presente trabalho. Todas as questões que compõem este questionário foram desenvolvidas pela pesquisadora.

O teste foi aplicado a 27 alunos, porém, apenas 15 foram considerados inicialmente para esta análise. O critério para a escolha dos 15 alunos foi a frequência escolar apresentada pelos mesmos e a autorização dos pais quanto à participação dos filhos na pesquisa. A análise dos 15 questionários socioeconômicos constatou que os alunos pertencem a uma faixa etária que varia dos 12 aos 17 anos, dos quais apenas um deles declarou não ter repetido algum ano escolar anteriormente. Os demais, 14 alunos, afirmaram já ter sofrido pelo menos uma reprovação escolar. Diante dessa constatação, pode-se prever que os sujeitos participantes dessa pesquisa não apresentam em seu histórico escolar bom desempenho, pois, se assim fosse, não se teria cerca de 93% de alunos que já foram reprovados. Esses números apresentaram mais um desafio para a pesquisa, pois exigiu que a pesquisadora, enquanto mediadora, atuasse como um agente motivador nesse processo de aprendizagem na tentativa de despertar nesses alunos o interesse pelos estudos além de apresentar para os mesmos uma proposta de ensino que os fizessem observar que a Matemática que a escola ensina pode e deve ser útil para a realização de atividades do seu cotidiano.

Quanto à formação escolar dos pais dos alunos, verificou-se que 42% deles não sabem ler nem escrever. Dos 58% dos pais que sabem ler e escrever, alguns alunos alegaram que eles sabem muito pouco. Cerca de 26% dos alunos alegaram que os pais não exigem que os mesmos estudem todos os dias, porém dos 74% que afirmaram que os pais fazem essa exigência, a maioria afirmou que os pais falam, mas não acompanham esse estudo e também não definem um horário para que o estudo ocorra. Dessa forma, pode-se dizer que a participação dos pais na educação dos filhos é mínima. Na tentativa de incentivar esses pais a participarem melhor da educação dos alunos, foi convocada uma reunião para explicar a todos o trabalho que seria desenvolvido e também a importância da participação dos mesmos, mas, infelizmente, apenas seis pais compareceram a reunião. O fracasso na reunião levou a pesquisadora a ir à escola com mais frequência na esperança de que os pais convocados se fizessem presentes para maiores esclarecimentos. Esse procedimento durou de maio a julho e, mesmo assim, os resultados de alguns alunos foram omitidos neste trabalho por falta da assinatura no termo de consentimento por parte dos pais.

Devido à baixa escolaridade, alguns pais encontram-se desempregados, outros são pescadores, cortadores de cana-de-açúcar, empregadas domésticas, caseiros, carpinteiros, possuidores de pequenos comércios ou serventes de pedreiro. Os alunos não possuem trabalho fixo, mas alegam que ajudam nos afazeres domésticos, alguns, inclusive, cuidam dos irmãos menores e da casa enquanto os pais estão trabalhando. Esses apontamentos motivaram a realização de uma sequência didática que contempla em suas questões situações da vida no campo, da pesca e de compra e venda.

A previsão era de que os trabalhos com a turma fossem iniciados no mês de maio, porém, 42% dos alunos disseram que a ida à escola fica comprometida em dias chuvosos, seja pelo alagamento das ruas ou pelo deslizamento nas barreiras. Por esse motivo, o início da aplicação da sequência de ensino só pôde ocorrer no mês de setembro, quando houve a diminuição das chuvas na região.

Ao serem questionados quanto à utilidade da Matemática que eles aprendem na escola, os alunos alegaram que serve “para a prova”, “para passar troco”, “para venda”, “para as outras matérias”.

Em relação ao contato com os números racionais, apenas cerca de13% dos alunos, disseram que nunca estudaram números fracionários ou decimais, mas, uma análise melhor do nível de conhecimento desse objeto matemático é feita a partir dos outros dois instrumentos citados a seguir.

II – Teste 1 – Verificação dos conhecimentos prévios

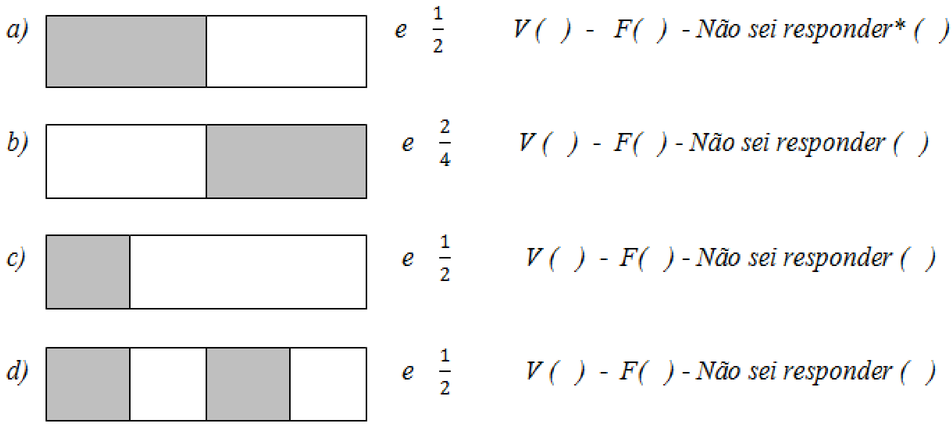
Na segunda etapa das análises prévias foi aplicado o Teste 1 – Verificação dos conhecimentos prévios, apresentado no Apêndice B. Esse teste é composto por 12 questões e tem por objetivo verificar se os alunos apresentam conhecimento sobre os números racionais e em que nível se encontra. Dessa forma, esse teste serve para se ter noção dos níveis de desenvolvimento real e proximal dos alunos. São analisadas as respostas apresentadas pelos 15 alunos escolhidos inicialmente.

É apresentada a análise de cada uma das questões do Teste 1.

Questão 1

Cada item abaixo tem uma figura e uma fração que supostamente representa a quantidade pintada da figura. Faça de conta que cada retângulo representa uma barra de chocolate e que a parte pintada é a parte do chocolate que você comeu. Marque V nos itens nos quais a fração representar a parte do chocolate que você comeu, e F nas sentenças em que a fração não representar a parte do chocolate que foi comida.

Figura 6: figura da questão 1 do Teste 1.



Fonte: Autora.

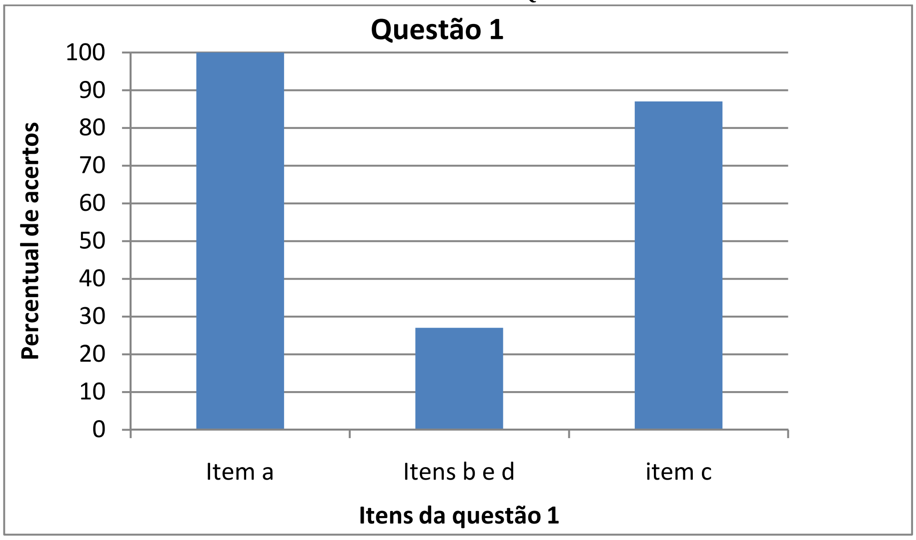
* *O item não sei responder deverá ser marcado se o aluno não lembrar nada sobre este conteúdo.*

Nessa questão são exigidos do aluno os seguintes conhecimentos:

- Item a: a simples associação do número racional à parte pintada da figura por um processo de contagem simples;
- Itens b e d: a apropriação do conceito de equivalência entre frações;
- Item c: a apropriação do significado que um número racional só pode ter significado de parte-todo quando se é estabelecida a conservação de áreas iguais.

Em relação ao item a, 100% dos alunos responderam corretamente, afirmando que a alternativa é verdadeira. Esse percentual demonstra que o conhecimento espontâneo dos alunos está de acordo com o conhecimento científico, quando se analisa o conceito de metade. Quanto aos itens b e d, apenas 27% dos alunos responderam de modo correto ao afirmarem que as sentenças são verdadeiras, os outros 73% responderam erradamente, demonstrando não terem conhecimento sobre a equivalência de frações. Em relação ao item c, 87% dos alunos responderam corretamente ao afirmarem que a alternativa é falsa, porém, de acordo com a análise das outras questões, isso demonstra não uma compreensão em relação à conservação de áreas, mas o entendimento de que a parte pintada não representa metade da barra de chocolate. O gráfico abaixo explicita os resultados apresentados:

Gráfico 1- Percentual de acertos da Questão do 1 do Teste 1.



Fonte: Autora.

Questão 2

Joana comprou um saquinho de confeito. Nesse saquinho havia 30 confeitos, sendo 10 do sabor laranja, 15 do sabor uva e 5 do sabor morango. Escreva uma fração que represente a quantidade de confeitos do sabor laranja que havia no saquinho.

Figura 7: Representação de um pacote de balas da Questão 2 do Teste 1.

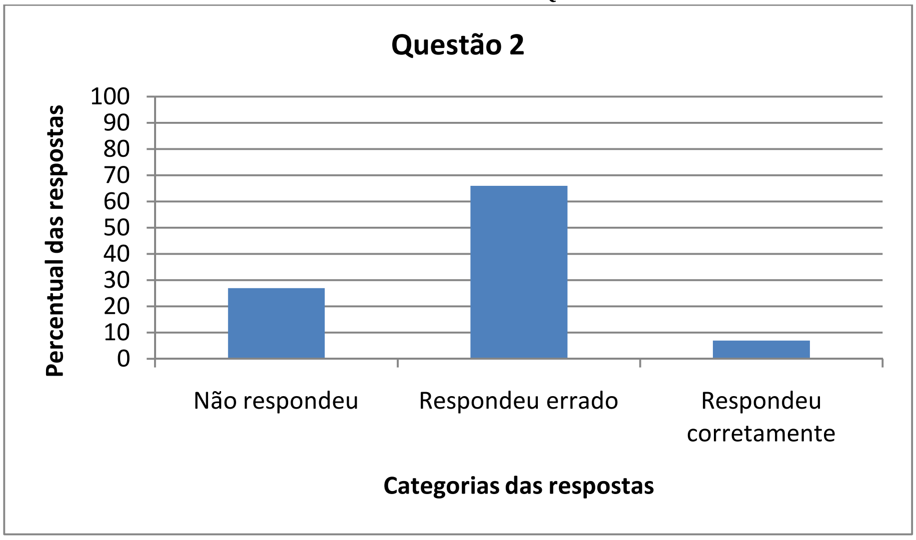
Fonte: http://catequesecaminhando.blogspot.com.br/2011/03/dinamica-das-balas.html

O nível dessa questão poderia ter sido elevado se onde lê "*escreva uma fração*" estivesse escrito "escreva um número", mas como a intenção era a de verificar se os alunos tinham algum conhecimento sobre a associação do número fracionário às quantidades discretas, utiliza-se essa apresentação.

Os resultados foram os seguintes: 13% dos alunos utilizaram o número 10 como resposta, o que demonstra que eles sequer entenderam no enunciado a palavra fração, ou se mostraram desatentos quando da leitura; 27% dos alunos deixaram a questão em branco, demonstrando que nada entenderam sobre o que foi solicitado; 53% dos alunos apresentaram como solução uma fração, porém não é a solução da questão, como por exemplo, $\frac{5}{5}$ ou $\frac{10}{5}$; apenas cerca de 7% dos alunos respondeu corretamente a questão ao dizer que a solução é $\frac{10}{30}$. Pode-se dizer que o conhecimento sobre os números racionais na representação fracionária, para representar quantidades discretas no significado parte-todo era praticamente inexistente entre os alunos nesse momento inicial.

O gráfico abaixo representa os resultados da questão 2:

Gráfico 2 - Percentual de acertos da Questão 2 do Teste 1.



Fonte: Autora.

Questão 3

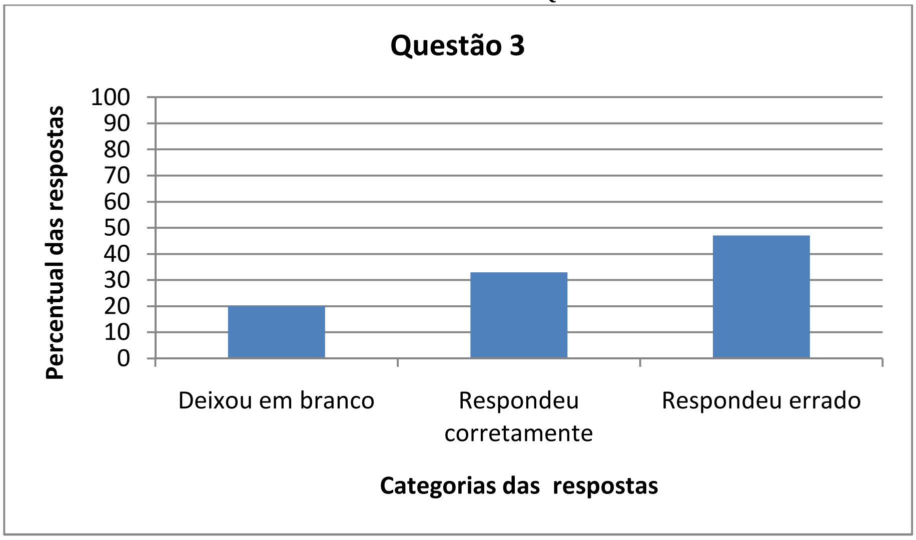
Maria foi ao mercadinho levando dezoito reais e cinquenta centavos. Ela comprou um quilo de feijão e um quilo de arroz. Sabendo que um quilo de feijão custa quatro reais e trinta centavos, e que um quilo de arroz custa dois reais e quarenta e cinco centavos, escreva uma expressão que represente essa situação.

Essa questão envolve uma situação de compra e exige dos alunos que eles saibam realizar a conversão do número racional na língua natural para a representação decimal.

Os resultados foram os seguintes: 20% dos alunos deixaram a questão em branco; 20% dos alunos conseguiram realizar a conversão e foi além do que foi solicitado apresentando como saldo após a realização da compra R$11,45; 13% dos alunos conseguiram realizar a conversão e não calculou o valor numérico da expressão, limitando-se ao que foi solicitado; 47% dos alunos não conseguiram realizar a conversão e demonstrou não ter conhecimento dos números racionais na representação decimal.

Os resultados apresentados pelos alunos estão explicitados no gráfico abaixo.

Gráfico 3 - Percentual de acertos da Questão 3 do Teste 1.



Fonte: Autora.

Questão 4

Escreva numericamente cada expressão abaixo:

a) Dois terços.

b) Quatro quintos.

c) Cinco vinte e dois avos.

d) Dois décimos.

e) Três inteiros e vinte e cinco centésimos.

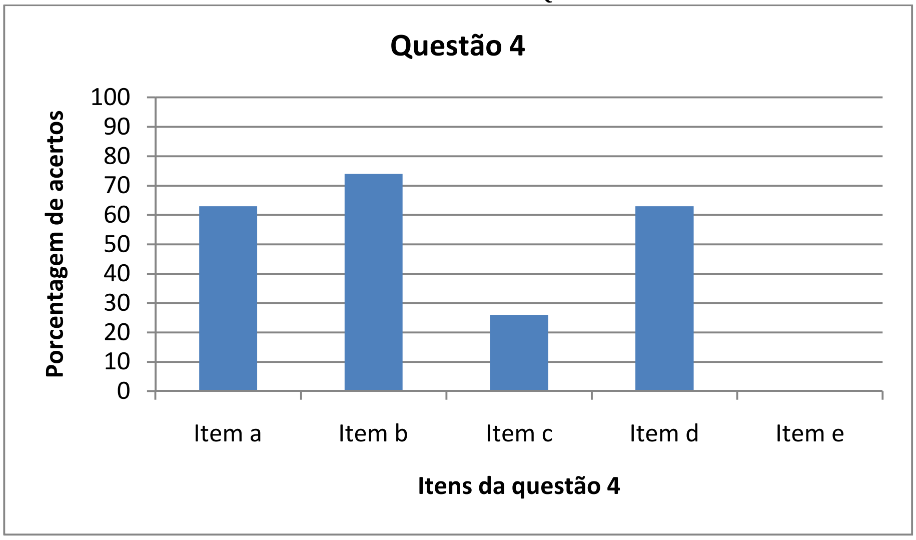
Nessa questão é exigido do aluno que ele saiba realizar a conversão entre as representações do número racional da língua natural para a fracionária, isto é, a representação numérica.

Alguns alunos expressaram pouco entendimento quanto ao enunciado e perguntaram o que era para ser feito, precisando a pesquisadora informar que eles deveriam escrever o número que estava escrito na língua natural.

Nenhum aluno conseguiu responder corretamente o item *e*, demonstrando que não tinham conhecimento sobre as frações impróprias; 5% dos alunos deixaram toda a questão em branco. Nota-se, portanto, que os alunos provavelmente já estudaram os números racionais anteriormente, pois, conhecem alguns números fracionários, demonstrando, porém, pouco conhecimento quanto à leitura desses números para denominadores maiores que 10.

As respostas respectivas esperadas para os itens a, b, c, d e e, são $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{5}{22}, \frac{2}{10}, 3\,\frac{25}{100}$. O gráfico abaixo mostra os índices de acertos apresentados em cada item:

Gráfico 4: Percentual de acertos da Questão 4 do Teste 1.



Fonte: Autora.

Questão 5

Luciana foi à feira com R$ 12 na carteira. Ela comprou tomate, cebola e pimentão. Sabendo que as compras custaram $\frac{2}{3}$ *da quantia que ela possuía, calcule quanto Luciana gastou.*

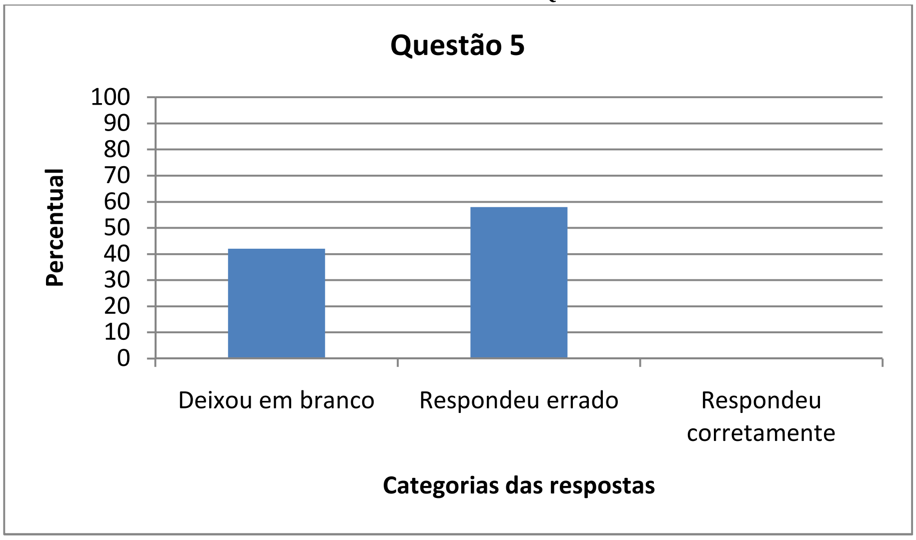
Nesta questão é exigido o conhecimento de fração relacionado a uma quantidade discreta. O aluno deve saber calcular quantos reais correspondem a $\frac{2}{3}$ de R$ 12, para poder responder quanto Luciana gastou na feira.

Essa situação em que se exige o cálculo de uma quantidade representada por uma fração é importante para o entendimento, por exemplo, de uma receita de bolo, da relação existente entre metro, centímetro e milímetro, entre real e centavos, dentre outras situações.

Para essa questão não foi apresentada resposta correta pelos alunos, dos quais 42% deixaram a questão em branco e 58% tentaram respondê-la, mas não obtiveram êxito. Além disso, em nenhuma das soluções atribuídas pelos alunos, notou-se o mínimo de entendimento esperado.

O gráfico 5 demonstra os resultados obtidos na questão 5.

Gráfico 5 - Percentual de acertos da Questão 5 do Teste 1.



Fonte: Autora.

Questão 6

Crie um enunciado para a expressão 8 – 4 + 25 – 3.4.

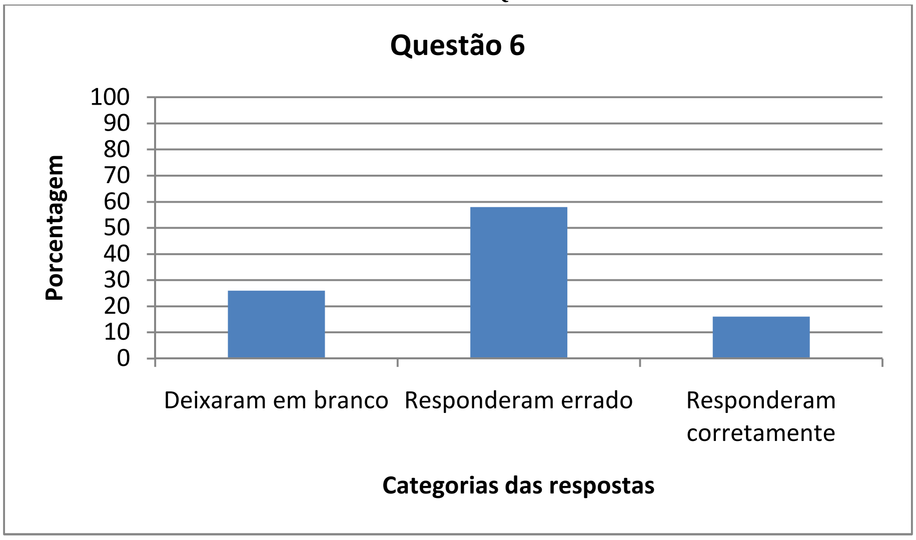
Nessa questão é solicitado aos alunos que criem um enunciado, ou seja, uma situação-problema cujo resultado possa ser expresso pela expressão numérica dada. Os alunos não entenderam o que foi solicitando, tendo a pesquisadora que explicar que deveriam imaginar uma situação que pudesse ser representada por essa expressão e fez um exemplo similar na lousa.

Os resultados foram os seguintes: 26% dos alunos deixaram a questão em branco, mesmo depois da explicação por parte da pesquisadora; 58% dos alunos tentaram responder a questão, mas não obtiveram êxito; apenas 16% dos alunos apresentaram respostas que podem ser consideradas como coerentes ao que foi solicitado. Nota-se, então, que os alunos não sabiam contextualizar uma expressão matemática, dando significado a mesma.

Compreende-se que questões como essa não são triviais, pois para o aluno conseguir contextualizar uma expressão ele precisa ter conhecimento do significado de cada operação envolvida na questão, ter boa percepção e ser criativo.

O gráfico 6 ilustra essas informações.

Gráfico 6 - Percentual de acertos da Questão 6 do Teste 1.



Fonte: Autora.

Questão 7

Calcule o valor de cada expressão abaixo:

a) $\frac{4}{3} + \frac{5}{3} =$

b) $\frac{3}{4} + \frac{7}{5} =$

c) $\frac{9}{4} - \frac{2}{3} =$

d) $\frac{2}{7} \cdot \frac{5}{2} =$

e) $\frac{8}{3} : \frac{7}{6} =$

Com essa questão se pretendia verificar o nível de desenvolvimento efetivo dos alunos quanto aos tratamentos referentes aos números racionais na representação fracionária. As respectivas respostas esperadas para os itens a, b, c, d e e, são $\frac{9}{3}$, $\frac{43}{20}$, $\frac{19}{12}$, $\frac{10}{14}$ e $\frac{48}{21}$. Os resultados foram os seguintes: nenhum aluno conseguiu responder corretamente aos itens, sendo que 20% deles deixaram a questão em branco e 80% tentou responder, mas não obtiveram êxito, com exceção de 7% dos alunos que conseguiram responder corretamente o item d. Os erros mais frequentes foram causados pela extensão das propriedades dos números naturais para os números racionais, assim, vários alunos apresentaram a seguinte solução para o item a, por exemplo:

Tipo de resposta 1:

$\frac{4}{3} + \frac{5}{3} = \frac{9}{6}$ Neste caso, os alunos somaram diretamente numerador com numerador e denominador com denominador.

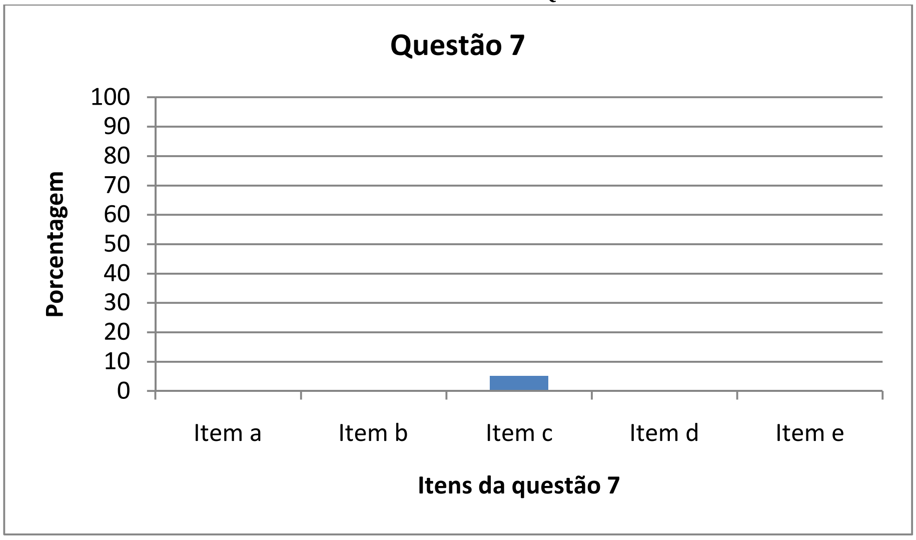
Tipo de resposta 2:

$\frac{4}{3} + \frac{5}{3} = 15$ Neste caso os alunos somaram cada número presente na expressão, como se fosse uma adição entre os números naturais 4, 5, 3 e 3.

Também são verificadas outras respostas que não dão margem para se especular as considerações que conduziram os alunos às mesmas.

A síntese desses resultados está apresentada no gráfico abaixo:

Gráfico 7 - Percentual de acertos da Questão 7 do Teste 1.



Fonte: Autora.

Questão 8

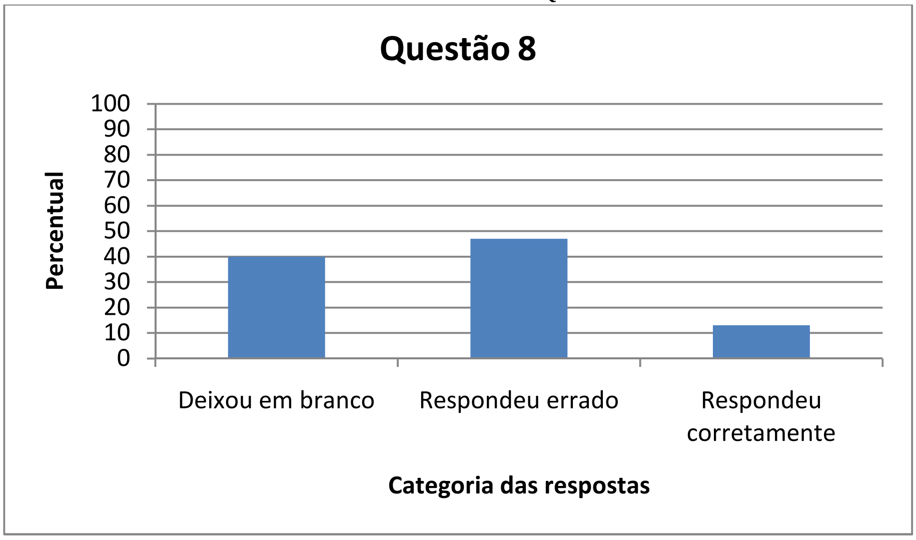
Thaís comprou três barras de chocolate para dividir igualmente entre seus cinco filhos. Qual deverá ser a quantidade de chocolate que cada filho receberá de Thaís?

Nessa questão é exigido dos alunos o conhecimento do número fracionário em seu significado quociente.

Essa questão foi deixada em branco por 40% dos alunos, 47% tentou resolvê-la, mas não obteve êxito e 13% respondeu corretamente, porém não deixou registros dos procedimentos realizados, apenas respondeu $\frac{3}{5}$.

O gráfico 8 sintetiza os resultados obtidos na questão 8.

Gráfico 8 - Percentual de acertos da Questão 8 do Teste 1.

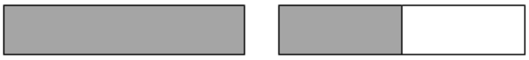


Fonte: Autora.

Questão 9

Escreva numericamente a quantidade representada pela parte pintada na figura abaixo:

Figura 8: Figura para representar a Questão 9 do Teste 1.



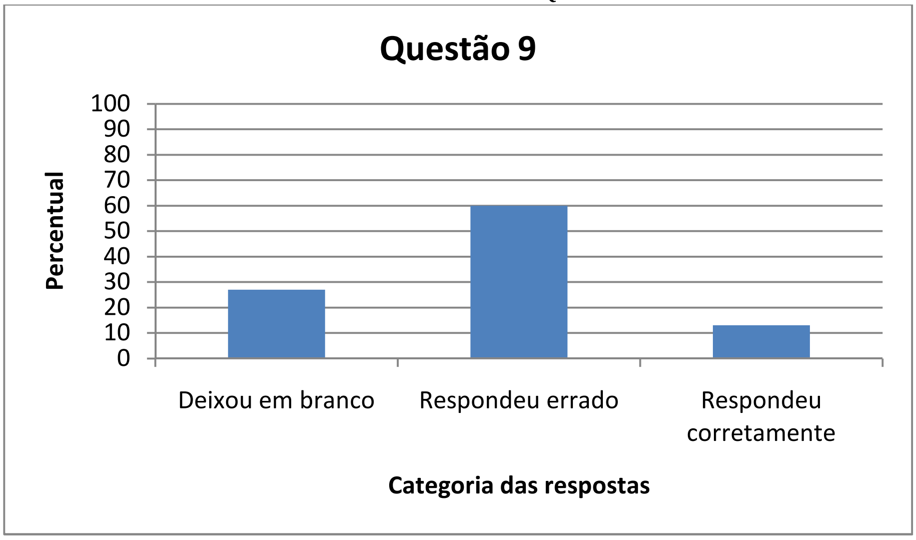
Fonte: Autora.

Nessa questão é exigido dos alunos a conversão da representação figural do número fracionário misto na representação numérica ou na língua natural.

Os resultados foram os seguintes: 13% dos alunos deixaram a questão em branco; 60% dos alunos tentaram responder a questão, mas não obtiveram êxito; 27% dos alunos apresentou uma resposta que não era exatamente aquela adotada convencionalmente, que deveria ser $1\frac{1}{2}$, fazendo a seguinte representação: ao lado do retângulo que estava completamente pintado, escreveram a fração $\frac{1}{1}$ e ao lado do retângulo que estava pintado pela metade, eles escreveram a fração $\frac{1}{2}$. Isso demonstrou que esses alunos responderam a questão como se estivessem atribuindo valores a quantidades distintas, não compreendendo que os dois retângulos juntos representavam um só valor, uma só quantidade, um só número. Por outro lado, a resposta atribuída pode ser considerada com um conceito que se encontra na zona de desenvolvimento proximal dos sujeitos e, considerando que se encontravam no início do trabalho, a solução foi considerada como correta.

O gráfico 9 mostra os resultados apresentados pelos alunos para a questão 9.

Gráfico 9 - Percentual de acertos da Questão 9 do Teste 1.



Fonte: Autora.

Questão 10.

