Universidade Federal de Alagoas

Programa de Pós-Graduação em Matemática

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Dimensão de Hausdorff de Conjuntos Numéricos

Rio São Francisco

José Arnaldo dos Santos

Maceió
25 de Julho de 2006

MATEMÁTICA
A ciência
do infinito

Dimensão de Hausdorff de Conjuntos Numéricos

José Arnaldo dos Santos

Dissertação de Mestrado na área de concentração de Sistemas Dinâmicos submetida em 25 de julho de 2006 à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessá- à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

Krerley Oliveira

Prof. Dr. Krerley Irraciel Martins Oliveira (Orientador)

Vilton Pinheiro

Prof. Dr. Vilton Jeovan Viana Pinheiro

Vitor Domingos Araújo

Prof. Dr. Vitor Domingos de Araújo

Aos meus pais José Ursulino e Maria José
e à minhas irmãs Arlene, Arlete e Arleide.

Agradecimentos

- Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado a coragem necessária para enfrentar os momentos difíceis e a minha família pelo apoio e o incentivo dado durante todo esse período que estive distante.

- Ao professor Krerley Oliveira pela orientação, paciência, amizade e incentivo durante todo o mestrado.

- Agradeço aos professores Francisco Vieira Barro e Eduardo Perdigão de Lemos pela contribuição na minha vida acadêmica e pessoal. Agradeço também aos professores Adán Corcho, Amauri da Silva Barros, Ediel Azevedo e Fernando Echaiz pelas contribuições acadêmicas e a amizade.

- Aos professores Adelailson Peixoto e Marcus Petrúcio Cavalcante pela grande amizade oferecida a minha pessoa.

- Ao professor Hilário Alencar por todo seu empenho na implantação do programa de mestrado.

- Agradeço a amizade de Clarissa Codá, Davy Souza, Márcio Henrique, Claudemir Silvino, Sofia Carolina, Fábio Bóia, Marcius Petrúcio Cavalcante, Thiago Fontes, Júlio Almeida, Thalis Miranda e Maria de Andrade e o companheirismo de Daniel Nicolau e André Pizzaia Butta.

- Sou grato a todos que fazem o Instituto de Matemática pela boa convivência que me proporcionaram durante o período em que fui aluno desse Instituto.

- Agradeço a FAPEAL pelo suporte financeiro.

Resumo

Nosso trabalho está dedicado ao estudo de uma classe de conjuntos que do ponto de vista da medida de Lebesgue são desprezíveis, isto é, possuem medida de Lebesgue zero. Vamos mostrar que esses conjuntos mesmo tendo medida de Lebesgue zero, ainda são conjuntos grandes no sentido da teoria da dimensão. Para cumprir nossos objetivos vamos fazer uso de resultados e definições da teoria da medida e teoria ergódica, além do conceito e resultados de nossa principal ferramenta que é a dimensão de Hausdorff.

Palavras Chaves: Dimensão Fractal; Dimensão de uma Medida; Pontos Regulares.

Introdução

Seja $m > 1$ um inteiro positivo. Dado $w \in [0,1]$ denotamos por $0, w_1 w_2 w_3 ...$ sua representação na base m.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, 1, ..., m-1\}$ e $w \in [0,1]$ seja

$$N_k(w,n) = \#\{i \in \{1, ..., n\}; w_i = k\}$$

Quando o limite existir

$$N_k(w) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} N_k(w,n)$$

ele será chamado de freqüência do número k na representação de w na base m.

Um importante resultado mostrado por Borel em 1909, diz que para Lebesgue quase todo $w \in [0,1]$ tem $N_k(w) = \frac{1}{m}$ para todo k, um pouco tarde em 1949, Eggleston provou que

$$\dim_H\{w : N_i(w) = p_i, i = 0, ..., m-1\} = -\frac{1}{\log m} \sum_{i=0}^{m-1} p_i \log p_i,$$

onde $\dim_H M$ denota a dimensão de Hausdorff do conjunto M e recentimente em 2002 Barreira, Saussol e Schmeling provaram o seguinte resultado: Para cada $k \in \{0, 1, ..., m-1\}$ o conjunto M_k contém um conjunto G_δ denso em $[0,1]$ e

$$\dim_H \bigcap_{k=0}^{m-1} M_k = 1,$$

onde

$$M_k = \left\{ x \in [0,1]; \lim_{n\to\infty} \inf \frac{N_k(w,n)}{n} < \lim_{n\to\infty} \sup \frac{N_k(w,n)}{n} \right\}.$$

Tanto o resultado de Eggleston quanto o resultado de Barreira, Saussol e Schmeling mostram a importância da teoria da dimensão de Hausdorff. De fato, observe que pelo Teorema Ergódigo de Birkhoff o conjunto

$$\{w \in [0,1] : N_i(w) = p_i, i = 0, ..., m-1\}$$

tem medida de Lebesgue zero quando os $p_i's$ forem diferentes de $1/m$ e mesmo assim possui dimensão de Hausdorff diferente de zero, mais ainda faz uma seleção desses conjuntos.

