Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Dissertação de Mestrado

Formalismo termodinâmico do conjunto irregular para médias de Birkhoff e expoentes de Lyapunov

GIOVANE FERREIRA SILVA

Maceió, Brasil
Março de 2011

GIOVANE FERREIRA SILVA

Formalismo termodinâmico do conjunto irregular para médias de Birkhoff e expoentes de Lyapunov

Dissertação de Mestrado na área de concentração em Sistemas Dinâmicos submetida em 22 de Março de 2011 à banca examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Krerley Irraciel Martins Oliveira.

Maceió
2011

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

S586f Silva, Giovane Ferreira.
Formalismo termodinâmico do conjunto irregular para médias de Birkhoff e expoentes de Lyapunov / Giovane Ferreira Silva. – 2011.
71f.

Orientador: Krerley Irraciel Martins Oliveira.
Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2011.

Bibliografia: f. 70-71.

1. Topologia. 2. Pressão topológica. 3. Sistemas dinâmicos – Propriedade da especificação. 4. Conjunto irregular. 5. Médias de Birkhoff. 6. Expoente de Lyapunov. Título.

CDU: 515.1:517.987

Formalismo termodinâmico do conjunto irregular para médias de Birkhoff e expoentes de Lyapunov

GIOVANE FERREIRA SILVA

Dissertação de Mestrado na área de concentração em Sistemas Dinâmicos submetida em 22 de Março de2011 à banca examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

Orientador: Prof. Dr. Krerley Irraciel Martins Oliveira (UFAL)

Co-Orientador: Prof. Dr. Nivaldo Costa Muniz (UFMA)

Prof. Dr. Marcus Augusto Bronzi (UFAL)

À Regina, Giovane Jr e Giovana.

Agradecimentos

Em primeiro ao meus Deus, pela oportunidade de vivenciar tudo isso, pela chance de cumprir mais uma etapa de minha vida, pela capacidade e sabedoria que tem me dado, e por nunca ter me abandonado, mesmos nos momentos mais difíceis que eu tenho passado. Deus tem sido meu fiel companheiro nos meus dias difíceis de solidão em Maceió.

Agradeço aos meus pais Brígida e Flávio, pelo apoio moral e incentivo, e por toda assistência dada à minha esposa e meus filhos durante minha ausência.

À minha esposa, fiel companheira, que tem passado, em meio às tempestades, sempre ao meu lado. E é a pessoa que me deu o que eu tenho de mais precioso; minhas duas jóias: Giovaninho(Gregui) e Giovaninha(Grogui), que apesar de pequenos, já experimentaram a dor da separação, mesmo que temporária.

Aos meus irmão: flavinha, bris e juninho pelo apoio incondicional. Às várias conversas científicas que tive com meu irmão, que apesar de físico da área física da matéria condensada, foram frutíferas.

Aos meu irmãos da área 64 da igreja Assembléia de Deus em São Luís e aos meu pastor.

Ao Nivaldo, pelo incentivo inicial de vim fazer o mestrado aqui em Alagoas, a qual sou muito grato. Por ter me recomendado e por ter lutado pelo desenvolvimento do curso de matemática da UFMA. Sou muito grato, pois sem a sua confiança depositada em mim, eu não estaria aqui. Também agradeço ao Maxwell por também ter me recomendado. E a todos o professores do DEMAT-UFMA

Ao Marcos Pretúcio, pela auxílio em minha chegada à Maceió.

Ao professor Adán, por ter me recomendado ao doutorado no ICMC-USP e na UFAL-UFBA.

Aos professores Enoque, Echais, Feliciano e Ediel peloas disciplinas ministradas.

Aos meus amigos da pensão de dona Rosa.

Ao Krerley, pelas conversas em todas as áreas, tanto científica como pessoal. Foi a primeira pessoa que me ajudou aqui em Maceió, sempre foi uma pessoa prestativa em ajudar a mim e a minha família. Sou grato pela confiança depositada em mim. Trabalha muito em prol da Universidade, pois apesar de o "mundo ter desabado em sua cabeça", assim se expressou o professor Amaury devido aos seus problemas familiares, sempre esteve ali forte no CPMAT.

Aos amigos que fiz aqui no IM, destacando eles: Arapiraca, Marcio, Diogo, Douglas, Adina, Adalgisa, os "tartarugas ninjas"(topogigio(Marcio Cavalcante), vozinha, Zezé, Ivan, Lucyan), Michel, Carla, Adriano, Davi, Abraão, Diogo, Diego, Kennerson(Zeca), Wágner, Rafael(meu irmão de orientação), dona Maria(obigado pelos cafés).

Ao grupo de Sistemas dinâmicos: Marcus Bronzi(também agradeço pela revisão do texto), Fernando, Luís, Valter, Jeróme, Xueting e os que já foram citados acima.
Agradeço à Fapeal e ao Cnpq pelo suporte financeiro.
À todos o meu muito obrigado.

Resumo

Neste trabalho, estudamos o conjunto $\hat{X}(\varphi, f)$ de pontos tal que as médias de Birkhoff não existe. Seguindo Thompson, nosso resultado principal aqui é mostrar que a pressão topológica de $\hat{X}(\varphi, f)$ é total. Como corolário, damos o mesmo resultado para o conjunto Irregular de Oseledets para os expoente de Lyapunov em dimensão um. Para dimensões maiores, esta questão está em aberto.

Palavras-chave: Pressão Topológica; Propriedade da Especificação; Conjunto Irregular; Médias de Birkhoff; Expoente de Lyapunov.

Abstract

In this work, we study the set $\hat{X}(\varphi, f)$ of points such that the Birkhoff averages do not exist. Following Thompson, our main result here is to show that the topological pressure of $\hat{X}(\varphi, f)$ is total. As corollary, we get the some result for the Oseledets Irregular set for Lyapunov exponent in one dimension. For higher dimensions, this question is still open.

Keywords: Topological Pressure; Specification Property; Irregular Set; Birkhoff Average; Lyapunov Exponent.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Os resultados desta dissertação são baseados no artigo *The irregular set for maps with the specification property has full topological pressure*, publicado em 2009, de Daniel Thompson. Ele é tratado dentro da teoria do formalismo termodinâmico, ou seja, teoria em sistema dinâmicos que introduziu vários conceitos da termodinâmica(física), tais como entropia, pressão e etc.

Estuda-se o conjunto irregular das médias Birkhoff, ou seja

$$\hat{X}(\varphi, f) = \left\{ x \in X : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f^i(x)) \text{ não existe} \right\}.$$

Como consequência do teorema ergódico de Birkhoff, o conjunto irregular não é detectável a partir do ponto de vista de uma medida invariante. No entanto, um fenômeno cada vez mais notório é que o conjunto irregular pode ser grande a partir do ponto de vista da teoria da dimensão [bar]. Métodos de dinâmica simbólica confirmaram isso também no caso uniformemente hiperbólico [BS], e alguns exemplos nos casos não-uniformemente hiperbólicos [PW] e para uma grande classe de aplicações multimodais [Tod]. O conjunto irregular também tem sido o foco de um grande volume de trabalho por Olsen e colaboradores [BOS].

Em [Tak], Takens conjecturou que o conjunto irregular de sistemas dinâmicos suaves possuíam medida de Lebesgue positiva. Seguimos um ponto de vista topológico e provamos que o conjunto irregular é tão grande quanto se queira com relação a pressão topológica.

A dissertação, em sua essência, centra-se na classe de aplicações que possuem a propriedade de especificação. A propriedade de especificação foi introduzido por Bowen [Bow2]. Ele mostrou que os sistemas uniformemente hiperbólicos satisfazem a propriedade de especificação (em nosso trabalho utilizaremos um versão mais fraca) e deu resultados importantes sobre a abundância de órbitas periódicas em um conjunto hiperbólico.

Resultado principal. *Quando f é expansora então $\hat{X}(\varphi, f)$ possui entropia topológica total ou é vazio*

Na verdade nós provamos um resultado mais geral, em que vale para pressão topológica, sob a hipótese mais geral de f ser contínua, satisfazendo a especificação.

Este resultado, é indicado formalmente como teorema 5.2. O primeiro a perceber o fenômeno de que o conjunto irregular carrega entropia total foram Pesin e Pitskel [PP2] no caso dos shifts de Bernoulli, em 2-símbolos. Barreira e Schmeling [BS5] estudaram o conjunto irregular de uma variedade de sistemas uniformemente hiperbólicos utilizando dinâmica simbólica. Eles mostraram que, por exemplo, o conjunto irregular de uma função genérica Hölder-contínua em um repulsor conforme possui entropia total (e dimensão de Hausdorff). Os argumentos utilizados por eles podem ser encontrada no livro de Barreira [bar] em que o resultado também foi provado para subshifts que possuem a propriedade da especificação. Notemos que esses argumentos não se estendem para uma classe mais geral de aplicações com a propriedade da especificação. Além disso, consideramos aqui conjuntos irregulares para funções contínuas, enquanto Barreira considera apenas funções φ para os quais $t\varphi$ possui um único estado de equilíbrio, para cada $t \in \mathbb{R}$.

Takens e Verbitskiy tem obtido resultados em análise multifractal para a classe de aplicações com especificação, utilizando a entropia topológica como a dimensão característica [TV2], [TV1]. No entanto, eles não consideram o conjunto irregular. Ercai, Kupper e Lin [EKL] provaram que o conjunto irregular é vazio ou carrega a entropia total para as aplicações com a propriedade da especificção. O resultado aqui obtido inclui o resultados de [EKL] como um caso particular. Os métodos aqui utilizados são totalmente inspirados por aqueles usados por Takens e Verbitskiy [TV2].

No capítulo 2 damos algumas definições e resultados que serão usados no decorrer da dissertação. Enfatizando, no capítulo referente, a definição de transformação expansora.

No capítulo 3 damos a definição de conjuntos regular e irregular de Oseledets para os expoentes de Lyapunov e uma demonstração do teorema de Oseledets baseada numa reformulação de Viana[3] da demonstração dada por Mañe[Man].

No capítulo 4 introduzimos as técnicas que serão usadas para demonstrar o nosso resultado.

Em 5.1, enunciaremos o principal resultado da dissertação e as ideias-chave para a sua demonstração. Em 5.2, provaremos o teorema.

Em 6 fazemos um adaptação dos resultados obtidos no capítulo 5 para o conjunto irregular dos expoente de Lyapunov no caso unidimensional.

Capítulo 2

Preliminares

Daremos neste capítulo, algumas definições e notações que usaremos no decorrer desta dissertação. Algumas serão bem enfatizadas para um melhor esclarecimento.

2.1 Notações e algumas definições iniciais

Nesta dissertação consideraremos três tipos de sistemas dinâmicos.

1. (Dinâmica mensurável) $f : X \to X$ é uma transformação que preserva uma medida em um espaço $(X, \mathcal{B}, \mu)$ onde X um conjunto, $\mathcal{B}$ é uma σ-álgebra e μ uma medida.

2. (Dinâmica topológica) $f : X \to X$ é uma transformação contínua em um espaço métrico compacto (X, d).

3. (Dinâmica diferenciável) $f : M \to M$ é um difeomorfismo C^k, $k \geq 1$, em uma variedade suave M.

Seja (X, d) um espaço métrico compacto e $f : X \to X$ uma aplicação contínua. O espaço das funções contínuas de X em $\mathbb{R}$ será denotado por $C(X)$. Seja $\varphi \in C(X)$. Denotamos

$$S_n\varphi(x) := \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f^i(x)),$$

e para $c > 0$, seja

$$Var(\varphi, c) := \sup\{|\varphi(x) - \varphi(x)| : d(x, y) < c\}.$$

$M_f(X)$ denotará o espaço das medidas de probabilidade f-invariantes e $M_f^e(X) \subset M_f(x)$ denotará o subconjunto das medidas ergódicas. Se $X' \subseteq X$ é um subconjunto f-invariante, então $M_f(X')$ denotará o subconjunto de $M_f(X)$ cujas medidas satisfazem $\mu(X') = 1$.

Definição 2.1. *Definimos uma medida de probabilidade $\delta_{x,n}$ (geralmente chamada de medida empírica) como*

$$\delta_{x,n} := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{f^k(x)},$$

onde δ_x a medida de Dirac em x.

Definição 2.2. *Um ponto $x \in X$ é dito um **ponto genérico** para μ, se $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n\varphi(x) = \int \varphi d\mu$ para toda $\varphi \in C(X)$.*

Definição 2.3 (Bola dinâmica)**.** *Dado $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ e um ponto $x \in X$, definimos a (n, ε)-**bola dinâmica** aberta em x por*

$$B_n(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(f^i(x), f^i(y)) < \varepsilon \ \textit{ para todo } \ i = 0, ...n - 1\}.$$

Alternativamente, podemos definir em X uma nova métrica

$$d_n(x, y) = \max\{d(f^i(x), f^i(y)) : i = 0, ..., n - 1\}.$$

A verificação de que d_n define uma métrica não é difícil, e que $B_n(x, \varepsilon)$ é a bola aberta de centro x e raio ε na métrica d_n e que se $n \leq m$, temos $d_n(x, y) \leq d_m(x, y)$ e $B_m(x, \varepsilon) \subset B_n(x, \varepsilon)$.

Definição 2.4. *Uma aplicação $f : X \to X$ contínua é **topologicamente mixing**, se para todo par de abertos U, V de X, existe um natural $N > 0$ tal que*

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset$$

para todo $n \geq N$

Definição 2.5. *Uma aplicação $f : X \to X$ contínua é **transitiva** se existe algum $x \in X$ tal que $\mathcal{O}_f(x) = \{f^n(x) : n \geq 0\}$ é denso em X, ou de forma equivalente, para todo par de abertos U, V em X, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Note que uma aplicação topologicamente mixing é topologicamente transitivo.

Definição 2.6. *Uma aplicação $f : X \to X$ contínua é **fortemente transitiva** em um conjunto $X' \subset X$, se para cada aberto $U \subset X$ tal que $U \cap X' \neq \emptyset$, existir um n natural tal que $X \subset \bigcup_{k=0}^{n} f^k(U)$*

Definição 2.7 (de Bowen)**.** *Dizemos que $f : X \to X$ satisfaz a propriedade da especificação se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um inteiro $m = m(\varepsilon)$ tal que, para toda coleção $\{I_j = [a_j, b_j] \subset \mathbb{N} : j = 1, ..., k\}$ de intervalos finitos com $a_{j+1} - b_j \geq m(\varepsilon)$ com $j = 1, ..., k-1$, todo $x_1, ..., x_k$ em X e todo $p \geq b_k - a_1 + m(\varepsilon)$, existe um ponto periódico $x \in X$ de período p satisfazendo*

$$d(f^{i+a_j}(x), f^i(x_j)) < \varepsilon \ \textit{ para todo } \ i = 0, ..., b_j - a_j \ \textit{ e cada } \ j = 1, ..., k \tag{2.1}$$

A propriedade da especificação de Bowen nos diz, por exemplo para $k = 2$, que sempre há dois "pedaços"de órbitas $\{f^n(x_1) : 0 \leq n \leq b_1 - a_1\}$ e $\{f^l(x_2) 0 \leq l \leq b_2 - a_1\}$ que podem ser aproximadas com uma precisão ε por uma órbita periódica, a órbita de x, desde que o tempo (a saber $a_2 - b_1$) para "pular" do primeiro pedaço para o segundo pedaço e o tempo (a saber $p - b_2 + a_1$) para "pular" de volta são maiores do que $m(\varepsilon)$, sendo $m(\varepsilon)$ independente dos "pedaços" de órbitas e, em particular, independente de seus comprimentos. No caso geral, a propriedade da especificação requer que tal aproximação seja possível para qualquer número k de pedaços de órbitas, sendo $m(\varepsilon)$ independente de k.

Aqui, em nosso trabalho, daremos uma versão mais fraca da propriedade da especificação do que a de Bowen.

Definição 2.8. *Uma aplicação contínua $f : X \to X$ satisfaz a propriedade da especificação se para todo $\varepsilon > 0$, existe um inteiro $m = m(\varepsilon)$ tal que para toda coleção $\{I_j = [a_j, b_j] \subset \mathbb{N} : j = 1, ..., k\}$ de intervalos finitos com $a_{j+1} - b_j \geq m(\varepsilon)$, para $j = 1, ..., k-1$, e todo $x_1, ..., x_k$ em X, existe um ponto $x \in X$ que satisfaz 2.1*

Esta propriedade não depende da métrica escolhida, isso segue facilmente da proposição abaixo.

Proposição 2.1. *Sejam (f, X, d) e (g, Y, d') sistemas dinâmicos. Seja $\phi : X \to Y$ uma função contínua sobrejetiva satisfazendo $\phi \circ f = g \circ \phi$. Se (X, d, f) possui a propriedade da especificação, então (Y, d', g) também possui.*

Demonstração. Por hipótese, (f, X, d) possui a propriedade da especificação, então para todo $\varepsilon > 0$, existe $m(\varepsilon) = m$ tal que para toda coleção $\{I_j = [a_j, b_j] \subset \mathbb{N} : j = 1, ..., k\}$, com $a_{j+1} + b_j \geq m$, e todo $x_1, ..., x_k \in X$, existe um $x \in X$ tal que

$$d(f^{i+a_j}(x), f^i(x_j)) < \varepsilon, \text{ com } i = 0, ..., b_j - a_j \text{ e } j = 1, ..., k$$

A função $d'(\phi(\cdot), \phi(\cdot)) : X \times X \to \mathbb{R}$, que a cada (x, x') associa $d'(\phi(x), \phi(x'))$, é contínua e como $X \times X$ é compacto, ela é uniformemente contínua.
Escolhamos $y, y_1, ..., y_k \in Y$ e pomos $\phi(x_j) = y_j$, $j = 1, ..., k$ e $\phi(x) = y$.
Então, pela continuidade uniforme de ϕ, existe $\delta > 0$, tal que

$$d(f^{i+a_j}(x), f^i(x_j)) < \delta \Rightarrow d'(\phi(f^{i+a_j}(x)), \phi(f^i(x_j))) < \varepsilon,$$

para $i = 0, ..., b_j - a_j$, $j = 1, ..., k$ e como $\phi \circ f = g \circ \phi$, segue que

$$d'(g^{i+a_j}(y), g^i(y_j)) < \varepsilon, \text{ para } i = 0, ..., b_j - a_j, \ j = 1, ..., k$$

com um "pulo"$m' = m'(m(\varepsilon))$.
Portanto, (g, Y, d') também possui a propriedade da especificação. □

2.2 Medidas invariantes para aplicações contínuas

Seja $f : X \to X$ uma aplicação contínua em um espaço métrico compacto X. Notemos que $f^{-1}(B(X)) \subset B(X)$, isto é, f é mensurável, onde $B(X)$ é a σ-álgebra de Borel de subconjuntos de X, pois $\{E \in B(X) : f^{-1}(E) \subset B(X)\}$ é uma σ-álgebra e contém os conjunto abertos. Portanto, temos uma aplicação $\tilde{f} : M(X) \to M(X)$ dada por $(\tilde{f}\mu)(B) = \mu(f^{-1}B)$. Usaremos, por vezes, $\mu \circ f^{-1}$ ao invés de $\tilde{f}\mu$. Precisaremos do seguinte lema.

Lema 2.1. *Para toda função contínua h, temos*

$$\int h d(\tilde{f}\mu) = \int h \circ f d\mu.$$

Demonstração. Pela definição de $\tilde{f}$, temos $\int \chi_B d(\tilde{f}\mu) = \int \chi_B \circ f d\mu$, $\forall B \in B(X)$. Logo, $\int g d(\tilde{f}\mu) = \int g \circ f d\mu$ se g for uma função simples. O mesmo vale quando g for uma função mensurável não-negativa, basta escolher uma sequência crescente de funções simples convergindo pontualmente para g. Portanto, a fórmula vale para toda função $f : X \to \mathbb{R}$, basta considerar a parte negativa e positiva de f. $\square$

Note que $M_f(X) = \{\mu \in M(X) : \tilde{f}\mu = \mu\}$.
O seguinte teorema nos fornece um método para construir elementos de $M_f(X)$.

Teorema 2.1. *Seja $f : X \to X$ uma aplicação contínua. Se $(\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência em $M(X)$, formamos uma nova sequencia $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ definindo $\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \tilde{f}^i \sigma_n$, então todo limite pontual μ de (μ_n) é um elemento de $M_f(X)$. (Tal limite existe devido a compacidade de $M(X)$).*

Demonstração. Seja $\mu_{n_j} \to \mu$ em $M(X)$. Seja $\varphi \in C(X)$. Então

$$\begin{aligned}
\left|\int \varphi \circ f d\mu - \int \varphi d\mu\right| &= \lim_{j\to\infty} \left|\int \varphi \circ f d\mu_{n_j} - \int \varphi d\mu_{n_j}\right| \\
&= \lim_{j\to\infty} \left|\frac{1}{n_j}\int \sum_{i=0}^{n_j-1}(\varphi \circ f^{i+1} - \varphi \circ f^i) d\sigma_{n_j}\right| \\
&= \lim_{j\to\infty} \left|\frac{1}{n_j}\int (\varphi \circ f^{n_j} - \varphi) d\sigma_{n_j}\right| \\
&\leq \lim_{j\to\infty} \frac{2\|\varphi\|}{n_j} = 0
\end{aligned}$$

Portanto, $\mu \in M_f(X)$. $\square$

2.3 Teorema ergódico de Birkhoff

Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de probabilidade, onde X é um conjunto qualquer, $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de conjunto de X e μ uma medida de probabilidade.

Teorema 2.2 (Teorema ergódico de Birkhoff)**.** *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de probabilidade. Se T(mensurável) é μ-invariante e f é integrável, então o limite*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(x)) = f^*(x)$$

existe para alguma $f^* \in L^1(X, \mu)$ com $f^*(T(x)) = f^*(x)$ para μ-q.t.p. x, onde $L^1(X, \mu) = \{f : \|f\|_1 < \infty\}$, ou seja, é o conjunto de funções mensuráveis em (X, μ) tal que

$$\|f\|_1 = (\int_X |f|\, d\mu) < \infty.$$

Além disso, se T é ergódica, ou seja, todo conjunto $T-$invariante possui medida 0 *ou* 1, *então f^* é constante e*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(x)) = \int_X f d\mu$$

para μ-q.t.p. x,

2.4 O espectro multifractal das médias de Birkhoff

Para $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos

$$X(\varphi, \alpha) = \left\{ x \in X : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f^i(x)) = \alpha \right\}.$$

Definimos o espectro multifractal para φ como sendo

$$\mathcal{L}_\varphi := \{\alpha \in \mathbb{R} : X(\varphi, \alpha) \neq \emptyset\}.$$

Alguns autores usam a terminologia "espectro multifractal" para o par $(\mathcal{L}_\varphi, \mathcal{F})$, onde $\mathcal{F}$ é a característica dimensional. A terminologia aqui usada está de acordo com a que Takens e Verbitskiy[TV2] usam.

Lema 2.2. *Se f possui a propriedade da especificação, então $\mathcal{L}_\varphi$ é um intervalo limitado. Além disso, $\mathcal{L}_\varphi = \left\{ \int \varphi d\mu : \mu \in M_f(X) \right\}$.*

Demonstração. Primeiro mostraremos que $\mathcal{L}_\varphi = \mathcal{I}_\varphi$, onde $\mathcal{I}_\varphi = \{\int \varphi d\mu : \mu \in M_f(X)\}$. Pela proposição 21.14 de [DGS], quando f possui a propriedade da especificação de Bowen, cada medida f-invariante, não necessariamente ergódica, possui um ponto genérico, isto é, um ponto x que satisfaz $\frac{1}{n} S_n\varphi(x) \to \int \varphi d\mu$ para toda função contínua φ. Não é difícil verificar que isto contínua válido para a nossa definição de propriedade da especificação (basta fazer algumas adaptações para a nossa definição na demonstrações da proposição 21.14 de [DGS]). Então dado $\mu \in M_f(X)$, escolhamos um ponto genérico x para μ e é claro que ele pertence à $X(\varphi, \int \varphi d\mu)$ e assim $\mathcal{I}_\varphi \subseteq \mathcal{L}_\varphi$. Agora tomemos $\alpha \in \mathcal{L}_\varphi$ e algum $x \in X(\varphi, \alpha)$. Seja μ um limite fraco* da sequência $\delta_{x,n}$. Pelo teorema 2.1, μ é invariante, e é fácil verificar que $\int \varphi d\mu = \alpha$. Então $\mathcal{I}_\varphi = \mathcal{L}_\varphi$.

É fácil ver que $\mathcal{I}_\varphi \subseteq [\inf_{x\in X} \varphi(x), \sup_{x\in X} \varphi(x)]$ não é vazio. Para mostrar que $\mathcal{I}_\varphi$ um intervalo, usaremos a convexidade de $M_f(X)$. Assumimos que $\mathcal{I}_\varphi$ não é um único ponto. Sejam $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{I}_\varphi$. Seja $\beta \in (\alpha_1, \alpha_2)$. Seja μ_i satisfazendo $\int \varphi d\mu_i = \alpha_i$ para $i = 1, 2$. Seja $t \in (0, 1)$ satisfazendo $\beta = t\alpha_1 + (1-t)\alpha_2$. É claro que $m := t\mu_1 + (1-t)\mu_2$ satisfaz $\int \varphi dm = \beta$, pois a aplicação $\mu \to \int \varphi d\mu$ é contínua e afim com respeito a topologia fraca*. Logo, encerramos a nossa demonstração. $\square$

Relembremos que $\hat{X}(\varphi, f)$ é o conjunto irregular para φ definido como segue

$$\hat{X}(\varphi, f) = \{x \in X : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f^i(x)) \text{ não existe } \}$$

Pelo teorema ergódico de Birkhoff, $\mu(\hat{X}(\varphi, f)) = 0$ para todo $\mu \in M_f(X)$. O lema abaixo nos dá condições equivalentes para que $\hat{X}(\varphi, f) \neq \emptyset$.