Ana Carla recebeu um salário no valor de R$ 654, 35. Ela pagou a conta de energia no valor de R$ 124, 15 e a conta do cartão de crédito no valor de R$ 98, 55.

a) Qual foi o valor total gasto com os pagamentos? 222,7

b) Quanto sobrou do salário de Ana Carla após o pagamento das duas contas?431,65

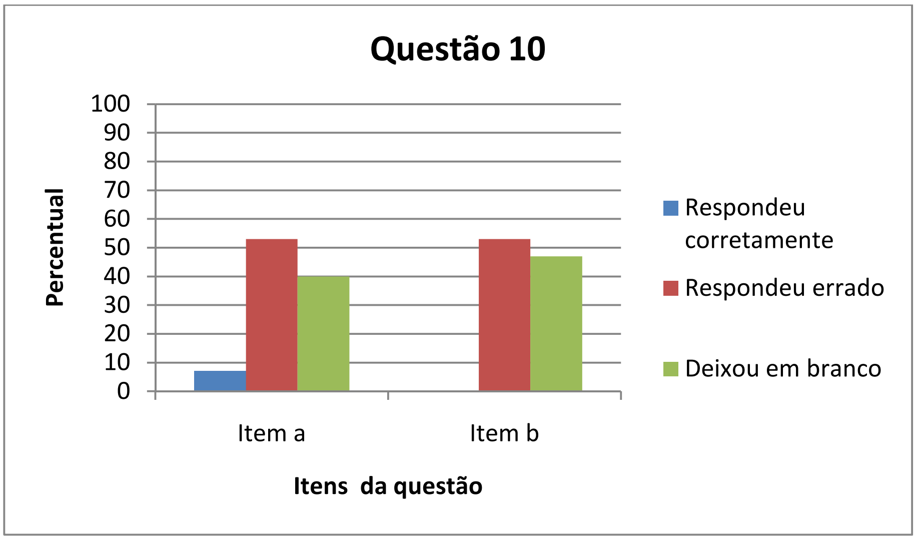
Nessa questão é exigido dos alunos que eles realizem os tratamentos com números racionais na representação decimal, assim como a interpretação do texto em uma situação cotidiana.

Os resultados apresentados foram os seguintes: em relação ao item a, 40% dos alunos deixaram a questão em branco; apenas 7% dos alunos responderam corretamente; 53% dos alunos responderam a questão, mas não obtiveram êxito; em relação ao item b, 47% dos alunos deixaram a questão em branco; 53% dos alunos tentaram responder, mas não obteve êxito; 0% respondeu corretamente.

Nota-se que mesmo sendo a questão 10 uma situação-problema que representa uma situação do cotidiano desses alunos, empecilhos como não saber interpretar a questão e identificar o que está sendo solicitado e não saber tratar os números racionais na representação decimal fizeram com que a maioria desses alunos não conseguisse resolver corretamente a questão e alguns a deixaram em branco.

O gráfico 10 mostra uma síntese dos resultados apresentados pelos alunos para a questão 10.

Gráfico 10 - Percentual de acertos da Questão 10 do Teste 1.



Fonte: Autora.

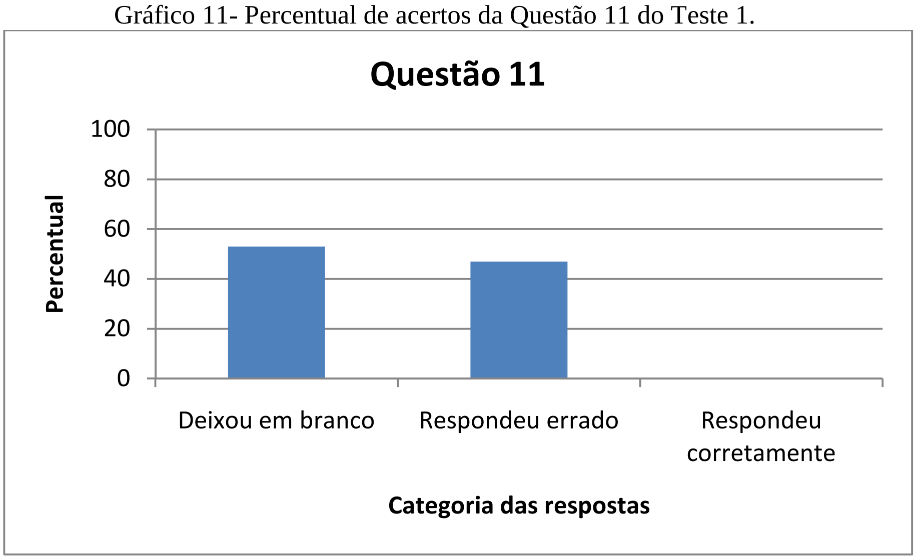
Questão 11

Para a expressão 12 + 5 – 3 eu posso criar o seguinte enunciado, por exemplo: Joana tinha doze reais. Ela ganhou cinco reais de seu pai e depois gastou três reais comprando balas.

Agora, considere a expressão 3 . 5 + 7 – 2, e crie um enunciado para a mesma.

Nessa questão foi exigido dos alunos que eles conseguissem atribuir significado a uma expressão Matemática. Os resultados obtidos foram os seguintes: 53% dos alunos deixaram a questão em branco; 47% dos alunos tentaram resolvê-la, mas não obtiveram êxito; 0% dos alunos respondeu corretamente. O gráfico abaixo sintetiza os resultados da questão 11:

Gráfico 11- Percentual de acertos da Questão 11 do Teste 1.



Fonte: Autora.

Questão 12

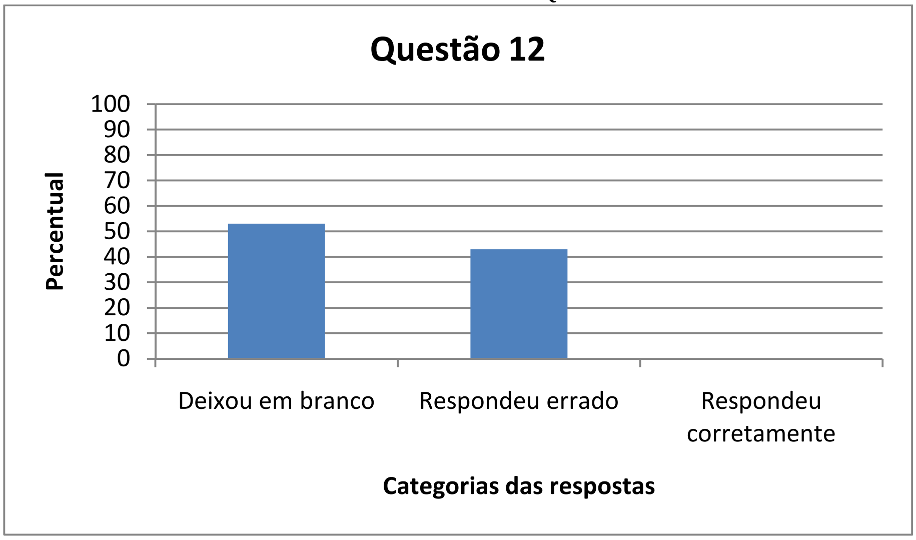
Marcos, André e Fábio compraram cada um uma pizza de mesmo tamanho. A pizza de Marcos foi partida em 4 fatias iguais e ele comeu duas fatias. A pizza de André foi cortada em 6 fatias iguais e ele comeu três fatias. A pizza de Fábio foi cortada em 8 fatias iguais e ele comeu quatro fatias. Em sua opinião, quem comeu a maior quantidade de pizza?

Nessa questão é exigido dos alunos a compreensão do número fracionário em seu significado parte-todo, assim como o conceito de fração equivalente para observar que as quantidades de pizza comida por Marcos, André e Fábio foram as mesmas.

Os resultados apresentados pelos alunos foram os seguintes: 53% dos alunos deixaram a questão em branco; 47% dos alunos tentaram responder a questão, mas não obtiveram êxito; 0% dos alunos respondeu corretamente.

O gráfico abaixo representa as Categorias das soluções apresentadas pelos alunos:

Gráfico 12 - Percentual de acertos da Questão 12 do Teste 1.



Fonte: Autora.

Com esse Teste 1 - verificação dos conhecimentos prévios pôde-se observar que, conforme esperado, a apropriação do conceito de número racional por parte dos alunos nas séries anteriores foi mínimo, senão inexistente, em alguns pontos. Constatou-se que eles não conseguiram realizar as conversões entre as representações fracionária, decimal, figural e língua natural, nas suas diversas composições. Esse teste foi utilizado como uma das fontes norteadoras da construção da sequência didática. A partir dos conceitos que os alunos demonstraram desconhecer, assim como aqueles que, provavelmente, encontravam-se na zona de desenvolvimento proximal, as variáveis locais das análises prévias foram consolidadas.

III - Instrumento de Verificação de Aprendizagem 1 – (IVA - 1)

O Instrumento de Verificação de Aprendizagem – 1, presente no Apêndice C, constou de 9 questões e teve por objetivo verificar o conhecimento dos alunos em relação às operações com números naturais. Nesse momento da pesquisa, apenas 12 dos 15 alunos escolhidos inicialmente se fizeram presentes.

A análise desse questionário foi feita questão por questão, observando os resultados apresentados pelos alunos e de que modo eles poderiam vir a interferir na apropriação do conceito de número racional.

Questão 1

Escreva como se lê os seguintes números abaixo:

a) 29

b) 274

c) 406

d) 2785

e) 72907

Os resultados obtidos foram os seguintes:

- item a: 100% dos alunos responderam corretamente, 0% dos alunos errou este item;
- item b: 100% dos alunos responderam corretamente, 0% dos alunos errou este item;
- item c: 100% dos alunos responderam corretamente, 0% dos alunos errou este item;
- item d: 100% dos alunos responderam corretamente, 0% dos alunos errou este item;
- item e: 75% dos alunos responderam corretamente, 27% dos alunos erraram este item;

Esses resultados demonstram que os alunos sabem ler os números naturais.

Questão 2

Na escola Major Nelson Augusto será realizar uma gincana para os seus alunos. Sabendo que são 438 alunos que estudam no turno matutino e 679 alunos que estudam no turno vespertino. Se todos participarem da gincana, qual será a quantidade total de alunos que participarão dessa gincana neste dia?

Os resultados foram os seguintes: 75% dos alunos responderam corretamente, 25% erraram esta questão. Esse resultado demonstra que os alunos conseguiram compreender o enunciado da questão, identificar que a operação envolvida é a adição e realizar os tratamentos necessários para obterem a soma de 1.117 alunos como resposta.

Questão 3

Amanda recebeu um salário no valor de R$ 917. Ela pagou o aluguel de sua casa, que custa R$ 382. Calcule com quanto Amanda ficou logo após pagar o seu aluguel.

Os resultados foram os seguintes: 42% dos alunos responderam corretamente, 58% erraram esta questão. Demonstra-se com esses resultados que os alunos não conseguem resolver corretamente uma situação-problema que envolva uma subtração entre dois números naturais, uma vez que a maioria não apresentou a resposta correta de 535 reais. Os alunos demonstraram que conseguiram identificar que a operação que deveria ser aplicada seria a subtração. Porém, a maioria não conseguiu realizar a contento a subtração. O Aluno J, por exemplo, apresentou o seguinte resultado para a questão 3:

$$\begin{array}{r} 9\ 1\ 7 \\ -\ \underline{\ \ 3\ 8\ 2} \\ 6\ 7\ 5 \end{array}$$

O Aluno O respondeu a questão 3 assim:

$$\begin{array}{r} 9^{1}1\ 7 \\ -\ \underline{\ \cancel{4}\,3\ 8\ 2} \\ 1\ 3\ 2\ 9 \end{array}$$

Tanto o erro apresentado pelo Aluno J como o erro apresentado pelo aluno O, são erros provenientes da na conceituação do sistema de numeração decimal e pode representar um empecilho para o bom desenvolvimento desse trabalho.

Questão 4

Beatriz comprou uma calça e duas blusas em uma loja. A calça custou R$ 67 e cada blusa custou R$ 18. Se Beatriz tinha inicialmente R$ 156, calcule com quanto ela ficou após a compra.

Os resultados foram os seguintes: 25% dos alunos responderam corretamente, 16% deixou a questão em branco e 59% erraram a questão. Os alunos não demonstraram domínio das operações de adição e subtração com números naturais e apresentaram dificuldade ao resolverem uma situação-problema que envolve as duas operações simultaneamente.

Questão 5

Uma empresa tem 25 funcionários. O salário de cada funcionário é de R$ 651,00. Quanto à empresa gasta por mês com o pagamento de todos os seus funcionários?

Os resultados foram os seguintes: 42% dos alunos deixaram a questão em branco e 58% respondeu erroneamente. Isso demonstra que os alunos não sabem a tabuada de multiplicação e também não sabem efetuar uma multiplicação com números naturais e sentem dificuldade em resolverem situação-problema que envolve a multiplicação de dois números naturais.

Questão 6

A professora Marta está com um pacote que contém 156 balas de chocolate. Se ela dividir igualmente todas essas balas entre os seus 13 alunos, quantas balas cada aluno ganhará?

Os resultados foram os seguintes: 58% dos alunos acertaram, 8% dos alunos deixaram a questão em branco e 34% erraram essa questão. Notou-se por meio dos registros que alguns alunos não dominam o algoritmo da divisão, mas resolveram a questão por um processo de distribuição, no qual eles distribuem bolinhas para 13 sujeitos até completar um total de 156 bolinhas e observam que ao final cada sujeito ficou com 12 bolinhas. A solução apresentada pelo aluno J, por exemplo, foi a seguinte:

Figura 9: Resposta do aluno J para a Questão 6 do I.V.A. 1.

O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O

Fonte: Autora.

O aluno J terminou a questão concluindo que cada aluno ganhará 12 balas de chocolate. Isso demonstra que os sujeitos compreendem o significado da divisão, porém não dominam seu algoritmo.

Questão 7

Calcule o valor numérico de cada expressão abaixo:

a) 2 + 3154 + 215

b) 7648 + 1296

c) 9853 – 7512

d) 2347 – 1628

Os resultados foram os seguintes:

- item a: 58% dos alunos responderam corretamente, 42% dos alunos erraram esse item;
- item b: 67% dos alunos responderam corretamente, 33% dos alunos erraram esse item;
- item c: 67% dos alunos responderam corretamente, 33% dos alunos erraram esse item;
- item d: 17% dos alunos responderam corretamente, 83% dos alunos erraram esse item;

Os resultados demonstram pouco domínio das operações de adição e subtração com números naturais, visto que as questões propostas são consideradas elementares e os índices de acertos apresentados mostram-se desfavoráveis para as mesmas.

Questão 8

Qual é o valor da multiplicação 23 x 54?

Os resultados foram os seguintes: 25% dos alunos responderam corretamente e 75% dos alunos erraram essa questão. Isso demonstra que os alunos não dominam o algoritmo da multiplicação com números naturais e esse fato foi considerado para a análise de alguns erros cometidos pelos alunos após o desenvolvimento de determinadas oficinas, visto que a não apropriação da multiplicação com números naturais pode significar um empecilho para a realização de algumas atividades propostas aos alunos.

Questão 9

Qual é o valor das divisões:

a) 732 : 3

b) 160 : 14

Os resultados foram os seguintes:

- item a: 8% dos alunos responderam corretamente, 42% dos alunos errou esse item e 50% dos alunos deixaram em branco;
- item b: 9% dos alunos responderam corretamente, 33% dos alunos deixaram em branco e 58% dos alunos erraram esse item;

Os resultados do Instrumento de Verificação de Aprendizagem 1 apontam para uma grande preocupação quanto à concretização do trabalho, uma vez que os alunos comprovaram que não terem domínio das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão com números naturais, sendo as duas últimas as mais preocupantes. Diante das dificuldades apresentadas pelos alunos nesse momento inicial da pesquisa, todo o trabalho foi desenvolvido com mais cautela, de modo que os alunos foram observados em todos os momentos da experimentação, e feitas as mediações necessárias para que os mesmos se mantivessem dentro do processo de aprendizagem. Antes do desenvolvimento das oficinas, foi feita uma revisão das quatro operações com números naturais na tentativa de preencher algumas das lacunas apresentadas.

4.2.2 – Análise *a priori*

Nessa fase, estão descritos os procedimentos adotados para a construção da sequência didática, envolvendo as variáveis globais e locais, assim como a previsão sobre o que se espera atingir com o trabalho desenvolvido com os alunos. Duas variáveis foram consideradas nesta etapa do trabalho: as variáveis globais e as variáveis locais.

Em relação às variáveis globais, essas se referem às considerações sobre a construção da sequência de ensino. Dessa forma, tem-se uma sequência didática que busca abordar o conceito de número racional com a pretensão da apropriação desse conceito matemático por parte dos alunos envolvidos na pesquisa. Pretende-se também, por meio da divulgação desse trabalho, auxiliar outros professores quando da abordagem desse objeto matemático. A sequência didática aborda as representações fracionária, decimal, figural e língua natural dos números racionais, assim como os tratamentos inerentes a cada representação e as conversões entre elas. Foram utilizados objetos concretos manipulativos para a realização das oficinas e propostas atividades para apropriação dos conceitos abordados nas aulas.

Foram consideradas como variáveis locais cada uma das cinco oficinas e as atividades para apropriação dos conceitos referentes a cada oficina, assim como os instrumentos de verificação de aprendizagem.

A sequência de ensino é composta por cinco oficinas cujos conteúdos foram escolhidos a partir das exigências dos PCN (p. 64-66), que compreende que uns dos objetivos da Matemática para o terceiro ciclo (6° e 7° anos):

> - resolver situações-problema envolvendo números naturais, inteiros, racionais e a partir delas ampliar e construir novos significados da adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação;
> - identificar, interpretar e utilizar diferentes representações dos números naturais, racionais e inteiros, indicadas por diferentes notações, vinculando-as aos contextos matemáticos e não-matemáticos;
> - selecionar e utilizar procedimentos de cálculo (exato ou aproximado, mental ou escrito) em função da situação problema proposta.
> - Compreensão do sistema de numeração decimal, identificando o conjunto de regras e símbolos que o caracterizam e extensão das regras desse sistema para leitura, escrita e representação dos números racionais na forma decimal.
> - Reconhecimento de números racionais em diferentes contextos cotidianos e históricos e exploração de situações-problema em que indicam relação parte/todo, quociente, razão ou funcionam como operador.

O esquema da sequência de ensino foi: Oficina I - Introdução do número racional por meio da representação fracionária, Oficina II - Equivalência entre os números racionais com representação fracionária, Instrumento de Verificação de Aprendizagem 2 (IVA – 2), Oficina III - Adição e subtração de números racionais: representação fracionária, Oficina IV - Introdução da representação decimal dos números racionais, Instrumento de Verificação de Aprendizagem 3 (IVA - 3), Oficina V - Estudos das porcentagens de 10%, 20%, 30%, 40% e 50%, Instrumento de verificação de aprendizagem 4 (IVA - 4). Cada Oficina foi dividida em sessões, e estas em etapas, composta por um Kit de materiais, um guia de pergunta para os alunos, um guia para o professor e uma lista de exercícios para apropriação dos conteúdos da referida oficina. Os instrumentos de avaliação são os objetos sobre os quais foram feitas as análises dos conceitos apropriados pelos alunos após as realizações das Oficinas.

A Oficina I tem por finalidade a introdução do conceito de número racional na representação fracionária nos significados de parte-todo e quociente. A Oficina II aborda o conceito de equivalência entre duas frações. Na Oficina III são abordados os tratamentos de adição e subtração de números racionais na representação fracionária. A Oficina IV consiste em realizar uma abordagem da representação decimal do número racional. A Oficina V se destina ao estudo das porcentagens, ou seja, do número racional na representação de fração decimal e decimal.

Com a elaboração e aplicação da sequência de ensino, acredita-se que o aluno:

- será capaz de realizar os tratamentos, adição e subtração, com os números racionais na representação decimal para resolver situações cotidianas ou problemas essencialmente matemáticos;

- será capaz de realizar os tratamentos, adição e subtração, com os números racionais na representação fracionária para resolver situações cotidianas ou problemas essencialmente matemáticos;

- será capaz de realizar as conversões entre as várias representações dos números racionais, a saber: da língua natural para a fracionária (numérica) e vice-versa, da língua natural para a representação decimal e vice-versa, da representação decimal para a fracionária e vice-versa, da representação figural para a representação fracionária e vice-versa;

- o aluno será capaz de se apropriar do conceito de número racional.

O modo como foram realizadas as Oficinas está apresentado a seguir.

4.2.3 – A experimentação

Nesta etapa estão descritos os procedimentos realizados quando da aplicação das oficinas, assim como a aplicação dos Instrumentos de Verificação de Aprendizagem (IVA).

Após a aplicação dos questionários descritos nas análises prévias, cujo objetivo foi verificar o nível de desenvolvimento efetivo dos alunos quanto ao número racional e também em relação ao número natural, foram feitos os ajustes na sequência de ensino e deu-se início a fase da experimentação.

O trabalho de experimentação teve início com os esclarecimentos feitos pela pesquisadora aos alunos sobre o presente trabalho. Foi explicado aos alunos que os mesmos teriam a oportunidade de participarem desta pesquisa cujo objetivo principal era desenvolver um material didático que fosse útil aos alunos e aos professores para o ensino dos números racionais. A participação dos alunos ocorreu de modo voluntário, registrando os resultados apresentados apenas daqueles que participaram de todas as etapas da pesquisa e cujos pais autorizaram a participação dos mesmos. Infelizmente, não se pode realizar o registro da participação de todos que se dispusera a colaborar com este estudo, uma vez que muitos deles não participaram de todas as atividades que foram propostas, tais como as Oficinas, listas para a apropriação dos conteúdos de cada Oficina e testes de verificação de aprendizagem.

Após todos os esclarecimentos, as Oficinas foram realizadas.

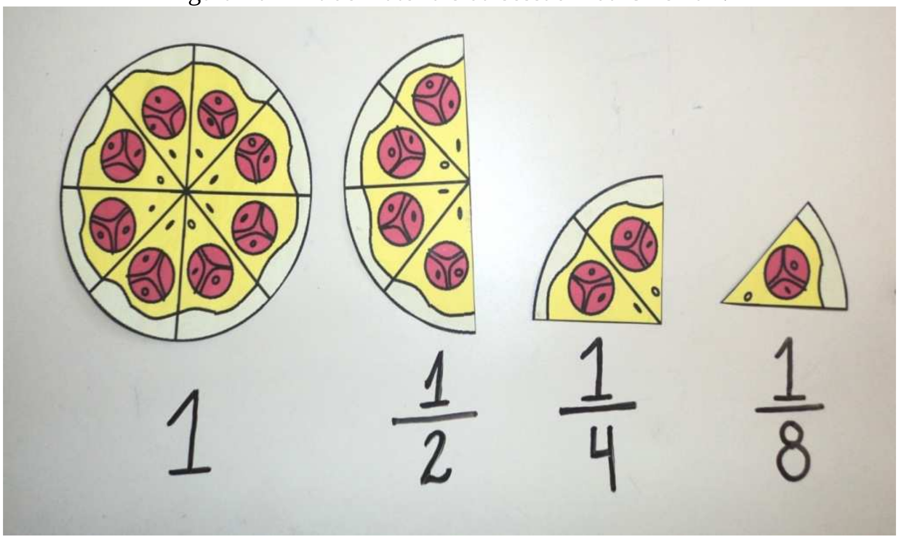
4.2.3.1 - Oficina I – Introdução do número racional por meio da representação fracionária

A Oficina I teve por objetivo introduzir o conceito de número racional por meio da representação fracionária. Esta oficina foi dividida em quatro sessões de tal modo que a sessão 1 abordou o número racional na representação fracionária a partir de variáveis contínuas e com o significado da fração como parte-todo. A sessão 2 é referente à aplicação de uma lista de apropriação dos conteúdos abordados na sessão 1. A sessão 3 utilizou o número racional na representação fracionária a partir de variáveis discretas com o significado parte-todo e quociente. A sessão 4 é referente à aplicação de uma lista de apropriação dos conteúdos abordados na sessão 3.

Sessão 1 – Variáveis contínuas

Para a sessão 1, variáveis contínuas, o Kit de materiais utilizado foi o seguinte:

Figura 10 - Kit de materiais da sessão 1 da Oficina I.



Fonte: Autora.

Esse Kit é composto por: uma pizza inteira, dividida em 8 fatias iguais; a metade, isto é, $\frac{1}{2}$ dessa pizza, dividida em 4 fatias iguais; $\frac{1}{4}$ da pizza com duas fatias iguais e $\frac{1}{8}$ da pizza, equivalente a uma das fatias. Esses materiais foram confeccionados pela pesquisadora em cartolina guache e plastificados com papel contato. Além desses materiais também foram utilizados um guia de pergunta para os estudantes e um guia para o professor.

Para a aplicação da Oficina I pediu-se que os alunos se distribuíssem em duplas, pois se acredita que esse modo de desenvolver o trabalho propicia uma melhor interação entre os alunos, podendo um mediar o trabalho do outro e facilitar a apropriação dos conceitos.

Esta sessão foi subdividida em 7 etapas, descritas e analisadas a seguir.

A pesquisadora seguiu o guia do professor e iniciou o trabalho com a etapa 1, entregando a cada dupla o guia de perguntas para os estudantes, uma pizza inteira (chamada de pizza A) e uma metade de pizza (chamada de pizza C).

Foi solicitado aos alunos que considerassem a pizza inteira como o sendo o total de pizza que se tinha inicialmente e que manipulassem as duas quantidades de pizza que foram entregues. Em seguida, solicitou-se aos alunos que respondessem a seguinte pergunta: Em quantas fatias iguais a fatia C, podemos cortar a pizza inteira?

A pesquisadora mediou esta atividade explicando aos alunos que gostaria que eles observassem a pizza C como sendo uma grande fatia de pizza e, supondo que a pizza inteira ainda não tinha sido dividida, se ela pudesse ser dividida em fatias iguais a fatia C, quantas fatias conseguiam? Para auxiliá-los no desempenho dessa tarefa foi dada a seguinte dica: sobrepor a fatia na pizza inteira.

Após as mediações, a maioria dos alunos respondeu que conseguiriam 2 (duas) fatias de pizza, que seria a resposta correta. Alguns responderam que teriam 4 (quatro) fatias de pizza, considerando as marcações encontradas na metade da pizza e desconsiderando a mediação da pesquisadora. Diante dessa resposta desfavorável, a pesquisadora tomou a pizza inteira e a metade da pizza em suas mãos e fez o seguinte questionamento: “Lembrem-se que estamos considerando este pedaço de pizza (pizza C, metade) como sendo o tamanho de uma fatia, uma fatia grande. Então, se uma fatia de pizza inteira for desse tamanho, em quantas fatias iguais a essa (pizza C) poderemos dividir a nossa pizza inteira? Tem certeza de que conseguiremos quatro fatias iguais a essa (pizza C)?”. Nesse momento, os alunos colocaram novamente a fatia C sobre a pizza inteira e conseguiram visualizar que conseguiriam apenas 2 (duas) fatias iguais.

Assim, a pesquisadora pôde dar continuação ao trabalho, seguindo para a etapa 2 na qual solicitou aos alunos que respondessem a pergunta 2 do guia de perguntas para os estudantes, que é a seguinte: Se Maria comprou uma pizza igual a esta e comeu uma fatia do tamanho da pizza C, quanto da pizza Maria comeu?

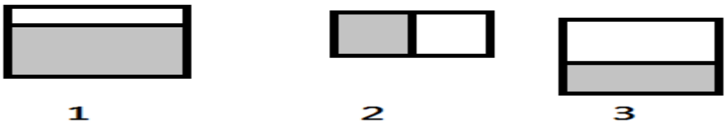
A resposta correta para essa pergunta é: a metade da pizza. Porém, os alunos não fizeram a correspondência entre a quantidade de fatias comida e o total de fatias iguais a fatia C na qual poderia ser dividida a pizza. As respostas mais comuns apresentadas pelos alunos foram: a) 4 (quaro fatias), pois consideraram a imagem da fatia C, dividida em 4 partes, desconsiderando as informações fornecidas no início da atividade; b) 1 fatia, considerando as informações da pesquisadora no início da atividade de que a pizza C seria considerada como uma fatia, mas, não fizeram relação entre a parte da pizza que foi consumida com a parte de pizza que havia inicialmente.

Nenhum dos alunos conseguiu responder inicialmente que Maria teria comido metade da pizza, que seria a resposta correta. Diante das dificuldades apresentadas pelos alunos, a pesquisadora mediou a atividade com o seguinte questionamento: “Vamos supor que eu tenha uma barra de chocolate inteirinha e que eu divida essa barra de chocolate em duas partes iguais e dê uma parte dessas para João, quanto do chocolate João ganhará?” Os alunos responderam, sem dificuldades, que João iria ganhar metade da barra de chocolate, mostrando que o conceito de metade estava na zona de desenvolvimento proximal dos mesmos. Em seguida, a pesquisadora voltou os questionamentos para a questão da Oficina I, e pediu para que os alunos analisassem a situação de Maria: “Quantas fatias iguais a esta (fatia C) tinha a pizza inteira? Quantas fatias Maria comeu? Essa quantidade é quanto da pizza inteira?”

Após essas mediações, os alunos conseguiram responder que Maria havia comido metade da pizza, podendo a pesquisadora seguir com a atividade e solicitar que os alunos tentassem responder a questão 3, que é a seguinte: Qual era o número total de fatias de pizza que havia antes de Maria comer a sua fatia? Se Maria comeu uma fatia do total de fatias que havia, como representar numericamente a parte que Maria comeu em relação ao total de fatias que havia?

Alguns alunos não compreenderam o enunciado e perguntaram o que teriam que fazer. A pesquisadora disse que eles deveriam escrever um número para mostrar a quantidade de fatias de pizza que Maria comeu em relação à quantidade de fatias de pizza que havia inicialmente. As respostas foram variadas, as principais foram: a) 4 (fatias) e b) 1(uma) fatia, ambas incorretas. Alguns alunos falaram “a metade”, mas, ao serem questionados de como escrever um número que representasse a metade, eles não conseguiam fazer isso. Então, a pesquisadora realizou a seguinte mediação: “Quantas fatias iguais a esta (fatia C) havia antes de Maria comer a pizza?”, os alunos responderam 2(duas); “Quantas fatias iguais a esta (fatia C) Maria comeu?” Os alunos responderam 1. Nesse momento a pesquisadora concluiu com os alunos que Maria havia comido uma fatia de duas que havia no total e que essa quantidade, a metade, era representada pelo número racional $\frac{1}{2}$, isto é, a metade, uma de duas fatias. A pesquisadora enfatizou também que só se pôde representar essa quantidade por esse número porque as fatias eram de mesmo tamanho, que o número racional $\frac{1}{2}$ é chamado de fração e que só pode ser utilizado quando um todo é dividido em partes iguais, assim $\frac{1}{2}$ é o número que representa a metade de uma quantidade. Vale ressaltar que desde esse primeiro contato com os números racionais na representação fracionária houve a preocupação em enfatizar para os alunos que a fração só pode ser utilizada para representar uma quantidade quando o todo for repartido em partes iguais, para que eles não desenvolvessem a idéia de que bastaria ter duas partes quaisquer para uma ser chamada de metade e representada por $\frac{1}{2}$. Para que os alunos compreendessem melhor essa etapa, a pesquisadora desenhou na lousa as seguintes figuras:

Figura 11 - Representação figural a.



Fonte: Autora.

Essas figuras serviram para enfatizar o que é uma metade e quando se pode relacionar uma parte de duas ao conceito de metade e ao número racional $\frac{1}{2}$. Foi dito aos alunos que nas figuras 1 e 3 a parte pintada não representava metade, pois para que uma parte de duas fosse considerada como metade o todo deveria ter sido dividido em partes iguais, como era o caso da figura 2, na qual a parte pintada representava a metade da figura inteira. A pretensão era de mostrar aos alunos que uma fração só pode ser relacionada a uma parte de um inteiro quando esse último for dividido em partes iguais. No caso das variáveis contínuas, esse conceito é equivalente a considerar que o todo deveria ser dividido em partes com áreas iguais.

Passado esse primeiro momento, a pesquisadora seguiu para a etapa 3 do guia do professor e entregou aos alunos um pedaço do tamanho de um quarto de pizza (chamado de B). Foi solicitado que os alunos tentassem responder a seguinte pergunta do guia dos alunos: Em quantas fatias iguais à fatia B podemos cortar a pizza? Devido à experiência anterior, alguns alunos já conseguiram compreender que deveriam considerar aquele pedaço como sendo uma fatia apenas e que deveriam manipular a pizza inteira e o pedaço B para responderem a questão. Dessa forma, a maioria dos alunos conseguiu responder essa questão corretamente, isto é, 4 (quatro) fatias e os demais, por meio da interação com os colegas também conseguiram superar essa etapa.