Por outro lado o resultado de Barreira, Saussol e Schmeling além de mostrar que os conjuntos M_k (que possuem medida de Lebesgue zero, pelo resultado de Borel) possuem dimensão de Hausdorff positiva, também mostra que suas interseções tem dimensão de Hausdorff total.

Sumário

Capítulo 1

Teoremas Básicos da Teoria Ergódica

Neste primeiro capítulo apresentamos alguns resultados e definições que serão utilizados nos capítulos seguintes deste trabalho. Começamos esclarecendo que neste trabalho, uma medida designará uma medida positiva e σ-aditiva.

Definição 1.1. *Seja $f : M \longrightarrow M$ uma transformação. Dizemos que f preserva medida (ou que uma medida μ é invariante pela transformação f) se*

$$\mu(E) = \mu\left(f^{-1}(E)\right)$$

para todo conjunto mensurável $E \subset M$.

Definimos o **pull-back** da medida μ em M pela transformação mensurável $f : M \to N$ como sendo a medida definida em N dada por:

$$f_*(\mu)(A) = \mu(f^{-1}(A)).$$

É fácil de verificar que $f_*(\mu)$ definida deste modo é uma medida. A partir da definição de medida invariante, temos que μ é invariante se, e somente se, $f_*(\mu) = \mu$.

A seguir daremos um exemplo bem útil de uma medida invariante para uma transformação do intervalo:

Exemplo 1.1. *Seja* $f : [0,1] \to [0,1]$ *definida por* $f(x) = 10x - [10x]$*, onde* $[10x]$ *representa o maior inteiro menor ou igual a* $10x$*. Em outras palavras,* f *associa a cada* $x \in [0,1]$ *a parte fracionaria de* $10x$*.*

Afirmamos que a medida de Lebesgue λ no intervalo é invariante pela transformação f. Comecemos supondo que E é um intervalo. Então, como ilustra a figura (1), a pré-imagem $f^{-1}(E)$ consiste de dez intervalos, cada um deles dez vezes menor do que E, logo $\lambda(E) = \lambda(f^{-1}(E))$. Isto mostra o resultado no caso de E ser um intervalo. Por outro lado, a família dos intervalos gera a σ-álgebra de Borel de $[0,1]$. Quando E não é um intervalo temos o seguinte resultado:

Lema 1.1. *Seja* $f : M \to M$ *uma transformação mensurável e* μ *uma medida finita em* M*. Suponha que existe uma sub-álgebra geradora* $\mathcal{I}$ *da* σ*-álgebra* $\mathcal{A}$ *de* M *tal que* $\mu(E) = \mu(f^{-1}(E))$ *para todo* $E \in \mathcal{I}$*. Então o mesmo vale para todo conjunto mensurável* E*, isto é, a medida* μ *é invariante por* f*.*

1

E

0 2/5 4/5 6/5 8/5 **1**

Figura 1

Observe que se escrevemos $x = 0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$ na base 10, a transformação f aplicada a x simplesmente é $f(x) = 0, \alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots$. Estudaremos mais adiante este tipo de transformação que possui conexão com os shifts em espaços de símbolos.

O próximo exemplo mostra que dada uma transformação mensurável f pode não existir uma medida de probabilidade invariante por f.

Exemplo 1.2. *Seja $f : [0,1] \to [0,1]$ definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 1/2x, & se\ x \neq 0 \\ 1, & se\ x = 0 \end{cases}$$

Afirmamos que não existe medida de probabilidade invariante por f. De fato, vamos supor que existe e chamá-la de μ. Considere a partição do intervalo $(0,1]$ dada por subintervalos dois a dois disjuntos $E_n = (1/2^{n-1}, 1/2^n]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo $f^{-1}(E_n) = E_{n-1}$ para todo $n \geq 1$. Como μ é f-invariante deduzimos que $\mu(A_n) = \mu(A_0)$ para todo $n \geq 0$. Daí temos

$$\mu((0,1]) = \sum_{n\geq 0} \mu(A_n) = \sum_{n\geq 0} \mu(A_0) \leq 1.$$

Logo $\mu(A_0) = 0$. Donde $\mu((0,1]) = 0$ e $\mu(\{0\}) = 1$. Portanto, $\mu(f^{-1}(\{0\})) = 1$, que é um absurdo, pois $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$

Seja U um aberto do espaço euclidiano $\mathbb{R}^p$, $p \geq 1$ e seja $f : U \to U$ um difeomorfismo de classe C^1. Representaremos por *vol* a medida de Lebesgue, ou volume, em $\mathbb{R}^p$.