Lema 2.3. *Quando f possui especificação e para $\varphi \in C(X)$, são equivalentes:*

1. $\hat{X}(\varphi, f) \neq \emptyset$;
2. $\inf_{\mu \in M_f(X)} \int \varphi d\mu < \sup_{\mu \in M_f(X)} \int \varphi d\mu$

$1 \Rightarrow 2$. Pelo lema 2.2, quando f possui especificação, temos $\mathcal{L}_\varphi = \left\{ \int \varphi d\mu : \mu \in M_f(X) \right\}$ que é um intervalo limitado e não-vazio. Logo, $\inf_{\mu \in M_f(X)} \int \varphi d\mu \leq \sup_{\mu \in M_f(X)} \int \varphi d\mu$. Vamos provar que é impossível termos a igualdade; na verdade a igualdade implica que $\mathcal{L}_\varphi = \left\{ \int \varphi d\mu \right\}$. Por hipótese, $\hat{X}(\varphi, f)$ não é vazio, então tomando $x \in \hat{X}(\varphi, f)$ temos que, dado $\varepsilon > 0$ existe N natural, tal que para $n > N$ temos:

$$\left| \frac{1}{n} S_n \varphi(x) - \alpha \right| > \varepsilon$$

onde, $\alpha := \int \varphi d\mu$, e $\mu \in M_f(X)$. Consideremos a sequência

$$\nu_n = \delta_{x,n} := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{f^k(x)},$$

e seja ν o limite da sequência $(\nu_n)_n$ na topologia fraca*, então $\nu \in M_f(X)$. Afirmamos que $\int \varphi d\delta_{x,n} \neq \alpha = \int \varphi d\mu$. De fato, suponha o contrário, ou seja,

$$\int \varphi d\delta_{x,n} = \alpha = \int \varphi d\mu$$

Na topologia fraca*

$$\nu_k \to \nu \Leftrightarrow \int \psi d\nu_k \to \int \psi d\nu, \quad \forall \psi \in C(X).$$

o que verifica, em particular, para a φ considerada, ou seja

$$\int \varphi d\nu_k \to \int \varphi d\nu = \int \varphi d\mu$$

Analisaremos dois casos:

1º caso: φ é uma função simples.

Suponha φ da forma $\varphi = \sum_{i=1}^{l} a_i 1_{E_i}$, onde $\bigcup_{1 \leq i \leq l} E_i = X$, com $E_i \cap E_j = \emptyset$, $i \neq j$. Temos

$$\begin{aligned}
\int \varphi d\delta_{x,n} &= \sum_{i=1}^{l} a_i \delta_{x,n}(E_i) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{l} a_i \delta_{f^k(x)}(E_i) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_1 \delta_{f^k(x)}(E_1) + ... + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_l \delta_{f^k(x)}(E_l) \\
&= \frac{1}{n} a_1 (\delta_x(E_1) + ... + \delta_{f^{n-1}(x)}(E_1)) + ... + \frac{1}{n} a_l (\delta_x(E_l) + ... + \delta_{f^{n-1}(x)}(E_l)) \\
&= \frac{1}{n} (k_1 a_1 + ... + k_l a_l).
\end{aligned}$$

onde, $0 \leq k_i \leq l$, i=1,...,l.
Por outro lado,

$$\begin{aligned} S_n\varphi(x) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(f^k(x)) = \frac{1}{n}\{\varphi(x)+\varphi(f(x))+...+\varphi(f^{n-1}(x))\} \\ &= \frac{1}{n}(k_1a_1+...+k_la_l) \end{aligned}$$

Logo, $\int \varphi d\nu_n = \frac{1}{n}S_n\varphi(x)$.

Portanto,

$$\left|\int \varphi d\nu_n - \int \varphi d\nu\right| = \left|\frac{1}{n}S\varphi(x) - \alpha\right| > \varepsilon, \quad \forall n > N$$

o que é uma contradição. Portanto, $\int \varphi d\nu_n \neq \int \varphi d\mu$ quando φ é simples.

2º caso: φ não é uma função simples.

Dada $\varphi : X \to \mathbb{R}$ contínua. Então,

$$\varphi = \varphi^+ - \varphi^-,$$

onde $\varphi^+(x) = \max\{\varphi(x), 0\}$ e $\varphi^-(x) = \max\{-\varphi(x), 0\}$. Sabemos que $\varphi^+ \geq 0$ e $\varphi^- \geq 0$. Logo, existe uma sequência crescente de funções simples $(\alpha_k)_k$ e $(\beta_k)_k$ tal que

$$\alpha_k \nearrow \varphi^+ \ \text{ e } \ \beta_k \nearrow \varphi^-.$$

Então, podemos definir $\int \varphi^+ d\rho = \lim_{k\to+\infty}\int \alpha_k d\rho$ e $\int \varphi^- d\rho = \lim_{k\to+\infty}\int \beta_k d\rho$. Portanto, definimos $\int \varphi d\rho = \int \varphi^+ d\rho - \int \varphi^- d\rho$, ou seja,

$$\int \varphi d\rho = \lim_{k\to\infty}\int \alpha_k d\rho - \lim_{k\to\infty}\int \beta_k d\rho$$

Para um certo $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} \left|\int \alpha_k d\nu_n - \int \alpha_k d\nu\right| &= \left|\frac{1}{n}S_n\alpha_k(x) - \int \alpha_k d\mu\right| \\ &= \left|\frac{1}{n}S_n\alpha_k(x) - a_k\right| > 2\varepsilon, \quad \forall n > N_1. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \left|\int \beta_k d\nu_n - \int \beta_k d\nu\right| &= \left|\frac{1}{n}S_n\beta_k(x) - \int \beta_k d\mu\right| \\ &= \left|\frac{1}{n}S_n\beta_k(x) - b_k\right| > \varepsilon, \quad \forall n > N_2. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \left|\int \varphi d\nu_n - \int \varphi d\nu\right| &= \left|\int \varphi^+ d\nu_n - \int \varphi^- d\nu_n - (\int \varphi^+ d\nu - \int \varphi^- d\nu)\right| \\ &= \left|\lim_{k\to\infty}\int \alpha_k d\nu_n - \lim_{k\to\infty}\int \beta_k d\nu_n - (\lim_{k\to\infty}\int \alpha_k d\nu - \lim_{k\to\infty}\int \beta_k d\nu)\right| \\ &\geq \left|\lim_{k\to\infty}\int \alpha_k d\nu_n - \lim_{k\to\infty}\int \alpha_k d\nu\right| - \left|\lim_{k\to\infty}\int \beta_k d\nu_n - \lim_{k\to\infty}\int \beta_k d\nu)\right|. \end{aligned}$$

Então existe um certo $k \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\left|\int \varphi d\nu_n - \int \varphi d\nu\right| \geq \left|\int \alpha_k d\nu_n - \int \alpha_k d\nu\right| - \left|\int \beta_k d\nu_n - \int \beta_k d\nu\right| > 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon$$

para todo $n > N = \max\{N_1, N_2\}$. O que é uma contradição.

Logo, $\int \varphi d\nu \neq \alpha = \int \varphi d\mu$. E, portanto

$$\mathcal{L}_\varphi \neq \left\{\int \varphi d\mu\right\}.$$

A afirmação [$2 \Rightarrow 1$], segue como corolário do teorema 5.2.

$\square$

2.5 Transformações expansoras e especificação

Daremos primeiro uma definição de natureza topológica.

Definição 2.9. *Seja a aplicação $f : X \to X$ contínua, com X espaço métrico compacto. Dizemos que f é uma aplicação expansora se existirem $r > 0$, $\lambda > 1$ e $c > 0$ tal que:*

1. *$x \neq y$ e $f(x) = f(y) \Rightarrow d(x, y) > c$;*
2. *$\forall x \in X$ e $a \in f^{-1}x$, existe $g : B_r(x) \to X$ tal que*

$$g(x) = a \ \text{ e } \ f(g(y)) = y, \ \ \forall y \in B_r(x)$$

$$d(g(z), g(w)) \leq \lambda^{-1} d(z, w), \ \ \forall\, z, w \in B_r(x).$$

Podemos dar uma outra definição para transformação expansora, mas sob algumas hipóteses adicionais.

Definição 2.10. *Sejam M uma variedade compacta e $f : M \to M$ uma aplicação C^1. Dizemos que $f : M \to M$ é expansora se, existe $\lambda > 1$ tal que:*

$$\|D_x f v\| \geq \lambda \|v\|, \ \ \forall x \in M, \ \ \forall v \in T_x M.$$

Sob estas condições, as definições 2.10 e 2.9 são equivalentes.

Demonstração. Suponha f expansora pela definição 2.10. Afirmamos que $D_x f$ é um isomorfismo. Com efeito, sejam $v, w \in T_x M$, tal que $D_x f(v) = D_x f(w)$. Então

$$D_x f(v) = D_x f(w) \Rightarrow \|D_x f(v) - D_x f(w)\| = 0 \Rightarrow 0 \geq \lambda \|v - w\|.$$

como $\lambda > 1$, segue que $\|v - w\| = 0 \Rightarrow v = w$. Então, $D_x f$ é injetiva, e naturalmente sobrejetiva, pelo teorema do núcleo e imagem. Logo, $D_x f$ é um isomorfismo $\forall x \in M$. Pelo teorema da aplicação inversa, f é um difeomorfismo local. Logo, existe uma vizinhança V_x de x tal que, $f^{-1}|V_x$ é um difeomorfismo. Considere a cobertura $\{V_x\}_{x \in M}$. Como M é compacto, esta cobertura admite uma subcobertura finita por abertos $\{V_i\}_{1\leq i\leq m}$. Então, podemos escrever $V_x = \bigcup_{i=1}^n (V_i \cap V_x) = \bigcup_{i=1}^n V_i$, com $n \leq m$ e cada V_i aberto. Logo, $f^{-1}(V_x) = \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(V_i \cap V_x) = \bigcup_{i=1}^n W_i$, onde cada W_i é aberto, pois f^{-1} é uma aplicação aberta, e para cada W_i, $f|W_i$ é um difeomorfismo.

Cobrimos M com vizinhanças do tipo V_x e seja r_0 o número de Lebesgue desta cobertura.

Seja $r_1 > 0$, chamado raio de injetividade da aplicação exponencial, tal que se $z, w \in M$, e $d(z,w) < r_1$, então existe uma geodésica $\beta : [0,1] \to M$, com $\beta(0) = z$, $\beta(1) = w$ e $d(z,w) = l(\beta)$, onde $l(\beta)$ o comprimento de β. Seja $r = \min(r_0, r_1)$.

Então, se $g : B_{r/2}(x) \to M$ é um ramo inverso de f,

$$\begin{aligned} d(g(z), g(w)) &\leq l(g \circ \beta) = \int_0^1 \|g'(\beta(t))\beta'(t)\| dt \\ &\leq \int_0^1 \|g'(\beta(t))\| \cdot \|\beta'(t)\| dt \leq \lambda^{-1} \int_0^1 \|\beta'(t)\| dt = \lambda^{-1} l(\beta) = \lambda^{-1} d(z,w). \end{aligned}$$

Isto verifica a 2ª condição da definição 2.9. Como a 1ª condição decorre da segunda, no caso de M ser localmente conexa, temos que f satisfaz a definição 2.9.

Reciprocamente, seja $x \in M$ e $r = \min\{r_0, r_1\}$ como na definição 2.9. Tomemos $y \in g(B_{r/2}(f(x)))$ suficientemente próximo de x, onde g é tal que $g(f(x)) = x$, de maneira que x e y possam ser ligados por uma geodésica $\beta : [0,1] \to M$, tal que $\beta(0) = x$, $\beta(1) = y$, $\beta'(0) = v$ e $d(x,y) = l(\beta)$. Então

$$l(\beta) = d(x,y) \leq \lambda^{-1} d(f(x), f(y)) = \lambda^{-1} l(f \circ \beta) \Rightarrow \int_0^1 \|\beta'(t)\| dt \leq \lambda^{-1} \int_0^1 \|D_{\beta(t)} f \cdot \beta'(t)\| dt$$

Fazendo y tender a x pelo caminho β, obtemos

$$\|v\| \leq \lambda^{-1} \|D_x f \cdot v\|$$

ou seja as definições 2.9 e 2.10 são equivalentes, quando f é C^1 e M compacto. $\square$

Definição 2.11. *Sejam $f : X \to X$ expansora e $X' \subseteq X$. Dizemos que $g : X' \to X$ é ramo contrativo de f^{-n} se $f^n(g(x)) = x, \forall x \in X'$ e*

$$d(f^j(g(x)), f^j(g(y))) \leq \lambda^{j-n} d(x,y), \quad \forall x, y \in X', \quad 0 \leq j \leq n.$$

Proposição 2.2. *Seja $B_n(x, \varepsilon)$ a bola dinâmica. Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que, se $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, temos:*

1. *Para $n \geq 1$, seja $g : B_r(f^n(x)) \to X$ ramo contrativo de f^{-n} tal que $g(f^n(x)) = x$. Então, $B_n(x, \varepsilon) = g(B_\varepsilon(f^n(x)))$;*

2. *Se $d(f^n(z), f^n(w)) \leq \varepsilon, \ \forall n \geq 0 \Rightarrow z = w$.*

Demonstração. Suponhamos $n = 1$ e seja $\varepsilon_0 < \min\left(r, \frac{c}{1+\lambda^{-1}}\right)$, onde $r > 0$, $0 < \lambda^{-1} < 1$, $c > 0$ são dadas pela definição 2.9. Se $z \in B_1(x, \varepsilon)$ então $d(z,x) < \varepsilon$ e $d(f(z), f(x)) < \varepsilon$, e portanto

$$d(g(f(z)), g(f(x))) = d(g(f(z)), x) < \lambda^{-1} d(z,x) < \lambda^{-1} \varepsilon.$$

Pela desigualdade triangular,

$$d(z, g(f(z))) \leq d(z, x) + d(g(f(z)), x) = d(z, x) + d(g(f(z)), g(f(x))) < \varepsilon(1 + \lambda^{-1}) < c.$$

Logo, pelo item *1.* da definição 2.9, $z = g(f(z))$, ou seja, $z \in g(B_\varepsilon(f(x)))$. Portanto, $B_1(x, \varepsilon) \subseteq g(B_\varepsilon(f(x)))$. Seja agora $z \in g(B_\varepsilon f(x))$, então $\exists y \in B_\varepsilon(f(x))$ tal que $g(y) = z \Rightarrow f(g(y)) = f(z) = y$. Logo,

$$d(f(x), f(z)) < \varepsilon.$$

Por outro lado,

$$d(z, x) = d(g(y), g(f(x))) \leq \lambda^{-1} d(y, f(x)) < \lambda^{-1}\varepsilon < \varepsilon$$

Logo, $z \in B_1(x, \varepsilon)$. Da, $g(B_\varepsilon(f(x))) \subseteq B_1(x, \varepsilon)$. Isto prova *1.* para $n = 1$. Com um argumento idêntico, completamos a prova de *1.* por indução.

Se $d(f^n(z), f^n(w)) \leq \varepsilon, \ \forall n \geq 0$, pelo item 1., $d(z, w) \leq \lambda^{-n}\varepsilon, \ \forall n$. Logo, $z = w$, o que prova *2.*. □

Definição 2.12. *Dizemos que ε_0 acima é uma* ***constante de expansividade*** *de f.*

Assumiremos o teorema sem demonstração.

Teorema 2.3. *Se X conexo e $f : X \to X$ expansora, então f é topologicamente mixing.*

Seja f uma transformação contínua em um espaço compacto X com métrica d.

Definição 2.13. *Uma sequência $(x_i)_{i=a}^b$ é chamada uma $\delta-$pseudo-órbita para f se*

$$d(x_i, f(x_{i-1})) < \delta \ \text{ para } \ a \leq i \leq b \ \ (a = -\infty \ \text{ e } \ b = +\infty \ \text{ são permitidos}).$$

Um ponto $x \in X$ $\varepsilon-$sombreia a $\delta-$pseudo-órbita $(x_i)_{i=a}^b$ se, $d(f^i x, x_i) \leq \varepsilon$ para $a \leq i \leq b$. (X, f) possui a propriedade do sombreamento se, para cada $\varepsilon > 0$, existe algum $\delta > 0$ tal que cada $\delta-$pseudo-órbita é $\varepsilon-$sombreada por algum $x \in X$. Esta propriedade independe da métrica adotada.

A partir de agora, assumiremos que $f : X \to X$ é expansora, com X compacto e conexo.

Proposição 2.3. *A função acima possui a propriedade do sombreamento.*

Demonstração. Sejam $g_n : B_r(x_n) \to X$ ramos contrativos de f^{-1} com $g_n(f(x_{n-1})) = x_{n-1}$. Pomos $\lambda^{-1} = \theta$. Tomemos $\delta < \min\left(\frac{1-\theta}{\theta} \cdot \varepsilon, \frac{r}{\theta} - r\right)$. Se $z \in \overline{B_r(x_n)}$, então, pela desigualdade triangular, $d(z, f(x_{n-1})) \leq r + \delta$, e portanto

$$d(g_n z, x_{n-1}) = d(g_n z, g_n(f(x_{n-1}))) \leq \theta\, d(z, f(x_{n-1})) = \theta(r + \delta) < r.$$

Resulta da que $g_n(\overline{B_r(x_n)}) \subset B_r(x_{n-1}) \subset \overline{B_r(x_{n-1})}$, para todo $n \geq 1$.
Consideremos a sequência $(g_1 \circ \ldots \circ g_n(\overline{B_r(x_n)}))_{n \geq 1}$. Pela linha anterior temos aqui uma

sequência decrescente de compactos cujo diâmetro tende a zero. Logo, $\bigcap_{n\geq 1} g_1 \circ \ldots \circ g_n(\overline{B_r(x_n)})$ consiste de um único ponto. Seja x este ponto.
Seja l um número natural. Temos

$$\begin{aligned}
d(f^l(x), x_l) &\leq \theta\, d(f^{l+1}(x), f(x_l)) \leq \theta\, d(f^{l+1}x, x_{l+1}) + \theta\, d(f(x_l), x_{l+1}) \\
&\leq \theta\, d(f_l, x_{l+1}) + \theta^2\, d(f^{l+2}(x), f(x_{l+1})) \\
&\leq \theta\, d(f_l, x_{l+1}) + \theta^2 d(f(x_{l+1}), x_{l+2}) + \theta^2\, d(f^{l+2}(x), x_{l+2}) \\
&\leq \theta\, d(f_l, x_{l+1}) + \theta^2 d(f(x_{l+1}), x_{l+2}) + \ldots + \theta^k d(f(x_{l+k-1}), x_{l+k}) + \\
&\quad + \theta^k d(f(x_{l+k}), x_{l+k}).
\end{aligned}$$

Fazendo $k \to \infty$, temos

$$d(f^l(x), x_l) \leq \frac{\theta}{1-\theta}\delta < \varepsilon.$$

□

Proposição 2.4. *A função acima possui a propriedade da especificação.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ dado. Iremos assumir $\varepsilon < \frac{1}{2}\delta^*$, onde δ^* alguma constante de expansividade para f. Escolha $\delta = \delta(\varepsilon)$ como na definição da propriedade do sombreamento. Cobrimos X por uma família finita $\mathcal{U}$ de $\delta-$bolas. Como f é topologicamente mixing, então para dois $U_i, U_j \in \mathcal{U}$, existe um inteiro $m_{ij} > 0$ tal que $f^n(U_i) \cap U_j \neq \emptyset$ para $n > m_{ij}$. Seja $m = m(\varepsilon)$ o maior dos m_{ij}.

Seja $x_1, ..., x_k$ pontos em X e $a_1 \leq b_1 < \cdots < a_k \leq b_k$ inteiros com $a_j - b_{j-1} > m$ para $j = 2, \cdots, k$.

Seja p um inteiro tal que $p - (b_k - a_1) > m$. Consideremos $a_{k+1} = p + a_1$ e $x_{k+1} = x_1$.

Para $z \in X$, denotamos por $U(z)$ algum $U \in \mathcal{U}$, com $z \in U$. Para $j = 1, \cdots, k$ existe um $y_j \in U(f^{b_j}(x_j))$ tal que $f^{a_{j+1}-b_j}(y_j) \in U(f^{a_{j+1}}(x_{j+1}))$. Agora, consideremos a $\delta-$pseudo-órbita $(z_i)_{-\infty}^{+\infty}$ definida como segue

1. $z_i = f^i(x_j)$ para $a_j \leq i \leq b_j$;
2. $z_i = f^{i-b_j}(y_j)$ para $b_j \leq i < a_{j+1}$;
3. $z_{i+p} = z_i$ para $i \in \mathbb{Z}$.

É fácil verificar que a sequência definida acima é uma $\delta-$pseudo-órbita. Logo, existe algum $x \in X$ que $\varepsilon-$sombreia ela. Este x obviamente periódico. De fato, $f^p(x)$ também $\varepsilon-$sombreia $(z_i)_{-\infty}^{+\infty}$, então, $d(f^{p+n}(x), f^n(x)) < 2\varepsilon \leq \delta^*$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e então $x = f^p(x)$ pela expansividade. Claramente,

$$d(f^n(x), f(x_j)) \leq \varepsilon \text{ para } a_j \leq n \leq b_j, j = 1, \cdots, k.$$

□

Podemos dar uma outra demonstração, mais elegante, para a proposição 2.4. Mas, teremos que usar o seguinte lema.

Lema 2.4. *Seja $f : X \to X$ uma aplicação contínua e expansora, com X compacto e conexo. Então f é fortemente transitiva.*

Demonstração. Temos que provar para todo aberto $U \subset X$ $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $X \subset \bigcup_{k=0}^{n} f^k(U)$.

Iremos proceder por contradição. Ou seja, $\forall n \in \mathbb{N}$, existe um aberto $U \subset X$ tal que

$$X \not\subset \bigcup_{i=0}^{n} f^i(U)$$

Mas essa afirmação implica que existe $x \in X$ tal que $\underline{x \notin f^k(U)}$, para todo k natural. Pela transitividade de f em X, existe $y \in X$ tal que $\overline{\mathcal{O}_f(y)} = X$, em outras palavras, a órbita de y é densa em X. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe uma sequência $(j_k)_{k\in\mathbb{N}}$, com $f^{j_0}(y) \in f^n(U)$, para algum n natural tal que

$$d(f^{j_k}(y), x) < \varepsilon/2^k$$

Tomemos o ε acima tal que $B_\varepsilon(f^{j_0}(y)) \subset f^n(U)$. Como f é expansora, essa bola é expandida a uma taxa $\lambda > 1$ e obviamente, $B(_{\varepsilon/2^k}(f^{j_k}(y))) \subset f^{j_k}(B_\varepsilon(f^{j_0}(y)))$, para todo k. Como X é conexo, em algum momento $k > n$ teremos $x \in f^{j_k}(B_\varepsilon(f^{j_0}(y)))$, ou seja $x \in f^{j_k}(U)$, o que é uma contradição. □

Outra demonstração para a Proposição 2.4

Demonstração. Sejam $x_1, ..., x_k \in X$, $n_1, ..., n_k \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > ... > \varepsilon_k > 0$. Sejam ainda $g_j^{(i)} : B_{\varepsilon_j}(f^i(x_i)) \to X$, com $j = 1, ..., n$ e $i = 1, ..., k$, ramos contrativos para f, onde definimos $B_{\varepsilon_j}(f^j(x_i) := g_{j+1}^{(i)}(B_{\varepsilon_{j+1}}(f^{j+1}(x_i)))$, com $i = 1, ..., k$ e $j = 1, ..., n-1$ tal que cada ramo contrativo satisfaz, pela definição.

$$g_j^{(i)}(f^j(x_i)) = f^{j-1}(x_i).$$

Iremos considerar os "pedaços"de órbitas de $x_1, ..., x_k$ até os tempos $n_1, ..., n_k$, respectivamente.
Como f é fortemente transitiva, podemos tomar um $\delta_2 > 0$ e $m(\varepsilon_1) > 0$, tal que

$$B_{\delta_2}(x_2) \subset f^{l_1}(B_{\varepsilon_1}(x_1))$$

para algum $l_1 \leq m(\varepsilon_1)$ Pomos $r_1 = \varepsilon_1$ e $r_2 = m \in (\delta_2, \varepsilon_2)$ De forma análoga, $\exists \delta_3 > 0$ tal que

$$B_{\delta_3}(x_3) \subset f^{l_2}(B_{r_2}(x_2))$$

para algum $l_2 \leq m(\varepsilon_1)$. Pomos $r_3 = m \in (\delta_3, r_3)$ e assim por diante. No pedaço de órbita de x_k, teremos $\delta_k > 0$ tal que

$$B_{\delta_k}(x_k) \subset f^{l_{k-1}}(B_{r_{k-1}}(x_{k-1}))$$

para algum $l_{k-1} \leq m(\varepsilon_1)$. Consideremos $r_k = m \in (\delta_k, r_k)$. Seja $y \in f^{-\left(\sum_{i=1}^{k-1}(n_i+l_i)\right)}(B_{\delta_k}(x_k))$. Pela nossa construção, este y acompanha as órbitas de x_i até um tempo n_i, com um "pulo" l_i, respectivamente. Logo, f possui a propriedade da especificação.