Na etapa 4, foi solicitado que os alunos respondessem as seguintes perguntas do guia que receberam: Vamos supor que Maria tenha comido uma fatia do tamanho da fatia B. Qual é o número total de fatias que havia antes de Maria comer a sua fatia? Se Maria comeu uma fatia do total de fatias que havia, como representar numericamente a parte que Maria comeu em relação ao total de fatias que havia inicialmente?

Alguns alunos conseguiram responder corretamente a essa questão, afirmando que havia 4 fatias e que Maria comeu uma das quatro fatias, isto é, $\frac{1}{4}$. Porém, a dúvida ainda persistia entre os demais e se fez necessária a mediação da pesquisadora com os seguintes questionamentos: "Peguem a pizza inteira. Peguem a fatia B. Coloquem a fatia B sobre a pizza inteira. Em quantas fatias iguais à fatia B podemos cortar essa pizza?" Os alunos responderam corretamente, 4 (quatro) fatias. "Quantas fatias Maria comeu?" Os alunos responderam 1. "Mas, Maria comeu uma fatia de quantas que havia no total? Ela comeu uma fatia de quantas?" Os alunos responderam que seria uma fatia de quatro que havia no total. "Então, qual é o número que a gente deve escrever para representar que Maria comeu uma fatia das quatro?" A maioria dos alunos conseguiu responder que era "um quatro" e escreveram $\frac{1}{4}$. Essa resposta foi considerada como correta, mas a pesquisadora mediou mais uma vez a atividade explicando aos alunos que a fração $\frac{1}{4}$ deveria ser lida como "um quarto" e não "um quatro".

Na sequência, foi solicitado que os alunos respondessem as seguintes perguntas: a) e se Maria tivesse comido duas fatias iguais à fatia B do total que havia inicialmente, como poderíamos representar essa quantidade? b) e se Maria tivesse comido três fatias iguais à fatia B do total que havia inicialmente, como poderíamos representar essa quantidade?

Nesse momento alguns alunos responderam corretamente ao escreverem, respectivamente, $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{4}$. Aos demais alunos, que não obtiveram êxito nas soluções, solicitou-se que interagissem com os colegas na busca pela compreensão das questões propostas. Alguns segundos depois, os alunos demonstraram o entendimento das soluções das questões propostas.

A etapa 5 teve inicio com a entrega de um pedaço de pizza correspondente a um oitavo da pizza (chamado de fatia A) a cada dupla. Foi solicitado que os alunos respondessem a seguinte pergunta do guia que os foi entregue: Em quantos pedaços iguais à fatia A podemos dividir a pizza? Eles responderam sem dificuldades 8 fatias.

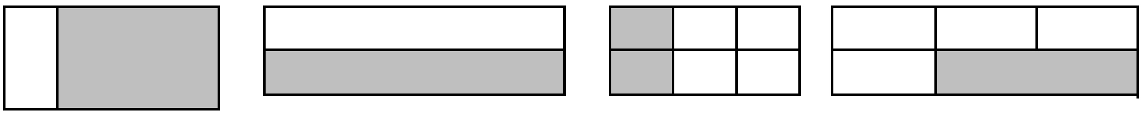
Depois de observada cada dupla, a mediadora passou para a etapa 6 na qual solicitou que os alunos respondessem ao seguinte questionamento: Qual o número total de fatias de pizza que havia antes de Maria comer a sua fatia? Se Maria comeu uma fatia do total que havia, como representar numericamente a parte da pizza que Maria comeu em relação ao total de fatias que havia inicialmente?

As duplas foram observadas e a maioria conseguiu responder a questão corretamente, aos demais alunos, isto é, aos que não conseguiram resolver a questão, foi solicitado que interagissem com os colegas e ambos chegaram a compreensão da atividade proposta.

A última etapa desta sessão 1 da Oficina I, foi composta pelos seguintes questionamentos: a) e se Maria tivesse comido duas fatias iguais à fatia A do total que havia inicialmente, como poderíamos representar essa quantidade; b) e se Maria tivesse comido três fatias iguais à fatia A do total que havia inicialmente, como poderíamos representar essa quantidade?

Algumas dúvidas surgiram nesta etapa, mas a mediação e a interação entre pesquisadora e alunos fizeram com que todos compreendessem que a solução seria, respectivamente, $\frac{2}{8}$ e $\frac{3}{8}$. Para finalizar esta sessão, a mediadora desenhou as seguintes figuras na lousa:

Figura 12 - Representação figural b.



Fonte: Autora.

Neste momento a mediadora enfatizou para o os alunos que a fração só poderia ser utilizada para representar uma parte de um todo quando este todo fosse dividido em partes iguais, como ocorreu com a pizza em todos os casos. Ressaltou também que a fração não significa um número natural sobre outro, por exemplo, $\frac{1}{2}$ não é o número 1 sobre o número 2, e sim um único número que é utilizado para representar a metade de um inteiro. Para auxiliar os alunos na apropriação desse conceito a mediadora desenhou na lousa as 4 figuras acima e as explorou, mostrando em quais figuras poderia se representar a parte pintada por uma fração e em qual situação isso não era possível. Também foi mostrando aos alunos a maneira correta de ler e escrever os números racionais na representação fracionária.

Após a análise dos dados coletados nesta etapa da Oficina I, considerou-se necessário realizar uma alteração no Kit de materiais, de modo que, no trabalho final, os pedaços de pizza não mais terão as fatias demarcadas, mas, serão apenas uma pizza inteira, uma metade, um quarto e um oitavo de pizza. De modo que os alunos façam as marcações necessárias para resolverem as questões. Acredita-se que dessa forma o processo de aprendizagem ocorra mais significativamente.

Sessão 2 - Lista de exercícios para apropriação dos conteúdos da sessão 1

A sessão 2 diz respeito à aplicação da Lista de exercícios para a apropriação dos conteúdos da sessão 1 – variáveis contínuas, presente no Apêndice D. Essa lista foi aplicada um dia após a realização da sessão 1.

Como a teoria de Vygotsky visa a uma aprendizagem por meio da mediação e da interação, a lista de exercícios foi entregue a duplas, para facilitar a interação entre os alunos, podendo aquele que tem mais facilidade em se apropriar do conhecimento matemático, auxiliar aquele que tem menos habilidade. A pesquisadora apenas observou as duplas durante a solução das questões, mediando a atividade por meio de questionamentos, sempre que necessário. Ao final, a pesquisadora mediou a socialização das respostas das questões atribuídas pelos alunos, chamando-os à lousa, confrontando respostas diferentes e incentivando os alunos a refletirem sobre as soluções que tinham apresentado para que eles mesmos concluíssem quais respostas estavam corretas e quais eram questionáveis.

Sessão 3 – Variáveis discretas

A sessão 3 da Oficina I foi desenvolvida a partir do seguinte Kit de materiais:

Figura 13 - Kit de materiais da sessão 3 da Oficina I.

Fonte: Autora.

Além do pacote com 24 balas, o Kit de materiais também continha um guia de perguntas para os estudantes e um guia para o professor. A sessão 3 da Oficina I foi dividida em 4 (quatro) etapas, descritas e analisadas a seguir.

Na etapa 1 o professor entregou o pacote de balas aos alunos e solicitou que os mesmos dividissem o total de balas em duas partes iguais. Em seguida, perguntou-se: Quanta bala tem cada parte? Os alunos não esboçaram dificuldades e responderam corretamente, 12 balas.

Em seguida foi feito o seguinte questionamento: Uma pessoa que comer todas as balas de uma dessas partes estará comendo quanto da quantidade total de balas que estavam no saco antes da divisão?

Inicialmente os alunos não conseguiram responder a contento o questionamento, atribuindo como resposta 12. A pesquisadora precisou mediar a atividade com as seguintes indagações: “Prestem atenção na pergunta que foi feita. Se eu estivesse perguntado quantas balas essa pessoa comeu, vocês estariam certos ao responderem 12 balas. Porém, eu estou querendo saber qual é o número que representa essas 12 balas que a pessoa comeu em relação ao total de balas, ou seja, a pessoa comeu 12 balas de uma total de quantas balas?”

Nesse momento, alguns alunos começaram a compreender o que teria sido solicitado e a resposta $\frac{12}{24}$ (doze vinte e quatro avos) já era pronunciada por eles. Mais algumas mediações e todos conseguiram compreender que a quantidade de balas que a pessoa teria comido seria de $\frac{12}{24}$, ou seja, uma parte do total. Alguns alunos também pronunciaram a metade.

Na etapa 2, foi pedido que os alunos juntassem todas as balas novamente e, em seguida, dividissem-nas em 6 partes iguais. A realização dessa etapa não ocorreu tão rapidamente, posto que os alunos não dominavam a operação de divisão com números naturais e também não sabiam a tabuada. Alguns alunos entenderam que deveriam dividir as balas de seis em seis, formando assim 4 partes com 6 bala em cada. Para que esta etapa fosse concluída, a pesquisadora teve que mediar o trabalho sugerindo aos alunos que eles imaginassem que tinham 6 pessoas na frente deles e que eles deveriam distribuir as balas igualmente para essas 6 pessoas, uma por uma das balas. Assim os alunos separaram seis espaços em cima da mesa e foram distribuindo bala por bala nesses 6 espaços.

Foi solicitado que os alunos respondessem a seguinte pergunta do guia dos alunos: Uma pessoa que comer todas as balas de uma dessas partes comerá que quantidade em relação ao total de balas? As respostas foram variadas, alguns alunos responderam 6 balas, cometendo o mesmo erro da etapa anterior, outros responderam corretamente, ou seja, $\frac{6}{24}$, nenhum dos alunos respondeu $\frac{1}{6}$ que também seria uma resposta correta e mostraria que o aluno observou que a pessoa teria comido as balas de uma das seis partes. A pesquisadora mediou a socialização das respostas para que os alunos, por meio da interação com os próprios colegas, conseguissem compreender a questão proposta.

Na etapa 3 foi feita a seguinte pergunta: Uma pessoa que comer todas as balas de quatro dessas partes comerá que quantidade em relação ao total de balas?

A maioria dos alunos conseguiu responder que eles estariam comendo 16 de um total de 24 balas. A pesquisadora perguntou, então, que número seria esse e eles responderam $\frac{16}{24}$.

A etapa 4 foi realizada da seguinte maneira: Se na situação apresentada na questão 3 quiséssemos saber que quantidade a pessoa comeu em relação à metade do total de balas, que número você escreveria? Neste momento queria-se que os alunos relacionassem quatro balas à metade do total de balas que tinham inicialmente. Os alunos não souberam responder a essa pergunta. Foi necessário que a pesquisadora pedisse aos alunos que separassem em cima da mesa apenas metade das balas e dessa metade retirassem as quatro balas que equivaliam a uma parte, segundo a referida questão. Após algumas mediações os alunos conseguiram responder que teriam $\frac{4}{12}$. Essa etapa surge para enfatizar que uma mesma quantidade pode ser representada por vários números racionais e que isso depende do referencial de "todo" que se utiliza. Assim, quando o todo é composto por 24 balas, uma quantidade de 4 balas é representada pelo número $\frac{4}{24}$ e, quando o todo é composto por 12 balas, essa mesma quantidade de 4 balas é representada por $\frac{4}{12}$. É nesse momento que surge a oportunidade para o professor enfatizar que a quantidade representada por uma fração depende do que é considerado como sendo o "todo", como unidade. Pode mostrar que $\frac{1}{3}$ da metade é equivalente a 4 balas, enquanto $\frac{1}{3}$ do total de balas equivale a 8 balas.

Sessão 4 – Lista de exercícios para apropriação dos conteúdos da sessão 3

Para finalizar a aplicação da Oficina I, foi realizada a sessão 4 constando da aplicação da Lista de exercícios para apropriação dos conceitos da Oficina I – variável discreta, apresentada no Apêndice E.

Norteada pela teoria de Vygotsky que visa a uma aprendizagem por meio da mediação, da interação e da valorização das peculiaridades da comunidade na qual os sujeitos estão inseridos, a lista de exercícios foi entregue a duplas, para facilitar a interação entre os alunos, podendo aquele que tem mais facilidade em se apropriar do conhecimento matemático auxiliar aquele que tem essa habilidade menos desenvolvida. A pesquisadora apenas observou as duplas durante a solução das questões, mediando a atividade por meio de questionamentos, sempre que necessário. As questões foram desenvolvidas segundo as considerações de Duval e, sempre que possível, adaptadas ao cotidiano dos alunos. Ao final, a pesquisadora mediou a socialização das respostas das questões atribuídas pelos alunos, chamando-os à lousa, confrontando respostas diferentes e incentivando os alunos a refletirem sobre as soluções que tinham apresentado para que eles mesmos chegassem a um consenso acerca da resposta correta.

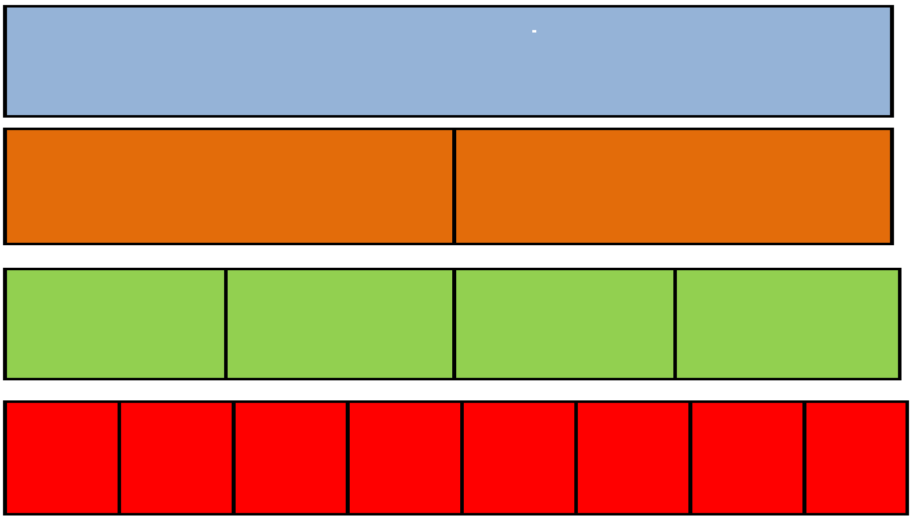
4.2.3.2 - Oficina II - Equivalência entre os números racionais na representação fracionária

A Oficina II foi desenvolvida para abordar a equivalência entre os números racionais com representação fracionária. Essa oficina foi dividida em três sessões cujos objetivos são: identificar frações equivalentes quando da apresentação figural, identificar frações equivalentes quando da apresentação fracionária, calcular frações equivalentes a uma fração dada, comparar números racionais na representação fracionária.

Sessão 1 - Visualizando alguns números racionais que representam quantidades iguais

A sessão 1 foi desenvolvida a partir do seguinte kit de materiais.

Figura 14 - Kit de materiais da sessão 1 da Oficina II.



Fonte: Autora.

Esse kit de materiais concretos foi confeccionado pela pesquisadora em cartolina guache, nas cores azul, laranja, verde e vermelho. Além desses materiais também compunham o Kit um guia para o professor e um guia de perguntas para os estudantes. Nesse momento os alunos foram convidados a descobrirem que uma mesma quantidade pode ser representada de diversas formas, assim como, números aparentemente distintos também podem representar quantidades iguais.

Essa sessão foi dividida em 5 etapas que são descritas e analisadas a seguir.

Na etapa 1 os alunos foram divididos em duplas e, a cada dupla foi entregue um guia de perguntas para os estudantes e um Kit contendo quatro retângulos, sendo que o retângulo azul estava inteiro, o retângulo laranja foi dividido em duas partes iguais, o retângulo verde foi dividido em quatro partes iguais e o retângulo vermelho foi dividido em oito partes iguais, conforme figura 13.

Foi pedido aos alunos que imaginassem que cada um desses retângulos representava uma barra de chocolate sendo que a barra de chocolate azul estava inteira e as demais foram partidas em pedaços iguais.

Solicitou-se dos alunos que eles pegassem a barra azul e todos os pedaços da barra laranja. Foi realizado o seguinte questionamento: Quanto da barra azul é representado por **uma** barra laranja? Por quê? Os alunos não esboçaram muita dificuldade e conseguiram compreender que uma barra laranja é equivalente a metade da barra azul.

Na etapa 2 solicitou-se que os alunos pegassem todas as barras das cores azul, verde e vermelha e, em seguida, foram feitas as seguintes perguntas: Quanto da barra azul é representado por uma barra verde? Por quê? Quanto da barra azul é representado por uma barra vermelha? Por quê? Alguns alunos apresentaram dificuldades em responder a estas questões, enquanto outros responderam corretamente que, na primeira situação, a resposta seria $\frac{1}{4}$, porque a barra azul poderia ser dividida em quatro partes do tamanho da barra verde e, na segunda situação, a resposta seria $\frac{1}{8}$, porque a barra azul poderia ser dividida em oito partes iguais a uma barra vermelha.

Como, mesmo depois das respostas expostas por alguns alunos, os demais ainda não haviam compreendido as questões, a pesquisadora precisou mediar a atividade da seguinte maneira: “Peguem todas as barras verdes. Peguem a barra azul. Quantas barras verdes formam uma barra azul?” Os alunos responderam 4. “Então, se eu pegar uma barra verde e comparar com a barra azul, pode-se dizer que uma barra verde é quanto da barra azul?” Houve um avanço e, dentre os que não haviam compreendido, já se escutava a resposta $\frac{1}{4}$. “Então, quer dizer que uma barra verde é um quarto da barra azul porque a barra azul pode ser dividida em quatro barrinhas iguais à barra verde". "Agora peguem as barras vermelhas e a barra azul e façam a mesma comparação que acabamos de fazer só que desta vez eu quero saber quanto da barra azul é representado por uma barra vermelha." Os alunos conseguiram responder corretamente a atividade.

Na etapa 3 foi solicitado que os alunos resolvessem as seguintes situações-problema: Vamos tentar responder o seguinte probleminha. Joana e Lucas compraram, cada um, uma barra de chocolate do mesmo tamanho da barra azul. Joana comeu um pedaço do mesmo tamanho da barra laranja. Lucas comeu dois pedaços do mesmo tamanho da barra verde. Você acha que:

a. Lucas comeu mais chocolate do que Joana? Sim ( ) Não ( ). Por quê?

b. Joana comeu mais chocolate do que Lucas? Sim ( ) Não ( ). Por quê?

c. Lucas e Joana comeram as mesmas quantidades de chocolate? Sim ( ) Não ( ). Por quê?

Os alunos sentiram muita dificuldade em resolver este problema proposto no guia dos alunos. Eles não perceberam a relação existente entre os itens a, b e c. Foi necessário que a pesquisadora mediasse a resolução dessa atividade, fazendo a leitura dela, item por item, e esperando que os alunos respondessem simultaneamente os mesmos.

Em seguida, foi proposta a seguinte questão: Agora que você já está esperto, tente resolver o seguinte probleminha: Lucas comprou outra barra de chocolate do tamanho da barra azul. No primeiro dia, ele comeu um pedaço do tamanho da barra laranja e no segundo dia ele comeu quatro pedaços do tamanho da barra vermelha. O que você pode dizer sobre as quantidades de chocolate que Lucas comeu em cada dia?

Alguns alunos demonstraram dificuldades em resolver essa questão proposta, então a pesquisadora mediou a atividade solicitando aos alunos que manipulassem uma barra laranja e uma vermelha e as comparassem. Após essa mediação todos perceberam que Lucas comeu a mesma quantidade de chocolate nos dois dias.

Na etapa 4, foi solicitado que os alunos observassem e comparassem as barras coloridas de modo conveniente, de modo que tentassem resolver a seguinte questão: Preencha as lacunas com um dos seguintes sinais: > (maior do que), < (menor do que) ou = (igual).

a. $\frac{1}{2}$ ____________________ $\frac{1}{4}$

b. $\frac{1}{4}$ ____________________ $\frac{1}{8}$

c. $\frac{1}{8}$ ____________________ $\frac{1}{2}$

d. $\frac{2}{4}$ ____________________ $\frac{4}{8}$

e. $\frac{1}{2}$____________________ $\frac{2}{4}$

A pesquisadora ficou observando as duplas durante alguns segundos e percebeu que uma das dificuldades estava no uso dos sinais, que mesmo com o significado de cada um ao lado dos mesmos, os alunos não conseguiram aplicá-los na questão. Então, foi sugerido que os alunos escrevessem as palavras *maior do que, menor do que* ou *igual* para responder os itens. A explicação do uso dos sinais ficou para outro momento, pois se tinha pouco tempo de aula. Notou-se divergências entre as respostas das duplas, fato que ocasionou a mediação da pesquisadora da seguinte maneira: foi perguntado aos alunos as respostas que eles tinham posto em cada item. Essas respostas foram escritas na lousa e solicitou-se que os alunos que tinham respostas divergentes explicassem como conseguiram chegar a tais resultados. Dessa forma, os próprios alunos, com o auxilio da mediação da pesquisadora, foram compreendendo como deveriam proceder para obter os resultados e entender a comparação entre as quantidades por meio da manipulação das barras coloridas e a questão resolvida corretamente da seguinte maneira:

a. $\frac{1}{2}$ _________ $>$ __________ $\frac{1}{4}$ porque $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$. Assim, $\frac{2}{4} > \frac{1}{4}$.

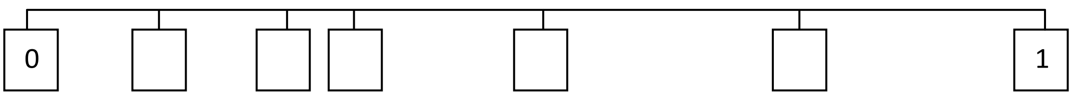
b. $\frac{1}{4}$ _________ $>$ __________ $\frac{1}{8}$ porque $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$. Assim, $\frac{2}{8} > \frac{1}{8}$

c. $\frac{1}{8}$ _________ $<$ __________ $\frac{1}{2}$ porque $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$. Assim, $\frac{1}{8} < \frac{4}{8}$

d. $\frac{2}{4}$ __________ $=$ _________ $\frac{4}{8}$ porque $\frac{2}{4} = \frac{4}{8}$. Assim, $\frac{4}{8} = \frac{4}{8}$

e. $\frac{1}{2}$ __________ $=$ __________ $\frac{2}{4}$ porque $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$. Assim, $\frac{2}{4} > \frac{2}{4}$

Na etapa 5, última dessa sessão, foi solicitado aos alunos que respondessem a seguinte questão: Coloque os números $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$ e $\frac{3}{4}$ em ordem crescente na reta numérica abaixo:



Nessa questão os alunos apresentaram muitas dificuldades e não conseguiram respondê-la corretamente. A pesquisadora precisou mediar a atividade de modo mais intenso, pedindo que os alunos separassem as barras que correspondiam a cada valor e as colocassem em ordem, da maior para a menor quantidade.

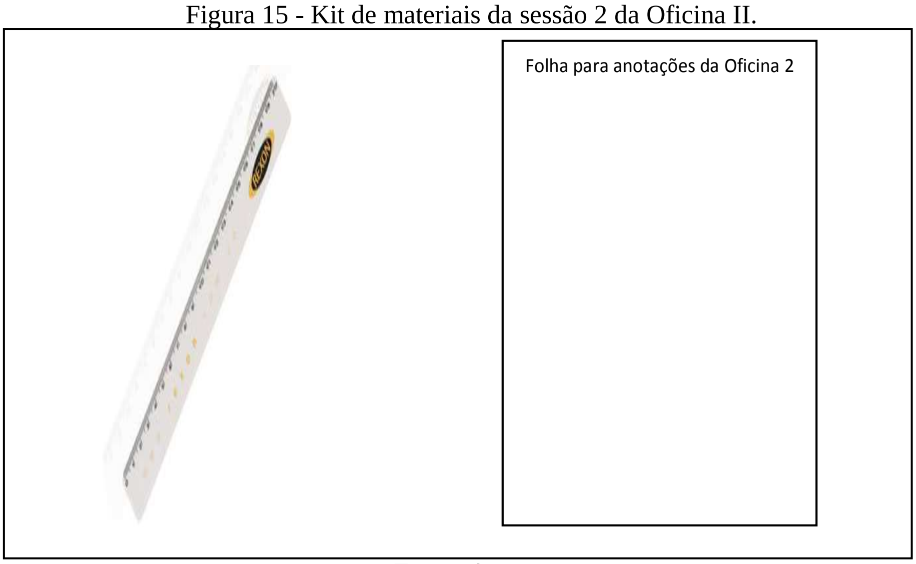
Nessa sessão 1, da Oficina II, não foram utilizados algoritmos nem para comparação de frações nem para a obtenção de frações equivalentes. Nesse momento foram utilizados apenas os materiais visuais e manipulativos. A obtenção de frações equivalentes por meio de algoritmos é o objetivo seguinte desta Oficina II, isto é, da sessão 2 que foi norteada pelo trabalho desenvolvido por Amorim (2007) para a apropriação do conceito de fração equivalente.

Sessão 2 – Calculando frações equivalentes

A sessão 2 da Oficina II foi desenvolvida a partir do trabalho de Amorim (2007), no qual o estudo das frações equivalentes foi proposto por meio da construção e análise de segmentos de reta com o auxílio de uma régua.

O Kit de matérias utilizado está apresentado abaixo:

Figura 15 - Kit de materiais da sessão 2 da Oficina II.



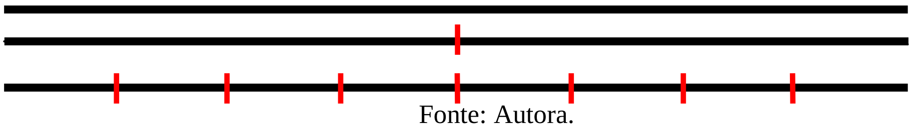
Fonte: Autora.

Os alunos utilizaram uma régua e uma folha para anotações. Essa sessão foi dividida em 5 etapas que serão descritas e analisadas a seguir. Além desses materiais também foram utilizados um guia para o professor e um guia de perguntas para os estudantes.

A etapa 1 iniciou com a entrega aos alunos da folha para anotações, da régua e do guia de perguntas para os estudantes. Foi solicitado aos alunos que realizassem os seguintes procedimentos: Com a régua, construa um segmento de reta de medida 16 cm. Construa abaixo desse, outro segmento com mesma medida e marque a sua metade. Construa abaixo outro segmento com a mesma medida do primeiro. Agora, divida-o ao meio e, em seguida, divida cada metade em quartos.

As mediações se fizeram necessárias, para que os alunos apresentassem o seguinte esquema:

Figura 16 - Representação figural de $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{2}$.



Fonte: Autora.

Em seguida, foi feito o seguinte questionamento: Cada quarto de metade representa quanto do segmento inteiro?

Os alunos esboçaram dificuldades para responder essa atividade e a pesquisadora mediou o trabalho ao pedir que os alunos observassem os segmentos. Dessa forma, alguns conseguiram visualizar que cada quarto da metade é equivalente a um oitavo do inteiro. Com a interação, os demais conseguiram acompanhar o desenvolvimento da questão.

A etapa 2 compreende a solução da seguinte questão: Podemos dizer que $\frac{1}{2}$ é equivalente a quantos oitavos?

Alguns alunos estranharam a palavra equivalente aplicada a esse contexto, mas a interação entre os próprios alunos na qual uns disseram aos outros que eram frações que representavam a mesma quantidade, conforme o que fora estudado na sessão anterior, fez com que os demais sanassem essa dificuldade. A resposta correta, isto é, 4 (quatro), foi apresentada pela maioria e justificada pela visualização dos segmentos.

A etapa 3 constou de pedir aos alunos para realizarem os seguintes procedimentos: Com a régua, construa um segmento de reta de medida 16 cm. Construa abaixo desse, outro segmento com mesma medida e divida-o em quartos. Construa abaixo outro segmento com a mesma medida do primeiro. Agora, divida-o em quartos, em seguida, divida cada quarto ao meio. Responda: cada metade de quarto representa quanto do segmento inteiro? Podemos dizer que $\frac{1}{4}$ é equivalente a quantos oitavos?

Os alunos ainda apresentaram dificuldades em responder essas questões. Eles demonstraram não ter domínio do uso da régua, desde o início, e mesmo com as mediações, insistiam em começar as medições em 1 cm e não em 0 cm. Isso fez com que o trabalhado demandasse um pouco mais de tempo.

Na etapa 4 os alunos foram convidados a responder as seguintes questões: Sabemos então que: $\frac{1}{2} = \frac{}{8}$ e que $\frac{1}{4} = \frac{}{8}$. Então, quem é maior, $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{4}$·? Vamos tentar realizar o mesmo procedimento para escrever $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ como frações com mesmo denominador e descobrir qual das duas representa uma quantidade maior.

Esse foi um dos momentos mais delicados da experimentação dessa sessão. Nesse momento os alunos precisavam compreender que seria por meio da comparação entre frações com mesmo denominador que eles conseguiriam comparar frações com denominadores diferentes. Além disso, necessitou-se do entendimento de que as frações equivalentes seriam utilizadas para substituir as frações dadas inicialmente, sem qualquer prejuízo quanto ao valor do objeto matemático em estudo. Inicialmente os alunos demonstraram pouco entendimento do enunciado e solicitaram uma leitura coletiva para que pudessem entender o que estava sendo solicitado. Essa etapa foi superada após várias mediações até que os alunos conseguissem compreender que para comparar as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ precisavam-se obter frações equivalentes às frações dadas e que tivessem o mesmo denominador, como por exemplo $\frac{4}{8}$ e $\frac{2}{8}$ para, por conta dos valores dos numeradores, se chegasse à conclusão de que a primeira fração é maior que a segunda. Para que os alunos verificassem que isso era verdade foi feita a construção de segmentos de reta nos quais as respectivas medidas foram visualizadas. Em seguida, introduziu-se o algoritmo para se calcular frações equivalentes por meio da multiplicação dos denominadores das frações, isto é, dadas duas frações, para se encontrar uma fração respectivamente equivalente às frações dadas e com denominadores iguais, basta multiplicar a primeira fração pelo denominador da segunda fração e multiplicar a segunda fração pelo denominador da primeira fração. Dessa forma o exemplo em questão seria apresentado da seguinte maneira: $\frac{1}{2} \text{ x } \frac{4}{4} = \frac{4}{8}$ e $\frac{1}{4} \text{ x } \frac{2}{2} = \frac{2}{8}$

Alguns alunos demonstraram pouco domínio da tabuada de multiplicação, o que representou um empecilho para a apropriação desse conteúdo.

Na última etapa dessa sessão, a etapa 5, a pesquisadora desenvolveu na lousa um exemplo similar aos anteriores com as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{4}$ para sintetizar o procedimento de calcular frações com o mesmo denominador pelo processo multiplicativo. Em seguida, foi solicitado aos alunos que resolvessem a seguinte questão: Encontre as frações equivalentes às frações dadas, que possuam o mesmo denominador e compare-as, utilizando os sinais de maior do que (>) ou de menor do que (<). Faça uma representação figural utilizando os segmentos de reta.

a. $\frac{1}{2}$ ________ $\frac{2}{3}$

b. $\frac{4}{5}$ ________ $\frac{3}{4}$

Os alunos preferiram utilizar o procedimento multiplicativo para comparar as frações e não souberam representar por meio do segmento de reta.

Sessão 3 – Lista de exercícios para a apropriação dos conteúdos da Oficina II

A sessão 3 da Oficina II compreendeu a aplicação da Lista de exercícios para apropriação dos conteúdos da Oficina II, presente no Apêndice F. Essa lista é composta por 4 questões que envolvem a comparação de frações por meio do uso das frações equivalentes. Das quatro questões, três são de situações-problema que envolvem a comparação de frações e uma delas é mais teórica, na qual se solicita apenas que se comparem as frações para verificar se os alunos compreenderam o algoritmo da multiplicação.

A lista foi proposta as duplas para propiciar a interação e, após alguns minutos de observação, a pesquisadora mediou a socialização das soluções, momento no qual os alunos expuseram suas soluções e os métodos utilizados para se chegar a tais resultados. As duplas que apresentavam respostas divergentes eram convidadas a discutirem os procedimentos e concluírem qual seria o apropriado.