A fórmula de mudança de variáveis afirma que, para qualquer conjunto mensurável $B \subset U$,

$$vol(f(B)) = \int_B |\det Df|\, d\,vol \tag{1}$$

Exemplo 1.3. *Um difeomorfismo $f : M \to M$ de classe C^1 deixa invariante o volume se, e somente se, o valor absoluto $|\det Df|$ do seu jacobiano é constante igual a* 1.

De fato, suponha primeiro que o valor absoluto do jacobiano é igual 1 em todo ponto. Considere um conjunto mensurável E e seja $B = f^{-1}(E)$. A fórmula (1) dá que

$$vol(E) = \int_B 1\, d\,vol = vol(B) = vol(f^{-1}(E)).$$

Isto mostra a primeira parte do exemplo. Para mostrar a segunda parte suponha que $\mid \det Df \mid$ fosse maior que 1 em algum ponto x. Então como o jacobiano é contínuo, existiria uma vizinhança U de x e algum número $\alpha > 1$ tais que $\mid \det Df(y) \mid \geq \alpha$ para todo $y \in U$. Então a fórmula (1) aplicada a $B = U$ daria

$$vol(f(U)) \geq \int_B \alpha\, d\,vol = \alpha vol(U).$$

Denotando $E = f(U)$, temos $vol(E) > vol(f^{-1}(U))$ e, portanto, f não deixa invariante o volume. De modo análogo se mostra que f não deixa invariante o volume no caso em que o valor absoluto do jacobiano é menor que 1.

Exemplo 1.4. *O fluxo f^t associado a um campo de vetores F de classe C^1 deixa invariante o volume se, e somente se, o divergente de F é identicamente nulo.*

De fato, considere o fluxo $f^t : U \to U,\ \ t \in \mathbb{R}$, de classe C^1. Como f^t é invertível e seu jacobiano é sempre positivo, segue do exemplo (1.3) que o fluxo deixa invariante o volume se, e somente se,

$$\det Df^t(x) = 1 \text{ para todo } \ x \in U \text{ e todo } t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Por outro lado, a fórmula de Liouville exprime o jacobiano de f^t em termos do divergente $divF$ do campo de vetores de F por

$$\det Df^t(x) = \exp\left(\int_0^t divF(f^s(x))ds\right). \tag{3}$$

Portanto, combinando (2) e (3), segue o resultado.

Definição 1.2. *Dada uma transformação f dizemos que um conjunto A é f-invariante se*

$$f^{-1}(A) = A.$$

Definição 1.3. *Dizemos que uma medida de probabilidade invariante μ é ergódica se para qualquer conjunto A, f-invariante, tivermos*

$$\mu(A) = 0 \text{ ou } \mu(A) = 1.$$

Proposição 1.1. *Seja $f : M \longrightarrow M$ uma transformação que preserva medida e μ uma medida. Então para toda função integrável $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}$, vale*

$$\int \varphi d\mu = \int \varphi \circ f d\mu.$$

Demonstração. Suponha primeiro que φ é uma função característica de algum conjunto, digamos $\varphi = \chi_Q$. Então por um lado

$$\int \varphi d\mu = \int \chi_Q = \mu(Q). \tag{4}$$

Por outro lado, como $\varphi \circ f = \chi_Q \circ f = \chi_{f^{-1}(Q)}$, temos

$$\int \varphi \circ f d\mu = \int \chi_Q \circ f d\mu = \int \chi_{f^{-1}(Q)} d\mu = \mu(f^{-1}(Q)). \tag{5}$$

Por (1) e (2) temos

$$\int \varphi d\mu = \mu(Q) = \mu(f^{-1}(Q)) = \int \varphi \circ f d\mu.$$

Suponha agora que φ é uma função simples. Neste caso temos $\varphi = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{Q_i}$. Assim,

$$\int \varphi \circ f d\mu = \int \big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{Q_i}\big) \circ f d\mu = \int \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{Q_i} \circ f d\mu =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int \chi_{Q_i} \circ f d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int \chi_{Q_i} d\mu = \int \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{Q_i} d\mu = \int \varphi d\mu.$$