□

Capítulo 3

Teorema de Oseledets

3.1 Introdução

3.1.1 Preliminares para a demonstração do Teorema de Oseledets

Proposição 3.1. *Seja M um espaço métrico compacto e $f : X \to X$ uma transformação mensurável. Então um conjunto $A \subset X$ é de probabilidade total se $\mu(A) = 1$, para toda medida $\mu \in M_f(X)$ érgódica*

Daremos alguns conceitos úteis na demonstração do teorema de Oseledets.

Definição 3.1. *Um fibrado F é uma família de subespaços (denominados fibras de F) $F_x \subset \mathbb{R}^k$, $x \in X$, tais que existem funções mensuráveis $\eta_i : X \to \mathbb{R}^k$, $i = 1, ..., m$, satisfazendo para $\mu-$ q.t.p., que $\{\eta_1(x), \cdots, \eta_m(x)\}$ é uma base ortonormal de F_x. Dizemos que um fibrado G é um subfibrado de F se $G_x \subset F_x$ em $\mu-$q.t.p.*

Definição 3.2. *Um isomorfismo $T : F \to F$ de fibrados é uma família de isomorfismos lineares $T(x) : F_x \to F_{f(x)}$ tais que, se $\eta_1, \cdots, \eta_m$ satisfazem a propriedade anterior então as componentes da matriz de $T(x)$ com respeito as bases $\{\eta_1(x), \cdots, \eta_m(x)\}$ e $\{\eta_1(f(x)), \cdots, \eta_m(f(x))\}$ são $\mu-$integráveis e limitadas.*

Observação 3.1. *Se $G \subset F$ é um subfibrado, dizemos que G é T-invariante se $T(x)G_x = G_{f(x)}$ para $\mu-$q.t.p. $x \in X$.*

Definição 3.3. *Seja M uma variedade riemanniana compacta de dimensão finita e $f : M \to M$ um difeomorfismo de classe C^1. Diz-se que um ponto $x \in M$ é um ponto regular de f se existem números reais $\lambda_1(x) > ... > \lambda_l(x)$ e uma decomposição $T_xM = E_1(x) \oplus \cdots \oplus E_l(x)$ do espaço tangente a M em x tais que*

$$\lim_{n \to \pm\infty} \frac{1}{n} \log \| Df^n(x)u \| = \lambda_j(x)$$

para todo $u \in E_j \setminus \{0\}$ com $1 \leq j \leq l$.

Observe que $\{\lambda_1, ..., \lambda_l\}$ coincide com

$$\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda = \lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \| Df^n(x)u \| = \lambda \text{ para algum } u \in T_xM \setminus \{0\}\}$$

e também temos

$$E_j = \{u \in T_xM : \frac{1}{n} \log \| Df^n(x)u \| \to \lambda_j, \text{ quando } n \to \pm\infty\}$$

deste modo, quando eles existem, os reais $\lambda_1(x) > ... > \lambda_l(x)$ e os espaços $E_1(x), ..., E_l(x)$ são unicamente determinados. Os $\lambda_j(x)$ e $E_j(x)$ são chamados, respectivamente, de expoentes de Lyapunov e espaços próprios de f no ponto x. Denotemos por $R(f)$ o conjuntos dos pontos regulares de f. Não é difícil ver que $f(R(f)) = R(f)$, ou seja, o conjunto $R(f)$ é invariante por iterações com, $\lambda_j(f(x)) = \lambda_j(x)$ e $Df(x)E_j(x) = E_j(f(x))$ para todo $1 \leq j \leq l$ e $x \in R(f)$. Analisando sob o ponto de vista topológico, o subconjunto $R(f)$ é "pequeno", podendo constituir-se num conjunto magro(primeira categoria de Baire) e até mesmo um conjunto finito. No entanto, sobre o ponto de vista da Teoria da Medida, essa situação é exatamente o oposto, conforme o teorema abaixo.

Teorema 3.1 (Oseledets)**.** *Se M é uma variedade riemanniana compacta de dimensão finita, então o conjunto dos pontos regulares de um difeomorfismo de classe C^1, $f : M \to M$, tem probabilidade total para cada medida de probabilidade boreliana em M, invariante por f.*

Demonstraremos este teorema, seguindo [3], como um caso particular de um resultado mais geral. Mas, antes iremos estabelecer algumas notações e definições. Seja M um espaço métrico compacto, $f : M \to M$ um homeomorfismo, F um fibrado vetorial de dimensão finita sobre M dotado com uma métrica riemanniana contínua, $\pi : F \to M$ a projeção e $L : F \to F$ um isomorfismo de fibrados vetoriais contínuos cobrindo F (isto é, $\pi \circ L = f \circ \pi$), tal que ambos L e L^{-1} tenham normas limitadas. Denotemos por L_n o enésimo iterado de L:

$$L_n(x) = L(f^{n-1}(x)) \circ \cdots \circ L(f(x)) \circ L(x) \quad \text{e}$$

$$L_{-n}(x) = L^{-1}(f^{-n+1}(x)) \circ \cdots \circ L^{-1}(f^{-1}(x)) \circ L^{-1}(x), \text{ com } n > 0.$$

Agora, para $n_1, \cdots, n_l \geq 1$ definamos $\Lambda(n_1, \cdots, n_l)$ como o conjunto dos pontos $x \in M$ tal que a fibra F_x admite uma decomposição $F_x = \bigoplus_{j=1}^{l} E_j$ tal que $\dim E_j = n_j$, $1 \leq j \leq l$ e existem números reais $\lambda_1(x) > ... > \lambda_l(x)$ satisfazendo

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \| L_n(x)u \| = \lambda_j(x)$$

para todo $u \in E_j \setminus \{0\}$ com $1 \leq j \leq l$. Diz-se, neste caso, que x é um **ponto regular** de L. Chamaremos de *conjunto regular para os expoentes Lyapunov* o conjunto que contém esses pontos e o denotaremos por $R(L)$. Diremos que x é um ponto irregular, quando não for regular. Neste capítulo usaremos somente o termo conjunto regular para o conjunto regular para os expoentes de Lyapunov.

Teorema 3.2. *a) Para todo $n_1, \cdots, n_l$, $\Lambda(n_1, \cdots, n_l)$ é um subconjunto mensurável de M. Além disso, para cada $1 \le j \le l$, E_j é um subfibrado mensurável da restrição de F à $\Lambda(n_1, \cdots, n_l)$ e $\Lambda(n_1, \cdots, n_l) \ni x \to \lambda_j(x)$ é uma aplicação mensurável.*

b) O conjunto dos pontos regulares de L dado por

$$R(L) = \bigcup_{n_1, \cdots, n_l} \Lambda(n_1, \cdots, n_l)$$

possui probabilidade total em M.

Claramente o teorema 3.1 é um caso particular deste teorema. Basta tomar F como sendo o fibrado vetorial em M e L o morfismo induzido por Df. A prova deste teorema será dada da seguinte maneira:

3.2 Prova do Teorema 3.2

3.2.1 Mensurabilidade

Sejam $n_1, \cdots, n_l$ fixados. Para cada $k \ge 1$ denotamos por $\mathcal{A}_k$ o conjunto das $2l$-uplas de números racionais $\alpha_1 > \beta_1 > \cdots > \alpha_l > \beta_l$ com $(\alpha_j - \beta_j) < \frac{1}{k}$ para $1 \le j \le l$. Para $m \ge 1$ e $(\alpha_1, \cdots \beta_l) \in \mathcal{A}_k$, seja $\Lambda(m, n_1, \cdots, n_l)$ o conjunto dos pontos $x \in M$ tal que existe uma decomposição $F_x = F_1 \oplus \cdots \oplus F_l$ com $\dim F_j = n_j$ e

$$\exp(n\alpha_j)\|u\| \ge \|L_n(x)u\| \ge \exp(n\beta_j)\|u\| \tag{3.1}$$

$$\exp(-n\alpha_j)\|u\| \le \|L_n(x)u\| \le \exp(-n\beta_j)\|u\| \tag{3.2}$$

para todo $n \ge m$, $1 \le j \le l$, e $u \in F_j$. Observe que a decomposição é determinada de forma única, para cada $x \in \Lambda(m, n_1, \cdots, n_l)$ por

$$F_j = \left\{ u \in F_x : \frac{\|L_n(x)u\|}{\|u\|} \le \exp(n\alpha_j) \text{ e } \frac{\|L_{-n}(x)u\|}{\|u\|} \le \exp(-n\beta_j) \text{ se } n \ge m \right\}.$$

Sendo que 3.1 e 3.2 são condições fechadas e as dimensões dos F_j são constantes, temos que $\Lambda(m, n_1, \cdots, n_l)$ é fechado e $\Lambda(n_1, \cdots, n_l) \ni x \to F_j(x)$ contínua para cada $1 \le j \le l$. Em particular isto prova que

$$\Lambda(n_1, \cdots, n_l) = \bigcap_{k \ge 1} \bigcup_{(\alpha_1, \cdots \beta_l)} \bigcap_{k \ge 1} \Lambda(m, \alpha_1, \cdots \beta_l)$$

é um conjunto de Borel. Para provar que os subfibrados E_j são mensuráveis em $\Lambda(n_1, \cdots, n_l)$ é suficiente mostrar que

$$\forall x \in \Lambda(n_1, \cdots, n_l) \cap \Lambda(m, \alpha_1, \cdots \beta_l) \text{ tem-se } E_j(x) = F_j(x),$$

para todo $1 \le j \le l$. Note primeiro que E_j está contido em algum F_j, $1 \le j \le l$, porque todos os vetores de E_j geram o mesmo expoente de Lyapounov λ_j, tanto para $n \to +\infty$ quanto para $n \to -\infty$. Usando $\alpha_k \ge \lambda_j \ge \beta_k$ e lembrando que $\lambda_1 > \cdots > \lambda_l$ e

$\alpha_1 > \beta_1 > \cdots > \alpha_l > \beta_l$, segue que $k = j$. Sendo $\dim E_j = n_j = \dim F_j$, isto prova que $E_j = F_j$ como foi afirmado. Finalmente, o fato de que λ_j é mensurável em $\Lambda(n_1, \cdots, n_l)$ segue imediatamente de

$$\lambda_j = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)|E_j(x)\|.$$

A prova do teorema 3.2a) está completa.

Esta seção será útil para provar a parte b) do Teorema 3.2.

3.2.2 Crescimento subexponencial

Definição 3.4. *Uma função mensurável $C : M \to \mathbb{R}$ tem crescimento subexponencial para uma medida μ em M se*

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log(C \circ f^n) = 0, \quad em \ \ \mu - q.t.p.$$

onde $f : M \to M$ é uma aplicação e μ uma medida de probabilidade invariante por f.

Nesta seção mostraremos que certas funções relacionadas com os iterados de L e que desempenham papel importante na demonstração do teorema 3.2 tem crescimento subexponencial para toda medida de probabilidade invariante por f.

Sejam μ uma medida de probabilidade invariante por f, E um subfibrado mensurável de F invariante por L e $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)u\| \leq \lambda$$

para todo $u \in E_j \backslash \{0\}$ e $\mu - q.t.p.\ x \in M$ (tal λ sempre existe, pois supomos $\|L\|$ limitada). Dado $\varepsilon > 0$, definamos

$$C_\varepsilon(x) = \sup \left\{ \frac{\|L_n(x)u\|}{\exp(n(\lambda+\varepsilon))\|u\|} : n \geq 0 \ \text{ e } \ u \in E_x \backslash 0 \right\}$$

Proposição 3.2. *A função C_ε tem crescimento subexponencial para a medida μ.*

Para demonstrar essa proposição usaremos o seguinte critério para crescimento subexponencial.

Lema 3.1. *Seja $f : M \to M$ uma aplicação mensurável e μ uma medida de probabilidade em M invariante por f e $\varphi : M \to \mathbb{R}$ uma função mensurável tal que $\varphi \circ f - \varphi$ é integrável. Então $\frac{1}{n}(\varphi \circ f^n) \to 0$ em $\mu - q.t.p$ com $n \to \infty$.*

Demonstração. Aplicando o teorema Ergódico de Birkhoff sobre $\varphi \circ f - \varphi$, a sequência $\frac{1}{n}(\varphi \circ f^n)$ converge em quase toda parte para alguma função mensurável ψ. Por outro lado, para cada $\delta > 0$ fixado

$$\mu\left(\left\{x : \frac{1}{n} |\varphi \circ f^n(x)| \geq \delta\right\}\right) = \mu\left(f^{-n}\varphi^{-1}(-n\delta, n\delta)^c\right) = \mu\left(\varphi^{-1}(-n\delta, n\delta)^c\right) \to 0,$$

quando $n \to +\infty$, o que significa que $\frac{1}{n}(\varphi \circ f^n)$ converge para 0 em medida. Portanto $\frac{1}{n_k}(\varphi \circ f^{n_k}) \to 0$ em quase toda parte para alguma subsequência $n_k \to +\infty$. Isto prova que $\psi(x) = 0$ em $\mu -$q.t.p $\ x \in M$ $\square$

Demonstração da Proposição 3.2.

Para $u \in E_x \backslash \{0\}$, seja

$$C\varepsilon(x,u) = \sup_{n\geq 0} \frac{\|L_n(x)u\|}{\exp(n(\lambda+\varepsilon))\,\|u\|}.$$

Então

$$C\varepsilon(x,u) = \max\left\{1, \frac{\|L_n(x)u\|}{\exp(n(\lambda+\varepsilon))\,\|u\|} C\varepsilon(f(x), L(x)u)\right\}$$

e assim

$$a \leq \frac{C\varepsilon(x,u)}{C\varepsilon(f(x), L(x)u)} \leq \max\{1, b\},$$

onde $a, b > 0$ são tomados de tal forma que

$$a \leq \frac{\|L_n(x)u\|}{\exp(n(\lambda+\varepsilon))\,\|u\|} \leq b$$

para todo x e $u \in E_x$. Então, imediatamente,

$$a \leq \frac{C\varepsilon(x,u)}{C\varepsilon(f(x), L(x)u)} \leq \max\{1, b\}$$

isto assegura que $\log(C_\varepsilon \circ f) - \log C_\varepsilon$ e $\log(C_\varepsilon \circ f^{-1}) - \log C_\varepsilon$ são ambas limitadas. Em particular, são integráveis e a proposição segue do lema 3.1

O resultado seguinte será usado muitas vezes na demonstração do Teorema 3.2b).

Proposição 3.3. *Seja E um subfibrado mensurável de F invariante por L, $\lambda \in \mathbb{R}$ e μ uma medida de probabilidade invariante por f em M. Então,*

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)u\| \leq \lambda$$

para $\mu-$q.t.p. $x \in M$ e todo $u \in E_x \backslash \{0\}$ se, e somente se,

$$\limsup_{n\to-\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)u\| \leq \lambda$$

para $\mu-$q.t.p. $x \in M$ e todo $u \in E_x \backslash \{0\}$. Além disso, a afirmação permanece verdadeira quando "$\limsup$"e "$\leq$"são substituídos por "$\liminf$"e "$\geq$"(ou por "$\lim$"e "$=$"), respectivamente.

Demonstração. Provaremos a parte "somente se", a outra parte segue de maneira análoga. Suponhamos que

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)u\| \leq \lambda$$

$\mu-$q.t.p. $x \in M$ e todo $u \in E_x \backslash \{0\}$.

Seja

$$C\varepsilon(x) = \sup\left\{\frac{\|L_n(x)u\|}{\exp(n(\lambda+\varepsilon))\,\|u\|} : n \geq 0 \text{ e } u \in E_x \backslash \{0\}\right\}.$$

e observando que

$$\begin{aligned} u &= L(x)\cdots L(F^{-n+1}(x))L^{-1}(f^{-n+1}(x))\cdots L^{-1}(x)u \\ &= L_n(f^{-n+1}(x))L_{-n}(x)u \end{aligned}$$

Logo,

$$\|u\| \leq C_\varepsilon(f^{-n+1}(x))\exp(n(\lambda+\varepsilon))\,\|L_{-n}(x)u\|$$

e, assim,

$$\frac{1}{n}\log\|u\| \leq \frac{1}{n}\log C_\varepsilon(f^{-n+1}(x)) + \lambda + \varepsilon + \frac{1}{n}\log\|L_{-n}(x)u\|$$

para todo $n \geq 1$. Como C_ε tem crescimento subexponencial (Proposição 3.2), segue que

$$0 \leq \liminf_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\|L_{-n}(x)u\| + \lambda + \varepsilon.$$

Mas, uma vez que

$$\liminf_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\|L_{-n}(x)u\| = -\limsup_{n\to-\infty}\frac{1}{n}\log\|L_n(x)u\|,$$

resulta

$$\limsup_{n\to-\infty}\frac{1}{n}\log\|L_n(x)u\| \leq \lambda+\varepsilon$$

e visto que $\varepsilon > 0$ é arbitrário, tem-se

$$\limsup_{n\to-\infty}\frac{1}{n}\log\|L_n(x)u\| \leq \lambda.$$

como afirmado.

$\square$

3.2.3 Prova do Teorema 3.2b)

3.2.4 Probabilidade total

A fim de mostrar que $R(L)$ tem probabilidade total, basta mostrar que $\mu(R(L)) = 1$ para toda medida de probabilidade ergódica, invariante por f em M. De fato, tal afirmação se justifica pela Proposição 3.1. Suporemos μ ergódica. Seja

$$\lambda_1(L,x) = \limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\|L_n(x)u\| \quad \text{e} \quad \lambda_1(L) = \int \lambda_1(L,x)d\mu(x).$$

Observe que $\lambda_1(L,x) \leq \sup_{x\in M}\|L(x)\|$ e $\lambda_1(L,x) = \lambda_1(L)$ para $\mu-$q.t.p. $x \in M$. Seja G um subfibrado de F definido por

$$G_x = \left\{u \in F_x : \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\|L_n(x)u\| \geq \lambda_1(L)\right\}.$$

O lema abaixo é importante na demonstração do item b) do Teorema 3.2. No entanto, sua prova será dada na próxima seção.

Lema 3.2. *G é um subfibrado mensurável invariante por L com dimensão estritamente positiva e*

$$\lim_{n\to\pm\infty}\frac{1}{n}\log\|L_n(x)u\| = \lambda_1(L)$$

para $\mu-$q.t.p. $x\in M$ e todo $\in G_x\backslash\{0\}$.

Denotemos por $\hat{\Lambda}(j)$ o conjunto dos pontos x para os quais $\dim G_x = j$. Provaremos que esses subconjuntos de M são mensuráveis e que a restrição de G a cada $\hat{\Lambda}(j)$ um subfibrado mensurável da restrição de F $\hat{\Lambda}(j)$. Sendo L um isomorfismo, segue que $\dim G_x = \dim L(G_x)$. Também temos $L(G_x) = G_{f(x)}$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to-\infty}\frac{1}{n}\log\|L_n(f(x))L(x)u\| &= \liminf_{n\to-\infty}\frac{1}{n}\log\|L_{n+1}(x)u\| = \\
&= \liminf_{n\to-\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}\log\|L_{n+1}(x)u\| \geq \\
&\geq \liminf_{n\to-\infty}\frac{1}{n+1}\log\|L_{n+1}(x)u\| \geq \lambda_1(L).
\end{aligned}$$

Logo, $L(x)u\in G_{f(x)}$ e portanto $L(G_x)\subset G_{f(x)}$. A outra inclusão segue de maneira análoga. Assim, $f(x)\in\hat{\Lambda}(j)$, donde $\hat{\Lambda}(j)$ é um subconjunto invariante por f e, como μ ergódica, tem-se $\mu(\hat{\Lambda}(j)) = 1$, para algum j. Verificaremos que $j\geq 1$. Caso $G_x = F_x$ para quase todo ponto $x\in M$, então escreveremos $G = F$, e neste caso a demonstração do teorema esta terminada. Se $G\neq F$, seja $G^{\perp}$ o complemento ortogonal de G. Além disso, seja $p : F\to G^{\perp}$ a projeção ortogonal e escrevamos $\hat{L} = p\circ L : G^{\perp}\to G^{\perp}$.

Lema 3.3. *Se $F\neq G$, então $\lambda_1(\hat{L}) < \lambda_1(L)$.*

Demonstração. Observe primeiro que, como uma consequência da invariância de G,

$$\left\|\hat{L}_n(x)u\right\| = \|p(L_n(x)u)\| \leq \|L_n(x)u\|.$$

Seja $\hat{G}$ um subfibrado de $G^{\perp}$, invariante por $\hat{L}$ tal que

$$\lim_{n\to\pm\infty}\frac{1}{n}\log\left\|\hat{L}_n(x)u\right\| = \lambda_1(\hat{L}),$$

para $\mu-$q.t.p. x e todo $u\in\hat{G}_x\backslash\{0\}$. Então,

$$\begin{aligned}
\lambda_1(\hat{L}) &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\left\|\hat{L}_n(x)u\right\| \leq \liminf_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\|L_n(x)u\| \\
&\leq \limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\|L_n(x)u\| \leq \lambda_1(L).
\end{aligned}$$

Isto prova que $\lambda_1(\hat{L})\leq\lambda_1(L)$, o que implica $\lambda_1(\hat{L}) = \lambda_1(L)$. Deste modo,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\|L_n(x)u\| = \lambda_1(L)$$

Pela proposição 3.3, segue que

$$\lim_{n\to-\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)u\| = \lambda_1(L),$$

o que permite concluir que $u \in G_x$, ou seja, $u \in \hat{G}_x \cap G_x$. Mas isto é absurdo, visto que u é não nulo e $\hat{G}_x \cap G_x = \{0\}$. Portanto, $\lambda_1(\hat{L}) < \lambda_1(L)$. □

Faremos uso de mais um lema fundamental, cuja prova será dada mais adiante em uma seção específica após provarmos o lema 3.2.

Lema 3.4. *Se $F \neq G$ então existe um subfibrado H de F, o qual é mensurável e invariante por L, tal que $G \oplus H = F$ e $\lambda_1(L|H) = \lambda_1(\hat{L}) < \lambda_1(L)$.*

Agora estamos aptos para concluir a demonstração da parte b) do Teorema 3.2. Escrevendo $E_1 = G$ e $H_1 = H$, tem-se pelo lema 3.2

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)u\| = \lambda_1$$

para todo $u \in E_1\backslash\{0\}$ e, pelo lema 3.4, existe uma decomposição $F = E_1 \oplus H_1$ tal que $\lambda_1 > \lambda_1(L|H_1)$. Definimos $\lambda_2 = \lambda_1(L|H_1)$ e aplicamos os lemas 3.2 e 3.4, considerando a aplicação $L|H_1$. Assim, existem subfibrados invariantes por L, E_2 e H_2, tais que $H_1 = E_2 \oplus H_2$, para $\mu-$q.t.p. $x \in M$, $\lambda_1(L|H_2) < \lambda_2$ e

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)v\| = \lambda_2$$

para $\mu-$q.t.p. $x \in M$ e todo $v \in E_2\backslash\{0\}$. Então, para qualquer $j \geq 1$, suponhamos que já obtivemos uma decomposição invariante por L,

$$F = E_1 \oplus \cdots \oplus E_i \oplus H_i \;\; \text{com} \;\; \lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)u\| = \lambda_i$$

para todo $u \in E_i\backslash\{0\}$, $1 \leq i \leq j$ e $\lambda_1 > \cdots > \lambda_j > \lambda_1(L|H_j)$. Do lema 3.2 segue que existe um subfibrado invariante E_{j+1} de H_j tal que

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)u\| = \lambda_{i+1} = \lambda_1(L|H_j)$$

para todo $u \in E_i\backslash\{0\}$ e do lema 3.4 nos fornece uma decomposição invariante $H_j = E_{j+1} \oplus H_{j+1}$ tal que $\lambda_1(L|H_{j+1}) < \lambda_{j+1}$. Como F tem, por hipótese, dimensão finita esse processo deve ser interrompido após um número finito de vezes. Resulta assim, que $\mu-$q.t.p. $x \in M$, e então

$$F = E_1 \oplus \cdots \oplus E_l$$

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)u\| = \lambda_j,\; 1 \leq j \leq l,\; u \in E_j\backslash\{0\}$$

isto , $\mu-$q.t.p. $x \in M$ é regular, completando a demonstração do Teorema 3.2.

3.2.5 Demonstração do Lema 3.2

O resultado enunciado abaixo será usado na demonstração desse lema.

Lema 3.5 (Pliss)**.** *Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ e $A > 0$, existe $\delta = \delta(\lambda, \varepsilon, A) > 0$ tal que se dada qualquer sequência $a_0, \cdots, a_{N-1}$ em $\mathbb{R}$, com $\sum_{k=0}^{N-1} a_k \leq N\lambda$ e $|a_k| \leq A$, para todo $0 \leq k \leq N-1$, então existem $l \geq N\delta$ e $0 \leq n_1 \leq \cdots \leq n_l \leq N-1$ tais que*

$$\sum_{j=n}^{n_i-1} a_j \leq (n_i - n)(\lambda + \varepsilon),$$

para todo $0 \leq n \leq n_i$ e $1 \leq i \leq l$.