Todas as três primeiras questões apresentavam o mesmo nível de dificuldade e como eram situações-problema, exigiam dos alunos não apenas o conhecimento matemático, mas também a interpretação do enunciado. Apesar das três questões terem o mesmo grau de dificuldade, a questão 3 foi a que mais inquietou os alunos. O enunciado era da seguinte maneira:

Questão 3

A professora de Matemática fez um trabalho no qual Lili tirou $\frac{4}{5}$ *da nota máxima. Lala, que também fez o mesmo trabalho, tirou* $\frac{2}{3}$ *da nota máxima. Quem tirou a maior nota no trabalho? Justifique sua resposta.*

A maioria das duplas questionou que não poderiam responder a essa questão porque não fora citada a nota máxima do trabalho. Foi necessário chamar a atenção para o fato de que o trabalho realizado por Lili e por Lala ser o mesmo e valer a mesma pontuação, assim, bastaria saber se a nota seria maior para aquela aluna que tirou $\frac{4}{5}$ ou $\frac{2}{3}$ dessa mesma nota.

As Oficinas I e II formaram o alicerce para os tratamentos de adição e de subtração com números racionais na representação fracionária, por este motivo, antes de serem abordados esses conteúdos, foi aplicado o Instrumento de Verificação de Aprendizagem 2 (IVA - 2) para verificar se eram relevantes os conhecimentos apropriados pelos alunos nessas duas etapas. O IVA-2 foi aplicado individualmente e os alunos não consultaram qualquer tipo de material. A análise do IVA – 2 será apresentada na análise *a posteriori*.

4.2.3.3 - Oficina III - Adição e subtração de números racionais na representação fracionária

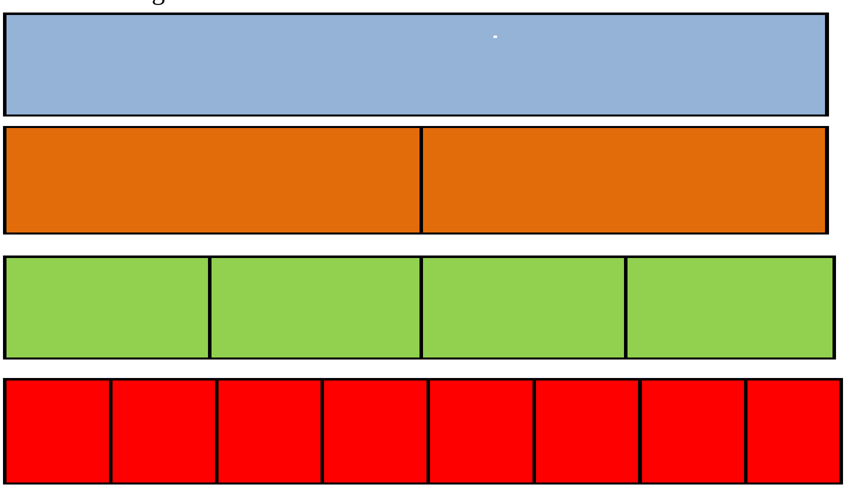
A Oficina III foi desenvolvida com o objetivo de abordar o estudo das operações de adição e de subtração de números racionais na representação fracionária por meio da utilização de objetos concretos e manipulativos. Comumente os livros didáticos fazem uma abordagem das operações de adição e subtração com números racionais a partir do conceito de mínimo múltiplo comum. Nesse trabalho, a metodologia adotada difere da frequentemente adotada nos livros didáticos, pois utilizou o conceito de equivalência entre as frações.

A Oficina III foi dividida em três sessões e seu tempo de duração foi de 3 aulas de 60 min cada. Para estimular a interação entre os sujeitos, em todas as sessões os alunos foram distribuídos em duplas.

Sessão 1 - Visualizando a soma e a subtração entre duas frações

Esta sessão foi desenvolvida a partir da manipulação do seguinte Kit de materiais:

Figura 17 - Kit de materiais da sessão 1 da Oficina III.



Fonte: Autora.

A sessão 1 teve por objetivo abordar a adição e a subtração de frações sem o uso de algoritmos, utilizando objetos manipulativos para que os alunos pudessem visualizar os resultados das adições e subtrações de um modo prático. Esta proposta foi adotada para tentar mostrar ao aluno que algumas propriedades dos números naturais não se estendem aos números racionais, assim, adicionar ou subtrair números racionais não se processa da mesma maneira que a adição e subtração com números naturais. Além dos materiais apresentados, o Kit continha também um guia para o professor e um guia de perguntas para os alunos, presentes no Apêndice K.

Para motivar os alunos e enfatizar as propriedades intrínsecas aos números racionais a aula teve início com a seguinte pergunta: Quanto é $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$·?

A pesquisadora escreveu a pergunta na lousa e ouviu as respostas dos alunos para a mesma. Como já era esperado, os alunos utilizaram as propriedades de adição de números naturais e a aplicaram para os números racionais, ou seja, eles fizeram uma soma direta entre o numerador da primeira fração e o numerador da segunda fração e uma outra soma, da mesma forma, com os denominadores, respondendo que $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$.

A pesquisadora não disse aos alunos que eles tinham errado. Conduziu a oficina de modo que os próprios alunos percebessem que tinham errado a solução da questão que fora proposta, para tanto, foi solicitado dos alunos que representassem a adição $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ com as barras.

Os alunos não tiveram dificuldades em escolher as barras laranja para representar as duas frações, acredita-se que essa facilidade ocorreu por conta do contato anterior com as barras coloridas, desse modo, os alunos já tinham o conhecimento de que uma barra laranja representava $\frac{1}{2}$ da barra azul (o inteiro, a unidade). Como a operação solicitada era adicionar as barras, então, para se obter o resultado, bastaria juntar as duas barras laranja e comparar com a barra azul e perceber que a junção das duas barras laranja era do tamanho da barra azul e não do tamanho de duas barras verdes $(\frac{2}{4})$ conforme os alunos tinham afirmado. Após a realização desse procedimento, os alunos perceberam de modo prático que $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ não valia $\frac{2}{4}$ e sim um inteiro.

As figuras 18 e 19 mostram alguns momentos dessa etapa da experimentação, na qual os alunos utilizaram a sobreposição ou a comparação das peças que representavam as quantidades em questão.

Figura 18 - Representação da soma $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ feita por alunos utilizando sobreposição das peças.

Fonte: Autora.

Figura 19 - Representação da soma $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ feita por alunos utilizando comparação das peças

Fonte: Autora.

Em seguida, foi solicitado que os alunos utilizassem as barras convenientes para verificar quanto era $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ e eles não tiveram dificuldades em responder que seria $\frac{2}{4}$ ou $\frac{1}{2}$, pois a junção das duas barras verdes era equivalente a uma barra laranja. A pergunta seguinte foi: Quanto é $\frac{1}{8} + \frac{1}{8}$? Os alunos também responderam com certa tranquilidade que era $\frac{2}{8}$ ou $\frac{1}{4}$, uma vez que a junção das duas barras vermelhas, $\frac{1}{8}$, equivale a uma barra verde, $\frac{1}{4}$.

As dificuldades começaram a surgir a partir da questão 4, na qual se perguntava quanto era $\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$. Os alunos realizaram o mesmo procedimento e juntaram a barra laranja, representante de $\frac{1}{2}$, com a barra vermelha, representante de $\frac{1}{8}$. Porém, não encontraram nenhuma barra equivalente a quantidade representada pelas duas barras juntas. Eles começaram a atribuir respostas erradas, demonstrando que não tinham referencial para concluir a questão. Nesse momento, a pesquisadora aproveitou para escrever no quadro todas as perguntas realizadas até então e perguntou aos alunos o que acorria em todas as questões anteriores e que não ocorria na questão atual. Várias respostas foram surgindo e a pesquisadora mediou as respostas até que os alunos percebessem que nas outras questões os denominadores das respectivas frações eram iguais, o que não ocorria na última pergunta feita. Esse foi o momento oportuno para a pesquisadora concluir, junto aos alunos, que a adição de frações só pode ser realizada quando as frações possuem denominadores iguais e para que tal necessidade fosse atingida, seriam utilizadas frações equivalentes. A pesquisadora perguntou aos alunos se eles poderiam substituir a barra laranja por uma certa quantidade de barras vermelhas e após algumas manipulações eles responderam que uma barra laranja era equivalente a quatro barras vermelhas. Na lousa, a pesquisadora foi registrando cada etapa da resolução dessa questão até que chegou a seguinte situação: $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} + \frac{1}{8}$. Os alunos logo responderam que a solução para essa questão seria $\frac{5}{8}$. Para que os alunos se apropriassem desse conceito e praticassem o procedimento adotado na questão anterior, foi solicitado que os mesmos respondessem a questão 5: Quanto é $\frac{1}{4} + \frac{1}{8}$? A pesquisadora preferiu não intervir e o desempenho variou, algumas duplas responderam corretamente que a solução seria $\frac{3}{8}$, enquanto outras precisaram de algumas mediações para corrigir as respostas atribuídas erroneamente a questão proposta.

Na sequência, as questões abordavam a subtração entre números racionais na representação fracionária. A mediação ocorreu de modo similar às realizadas durante a resolução de adições, com a diferença de que neste momento os alunos não iriam mais juntar as barras convenientes e sim retirar da barra que representasse a primeira fração (o minuendo) a barra que representasse a segunda fração (o subtraendo).

A primeira subtração foi a da questão 6 do guia de perguntas para os alunos: Quanto é $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$? Os alunos já sabiam representar as frações com as barras e perceberam que, quando de uma barra laranja retiravam a quantidade de outra barra laranja não sobrava nada, ou seja, a solução é 0 (zero). Em seguida foi questionado quanto era $\frac{3}{4} - \frac{1}{4}$. Os alunos representaram a fração minuendo por três barras verdes e representaram a fração subtraendo por uma barra verde. Das três barras verdes foi retirada uma barra verde e os alunos observaram que sobraram apenas duas barras verdes, isto é, $\frac{2}{4}$ ou $\frac{1}{2}$ (uma barra laranja).

Procederam da mesma maneira para responderem a questão 8: Quanto é $\frac{5}{8}$ - $\frac{3}{8}$? E não apresentaram dificuldades em responder corretamente $\frac{2}{8}$.

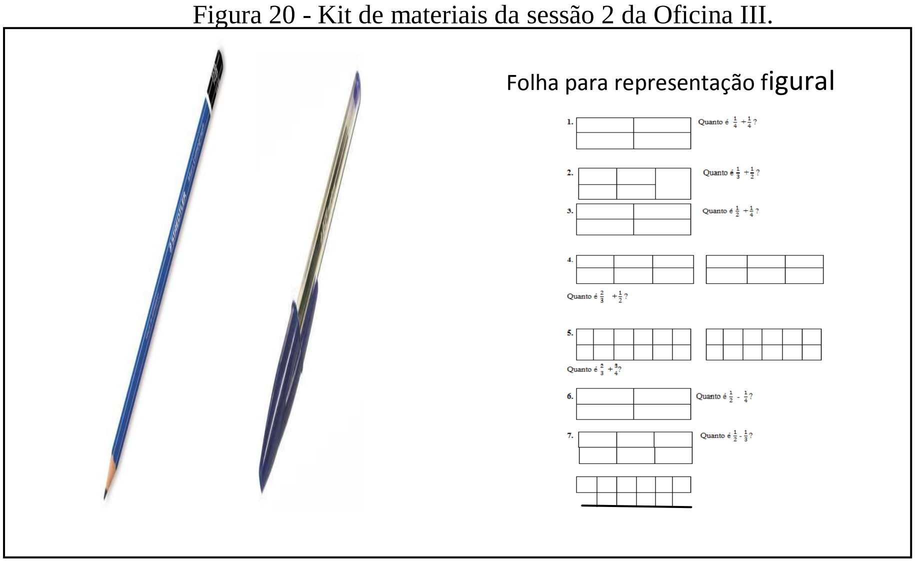
As questões 9 e10 do guia de perguntas para os estudantes envolveram frações com denominadores distintos, o que fez com que alguns alunos apresentassem dificuldades e solicitassem a mediação da pesquisadora em alguns momentos.

Percebe-se que nessa sessão que a pesquisadora conteve-se em realizar as operações de adição e subtração com os números racionais na representação fracionária por meio da manipulação das barras coloridas, nenhum algoritmo matemático foi introduzido.

Sessão 2 – Formalizando o conceito

A sessão 2 foi desenvolvida a partir de um Kit de materiais composto por uma folha para representação figural para adição e subtração, um lápis e uma caneta.

Figura 20 - Kit de materiais da sessão 2 da Oficina III.



Fonte: Autora.

Nesse momento os alunos foram convidados a representarem na forma figural as adições e subtrações e após cada representação foi formalizado o algoritmo para adicionar e subtrair frações. Inicialmente foi entregue aos alunos a Folha de representação figural da Oficina III. Os alunos foram orientados quanto aos procedimentos para a representação figural da seguinte maneira:

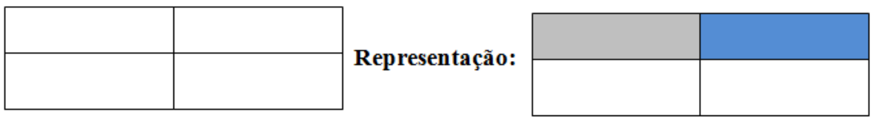
1 – deveriam pintar com o lápis a quantidade que representava a primeira fração e com caneta a quantidade que representava a segunda questão;

2 – se a questão exigisse uma soma, o resultado seria representado pela união das duas quantidades;

3 – se a questão exigisse uma subtração, os alunos deveriam pintar sobre a parte pintada a lápis (representante da primeira fração), a parte que representasse a segunda fração. O resultado seria o que restaria pintado a lápis.

Na questão 1 foi solicitado que se representasse a soma $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ na seguinte figura:

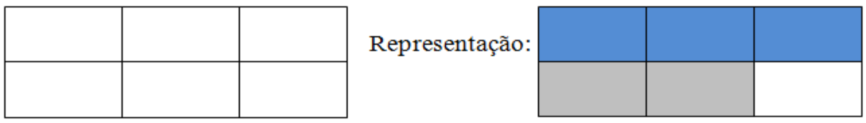
Figura 21 - Representação figural da soma $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$.



Fonte: Autora.

Assim, a soma seria $\frac{2}{4}$, a união da parte pintada a lápis com a parte pintada a caneta. Após observar e ouvir as duplas, a pesquisadora realizou a soma entre as frações para mostrar como deveriam ser realizados os tratamentos e que a solução que eles verificaram com a representação figural de fato ocorria no modo formal. Em seguida, foi solicitado que os alunos tentassem representar na forma figural as seguintes questões: Quanto é $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$? e Quanto é $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$? Em relação à primeira soma, a figura entregue aos alunos foi a seguinte:

Figura 22 - Representação figural da soma $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$.



Fonte: Autora.

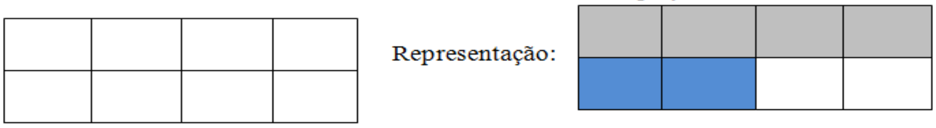
Sendo a soma $\frac{5}{6}$, a união das partes pintadas a lápis com as partes pintadas a caneta.

Após observar as duplas, fazer as mediações necessárias e socializar os resultados, foi mostrado aos alunos como realizar os tratamentos necessários para resolver essa questão. Esse foi o momento propício para enfatizar que a soma ou a subtração entre dois números racionais na representação fracionária só poderia ocorrer quando ambas tivessem o mesmo denominador. Foi apresentado para os alunos a seguinte o cálculo da soma entre dois números na forma fracionária por meio das frações equivalentes. Isto é, como nessa questão os denominadores das respectivas frações não eram iguais, as frações deveriam ser substituídas por frações respectivamente equivalentes e cujos denominadores fossem iguais. Assim, a questão foi apresentada da seguinte maneira: $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\text{ x }\frac{2}{2} \; + \; \frac{1}{2}\text{ x }\frac{3}{3} \; = \frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{5}{6}$.

Como os alunos já tinham visualizado a soma na representação figural, o algoritmo ganhou um significado com mais facilidade.

Em relação à soma $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ a representação figural foi feita na seguinte figura:

Figura 23 - Representação figural da soma $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$.



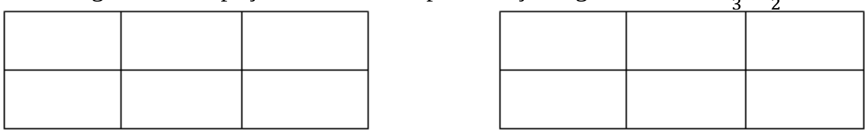
Fonte: Autora.

As duplas foram observadas e após a socialização das respostas a seguinte solução foi apresentada: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4} \; = \; \frac{1}{2}\text{ x }\frac{4}{4} \; + \; \frac{1}{4}\text{ x }\frac{2}{2} \; = \; \frac{4}{8}+\frac{2}{8} \; = \; \frac{6}{8}$

Note que essa questão poderia ter sido resolvida de modo mais completo se a fração $\frac{1}{2}$ tivesse sido substituída pela fração equivalente $\frac{1}{4}$, porém, para que a ênfase na condição dos denominadores serem iguais e os procedimentos realizados serem universais, mantiveram-se os mesmos procedimentos. Desse modo, essa etapa ficou reservada para um momento posterior, quando os alunos já tivessem amadurecido o significado de soma e subtração entre frações.

Na sequência, foi solicitado que os alunos representassem soma $\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$ na seguinte figura:

Figura 24 - Espaço destinado à representação figural da soma $\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$.



Fonte: Autora.

Os alunos sentiram dificuldade ao tentarem resolver essa questão. Foi necessária a mediação da pesquisadora e, para essa questão, os procedimentos formais fora realizados antes da representação figural. Então, foi desenvolvido com o auxilio dos alunos os seguintes tratamentos: $\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}\text{ x }\frac{2}{2} \; + \; \frac{1}{2}\text{ x }\frac{3}{3} \; = \frac{4}{6}+\frac{3}{6}=\frac{7}{6}$.

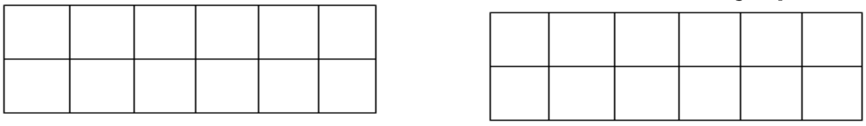
Após os tratamentos acima, os alunos conseguiram representar na forma figural a soma da seguinte maneira:

Figura 25 - Representação figural da soma $\frac{2}{3} + \frac{1}{2}$.

Fonte: Autora.

Na etapa 5 foi solicitado que os alunos tentassem representar na forma figural a soma $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ e a figura disponibilizada foi a seguinte:

Figura 26 - Espaço destinado à representação figural da soma $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$.



Fonte: Autora.

Os alunos tiveram alguns minutos para tentarem resolver a questão, algumas duplas conseguiram realizar os tratamentos da soma e depois representaram a mesma na forma figural, outras duplas não obtiveram êxito ao tentarem resolver a questão. Ao final a questão foi apresentada da seguinte forma: $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \text{ x } \frac{4}{4} + \frac{3}{4} \text{ x } \frac{3}{3} = \frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{17}{12}$.

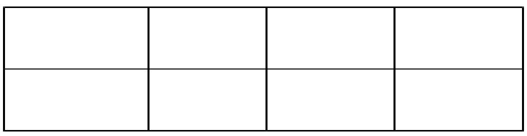
Representação figural:

Figura 27 - Representação figural da soma $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$.

Fonte: Autora.

As etapas seguintes envolviam o cálculo de subtrações. Foi solicitado dos alunos que representassem na forma figural a subtração $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$ na seguinte figura:

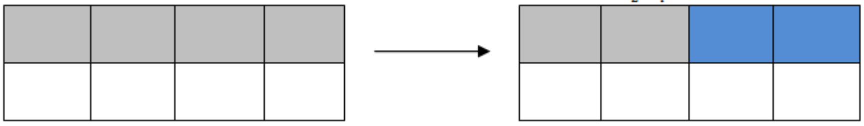
Figura 28 - Espaço destinado à representação figural da diferença $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$.



Fonte: Autora.

Então, os alunos deveriam pintar a lápis a parte que representasse $\frac{1}{2}$ da figura e sobre essa parte, pintar com a caneta a parte que representasse a fração $\frac{1}{4}$. A subtração seria a parte que restasse pintada com lápis. As etapas da representação na forma figural são as seguintes:

Figura 29 - Representação figural da diferença $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{4}$.



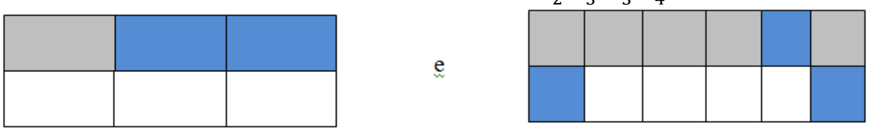
Fonte: Autora.

O resto seria indicado por $\frac{2}{8}$ que foi a parte que sobrou após retirar a parte pintada com caneta. Formalizando o algoritmo, os tratamentos foram apresentados da seguinte maneira:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \text{ x } \frac{4}{4} - \frac{1}{4} \text{ x } \frac{2}{2} = \frac{4}{8} - \frac{2}{8} = \frac{2}{8}$$

Para finalizar essa sessão, foi solicitado que os alunos tentassem representar na forma figural as subtrações $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$ - $\frac{1}{4}$. Que foram representadas, respectivamente, da seguinte maneira:

Figura 30 - Representações figurais das subtrações $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$ - $\frac{1}{4}$, respectivamente.



Fonte: Autora.

E os respectivos tratamentos foram realizados os indicados abaixo:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \text{ x } \frac{3}{3} - \frac{1}{3} \text{ x } \frac{2}{2} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6} \quad \text{e} \quad \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{2}{3} \text{ x } \frac{4}{4} - \frac{1}{4} \text{ x } \frac{3}{3} = \frac{8}{12} - \frac{3}{12} = \frac{5}{12}$$

Os alunos acompanharam todas as etapas fazendo os registros em suas respectivas folhas para representação figural.

Figura 31 - Representação figural das adições e subtrações realizadas pelos alunos.

Fonte: Autora.

Essa sessão contou com a participação efetiva dos alunos e acredita-se que os objetivos foram atingidos. Para que os alunos pudessem se apropriar dos conteúdos abordados na Oficina III, foi realizada a sessão seguinte.

Sessão 3 – Lista de exercícios para a apropriação dos conteúdos da Oficina III

A sessão 3 da Oficina III compreendeu a aplicação da Lista de exercícios para apropriação dos conteúdos da Oficina III, presente no Apêndice G. Essa lista é composta por 6 questões que envolvem a soma e a subtração de frações por meio do uso das frações equivalentes. Das 6 questões, quatro são de situações-problema que abordam a comparação de frações e duas são mais teóricas, nas quais se solicita apenas que resolvam somas e subtrações.

A lista foi proposta as duplas para propiciar a interação e, após alguns minutos de observação, a pesquisadora mediou a socialização das soluções, momento no qual os alunos expuseram suas soluções e os métodos utilizados para se chegar a tais resultados. As duplas que apresentavam respostas divergentes eram convidadas a discutirem os procedimentos e concluírem qual seria o apropriado.

4.2.3.4 - Oficina IV - Representação decimal do número racional

A Oficina IV foi desenvolvida com vistas a introduzir a representação decimal do número racional por meio da utilização de objetos concretos e manipulativos e de propor as conversões entre os sistemas de representação fracionária, decimal, figural e língua natural. Para tanto, foram explorados o sistema monetário brasileiro e o sistema métrico.

A Oficina IV foi dividida em quatro sessões. Na sessão 1, foi explorado o conceito de número racional na representação decimal a partir do estudo do sistema monetário brasileiro. Na sessão 2, foi entregue aos alunos uma lista de exercícios para a apropriação dos conteúdos abordados na sessão anterior. Na sessão 3, a representação decimal do número racional foi explorada a partir de considerações feitas sobre o sistema métrico. A sessão 4 consistiu na entrega de uma lista de exercícios para apropriação dos conteúdos abordados na sessão anterior.

O tempo para o desenvolvimento da Oficina IV foi de 4 aulas de 60 min cada. Para estimular a interação entre os sujeitos, em todas as sessões os alunos foram distribuídos em duplas.

Sessão 1 - O Sistema Monetário Brasileiro e número racional

Para a Sessão 1, Sistema monetário brasileiro e número racional, o Kit de materiais utilizado foi o seguinte:

Figura 32 - Kit de materiais da sessão 1 da Oficina IV.

Fonte: Autora.

Esse Kit é composto por 100 moedas de 1 centavo de real, 10 moedas de 10 centavos de real, 4 moedas de 25 centavos de real, 2 moedas de 50 centavos de real e 1 moeda de 1 real. A autora fez o desenho de cada moeda no computador, imprimiu e colou em cartolina guache. Além desses materiais foram utilizados também um guia de perguntas para os estudantes, um guia para o professor, e um pacote contendo as fotos de um fogão, uma geladeira, um sofá, uma cama e um aparelho de televisão e seus respectivos valores.

Nessa sessão foi realizado o estudo da representação decimal do número racional por meio da exploração do sistema monetário brasileiro, o Real. A sessão 1 foi dividida em 5 etapas.

A pesquisadora norteou o trabalho pelas orientações contidas no guia para o professor. Assim, iniciou a sessão entregando a cada dupla de alunos o Kit de materiais contendo as 100 moedas de 1 centavo, 10 moedas de 10 centavos, 4 moedas de 25 centavos, 2 moedas de 50 centavos, 1 moeda de 1 real e o guia de perguntas para os estudantes. Como as moedas estavam todas juntas em um mesmo pacote, foi solicitado aos alunos que separassem as moedas de acordo com o valor de cada uma. Em seguida, questionou-se o conhecimento dos alunos quanto ao sistema monetário brasileiro. Primeiramente, quis-se averiguar se os alunos sabiam compor os valores de 10 centavos, 25 centavos, 50 centavos e de 1 real, utilizando apenas moedas de 1 centavo. Essa etapa foi importante para que os alunos compreendessem a composição de cada moeda, isto é, para que eles compreendessem que uma moeda de 10 centavos é equivalente a 10 moedas de 1 centavo, que uma moeda de 25 centavos é equivalente a 25 moedas de 1 centavo, que uma moeda de 50 centavos é equivalente a 50 moedas de 1 centavo e que 1 moeda de 1 real é equivalente a 100 moedas de 1 centavo. Apesar de parecer algo trivial, alguns alunos apresentaram um pouco de dificuldade em responder as questões propostas, o que comprova que esta etapa não deve ser omitida. Na etapa 2, pediu-se que os alunos considerassem o valor de 1 Real como sendo o intero, a unidade, e solicitou-se que os mesmos tentassem completar o quadro abaixo:

Quadro 5 - Quadro da Questão 2 do guia de perguntas para os estudantes da sessão 1 da Oficina IV.

	Equivalente em real	
	Fração decimal	Decimal
1 moeda de 1 real		
1 moeda de 10 centavos		
1 moeda de 25 centavos		
1 moeda de 50 centavos		

Fonte: Autora.

Nesse momento já era esperado que os alunos não soubessem preencher a última coluna do quadro, pois nada tinha sido comentado a respeito da representação decimal. Mesmo assim, a pesquisadora deixou os alunos discutirem a tarefa proposta e só depois fez as mediações necessárias para que os alunos conseguissem completar o quadro e responder os seguintes questionamentos: a) um centésimo de real equivale a uma moeda de ____; b) um décimo de real equivale a uma moeda de ____; c) um meio de real equivale a uma moeda de ___; d) um quarto de real equivale a uma moeda de ____. Para que os alunos compreendessem o que estava sendo proposto, eles foram convidados a manipular as moedas e acompanhar de modo prático cada solução apresentada, observando a representação fracionária por meio dos objetos concretos e manipulativo

Figura 33 - Participação dos alunos: Sessão 1, Oficina IV.

Fonte: Autora.

Antes de dar prosseguimento a sessão e iniciar a etapa 3, a pesquisadora perguntou se os alunos ainda tinham alguma dúvida quanto à formação do sistema monetário trabalhado e das relações existentes entres os valores das moedas.

A etapa 3 teve por objetivo realizar a soma entre dois números racionais na representação decimal de modo espontâneo, por meio da simulação da compra de dois dos cinco objetos contidos no Kit de materiais e também de, mais uma vez, realizar o estudo da composição do sistema monetário brasileiro. Então, a pesquisadora realizou o sorteio de dois objetos e pediu que os alunos tentassem somar os valores dos objetos sorteados e que representasse cada valor com o mínimo de moedas possíveis, utilizando apenas moedas de 1 centavo, de 10 centavos, de 25 centavos, de 50 centavos e de 1 real. Os alunos tentaram realizar a atividade proposta, mas não foram atentos à informação de que o número de moedas deveria ser o mínimo possível e apresentaram diversas soluções, algumas que utilizavam até as cédulas do Real. Além disso, alguns alunos não souberam somar os valores dos objetos sorteados, enquanto que outros utilizaram os conhecimentos cotidianos para fazê-lo. As duplas foram observadas e as mediações que se fizeram necessárias foram feitas. Esse momento foi importante para que os alunos percebessem e respeitassem a classe e a ordem de cada algarismo que compunha o número e também para enfatizar que o conhecimento adquirido pelo aluno em sua vida cotidiana deve ser explorado por cada professor, em especial, pelo professor de Matemática que deverá mediar a ação do aluno para que o mesmo compreenda os conceitos científicos ensinados na escola como um conhecimento que tem aplicabilidade em seu cotidiano e não como algo que só servirá para compor as aulas de Matemática. Ainda na etapa 3, os alunos foram convidados a fazerem a leitura dos valores apresentados na questão de modo que eles realizaram a leitura do número enquanto valor do objeto, considerando o sistema monetário e também a leitura do valor enquanto número racional, considerando a estrutura do sistema decimal de numeração. Esse último momento da sessão 3 foi o mais delicado, pois trouxe para os alunos um conhecimento novo e o fato do respeito pela formação do sistema decimal.

A sessão 4 foi uma réplica da sessão anterior. Assim, a pesquisadora realizou o sorteio de mais dois objetos e pediu aos alunos que realizassem a soma dos valores dos objetos sorteados, que representassem esses valores com o mínimo possível de moedas de 1 Real, 50 centavos, 25 centavos, 10 centavos e 1 centavo e que realizassem a leitura e escrita de cada valor. O diferencial da sessão 3 para a sessão 4 foi que na sessão 4 a pesquisadora observou as duplas, porém, fez o mínimo de mediações possíveis para verificar o que os alunos haviam compreendido do que tinha sido abordado anteriormente. Ao final, a maioria dos alunos tinha conseguido realizar a atividade proposta de modo correto, o que representou um avanço na aprendizagem dos números racionais.

Para finalizar a sessão, foi proposto que os alunos completassem o quadro 3 com as representações decimal, fracionária e língua natural de cada número.

Como os alunos não sabiam como realizar as conversões da representação fracionária para a decimal e da decimal para a fracionária, a pesquisadora resolveu na lousa algumas questões similares e aguardou que os alunos tentassem responder a questão proposta

Quadro 6 - Questão 5 do guia de perguntas para os estudantes da sessão 1 da Oficina IV.

Fração decimal	Leitura	Decimal	Leitura
		0,2	
$\frac{354}{10}$			
		4,12	
$\frac{607}{100}$			
		0, 083	
$\frac{5632}{1000}$			

Fonte: Autora.

Os resultados não foram bons, muitos alunos não souberam realizar as conversões, o que levou a pesquisadora a resolver com eles cada uma dos itens, completando o quadro. Uma dificuldade apresentada pela maioria dos alunos estava em não saber resolver a multiplicação entre dois números naturais.

Sessão 2 – Lista de exercícios para a apropriação dos conteúdos da sessão 1

A sessão 2 compreende a aplicação da Lista de exercícios para a apropriação dos conteúdos abordados na sessão 1, presente no Apêndice H.

Norteado pela teoria de Vygotsky, com o intuito de motivar a interação entre os sujeitos para a apropriação do conhecimento, foi proposto aos alunos que formassem duplas para resolver as atividades propostas. As questões que compõem essa lista de exercícios são, na maioria, as que envolvem conversões ou que são situações-problema relacionadas à vida cotidiana dos alunos envolvidos na pesquisa.

A pesquisadora observou as duplas e fez algumas mediações. Após a indicação de conclusão das atividades por parte dos alunos, as soluções obtidas foram socializadas e por meio de reflexões, buscou-se uma solução de consenso.

Sessão 3 - Estudando o sistema métrico

A sessão 3 tem por objetivo o estudo dos números racionais na representação decimal a partir do sistema métrico. Nesse momento da experimentação foram explorados o metro e seus submúltiplos, o decímetro, o centímetro e o milímetro e também a relação da estrutura do sistema métrico com a estrutura do sistema monetário.

Pensou-se nessa abordagem para o estudo da representação decimal do número racional pelo fato de se compreender que a Matemática que é estudada na escola não deve ser apresentada para os alunos como um conjunto de regras e conceitos que só servem para resolver problemas essencialmente matemáticos, mas, sempre que possível, deve-se relacionar os conceitos matemáticos com a vida cotidiana dos alunos para que eles percebam a aplicabilidade e a importância de estudar Matemática.

O Kit de materiais utilizado nessa sessão é composto por uma fita métrica com marcações coloridas a cada 10 cm, uma caneta, uma folha de papel para anotações, um guia de perguntas para os estudantes e um guia para o professor.

Figura 34 - Kit de materiais da sessão 3 da Oficina IV.

Fonte: Autora.

Todas as etapas foram conduzidas a partir das sugestões do guia para o professor e com os alunos distribuídos em duplas para motivar a interação entre os mesmos.

Ao dar início à sessão, a pesquisadora entregou a cada dupla uma fita métrica, uma folha para anotações, uma caneta e o guia de perguntas para os estudantes e pediu que os mesmos observassem a fita métrica e tentassem resolver a seguinte questão: Observe que esta fita tem marcações numéricas que vão de 0 a 100. Você sabe qual é o nome de cada comprimento desses?

Nesse momento, a maioria dos alunos demonstrou pouco entendimento sobre a pergunta, o que foi algo inesperado, uma vez que os mesmos já trabalhavam com a régua. A pesquisadora precisou mediar a solução da atividade proposta para que a maioria dos alunos percebesse que, assim como na régua, cada medida citada recebe a denominação de centímetro. Nesse momento a nomenclatura centímetro passou ter sentido para os alunos, pois eles puderam observar que centímetro é uma parte de cem, isto é, um centésimo de um metro. Vários alunos afirmaram que nunca tinham visto uma fita métrica antes e o uso de um instrumento novo fez com que eles não percebessem a relação entre as medidas que ali estavam, pois não tinham um conhecimento prévio sobre tal instrumento.

Na segunda etapa os alunos foram instigados a observar as divisões coloridas, isto é, as divisões de que eram apresentadas na fita métrica a cada 10 centímetros. Na sequência solicitou-se que tentassem resolver as seguintes questões: a) Quantos centímetros tem cada parte dessas? b) Você sabe que nome recebe essa medida? Os alunos conseguiram resolver corretamente o item a sem apresentar dificuldades, porém, não souberam informar que a medida observada recebe o nome de decímetro, isto é, um décimo de um metro.

Na etapa 3 os alunos foram convidados a observar uma medida mais cautelosa, o milímetro, a partir dos seguintes questionamentos: Observe que entre um centímetro e outro existem 10 divisões bem pequenas. a) Quantas divisões dessas existem na fita inteira? b) Que nome recebe cada parte dessas? Se os alunos que participaram da pesquisa tivessem apresentado domínio significativo da operação de multiplicação, seria esperado que eles conseguissem resolver sem muita dificuldade essas questões, porém, os alunos que fizeram parte da pesquisa, como mostrado a princípio, não tinham o domínio de tal operação e agiram segundo a hipótese para esse quesito: Apresentaram dificuldade em resolver o item a, isto é, não souberam identificar que em 1 metro havia 1000 milímetros e também não sabiam a nomenclatura dessa subunidade do metro, o milímetro. Várias mediações se fizeram necessárias para que os alunos conseguissem atingir o conhecimento esperado.

Após a apresentação de cada subunidade do metro, chegou o momento de estabelecer as relações existentes entre o sistema métrico e os números racionais. Assim, na sessão 4, os alunos precisavam resolver as seguintes questões: Que fração da fita métrica representa um milímetro? Que fração da fita métrica representa um decímetro? Que fração da fita métrica representa um centímetro? A pesquisadora notou que, apesar de alguns alunos terem conseguido resolver as questões, a maioria apresentou dificuldades, mas a solução não foi indicada e sim a etapa conduzida de modo que os próprios alunos conseguiram indicar que um milímetro representa $\frac{1}{1000}$ de toda a medida da fita métrica; um decímetro representa $\frac{1}{10}$ de toda a fita métrica e um centímetro representa $\frac{1}{100}$ de toda a fita métrica**.** Esse foi um dos passos largos dados pelos alunos, pois ao estabelecer essa relação entre os números racionais e o sistema métrico, os alunos estão demonstrando um entendimento acerca da estrutura de cada um desses sistemas.

Na etapa 5 os alunos tiveram como desafio completar o quadro apresentado abaixo, indicando com as representações fracionária e decimal cada submúltiplos do metro:

Quadro 7 - Questão 07 do guia de perguntas para os estudantes da sessão 3 da Oficina IV.

	Equivalente em metro	
Unidade	Fração decimal	Decimal
1 metro		
1 decímetro (dm)		
1 centímetro (cm)		
1 milímetro (mm)		

Fonte: Autora.

As duplas foram observadas, questionadas quando às possíveis dificuldades e a atividade mediada para que cada dupla conseguisse compreender o que foi solicitado e apresentasse os seguintes resultados:

Quadro 8 - Solução da questão 7 do guia de perguntas para os estudantes da sessão 3 da Oficina IV.

	Equivalente em metro	
Unidade	Fração decimal	Decimal
1 metro	$\frac{10}{10}$ ou $\frac{100}{100}$ ou $\frac{1000}{1000}$	1,0 ou 1,00 ou 1,000
1 decímetro (dm)	$\frac{1}{10}$	0,1
1 centímetro (cm)	$\frac{1}{100}$	0,01
1 milímetro (mm)	$\frac{1}{1000}$	0, 001

Fonte: Autora.

A etapa 6 foi a mais disputada pelos alunos. Isso porque nessa etapa quatro alunos da turma foram escolhidos e solicitou-se que um medisse a altura do outro e as alturas foram registradas por todos num quadro similar ao quadro 06. Os alunos concluíram a questão convertendo os valores para as representações fracionária e língua natural e, posteriormente, somaram todas as alturas indicadas pelos colegas.

Quadro 9 - Questão 8 do guia de perguntas para os estudantes da sessão 3 da Oficina IV.

	Altura nas representações		
Aluno	Decimal	Fracionária	Língua natural
Aluno 1			
Aluno 2			
Aluno 3			
Aluno 4			
Vamos somar as quatro alturas:			

Fonte: Autora.

Alguns alunos sentiram um pouco de dificuldade em medir a altura do colega pelo fato de a fita métrica ter apenas 1m e eles necessitaram de mais de uma fita para realizar esta tarefa. Nesse momento, alguns alunos pediram mais uma fita métrica, outros marcaram o local de limite da fita e, com a mesma fita seguiu medindo a altura do colega, um ficou bastante tempo sem saber o que fazer, até que o momento em que viu um colega utilizando uma das alternativas citadas e copiou a ideia. As conversões foram resolvidas significativamente bem pelos alunos, a pesar de alguns terem solicitado a mediação da pesquisadora em alguns momentos.

Para finalizar essa sessão, foi pedido na etapa 7 que os alunos tentassem indicar algumas as relações existentes entre os sistemas métrico e monetário no quadro abaixo:

Quadro 10: Questão 9 do guia de perguntas para os estudantes da sessão 3 da Oficina IV.

Sistema métrico	Sistema monetário
Um metro	
	Dez centavos
Um centímetro	

Fonte: Autora.

Inicialmente os alunos demonstraram que sequer tinham entendido o que foi solicitado e, mesmo após algumas mediações eles ainda apresentaram dificuldades, então a pesquisadora utilizou perguntas-guias para conduzir os alunos ao seguinte resultado:

Quadro 11 - Solução da questão 8 do guia de perguntas para os estudantes da sessão 3 da Oficina IV.

Sistema métrico	Sistema monetário
Um metro	UM REAL
UM DECÍMETRO	Dez centavos
Um centímetro	UM CENTAVO

Fonte: Autora.

Sessão 4 – Lista de exercícios para a apropriação dos conteúdos da sessão 3

A sessão 4 compreende a aplicação da Lista de exercícios para a apropriação dos conteúdos abordados na sessão 2, presente no Apêndice I.

Norteado pela teoria de Vygotsky, com o intuito de motivar a interação entre os sujeitos para a apropriação do conhecimento, foi proposto aos alunos que formassem duplas para resolver as atividades propostas. Sempre que possível, as atividades envolveram situações do cotidiano dos sujeitos.

A pesquisadora observou as duplas e fez algumas mediações. Após a indicação de conclusão das atividades por parte dos alunos, as soluções obtidas foram socializadas e por meio de reflexões, buscou-se uma solução de consenso.

4.2.3.5 - Oficina V: Porcentagens

A Oficina V tem por objetivo o estudo das porcentagens e seu kit de materiais é composto por um guia de perguntas para os estudantes e um guia para o professor. Pôde-se contemplar nessa oficina:

- situações de compra e venda de produtos no qual são dados descontos ou feitos acréscimos de 10%, 20%, 30%, 40% e 50%, por exemplo;
- estender o cálculo dessas porcentagens para outros contextos.

A Oficina V foi dividida em duas sessões. Na sessão 1, foram exploradas as questões do guia dos alunos, de modo que os alunos tiveram contato com o conceito de porcentagem a partir da exploração de situações-problema cotidianas e que envolvem o conceito de porcentagem, de modo que os mesmos puderam compreender o que é porcentagem e como realizar os cálculos de uma porcentagem dada em uma situação de compra e também em outros contextos. Na sessão 2, foi entregue aos alunos uma lista para apropriação dos conteúdos abordados na sessão anterior.

A Oficina V foi desenvolvida em 2 aulas de 60 min cada e para promover maior interação e mediação nas atividades, propôs-se que os alunos formassem duplas.

Sessão 1: entendendo porcentagem

Nessa sessão foi introduzido o conceito de porcentagem por meio da resolução de situações-problema compreendidas no guia para os estudantes. Dessa forma o Kit de materiais dessa oficina é composto por:

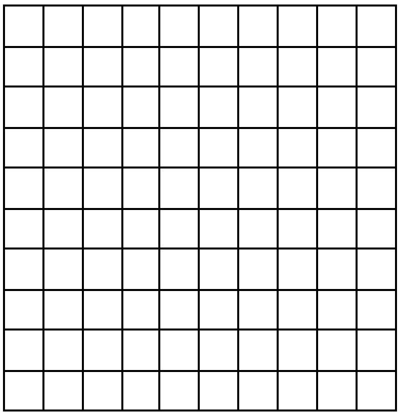
- um lápis de cor;
- um guia de perguntas para os alunos;
- um guia para o professor.

Inicialmente, a pesquisadora sugeriu aos alunos que formassem duplas para estimular a interação e entregou a cada dupla um lápis de cor e um guia de perguntas para os estudantes. Então, a pesquisadora deu início à sessão seguindo as informações contidas no guia para o professor. São 6 as etapas que compõem a sessão 1.

Na etapa 1, os alunos precisaram pensar a respeito da solução para o seguinte problema: Ana foi a uma loja comprar um tênis que custava R$ 100. Quando chegou à loja, o vendedor disse que o tênis estava com um desconto de 10%. a) Para você, o que significa um desconto de 10%? b) Você sabe calcular o novo preço do tênis após o desconto de 10%? Nesse momento houve muita interação entre os alunos e enquanto alguns indicavam que não sabiam resolver o problema, outros diziam com convicção que o desconto seria de 10 reais. Então, a princípio pode parecer que uma parte dos alunos já sabia calcular porcentagem, porém, isso não foi o comprovado com a experiência em sala de aula. Antes de dizer se estavam certos ou errados, a pesquisadora fez uma nova pergunta para os alunos: Se o valor do tênis fosse de R$ 50, e a vendedora continuasse dando um desconto de 10%, de quanto seria o desconto do tênis para esse novo valor? Ao ouvir dos alunos que o desconto ainda seria de 10 reais, pode-se notar que os alunos não sabiam porcentagem, eles apenas associavam diretamente o valor em reais ao número indicado no desconto, ou seja, como o desconto era de 10% eles associaram a 10 reais, assim como se o desconto fosse de 20% eles associariam a 20 reais, sem se preocuparem com o valor sobre o qual o desconto estava sendo oferecido. A pesquisadora resolveu não esclarecer essa questão e disse aos alunos que voltaria a falar nesse desconto mais tarde, quando esclareceria a solução da questão.

Na etapa 2 recorreu-se a representação figural para a formação do conceito de porcentagem e solicitou-se aos alunos que indicassem na figura abaixo o número $\frac{10}{100}$.

Figura 35 - Questão 2 do guia para os estudantes da sessão 1 da Oficina V.



Fonte: Autora.

Em seguida perguntou-se: a) Quantos quadradinhos você pintou? b) Podemos dizer que $\frac{10}{100}$ de 100 é igual a quanto? c) A fração $\frac{10}{100}$ pode ser representada na forma de porcentagem como sendo_____. As duplas foram observadas e, devido aos conhecimentos adquiridos em oficinas anteriores, eles conseguiram responder corretamente aos dois primeiros questionamentos sem que se fizessem necessárias muitas mediações, porém, o terceiro questionamento não foi respondido pelo fato dos alunos não terem estudado porcentagem anteriormente. Nesse momento, a pesquisadora explicou que a fração $\frac{10}{100}$ também pode ser representada na forma de porcentagem como sendo 10% - lê-se dez por cento - e esclareceu para os alunos que % é o símbolo que indica porcentagem, isto é, alguma parte de cem e como foi pedido o valor de 10% do total de quadradinhos da figura, significa dizer que a figura deveria ser dividida em 100 partes iguais e serem consideradas 10 dessas partes. Se fosse pedido para calcular 20% da figura, a figura seria dividida em 100 partes iguais e seriam consideradas 20 dessas partes e assim sucessivamente.

Após os esclarecimentos feitos na etapa 2, chegou o momento de voltar ao problema inicial, o problema da compra de Ana, e verificar se os alunos já conseguiam resolver sozinhos aquela situação. Perguntou-se novamente: O tênis que Ana foi comprar custava R$ 100, mas estava com 10% de desconto. a) Se o tênis estava com desconto, você acha que o valor dele vai aumentar ou vai diminuir? b) Você acha que 10% de R$ 100 é igual a quantos reais? c) Qual será o novo valor do tênis de Ana após o desconto?

Alguns alunos sentiram um pouco de dificuldade para formalizar as respostas, mas a maioria já conseguia responder corretamente e justificar a sua solução. Então, nessa etapa a pesquisadora formalizou o conceito de porcentagem e realizou os seguintes cálculos:

$$10\% \text{ de } 100 = \frac{10}{100} \text{ de } 100 = 0{,}10 \text{ de } 100 = 0{,}10.\ 100 = 10$$

$$20\% \text{ de } 100 = \frac{20}{100} \text{ de } 100 = 0{,}20 \text{ de } 100 = 0{,}20.\ 100 = 20$$

Sabe-se que a maioria dos livros didáticos apresenta o cálculo da porcentagem por meio do algoritmo da divisão, isto é, multiplica 10 (numerador da fração que indica porcentagem) por 100 (valor da compra) e depois dividi por 100 (denominador da fração que indica porcentagem). Esse tipo de cálculo foi evitado porque, provavelmente, seria mais um empecilho para a apropriação do conceito de porcentagem pelos alunos, posto que os mesmos já demonstraram não ter o domínio da operação de divisão. Por esse motivo, optou-se pelo método apresentado acima, que envolve apenas a conversão entre sistemas de representação e a multiplicação. Vale ressaltar que o fato de explorar vários sistemas de representação auxilia na formação do conceito.

Na etapa 4, os alunos tinham que tentar resolver a seguinte situação-problema: Júlio quer comprar uma camisa que custa R$ 40. Ele vai aproveitar que a loja está dando um desconto de 35% para comprar a camisa que tanto quer. a) De quanto vai ser o desconto que Júlio vai ter na compra da camisa. b) Qual será o novo valor da camisa após esse desconto?

As duplas foram observadas durante toda a atividade e alguns alunos ainda apresentaram dificuldades em realizar o cálculo das porcentagens, porém, um número considerável conseguiu apresentar corretamente os cálculos da seguinte maneira:

$$35\% \text{ de } 40 = \frac{35}{100} \text{ de } 40 = 0{,}35 \text{ de } 40 = 14 \text{ reais}$$

novo valor da camisa será de 40 – 14 = 26 reais

O desempenho dos alunos só não foi melhor porque alguns não souberam multiplicar, errando os cálculos.

A etapa 5 foi uma novidade para eles, pois estavam acostumados a resolverem problemas fazendo conta e agora tinham que responder os questionamentos utilizando apenas a parte conceitual. Perguntou-se: O que podemos entender com as seguintes afirmações: a) Em uma escola, 75% dos alunos foram aprovados sem precisar fazer prova de reposição. b) Em uma loja, todos os produtos estão com 50% de desconto. c) Em certo país, 45% da população recebe menos que um salário mínimo por mês.

Os alunos tiveram muita dificuldade em expressar corretamente que a) se 75% dos alunos foram aprovados sem precisar de reposição, isso significa dizer que a cada 100 alunos, 75 foram aprovados sem precisar fazer reposição; b) em uma loja, a cada 100 reais em compra, o cliente terá 50 de desconto, ou seja, está pela metade do preço; c) a cada 100 pessoas, 45 recebem menos de um salário mínimo por mês. Diante das observações feitas durante o desenvolvimento dessa etapa, a pesquisadora resolveu trabalhar outras questões conceituais com os alunos, antes de seguir com a sessão, para que eles pudessem consolidar o conceito de porcentagem.

A última etapa da sessão 1 foi de exploração das formas de representação do número racional na qual os alunos tiveram que completar o quadro abaixo:

Quadro 12 - Questão 6 do guia de perguntas para os estudantes da sessão 1 da Oficina V.

Representação Decimal	Representação Fracionária	Representação Percentual
0,20		
	$\frac{12}{100}$	
		30%
0,50		

Fonte: Autora.

A maioria dos alunos conseguiu responder corretamente a questão e apresentaram os seguintes resultados:

Quadro 13 - Solução da questão 6 do guia de perguntas para os estudantes da sessão 1 da Oficina V.

Representação Decimal	Representação Fracionária	Representação Percentual
0,20	$\frac{20}{100}$	20%
0,12	$\frac{12}{100}$	12%
0,30	$\frac{30}{100}$	30%
0,50	$\frac{50}{100}$	50%

Fonte: Autora.

O estudo de porcentagens foi complementado com na Sessão 2, na qual os alunos tiveram a oportunidade de resolver questões que abordaram esse conceito.

Sessão 2: Lista de exercícios para apropriação dos conteúdos da sessão 1

Nessa sessão foi entregue aos alunos uma lista de exercícios, presente no Apêndice J, cujo objetivo é explorar os conceitos abordados na sessão anterior. Vale ressaltar que existiu uma preocupação em trabalhar com questões que proporcionem a conversão entre as representações fracionária e decimal. Preocupou-se também em abordar situações-problema que fazem parte do cotidiano dos sujeitos envolvidos na pesquisa, por acreditar que, desta forma, fica mais acessível à conceituação do número racional por meio dos significados que o mesmo poderá assumir para esses sujeitos. Esta atividade foi desenvolvida por duplas de alunos e após a resolução da lista de exercícios para a apropriação de conteúdos por parte dos alunos, a pesquisadora se dirigiu as duplas e perguntou a quais respostas eles chegaram, verificando, então, que houve algumas divergências de respostas entre as duplas. Solicitou-se que os alunos explicassem como obtiveram os resultados para que se chegasse a uma solução de consenso.

4.2.4 – Análise *a posteriori* e validação

Nessa fase do trabalho são analisados os resultados apresentados pelos alunos nos três Instrumentos de Verificação de Aprendizagem e, em seguida, confrontados com os dados apresentados na análise *a priori*.

Pretende-se verificar se os alunos conseguiram se apropriar do conceito de número racional no que diz respeito aos conteúdos abordados nas cinco oficinas, em outras palavras, pretende-se estudar se os alunos conseguiram atingir os objetivos apresentados nas análises *a priori*, a saber:

- realizar as conversões entre as várias representações dos números racionais: da língua natural para a fracionária (numérica) e vice-versa, da língua natural para a representação decimal e vice-versa, da representação decimal para a fracionária e vice-versa, da representação figural para a representação fracionária e vice-versa;
- realizar os tratamentos, adição e subtração, com os números racionais na representação decimal para resolver situações cotidianas ou problemas essencialmente matemáticos;
- realizar os tratamentos, adição e subtração, com os números racionais na representação fracionária para resolver situações cotidianas ou problemas essencialmente matemáticos;

- resolver situações-problema que envolva o cálculo das porcentagens;
- apropriação do conceito de número racional.

Os instrumentos são analisados separadamente de acordo com os objetivos específicos de cada um.

4.2.4.1 - Instrumento de Verificação de Aprendizagem 2 (IVA - 2)

A primeira avaliação, após o início das oficinas, foi realizada por meio do Instrumento de Verificação de Aprendizagem 2, IVA – 2, presente no Apêndice K, aplicado após a experimentação das Oficinas I e II e cujas questões que o compõem foram desenvolvidas pela pesquisadora. O IVA – 2 tem por objetivo verificar se os alunos conseguiram compreender os seguintes conteúdos abordados nas Oficinas I e II:

- conversão da representação figural para a representação fracionária;
- conversão da representação fracionária para a representação figural;
- conversão da representação fracionária para a língua natural;
- conversão da representação da língua natural para a fracionária;
- comparação entre duas frações, sabendo identificar se uma representa uma quantidade maior, menor ou igual a outra;
- identificação de uma quantidade representada por uma fração;
- resolução de situações-problema que envolva o cálculo de frações equivalentes.

Foram analisados os resultados apresentados por 12 alunos e o critério para a escolha dos mesmos foi a assiduidade em todas as etapas anteriores a aplicação do IVA - 2. Para verificar se os alunos conseguiram realizar as conversões e os tratamentos acima descritos, o que segundo Duval será o indício de que eles estão caminhando para a apropriação do conceito de número racional, as questões do IVA – 2 foram analisadas conforme as seguintes categorias:

Categoria 1 – Conversões entre as representações fracionária, figural e língua natural nos sentidos elencados acima: questões 1, 2, 3, 6, 9 e 10.

Categoria 2 – Comparação entre frações e resolução de situações-problema envolvendo frações equivalentes: questões 4, 5, 7 e 11.

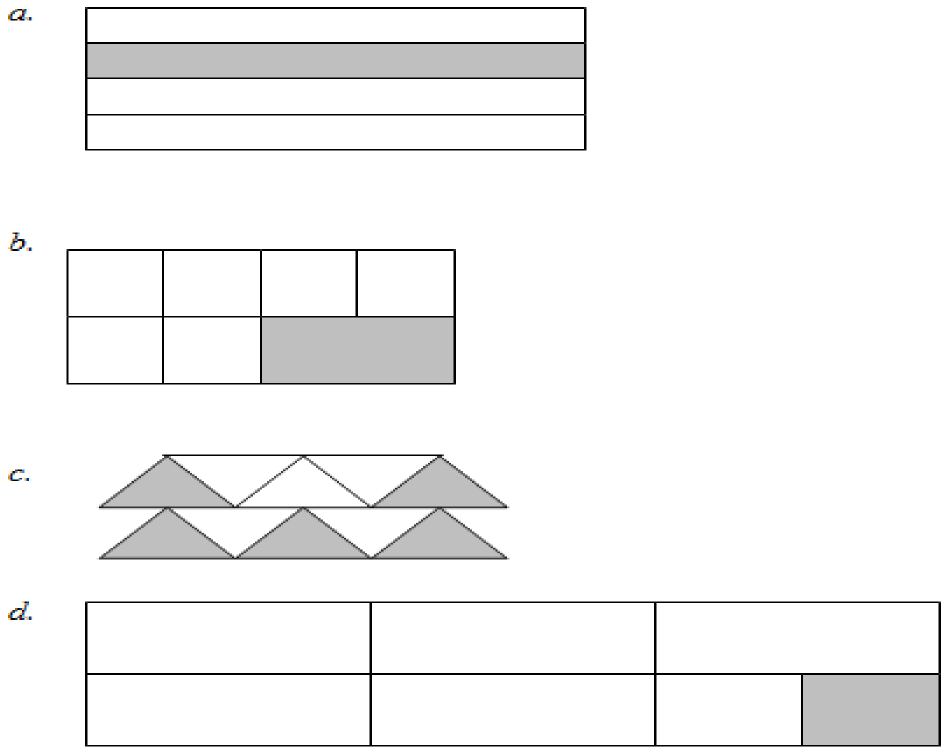
Categoria 3 – Identificação de uma quantidade representada por uma fração: questões 8 e 12.

Em relação à Categoria 1, são apresentados e analisados os resultados dos alunos quanto às questões 1, 2, 3, 6, 9 e 10.

Questão 1

Cada figura abaixo tem uma parte que foi pintada. Escreva o número que representa a parte pintada de cada figura.

Figura 36: Figuras da questão 1 do IVA 2.



Fonte: Autora.

Essa questão tem por objetivo verificar se os alunos compreendem que um número racional pode ser representado na forma figural, desde que seja respeitada a conservação de áreas, isto é, a figura deve ser dividida em parte com mesma área para depois ser representada a parte que está pintada. Essa é uma questão que trabalha a conversão da representação figural para a fracionária (numérica).

Os resultados foram os seguintes:

- item a: 100% dos alunos acertaram e 0% dos alunos errou esse item;
- item b: 83% dos alunos acertaram e 17% dos alunos erraram esse item;
- item c: 58% dos alunos acertaram e 42% dos alunos erraram esse item;
- item d: 33% dos alunos acertaram e 50% dos alunos erraram e 17% dos alunos deixaram em branco esse item.

Ao analisar o número de acertos dos itens a e c, poder-se-ia pensar que cerca de 79% (média de acertos dos dois itens) dos alunos apenas realizaram o procedimento de dupla contagem no qual o aluno simplesmente escreve no numerador da fração o número referente à quantidade de partes da figura que foram pintadas e, no denominador, escreve a quantidade total de partes da figura, mas, os resultados apresentados nos itens b e d demonstram que cerca de 58% (média de acertos dos itens c e d) dos alunos conseguiram realizar a conversão da representação figural para a representação fracionária, mesmo quando tal conversão não ocorria de modo direto, exigindo do aluno a análise da figura, a observação de áreas distintas e um novo delineamento desta figura para então ser realizada a conversão. Isso tudo demonstra que a maioria dos alunos conseguiu compreender que o número racional que é representado na forma fracionária é o mesmo número racional que estava representado na forma figural, isto é, houve a identificação do objeto matemático. Vale ressaltar que estes resultados foram obtidos de um momento inicial da pesquisa e que os conceitos podem ser consolidados no decorrer do trabalho.

Se os resultados forem comparados aos apresentados pelos alunos no início do trabalho, no qual, na questão 1 do Teste 1 - verificação dos conhecimentos prévios, os alunos foram analisados quanto ao entendimento do conceito mais elementar de número racional na representação fracionária, que é o conceito de metade, e nos itens b e d apenas 23% dos alunos acertaram a resposta, comprova-se mais uma vez que o nível de desempenho dos alunos melhorou consideravelmente.

Questão 2

Escreva como se lê cada número abaixo:

a. $\frac{2}{7}$

b. $\frac{3}{11}$

c. $\frac{4}{9}$

d. $\frac{15}{32}$

e. $\frac{3}{10}$

f. $\frac{8}{100}$

Os resultados para cada item dessa questão foram os seguintes:

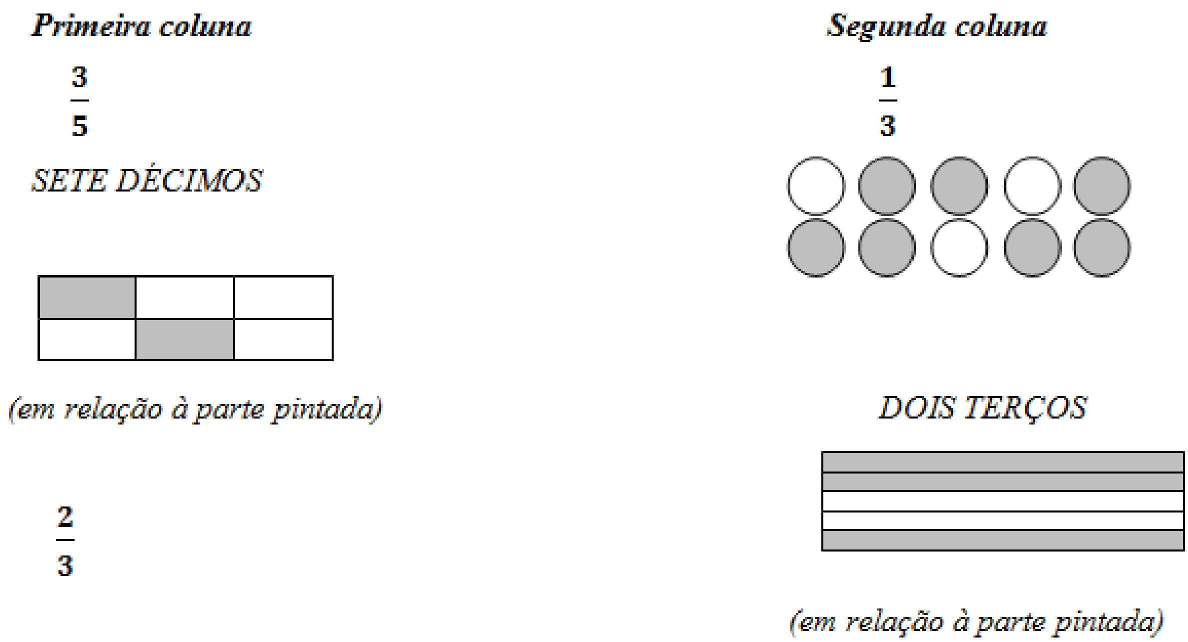
- item a: 92% dos alunos acertaram e 8% dos alunos erraram esse item;
- item b: 83% dos alunos acertaram e 17% dos alunos erraram esse item;
- item c: 100% dos alunos acertaram e 0% dos alunos errou esse item;
- item d: 92% dos alunos acertaram e 8% dos alunos erraram esse item;
- item e: 92% dos alunos acertaram e 8% dos alunos erraram esse item;
- item f: 83% dos alunos acertaram e 17% dos alunos erraram esse item.

Os resultados apresentados acima demonstram que cerca de 90% (média dos acertos de todos os itens) dos alunos compreendeu a leitura e a escrita dos números racionais na representação fracionária, fato importante para a realização da conversão da representação na língua natural para a fracionária. Se comparados esse resultado com o resultado da questão 4 do Teste 1 – verificação dos conhecimentos prévios, no qual apenas cerca de 56% (média dos acertos dos itens a, d, c, d. O item e não foi incluso por tratar de frações impróprias, conceito que não foi abordado nesta etapa) dos alunos tinham acertado a uma questão similar a essa. Naquela ocasião, apenas 23% dos alunos sabiam a escrita de uma fração decimal, enquanto agora este número é de 90%, mesmo com o aumento do nível da questão.

Questão 03

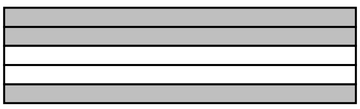
Lembre-se que estudamos em aulas anteriores que um mesmo número racional pode ser representado de diversas formas. Abaixo temos os números racionais representados de três maneiras diferentes: fracionária, figural e língua natural. Ligue a representação de cada número da primeira coluna à representação desse mesmo número na segunda coluna (Fig. 37).

Figura 37: Figuras da questão 3 do IVA 2.

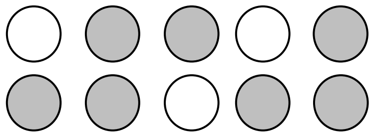


Fonte: Autora.