Demonstração. Seja $S(n) = \sum_{j=n}^{N-1}(a_j - (\lambda+\varepsilon))$ e tomemos $n_1 < \cdots < n_l$ números inteiros do conjunto $\{0, \cdots, N-1\}$ que satisfazem

$$S(n) \leq S(n_i) \quad \text{para todo} \quad 0 \leq n < n_i. \tag{3.3}$$

Então, para $0 \leq n < n_i$,

$$\sum_{j=n}^{n_i-1} a_j = (S(n) - S(n_i)) + (n_i - n)(\lambda+\varepsilon) \leq (n_i - n)(\lambda + \varepsilon).$$

Devemos, estimar o valor de l. Antes, porém, observemos que $S(n_{i-1}) \geq S(n_i - 1)$ para todo $i > 1$, porque, caso contrário, haveria $n_{i-1} < m < n_i$ tal que $S(n) \leq S(m)$ para todo $i \leq n \leq m$, contrariando a definição do conjunto $\{n_1, \cdots, n_l\}$. Logo, para todo $i > 1$, tem-se

$$S(n_{i-1}) \geq S(n_i) + (a_{n_i} - (\lambda+\varepsilon)) \geq S(n_i) - (|\lambda| + \varepsilon + A)$$

para todo $i > 1$, e assim

$$S(n_1) \geq S(n_l) - (l-1)(|\lambda| + \varepsilon + A).$$

Sendo

$$S(n_1) = S(0) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k - N(\lambda+\varepsilon) \leq -N\varepsilon \ \text{ e } \ S(n_l) \geq S(N-1) = a_{N-1} - (\lambda+\varepsilon)$$

(isto porque n_l é o maior elemento de $\{0, 1, \cdots, N-1\}$) que satisfaz 3.3.
Deste modo,

$$\begin{aligned} -N\varepsilon \ &\geq \ S(n_1) \geq S(n_l) - (l-1)(|\lambda|+\varepsilon+A) \geq a_{N-1} - (\lambda+\varepsilon) - (l-1)(|\lambda|+\varepsilon+A) \\ &\Rightarrow \ -N\varepsilon \geq a_{N-1} - (\lambda+\varepsilon) - l(|\lambda|+\varepsilon+A) + (|\lambda|+\varepsilon+A). \end{aligned}$$

Lembrando que $a_{N-1} \geq -A$, resulta:

$$N\varepsilon \leq l(\lambda + \varepsilon + A).$$

Assim, basta tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{|\lambda|+\varepsilon+A}$. $\square$

Passemos, enfim, à demonstração do lema 3.2. Primeiramente provaremos que G é um subfibrado mensurável. Isto será feito em três passos. Para isso usaremos a seguinte observação.

Observação 3.2. *Sejam $(A, \mathcal{A})$ e $(B, \mathcal{B})$ espaços mensuráveis e uma aplicação $f : A \to B$. Se existe uma cobertura enumerável $(A_n)_n$ de A por conjuntos mensuráveis, tal que $f|A_n : A_n \to B$ é uma aplicação mensurável para cada $n \geq 1$, então $f : A \to B$ é uma aplicação mensurável.*

Primeiro passo: Para $k \geq 1$ e $x \in M$ seja

$$G_x(k) = \{u \in F_x : \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|L_{-n}(x)u\| \leq -\lambda_1 + \frac{1}{k}\}.$$

Então definimos $M_k = \{x \in M : G_x(k) = G_x\}$. Afirmamos que $(M_k)_k$ cobre M. Com efeito, para qualquer $x \in M$ fixo, $(G_x(k))_k$ é uma sequência decrescente de subespaços de F_x e, como $\dim F_x$ é finita, deve existir $k_x \geq 1$ tal que $G_x(k_x) = G_x$, para todo $k \geq k_x$. Por um lado, $\bigcap_{k=k_x}^{+\infty} G_x(k_x) = G_x$ e, por outro lado, $\bigcap_{k=k_x}^{+\infty} G_x(k_x) = G_x(k_x)$. Logo, existe $k_x \geq 1$ tal que $G_x(k_x) = G_x$. Afirmamos ainda que M_k é um conjunto mensurável. Para provar esta última afirmação, consideremos as funções

$$\lambda_1 : M \to \mathbb{R}, \qquad \lambda_1 = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)\|.$$

e

$$\phi : F \to \mathbb{R}, \qquad \phi(x, u) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|L_{-n}(x)\|$$

Estas funções são mensuráveis, porque $(\frac{1}{n} \log \|L_n(x)\|)$ e $(\frac{1}{n} \log \|L_{-n}(x)\|)$ são sequências limitadas de funções mensuráveis. Consideremos ainda a projeção fibrada $\pi : F \to M$. Claramente,

$$\begin{aligned} x \notin M_k \quad &\Leftrightarrow \quad \exists u \in F_x \text{ tal que } (\phi + \lambda_1 \pi)(x, u) \in (0, \frac{1}{k}) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \pi((\phi + \lambda_1 \pi)^{-1}((0, \frac{1}{k}])). \end{aligned}$$

ou seja,

$$M_k = M \backslash \pi((\phi + \lambda_1 \circ \pi)^{-1}(0, \frac{1}{k}]).$$

Uma vez que a projeção aplica conjuntos mensuráveis em conjuntos mensuráveis, então $\pi((\phi + \lambda_1 \circ \pi)^{-1}(0, \frac{1}{k}]))$ é mensurável, o que implica que $M \backslash \pi((\phi + \lambda_1 \circ \pi)^{-1}(0, \frac{1}{k}])$ é mensurável, ou seja, M_k é mensurável.

Segundo passo: Fixemos $k \geq 1$ e, para cada $x \in M_k$ e $m \geq 1$, definamos

$$G_x(k, m) = \{u \in F_x : \|L_{-n}(x)u \leq m \exp(-n(\lambda_1 - \frac{1}{l}))\|u\|\|, \forall n\}.$$

Notemos que $G_x(k, m) = \cup_m G_x(k, m)$ para todo $x \in M_k$. A inclusão $\supset$ é óbvia e $\subset$ segue de $G_x(k) = G_x(k + 1)$. Definamos agora, $M_{k,m} = \{x \in M_k : G_x(k) = G_x(k, m)\} = \{x \in M_k : G_x(k, m) = G_x(k, l) \text{ para todo } l \geq m\}$. Consideremos a função

$$\psi_k : \pi^{-1}(M_k) \to \mathbb{R}, \qquad \psi_k(x, u) = \sup_{n>0} \frac{\|L_{-n}(x)u\|}{\|u\|} \exp(n(\lambda_1 - \frac{1}{k})).$$

Esta função é mensurável, pois $f_n(x,u) = \frac{\|L_{-n}(x)u\|}{\|u\|}\exp(n(\lambda_1 - \frac{1}{k}))$ define uma sequência de funções contínuas e, portanto, mensuráveis. Temos,

$$\begin{aligned} x \notin M_{k,m} &\Leftrightarrow \exists u \in F_x \text{ e } l \geq m \text{ tal que } m < \psi_k(x,u) \leq l \\ &\Leftrightarrow \exists l \geq m \text{ tal que } x \in \pi(\psi_k^{-1}((m,l])), \end{aligned}$$

isto é, $M_{k,n} = M_k \setminus \cup_{l=m}^{\infty} \pi(\psi_k^{-1}((m,l]))$. Tendo em vista que $\cup_{l=m}^{\infty}\pi(\psi_k^{-1}((m,l]))$ é mensurável, resulta que $M_{k,n}$ também é mensurável. Queremos provar que $(M_{k,m})_m$ cobre M_k. Com esta finalidade, seja $x \in M_k$ e $\{u_1, ..., u_s\}$ uma base ortogonal de $G_x(k)$. Tomemos $m_1, ..., m_s \geq 1$ tais que $u_i \in G_x(x, m_i)$, para todo $1 \leq i \leq s$, e consideremos $m = max\{m_1, ..., m_s\}$. Para cada $u = \sum_{i=1}^{s} a_i u_i \in G_x(k)$ e para cada $n \geq 1$, tem-se

$$\begin{aligned} \|L_{-n}(x)u\| &= \|L_{-n}(x)\sum_{i=1}^{s} a_i u_i\| \leq \sum_{i=1}^{s} |a_i|\|L_{-n}(x)u_i\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{s} |a_i| m_i \exp(-n(\lambda_1 - \frac{1}{k}))\|u_i\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{s} |a_i| m \exp(-n(\lambda_1 - \frac{1}{k}))\|u_i\| \\ &= m \exp(-n(\lambda_1 - \frac{1}{k}))\sum_{i=1}^{s} |a_i|\|u_i\| \\ &= m \exp(-n(\lambda - \frac{1}{k}))\|u\|_{soma}, \end{aligned}$$

ou seja, $\|L_{-n}(x)u\| \leq m\exp(-n(\lambda - \frac{1}{k}))C\|u\|$, onde C depende apenas da escolha da norma em F. Concluímos assim, que $G_x(k) \subset G_x(k, Cm+1)$ e, portanto, $x \in M_{k,C_{m+1}}$.

Terceiro passo: Provemos agora que G_x é semicontínua inferiormente em cada $M_{k,m}$, isto é, dada qualquer sequência $(x_i)_i$ em $M_{k,m}$ convergindo para algum $x \in M_{k,m}$, tem-se $\lim G_{x_i} \subset G_x$.

Dada uma sequência $u_i \in G_{x_i}$, $i \geq 1$, que converge para algum $u \in F_x$, temos

$$\|L_{-n}(x)u_i\| \leq m\exp(-n(\lambda_1 - \frac{k}{k}))\|u_i\|$$

para todo $i \geq 1$ e $n \geq 1$. Passando ao limite, obtemos

$$\|L_{-n}(x)u\| \leq m\exp(-n(\lambda_1 - \frac{k}{k}))\|u\|,$$

o que implica que $u \in G_x(k,m) \subset \cup G_x(k,m) = G_x(k)$. Como existe k_x tal que $G_x(k) = G_x$, para todo $k \geq k_x$, então $u \in G_x$ e isto conclui a prova da afirmação. Segue, pois, que cada conjunto $M_{k,m,j} = \{x \in M_{k,m}; \dim G_x \geq j\}$ é fechado e que varia continuamente com x em cada $M_{k,m,j} \setminus M_{k,m,j+1}$. Notemos que $(M_{k,mj} \setminus M_{k,m,j+1})$ é uma cobertura de $\hat{\Lambda}(j)$ por conjuntos mensuráveis e $\pi^{-1}|(M_{k,m,j} \setminus M_{k,m,j+1})$ é mensurável. Ora, $\pi^{-1}|(M_{k,m,j} \setminus M_{k,m,j+1}) = G|(M_{k,m,j} \setminus M_{k,m,j+1})$. Logo, pela observação 3.2 feita acima, segue que $G|\hat{\Lambda}(j)$ é mensurável.

Agora, passemos à segunda parte da demonstração. Iremos mostrar que $\dim G_x > 0$ para $\mu-$q.t.p. $x \in M$. Para isto, basta mostrar que, para todo $k \geq 1$, $G_x(k) \neq \{0\}$ em $\mu-$q.t.p. $x \in M$. Seja $k \geq 1$ fixo e, para $m \geq 1$, definamos Y_m como o conjuntos dos pontos $x \in M$ tais que existe $u \in F_x \backslash \{0\}$ satisfazendo

$$\|L_{-n}(x)u\| \leq m \exp(-n(\lambda_1 - \frac{k}{k}))\|u\| \tag{3.4}$$

para $1 \leq n \leq m$. Afirmamos que existe $\delta > 0$ tal que

$$\mu(Y_m) \geq \delta \tag{3.5}$$

para $m \geq 1$. Observemos que isto implica que o conjunto $Y = \bigcap_{m=1}^{\infty} Y_m$ tem medida positiva, porque $Y_1 \supset Y_2 \supset Y_3 \supset \cdots$ e cada Y_m tem medida positiva. Se $x \in Y$ então existe uma sequência de vetores unitários $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, com $v_i \in Y_i$, tais que vale 3.4. Tomando um vetor v que seja limite de alguma subsequência de (v_n) então vale 3.4 e $0 \neq v \in G_x(k)$. Mas

$$L_n(x) G_x(k) = G_{f^n(x)}(k)$$

e então tem-se $\dim G_x(k) > 0$ se $x \in \bigcup_{n \geq 0} f^n(\bigcap_{n \geq 1} Y_m)$. Como $\bigcup_{n \geq 0} f^n(\bigcap_{n \geq 1} Y_m)$ é invariante e tem medida positiva, pois contém Y. Segue da ergodicidade de μ que $\dim G_x(k) > 0$ em $\mu-$quase todo ponto. Como consequência, a prova do lema foi reduzida a verificar 3.5. Seja $u \in F_x$, $N \geq 1$ tal que $\|L_N(x)u\| \geq \exp(N(\lambda_1 - \frac{1}{2k}))$ e definamos

$$a_i = \log \|L^{-1}(f^i(x))(\frac{L_{i+1}(x)u}{\|L_{i+1}(x)u\|})\|,$$

para $0 \leq i \leq N-1$. Observemos que $a_i \leq \log \|L^{-1}\|$, pois

$$\log \|L^{-1}(f^i(x))(\frac{L_{i+1}(x)u}{\|L_{i+1}(x)u\|})\| \leq \log \|L^{-1}(f^i(x))\| \|\frac{L_{i+1}(x)u}{\|L_{i+1}(x)u\|})\| = \log \|L^{-1}(f^i(x))\|$$

e

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{N-1} a_j &= \sum_{j=0}^{N-1} \log \frac{\|L^{-1}(f^j(x))L_{j+1}(x)u\|}{\|L_{j+1}(x)u\|} = \sum_{j=0}^{N-1} \log \frac{\|L^{-1}(f^j(x))L(f^j(x))L_j(x)u\|}{\|L_{j+1}(x)u\|} \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \log \frac{\|L_j(x)u\|}{\|L_{j+1}(x)u\|} = \log \frac{\|u\|}{\|L(x)u\|} + ... + \log \frac{\|L_{N-1}(x)u\|}{\|L_N(x)u\|} \\
&= \log \|u\| - \log \|L(x)u\| + ... + \log \|L_{N-1}(x)u\| - \log \|L_N(x)u\| \\
&= \log \frac{\|u\|}{\|L_N(x)u\|}.
\end{aligned}$$

Como $\frac{\|u\|}{\|L_N(x)u\|} \leq \exp(N(\frac{1}{2k}\lambda_1))$, temos $\log \frac{\|u\|}{\|L_N(x)u\|} \leq (N(\frac{1}{2k}\lambda_1))$. Pelo lema 3.5, tomando $\lambda = \lambda_1 + \frac{1}{2k}$, $\varepsilon = \frac{1}{2k}$ e $A = \log \|L^{-1}\|$, obtemos números $n_1, ..., n_l$ tais que $0 \leq n_1 < ... < n_l \leq N-1$, com $L \geq N\delta$ e satisfazendo

$$\log \frac{\|L_n(x)u\|}{\|L_{n_i}(x)u\|} = \sum_{j=n}^{n_i - 1} a_j \leq (n_i - n)(-\lambda_1 + \frac{1}{k}) \tag{3.6}$$

para todo $0 \leq n \leq n_i$. Seja $v_i = \frac{L_{n_i}(x)u}{\|L_{n_i}(x)u\|}$. Então, tendo em vista que $L_n(x)u = L_{n-n_i}(f^{n_i}(x))L_{n_i}(x)u$, obtemos de 3.6

$$\|L_{n-n_i}(f^{n_i}(x))v_i\| \leq \exp((n-n_i)(\lambda_1 - \frac{1}{k})),$$

para $1 \leq n_i - n < n_i$, e isto acarreta $f^{n_i}(v) \in Y_{n_i}$. Do fato que $Y_{n_i} \subset Y_m$ quando $n_i \geq m$, segue que

$$\frac{1}{N}\#\{0 \leq j \leq N : f^j(x) \in Y_m\} \geq \frac{l-m}{N} \geq \frac{N\delta - m}{N} = \delta - \frac{m}{N}.$$

Fazendo $N \to +\infty$, tem-se

$$\tau(x, Y_m) = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N}\#\{0 \leq j \leq N : f^j(x) \in Y_m\} \geq \delta.$$

Mas como μ é ergódica, resulta que $\mu(Y_m) = \tau(x, Y_m) \geq \delta$(pela proposição 2.5 na página 133 do livro do Ricardo Mañe, referencia bibliográfica[Man]), provando nossa afirmação.

Finalmente, definamos

$$C_\varepsilon(x) = \sup_{n \geq 0}\left\{\frac{\|L_n(x)u\|}{\exp(n(\lambda_1+\varepsilon))\|u\|} : u \in G_x \backslash \{0\}\right\}.$$

De

$$u = L_n(f^{-n+1}(x))L_{-n}(x)u$$

obtemos

$$\|u\| \leq C_\varepsilon(f^{-n+1}(x)) \exp(n(\lambda_1+\varepsilon))\|L_{-n}(x)u\|$$

donde

$$\frac{1}{n}\log\|u\| \leq \frac{1}{n}\log C_\varepsilon(f^{-n+1}(x)) + (\lambda_1+\varepsilon) + \frac{1}{n}\log\|L_{-n}(x)u\|$$

e, lembrando que C_ε tem crescimento subexponencial,

$$\begin{aligned} 0 \leq \liminf_{n \to -\infty} \frac{1}{n}\log\|L_{-n}(x)u\| + \lambda_1 + \varepsilon &= \liminf_{n \to +\infty} -\frac{1}{n}\log\|L_n(x)u\| + \lambda_1 + \varepsilon \\ &= -\limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\log\|L_n(x)u\| + \lambda_1 + \varepsilon \end{aligned}$$

e como ε é arbitrário,

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\log\|L_n(x)u\| \leq \lambda_1.$$

Pela proposição 3.3, isto acarreta

$$\limsup_{n \to -\infty} \frac{1}{n}\log\|L_n(x)u\| \leq \lambda_1.$$

Agora, definamos $C_\varepsilon(x)$ como sendo

$$C_\varepsilon(x) = \sup_{n \geq 0}\left\{\frac{\|L_{-n}(x)u\|}{\exp(-n(\lambda_1+\varepsilon))\|u\|} : u \in G_x \backslash \{0\}\right\}.$$

Visto que

$$u = L_{-n}(f^{n-1}(x))\|L_n(x)u\|$$

resulta

$$\|u\| \leq C_\varepsilon(f^{n-1}(x)) \exp(-n(\lambda_1 + \varepsilon))\|L_n(x)u\|$$

acarretando

$$0 \leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)u\| - \lambda_1 - \varepsilon$$

e, assim,

$$\lambda_1 \leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)u\|.$$

Novamente pela proposição 3.3, obtemos

$$\lambda_1 \leq \liminf_{n\to-\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)u\|.$$

Ora, dada qualquer sequência limitada (x_n) de números reais vale

$$\limsup x_n \geq \liminf x_n.$$

Logo,

$$\limsup_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)u\| = \liminf_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)u\|$$

e, portanto,

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)u\| = \lambda_1,$$

completando a prova do lema.

3.3 Demonstração do Lema 3.4

Seja Σ o espaço dos morfismos de fibrados vetoriais mensuráveis $G^\perp \to G$. Obteremos um morfismo $A \in \Sigma$ tal que $H = graf(A) = \{u + Au; u \in G^\perp\}$ seja o subfibrado como no enunciado do Lema. Consideremos a transformação $\Phi(A)(x) = L^{-1}(f(x))A(f(x))\hat{L}(x)$ e seja, $P = (L|G^\perp - \hat{L}) : G^\perp \to G$. Dado $u \in G^\perp$,

$$\begin{aligned} L(u + Au) &= Lu + LAu = \hat{L}u + Pu + LAu = \\ &= \hat{L}u + A(\hat{L}u) + L(L^{-1}Pu) + LAu - L(L^{-1}A\hat{L}u) = \\ &= \hat{L}u + A(\hat{(L)}u) + L(L^{-1}P + A - L^{-1}A\hat{L})u. \end{aligned}$$

Notemos que $\hat{L}u \in G^\perp$ enquanto que as duas últimas parcelas pertencem a G. Portanto, H invariante por L se, e somente se,

$$A - \Phi(A) = -L^{-1}P. \tag{3.7}$$

Façamos $B = -L^{-1}P$. Provemos que existem $\lambda < 0$ e uma função mensurável $C : M \to \mathbb{R}$ tais que $\|\Phi^n(B)x\| \leq C(x)\exp(\lambda n)$ para todo $n \geq 0$ e $\mu-$quase toda parte. Isto assegura a convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} \Phi^n(B)$ em μ-quase toda parte e que $A = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi^n(B)$ satisfaz 3.7, que não é difícil de ver. Para obter λ e C, seja

$$K_\varepsilon(x) = \sup_{n\geq 0} \frac{\|\hat{L}_n(x)\|}{\exp(n(\lambda_1(\hat{L}) + \varepsilon))} \ \text{ e } \ C_\varepsilon(x) = \sup_{n\geq 0} \frac{\|(L^{-1}|G)_n(x)\|}{\exp(n(\lambda_1(L^{-1}|G) + \varepsilon))}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \|\Phi^n(B)(x)\| &= \|(L^{-1}|G)_n(f^n x)B(f^n x)\hat{L}_n(x)\| \\ &\leq C_\varepsilon(f^n(x))\|B\|K_\varepsilon(x)\exp(n(\lambda_1(\hat{L}) + \lambda_1(L^{-1}|G) + 2\varepsilon)). \end{aligned}$$

Observemos que C_ε tem crescimento subexponencial, então

$$D_\varepsilon(x) = \sup_{n\geq 0} \frac{C_\varepsilon(f^n x)}{\exp(n\varepsilon)}$$

é finito e

$$\|\Phi(B)(x)\| \leq \|B\|D_\varepsilon(x)K_\varepsilon(x)\exp(n(\lambda_1(\hat{L}) - \lambda_1(L) + 3\varepsilon)).$$

Então basta tomar $\lambda = \lambda_1(\hat{L}) - \lambda_1(L) + 3\varepsilon$ e $C(x) = \|B\|D_\varepsilon(x)K_\varepsilon(x)$, onde $\varepsilon > 0$ é escolhido de modo que $\lambda < 0$.

Resta ainda provar que $\lambda_1(L|H) = \lambda_1(\hat{L})$. Com este propósito, seja $\tilde{A} : G^\perp \to H$ dada por $\tilde{A}u = u + Au$. Pela construção, tem-se $L \circ \tilde{A} = \tilde{A} \circ \hat{L}$, isto é, $(L|H)(x) = \tilde{A}(fx)\hat{L}(x)(\tilde{A})^{-1}(x)$. Portanto,

$$\begin{aligned} \lambda_1(L|H, x) &= \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|(L|H)_n(x)\| = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|\tilde{A}(f^n(x))\hat{L}_n(x)(\tilde{A})^{-1}(x)\| \\ &\leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|\tilde{A}(f^n(x))\| + \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|\hat{L}_n(x))\| + \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|(\tilde{A})^{-1}(x))\|. \end{aligned}$$

O segundo termo da última desigualdade acima é igual a $\lambda_1(\hat{L})$ e o terceiro é nulo. Além disso,

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|\tilde{A}(f^n(x))\| = 0. \tag{3.8}$$

De fato,

$$1 \leq \|id\| \leq \|\tilde{A}(f^n(x))\| = \|id + A(f^n(x))\| \leq 1 + \|A(f^n(x))\| \leq 1 + \frac{C(f^n x)}{1 - \exp^\lambda}.$$

Usando o mesmo argumento da seção 3.2.2 vemos que $D_\varepsilon(x)$ e K_ε tem crescimento subexponencial, então o mesmo vale para $C_\varepsilon(x)$. Combinado com a última desigualdade, temos que vale 3.8. Isto, por sua vez, acarreta $\lambda_1(L|H) \leq \lambda_1(\hat{L})$. A desigualdade contrária é provada da mesma forma, usando que $\hat{L}(x) = (\tilde{A})^{-1}(f(x))(L|H)(x)\tilde{A}(x)$, e que $\|(\tilde{A})^{-1}\| \leq 1$ em μ-quase toda parte, porque $(\tilde{A})^{-1} = \pi|H : H \to G^\perp$. Portanto, a prova do lema esta completa.

Capítulo 4

Técnicas

Apresentamos algumas das técnicas que nos serão útil para demonstrar o nosso resultado. A técnica usada para provar o resultado principal deste trabalho 4 foi inspirado em uma prova para o princípio variacional condicional de Takens e Verbitskiy [TV2]. A prova de Takens e Verbitskiy por sua vez foi inspirado por argumentos usados por Young[You].

4.1 Construção dos pontos em $\hat{X}(\varphi, f)$

As provas que utilizam a propriedade de especificação são tipicamente construtivas, e a nossa não é exceção. A estratégia geral é a de escolher conjuntos de pontos que possuem uma propriedade dinâmica da qual estamos interessados, e usar a propriedade de especificação para a construção de novos pontos que sombreiam as órbitas dos pontos originais.

Mostraremos como construir um único ponto irregular para uma função contínua φ satisfazendo uma das condições equivalentes ao 2.3. O método para a construção de pontos em $X(\varphi, \alpha)$ é semelhante.

No caso de shifts do tipo finito topologicamente mixing, a propriedade de especificação é equivalente a uma operação muito mais simples, a de concatenação de palavras finitas. Esse exemplo oferece uma visão da nossa técnica. Mostraremos como construir um ponto irregular de um shift unilateral total, em seguida, mostramos como construir pontos irregulares de aplicações que tem especificação.

Lema 4.1. *Seja* (Σ, σ) *um shift unilateral total em um conjunto de símbolos finitos. Seja* $\varphi \in C(\Sigma)$ *satisfazendo* $\inf_{\mu \in M_\sigma^e(\Sigma)} \int \varphi d\mu < \sup_{\mu \in M_\sigma^e(\Sigma)} \int \varphi d\mu$. *Então* $\hat{\Sigma}(\varphi, \sigma) \neq \emptyset$.

Demonstração. Sejam $\mu_1, \mu_2 \in M_\sigma^e(\Sigma)$ com $\int \varphi d\mu_1 < \int \varphi d\mu_2$. Seja $\delta > 0$ tal que

$$\left| \int \varphi d\mu_1 - \int \varphi d\mu_2 \right| > 9\delta.$$

Seja $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ satisfazendo $\frac{1}{n} S_n \varphi(x) \to \int \varphi d\mu_1$ e $y = (y_i)_{i=1}^{\infty}$ satisfazendo $\frac{1}{n} S_n \varphi(y) \to \int \varphi d\mu_2$. Seja N_k tendendo para ∞ suficientemente rápido de modo que $N_{k+1} > \exp(N_1 +$

$\ldots + N_k$). A concatenação de uma sequência enumerável de palavras finitas define um ponto em Σ. Para $i \geq 1$, definimos as seguintes palavras finitas

$$w_{2i-1} = (x_1, \ldots, x_{N_{2i-1}}),$$

$$w_{2i} = (y_1, \ldots, y_{N_{2i}})$$

e definimos $p = w_1 w_2 w_3 \ldots \in \Sigma$. Seja $t_k = N_1 + \ldots + N_k$. Seja

$$Var(\varphi, n) := \sup\{|\varphi(w) - \varphi(v)| : w, v \in \Sigma, w_i = v_i \text{ para } i = 1, \ldots, n\},$$

e escolhamos M tal que $Var(\varphi, M) < \delta$. Assumimos, sem perda de generalidade, que N_1 possa ser escolhido tal que $N_1 > M$. Para $k \geq 1$, seja $p_k = \sigma^{t_k - 1} p$. Ou seja,

$$p_{2k-1} = (x_1, ..., x_{N_{2k-1}}, y_1, ..., y_{N_{2k}}, ...) \text{ e } p_{2k} = (y_1, ..., y_{N_{2k}}, x_1, ..., x_{N_{2k+1}}, ...)$$

Observando que $Var(\varphi, n) > Var(\varphi, m)$ quando $m > n$ e que N_k é suficientemente maior que N, temos para k ímpar

$$\begin{aligned}
|S_{N_k}\varphi(p_k) - S_{N_k}\varphi(x)| &= \left| \sum_{i=0}^{N_k - 1} \varphi(\sigma^i(p_k)) - \sum_{i=0}^{N_k - 1} \varphi(\sigma^i(x)) \right| \\
&\leq \sum_{i=0}^{N_k - 1} \left| \varphi(\sigma^i(p_k)) - \varphi(\sigma^i(x)) \right| \\
&= \sum_{i=M+1}^{N_k - 1} \left| \varphi(\sigma^i(p_k)) - \varphi(\sigma^i(x)) \right| + \sum_{i=0}^{M} \left| \varphi(\sigma^i(p_k)) - \varphi(\sigma^i(x)) \right| \\
&\leq Var(\varphi, N_k - M - 1) + ... + Var(\varphi, 1) + \\
&\quad + Var(\varphi, N_k) + ... + Var(\varphi, N_k - M) \\
&= Var(\varphi, 1) + ... + Var(\varphi, M) + Var(\varphi, M+1) + ... + Var(\varphi, N_k) \\
&\leq Var(\varphi, 1) + ... + Var(\varphi, M) + (N_k - M) Var(\varphi, M) \\
&\leq (N_k - M) Var(\varphi, M) + M\|\varphi\|.
\end{aligned}$$

onde $\|\varphi\| = \sup_{x,y \in X} |\varphi(x) - \varphi(y)|$.
Então, para k ímpar suficientemente grande, temos

$$\left| \frac{1}{N_k} S_{N_k} \varphi(p_k) - \int \varphi d\mu_1 \right| < 3\delta.$$

Similarmente, para k par suficientemente grande, temos

$$\left| \frac{1}{N_k} S_{N_k} \varphi(p_k) - \int \varphi d\mu_2 \right| < 3\delta.$$

Observe que $t_{k-1}/t_k \to 0$ e $N_k/t_k \to 1$. Temos

$$|S_{t_k}\varphi_p - S_{N_k}\varphi(p_k)| \leq t_{k-1}\|\varphi\|,$$

é facilmente verificado que

$$\left|\frac{1}{t_k}S_{t_k}\varphi_p - \frac{1}{N_k}S_{N_k}\varphi(p_k)\right| \to 0$$

Segue que para todo k suficientemente grande

$$\left|\frac{1}{t_k}S_{t_k}\varphi_p - \int \varphi d\mu_{\rho(k)}\right| < 4\delta.$$

Onde $\rho(k) = (k+1)(\mod 2) + 1$. Portanto, $p \in \hat{\Sigma}(\varphi, f)$. □

Lema 4.2. *Seja* (X, f) *um sistema dinâmico com a propriedade da especificação. Seja* $\varphi \in C(X)$ *satisfazendo* $\inf_{\mu\in M_f^e(X)} \int \varphi d\mu < \sup_{\mu\in M_f^e(X)} \int \varphi d\mu$. *Então* $\hat{X}(\varphi, f) \neq \emptyset$.

Demonstração. Sejam μ_1, μ_2 medidas ergódicas com $\int \varphi d\mu_1 < \int \varphi d\mu_2$. Seja x_i satisfazendo $\frac{1}{n}S_n\varphi(x_i) \to \int \varphi d\mu_i$ para $i = 1, 2$. Seja $m_k := m(\varepsilon/2^k)$ o mesmo da definição da especificação e N_k tendendo para ∞ suficientemente rápido tal que $N_{k+1} > \exp\{\sum_{i=1}^k (N_i + m_i)\}$ e $N_k > \exp m_k$. Definimos $z_i \in X$ indutivamente usando a propriedade da especificação. Seja $t_1 = N_1$, $t_k = t_{k-1} + m_k + N_k$ para $k \geq 2$ e $\rho(k) := (k+1)(\mod 2) + 1$. Seja $z_1 = x_1$. Seja z_2 satisfazendo

$$d_{N_1}(z_2, z_1) < \varepsilon/4 \text{ e } d_{N_2}(f^{N_1+m_2}z_2, x_2) < \varepsilon/4.$$

Seja z_k satisfazendo

$$d_{t_{k-1}}(z_{k-1}, z_k) < \varepsilon/2^k \text{ e } d_{N_k}(f^{t_{k-1}+m_k}z_k, x_{\rho_k}) < \varepsilon/2^k$$

Observe que se $q \in \bar{B}t_k(z_k, \varepsilon/2^{k-1})$, então, pela desigualdade triangular

$$\begin{aligned} d_{t_{k-1}}(q, z_{q-1}) &\leq d_{t_{k-1}}(q, z_k) + d_{t_{k-1}}(z_k, z_{k-1}) \\ &< \frac{\varepsilon}{2^{k-1}} + \frac{\varepsilon}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2^{k-1}} + \frac{\varepsilon}{2^{k-1}} = \frac{\varepsilon}{2^{k-2}}. \end{aligned}$$

logo $\bar{B}_{t_k(z_k}, \varepsilon/2^{k-1}) \subset \bar{B}_{t_{k-1}(z_{k-1}}, \varepsilon/2^{k-2})$. Então, temos aqui uma sequência decrescente de compactos encaixados, logo, $\bigcap_{k\geq 1} \bar{B}_{t_k}(z_k, \varepsilon/2^{k-1}) \neq \emptyset$ e, além disso, esta intersecção é um ponto. Definamos:

$$p := \bigcap_{k\geq 1} \bar{B}_{t_k}(z_k, \varepsilon/2^{k-1}).$$

Para $k \geq 2$, seja $p_k := f^{t_{k-1}+m_k}p$. Sendo,

$$d_{N_k}(p_k, f^{t_{k-1}+m_k}z_k) \leq \varepsilon/2^{k-1} \text{ e } d_{N_k}(f^{t_{k-1}+m_k}z_k, x_{\rho(k)}) < \varepsilon/2^k$$

segue, pela desigualdade triangular que $d_{N_k}(p_k, x_{\rho(k)}) < \varepsilon/2^{k-2}$. Logo,

$$\begin{aligned} \left|S_{N_k}\varphi(p_k) - S_{N_k}\varphi(x_{\rho(k)})\right| &= \left|\sum_{i=0}^{N_k-1}\varphi(f^i(p_k)) - \sum_{i=0}^{N_k-1}\varphi(f^i(x_{\rho(k)}))\right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{N_k-1}\left|\varphi(f^i(p_k)) - \varphi(f^i(x_{\rho(k)}))\right| \leq \sum_{i=0}^{N_k-1} Var(\varphi, \varepsilon/2^{k-2}) \\ &= N_k Var(\varphi, \varepsilon/2^{k-2}). \end{aligned}$$

ou seja,
$$\left|S_{N_k}\varphi(p_k) - S_{N_k}\varphi(x_{\rho(k)})\right| \le N_k Var(\varphi, \varepsilon/2^{k-2})$$
Dividindo ambos os membros por N_k e considerando que $\lim_{k\to\infty} Var(\varphi, \varepsilon/2^{k-2}) = 0$, temos
$$\left|\frac{1}{N_k} S_{N_k}\varphi(p_k) - \int \varphi d\mu_{\rho(k)}\right| \to 0, \tag{4.1}$$
quando fazemos $k \to \infty$.

Por outro lado,
$$\begin{aligned}
|S_{N_k}\varphi(p_k) - S_{t_k}\varphi(p)| &= \left|\sum_{i=0}^{N_k-1} \varphi(f^i(p_k)) - \sum_{i=0}^{t_k-1} \varphi(f^i(p))\right| \\
&= \left|\sum_{i=0}^{N_k-1} \varphi(f^i(f^{t_{k-1}+m_k}p)) - \sum_{i=0}^{t_k-1} \varphi(f^i(p))\right| \\
&= \left|\sum_{i=t_{k-1}+m_k}^{N_k-1} \varphi(f^i(p)) - \sum_{i=0}^{t_k-1} \varphi(f^i(p))\right| \\
&= \left|\sum_{i=0}^{t_{k-1}+m_k-1} \varphi(f^i(p))\right| \le (t_{k-1}+m_k)\|\varphi\|.
\end{aligned}$$
onde $\|\varphi\| = \max\{|\varphi(f^i(p))| : i = 0, 1, 2, ..., t_{k-1}+m_k-1\}$ ou seja,
$$\left|\frac{1}{t_k} S_{N_k}\varphi(p_k) - \frac{1}{t_k} S_{t_k}\varphi(p)\right| \le \frac{1}{t_k}(t_{k-1}+m_k)\|\varphi\|$$
daí podemos usar o fato que $\frac{N_k}{t_k} \to 1$ e $\frac{t_{k-1}+m_k}{t_k} \to 0$ (veja o lema 4.3) para provar que
$$\left|\frac{1}{N_k} S_{N_k}\varphi(p_k) - \frac{1}{t_k} S_{t_k}\varphi(p)\right| \to 0. \tag{4.2}$$
Por 4.1 e 4.2, segue que
$$\left|\frac{1}{t_k} S_{t_k}\varphi(p) - \int \varphi d\mu_{\rho(k)}\right| \to 0$$
e portanto $p \in \hat{X}(\varphi, f)$. □

Lema 4.3. *Sejam $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ como acima. Então temos:*

1. $\frac{N_k}{t_k} \to 1$
2. $\frac{t_{k-1}+m_k}{t_k} \to 0.$

Demonstração. De fato. Para justificar 1, note que $\frac{N_k}{t_k} = \frac{N_k}{t_{k-1}+m_k+N_k} = \frac{1}{1+\frac{t_{k-1}}{N_k}+\frac{m_k}{N_k}}$.
$\frac{m_k}{N_k} \to 0$, trivialmente.
Verificaremos agora que o mesmo vale para $\frac{t_{k-1}}{N_k}$. É fácil ver que $t_k > \sum_{i=2}^{k} m_i + \sum_{j=1}^{k} e^{m_j}$ e pela escolha de $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$, temos $N_{k+1} > e^{\sum_{j=1}^{k}(N_j+m_j)}$. Provaremos que $e^{\sum_{j=1}^{k}(N_j+m_j)} > \sum_{i=2}^{k} m_i + \sum_{j=1}^{k} e^{m_j}$. Usaremos indução em k. Assumiremos que $m_0 = 0$.
Para $k = 2$, temos

$$e^{(N_1+m_2)+(N_2+m_2)} = e^{N_1} \cdot e^{m_1} \cdot e^{N_2} \cdot e^{m_2} > e^{m_1} + e^{m_2} + m_2$$

Suponha válido para k, ou seja

$$e^{\sum_{j=1}^{k}(N_j+m_j)} > \sum_{i=2}^{k} m_i + \sum_{j=1}^{k} e^{m_j}$$

então

$$e^{\sum_{j=1}^{k+1}(N_j+m_j)} > e^{\sum_{j=1}^{k}(N_j+m_j)} > \sum_{i=2}^{k} m_i + \sum_{l=1}^{k} e^{m_l}$$

A última desigualdade continua valendo se acrescentarmos à direita m_{k+1} e $e^{m_{k+1}}$ que são valores muito pequenos logo

$$e^{\sum_{j=1}^{k+1}(N_j+m_j)} > \sum_{i=2}^{k} m_i + \sum_{l=1}^{k+1} e^{m_l}.$$

Como $e^{\sum_{j=1}^{k}(N_j+m_j)}$ cresce muito rápido e $\sum_{i=2}^{k-1} m_i + \sum_{l=1}^{k} e^{m_l}$ cresce muito lentamente, temos que

$$\frac{t_{k-1}}{N_k} \to 0$$

e, portanto , que

$$\frac{N_k}{t_k} \to 1.$$

Justifiquemos agora 2. Note que:
$\frac{t_{k-1}+m_k}{t_k} = \frac{t_{k-1}}{t_k}^{\nearrow 0} + \frac{m_k}{t_k}^{\nearrow 0} \to 0.$ □

4.2 Limites inferior em entropia topológica e pressão

Mostraremos como construir um ponto irregular usando a propriedade da especificação. Agora vamos descrever a nossa estratégia para construir uma quantidade suficientemente grande de pontos irregulares tal que o conjunto irregular tenha entropia topológica total. O resultado que o conjunto irregular tem entropia topológica total (se não for vazio) para as aplicações contínuas com a propriedade de especificação foi devido a [EKL]. O autor deu uma prova independente da prova dada aqui. Esboçamos as ideias por trás da demonstração do resultado para "entropia total". Isso será til para a compreensão do resultado para pressão topológica, que é mais geral.

Exigimos dois ingredientes principais: Princípio da Distribuição de Entropia (veja [TV2]) e a fórmula de Katok para entropia métrica [Kat].

Lema 4.4 (Princípio de distribuição da entropia)**.** *. Seja $f : X \to X$ uma transformação contínua. Seja $Z \subseteq X$ um boreliano arbitrário. Suponha que exista uma constante $s \geq 0$ tal que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, podemos encontrar uma medida de probabilidade de Borel $\mu = \mu_\varepsilon$ (não necessariamente invariante), uma constante $C(\varepsilon) > 0$ e um inteiro $N(\varepsilon)$ satisfazendo $\mu_\varepsilon(Z) > 0$ e $\mu_\varepsilon(B_n(x,\varepsilon)) \leq C(\varepsilon)e^{-ns}$, para cada bola $B_n(x,\varepsilon)$ tal que $B_n(x,\varepsilon) \cap Z \neq \emptyset$ e $n \geq N(\varepsilon)$. Então $h_{top}(Z) \geq s$.*

Demonstração. Escolhamos $\varepsilon > 0$ e μ_ε satisfazendo as condições do teorema. Seja $\Gamma = \{B_{n_i}(x_i,\varepsilon)\}_i$ uma cobertura para Z com todos $n_i \geq N$ para algum $N \geq N(\varepsilon)$. Iremos assumir que $B_{n_i}(x_i,\varepsilon) \cap Z \neq \emptyset$ para cada i. Então

$$\begin{aligned} Q(Z,s,\Gamma) &= \sum_i \exp(-sn_i) \\ &\geq C(\varepsilon)^{-1} \sum_i \mu_\varepsilon(B_n(x,\varepsilon)) \\ &\geq C(\varepsilon)^{-1}\mu_\varepsilon(Z) > 0. \end{aligned}$$

Então, $M(Z,s,\varepsilon,N) \geq C(\varepsilon)^{-1}\mu_\varepsilon(Z) > 0$ para todo $N \geq N(\varepsilon)$. Portanto, $m(Z,s,\varepsilon) > 0$ e $h_{top}(Z,\varepsilon) \geq s$. Logo, o resultado segue. □

Proposição 4.1 (Fórmula de Katok para entropia métrica)**.** *. Sejam (X,d) um espaço métrico compacto, $f : X \to X$ uma aplicação contínua e μ uma medida ergódica invariante. Para $\varepsilon > 0$ e $\gamma \in (0,1)$, denotamos por $N^\mu(\gamma,\varepsilon,n)$ a menor cardinalidade dos conjuntos que (n,ε)-geram um conjunto com μ-medida maior que $1-\gamma$. Temos*

$$h_\mu = \lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log N^\mu(\gamma,\varepsilon,n) = \lim_{\varepsilon\to 0}\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log N^\mu(\gamma,\varepsilon,n).$$

Resumidamente, nossa estratégia é a seguinte: Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário.

1. Tomemos duas medidas ergódicas μ_1, μ_2 com $\int \varphi d\mu_1 \neq \int \varphi d\mu_2$ e $h_{\mu_i} > h_{top}(f) - \varepsilon$ para $i = 1, 2$.

2. Usamos a fórmula de Katok para encontrar uma sequência G_k de conjuntos $(n_k, 2\varepsilon)$-separados com $n_k \to \infty$ tal que $\#G_k \approx \exp(n_k h_{\mu_{\rho(k)}})$ e se $x \in G_{n_k} \approx n_k \int \varphi d\mu_{\rho(k)}$.

3. Pelo método do lema 4.2, usamos a propriedade da especificação para construir pontos que acompanham pontos tomados de $G_1, \ldots, G_k, \ldots$ respectivamente. O conjunto de todos estes pontos é um fractal $D \subset \hat{X}(\varphi, f)$.

4. Construiremos uma medida adequada em D para uma aplicação do Principio de Distribuição da Entropia. A ideia é a seguinte: Seja $\mu_k = \frac{1}{\#G_k}\sum_{x\in G_k}\delta_x$. Como G_k é um conjunto (n_k,ε)-separado, então

$$\mu_k(B_{n_k}(q,\varepsilon)) \leq \#G_k^{-1} \approx \exp\{-n_k(h_{top}(f) - \varepsilon)\}.$$

   Definimos μ com sendo o limite fraco* de medidas definidas de forma similar a μ_k.

Capítulo 5

O conjunto irregular para aplicações com especificação possui pressão topológica total

Dado um espaço métrico compacto (X, d), uma aplicação contínua $f : X \to X$ e um potencial contínuo $\varphi : X \to \mathbb{R}$, relembremos que o conjunto irregular para φ é definido por

$$\hat{X}(\varphi, f) = \left\{ x \in X : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f^i(x)) \text{ não existe} \right\}.$$

O conjunto irregular aparece naturalmente no contexto da análise multifractal, onde podemos decompor o espaço X na união disjunta

$$X = \bigcup_{\alpha\in\mathbb{R}} X(\varphi, \alpha) \cup \hat{X}(\varphi, f),$$

onde $X(\varphi, \alpha)$ é o conjunto de pontos para o qual a média de Birkhoff de φ é igual a α.

Resultado principal. Se f é expansora, então $\hat{X}(\varphi, f)$ possui pressão topológica (portanto, entropia topológica) total ou é vazio.

Observação 5.1. *Utilizaremos h_u ao invés de $h_u(f)$.*

5.1 Resultados

Enunciaremos o teorema principal do qual decorre, como corolário, o resultado principal desta dissertação e introduziremos as técnicas chaves usadas na demonstração.

Teorema 5.1. *Seja (X, d) um espaço métrico compacto e $f : X \to X$ uma aplicação contínua com a propriedade da especificação. Assumindo que $\varphi \in C(X)$ satisfaz $\inf_{\mu\in M_f(X)} \int \varphi d\mu < \sup_{\mu\in M_f(X)} \int \varphi d\mu$. Então $P_{\hat{X}(\varphi,f)}(\psi) = P_X^{classic}(\psi)$ para todo $\psi \in C(X)$.*

Observemos que o lema 2.3 nos dá uma outra interpretação para a afirmação $\inf_{\mu\in M_f(X)}\int\varphi d\mu<\sup_{\mu\in M_f(X)}\int\varphi d\mu$. Consideraremos a outra afirmação, porque é mais natural para a demonstração que daremos. Se nossa afirmação falhar, então $\hat{X}(\varphi,f)=\emptyset$. De fato, provaremos uma versão levemente mais forte do teorema.

Teorema 5.2. *Seja (X,d) um espaço métrico compacto, $f:X\to X$ uma aplicação contínua e seja $X'\subseteq X$ um conjunto de Borel f-invariante. Assumimos que f satisfaz a propriedade da especificação em X'. Assumimos ainda que $\varphi\in C(X)$ satisfaz*

$$\inf_{\mu\in M_f(X')}\int\varphi d\mu<\sup_{\mu\in M_f(X')}\int\varphi d\mu.$$

Então para todo $\psi\in C(X)$,

$$P_{\hat{X}(\varphi,f)}(\psi)\geq\sup\left\{h_\mu+\int\psi d\mu:\mu\in M_f(X')\right\}.$$

Se $\sup\left\{h_\mu+\int\psi d\mu:\mu\in M_f(X')\right\}=P_X^{classic}(\psi)$, então temos $P_{\hat{X}(\varphi,f)}(\psi)=P_X^{classic}(\psi)$.

Corolário 5.1. *No teorema acima, assumindo apenas que f é contínua e expansora, então temos a mesma conclusão.*

Se caso $M_f(X')$ for denso em $M_f(X)$, precisaremos assumir somente que

$$\inf_{\mu\in M_f(X)}\int\varphi d\mu<\sup_{\mu\in M_f(X)}\int\varphi d\mu.$$

Proposição 5.1 (Princípio de Distribuição da Pressão)**.** *Seja $f:X\to X$ uma transformação contínua. Seja $Z\subseteq X$ um conjunto de Borel arbitrário. Suponha que exista uma constante $s\geq 0$ tal que, para $\varepsilon>0$ suficientemente pequeno, podemos encontrar uma medida de probabilidade boreliana μ_ε, um inteiro $N(\varepsilon)$ e uma constante $K(\varepsilon)$ satisfazendo $\mu_\varepsilon(Z)>0$ e $\mu_\varepsilon(B_n(x,\varepsilon))\leq K(\varepsilon)\exp\left\{-ns+\sum_{i=0}^{n-1}\psi(f^i(x))\right\}$, para toda bola $B_n(x,\varepsilon)$ tal que $B_n(x,\varepsilon)\cap Z\neq\emptyset$ e $n\geq N(\varepsilon)$. Então, $P_Z(\psi)\geq s$.*

Proposição 5.2 (Generalização do princípio de Distribuição da Pressão)**.** *Seja $f:X\to X$ uma transformação contínua. Seja $Z\subseteq X$ um conjunto de Borel arbitrário. Suponha que existam $\varepsilon>0$ e $s\geq 0$ tal que possamos encontrar uma sequência de medidas de probabilidade boreliana μ_k, uma constante $k>0$ e um inteiro N satisfazendo*

$$\limsup_{k\to\infty}\mu_k(B_n(x,\varepsilon))\leq K\exp\{-ns+\sum_{i=0}^{n-1}\psi(f^i(x))\}$$

para toda bola $B_n(x,\varepsilon)$ tal que $B_n(x,\varepsilon)\cap Z\neq\emptyset$ e $n>N$. Além disso, assumiremos que o limite inferior ν da sequência μ_k satisfaz $\nu(Z)>0$. Então, $P_Z(\psi,\varepsilon)\geq s$.