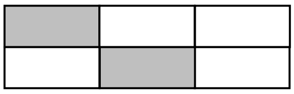
Os resultados foram os seguintes:

- Conversão de $\frac{3}{5}$ para  :

92% dos alunos acertaram e 8% dos alunos erraram esse item;

- Conversão de *sete décimos* para 

33% dos alunos acertaram e 67% dos alunos erraram esse item;

- Conversão de  para $\frac{1}{3}$·:

92% dos alunos acertaram e 8% dos alunos erraram este item;

- Conversão de $\frac{2}{3}$ para *Dois terços*:

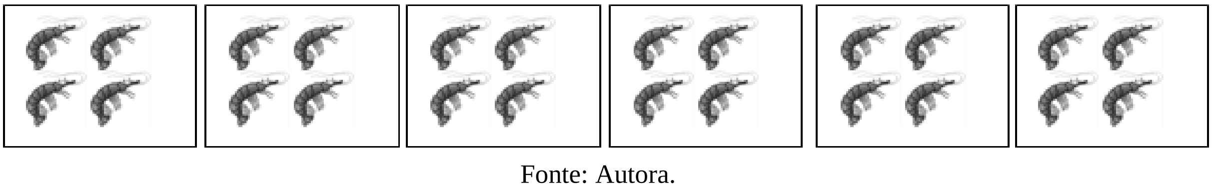
50% dos alunos erraram e 50% dos alunos acertaram este item.

Esta questão 3 é considerada como sendo de nível elevado por exigir dos alunos a realização de simultâneas conversões entre as representações fracionária, língua natural e figural. A média de acertos entre os alunos foi de 67% o que pode ser considerado como um bom resultado. Uma das observações feitas durante a aplicação desse questionário foi que os alunos tiveram um pouco de dificuldades em compreender o enunciado, solicitando a mediação da pesquisadora quanto à leitura da questão. Provavelmente, os alunos não conseguiram interpretar a questão e saber o que estava sendo solicitado pelo fato do enunciado ser muito longo e eles não estarem acostumados com isso e também não terem o domínio da leitura e interpretação, muitos ainda não sabem escrever corretamente o próprio nome.

Questão 6

Joana vende pacotes de camarão salgado na praia de Tabuba. Veja abaixo quantos pacotes de camarão salgado Joana levou para vender no sábado.(Fig. 38)

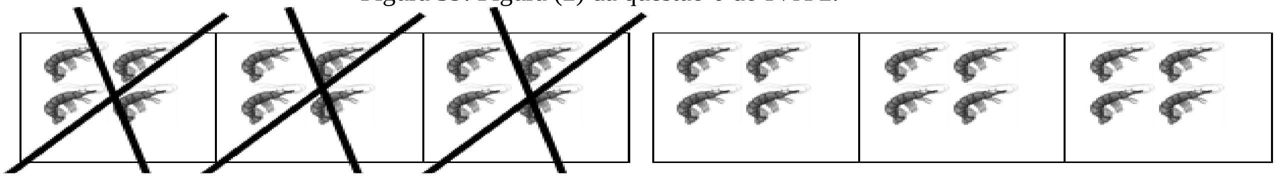
Figura 38: Figura (1) da questão 6 do IVA 2.



Fonte: Autora.

Na figura abaixo, temos marcado com um X os pacotes de camarão que Joana conseguiu vender. Que número representa a quantidade de camarões vendidos em relação à quantidade total?

Figura 39: Figura (2) da questão 6 do IVA 2.



Fonte: Autora.

Os resultados para essa questão foram os seguintes: 67% dos alunos acertaram e 33% dos alunos erraram essa questão.

Dentre as respostas corretas, encontram-se duas possibilidades para solução dessa questão, isto é, uns alunos analisaram a questão considerando o número total de camarões contidos nos 6 pacotes e responderam que foram vendidos $\frac{12}{24}$ do total de camarões que havia inicialmente. Por outro lado, uma parte dos alunos considerou a divisão dos camarões em pacotes e respondeu que foram vendidos $\frac{3}{6}$ do total de camarões, indicando que foram vendidos 3 dos 6 pacotes de camarão que havia inicialmente.

Questão 9

Desenhe ao lado de cada fração uma figura que possa representá-la:

a. $\frac{3}{5}$

b. $\frac{2}{13}$

c. $\frac{7}{10}$

d. $\frac{1}{3}$

Essa questão exige que os alunos saibam realizar a conversão contrária a conversão exigida na questão 1 desse questionário, converter o número racional da representação fracionária para a representação figural. Segundo Duval, o sentido da conversão pode alterar o grau de dificuldade para realização da mesma por conta do nível de dificuldade exigido por cada sentido da conversão. A apropriação do conceito é indicada quando o aluno consegue realizar as conversões em ambos os sentidos em que ela possa ocorrer.

Os resultados apresentados pelos alunos foram:

- item a: 100% dos alunos acertaram e 0% dos alunos errou esse item;
- item b: 92% dos alunos acertaram e 8% dos alunos erraram esse item;
- item c: 92% dos alunos acertaram e 8% dos alunos erraram esse item;

- item d: 100% dos alunos acertaram e 0% dos alunos errou esse item;

Constata-se que cerca de 96% (média dos acertos de todos os itens) dos alunos acertam essa questão, valor próximo ao resultado apresentado na questão 1 que foi de 79%, posto que a amostra é pequena, o que indica que os alunos conseguem realizar as conversões da forma de representação fracionária para a figural de modo natural, o que mostra que o objeto matemático – o número racional – foi compreendido. Esses resultados apontam que os alunos conseguem compreender que um mesmo número racional pode ser representado de diversas formas.

Questão 10

Escreva cada número representado abaixo:

a. quatro sétimos

b. dois quintos

c. doze trinta e sete avos

d. nove centésimos

e. oito décimos

Essa questão exige que os alunos convertam o número racional da forma de representação da língua natural para a fracionária (numérica).

Os resultados foram os seguintes:

- item a: 92% dos alunos acertaram e 8% dos alunos erraram esse item;
- item b: 100% dos alunos acertaram e 0% dos alunos errou esse item;
- item c: 92% dos alunos acertaram e 8% dos alunos erraram esse item;
- item d: 58% dos alunos acertaram e 42% dos alunos erraram esse item;
- item e: 100% dos alunos acertaram e 0% dos alunos errou esse item.

Cerca de 88% dos alunos acertaram essa questão, referente a uma conversão contrária a solicitada na questão 2, na qual cerca de 90% dos alunos responderam-na corretamente. Esses resultados apontam que os alunos conseguiram realizar naturalmente as conversões referentes às representações na forma de fração e na língua natural em ambos os sentidos, o que demonstra a identificação do objeto matemático em estudo, o número racional.

Pode-se concluir que os alunos conseguiram identificar o número racional em suas várias formas de representações semióticas. As atividades envolveram, em sua maior parte, as conversões porque, segundo Duval, a realização das conversões em ambos os sentidos indica que o objeto matemático está sendo compreendido nas suas várias formas de representação e o conceito matemático está sendo apropriado. Neste momento, os registros de representações semióticas estudados foram: as representações fracionária, figural e língua natural.

Quanto à Categoria 2, verificou-se se os alunos conseguiram compreender como comparar duas frações e indicar qual é aquela que representa uma quantidade maior ou se ambas representam a mesma quantidade além de resolver situações-problema envolvendo frações equivalentes. Para tanto são estudados os resultados apresentados pelos alunos para as questões 4, 5 e 7 do IVA – 2.

Questão 4

Utilize o conceito de fração equivalente para comparar as frações dadas, indicando se a primeira é maior, menor ou igual à segunda fração. Não se esqueça de deixar seus registros.

a. $\frac{1}{6}$ __________ $\frac{1}{8}$

b. $\frac{1}{4}$ __________ $\frac{3}{7}$

c. $\frac{2}{5}$ __________ $\frac{1}{3}$

d. $\frac{2}{4}$ __________ $\frac{4}{8}$

Os resultados foram os seguintes:

- item a: 58% dos alunos acertaram e 42% dos alunos erraram esse item;
- item b: 58% dos alunos acertaram e 42% dos alunos erraram esse item;
- item c: 58% dos alunos acertaram e 42% dos alunos erraram esse item;
- item d: 42% dos alunos acertaram e 58% dos alunos erraram esse item.

Foram consideradas como corretas apenas as respostas dos alunos que deixaram os registros no questionário correspondendo aos resultados. De modo geral, o percentual de acertos da questão 4 foi de 54%, o que pode ser considerado um resultado bom, posto que dentre os alunos cujas respostas foram inseridas no percentual de erros, 21% demonstraram entendimento quanto ao conceito de fração equivalente, mas erraram a questão por não saberem efetuar a multiplicação entre os números naturais, fato que poderia elevar o percentual de acertos para cerca de 75%. Alguns desses casos estão apresentados abaixo:

Resposta do aluno A, item a:

a. $\frac{1}{6}$ *é menor que* $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{6} \times \frac{8}{8} =$ $\frac{1}{8} \times \frac{6}{6} =$

Nota-se que o aluno compreendeu o tratamento que deveria realizar para comparar as duas frações e não conseguiu concluir com êxito esse item porque não sabia realizar a multiplicação com os valores em questão. Isso se verifica na solução do item c, respondido por esse mesmo aluno, no qual ele consegue realizar as multiplicações e concluir a questão a contento.

Resposta do aluno A, item c:

c. $\frac{2}{5}$ *maior que* $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{5} \times \frac{3}{3} = \frac{6}{15}$ $\frac{1}{3} \times \frac{5}{5} = \frac{5}{15}$

Pode-se concluir que, apesar de está sendo verificado um aumento significativo na aprendizagem dos alunos, comprovado pelos resultados deste Instrumento de Verificação de Aprendizagem 2, ainda é cedo para afirmar se a conceituação do número racional será comprometida pelas lacunas na aprendizagem das operações com números naturais como a exposta acima.

Questão 5

João e Paulo são dois pintores. Eles fizeram uma aposta para saber quem conseguia pintar a maior parte de um muro em um dia. Ao final do dia, João tinha pintado $\frac{2}{5}$ *de um muro. Paulo tinha pintado* $\frac{3}{6}$ *de um outro muro de mesmo tamanho. Quem pitou mais: João ou Paulo?*

Esperava-se que os alunos compreendessem que, como o muro pintado por João tinha o mesmo tamanho do muro pintado por Paulo, para saber quem conseguiu pintar a maior parte de muro em um dia bastava comparar os números que indicavam essas quantidades, ou seja, $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{6}$ por meio da comparação de frações, respectivamente, equivalentes às frações dadas e cujos denominadores fossem iguais. Foram consideradas como corretas apenas as respostas que continham os registros de todos os tratamentos necessários para a solução do problema, assim como a análise desses resultados para concluir quem pintou a maior parte do muro. Dessa forma, 50% dos alunos apresentaram uma resposta correta. Dos outros 50% dos alunos que não obtiveram êxito na solução da questão, observou-se que 14% não conseguiu interpretar os resultados obtidos após os tratamentos para encontrar as frações equivalentes, mas realizaram tais tratamentos de modo correto, o que demonstra que esse conceito ainda não está no nível de desenvolvimento real desses alunos, mas já se encontra na zona de desenvolvimento proximal e pode amadurecer a qualquer instante.

Questão 7

Juju e Lala ganharam cada uma um pote com a mesma quantidade de jujubas. Juju comeu $\frac{2}{5}$ *das jujubas que estavam em seu pote. Por outro lado, Lala comeu* $\frac{2}{3}$ *das jujubas que estavam em seu pote. Quem comeu mais jujubas, Juju ou Lala?*

Figura 40: Figura dos potes de jujuba da questão 07 do IVA 2.

Fonte: Adaptado de http://shiboneteria.tanlup.com/product/109435/pote-com-jujubas.

Esperava-se que nessa questão os alunos compreendessem que, como os potes tinham a mesma quantidade de jujubas, para comparar as quantidades que Lala e Juju comeram bastava apenas realizar a comparação entre as frações $\frac{2}{5}$ e $\frac{2}{3}$ e verificar que Lala comeu uma quantidade maior de jujubas que Juju.

Os resultados foram os seguintes: 50% dos alunos não conseguiram responder corretamente a questão, enquanto os outros 50% dos alunos conseguiram realizar todos os tratamentos necessários e analisar os resultados corretamente. Esse é um resultado considerado positivo diante das lacunas apresentadas por esses alunos no início do trabalho, principalmente no que diz respeito à operação de multiplicação.

Conclui-se, portanto que a maioria dos alunos cujos resultados foram apreciados apresentou uma aprendizagem satisfatória quanto aos tratamentos necessários para comparar frações e resolver situações-problema que envolva a comparação de frações. Visando a aprendizagem de um número maior de alunos e, visto que alguns alunos apresentaram soluções que indicaram que tais conteúdos encontravam-se na zona de desenvolvimento proximal dos mesmos, foi feita uma revisão sobre esses conteúdos na qual todos os alunos foram convidados a reverem esta parte do estudo dos números racionais, que é tão importante para a Oficina III. A aula de revisão foi ministrada antes do desenvolvimento da Oficina III. Na ocasião também foi realizada uma revisão sobre a multiplicação dos números naturais.

Quanto à Categoria 3, pretende-se verificar se os alunos conseguem realizar todos os tratamentos necessários para a identificação de uma quantidade representada por uma fração. Para isso foram analisadas as questões 8 e 12.

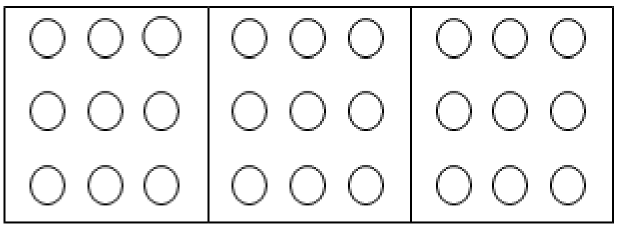
Questão 08

Ana tinha 27 balas. Ela deu $\frac{2}{3}$ *do total de balas para Lucas. Quantas balas Lucas ganhou?*

Pelo procedimento convencional, encontrado na maioria dos livros didáticos, para calcular quantas balas equivalem a $\frac{2}{3}$ de 27 o aluno teria que multiplicar o número natural pela fração, isto é, multiplicar 27 por 2, obtendo como resultado 54 e, em seguida, dividir 54 pelo denominador 3, obtendo 18. Como esse procedimento exige que o aluno saiba dividir números naturais ele não foi aplicado aos alunos da pesquisa, posto que os mesmos indicaram a partir do Instrumento de Verificação de Aprendizagem 1 que não possuem tal conhecimento.

Uma medida alternativa foi adotada para se fazer a abordagem desse tipo de questão e consiste no seguinte: os alunos iriam observar que Ana deu uma quantidade de $\frac{2}{3}$ das 27 balas que possuía, isto é, a quantidade 27 foi dividida em terços – três partes iguais - e ela deu 2 desses terços para Lucas. Como eles não sabiam dividir, em momentos anteriores, foi sugerido que desenhassem um retângulo com o número de divisões igual ao número do denominador da fração e que a quantidade de objetos fosse distribuída unidade por unidade em cada uma dessas partes. Dessa forma, para essa questão, os alunos iriam representar a solução da seguinte maneira:

Figura 41: Representação para a operação da divisão 27:3.



Fonte: Autora.

Na figura acima, tem-se um retângulo dividido em três partes sendo que cada parte dessas representa a quantidade referente à $\frac{1}{3}$ da quantidade total (27 balas), como Ana deu dois terços para Lucas, bastaria contar todas as bolinhas (balas) contidas em duas dessas partes e verificar que Lucas teria ganhado 18 balas. Assim, por meio da distribuição conveniente, os alunos, mesmo sem dominar a divisão com números naturais, conseguiriam resolver questões desse tipo.

Os resultados para essa questão foram os seguintes: 75% dos alunos acertaram e 25% dos alunos erraram a questão. Esse resultado pode ser considerado como positivo, principalmente quando são comparados aos resultados apresentados pelos alunos a uma questão similar, questão 5 do Teste 1 – verificação dos conhecimentos prévios, na qual nenhum aluno conseguiu responder a questão corretamente e um número considerável sequer esboçou alguma solução, deixando a questão em branco.

Questão 12

João quer vender $\frac{2}{5}$ do total de caranguejos que possui. Sabendo que ele tem um total de 50 caranguejos, calcule quantos caranguejos João quer vender.

Nessa questão foi exigido que os alunos realizassem os tratamentos necessários para descobrirem quantos caranguejos equivaliam a $\frac{2}{5}$ de 50 e esboçar como solução 20 caranguejos.

Os resultados foram os seguintes: 50% dos alunos responderam corretamente a questão, 50% dos alunos responderam de modo errado.

Nota-se que houve um avanço significativo no índice de acertos do grupo de alunos quanto ao cálculo de uma quantidade representada por uma fração. Provavelmente esse número fosse melhorado se os alunos atendessem aos critérios de aprendizagem da operação de divisão com números naturais.

4.2.4.2 - Instrumento de Verificação de Aprendizagem 3 – (IVA - 3)

O Instrumento de Verificação de Aprendizagem 3, IVA – 3, presente no Apêndice L, foi aplicado após a concretização da Oficina IV e tem por objetivo verificar se os alunos conseguem compreender os seguintes conteúdos abordados:

- conversão da representação figural para a representação fracionária;
- conversão da representação fracionária para a representação figural;
- conversão da representação fracionária para a representação língua natural;
- conversão da representação língua natural para a representação fracionária;

- conversão da representação decimal para a representação figural;
- conversão da representação figural para a representação decimal;
- conversão da representação decimal para a língua natural;
- conversão da língua natural para a representação decimal;
- conversão da representação fracionária para a representação decimal;
- conversão da representação decimal para a representação fracionária;
- compreensão da estrutura do sistema métrico e capacidade de resolução de problemas envolvendo o sistema métrico;
- compreensão do sistema monetário brasileiro e capacidade de resolução de problema envolvendo o sistema monetário brasileiro;
- realização de tratamentos dos números racionais na representação fracionária;
- realização dos tratamentos dos números racionais na representação decimal.

Para verificar os conceitos apropriados pelos alunos até a Oficina IV, as respostas atribuídas pelos alunos às questões do IVA – 3 foram analisadas conforme as seguintes Categorias:

Categoria 1- Conversões entre as representações fracionária, decimal, figural e língua natural nos sentidos elencados acima: questões 2, 5, 7 e 8.

Categoria 2 – Compreensão da estrutura dos sistemas métrico e monetário brasileiro e capacidade de resolução de problema envolvendo os mesmos: questões 1, 3 e 4.

Categoria 3 – Conversão entre as representações decimal e fracionária e a realização dos tratamentos inerentes a cada representação para o cálculo de somas: questões 6 e 9.

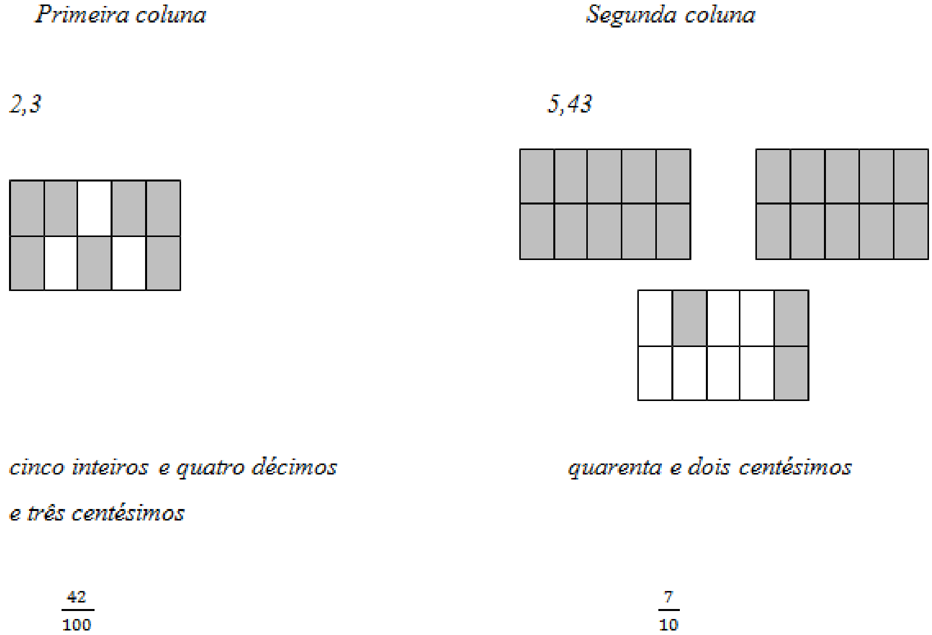
Para análise dos instrumentos aplicados, foram considerados como critérios a assiduidade a todas as etapas anteriores, isto é, participação nas quatro oficinas de aprendizagem e nos três instrumentos de verificação de aprendizagem anteriores e a autorização dos pais quanto à participação na pesquisa. Após a verificação desses critérios, foram considerados relevantes para a pesquisa os testes aplicados a 9 alunos e cujos resultados são apresentados aqui.

Em relação à Categoria 1, as questões consideradas e analisadas foram as de número 2, 5, 7 e 8, cujo objetivo é verificar se os estudantes conseguiram reconhecer o objeto matemático em estudo e distinguir o objeto matemático de suas representações por meio da realização das conversões com as representações fracionária, decimal, figural e língua natural.

Questão 02

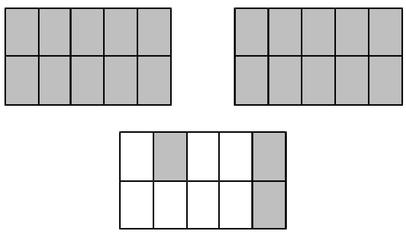
Vamos ligar o número da primeira coluna a sua representação na segunda coluna:

Figura 42: Figuras para a realização das conversões solicitadas na questão 2 do IVA 3.

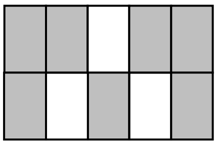


Fonte: Autora.

Uma questão com esse formato foi resolvida pelos alunos no IVA – 2 e, na ocasião, alguns alunos relacionaram um mesmo número racional a duas representações distintas por pensarem que não poderiam deixar um ou mais itens de uma mesma questão em branco, o que fez com que todos os itens cujos números racionais representados na primeira coluna e que tinham sido ligados a duas representações distintas na segunda coluna fossem considerados incorretos, mesmo se uma das representações da relação fosse a correta. Para minimizar esse tipo de erro, os alunos foram esclarecidos de que deveriam fazer a ligação entre as representações apenas quando tivessem certeza, ou seja, não deveriam resolver a questão aleatoriamente. Assim, os resultados apresentados para a questão 2 foram os seguintes:

a) Conversão de 2,3 para 

Nesse item, 56% dos alunos conseguiram resolver a questão corretamente, 11% resolveu de modo errado e 33% deixou a questão em branco. Apesar do resultado não ter um índice de acertos muito grande, se for considerado o fato de que a conversão do número racional do sistema de representação decimal para o sistema de representação figural não ocorre de modo congruente, ou seja, é uma conversão que tem um grau de dificuldade elevado e que necessita de outras conversões para poder ser realizada, pode-se dizer que o resultado apresentado foi satisfatório.

b) Conversão de  para $\frac{7}{10}$.

Nesse item 100% dos alunos realizaram a conversão de modo correto.

c) Conversão de *Cinco inteiros, quatro décimos e três centésimos* para 5,43.

Esse item foi resolvido corretamente por 100% dos alunos.

d) Conversão de $\frac{42}{100}$ para *quarenta e dois centésimos*.

Esse item foi resolvido corretamente por 89% dos alunos enquanto que apenas 11% dos alunos resolveram o item de modo errado.

Os alunos apresentaram um domínio do objeto matemático, realizando, na maioria das vezes, de modo correto as conversões solicitadas. Segundo Duval, saber realizar as conversões entre as várias formas de representações é uma indicação de que o aluno conseguiu compreender qual é o objeto matemático em questão e quais são as suas possíveis representações, o que é importante na tomada de decisões de qual representação utilizar para resolver situações-problema de modo mais prático e correto.

Questão 05

Utilize uma figura para representar cada número racional indicado abaixo:

a. $\frac{3}{8}$

b. *0,5*

c. $\frac{7}{5}$

d. *1,4*

Os resultados obtidos foram os seguintes:

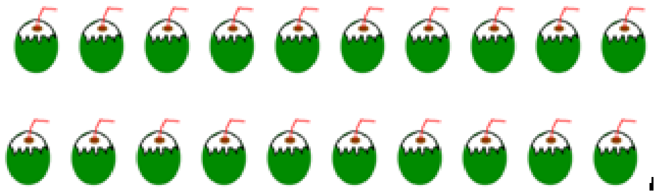
- item a: 100% dos alunos acertaram e 0% dos alunos errou esse item;
- item b: 89% dos alunos acertaram e 11% dos alunos erraram esse item;
- item c: 100% dos alunos acertaram e 0% dos alunos errou esse item;
- item d: 67% dos alunos acertaram e 33% dos alunos erraram esse item;

As conversões solicitadas nos itens a e c são menos complexas que as solicitadas nos itens b e d, pois a conversão do sistema de representação decimal para o figural não é congruente e o aluno precisa realizar a conversão do sistema de representação decimal para o fracionário e desse último para o figural para poder realizar corretamente a conversões dos itens b e d. Além do fator congruência, tem-se o fato de os alunos já terem estudado por mais tempo a conversão do sistema de representação fracionário para o figural, sendo novidade a conversão do sistema de representação decimal para o figural.

Questão 07

Luciano vende coco verde na praia de Sonho Verde. Veja quantos cocos ele levou no domingo.

Figura 43: Representação figural para a questão 7 do IVA 3.



Fonte: Autora.

Porém, Luciano só conseguiu vender vende $\frac{7}{10}$ *dos cocos que tinha levado para a praia.*

a. Quantos cocos Luciano conseguiu vender?

b. Quantos cocos sobraram?

Resultados obtidos:

- 78% dos alunos acertaram os itens a e b e 22% dos alunos erraram os dois itens.

Nessa questão, os alunos deveriam realizar a conversão do sistema de representação figural para o fracionário e, em seguida calcular quanto é $\frac{7}{10}$ de 20 cocos. Os erros apresentados pelos alunos ocorreram porque eles não observaram que os $\frac{7}{10}$ são referentes à quantidade total de cocos, contando apenas com os 10 primeiros cocos que aparecem na figura.

Questão 08

Escreva como se lê cada número abaixo:

a. 3,45

b. 12,6

c. 0, 768

d. 65,32

Resultados obtidos:

- item a: 89% dos alunos acertaram e 11% dos alunos erraram esse item;
- item b: 100 dos alunos acertaram e 0% dos alunos errou esse item;
- item c: 78% dos alunos acertaram e 22% dos alunos erraram esse item;
- item d: 100% dos alunos acertaram e 0% dos alunos errou esse item;

Conforme os resultados apresentados, pode-se concluir que os alunos conseguiram compreender o objeto matemático em estudo e realizaram as conversões entre as várias formas de representações abordadas a contento.

Quanto à Categoria 2, pretende-se verificar se os alunos conseguem compreender a estrutura dos sistemas métrico e monetário brasileiro e se conseguem resolver situações problema envolvendo os mesmos. Para tanto, são analisados os resultados apresentados pelos alunos para as questões 1, 3 e 4.

Questão 01

Mariana tem 25 moedas de 5 centavos, 10 moedas de 50 centavos e 8 moedas de 1 real. Quantos reais ela tem no total?

Resultados obtidos:

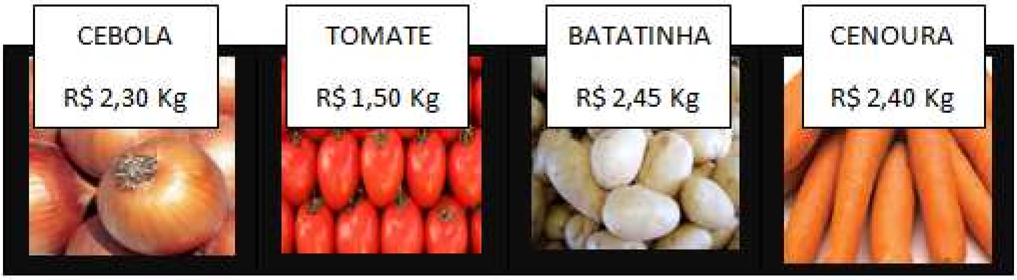
- 78% dos alunos acertaram e 22% dos alunos erraram essa questão.

Para resolver esse problema, os alunos deveriam ter domínio da estrutura do sistema monetário brasileiro, de modo a compreender quantos centavos formam um real, e realizar tratamentos que envolviam as operações de multiplicação e soma com números racionais. Os erros apresentados pelos alunos são referentes à multiplicação, fato já constatado desde o início das atividades e que tem sido minimizado, porém ainda se faz presente e incomoda alguns alunos no processo de construção do conceito de número racional.

Questão 03

Cida foi à feira comprar cebola, tomate, batatinha e cenoura para fazer o almoço. Veja os preços desses produtos:

Figura 44: Representação figural para a questão 3 do IVA 3.



Fonte: Autora.

a. Quantos reais Cida irá pagar se comprar um 1 kg de cebola e 1 kg de batatinha?

b. Quantos reais Cida irá gastar se comprar 1 kg de tomate e 2 kg de cenoura?

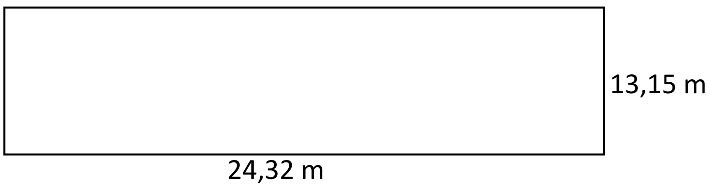
Resultados obtidos:

- item a: 100% dos alunos acertaram e 0% dos alunos errou esse item;
- item b: 78% dos alunos acertaram e 22% dos alunos erraram esse item.

Nessa questão os alunos deveriam demonstrar a capacidade de resolver uma situação cotidiana de compra na qual eles utilizaram os números racionais na representação decimal. Os alunos que erraram o item b demonstraram falta de atenção, pois, ao invés de considerarem 1 kg de tomate e 2 kg de cenoura eles adicionaram 1 kg de tomate a apenas 1 kg de cenoura e realizaram os tratamentos de modo correto para as quantidades utilizadas. Se a análise da questão fosse apenas observar se os tratamentos com números racionais foi realizado corretamente, o número de acertos seria elevado, pois seriam incluídos os alunos que somaram o valor de 1 kg de tomate a apenas 1 kg de cenoura corretamente, porém, a análise também e feita para verificar a capacidade desses alunos resolverem situações cotidianas.

Questão 04

Janaína quer cercar o terreno onde ela construiu a casa onde mora. O terreno tem o formato de um retângulo e as medidas estão indicadas na figura abaixo. Calcule a quantidade de cerca que Janaína deverá comprar.



Resultados obtidos:

- 78% dos alunos acertaram e 22% dos alunos erraram essa questão.

Os alunos deveriam observar que o terreno tem o formato retangular e considerar as medidas de seus quatro lados para fazer o cálculo do perímetro e assim descobrir quantos metros de cerca são necessários para cercar o terreno todo. Os 22% dos alunos que erraram essa questão indicaram falta de atenção quando da solução da mesma. Eles consideraram apenas uma vez a medida do comprimento e uma vez a medida da largura do terreno e realizaram os tratamentos apenas para esses valores. Se a análise da questão fosse apenas a observar se os alunos conseguiram realizar os tratamentos com os números racionais de modo correto, ter-se-ia 100% de acertos, mas a análise é também para verificar se os alunos são capazes de solucionar situações cotidianas e, dessa forma, os percentuais são os indicados inicialmente.

Quanto à Categoria 3, pretende-se verificar se os alunos conseguem realizar conversões convenientes entres as representações decimal e fracionária e realizar tratamentos inerentes a cada representação para o cálculo de somas. Para tanto, foram analisadas as questões 6 e 9 do IVA -3.

Questão 06

Vamos calcular o valor de cada expressão abaixo:

a. $\frac{1}{10}$ *+ 0,25*

b. 4,32 + 25, 62

c. $\frac{2}{7} + \frac{3}{7}$

d. 3,54 + $\frac{254}{100}$

Resultados obtidos:

- item a: 67% dos alunos acertaram e 33% dos alunos erraram esse item;
- item b: 89% dos alunos acertaram e 11% dos alunos erraram esse item;
- item c: 100% dos alunos acertaram e 0% dos alunos errou esse item;
- item d: 78% dos alunos acertaram e 22% dos alunos erraram esse item;

Todos os itens apresentam o mesmo grau de complexidade e os alunos ficaram livres para escolher se iriam converter todos os valores para a representação decimal ou para a fracionária. Os erros que mais se fizeram presentes estão relacionados à multiplicação nas soluções dos alunos que optaram por converter todos os valores para a representação fracionária e tinham frações com denominadores diferentes.