Demonstração. Escolhamos $\varepsilon>0$ e ν satisfazendo as condições do teorema. Seja μ_k denotando uma subsequência de medidas que converge para ν. Seja $\Gamma=\{B_{n_i}(x_i,\varepsilon)\}_i$

cobrindo Z com todo $n_i \geq N'$ para algum $N' \geq N$. Podemos assumir que $B_{n_i}(x_i, \varepsilon) \cap Z \neq \emptyset$ para todo i. Então

$$
\begin{aligned}
Q(Z, s, \Gamma, \psi) &= \sum_i \exp\left\{-sn_i + \sup_{y \in B_{n_i}(x_i,\varepsilon)} \sum_{k=0}^{n_i-1} \psi(f^k(y))\right\} \\
&\geq \sum_i \exp\left\{-sn_i + \sum_{k=0}^{n_i-1} \psi(f^k(x_i))\right\} \\
&\geq K^{-1} \sum_i \limsup_{k\to\infty} \mu_k(B_n(x_i, \varepsilon)) \\
&\geq K^{-1} \sum_i \liminf_{j\to\infty} \mu_{k_j}(B_n(x_i, \varepsilon)) \\
&\geq K^{-1} \sum_i \nu(B_n(x_i, \varepsilon)) \geq K^{-1}\nu(Z) > 0.
\end{aligned}
$$

Nossa conclusão, na última linha, se justifica porque para todo conjunto aberto U, se ν_k converge para ν na topologia fraca*, então $\liminf_{k\to\infty} \nu_k(U) \geq \nu(U)$. Concluímos que $M(Z, s, \varepsilon, N', \psi) \geq K^{-1}\nu(Z) > 0$ para todo $N' \geq N$. Assim, $m(Z, s, \varepsilon, \psi) > 0$ e $P_Z(\psi, \varepsilon) \geq s$. □

O seguinte resultado generaliza a fórmula de Katok para entropia métrica. Em [Men], Mendoza dar uma prova baseada na ideia da prova de Misiurewicz do princípio variacional. Embora ele situe o resultado sobre a afirmação que f é um homeomorfismo, sua prova vale para f contínua.

Proposição 5.3. *Seja (X, d) um espaço métrico compacto, $f : X \to X$ uma aplicação contínua e μ uma medida invariante ergódica. Para $\varepsilon > 0$, $\gamma \in (0, 1)$ e $\psi \in C(X)$, definimos*

$$
N^\mu(\psi, \gamma, \varepsilon, n) = \inf\left\{\sum_{x\in S} \exp\left(\sum_{i=0}^{n-1} \psi(f^i(x))\right)\right\},
$$

onde o ínfimo é tomado sobre todos conjuntos S que (n, ε)-geram algum conjunto Z com $\mu(Z) \geq 1 - \gamma$. Temos

$$
h_u + \int \psi d\mu = \lim_{\varepsilon\to 0} \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log N^\mu(\psi, \gamma, \varepsilon, n).
$$

A fórmula também vale se substituirmos o $\liminf$ *por* $\limsup$.

Começaremos agora a prova do teorema 5.2. Para fim de esclarecimentos, achamos ser conveniente dar a prova sobre umas certas hipóteses adicionais, que explicaremos depois como retirar.

Teorema 5.3. *Suponha assumida as hipóteses do teorema 5.2 e fixado $\psi \in C(X)$. Seja*

$$
C := \sup\left\{h_\mu + \int \psi d\mu : \mu \in M_f(X')\right\}.
$$

Suponhamos ainda que $P_X^{classic}(\psi)$ é finita e que para todo $\gamma > 0$, existem medidas ergódicas $\mu_1, \mu_2 \in M_f(X')$ que satisfazem

1. $h_{\mu_i} + \int \psi d\mu_i > C - \gamma$, *para* $i = 1, 2$,

2. $\int \varphi d\mu_1 \neq \int \varphi d\mu_2$.

Então, $P_{\hat{X}(\varphi,f)}(\psi) \geq C$*. Se* $C = P_X^{classic}(\psi)$*, por exemplo, quando* $X' = X$*, então* $P_{\hat{X}(\varphi,f)}(\psi) = P_X^{classic}(\psi)$*.*

A hipótese de que $P_X^{classic}(\psi)$ é finita é fácil de ser removida e é incluída somente por conveniência de notação. De um resultado de [PS1], damos uma breve prova de que as hipóteses do teorema 5.1 implicam 'as dos teorema 5.3. Explicaremos como modificar a prova do teorema 5.3 para obter uma prova idêntica para o teorema 5.2.

Prova que as hipóteses de 5.1 implicam as hipóteses de 5.3. Seja μ_1 ergódica satisfazendo $h_{\mu_1} + \int \psi d\mu_1 > C - \gamma/3$, seja $\nu \in M_f(X)$ satisfazendo $\int \varphi d\mu_1 \neq \int \varphi d\nu$. Seja $\nu' = t\mu_1 + (1-t)\nu$ onde $t \in (0,1)$ é escolhido suficientemente próximo de 1 tal que $h_{\nu'} + \int \psi d\nu' > C - 2\gamma/3$. Por [PS1], quando f possui a propriedade chamada de propriedade do g-quase produto, que é mais fraca que a da especificação, podemos encontrar uma sequência de medidas ergódicas $\nu_n \in M_f(X)$ tal que $h_{\nu_n} \to h_{\nu'}$ quando $\nu_n \to \nu'$ na topologia fraca*(isto segue do teorema B de [EKW] onde f possui especificação e a aplicação $\mu \to h_\mu$ é semi-contínua superiormente). Além do mais, podemos escolher uma medida desta sequência, que chamamos μ_2, a qual satisfaz $h_{\mu_2} + \int \psi d\mu_2 > C - \gamma$ e $\int \varphi d\mu_1 \neq \int \varphi d\mu_2$. □

5.2 Prova do teorema 5.3

Seja $\gamma > 0$ pequeno fixado. Tomemos as medidas μ_1 e μ_2 dados em nossa hipótese. Escolhemos $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\left| \int \varphi d\mu_1 - \int \varphi d\mu_2 \right| > 4\delta.$$

Seja $\rho : \mathbb{N} \to \{1, 2\}$ dado por $\rho(k) = (k+1)(\mod 2) + 1$. Escolhemos uma sequência estritamente decrescente $\delta_k \to 0$ com $\delta_1 < \delta$ e uma sequência estritamente crescente $l_k \to \infty$ tal que o conjunto

$$Y_k := \left\{ x \in X' : \left| \frac{1}{n} S_n\varphi(x) - \int \varphi d\mu_{\rho(k)} \right| < \delta_k \text{ para todo } n \geq l_k \right\} \tag{5.1}$$

satisfaz $\mu_{\rho(k)}(Y_k) > 1 - \gamma$ para cada k. Isto é claramente possível pelo teorema ergódico de Birkhoff.

O seguinte lema segue facilmente da proposição 5.3.

Lema 5.1. *Para todo* $\varepsilon > 0$ *suficientemente pequeno, podemos encontrar uma sequência* $n_k \to \infty$ *e uma coleção enumerável de conjuntos finitos* $G_1, G_2, \ldots$ *tal que cada* G_k *é um conjunto* $(n_k, 4\varepsilon)$*-separado para* Y_k *e* $M_k := \sum_{x \in G_k} \exp\left(\sum_{i=0}^{n_k-1} \psi(f^i x)\right)$ *satisfaz*

$$M_k \geq \exp(n_k(C - 4\gamma)).$$

Além disso, a sequência n_k *pode ser escolhido tal que* $n_k \geq l_k$ *e* $n_k \geq 2^{m_k}$*, onde* $m_k = m(\varepsilon/2^k)$ *é o mesmo na definição da propriedade da especificação.*

Demonstração. Pela proposição 5.3, tomemos ε suficientemente pequeno tal que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log N^{\mu_i}(\psi, \gamma, 4\varepsilon, n) \geq h_{\mu_i} + \int \psi d\mu_i - \gamma \geq C - 2\gamma \text{ para } i = 1, 2.$$

Para $A \subset X$, relembramos que

$$Q_n(A, \psi, \varepsilon) = \inf \left\{ \sum_{x\in G} \exp \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \psi(f^k(x)) \right) : G \text{ conjunto } (n, \varepsilon) - \text{gerador para } A \right\}.$$

$$P_n(A, \psi, \varepsilon) = \sup \left\{ \sum_{x\in G} \exp \left(\sum_{k=0}^{n-1} \psi(f^k(x)) \right) : G \text{ conjunto } (n, \varepsilon) - \text{separado para } A \right\}.$$

Como $\mu_{\rho(k)}(Y_k) > 1 - \gamma$ para cada k, é imediato que

$$Q_n(Y_k, \psi, 4\varepsilon) \geq N^{\mu_{\rho(k)}}(\psi, \gamma, 4\varepsilon, n).$$

Seja $M(k, n) = P_n(Y_k, \psi, 4\varepsilon)$. Como $Q_n(A, \psi, \varepsilon) \leq P_n(A, \psi, \varepsilon)$, para cada k obtemos

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log M(k, n) \geq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log N^{\mu_{\rho(k)}}(\psi, \gamma, 4\varepsilon, n) \geq C - 2\gamma.$$

Podemos agora escolher uma sequência $n_k \to \infty$ satisfazendo a hipótese do lema tal que

$$\frac{1}{n_k} \log M(k, n_k) \geq C - 3\gamma.$$

Agora para cada k, seja G_k escolhido dos conjuntos $(n_k, 4\varepsilon)$-separados para Y_k que satisfazem

$$\frac{1}{n_k} \log \left\{ \sum_{x\in G_k} \exp \left(\sum_{i=0}^{n_k-1} \psi(f^i x) \right) \right\} \geq \frac{1}{n_k} \log M(k, n_k) - \gamma.$$

Seja $M_k := \sum_{x\in G_k} \exp\left(\sum_{i=0}^{n_k-1} \psi(f^i x)\right)$, então

$$\begin{aligned} \frac{1}{n_k} \log M_k &\geq \frac{1}{n_k} \log M(k, n_k) - \gamma \geq C - 4\gamma \Rightarrow \\ \log M_k &\geq n_k(C - 4\gamma) \Rightarrow \\ M_k &\geq \exp n_k(C - 4\gamma). \end{aligned}$$

□

Escolhemos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $Var(\psi, 2\varepsilon) < \gamma$ e $Var(\phi, 2\varepsilon) < \delta$, e fixemos todos o ingredientes provenientes do lemma 5.1.

Nossa estratégia é construir um determinado fractal $D \subset \hat{X}(\varphi, f)$, no qual poderemos definir uma sequência de medidas adequadas para uma aplicação da Generalização do princípio de distribuição da pressão.

5.2.1 Construção de um fractal Morán D

Começaremos pela construção de duas famílias intermediárias de conjuntos finitos. A primeira família, denotada por $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, consiste de pontos que acompanham um número muito grande N_k de pontos de G_k. A segunda família, denotada por $\{J_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, consiste de pontos que acompanham pontos (tomados em ordem) de $R_1, R_2, ..., R_k$. Fazendo N_k crescer para infinito muito rapidamente, o que percebe-se é que a média ergódica de um ponto em J_k é próxima da média ergódica de seu ponto correspondente em R_k.

Construção dos conjuntos intermediários $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$

Escolhamos uma sequência N_k que cresce para ∞ suficientemente rápido tal que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{n_{k+1}+m_{k+1}}{N_k} = 0 \text{ e } \lim_{k\to\infty} \frac{N_1(n_1+m_1)+...+N_k(n_k+m_k)}{N_{k+1}} = 0. \quad (5.2)$$

Enumeraremos os pontos dos conjuntos G_k provenientes do lema 5.1 e escrevemos cada G_k como segue

$$G_k = \{x_i^k : i = 1, 2, ..., \#G_k\}.$$

Escolhemos um k e o fixemos, e consideremos o conjunto de palavras de comprimento N_k com entradas em $\{1, 2, ..., \#G_k\}$. Cada palavra $\underline{i} = (i_1, ..., i_{N_k})$ representa um ponto em $G_k^{N_k}$. Usando a propriedade da especificação, podemos escolher um ponto $y := y(i_1, ..., i_{N_k})$ que satisfaz

$$d_{n_k}(x_{i_j}^k, f^{a_j^k}(y)) < \frac{\varepsilon}{2^k}$$

para todo $j \in \{1, ..., N_k\}$, onde $a_j^k = (j-1)(n_k+m_k)$. Em outras palavras, y sombreia ordenadamente cada um dos pontos $x_{i_j}^k$ durante um tempo n_k e depois dá um "pulo" de tamanho m_k. Definimos

$$R_k = \{y(i_1, ..., i_{N_k}) \in X : (i_1, ..., i_{N_k}) \in \{1, ..., \#G_k\}^{N_k}\}.$$

Seja $c_k = N_k n_k + (N_k-1)m_k$. Então c_k é a quantidade de tempo para que a órbita dos pontos em G_k seja prescrita. Temos como corolário do lema abaixo, que sequências distintas $i_1, ..., i_{N_k}$, geram pontos distintos em R_k. Então a cardinalidade de R_k, que iremos denotar por $\#R_k$, é igual a $\#G_k^{N_k}$.

Lema 5.2. *Sejam $\underline{i}$ e $\underline{j}$ palavras distintas em $\{1, 2, ..., \#G_k\}^{N_k}$. Então $y_1 := y(\underline{i})$ e $y_2 := y(\underline{j})$ são pontos $(c_k, 3\varepsilon)$-separados (isto é, $d_{c_k}(y_1, y_2) > 3\varepsilon$).*

Demonstração. Seja $\underline{i} \neq \underline{j}$, então existe l, tal que $i_l \neq j_l$. Temos, pela definição de R_k

$$d_{n_k}(x_{i_l}^k, f^{a_l^k}(y_1)) < \frac{\varepsilon}{2^k} \text{ e } d_{n_k}(x_{j_l}^k, f^{a_l^k}(y_2)) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

e como G_k é $(n_k, 4\varepsilon)$-separado, temos

$$d_{n_k}(x_{i_l}^k, (x_{j_l}^k) > 4\varepsilon.$$

Combinando essas desigualdades, e observando que $N_k \geq l$, temos

$$\begin{aligned} d_{c_k}(y_1, y_2) &\geq d_{n_k}(f^{a^k_{N_k}}(y_1), f^{a^k_k}(y_2)) \geq d_{n_k}(f^{a^k_l}(y_1), f^{a^k_l}(y_2)) \\ &\geq d_{n_k}(x^k_{i_l}, x^k_{j_l}) + d_{n_k}(x^k_{i_l}, f^{a^k_l}(y_1)) - d_{n_k}(x^k_{j_l}, f^{a^k_l}(y_2)) \\ &\geq d_{n_k}(x^k_{i_l}, x^k_{j_l}) - d_{n_k}(x^k_{i_l}, f^{a^k_l}(y_1)) - d_{n_k}(x^k_{j_l}, f^{a^k_l}(y_2)) \\ &> 4\varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = 3\varepsilon. \end{aligned}$$

□

Construção dos conjuntos intermediários $\{J_k\}_{k\in\mathbb{N}}$

Usaremos a propriedade da especificação para construir pontos cujas órbitas sombreiam pontos (tomados em ordem) de $R_1, R_2, ..., R_k$. Formalmente, o que faremos é definir J_k indutivamente. Seja $J_1 = R_1$. Construiremos J_{k+1} de J_k. Seja $x \in J_k$ e $y \in R_{k+1}$. Seja $t_1 = c_1$ e $t_{k+1} = t_k + m_{k+1} + c_{k+1}$. Usando a especificação, podemos encontrar um ponto $z := z(x, y)$ que satisfaz

$$d_{t_k}(x, z) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \text{ e } d_{c_{k+1}}(y, f^{t_k+m_{k+1}}(z)) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

ou seja, $z = z(x, y)$ sombreia o ponto x durante um tempo t_k, depois ele dá um "pulo" m_{k+1} e então começa a sombrear y durante um tempo c_{k+1}. Grosseiramente falando, estamos "colando" um pedaço da órbita de x com um pedaço da órbita de y.

Definamos $J_{k+1} = \{z(x, y) : x \in J_k, y \in R_{k+1}\}$. Note que t_k é a quantidade de tempo necessário para que a órbita de pontos em J_k possa ser prescrita, uma vez que pontos construídos desta forma são distintos (isso é uma consequência do lema a seguir). Assim, temos

$$\#J_k = \#R_1 \cdot ... \cdot \#R_k = \#G_1^{N_1} \cdot ... \cdot \#G_k^{N_k}.$$

Este fato segue diretamente do seguinte lema.

Lema 5.3. *Para todo $x \in J_k$ e $y_1, y_2 \in R_{k+1}$, com $y_1 \neq y_2$ temos*

$$d_{t_k}(z(x, y_1), z(x, y_2)) < \frac{\varepsilon}{2^k} \text{ e } d_{t_{k+1}}(z(x, y_1), z(x, y_2)) > 2\varepsilon.$$

Então, J_k um conjunto $(t_{k+1}, 2\varepsilon)$-separado. Em particular, se $z, z' \in J_k$, então

$$\bar{B}_{t_k}(z, \frac{\varepsilon}{2^k}) \cap \bar{B}_{t_k}(z', \frac{\varepsilon}{2^k}) = \emptyset.$$

Demonstração. Seja $p := z(x, y_1)$ e $q := z(x, y_2)$. A primeira desigualdade é trivial pela nossa construção pois, $d_{t_k}(x, z_i) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$ para $i = 1, 2$, então pela desigualdade triangular, $d_{t_k}(z_1, z_2) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \frac{\varepsilon}{2^k}$.

Da mesma forma que fizemos no lema 5.2, obtemos a segunda desigualdade como segue:

$$\begin{aligned} d_{t_{k+1}}(p, q) &\geq d_{c_{k+1}}(f^{t_k+m_{k+1}}(p), f^{t_k+m_{k+1}}(q)) \\ &\geq d_{c_{k+1}}(y_1.y_2) + d_{c_{k+1}}(y_1, f^{t_k+m_{k+1}}(p)) - d_{c_{k+1}}(y_2, f^{t_k+m_{k+1}}(q)) \\ &\geq d_{c_{k+1}}(y_1, y_2) - d_{c_{k+1}}(y_1, f^{t_k+m_{k+1}}(p)) - d_{c_{k+1}}(y_2, f^{t_k+m_{k+1}}(q)) \\ &> 3\varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

A terceira afirmação é consequência direta da segunda, pois por J_k ser $(t_k, 2\varepsilon)$-separado, então para $z, z' \in J_k$ temos $d_{t_k}(z, z') > 2\varepsilon$, em particular $d_{t_k}(z, z') > \varepsilon/2^k$. $\square$

Definição 5.1. *Dizemos que $z \in J_{k+1}$* ***descende*** *de $x \in J_k$ se $z = z(x, y)$ para algum $y \in R_{k+1}$.*

Lema 5.4. *Se $z \in J_{k+1}$ descende de $x \in J_k$, então*

$$\bar{B}_{t_{k+1}}(z, \frac{\varepsilon}{2^k}) \subset \bar{B}_{t_k}(x, \frac{\varepsilon}{2^{k-1}}).$$

Demonstração. Seja $z' \in \bar{B}_{t_{k+1}}(z, \frac{\varepsilon}{2^k})$. Então, usando a desigualdade triangular,

$$\begin{aligned} d_{t_k}(z', x) &\leq d_{t_k}(z', z) + d_{t_k}(z, x) \leq d_{t_{k+1}}(z', z) + d_{t_k}(z, x) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2^k} + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} < \frac{\varepsilon}{2^k} + \frac{\varepsilon}{2^k} = \frac{\varepsilon}{2^{k-1}}. \end{aligned}$$

$\square$

Construção de um fractal de Morán D e uma sequência especial de medidas μ_k

Seja $D_k = \cup_{x \in J_k} \bar{B}_{t_k}(x, \frac{\varepsilon}{2^{k-1}})$. Pelo lema 5.4, $D_{k+1} \subset D_k$. Assim, temos uma sequência decrescente de conjuntos compactos, então a intersecção $D = \bigcap_k D_k$ não-vazia. Além do mais, cada ponto $p \in D$ pode ser representado unicamente por uma sequência $\underline{p} = (\underline{p}_1, \underline{p}_2, \underline{p}_3, ...)$ onde cada $\underline{p}_i = (p_1^i, ..., p_{N_i}^i) \in \{1, 2, ..., \#G_i\}^{N_i}$. Cada ponto em J_k pode ser unicamente representado por uma palavra finita $(\underline{p}_1, ..., \underline{p}_k)$.
Introduziremos algumas notações que nos serão úteis. Sejam $y(\underline{p}_i) \in R_i$ como definido na seção 5.2.1. Seja $z_1(\underline{p}) = y(\underline{p}_1)$ e procedendo indutivamente, seja $z_{i+1}(\underline{p}) = z(z_i(\underline{p}), y(\underline{p}_{i+1})) \in J_{i+1}$ definido como em 5.2.1. Podemos escrever $z_i(\underline{p})$ como $z(\underline{p}_1, ..., \underline{p}_i)$. Então, definimos p por

$$p = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \bar{B}_{t_i}(z_i(\underline{p}), \frac{\varepsilon}{2^{i-1}}).$$

É claro, pela nossa construção, que podemos representar unicamente cada ponto de D desta maneira.

Lema 5.5. *Dado $z = (\underline{p}_1, ..., \underline{p}_k) \in J_k$, temos para todo $i \in \{1, ..., k\}$ e para todo $l \in \{1, ..., N_i\}$,*

$$d_{n_i}(x^i_{p^i_l}, f^{t_{i-1}+m_{i-1}+(l-1)(m_i+n_i)}(z)) < 2\varepsilon.$$

Demonstração. Fixamos $i \in \{1, ..., k\}$ e $l \in \{1, ..., N_i\}$. Para $m \in \{1, ..., k-1\}$, seja $z_m = z(\underline{p}_1, ..., \underline{p}_m) \in J_m$. Seja $a = t_{i-1} + m_{i-1}$ e $b = (l-1)(m_i + n_i)$. Então

$$d_{n_i}(x^i_{p^i_l}, f^{a+b}(z)) < d_{n_i}(x^i_{p^i_l}, f^b(y)(\underline{p}_i)) + d_{n_i}(f^b(y)(\underline{p}_i), f^{a+b}(z_i)) + d_{n_i}(f^{a+b}(z_i), f^{a+b}(z)).$$

Pela nossa construção

$$d_{n_i}(x^i_{p^i_l}, f^b y(\underline{p}_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Também, pela construção, temos

$$d_{n_i}(f^b(y)(\underline{p}_i, f^{a+b}(z_i)) \leq d_{c_i}(y(\underline{p}_i), f^a(z)) < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}.$$

Temos,

$$\begin{aligned} d_{n_i}(f^{a+b}(z_i), f^{a+b}(z)) < d_{t_i}(z_i, (z)) &< d_{t_i}(z_i, z_{i+1}) + ... + d_{t_i}(z_{k-1}, z) \\ &< \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} + ... + \frac{\varepsilon}{2^k}. \end{aligned}$$

Combinando as desigualdades, obtemos $d_{n_i}(f^{a+b}(z), x^i_{p^i_l}) < \sum_{m=i}^{k} \frac{\varepsilon}{2^m} + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} < 2\varepsilon$, como queríamos. □

Agora definiremos medidas em D que produzem as estimativas requeridas para a aplicação do Princípio de distribuição da pressão. Para cada $z \in J_k$, associamos um número $L(z) \in (0, \infty)$. Usando esses números como referência definimos, para cada k, uma medida atômica centrada em J_k. Mais precisamente, se $z = z(\underline{p}_1, ..., \underline{p}_k)$, definimos

$$L_k(z) := L(\underline{p}_1) \dots L(\underline{p}_k).$$

onde, se $\underline{p}_i = (p^i_1, \dots, p^i_{N_i}) \in \{1, \dots, \#G_i\}^{N_i}$, então

$$L(\underline{p}_i) := \prod_{l=1}^{N_i} \exp S_{n_i}\psi(x^i_{p^i_l}).$$

Definimos

$$\nu_k := \sum_{z \in J_k} \delta_z L_k(z).$$

Normalizamos ν_k para obter uma sequência de medidas de probabilidades μ_k. Mais precisamente, sejam $\mu_k := \frac{1}{\kappa_k}\nu_k$, onde κ_k é a constante normalizante definida por:

$$\kappa_k := \sum_{x \in J_k} L_k(z).$$

Lema 5.6. *Vale a relação:* $\kappa_k = M_1^{N_1} \cdot \dots \cdot M_k^{N_k}$.