Questão 09

Calcule o valor numérico de cada expressão abaixo:

a) 2,34 + 56,12

b) 32,7 + 1, 365

Resultados obtidos:

- item a: 78% dos alunos acertaram e 22% dos alunos erraram esse item;
- item b: 89% dos alunos acertaram e 11% dos alunos erraram esse item;

Os erros apresentados foram de cunho conceitual, pois os alunos não respeitaram a estrutura do número racional e somaram parte inteira com parte decimal. Porém, mesmo com erros conceituais ainda presentes, esses foram mínimos, pois a maioria dos alunos conseguiu demonstrar que compreenderam como deveriam realizar os tratamentos com números racionais na representação decimal.

Portanto, pode-se dizer que o trabalho desenvolvido com os alunos apresentou resultados significativos até o presente momento, pois os alunos demonstraram que conseguiram identificar o objeto matemático (o número racional), realizar conversões com os vários sistemas de representações semióticas e realizar os tratamentos com os números racionais nas representações fracionária e decimal.

4.2.4.3 - Instrumento de Verificação de Aprendizagem 4 – (IVA - 4)

O Instrumento de Verificação de Aprendizagem 4, presente no Apêndice M, foi a última avaliação realizada para a verificação dos conhecimentos apropriados pelos alunos e tem por objetivo verificar os conhecimentos apropriados pelos alunos após a realização de todas as oficinas proposta no produto educacional “Uma proposta didática para o ensino dos números racionais no sexto ano do Ensino Fundamental”. O Instrumento de Verificação de Aprendizagem 4 foi analisado segundo os resultados apresentados pelos nove alunos que participaram de todas as etapas do trabalho. Os objetivos do IVA – 4 são verificar se os alunos conseguem:

- realizar a conversão do sistema de representação fracionário para o língua natural;

- realizar a conversão do sistema de representação língua natural para o fracionário;
- realizar a conversão dos sistemas de representação decimal para o língua natural;
- realizar a conversão do sistema de representação língua natural para o decimal;
- realizar a conversão do sistema de representação fracionário para o figural;
- realizar a conversão do sistema de representação decimal para o figural;
- realizar a conversão do sistema de representação fracionário para o decimal ou do decimal para o fracionário com o objetivo de resolver somas ou subtrações de números racionais;
- calcular uma quantidade representada por uma fração;
- comparar dois números na representação fracionária;
- resolver situações-problema que envolve o sistema monetário;
- resolver situações-problema que envolve porcentagem.

Para expressar os resultados obtidos com a aplicação do IVA – 4, as questões foram analisadas segundo as quatro categorias abaixo:

Categoria 1 – realizar conversões entre os sistemas de representação figural, fracionário, decimal e língua natural nos sentidos elencados acima: questões 1, 2 e 3;

Categoria 2 – comparação de fração e cálculo da quantidade representada por uma fração na resolução de situações-problema: questões 4, 5, e 6.

Categoria 3 – resolução de problemas envolvendo conversão e tratamentos dos números racionais nas representações fracionária e decimal: questões 7,8 e 9.

Categoria 4 – resolução de problemas envolvendo porcentagens: questões 10, 11 e 12.

Em relação à Categoria 1, foi verificado se os alunos conseguiram realizar as conversões elencada acima. Para tanto, foram analisadas as questões 1, 2 e 3 do IVA – 4.

Questão 01

Escreva como se lê cada número racional abaixo:

a) $\frac{3}{7}$

b) 2,3

c) $\frac{12}{35}$

d) 0,16

e) $\frac{3}{100}$

f) 93, 124

Resultados obtidos:

- item a: 100% dos alunos acertaram e 0% dos alunos errou esse item;
- item b: 100% dos alunos acertaram e 0% dos alunos errou esse item;
- item c: 89% dos alunos acertaram e 11% dos alunos erraram esse item;
- item d: 89% dos alunos acertaram e 11% dos alunos erraram esse item;
- item e: 100% dos alunos acertaram e 0% dos alunos errou esse item;
- item f: 78% dos alunos acertaram e 22% dos alunos erraram esse item.

A maioria dos alunos demonstrou que consegue realizar naturalmente as conversões solicitadas, isto é, eles compreendem que um mesmo número racional pode ser representado de diversas formas distintas sem perda de seu valor.

Questão 02

Escreva numericamente cada número abaixo:

a) quatro nonos

b) seis inteiros e dois décimos

c) vinte e dois trinta e quatro avos

d) dois inteiros, três décimos, sete centésimos e um milésimo

Resultados obtidos:

- item a: 100% dos alunos acertaram e 0% dos alunos errou esse item;
- item b: 89% dos alunos acertaram e 11% dos alunos erraram esse item;
- item c: 78% dos alunos acertaram e 22% dos alunos erraram esse item;
- item d: 89% dos alunos acertaram e 11% dos alunos erraram esse item.

A conversão para a língua natural foi realizada com êxito pela maioria dos alunos o que demonstra mais uma vez a identificação do objeto matemático por parte dos mesmos.

Questão 03

Represente por meio de uma figura cada número abaixo:

a) $\frac{4}{7}$ *b) 0,6*

c) $\frac{9}{10}$ *d) 0,3*

Resultados obtidos:

- item a: 100% dos alunos acertaram e 0% dos alunos errou esse item;
- item b: 89% dos alunos acertaram e 11% dos alunos erraram esse item;
- item c: 100% dos alunos acertaram e 0% dos alunos errou esse item;
- item d: 89% dos alunos acertaram e 11% dos alunos erraram esse item.

A conversão para a representação figural foi realizada com êxito pela maioria dos alunos o que demonstra mais uma vez que os alunos compreendem o que é o objeto matemático e quais são as suas representações.

Em relação à Categoria 2, foi verificado se os alunos conseguiram fazer comparações entre duas frações e identificar qual das duas representa a quantidade maior e se os alunos conseguem realizar o cálculo de uma quantidade representada por uma fração na resolução de situações-problema. Para tanto foram analisadas as questões 4, 5, e 6 do IVA - 4.

Questão 04

Marta é professora de Matemática e vai levar uma parte dos seus alunos para um passeio. A turma da professora Marta tem 45 alunos. A professora só vai poder levar $\frac{2}{3}$ *dos alunos para o passeio. Quantos alunos a professora levará?*

Resultados obtidos:

- 89% dos alunos conseguiram resolver corretamente e 11% dos alunos erraram essa questão.

Nessa questão os alunos deveriam saber calcular que quantidade de alunos representa $\frac{2}{3}$ do total de 45 alunos. No início das atividades, o índice de erros em questões como essa era maior que o apresentado atualmente. A maioria dos erros é proveniente do fato dos alunos não saberem multiplicar números naturais e, mesmo sem ter dado uma atenção maior a essa lacuna que fora identificada desde o início das atividades (a não ser por algumas revisões feitas em momentos específicos), os resultados apontam que os alunos conseguem resolver corretamente um número relevante de questões que envolvem a multiplicação e de maneira correta. Durante as aulas os alunos foram estimulados a estudar a tabuada e resolver atividades extraclasse de multiplicação de números naturais, mas não tiveram um acompanhamento rigoroso para verificar se, de fato, estavam fazendo o que fora solicitado. Diante dos resultados, pode-se supor que, pelo menos alguns alunos, sentiram-se estimulados e aceitaram o desafio de estudar em casa para minimizar os erros cometidos nas questões em relação à multiplicação.

Questão 05

Juliana foi à feira com R$ 35. Ela comprou carne e frutas e gastou $\frac{3}{5}$ do dinheiro que tinha. Quantos reais Juliana gastou com as compras?

Resultados obtidos:

- 89% dos alunos acertaram e 11% dos alunos erraram essa questão.

Essa questão simula uma situação cotidiana dos alunos e eles deveriam calcular quantos reais equivalem a $\frac{3}{5}$ do total de dinheiro que Juliana tinha inicialmente, 35 reais. Supõe-se que os erros em relação à multiplicação nessa questão não afetaram tanto os resultados pelo fato das multiplicações exigidas serem consideradas elementares, multiplicações por 3 ou por 5.

Questão 06

Ana e Maria ganharam, cada uma, uma barra de chocolate. As barras de chocolate eram iguais. Ana comeu $\frac{2}{3}$ de sua barra e Maria comeu $\frac{3}{5}$ de sua barra. Quem comeu mais chocolate, Ana ou Maria?

Resultados obtidos:

- 78% dos alunos acertaram e 22% dos alunos erraram essa questão.

Essa questão exigiu que os alunos compreendessem que, como as barras de chocolate de Ana e de Maria são idênticas, para saber quem comeu mais chocolate bastava comparar as duas frações que indicavam as quantidades de chocolate comida por cada menina, isto é comparar $\frac{2}{3}$ com $\frac{3}{5}$. Os erros apresentados pelos alunos foram de cunho prático, quando erraram as multiplicações, e de cunho teórico, quando compararam as duas frações sem fazer uso das frações equivalentes com mesmo denominador. Como os alunos ainda apresentaram erros de cunho teórico, após a aplicação do IVA - 4, essa questão foi discutida em sala na tentativa de reverter essa falha na aprendizagem.

Em relação à Categoria 3, é verificada a capacidade dos alunos ao resolverem problemas que exigem a realização de conversão conveniente entre os sistemas de representação decimal e fracionário e os tratamentos inerentes aos mesmos. São analisadas as questões 7, 8 e 9 do IVA - 4.

Questão 07

Túlio ganhou R$ 24, 30 de sua mãe e R$ 13, 65 de seu pai. Quantos reais Túlio ganhou no total?

Os resultados foram os seguintes:

- 100% dos alunos acertaram e 0% dos alunos errou essa questão.

A pesar de ser uma questão elementar, o fato dos alunos terem acertado a mesma significa um avanço na aprendizagem, principalmente quando esses resultados são comparados com os resultados das questões do Teste 1 e do IVA – 1 que exigiam a adição de números naturais ou racionais na representação fracionária e o número de acertos foi consideravelmente menor.

Questão 08

Renan recebeu seu salário no valor de R$ 763,15. Ele pagou R$ 251, 20 do aluguel de sua casa. Com quantos reais Renan ficou logo depois do pagamento do aluguel?

Os resultados obtidos foram:

- 78% dos alunos acertaram e 22% dos alunos erraram essa questão.

Nessa questão os estudantes deveriam perceber que a operação inerente é a subtração e do valor do salário retirar o valor do aluguel. No IVA – 1, questão 3, os alunos tiveram a oportunidade de resolver uma questão similar a essa, porém, naquele momento o índice de acerto não passou dos 42%, o que enfatiza o avanço na aprendizagem dos alunos e o entendimento quanto ao tratamento referente ao número racional na representação decimal.

Questão 09

Calcule o valor de cada expressão abaixo:

a) $\frac{2}{3} + \frac{4}{5}$

b) 1,23 + $\frac{45}{100}$

Os resultados obtidos foram:

- item a: 78% dos alunos acertaram e 22% dos alunos erraram esse item;
- item b: 89% dos alunos acertaram e 11% dos alunos erraram esse item.

Os erros esboçados pelos alunos mais uma vez são referentes à multiplicação com números naturais, no item a, e erro conceitual, no item b.

Em relação à Categoria 4, verificou-se se os alunos conseguem resolver situações-problemas que envolvem o cálculo de porcentagens. Para tanto, foram analisadas as soluções das questões 10, 11 e 12.

Questão 10

Nadir foi a uma loja comprar uma calça que custava R$ 62. Como a loja estava com uma promoção, ele teve 32% de desconto. Calcule quanto Nadir pagou pela calça após o desconto.

Resultados obtidos:

- 79% dos alunos acertaram e 22% dos alunos erraram essa questão.

Essa questão, assim como todas as outras que compõem essa categoria, é mais complexa para os alunos, porque além de exigir a interpretação correta do problema, ela envolve conversão e tratamento com números racionais. O índice de acertos apresentado representa um salto qualitativo na aprendizagem dos alunos nessa etapa final do trabalho, pois é um indício de que os alunos conseguiram se apropriar dos conceitos abordados nas oficinas, uma vez que antes das atividades eles não conseguiam resolver sequer questões mais elementares.

Questão 11

Marta tinha que receber um valor de R$ 324 pela venda de sua geladeira usada. No dia do pagamento, a pessoa que comprou a geladeira só pode pagar 72% do valor que devia. Calcule quantos reais Marta recebeu.

Resultados obtidos:

- 67% dos alunos acertaram e 33% dos alunos erraram essa questão.

Os erros apresentados pelos alunos são referentes à multiplicação com números naturais e também erros conceituais.

Questão 12

Se você for fazer uma compra no valor de R$ 125 e o vendedor disser que você vai ganhar um desconto de 15%, quanto você vai pagar na compra?

Resultados obtidos:

- 78% dos alunos acertaram e 22% dos alunos erraram essa questão.

Os erros apresentados nessa questão também são ligados à multiplicação com números naturais e erros conceituais.

Os resultados apresentados indicam que houve um avanço significativo em relação aos conhecimentos que os alunos apresentaram antes da experimentação e os que apresentaram depois da experimentação.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse trabalho foi motivado pela inquietação da autora frente às dificuldades na aprendizagem de diversos conteúdos matemáticos como consequência da não apropriação do conceito de número racional pelos alunos da Educação Básica. Sendo esse um problema conceitual, pensou-se em uma abordagem que contemplasse o processo de ensino e aprendizagem dos números racionais desde o primeiro ano escolar acessível a um professor de Matemática, isto é, o sexto ano. Diante disso, quis-se responder ao seguinte questionamento: **Como realizar uma abordagem dos números racionais de modo que um aluno do sexto ano do Ensino Fundamental consiga compreender seu conceito e estabelecer relações entre suas diversas formas de representações?**

Vários teóricos foram estudados até que se chegou à conclusão de que Duval e Vygotsky seriam fontes norteadoras para o desenvolvimento do trabalho.

Duval, defendendo que os objetos matemáticos só são acessíveis a partir dos sistemas de representações semióticas e que um conceito só pode ser apropriado por um aluno quando ele é capaz de identificar o objeto matemático com o qual está trabalhando, isto é, quando é capaz de mudar de um registro de representação para outro de modo natural e também quando é capaz de realizar os tratamentos referentes aos registros de representação inerentes ao objeto matemático. Nessa pesquisa o objeto matemático estudado foi o número racional a partir dos registros de representação fracionário, figural, decimal e língua natural.

Vygotsky por sua vez, defende o ensino desenvolvido para o aluno, de modo que a interação se faça presente e que o professor atue como mediador no processo de aprendizagem. Os conhecimentos que os alunos obtêm antes de entrar na escola, no seu cotidiano, devem ser explorados, seja para consolidá-los ou para refutá-los em relação aos conceitos científicos. Além disso, Vygotsky acredita que é a aprendizagem que promove o desenvolvimento e não o contrário, assim, para que o aluno se desenvolva é necessário que o professor crie zonas de desenvolvimento proximal para que o aluno possa amadurecer seus conhecimentos e promovê-los do nível de desenvolvimento proximal para o nível de desenvolvimento real.

A importância de se estudar os números racionais ficou comprovada na análise didática, diante da preocupação de outros autores com o processo de ensino e aprendizagem desse objeto matemático, levando-os a analisar como os alunos se apropriam do conceito de número racional, como os números racionais são apresentados nos livros didáticos, até que ponto os alunos conseguiram se apropriar do conceito de número racional após anos de ensino formal, dentre outros estudos.

De fato, os números racionais são fundamentais não apenas para resolver problemas essencialmente matemáticos, mas também estão presentes no cotidiano dos alunos que os utilizam para resolver situações diversas, principalmente, as situações de compra de produtos básicos, como alimentos e vestimentas. A apropriação do conceito de número racional não reflete em ganhos apenas na vida escolar dos alunos, mas também representa uma forma de inseri-lo na sociedade.

Os objetivos desse trabalho são propor uma sequência didática de ensino do conceito de números racionais no sexto ano do Ensino Fundamental, visando auxiliar os alunos na conceituação desse objeto matemático, assim como, ajudar outros professores no processo de ensino e aprendizagem. E também:

c) identificar na literatura existente a importância do estudo dos números racionais e analisar os tipos de registros semióticos mobilizados na aprendizagem dos mesmos;
d) identificar as dificuldades dos alunos no que diz respeito à compreensão das quatro operações básicas da aritmética;

Para atender aos objetivos propostos e tentar responder ao problema de pesquisa, foi desenvolvida uma sequência didática, intitulada “Uma proposta didática para o ensino dos números racionais no sexto ano do Ensino Fundamental” na qual o número racional foi estudado a partir das considerações feitas por Duval, Vygotsky e pelos autores presentes na análise didática.

A experimentação ocorreu da seguinte maneira: na Oficina I os alunos tiveram o primeiro contato com o número racional por meio das representações figural, fracionária e língua natural, tanto para as quantidades discretas como para as quantidades contínuas; na Oficina II os alunos puderam verificar que um mesmo número racional pode ser representado de várias maneiras utilizando a representação fracionária, ou seja, foi estudada a equivalência entre os números racionais; na Oficina III houve a abordagem dos tratamentos referentes ao número racional na representação racionaria no que diz respeito à adição e subtração; na Oficina IV os alunos tiveram o primeiro contato com a representação decimal e realizaram conversões entre essa e as representações fracionária, figural e língua natural além dos tratamentos referentes à representação decimal no que diz respeito às operações de adição e de subtração; na Oficina V foi a vez de se estudar situações-problema que envolve as representações do número racional para resolver problemas de porcentagem.

Iniciar o trabalho fazendo uma abordagem da representação fracionária no seu significado parte-todo exigiu muita cautela por parte da pesquisadora, pois esse método foi o mais criticado pelos autores considerados na análise didática por representar um dos principais culpados da não conceituação do número racional. Os autores criticaram o fato dos professores não tomarem os devidos cuidados ao fazer esse tipo de abordagem, levando o aluno a acreditar que para representar com um número racional uma parte de um todo basta colocar no numerador o número de partes pintas e no denominador o número de partes total da figura, realizando apenas uma dupla contagem dessas partes e sem atribuir significado ao número. Assim, os alunos passam a ver o número fracionário como sendo dois números naturais sobrepostos.

Diante do descontentamento dos autores estudados em relação à representação fracionária no significado parte-todo, tomou-se o cuidado de não se cometer os erros apontados pelos mesmos no momento da experimentação. Para atender aos critérios exigidos foram abordadas as duas situações possíveis em relação da natureza das variáveis, as discretas e as contínuas; enfatizou-se para os alunos que para um número racional poder representar uma quantidade representada de forma figural é necessário que se tenha atendido o critério de conservação de áreas, isto é, que a figura possa ser dividida em partes com áreas iguais para que se possa utilizar o número racional na representação fracionária para representar uma parte da figura; mostrou-se para os alunos, por meio da manipulação de objetos, que um número fracionário não significa um número natural sobre outro e sim um número só que serve para representar determinadas quantidades, principalmente, partes de um todo. Dessa forma, acredita-se que os possíveis erros cometidos pelos professores e citados pelos autores estudados foram sanados.

Na Oficina II, os alunos puderam observar de modo prático a equivalência entre dois números racionais na representação fracionária como representantes de uma mesma quantidade, sem a pura memorização de algoritmos que não ganham significados para os alunos.

Na Oficina III, a adição e a subtração de números racionais na representação fracionária foram abordadas a partir de objetos manipulativos e de representações figurais para terem significado para os sujeitos e, quando eles tiveram contato com os algoritmos, esses últimos não pareceram algo criado pelo professor e sem significado, pelo contrário, os algoritmos foram justificados pelas atividades com o material concreto e manipulativo e surgiram como um meio para sintetizar a necessidade de somar ou subtrair números racionais.

Na Oficina IV os sujeitos já conheciam bem as representações figural, fracionária e língua natural e puderam ampliar o conhecimento sobre os números racionais por meio da representação decimal. Nesse momento foi apresentada a representação decimal, realizadas as conversões entre essa nova representação com as demais e realizados os tratamentos inerentes a representação decimal.

Para finalizar a fase da experimentação, os alunos puderam estudar os números racionais relacionados ao problema de porcentagem que está bastante presente no cotidiano dos mesmos, principalmente no que diz respeito ao comércio de mercadorias. Em todas as Oficinas os alunos foram vistos como seres construtores do conhecimento, a interação foi valorizada, pesquisadora atuou como mediadora do processo de aprendizagem e, sempre que possível, as atividades propostas foram desenvolvidas de acordo com a vida cotidiana dos sujeitos envolvidos na pesquisa.

As avaliações dos conceitos apropriados pelos alunos se deram a partir da análise dos resultados dos Instrumentos de Verificação de Aprendizagem 2, 3, e 4 em confronto com a análise dos resultados apresentados no Teste 1 – verificação dos conhecimentos prévios e no Instrumento de Verificação de Aprendizagem 1, aplicados antes da experimentação.

Essa análise se deu para verificar se a hipótese levantada no início da pesquisa seria confirmada ou refutada, isto é se se verifica que: **a sequência didática desenvolvida no presente trabalho, a partir da teoria dos registros de representações semióticas e da criação de zonas de desenvolvimento proximal, foi capaz de propiciar ao aluno a conceituação dos números racionais, a partir da realização dos tratamentos e das conversões entre os sistemas de representações figural, decimal, fracionário e língua natural.**

No início do trabalho, os resultados apontaram que os alunos não tinham se apropriado do conceito de número natural e que não sabiam realizar tratamentos com esses números, principalmente no que diz respeito à multiplicação e divisão.

Em relação à divisão, buscou-se um meio alternativo para que essa lacuna não representasse um empecilho para o desenvolvimento do trabalho. Ao invés de solicitar que os alunos utilizassem o algoritmo da divisão, mostrou-se a eles, por meio do significado da representação fracionária, que uma divisão poderia ser resolvida por meio de distribuição, isto é, se o problema queria que o aluno identificasse quanto é $\frac{2}{3}$ de 12 reais, por exemplo, o aluno não precisaria multiplicar o número 12 por 2 e depois dividir o resultado por 3, bastaria que ele entendesse que $\frac{2}{3}$ de 12 reais significa dizer que os 12 reais foi dividido em 3 partes iguais e dessas 3 partes foram tomadas 2. Eles passaram a representar questões dessa natureza da seguinte maneira:

OOOO	OOOO	OOOO

O que fez com eles pudessem desenvolver a capacidade de resolver as questões utilizando a significação do número fracionário.

Outro empecilho que se fez presente durante toda a fase de experimentação foi a multiplicação. Diante dessa constatação, a pesquisadora estimulou os alunos a estudar a tabuada de multiplicação em casa e a calcularem o valor numérico de expressões que envolviam multiplicação. Em alguns momentos foram feitas revisões sobre esse conteúdo, mas não foi dada uma atenção maior a essa lacuna e, mesmo assim, os alunos demonstraram uma melhora significativa no decorrer do trabalho. A partir do que foi observado, sugere-se que o professor que venha a reproduzir o trabalho desenvolvido na presente pesquisa em sala de aula, tenha a preocupação de, se verificar uma lacuna na aprendizagem da multiplicação com números naturais, faça um trabalho mais específico na tentativa de sanar essa dificuldade antes de realizar a abordagem dos números racionais que os resultados, provavelmente, serão mais satisfatórios do que os apresentados aqui.

Mesmo diante das dificuldades enfrentadas, pode-se concluir que, a partir dos resultados apresentados pelos alunos nos instrumentos de verificação de aprendizagem **a sequência didática desenvolvida no presente trabalho, a partir da teoria dos registros de representações semióticas e da criação de zonas de desenvolvimento proximal, foi capaz de propiciar ao aluno a conceituação dos números racionais, a partir da realização dos tratamentos e das conversões entre os sistemas de representações figural, decimal, fracionário e língua natural,** pois nos testes a maioria dos estudantes demonstrou que conseguiu identificar o objeto matemático em estudo por meio da realização das conversões entre os sistemas de representação figural, fracionário, decimal e língua natural e também conseguiram realizar os tratamentos referentes aos sistemas de representação fracionário e decimal. É claro que o processo de conceituação do número racional não pode ser esgotado no sexto ano do Ensino Fundamental. Esse processo deve continuar nos anos seguintes e com abordagens em conformidade com a maturidade dos alunos, mas, ao que diz respeito ao sexto ano do Ensino Fundamental, pode-se dizer que a conceituação ocorreu de modo satisfatório.

Sugere-se que outras pesquisas sejam realizadas em relação à conceituação do número racional, nas quais possa ser realizada a abordagem da multiplicação, da divisão, da potenciação e da radiciação desse número, por exemplo, em continuidade ao trabalho desenvolvido.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag; COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ANPEd. **Revista Eletrônica em Educação Matemática.** Volume: 3.6. Santa Catarina: 2008. p. 62-77.

AMORIM, Marlene Pires. **Apropriação de significações do conceito de números racionais:** um enfoque histórico cultural. Dissertação de mestrado em Educação Matemática. Criciúma: Universidade do Extremo Sul Catarinense, 2007. Disponível em: <http://www.bib.unesc.net/biblioteca/sumario/000031/00003118.pdf>. Acesso em: 18 jan 2011.

BEZERRA, Francisco José Brabo. **Introdução do conceito de número fracionário e de suas representações:** uma abordagem criativa para sala de aula. Dissertação de mestrado em Educação Matemática. São Paulo: PUC, 2001. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/francisco_bezerra.pdf>. Acesso em: 10 fev 2011.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática/Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRYANT, Peter; CAMPOS, Tânia Maria Mendonça; MAGINA, Sandra; NUNES, Terezinha. Razão e frações: representando quantidades intensivas. In: BRYANT, Peter; CAMPOS, Tânia Maria Mendonça; MAGINA, Sandra; NUNES, Terezinha. **Educação Matemática 1: números e operações numéricas.** 2ª edição. São Paulo: Cortez, 2009.

______________; NUNES, Terezinha. **Crianças fazendo Matemática.** Tradução: Sandra Costa. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática.** Lisboa: Tipografia Matemática Ltda, 1951. p. 1 – 82.

CARNEIRO, Vera Clotilde Garcia. Engenharia didática: um referencial para a ação investigativa e para a formação de professores de Matemática. **Zetetikê.** Volume: 13. n. 23 jan-jun. Cempem, 2005.

CATTO, Glória Garrido. **Registros de representação e o número racional:** uma abordagem em livros didáticos. Dissertação de mestrado em Educação Matemática. São Paulo: PUC, 2000. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/diaadia/diadia/arquivos/File/conteudo/artigos_teses/MATEMATICA/Dissertacao_catto.pdf>. Acesso em: 18 jan 2011.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano:** registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Traduzido por: LEVY, Lênio Fernandes; SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu da. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

______________. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. (Org.). **Aprendizagem em Matemática:** registros de representação semiótica. 7ª edição. São Paulo: Papirus, 2010. p. 11-34.

IGLIORI, Sonia; MARANHÃO, Maria Cristina S. Registros de representação e números racionais. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org.). **Aprendizagem em Matemática:** registros de representação semiótica. 7ª edição. São Paulo: Papirus, 2010. p. 57-70.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara. Engenharia Didática In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. (Org.). **Educação Matemática:** uma (nova) introdução. 3 ed. São Paulo: EDUC, 2010. p. 233-248.

MARTINS, João Carlos. Vygotsky e o papel das interações sociais na sala de aula: reconhecer e desvendar o mundo. **Série Ideias**. São Paulo: FDE, n. 28, 1997. p. 111-122. Disponível em: <http://www.crmariocovas.sp.gov.br/pdf/ideias_28_p111-122_c.pdf>. Acesso em: 30 jul. 2010.

MOREIRA, Marcos Antônio. O construtivismo de Vygotsky. IN: MOREIRA, Marcos Antônio. **Subsídios teóricos para o professor pesquisador em ensino de ciências: comportamentalismo, construtivismo e humanismo**. Porto Alegre, 2009. p. 19-24.

NERES, Raimundo Luna. **Aplicação dos registros de representação semiótica no ensino-aprendizagem da Matemática:** um estudo com alunos do sexto ano do Ensino Fundamental. Tese de doutorado. São Paulo: Universidade Estadual Paulista, 2010. Disponível em: <http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/cp150448.pdf>. Acesso em: 08 abr. 2011.

OLIVEIRA, Marta Kohl de. Vygotsky e o processo de formação de conceito. IN: DANTAS, Heloysa; OLIVEIRA, Marta Kohl de; TAILLE, Yves de La. **Piaget, Vygotsky, Wallon:** teorias psicogenéticas em discussão. São Paulo: Summus, p. 23-34, 1992.

RODRIGUES, Wilson Roberto. **Números racionais:** um estudo das concepções de alunos após o estudo formal. Dissertação de mestrado em Educação Matemática. São Paulo: PUC, 2005. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/wilson_roberto_rodrigues.pdf>. Acesso em: 26 ago. 2011.

VYGOTSKY, Lev Semenovich**. A formação social da mente.** Tradução: José Cipolla Neto. 6 ª ed. São Paulo: Martins Fontes, 1998.

______________. **Pensamentos e linguagens.** Tradução: Jéferson Luis Camargo. 3ª Ed. São Paulo: Martins Fontes, 2005.

______________; LURIA, Alexander Romanovich; LEONTIEV, Alex N. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. Tradução: Maria da Penha Villalobos. São Paulo: Ícone: Editora da Universidade de São Paulo, 1988.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Questionário socioeconômico

1. Nome:____

2. Idade:____

3. Já repetiu alguma série/ano antes?

a) Sim ( ). Qual? ____________________ Quantas vezes? ________________________

b) Não ( )

4. Você gosta de vim para a escola? a) Sim ( ). b) Não ( ).

5. Por quê?

____

6. Você gosta de estudar Matemática? Por quê?

____

7. Seus pais sabem ler e escrever? a) Sim ( ). b) Não ( ).

8. Eles ajudam você a resolver as atividades de casa? a) Sim ( ). b) Não ( ).

9. Em casa, seus pais costumam exigir que você estude todos os dias?

a) Sim ( ). b) Não ( ).

10. Você trabalha?

a) Sim ( ). Em que? ____

b) Não ( ).

11. Seus pais trabalham?

a) Sim ( ). Em que? ____

b) Não ( ).

12. Seus pais recebem algum incentivo do governo? a) Sim ( ). b) Não ( ).

13. Você mora próximo à escola? a) Sim ( ). b) Não ( ).

14. Quando você não vem para a escola, geralmente é por quê?

____

15. Quando chove muito, o local onde você mora é afetado e sua vinda à escola comprometida?

a) Sim ( ) Por quê? ____

b) Não ( )

16. Você já estudou alguma coisa sobre as frações em algum ano anterior?

Sim ( ) Não ( ).

17. Você já estudou algo sobre os números decimais nos anos anteriores?

Sim ( ) Não ( ).

18. Em sua opinião, a Matemática que você aprende na escola serve para facilitar algumas tarefas do seu dia-a-dia?

a) Sim ( ). Dê exemplos:____

b) Não ( ).

19. Por que você vem para a escola?____

20. Você quer participar da pesquisa que a professora de Matemática realizará neste turma?

a) Sim ( ). Por quê? ____

b) Não ( ). Por quê? ____

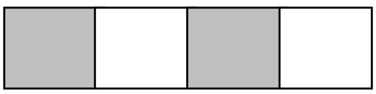
APÊNDICE B - TESTE 1 – verificação dos conhecimentos prévios

1) Cada item abaixo tem uma figura e uma fração que supostamente representa a quantidade pintada da figura. Faça de conta que cada retângulo representa uma barra de chocolate e que a parte pintada é a parte do chocolate que você comeu. Marque V nos itens nos quais a fração representar a parte do chocolate que você comeu e F nas sentenças em que a fração não representar a parte do chocolate que foi comida.

a)  e $\frac{1}{2}$ V ( ) - F( ) - Não sei responder* ( )

b)  e $\frac{2}{4}$ V ( ) - F( ) - Não sei responder ( )

c)  e $\frac{1}{2}$ V ( ) - F( ) - Não sei responder ( )

d)  e $\frac{1}{2}$ V ( ) - F( ) - Não sei responder ( )

* O item não sei responder deverá ser marcado se o aluno não lembrar nada sobre este conteúdo.