Demonstração. Notemos que

$$\begin{aligned} \sum_{\underline{p}_i \in \{1,...,\#G_i\}^{N_i}} L(\underline{p}_i) &= \sum_{\underline{p}_i \in \{1,...,\#G_i\}^{N_i}} \prod_{l=1}^{N_i} \exp S_{n_i}\psi(x^i_{p^i_l}) \\ &= \sum_{\underline{p}_i \in \{1,...,\#G_i\}^{N_i}} \exp S_{n_i}\psi(x^i_{p^i_1}) \cdot \dots \cdot \exp S_{n_i}\psi(x^i_{p^i_{N_i}}) \\ &= \sum_{p^i_1=1}^{\#G_i} \exp S_{n_i}\psi(x^i_{p^i_1}) \cdot \dots \cdot \sum_{p^i_{N_i}=1}^{\#G_i} \exp S_{n_i}\psi(x^i_{p^i_{N_i}}) \\ &= M_i^{N_i} \end{aligned}$$

Pela definição e sendo que cada $z \in J_k$ corresponde a uma única sequência $(\underline{p}_1, \ldots, \underline{p}_k)$, temos:

$$\begin{aligned}
\kappa_k = \sum_{z \in J_k} L_k(z) = \sum_{(\underline{p}_1,\ldots,\underline{p}_k)\in J_k} L_k(z) &= \sum_{(\underline{p}_1,\ldots,\underline{p}_k)\in J_k} L(\underline{p}_1)\ldots L(\underline{p}_k) \\
&= \sum_{\underline{p}_1 \in \{1,\ldots,\#G_1\}^{N_1}} L(\underline{p}_1)\cdot(L(\underline{p}_2)\ldots L(\underline{p}_k)) + \\
&+ \sum_{\underline{p}_2 \in \{1,\ldots,\#G_2\}^{N_2}} L(\underline{p}_2)\cdot(L(\underline{p}_1)\ldots L(\underline{p}_k)) + \ldots \\
&+ \sum_{\underline{p}_k \in \{1,\ldots,\#G_k\}^{N_k}} L(\underline{p}_k)\cdot(L(\underline{p}_1)\ldots L(\underline{p}_{k-1})) \\
&= \sum_{\underline{p}_1 \in \{1,\ldots,\#G_1\}^{N_1}} \cdots \sum_{\underline{p}_k \in \{1,\ldots,\#G_k\}^{N_k}} L(\underline{p}_1)\ldots L(\underline{p}_k) \\
&= \sum_{\underline{p}_1 \in \{1,\ldots,\#G_1\}^{N_1}} L(\underline{p}_1) \quad \cdots \sum_{\underline{p}_k \in \{1,\ldots,\#G_k\}^{N_k}} L(\underline{p}_k) \\
&= M_1^{N_1}\cdot\ldots\cdot M_k^{N_k}.
\end{aligned}$$

Então, segue o resultado. □

Lema 5.7. *Suponha que a medida ν é limite da sequência de medidas de probabilidade μ_k. Então, $\nu(D) = 1$.*

Demonstração. Suponha válida a hipótese, então $\nu = \lim_{k\to\infty} \mu_{l_k}$ para algum $l_k \to \infty$. Para um dado l fixado e todo $p \geq 0$, têm-se $\mu_{l+p}(D_l) = 1$, pois $\mu_{l+p}(D_{l+p}) = 1$ e $D_{l+p} \subseteq D_l$. Além disso, $\nu(D_l) \geq \limsup_{k\to\infty} \mu_{l_k}(D_l) = 1$. Daí segue que $\nu(D) = \lim_{l\to\infty} \nu(D_l) = 1$. □

De fato, a sequência μ_k converge. Porém, para o uso da Generalização do princípio de distribuição da pressão, não precisaremos usar este fato e por isso omitiremos a prova. Para uma demonstração detalhada, veja [TV2].

Verificaremos agora que $D \subset \hat{X}(\varphi, f)$.

Lema 5.8. *Para cada $p \in D$, a sequência $\frac{1}{t_k}\sum_{i=0}^{t_k-1}\varphi(f^i(p))$ é divergente.*

Demonstração. Escolhamos um ponto $p \in D$. Usando a notação de 5.2.1, seja $y_k := y(\underline{p}_k)$ e $z_k = z_k(\underline{p})$. Primeiro mostraremos que

$$\left|\frac{1}{c_k} S_{c_k}\varphi(y_k) - \int \varphi d\mu_{\rho(k)}\right| \to 0. \tag{5.3}$$

É fácil ver que $Var(\varphi, c) \to 0$ quando $c \to 0$, pois φ é contínua. Usaremos este fato e os seguintes limites

$$\lim_{k\to\infty} \frac{n_k N_k}{c_k} = 1, \lim_{k\to\infty} \frac{m_k(N_k - 1)}{c_k} = 0. \tag{5.4}$$

Esse limites seguem da afirmação que $n_k \geq 2^{m_k}$. De fato:

$$
\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \frac{n_k N_k}{c_k} &= \lim_{k\to\infty} \frac{n_k N_k}{n_k N_k + (N_k - 1)m_k} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(1 + \frac{(N_k-1)m_k}{\cdot} n_k N_k)} \longrightarrow 1
\end{aligned}
$$

Pois, como $n_k \geq 2^{m_k}$, então

$$
\frac{(N_k - 1)m_k}{N_k n_k} = \frac{m_k}{n_k} \nearrow^0 - \frac{m_k}{N_k m_k} \nearrow^0 .
$$

Da mesma forma,

$$
\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \frac{m_k(N_{k-1})}{c_k} &= \lim_{k\to\infty} \frac{m_k(N_k - 1)}{N_k n_k + (N_k - 1)m_k} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{N_k n_k}{(N_k-1)m_k} \nearrow \infty} \longrightarrow 0.
\end{aligned}
$$

Seja $a_j = (j-1)(n_k + m_k)$. Podemos escrever

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{N_k n_k + (N_k-1)m_k - 1} \varphi(f^i(y_k)) &= \sum_{i=0}^{n_k-1} \varphi(f^i(y_k)) + \sum_{i=n_k}^{n_k+(m_k-1)} \varphi(f^i(y_k)) + \sum_{i=n_k+m_k}^{n_k-1+n_k+m_k} \varphi(f^i(y_k)) \\
&+ \sum_{i=n_k+(n_k+m_k)}^{n_k+m_k-1+(n_k+m_k)} \varphi(f^i(y_k)) + \sum_{i=2(n_k+m_k)}^{n_k-1+2(n_k+m_k)} \varphi(f^i(y_k)) \\
&+ \sum_{i=n_k+2(n_k+m_k)}^{n_k+m_k-1+2(n_k+m_k)} \varphi(f^i(y_k)) + ... + \sum_{i=(N_k-1)(n_k+m_k)}^{N_k n_k+(N_k-1)m_k-1} \varphi(f^i(y_k)) \\
&= \sum_{j=1}^{N_k} S_{n_k}\varphi(f^{a_j}(y_k)) + \sum_{i=n_k}^{n_k+(m_k-1)} \varphi(f^i(y_k)) \\
&+ \sum_{i=n_k+(n_k+m_k)}^{n_k+m_k-1+(n_k+m_k)} \varphi(f^i(y_k)) + \sum_{i=n_k+2(n_k+m_k)}^{n_k+m_k-1+2(n_k+m_k)} \varphi(f^i(y_k)) \\
&+ ... + \sum_{i=n_k+(N_k-1)(n_k+m_k)}^{n_k+m_k-1+(N_k-1)(n_k+m_k)} \varphi(f^i(y_k)) \\
&= \sum_{j=1}^{N_k} S_{n_k}\varphi(f^{a_j}(y_k) + g_k.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
|g_k| \leq m_k(N_k - 1)\|\varphi\|.
$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\left|S_{c_k}\varphi(y_k) - c_k\int\varphi d\mu_{\rho(k)}\right| &\leq \left|\sum_{i=0}^{N_kn_k+(N_k-1)m_k-1}\varphi(f^i(y_k)) - c_k\int\varphi d\mu_{\rho(k)}\right| \\
&\leq \left|\sum_{j=1}^{N_k}S_{n_k}\varphi(f^{a_j}y_k) - c_k\int\varphi d\mu_{\rho(k)}\right| + m_k(N_k-1)\|\varphi\| \\
&\leq \sum_{j=1}^{N_k}S_{n_k}\varphi(f^{a_j}y_k) - \sum_{j=1}^{N_k}S_{n_k}\varphi(x^k_{i_j}) + \sum_{j=1}^{N_k}S_{n_k}\varphi(x^k_{i_j}) \\
&- c_k\int\varphi d\mu_{\rho(k)} + m_k(N_k-1)\|\varphi\| \\
&\leq \sum_{j=1}^{N_k}\left|S_{n_k}\varphi(f^{a_j}y_k) - S_{n_k}\varphi(x^k_{i_j})\right| + m_k(N_k-1)\|\varphi\| \\
&+ \sum_{j=1}^{N_k}\left|S_{n_k}\varphi(x^k_{i_j}) - n_k\int\varphi d\mu_{\rho(k)}\right| + m_k(N_k-1)\int\varphi d\mu_{\rho(k)} \\
&\leq n_kN_k(Var(\varphi,\varepsilon/2^k)+\delta_k) + m_k(N_k-1)(\|\varphi\| + \int\varphi d\mu_{\rho(k)}).
\end{aligned}$$

Note que usamos o fato que $d_{n_k}(x^k_{i_j}, f^{a_j}y_k) < \varepsilon/2^k$ na última linha. O afirmado em 5.3 segue disto e da relação5.4.

Seja $p' = f^{t_k-c_k}(p)$ e $z'_k = f^{t_k-c_k}(z_k)$. Usando $d_{t_k}(p,z_k) \leq \varepsilon/2^{k-1}$, temos

$$\begin{aligned}
d_{c_k}(p',y_k) &\leq d_{c_k}(p',z'_k) + d_{c_k}(z'_k,y_k) \\
&\leq \varepsilon/2^{k-1} + \varepsilon/2^k \leq \varepsilon/2^{k-2}.
\end{aligned}$$

Usando isto e a relação5.3, obtemos

$$\left|\frac{1}{c_k}S_{c_k}\varphi(p') - \int\varphi d\mu_{\rho(k)}\right| \leq Var(\varphi,\varepsilon/2^{k-2}). \tag{5.5}$$

Como ingrediente final, é necessário mostrar que

$$\left|\frac{1}{t_k}S_{t_k}\varphi(p) - \frac{1}{c_k}S_{c_k}\varphi(p')\right| \to 0. \tag{5.6}$$

Da afirmação em 5.2, podemos verificar que $c_k/t_k \to 1$. Desta forma, para $\gamma > 0$ arbitrário e k suficientemente grande, temos $|c_k/t_k - 1| < \gamma$. Logo

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{t_k}S_{t_k}\varphi(p) - \frac{1}{c_k}S_{c_k}\varphi(p')\right| &= \left|\frac{1}{t_k}S_{t_k-c_k}\varphi(p) - \frac{1}{c_k}S_{c_k}\varphi(p')\left(\frac{c_k}{t'_k}-1\right)\right| \\
&\leq \left|\frac{t_k-c_k}{t_k}\|\varphi\| + \gamma\frac{1}{c_k}S_{c_k}\varphi(p')\right| \\
&\leq 2\gamma\|\varphi\|.
\end{aligned}$$

Como γ arbitrário, verificamos 5.6. Usando 5.5 e 5.6, segue que

$$\left|\frac{1}{t_k}S_{t_k}\varphi(p) - \int \varphi d\mu_{\rho(k)}\right| \to 0.$$

$\square$

Seguindo a ordem, para provar o teorema 5.3, daremos uma sequência de lemas que nos permitem aplicar a generalização do Princípio da Distribuição de Pressão. Seja $B := B_n(q, \varepsilon/2)$ uma bola arbitrária que intersecta D. Seja k o único número que satisfaz $t_k \leq n < t_{k+1}$. Seja $j \in \{0, \dots, N_{k+1} - 1\}$ o único número tal que

$$t_k + (n_{k+1} + m_{k+1})j \leq n \leq t_k + (n_{k+1} + m_{k+1})(j+1).$$

Assumimos que $j \geq 1$ e o caso $j = 0$ segue de maneira análoga.

Lema 5.9. *Suponha $\mu_{k+1}(B) > 0$, então exite (uma única escolha para) $x \in J_k$ e $i_1, \dots i_j \in \{1, \dots, \#G_{k+1}\}$ satisfazendo*

$$\nu_{k+1}(B) \leq L(x) \prod_{l=1}^{j} \exp S_{n_{k+1}}\psi(x_{i_l}^{k+1}) M_{k+1}^{N_{k+1}-j}.$$

Demonstração. Se $\mu_{k+1}(B) > 0$, então $J_{k+1} \cap B \neq \emptyset$. Seja $z = z(x, y) \in J_{k+1} \cap B$ onde $x \in J_k$ e $y = y(i_1, \dots, i_{N_k+1}) \in R_{k+1}$. Seja

$$A_{x;i_1,\dots,i_j} = \{z(x, y(l_1, \dots, l_{N_k+1})) \in J_{k+1} : l_1 = i_1, \dots, l_j = i_j\}.$$

Suponha que $z(x', y(l)) \in B$. Sendo J_k $(t_k, 2\varepsilon)$-separado e $n \geq t_k, x = x'$. Para $l \in \{1, 2, \dots, j\}$, temos

$$d_{n_{k+1}}(f^{t_k+(l-1)(n_{k+1}+m_{k+1})}(q), x_{i_l}^{k+1}) < 2\varepsilon.$$

Sendo $x_{i_l}^{k+1} \in G_{k+1}$, então $z \in A_{x;i_1,\dots,i_j}$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\nu_{k+1}(B) &\leq \sum_{z \in A_{x;i_1,\dots,i_j}} L(z) = L(x) \sum_{\underline{p}_{k+1}: p_1^{k+1} = i_1, \dots, p_j^{k+1} = i_j} L(\underline{p}_{k+1}) \\
&= L(x) \prod_{l=1}^{j} \exp S_{n_{k+1}}\psi(x_{i_l}^{k+1}) \prod_{p=j+1}^{N_{k+1}} \sum_{l_p=1}^{\#G_{k+1}} \exp S_{n_{k+1}}\psi(x_{l_p}^{k+1}),
\end{aligned}$$

seguindo assim, o nosso resultado. $\square$

Lema 5.10. *Seja $x \in J_k$ e $i_1, \cdots, i_j$ como antes. Então*

$$L(x) \prod_{l=1}^{j} \exp S_{n_{k+1}}\psi(x_{i_l}^{k+1}) \leq \exp(S_n\psi(q) + 2nVar(\psi, 2\varepsilon) + \|\psi\|(\sum_{i=1}^{k} N_i m_i + j m_{k+1})).$$

Demonstração. Escrevendo $x = x(\underline{p}_1, \dots, \underline{p}_k)$. O lema 5.5 nos fornece que

$$d_{n_i}(f^{t_{i-1}+m_{i-1}+(l-1)(m_i+n_i)}x, x^i_{p^i_l}) < 2\varepsilon$$

para todo $i \in \{1, \dots, k\}$ e todo $l \in \{1, \dots, N_i\}$ e, daí, segue que

$$L(x) \leq \exp\{S_{t_k}\psi(x) + t_k Var(\psi, 2\varepsilon) + \sum_{i=1}^{k} \|\psi\| N_i m_i\}.$$

Da mesma forma

$$\prod_{l=1}^{j} \exp\left(S_{n_{k+1}}\psi(x^{k+1}_{i_l})\right) \leq \exp\left(S_{n-t_k}\psi(z) + (n-t_k)Var(\psi, \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}) + \|\psi\| j m_{k+1}\right).$$

Obtemos o resultado dessas duas desigualdades e que $d_n(z,q) < 2\varepsilon$ e $d_{t_k}(x,q) < 2\varepsilon$. □

A prova do lema a seguir é semelhante à do lema 5.9.

Lema 5.11. *Para todo $p \geq 1$, suponha $\mu_{k+p}(B) > 0$. Seja $x \in J_k$ e $i_1, \dots, i_j$ como antes. Então cada $z \in J_{k+p} \cap B$ "descende" de algum ponto de $A_{x;i_1,\dots,i_j}$. Temos*

$$\nu_{k+p}(B) \leq L(x) \prod_{l=1}^{j} \exp\left(S_{n_{k+1}}\psi(x^{k+1}_{i_l}) M^{N_{k+1}-j}_{k+1} M^{N_{k+2}}_{k+2} \dots M^{N_{k+p}}_{k+p}\right).$$

Lema 5.12. *Vale a relação*

$$\mu_{k+P}(B) \leq \frac{1}{\kappa_k M^j_{k+1}} \exp\left(S_n\psi(q) + 2nVar(\psi, 2\varepsilon) + \|\psi\|(\sum_{i=1}^{k} N_i m_i + j_{m_{k+1}})\right).$$

Demonstração. Usando o lema 5.10, segue pelo lema 5.11 que

$$\nu_{k+p}(B) \leq M^{N_{k+1}-j}_{k+1} \dots M^{N_{k+p}}_{k+p} \exp\left(S_n\psi(q) + 2nVar(\psi, 2\varepsilon) + \|\psi\|(\sum_{i=1}^{k} N_i m_i + j_{m_{k+1}})\right).$$

Sendo $\mu_{k+p} = \frac{1}{\kappa_{k+p}}\nu_{k+p}$ e $\kappa_{k+p} = \kappa_k M^{N_{k+1}}_{k+1} \dots M^{N_{k+p}}_{k+p}$. o resultado segue. □

Lema 5.13. *Para n suficientemente grande, $\kappa_k M^j_{k+1} \leq \exp((C - 5\gamma)n)$.*

Demonstração. Recordando que pela construção, $M_k \leq \exp((C - 4\gamma)n_k)$. Temos

$$\begin{aligned}
\kappa_k M^j_{k+1} &= M^{N_1}_1 \dots M^{N_k}_k M^j_{k+1} \\
&\geq \exp\{(C-4\gamma)(N_1 n_1 + N_2 n_2 + \dots + N_k n_k + j_{n_{k+1}})\} \\
&\geq \exp\{(C-5\gamma)(N_1(n_1+m_1) + N_2(n_2+m_2) + \dots + N_k(n_k+m_k) + j(n_{k+1}+m_{k+1}))\} \\
&= \exp\{(C-5\gamma)(t_k + m_1 + j(n_{k+1}+m_{k+1}))\} \geq \exp\{(C-5\gamma)n\}.
\end{aligned}$$

□

Lema 5.14. *Para n suficientemente grande, vale a relação*

$$\limsup_{k\to\infty} \mu_k(B_n(q, \frac{\varepsilon}{2})) \leq \exp\left(-n(C - 2Var(\psi, 2\varepsilon) - 6\gamma) + \sum_{i=0}^{n-1} \psi(f^i q)\right).$$

Demonstração. Pelos lemas 5.12 e 5.13, para n suficientemente grande e algum $p \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\mu_{k+p}(B) &\leq \frac{1}{\kappa_k M_{k+1}^j} \exp\left\{S_n\psi(q) + 2nVar(\psi, 2\varepsilon) + \|\psi\|(\sum_{i=1}^{k} N_i m_i + j_{m_{k+1}})\right\} \\
&\leq \frac{1}{\kappa_k M_{k+1}^j} \exp\left\{S_n\psi(q) + n(2Var(\psi, 2\varepsilon) + \gamma)\right\} \\
&\leq \exp\{-n(C - 6\gamma - 2Var(\psi, 2\varepsilon)) + S_n\psi(q)\}.
\end{aligned}$$

A justificativa da terceira linha é válida porque n_k é muito maior que m_k. □

Aplicando a Generalização do Princípio da Distribuição de Pressão, temos

$$P_D(\psi, \varepsilon) \geq C - 2Var(\psi, 2\varepsilon) - 6\gamma.$$

Relembramos que ε foi escolhido suficientemente pequeno tal que $Var(\psi, 2\varepsilon) < \gamma$. Daí, segue que

$$P_{\hat{X}(\varphi,f)}(\psi, \varepsilon) \geq P_D(\psi, \varepsilon) \geq C - 8\gamma.$$

Sendo γ e ε arbitrários, a prova do teorema 5.3 está completa.

5.2.2 Modificação da construção para obter o teorema 5.2

Dado $\gamma > 0$ pequeno fixado. Seja μ_1 ergódica e satisfazendo $h_{\mu_1} + \int \psi d\mu_1 > C - \gamma/2$. Seja $\nu \in \mathcal{M}_f^e(X')$ satisfazendo $\int \varphi d\mu_1 \neq \int \varphi d\nu$. Seja $\mu_2 = t_1\mu_1 + t_2\nu$ onde $t_1 + t_2 = 1$ e $t_1 \in (0, 1)$ escolhido suficientemente próximo de 1, tal que $h_{\mu_2} + \int \varphi d\mu_2 > C - \gamma$. Escolhamos $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal

$$\left|\int \varphi d\mu_1 - \int \varphi d\mu_2\right| > 8\delta.$$

Escolhamos uma sequência estritamente decrescente $\delta_k \to 0$ com $\delta_1 < \delta$. Para k ímpar, procederemos como antes, escolhendo uma sequência estritamente crescente $l_k \to \infty$ tal que o conjunto

$$Y_k := \left\{x \in X' : \left|\frac{1}{n} S_n\varphi(x) - \int \varphi d\mu_1\right| < \delta_k \text{ para todo } n \geq l_k\right\}$$

satisfazendo $\mu_1(Y_k) > 1 - \gamma$ para cada k. Para k par, definimos $Y_{k,1} := Y_{k-1}$ e encontramos $L_k > l_{k-1}$ tal que cada um dos conjuntos

$$Y_{k,2} := \left\{x \in X' : \left|\frac{1}{n} S_n\varphi(x) - \int \varphi d\nu\right| < \delta_k \text{ para todo } n \geq l_k\right\}$$

satisfazendo $\nu(Y_{k,2}) > 1 - \gamma$. A prova do lema a seguir é semelhante do lema 5.1.

Lema 5.15. *Para cada $\varepsilon > 0$ e k par, podemos encontrar uma sequência $\hat{n}_k \to \infty$ tal que $[t_i\hat{n}_k] \geq l_k$ para $i = 1, 2$ e conjuntos G_k^i tal que G_k^i é um conjunto $([t_i\hat{n}_k], 4\varepsilon)$-separado para $Y_{k,i}$ com $M_k^i := \sum_{x \in G_k^i} \exp\left(\sum_{j=0}^{n_k-1} \psi(f^i x)\right)$ satisfazendo*

$$M_k^1 \geq \exp([t_1\hat{n}_k](h_{\mu_1} + \int \psi d\mu_1 - 4\gamma)) \;\; e$$

$$M_k^2 \geq \exp([t_2\hat{n}_k](h_\nu + \int \psi d\nu - 4\gamma)).$$

Além disso, a sequência $\hat{n}_k$ pode ser escolhido tal que $\hat{n}_k \geq 2^{m_k}$ onde $m_k = m(\varepsilon/2^k)$ como na definição de especificação.

Usaremos agora a propriedade da especificação para definir o conjunto G_k como segue. Para $i = 1, 2$, seja $y_i \in G^i$ e defina $x = x(y_1, y_2)$ escolhido de pontos que satisfazem

$$d_{[t_1\hat{n}_k]}(y_1, x) < \frac{\varepsilon}{2^k} \text{ e } d_{[t_2\hat{n}_k]}(y_2, f^{[t_1\hat{n}_k]+m_k}x) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Seja G_k o conjunto de todos os pontos construídos desta forma. Seja $n_k = [t_1\hat{n}_k] + [t_2\hat{n}_k] + m_k$. Então n_k é a quantidade de tempo para que a órbita de pontos em G_k possa ser determinado e temos $n_k/\hat{n}_k \to 1$. Notemos que G_k é $(n_k, 4\varepsilon)$-separado tal que $\#G_k = \#G_k^1 \#G_k^2$. Seja $M_k = M_k^1 M_k^2$. Dada nossa nova construção de G_k, o resto de nossa construção segue sem alteração nenhuma.

5.2.3 Modificação da prova

Para cada $x \in G_k$,

$$\begin{aligned}\left|S_{n_k}\varphi(x) - n_k \int \varphi d\mu_2\right| &\leq \left|S_{[t_1\hat{n}_k]}\varphi(x) - [t_1\hat{n}_k] \int \varphi d\mu_1\right| + m_k\|\varphi\| \\ &+ \left|S_{[t_2\hat{n}_k]}\varphi(f^{[t_1\hat{n}_k]+m_k}x) - [t_2\hat{n}_k] \int \varphi d\nu\right|.\end{aligned}$$

Da segue que $\frac{1}{n_k}|G_{n_k}\varphi(x) - \int \varphi d\mu_2| \to 0$. Esta observação, nos permite modificar a prova do lema 5.8 e assegura que nossa construção ainda serve para os pontos em $\hat{X}(\varphi, f)$. Temos para n_k suficientemente grande,

$$\begin{aligned} M_k &\geq \exp\left([t_1\hat{n}_k](h_{\mu_1} + \int \psi d\mu_1 - 4\gamma) + [t_2\hat{n}_k](h_\nu + \int \psi d\nu - 4\gamma)\right) \\ &\geq \exp\left((1-\gamma)\hat{n}_k(t_1(h_{\mu_1} + \int \psi d\mu_1) + t_2(h_\nu + \int \psi d\nu) - 4\gamma)\right) \\ &\geq \exp(1-\gamma)^2 n_k(h_{\mu_2} + \int \psi d\mu_2 - 4\gamma) \geq \exp(1-\gamma)^2 n_k(C - 5\gamma).\end{aligned}$$

Como γ foi arbitrário, esta observação nos permite modificar as estimativas no lema 5.13 para estender esta construção mais geral.