2) Joana comprou um saquinho de confeito. Nesse saquinho haviam 30 confeitos, sendo 10 do sabor laranja, 15 do sabor uva e 5 do sabor morango. Escreva uma fração que represente a quantidade de confeitos do sabor laranja que haviam no saquinho.

3) Maria foi ao mercadinho levando dezoito reais e cinquenta centavos. Ela comprou um quilo de feijão e um quilo de arroz. Sabendo que um quilo de feijão custa quatro reais e trinta

centavos, e que um quilo de arroz custa dois reais e quarenta e cinco centavos, escreva uma expressão que represente essa situação.

4) Escreva numericamente cada expressão abaixo:

a) Dois terços

b) Quatro quintos

c) Cinco vinte e dois avos

d) Dois décimos

e) Três inteiros e vinte e cinco centésimos

5) Luciana foi à feira com R$ 12 na carteira. Ela comprou tomate, cebola e pimentão. Sabendo que as compras custaram $\frac{2}{3}$ da quantia que ela possuía, calcule quanto Luciana gastou.

6) Crie um enunciado para a expressão 8 – 4 + 25 – 3.4.

7) Calcule o valor de cada expressão abaixo:

a) $\frac{4}{3} + \frac{5}{3} =$

b) $\frac{3}{4} + \frac{7}{5} =$

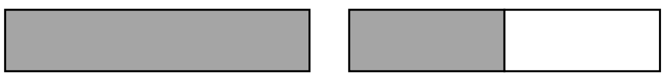
c) $\frac{9}{4} - \frac{2}{3} =$

d) $\frac{2}{7} \times \frac{5}{2} =$

e) $\frac{8}{3} : \frac{7}{6} =$

8) Thaís comprou três barras de chocolate para dividir igualmente entre seus cinco filhos. Qual deverá ser a quantidade de chocolate que cada filho receberá de Thaís?

9) Escreva numericamente a quantidade representada pela parte pintada n figura abaixo:



10) Ana Carla recebeu um salário no valor de R$ 654, 35. Ela pagou a conta de energia no valor de R$ 124, 15 e a conta do cartão de crédito no valor de R$ 98, 55.

a) Qual foi o valor total gasto com os pagamentos?

b) Quanto sobrou do salário de Ana Carla após o pagamento das duas contas?

11) Para a expressão 12 + 5 – 3 eu posso criar o seguinte enunciado, por exemplo: Joana tinha doze reais. Ela ganhou cinco reais de seu pai e depois gastou três reais comprando balas. Agora, considere a expressão 3. 5 + 7 – 2, e crie um enunciado para a mesma.

12) Marcos, André e Fábio compraram cada um uma pizza de mesmo tamanho. A pizza de Marcos foi partida em 4 fatias iguais e ele comeu duas fatias. A pizza de André foi cortada em 6 fatias iguais e ele comeu três fatias. A pizza de Fábio foi cortada em 8 fatias iguais e ele comeu quatro fatias. Em sua opinião, quem comeu o maior quantidade de pizza?

APÊNDICE C - Instrumento de Verificação de Aprendizagem 1

1. Escreva como se lê os seguintes números abaixo:

a) 29____

b) 274____

c) 406____

d) 2785____

e) 72907____

2. Na escola Major Nelson Augusto será realizar uma gincana para os seus alunos. Sabendo que são 438 alunos que estudam no turno matutino e 679 alunos que estudam no turno vespertino. Se todos participarem da gincana, qual será a quantidade total de alunos que participarão dessa gincana neste dia?

3. Amanda recebeu um salário no valor de R$ 917. Ela pagou o aluguel de sua casa, que custa R$ 382. Calcule com quanto Amanda ficou logo após pagar o seu aluguel.

4. Beatriz comprou uma calça e duas blusas em uma loja. A calça custou R$ 67 e cada blusa custou R$ 18. Se Beatriz tinha inicialmente R$ 156, calcule com quanto ela ficou após a compra.

5. Uma empresa tem 25 funcionários. O salário de cada funcionário é de R$ 651,00. Quanto à empresa gasta por mês com o pagamento de todos os seus funcionários?

6. A professora Marta está com um pacote que contém 156 balas de chocolate. Se ela dividir igualmente todas essas balas entre os seus 13 alunos, quantas balas cada aluno ganhará?

7. Calcule o valor numérico de cada expressão abaixo:

a) 2 + 3154 + 215

b) 7648 + 1296

c) 9853 – 7512

d) 2347 – 1628

8. Qual é o valor da multiplicação 23 x 54?

9. Qual é o valor das divisões:

a) 732 : 3

b) 160 : 14

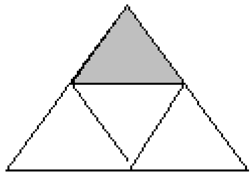
APÊNDICE D - Lista de exercícios de apropriação dos conteúdos da Oficina I - variável contínua

Lista de exercícios de apropriação dos conteúdos da Oficina I- variável contínua

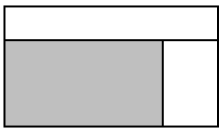
1. Escreva a fração que representa a parte pintada de cada figura, sempre que possível:

a)

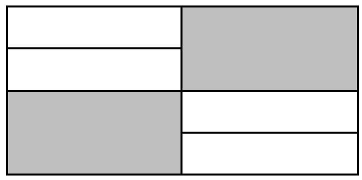
c)



b)



d)



2) Faça uma figura para representar cada fração abaixo:

a) $\frac{2}{7}$

b) $\frac{3}{4}$

c) $\frac{11}{21}$

3. Escreva como se lê cada uma das frações abaixo:

a) $\frac{1}{2}$ ____

b) $\frac{1}{3}$ ____

c) $\frac{2}{5}$ ____

d) $\frac{4}{13}$ ____

e) $\frac{3}{10}$ ____

f) $\frac{21}{100}$ ____

4. João quer dividir igualmente três barras de chocolate entre cinco crianças.

a) Faça uma figura para representar a situação.

b) Que quantidade de chocolate cada criança receberá?

APÊNDICE E - Lista de exercícios de apropriação dos conteúdos da Oficina I- variável discreta

1. Marta comprou 42 bolinhas de gude para distribuir igualmente entre seus 3 filhos.

a) Faça uma figura para representar essa situação.

b) Quantas bolinhas de gude cada criança ganhará?

c) Que fração da quantidade total de bolinhas de gude representa a quantidade que cada filho ganhou?

2. Juliana ganhou 15 canetas para dividir igualmente entre ela e seus 3 primos.

a) Faça uma figurinha para representar essa situação.

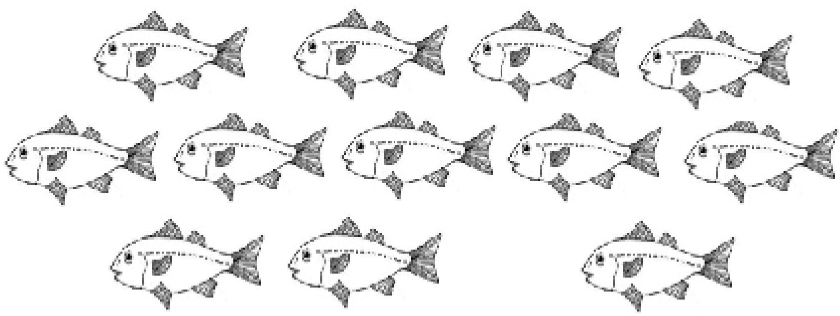
b) É possível distribuir igualmente todas as canetas entre Juliana e seus três primos? Por quê?

3. Paula comprou sete maçãs e quer dividi-las igualmente para dois meninos.

a) Faça um desenho para representar essa situação.

b) Qual será a quantidade de maçã que cada menino ganhará?

4. Juca vende peixes na Barra de Santo Antônio. Porém, ele só vende os peixes inteiros. Se alguém quiser comprar só um pedaço, não vai conseguir. Na sexta-feira sua banca tinha a quantidade de peixes indicada na figura abaixo.



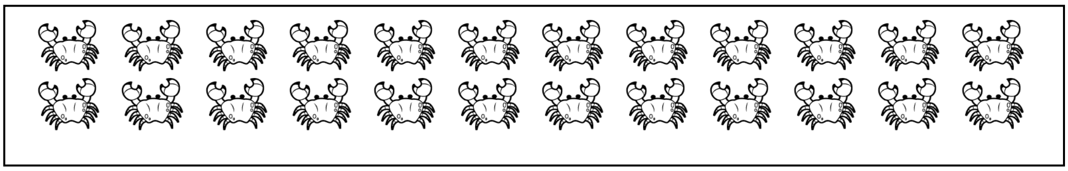
a) Se uma pessoa quiser comprar $\frac{1}{3}$ do total de peixes, quantos peixes ela vai levar para casa?

b) Se uma pessoa quiser comprar $\frac{1}{5}$ do total de peixes, quantos peixes ela vai levar para casa?

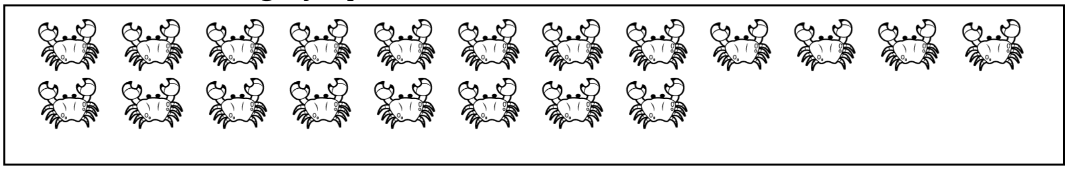
APÊNDICE F - Lista de exercícios para apropriação dos conteúdos da Oficina II

1. Mariana e Luciana são duas vendedoras de caranguejo. Elas saíram para vender os caranguejos porta a porta. As figuras abaixo indicam a quantidade de caranguejo que cada uma tinha antes de começar as vendas.

Quantidade de caranguejo que Mariana tinha:



Quantidade de caranguejo que Luciana tinha:



Sabendo que Mariana conseguiu vender $\frac{3}{8}$ de seus caranguejos e que Luciana conseguiu vender $\frac{3}{5}$ de seus caranguejos. Responda: quem vendeu mais caranguejo neste dia, Mariana ou Luciana? Justifique sua resposta.

2. Matheus e Luan ganharam cada um, uma barra de chocolate de mesmo tamanho. Sabe-se que Matheus comeu $\frac{2}{5}$ da sua barra de chocolate. Já Luan, comeu $\frac{1}{3}$ de sua barra de chocolate. Quem comeu a maior quantidade de chocolate, Matheus ou Luan? Justifique sua resposta.

3. A professora de Matemática fez um trabalho no qual Lili tirou $\frac{4}{5}$ da nota máxima. Lala, que também fez o mesmo trabalho, tirou $\frac{2}{3}$ da nota máxima. Quem tirou a maior nota no trabalho? Justifique sua resposta.

4. Compare cada uma das frações abaixo utilizando os sinais de >, < ou =.

a. $\frac{3}{5}$ ____________ $\frac{2}{5}$

b. $\frac{2}{8}$ ____________ $\frac{1}{4}$

c. $\frac{7}{9}$ ____________ $\frac{2}{3}$

d. $\frac{2}{5}$ ____________ $\frac{4}{7}$

APÊNDICE G – Lista de exercícios para apropriação dos conteúdos da Oficina III

1. Calcule o valor das adições:

a. $\frac{3}{9} + \frac{2}{9} =$

b. $\frac{2}{5} + \frac{3}{5} =$

c. $\frac{1}{6} + \frac{2}{3} =$

d. $\frac{2}{7} + \frac{1}{2} =$

e. $\frac{1}{10} + \frac{2}{5} =$

2. Calcule o valor de cada subtração abaixo:

a. $\frac{4}{6} - \frac{1}{6} =$

b. $\frac{5}{7} - \frac{2}{7} =$

c. $\frac{2}{3} - \frac{1}{5} =$

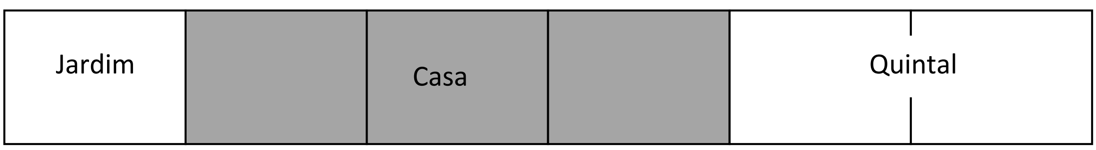
d. $\frac{1}{2} - \frac{3}{8} =$

e. $\frac{1}{3} - \frac{1}{6} =$

3. Luciana faz bolo de chocolate para vender no final de semana. No sábado, ela só conseguiu vender $\frac{2}{3}$ de um bolo. No domingo ela conseguiu vender $\frac{2}{6}$ do mesmo bolo. Quanto do bolo de chocolate Luciana conseguiu vender nos dois dias?

4. Sabendo que o bolo que Luciana fez tinha 18 fatias, faça uma figura para representar a questão anterior, isto é, para representar a quantidade de bolo que ela vendeu no sábado, a quantidade de bolo que ela vendeu no domingo e a soma das quantidades vendidas nos dois dias.

5. O Sr. João tem um terreno na Maré Mansa. Esse terreno foi dividido em 6 partes iguais e sua casa de praia foi construída da seguinte maneira:



a. Que fração do terreno foi ocupada pela casa?

b. Que fração do terreno foi ocupada pelo jardim?

c. Que fração do terreno foi ocupada pelo quintal?

d. Que fração do terreno foi ocupada pela casa e pelo quintal juntos?

e. Que fração do terreno foi ocupada pelo quintal e pelo jardim juntos?

f. Que fração do terreno sobra quando retiramos o jardim?

g. Que fração do terreno sobra quando retiramos o quintal?

6. Moisés é um pescador. Ele levou 24 kg de peixe para vender no mercado. No período da manhã ele conseguiu vender $\frac{1}{2}$ da quantidade de peixe que tinha levado. No período da tarde, ele conseguiu vender $\frac{3}{8}$. O que sobrou ele levou e congelou para vender no dia seguinte.

a. Que fração do total de peixes, Moisés conseguiu vender nos dois períodos?

b. Que fração do total de peixes sobrou para ser vendida no outro dia?

c. Quantos peixes Moisés conseguiu vender?

d. Quantos peixes Moisés congelou para vender no dia seguinte?

APÊNDICE H – Lista de exercícios para a apropriação dos conteúdos da sessão 1 da Oficina IV

1. O quadro abaixo mostra todas as moedas do sistema monetário brasileiro. Vamos escrever a representação decimal e a representação fracionária de cada moeda em relação a um real.

MOEDA	REPRESENTAÇÃO DECIMAL	REPRESENTAÇÃO FRACIONÁRIA
		
		
		
		
		
		

2. Escreva na forma decimal:

a. — ____________________________

b. — ____________________________

c. — ____________________________

d. — ____________________________

3. Escreva na forma de fração decimal:
a. 2,34 _________________________
b. 0, 345 ________________________
c. 23,8 _________________________
d. 5,1 __________________________
e. 35, 219________________________

4. Laís quer comprar uma geladeira e um fogão com o dinheiro que economizou durante três anos. A geladeira custa R$ 723,52 e o fogão custa R$ 412,15. Quanto ela vai gastar na compra dos dois objetos?

5. Bruna tem R$ 25,30. Ela está precisando comprar um caderno que custa R$ 12,25 para sua filha. Se Bruna comprar este caderno, quanto irá sobrar do dinheiro que ela tem?

6. Para somar ou subtrair dois números racionais, eles precisam está representados da mesma forma, isto é, ou os dois devem está escritos na forma de fração ou os dois devem está escrito na forma decimal. Veja o exemplo:
Solução 1: Transformando tudo em fração:

$$\frac{3}{10} + 4{,}5 = \frac{3}{10} + \frac{45}{10} = \frac{48}{10}$$ (quarenta e oito décimos)

Solução 2: Transformando tudo em decimal:

$$\frac{3}{10} + 4{,}5 = 0{,}3 + 4{,}5 = 4{,}8$$ (quatro inteiros e oito décimos)

Agora vamos realizar as seguintes operações:

a. $2{,}5 + \frac{4}{10} =$

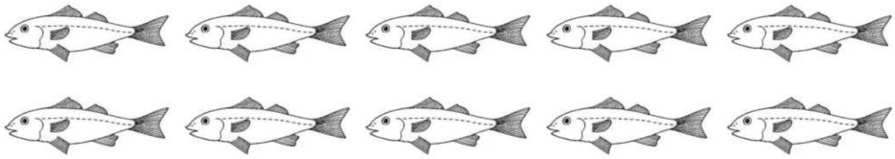
b. 3, 75 + 24, 6 =

c. $\frac{4}{100} + 2{,}\ 31 =$

d. $43{,}\ 12 + \frac{23}{10} =$

7. Marta vende peixes para sustentar sua família. Ela vende cada peixe a R$ 15, 20.

Veja quantos peixes ela tinha na sua caixa térmica na sexta-feira.



Nesse dia ela só conseguiu vender $\frac{6}{10}$ da quantidade total.

a. Calcule quantos reais ela conseguiu arrecadar.

b. Pinte a fração dos peixes que foi vendida.

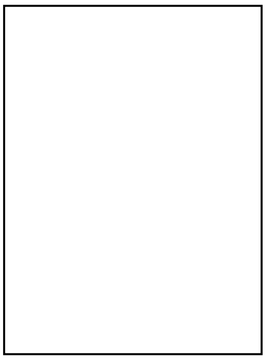
8. Luciana tinha R$ 100. Ela gastou $\frac{7}{10}$ desse dinheiro pagando a dívida que tinha no mercadinho de Dona Ana.

a. Quantos reais equivalem a $\frac{7}{10}$ de R$ 100?

b. Quantos reais sobraram?

APÊNDICE I – Lista de exercícios para a apropriação dos conteúdos da sessão 3 da Oficina IV

1. Juca quer cercar um terreno retangular que ele tem ao lado do posto de saúde. Sabendo que o terreno tem como dimensões 23,42 m de fundo e 15,7 m de frente, conforme figura abaixo, calcule quantos metros de cerca ele deverá comprar.



23,42 m

15,7 m

2. Como ficariam as dimensões do terreno de Juca, mostrado na questão anterior, se fossem escritas em centímetros?

a) 23, 42 m ou ________________ cm.

b) 15, 7 m ou _________________ cm.

3. Maria e Andresa são duas irmãs e estão querendo saber quem é a mais alta. Então, o pai das meninas utilizou uma fita métrica para verificar a altura de cada uma. Ele registrou que Maria tem 154 cm e Andresa tem 1, 32 m. Escreva as duas alturas utilizando a mesma unidade de medida, cm ou m, e verifique quem é mais alta: Maria ou Andresa?

APÊNDICE J – Lista de exercícios para a apropriação dos conteúdos da Oficina V

1. Mariana quer comprar uma calça que custa R$ 62. Ela vai aproveitar que a loja está oferecendo 50% de desconto em todas as peças.

a) Qual vai ser o desconto, em reais, que Mariana vai ganhar na compra da calça?

b) Qual será o valor pago pela calça após o desconto?

2. A professora de português quer levar alguns alunos para uma visita ao museu, porém, apenas 40% dos alunos poderão ir ao passeio. Sabendo que a turma tem um total de 40 alunos, calcule o número de alunos que poderão visitar o museu.

3. Lucas recebe um salário de R$ 650. No mês passado ele precisou faltar alguns dias e por esse motivo, seu salário teve um desconto de 30%. Quantos reais Lucas recebeu após os descontos?

4. Complete a tabela abaixo:

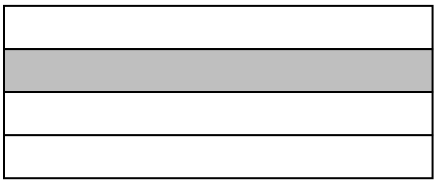
Representação Decimal	Representação fracionária	Representação Percentual
0,15		
	$\frac{45}{100}$	
		50%
0,10		

5. João tinha 50 bolinhas de gude. Ele deu 12% do total de suas bolinhas de gude para André. Quantas bolinhas de gude André ganhou?

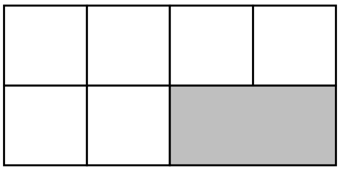
APÊNDICE K - Instrumento de Verificação de Aprendizagem 2 (IVA - 2)

1. Cada figura abaixo tem uma parte que foi pintada. Escreva o número que representa a parte pintada de cada figura.

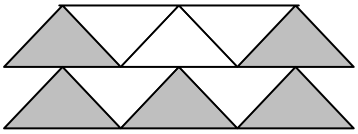
a.



b.



c.



d.

2. Escreva como se lê cada número abaixo:

a. $\frac{2}{7}$ ____

b. $\frac{3}{11}$ ____

c. $\frac{4}{9}$ ____

d. $\frac{15}{32}$ ____

e. $\frac{3}{10}$ ____

f. $\frac{8}{100}$ ____

3. Lembre-se que estudamos em aulas anteriores que um mesmo número racional pode ser representado de diversas formas. Abaixo temos os números racionais representados de três maneiras diferentes: fracionária, figural e língua natural. Ligue a representação de cada número da primeira coluna à representação desse mesmo número na segunda coluna.

Primeira coluna

–

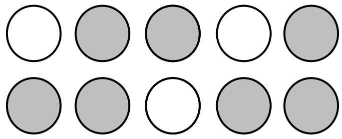
SETE DÉCIMOS

(em relação à parte pintada)

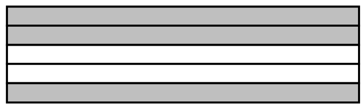
–

Segunda coluna

–



DOIS TERÇOS



(em relação à parte pintada)

4. Utilize o conceito de fração equivalente para comparar as frações dadas, indicando se a primeira é maior, menor ou igual à segunda fração. Não se esqueça de deixar seus registros.

a. – _______ –

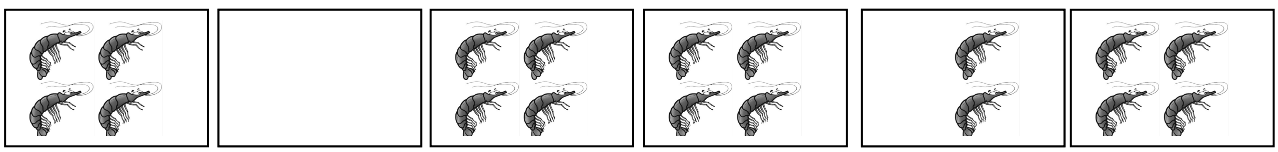
b. – _______ –

c. – _______ –

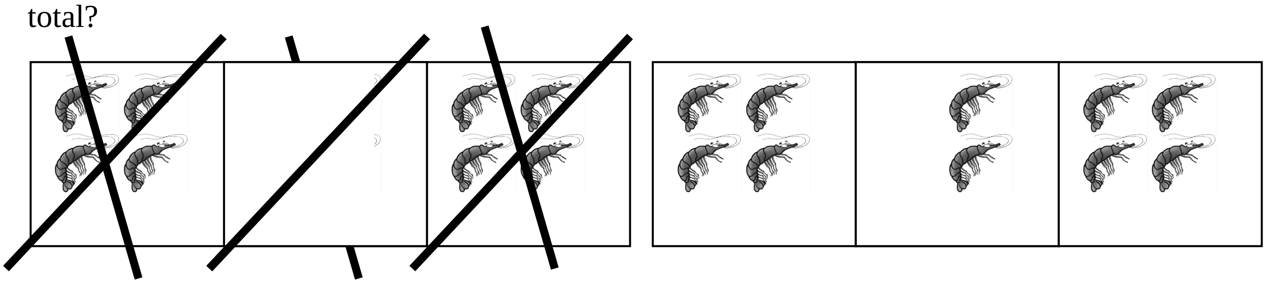
d. – _______ –

5. João e Paulo são dois pintores. Eles fizeram uma aposta para saber quem conseguia pintar a maior parte de um muro em um dia. Ao final do dia, João tinha pintado – de um muro. Paulo tinha pintado – de um outro muro de mesmo tamanho. Quem pitou mais: João ou Paulo?

6. Joana vende pacotes de camarão salgado na praia de Tabuba. Veja abaixo quantos pacotes de camarão salgado Joana levou para vender no sábado.



Na figura abaixo, temos marcado com um X os pacotes de camarão que Joana conseguiu vender. Que número representa a quantidade de camarões vendidos em relação à quantidade total?



7. Juju e Lala ganharam cada uma um pote com a mesma quantidade de jujubas. Juju comeu – das jujubas que estavam em seu pote. Por outro lado, Lala comeu – das jujubas que estavam em seu pote. Quem comeu mais jujubas, Juju ou Lala?

8. Ana tinha 27 balas. Ela deu – do total de balas para Lucas. Quantas balas Lucas ganhou?

9. Desenhe ao lado de cada fração uma figura que possa representá-la:

a. –

b. —

c. —

d. –

10. Escreva cada número representado abaixo:

a. quatro sétimos ___________________________________

b. dois quintos______________________________________

c. doze trinta e sete avos______________________________

d. nove centésimos__________________________________

e. oito décimos_____________________________________

11. Maria tinha 27 figurinhas. Ela deu $\frac{1}{3}$ das figurinhas para Ana e deu $\frac{1}{5}$ das figurinhas para Paula. Quem ganhou mais figurinhas, Ana ou Paula?

12. João quer vender $\frac{2}{5}$ do total de caranguejos que possui. Sabendo que ele tem um total de 50 caranguejos, calcule quantos caranguejos João quer vender.

APÊNDICE L – Instrumento de Verificação de Aprendizagem 3 (IVA - 3)

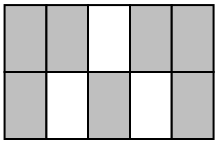
1. Mariana tem 25 moedas de 5 centavos, 10 moedas de 50 centavos e 8 moedas de 1 real. Quantos reais ela tem no total?

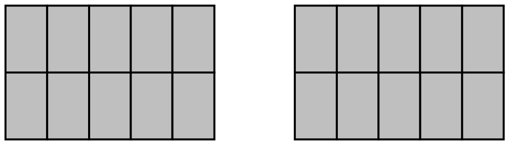
2. Vamos ligar o número da primeira coluna a sua representação na segunda coluna.

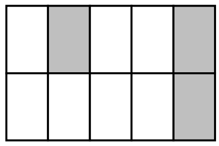
Primeira coluna | Segunda coluna

2,3

0,42







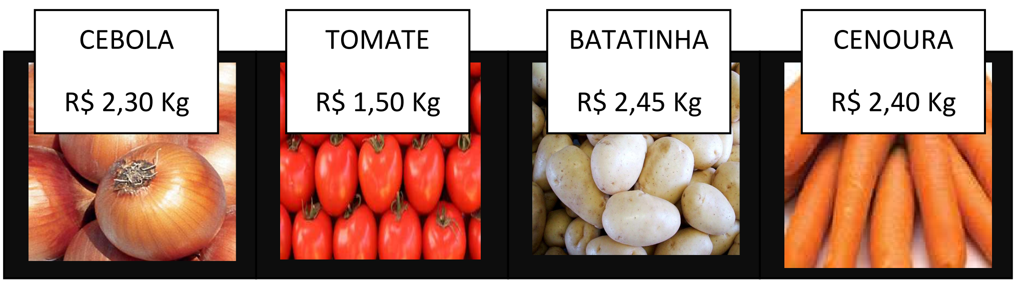
cinco inteiros e quarenta e três centésimos

quarenta e dois centésimos

$\frac{42}{100}$

$\frac{7}{10}$

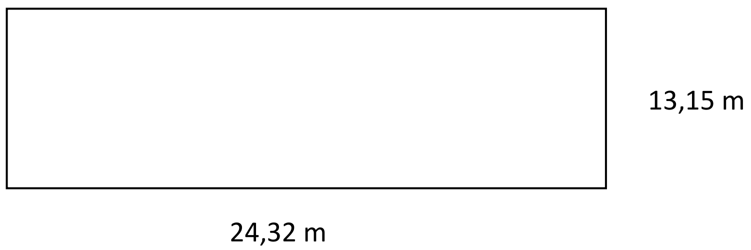
3. Cida foi à feira comprar cebola, tomate, batatinha e cenoura para fazer o almoço. Veja os preços desses produtos:



a. Quantos reais Cida irá pagar se comprar um 1 kg de cebola e 1 kg de batatinha?

b. Quantos reais Cida irá gastar se comprar 1 kg de tomate e $\frac{1}{2}$ kg de cenoura?

4. Janaína quer cercar o terreno onde ela construiu a casa onde mora. O terreno tem o formato de um retângulo e as medidas estão indicadas na figura abaixo. Calcule a quantidade de cerca que Janaína deverá comprar.



5. Utilize uma figura para representar cada número racional indicado abaixo:

a. $\frac{3}{8}$

b. 0,5

c. $\frac{7}{5}$

d. 1,4

6. Vamos calcular o valor de cada expressão abaixo:

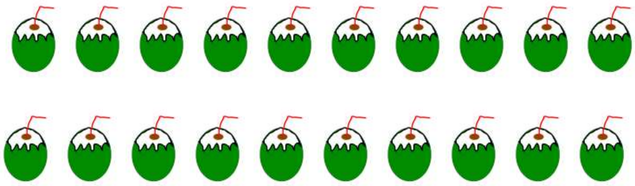
a. $\frac{1}{10}$ + 0,25

b. 4,32 + 25, 62

c. $\frac{2}{7} + \frac{3}{7}$

d. 3,54 + $\frac{254}{100}$

7. Luciano vende coco verde na praia de Sonho Verde. Veja quantos cocos ele levou no domingo.



Porém, Luciano só conseguiu vender vendeu — dos cocos que tinha levado para a praia.

a. Quantos cocos Luciano conseguiu vender?

b. Quantos cocos sobraram?

8. Escreva como se lê cada número abaixo:

a. 3,45 ____

b. 12,6 ____

c. 0, 768 ____

d. 65,32____

9. Calcule o valor numérico de cada expressão abaixo:

a) 2,34 + 56,12

b) 32,7 + 1, 365

APÊNDICE M – Instrumento de Verificação de Aprendizagem 4 (IVA - 4)

1) Escreva como se lê cada número racional abaixo:

a) $\frac{3}{7}$

b) 2,3

c) $\frac{12}{35}$

d) 0,16

e) $\frac{3}{100}$

f) 93, 124

2) Escreva numericamente cada número abaixo:

a) quatro nonos

b) seis inteiros e dois décimos

c) vinte e dois trinta e quatro avos

d) dois inteiros, três décimos, sete centésimos e um milésimo

3) Represente por meio de uma figura cada número abaixo:

a) $\frac{4}{7}$

b) 0,6

c) $\frac{9}{10}$

d) 0,3

4) Marta é professora de Matemática e vai levar uma parte dos seus alunos para um passeio. A turma da professora Marta tem 45 alunos. A professora só vai poder levar $\frac{2}{3}$ dos alunos para o passeio. Quantos alunos a professora levará?

5) Juliana foi à feira com R$ 35. Ela comprou carne e frutas e gastou $\frac{3}{5}$ do dinheiro que tinha. Quantos reais Juliana gastou com as compras?

6) Ana e Maria ganharam, cada uma, uma barra de chocolate. As barras de chocolate eram iguais. Ana comeu $\frac{2}{3}$ de sua barra e Maria comeu $\frac{3}{5}$ de sua barra. Quem comeu mais chocolate, Ana ou Maria?

7) Túlio ganhou R$ 24, 30 de sua mãe e R$ 13, 65 de seu pai. Quantos reais Túlio ganhou no total?

8) Renan recebeu seu salário no valor de R$ 763,15. Ele pagou R$ 251, 20 do aluguel de sua casa. Com quantos reais Renan ficou logo depois do pagamento do aluguel?

9) Calcule o valor de cada expressão abaixo:

a) $\frac{2}{3} + \frac{4}{5}$

b) $1{,}23 + \frac{45}{100}$

10) Nadir foi a uma loja comprar uma calça que custava R$ 62. Como a loja estava com uma promoção, ele teve 32% de desconto. Calcule quanto Nadir pagou pela calça após o desconto.

11) Marta tinha que receber um valor de R$ 324 pela venda de sua geladeira usada. No dia do pagamento, a pessoa que comprou a geladeira só pode pagar 72% do valor que devia. Calcule quantos reais Marta recebeu.

12) Se você for fazer uma compra no valor de R$ 125 e o vendedor disser que você vai ganhar um desconto de 15%, quanto você vai pagar na compra?