Capítulo 6

Conjunto irregular para os expoente de Lyapunov

Para ilustrar a definição de expoentes de Lyapunov. Seja $X = [0,1]$. Suponha que f é uma função diferenciável. Para $|x-y| \approx 0$ escolhamos um n suficientemente grande, mas não muito grande(a razão pela qual n não deve ser muito grande é que se nós deixarmos $n \to \infty$ então $f^n(x)$ e $f^n(y)$ podem aproximar-se para algum n grande, já que X é um conjunto limitado). Queremos descrever o valor de $|f^n(x) - f^n(y)|$.
Temos:

$$|f(x) - f(y)| \approx |f'(x)| \times |x - y|,$$

e

$$|f^n(x) - f^n(y)| \approx \left|\prod_{i=0}^{n-1} (f^n)'(x)\right| \times |x - y|.$$

Desenvolvendo o lado direito usando a regra da cadeia e depois extraíndo a raiz quadrada de ambos os lados, temos:

$$(|f^n(x) - f^n(y)|)^{\frac{1}{n}} \approx \left|\prod_{i=0}^{n-1} f'(f^i x)\right|^{\frac{1}{n}} \times |x - y|^{\frac{1}{n}}.$$

Tomando o logaritmo e usando suas propriedades, temos

$$\frac{1}{n} \log |f^n(x) - f^n(y)| \approx \frac{1}{n}\left(\sum_{i=0}^{n-1} \log\left|f'(f^i(x))\right| + \log|x - y|\right).$$

fazendo $n \to \infty$ e assumindo que o lado direito possui um limite, tem-se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log\left|f'(f^i(x))\right| = \lambda(x).$$

que é o expoente de Lyapunov em x.
Para n suficientemente grande, temos

$$|f^n(x) - f^n(y)| \approx \exp^{n\lambda(x)},$$

e o termo do lado direito é a taxa média de afastamento(aproximação) das órbitas de x e y. Grosseiramente falando, o expoente de Lyapunov aqui mede a taxa de "sensibilidade" das condições iniciais.
Se μ é uma medida f-invariante ergódica, então o lado direito converge para $\int_0^1 \log |f'| d\mu$ pelo teorema ergódico de Birkhoff. Logo, $\int_0^1 \log |f'| d\mu$ é o expoente de Lyapunov para f.

O que podemos analisar neste fato é que os conjuntos irregulares da média de Birkhoff acima e para os expoente de Lyapunov em dimensão 1 coincidem. Então o que podemos concluir que tudo que fizemos no capítulo anterior vale para o conjunto irregular para os expoentes de Lyapunov em dimensão 1, ou seja, a pressão topológica deste conjunto é total, caso ele não seja vazio(é claro que estamos considerando todas hipóteses do nosso resultado). Seria então, natural perguntar se isso também acontece no caso geral para X espaço métrico compacto qualquer. Em outras palavras, o conjunto irregular para os expoentes de Lyapunov em dimensão qualquer, possui pressão topológica total quando não é vazio? É uma perguntar que ainda não possui uma resposta mas, talvez, as técnicas aqui usadas não são possíveis de serem adaptadas para este caso.

Capítulo 7

Apêndice

7.1 Construção de Carathéodory geral

A construção Carathéodory clássica em teoria da medida geral foi originalmente dada por Carathéodory em [C]. Esta foi designada para produzir uma família de **α-medidas** em um espaço métrico X dada por

$$m(Z, \alpha, \eta) = \lim_{\varepsilon \to 0} \inf_{\mathcal{G}} \{ \sum_{U_i \in \mathcal{G}} \eta(U_i)^\alpha \},$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as coberturas finitas ou enumeráveis $\mathcal{G} = \{U_i\}$ de Z por conjunto abertos U_i com diam$U_i \leq \varepsilon$. Aqui η é uma função em conjuntos positiva.

Introduziremos uma construção que é uma generalização da construção de Carathéodory clássica e foi elaborada por Pesin [P2] para produzir outros conceitos de dimensão.

7.1.1 Dimensão de Carathéodory de conjuntos

Seja X um conjunto e $\mathcal{F}$ uma coleção de subconjuntos de X. Assuma que exista duas funções conjuntos $\eta, \psi : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^+$ satisfazendo as seguintes condições:
(A1). $\phi \in \mathcal{F}$; $\eta(\emptyset) = 0$ e $\psi(\emptyset) = 0$; $\eta(U) > 0$ e $\psi(U) > 0$ para todo $U \in \mathcal{F}$, $U \neq \emptyset$;

(A2). para todo $\delta > 0$ existe um $\varepsilon > 0$ tal que $\eta(U) \leq \delta$ para todo $U \in \mathcal{F}$, com $\psi(U) \leq \varepsilon$;

(A3). para todo $\varepsilon > 0$ existe uma subcoleção finita ou enumerável $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ que cobre X e $\psi(\mathcal{G}) := \sup\{\psi(U) : U \in \mathcal{G}\} \leq \varepsilon$.

Seja $\xi : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^+$ uma função conjunto. Dizemos que a coleção de subconjuntos $\mathcal{F}$ e as funções conjuntos ξ, η, ψ satisfazendo as condições A1, A2 e A3 introduzem a *estrutura da dimensão de Carathéodory* ou $C - estrutura$ τ em X e escrevemos $\tau = (\mathcal{F}, \xi, \eta, \psi)$.

Exemplo 7.1. *Definimos a C-estrutura no espaço Euclidiano $\mathbb{R}$ como segue. Seja $\mathcal{F}$ a coleção de conjuntos abertos, $\xi(U) = 1$, $\eta(U) = diamU = \psi(U)$ para $U \in \mathcal{F}$. A coleção* *de subconjuntos $\mathcal{F}$ e as funções conjunto ξ, η, ψ satisfazem as condições A1, A2 e A3 , portanto introduzem a C-estrutura $\tau = (\mathcal{F}, \xi, \eta, \psi)$ em X.*

Considere um conjunto X dotado de uma C-estrutura $\tau = (\mathcal{F}, \xi, \eta, \psi)$. Dado um conjunto $Z \subset X$ e números $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. definimos

$$M_C(Z, \alpha, \varepsilon) = \inf_{\mathcal{G}}\{\sum_{U \in \mathcal{G}} \xi(U)\eta(U)^\alpha\},$$

onde o ínfimo é tomado sob todas subcoleções finitas ou enumeráveis $\mathcal{G} \subset F$ que cobrem Z com $\psi(\mathcal{G}) \leq \varepsilon$. Pela condição A3 a função $M_C(Z, \alpha, \varepsilon)$ está bem definida. Ela não decresce quando ε decresce. Portanto, existe o limite.

$$m_C(Z, \alpha) = \lim_{\varepsilon \to 0} M_C(Z, \alpha, \varepsilon). \tag{7.1}$$

Estudaremos a função $m_C(Z, \alpha)$.

Proposição 7.1. *Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, a função conjunto $m_C(\cdot, \alpha)$ satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $m_C(\emptyset, \alpha) = 0$ *para* $\alpha > 0$;
2. $m_C(Z_1, \alpha) \leq m_C(Z_2, \alpha)$ *se* $Z_1 \subset Z_2 \subset X$;
3. $m_C(\cup_{i \geq 0} Z_i, \alpha) \leq \sum_{i \geq 0} m_C(Z_i, \alpha)$, *onde* $Z_i \subset X$, $i = 0, 1, 2, ...$

Demonstração. As duas primeiras afirmações seguem diretamente da definição. Iremos provar a terceira. Dados $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$, e $i \geq 0$ podemos tomar um ε_i, $0 < \varepsilon_i < \varepsilon$ e uma cobertura $\mathcal{G}_i\{U_{ij} \in \mathcal{F}, j \geq 0\}$ do conjunto Z_i, com $\psi(G_i) \leq \varepsilon_i$, tal que

$$\left| m_C(Z_i, \alpha) - \sum_{j \geq 0} \xi(U_{ij})\eta(U_{ij})^\alpha \right| \leq \frac{\delta}{2^i}$$

A coleção $\mathcal{G}$ de conjuntos $\{U_{ij}, i \geq 0, j \geq 0\}$ cobre $Z = \cup_{i \geq 0} Z_i$ e satisfaz $\psi(\mathcal{G}) \leq \varepsilon$. Agora temos que

$$M_C(Z, \alpha, \varepsilon) \leq \sum_{U_{ij}} \xi(U_{ij})\eta(U_{ij})^\alpha \leq 2\delta + \sum_{i \geq 0} m_C(Z_i, \alpha).$$

Como ε e δ foram escolhidos arbitrariamente pequenos, temos o resultado desejado. □

Iremos descrever agora uma propriedade fundamental da função $m_C(Z, \cdot)$, para um conjunto Z fixado.

Proposição 7.2. *Existe um valor crítico α_C, $-\infty \leq \alpha_C \leq +\infty$ tal que $m_C(Z, \alpha) = \infty$ para $\alpha < \alpha_C$ e $m_C(Z, \alpha) = 0$ para $\alpha > \alpha_C$.*

Demonstração. Segue de A2, que se $\infty > m_C(Z, \alpha) \geq 0$ para algum $\alpha \in \mathbb{R}$, então $m_C(Z, \beta) = 0$ para todo $\beta > \alpha$ e se $m_C(Z, \alpha) = \infty$ para algum $\alpha \in \mathbb{R}$, então $m_C(Z, \beta) = \infty$ para todo $\beta < \alpha$. Isto prova o resultado desejado. □

Observação 7.1. *$m_C(Z, \alpha_C)$ pode ser $0, \infty$ ou um número positivo finito.*

Definimos a *dimensão de Carathéodory do conjunto $Z \in X$* por

$$\dim_C Z = \alpha_C = \inf\{\alpha : m_C(Z, \alpha) = 0\} = \sup\{\alpha : m_C(Z, \alpha) = \infty.\} \tag{7.2}$$

Claramente, observa-se que dimensão de Carathéodory depende da escolha da C-estrutura $\tau = (\mathcal{F}, \xi, \eta, \psi)$ em X.

Daremos algumas propriedades básicas da dimensão de Carathéodory.

Teorema 7.1. *Verificam-se as seguintes propriedades.*

1. *$dim_C \emptyset \leq 0$.*
2. *$dim_{Z_1} \leq dim_{Z_2}$, se $Z_1 \subset Z_2 \subset X$.*
3. *$dim_C(\cup_{i \geq 0} Z_i) = \sup_{i \geq 0} dim_C Z_i$, onde $Z_i \subset X, i = 0, 1, 2, ...$*

Demonstração. As duas primeiras afirmações seguem diretamente da proposição 7.1. Para provar a terceira afirmação, assumimos que $\dim_C Z_i < \alpha$ para todo $i = 0, 1, 2, ...$ Segue daí que $m_C(Z_i, \alpha) = 0$ e pela proposição 7.1, $m_C(\cup_{i \geq 0} Z_i) = 0$. Portanto, $\dim_C(\cup_{i \geq 0} Z_i) \leq \alpha$. Isto implica que $\dim_C(\cup_{i \geq 0} Z_i) \leq \sup_{i \geq 0} \dim_C Z_i$. A outra desigualdade segue diretamente da segunda afirmação do teorema. □

7.1.2 Uma modificação da construção de Carathéodory geral

Descreveremos uma modificação da construção de Carathéodory geral. Seja X e $\mathcal{S}$ conjuntos arbitrários e $\mathcal{F} = \{U_s : s \in \mathcal{F}\}$ uma coleção de subconjuntos em X. Assumimos que existem duas funções $\eta, \psi : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^+$ satisfazendo as seguintes condições:
(A1). existe $s_0 \in \mathcal{S}$ tal que $U_{s_0} = \emptyset$; se $U_s = \emptyset$ então $\eta(s) = 0$ e $\psi(s) = 0$; se $U_s \neq \emptyset$ então $\eta(s) > 0$ e $\psi(s) > 0$;

(A2). para todo $\delta > 0$ podemos tomar um $\varepsilon > 0$ tal que $\eta(s) \leq \delta$ para todo $s \in \mathcal{S}$ com $\psi(s) \leq \varepsilon$;

(A3). para todo $\varepsilon > 0$ exite uma subcoleção finita ou enumerável $\mathcal{G} \subset \mathcal{S}$ que cobre X e $\psi(\mathcal{G}) := \sup\{\psi(s) : s \in \mathcal{S}\} \leq \varepsilon$.

Seja $\xi : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^+$ uma função. Dizemos que o conjunto $\mathcal{S}$, a coleção de subconjuntos $\mathcal{F}$ e as funções ξ, η, ψ, que satisfazem as condições A1, A2 e A3, introduzem a *estrutura da dimensão de Carathéodory* ou C-estrutura τ em X e escrevemos $\tau = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, \xi, \eta, \psi)$.
Se a aplicação $s \mapsto U_s$ é injetiva então as funções ξ, η e ψ podem ser consideradas como definidas no conjunto $\mathcal{F}$ e portanto, a C-estrutura acima coincide com a C-estrutura introduzida anteriormente.
Dado um conjunto $Z \subset X$ e números $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, definimos

$$M_C(Z, \alpha, \varepsilon) = \inf_{\mathcal{G}}\{\sum_{s \in \mathcal{G}} \xi(s)\eta(s)^\alpha\},$$

onde o ínfimo é tomado sob todas subcoleções finitas ou enumeráveis $\mathcal{G} \subset \mathcal{S}$ que cobrem Z com $\psi(\mathcal{G}) \leq \varepsilon$. Pela condição A3 a função $M_C(Z, \alpha, \varepsilon)$ está bem definida. Ela não decresce quando ε decresce. Portanto, o seguinte limite existe:

$$m_C(Z, \alpha) = \lim_{\varepsilon \to 0} M_C(Z, \alpha, \varepsilon)$$

Pode-se mostrar que a função $m_C(Z, \alpha)$ satisfaz as proposições 7.1 e 7.2. Definimos a *dimensão de Carathéodory do conjunto* Z por 7.2. Ela satisfaz o teorema 7.1.

7.1.3 Pressão topológica

Sejam (X, d) um espaço métrico compacto com métrica d, $f : X \to X$ um aplicação contínua, e $\varphi : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Consideremos uma cobertura aberta finita $\mathcal{U}$ de X e denotamos por $\mathcal{S}_\lambda(\mathcal{U})$ o conjunto de todos as sequências $U = \{U_{i_0} ... U_{i_{m-1}} : U_{i_j} \in \mathcal{U}\}$ de comprimento $\lambda = \lambda(U)$. Pomos $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathcal{U}) = \cup_{\lambda \geq 0} \mathcal{S}_\lambda(\mathcal{U})$.
Para uma dada sequência $U = \{U_{i_0} ... U_{i_{m-1}}\} \in \mathcal{S}(\mathcal{U})$ associamos o conjunto

$$X(U) = \{x \in X : f^i(x) \in U_{i_j} \text{ para } j = 0, ..., \lambda(U) - 1\} \tag{7.3}$$

Definimos a coleção de subconjuntos

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{U}) = \{X(U) : U \in \mathcal{S}(\mathcal{U})\} \tag{7.4}$$

e três funções $\xi, \eta, \psi : \mathcal{S}(\mathcal{U}) \to \mathbb{R}$ com segue

$$\xi(U) = \exp\left(\sup_{x \in X(U)} \sum_{k=0}^{m(U)-1} \varphi(f^k(x)) \right) \tag{7.5}$$

$$\eta(U) = \exp(-m(U)), \quad \psi(U) = \lambda(U)^{-1}$$

Não é difícil verificar que o conjunto $\mathcal{S}$, a coleção de subconjuntos $\mathcal{F}$, e as funções η, ξ e ψ satisfazem as condições A1, A2 e A3, então elas determinam uma C-estrutura $\tau = \tau(\mathcal{U}) = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, \xi, \eta)$ em X. A função de Carathéodory correspondente $m_C(Z, \alpha)$ depende da cobertura $\mathcal{U}$(e da função φ) e é dada por

$$m_C(Z, \alpha) = \lim_{N \to \infty} M(Z, \alpha, \varphi, \mathcal{U}, N),$$

onde

$$M(Z, \alpha, \varphi, \mathcal{U}, N) = \inf_{\mathcal{G}} \left\{ \sum_{U \in \mathcal{G}} \exp\left(-\alpha\lambda(U) + \sup_{x \in X(U)} \sum_{k=0}^{\lambda(U)-1} \varphi(f^k(x)) \right) \right\} \tag{7.6}$$

e o ínfimo é tomado sob todas as coleções de sequências enumeráveis ou finitas $\mathcal{G} \subset \mathcal{S}((U))$ tal que $\lambda(U) \geq N$ para todo $U \in \mathcal{G}$ e $\mathcal{G}$ cobrindo Z (isto é, a coleção de conjuntos $\{X(U) : U \in \mathcal{G}\}$ cobrindo Z).
Portanto, dado um conjunto $Z \subset X$, a C-estrutura τ gera a dimensão de Carathéodory de Z, que denotaremos por $P_Z(\varphi, \mathcal{U})$. Temos que

$$P_Z(\varphi, \mathcal{U}) = \inf\{\alpha : m_C(Z, \alpha) = 0\} = \sup\{\alpha : m_C(Z, \alpha) = \infty\}$$

Seja $|\mathcal{U}| = \max\{\text{diam} U_i : U_i \subset \mathcal{U}\}$ o diâmetro da cobertura $\mathcal{U}$.

Teorema 7.2. *Para todo conjunto $Z \subset X$ o seguinte limite existe:*

$$P_Z(\varphi) := \lim_{|\mathcal{U}| \to \infty} P_Z(\varphi, \mathcal{U}).$$

Demonstração. Seja $\mathcal{V}$ uma cobertura aberta de X com diâmetro menor que o número de Lebesgue de $\mathcal{U}$. Podemos ver que cada $V \in \mathcal{V}$ está contido em algum elemento $U(V) \in \mathcal{U}$. Para toda sequência $V = \{V_{i_0} ... V_{i_m}\} \in \mathcal{S}(\mathcal{V})$ associamos a sequência $U(V) = \{U(V_{i_0}) ... U(V_{i_m})\} \in \mathcal{S}(\mathcal{U})$. Se $\mathcal{G} \subset \mathcal{S}(\mathcal{V})$ cobre um conjunto $Z \in X$ então $U(\mathcal{G}) = \{U(V) : V \in \mathcal{G}\} \subset \mathcal{S}(\mathcal{U})$ também cobre Z. Seja

$$\gamma = \gamma(\mathcal{U}) = \sup\{|\varphi(x) - \varphi(y)| : x, y \in U \text{ para algum } U \in \mathcal{U}\}.$$

Podemos verificar, usando 7.6 que para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e $N > 0$

$$M(Z, \alpha, \varphi, \mathcal{U}, N) \leq M(Z, \alpha - \gamma, \varphi, \mathcal{V}, N). \tag{7.7}$$

Isto implica que

$$P_Z(\varphi, \mathcal{U}) - \gamma \leq P_Z(\varphi, \mathcal{V}).$$

Como X é compacto, ele possui uma cobertura aberta finita de diâmetro arbitrariamente pequeno. Portanto,

$$P_Z(\varphi, \mathcal{U}) - \gamma \leq \underline{\lim}_{|\mathcal{V}| \to 0} P_Z(\varphi, \mathcal{V}).$$

Se $|\mathcal{V}| \to 0$ então $\gamma(\mathcal{U}) \to 0$ e então

$$\overline{\lim}_{|\mathcal{U}| \to 0} P_Z(\varphi, \mathcal{U}) \leq \underline{\lim}_{|\mathcal{V}| \to 0} P_Z(\varphi, \mathcal{V}).$$

Isto implica a existência do limite. □

Chamamos o número $P_Z(\varphi)$ de **pressão topológica** da função φ no conjunto Z(com respeito a f). Veremos algumas propriedade básicas da pressão topológica. O teorema abaixo, é um corolário imediato da definição e do teorema 7.1.

Teorema 7.3. *.A pressão topológica possui as seguintes propriedades.*

1. $P_\emptyset(\varphi) \leq 0$.
2. $P_{Z_1}(\varphi) \leq P_{Z_2}(\varphi)$ *se* $Z_1 \subset Z_2 \subset X$.
3. $P_Z(\varphi) = \sup_{i \geq 1} P_{Z_i}(\varphi)$, *onde* $Z = \cup_{i \geq 1} Z_i$ *e* $Z_i \subset X$, $i = 1, 2, ...$
4. *Se f é um homeomorfismo, então* $P_Z(\varphi) = P_{f(Z)}(\varphi)$.

Destacamos ainda a *continuidade* da pressão topológica.

Teorema 7.4. *Dadas duas funções contínuas φ e ψ em X, então*

$$|P_Z(\varphi) - P_Z(\psi)| \leq \|\varphi - \psi\|.$$

onde $\|\cdot\|$ denota a norma do supremo no espaço das funções contínuas em X

Demonstração. Dado $N > 0$, temos que

$$\frac{1}{N}\sup_{x\in X}\sum_{k=0}^{N-1}\left|\varphi(f^k(x)) - \psi(f^k(x))\right| \leq \|\varphi - \psi\|.$$

Daí, segue que

$$M(Z, \alpha + \|\varphi - \psi\|, \psi, \mathcal{U}, N) \leq M(Z, \alpha, \varphi, \mathcal{U}, N) \leq M(Z, \alpha - \|\varphi - \psi\|, \psi, \mathcal{U}, N).$$

Isto implica que

$$P_Z(\psi, \mathcal{U}) - \|\varphi - \psi\| \leq P_Z(\varphi, \mathcal{U}) \leq P_Z(\psi, \mathcal{U}) + \|\varphi - \psi\|$$

e concluímos a prova da primeira desigualdade. $\square$

Definição 7.1 (Entropia topológica)**.** *Dado $Z \in X$. No caso especial de $\varphi = 0$, chamamos de **entropia topológica** da aplicação f em Z ao número*

$$h_Z(f) := P_Z(0).$$

No caso de Z compacto ou invariante, nossa definição coincide com a definição usual de pressão topológica(e também entropia topológica). Denotaremos a pressão topológica do espaço todo por $P_X^{classic}(\psi)$, para enfatizar que estamos lidando com a definição familiar para compactos e invariantes.

Referências Bibliográficas

[Bar] L. Barreira. Dimension and recurrence in hyperbolic dynamics, volume 272 of Progress in a Mathematics. Birkhöuser, 2008.

[BOS] I.S. Baek, L. Olsen, and N. Snigireva. *Divergence points of self-similar measures and packing dimension.* Adv. Math., 214(1):267-287, 2007.

[Bow1] Bowen, R, *Periodic points and measures for axiom A diffeomorphisms*, Trans. Amer. Math. Soc., 154:377-397, 1971.

[BS5] L. Barreira and J. Schmeling. *Sets of ?non-typical? points have full topological entropy and full Hausdorff dimension.* Israel J. Math., 116:29-70, 2000.

[C] C. Carathéodory: Über das Lineare Mass. *Göttingen Nachr.*(1914), 406-426.

[DT] D. Thompson. *The irregular set for maps with the specification property has full topological pressure.* Dynamical Systems: An International Journal., 25:25-51, 2010.

[DGS] M. Denker, C. Grillenberg, e K.Sigmund.*Ergodic Theory on Compact Spaces, volume 527 of Lectures Notes in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.

[EKW] A. Eizenberg, Y. Kifer, and B. Weiss. *Large deviations for Zd-actions.* Comm. Math. Phys., 164(3):433-454, 1994.

[Geo] G. H. Choe. *Computational ergodic theory, volume 13 of Algorithms and Computation in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlim-New York,2005.

[Man] R. Mañe. *Introdução à teoria ergódica* .Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1983.

[Men] L. Mendoza. *Ergodic attractors for diffeomorphisms of surfaces.* J. London Math. Soc., 37(2):362-374, 1988.

[Pe] Y.B. Pesin. *Dimension Theory in Dynamical Systems: Contemporary Views and Applications.* The University of Chicago Press, Chiacago-Lindon, 1997.

[PP2] Y.B. Pesin and B.S. Pitskel. *Topological pressure and the variational principle for non- compact sets (english translation).* Funct. Anal. Appl., 18:307-318, 1984.

[PS1] C.-E. Pfister and W.G. Sullivan. *Large deviations estimates for dynamical systems without the specification property*. Applications to the β-shifts. Nonlinearity, 18:237?261, 2005.

[PW] M. Pollicott and H. Weiss. *Multifractal analysis of Lyapunov exponent for continued frac- tion and Manneville-Pomeau transformations and applications to Diophantine approximation*. Comm. Math. Phys., 207:145?171, 1999.

[Tak] F. Takens. *Orbits with historic behaviour, or non-existence of averages*. Nonlinearity, 21:T33? T36, 2008.

[Tod] M. Todd. *Multifractal analysis for multimodal maps*. Preprint, arXiv:0809.1074v2, 2008.

[TV1] F. Takens and E. Verbitskiy. *Multifractal analysis of local entropies for expansive homeo- morphisms with specification*. Comm. Math. Phys., 203(3):593?612, 1999.

[TV2] F. Takens and E. Verbitskiy. *On the variational principle for the topological entropy of certain non-compact sets*. Ergodic Theory Dynam. Systems, 23(1):317-348, 2003.

[Wal] P. Walters. *An Introduction to Ergodic Theory (Graduate Texts in Mathematics 79)*. Springer, New York, 1982.

[You] L.S. Young. *Large deviations in dynamical systems*. Trans. Amer. Math. Soc., 318(2):525? 543, 1990.

[YP] Y. Pesin. *Dimension theory in dynamical systems: Contemporary views and applications*. The University of Chicago, Chicago-London, 1997.

[1] K. Oliveira, M. Viana. *Introdução à Teoria Ergódica.* Endereço eletrônico.w3.impa.br/ viana/out/ite.pdf

[2] K. Oliveira. *Every expanding measure has the the nonuniform specification property* arxiv:1007.1449v1 [math.DS] 8 Jul 2010.

[3] M. Viana. www.impa.br/ viana/out/oseledets.pdf