Vamos supor agora que φ é uma função integrável, com $\varphi \geq 0$. Neste caso existe uma sequência $\{\varphi_n\}$ com $\varphi_{n+1} \leq \varphi_n$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$ tal que

$$\int \varphi d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n d\mu.$$

Como $\{\varphi_n \circ f\}$ é uma sequência de funções simples tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n \circ f = \varphi \circ f$ temos

$$\int \varphi \circ f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n \circ f d\mu.$$

Sendo as funções φ_n funções simples também vale:

$$\int \varphi_n d\mu = \int \varphi_n \circ f d\mu.$$

Daí,

$$\int \varphi d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n \circ f d\mu = \int \varphi \circ f d\mu.$$

Finalmente suponha que φ é uma função integrável qualquer. Neste caso $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$, onde $\varphi^+(x) = \max\{\varphi(x), 0\}$ e $\varphi^-(x) = \max\{-\varphi(x), 0\}$. Como $\varphi^+ \geq 0$ e $\varphi^- \geq 0$ temos pelo caso anterior

$$\int \varphi^+ d\mu = \int \varphi^+ \circ f d\mu.$$

e

$$\int \varphi^- d\mu = \int \varphi^- \circ f d\mu.$$

Por outro lado, temos

$$\varphi \circ f = \varphi^+ \circ f - \varphi^- \circ f.$$

Logo,

$$\int \varphi \circ f d\mu = \int \varphi^+ \circ f d\mu - \int \varphi^- \circ f d\mu = \int \varphi^+ d\mu - \int \varphi^- d\mu = \int \varphi d\mu.$$

$\blacksquare$

1.1 Teorema Ergódico de Birkhoff

Nesta seção nós vamos enunciar e provar um resultado de grande importância na Teoria Ergódica.

Teorema 1.1 (Teorema Ergódico de Birkhoff). *Sejam $(M, \Im, \mu)$ um espaço de probabilidade e $f : M \longrightarrow M$ uma transformação que preserva medida. Dado qualquer função integrável $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ o limite existe*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\varphi(f^i(x))$$

para μ-quase todo ponto $x \in M$. Além disso, também vale,

$$\int_M \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\varphi(f^i(x))d\mu(x) = \int_M \varphi(x)d\mu(x).$$

Para demonstração deste Teorema precisamos de alguns resultados auxiliares.

Lema 1.2. *Seja $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ integrável. Defina*

$$E(\varphi) = \left\{x \in M; \sup_{n\geq 0}\varphi_n > 0\right\} = \left\{x \in M; \sup_{n\geq 0}\sum_{i=0}^{n}\varphi(f^i(x)) > 0\right\}.$$

Então:

$$\int_{E(\varphi)}\varphi d\mu \geq 0.$$

Demonstração. Seja $E_n = \{x \in M; \varphi_n(x) > 0\}$. Note que $E_n \subset E_{n+1}$ e $E(\varphi) = \bigcup_{n\geq 1} E_n$. Logo,

$$\int_{E(\varphi)}\varphi d\mu = \int_{E(\varphi)}\varphi^+ d\mu - \int_{E(\varphi)}\varphi^- d\mu =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_{E_n}\varphi^+ d\mu - \lim_{n\to\infty}\int_{E_n}\varphi^- d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_{E_n}\varphi d\mu.$$

Portanto, basta demonstrar que

$$\int_{E_n}\varphi d\mu \geq 0,$$

para todo $n \geq 0$. Seja

$$I = \int_{E_n}\varphi d\mu = \int_{\{\varphi_n>0\}\cap\{\varphi_n\circ f\leq 0\}}\varphi d\mu + \int_{\{\varphi_n>0\}\cap\{\varphi_n\circ f>0\}}\varphi d\mu \qquad (6)$$

Temos

$$\varphi_n(x) = \max\left\{\varphi(x), \varphi(x)+\varphi(f(x)), ..., \varphi(x)+\varphi(f(x))+...+\varphi(f^n(x))\right\}.$$

$$\varphi_n(f(x)) = \max\{\varphi(f(x)), ..., \varphi(f(x)) + ... + \varphi(f^n(x)),$$
$$, \varphi(f(x)) + ... + \varphi(f^{n+1}(x))\}.$$

Se $\varphi_n(f^n(x)) \leq 0$, então as igualdades acima mostram que $\varphi_n(x) = \varphi(x)$.
Se $\varphi_n(f^n(x)) > 0$, então

$$\varphi(x) + \varphi_n(f(x)) = \max\{\varphi(x) + \varphi(f(x)), ..., \varphi(x) + \varphi(f(x)) + ... + \varphi(f^n(x)),$$
$$, \varphi(x) + \varphi(f(x)) + ... + \varphi(f^{n+1}(x))\} \geq$$
$$\geq \max\{\varphi(x) + \varphi(f(x)), ..., \varphi(x) + \varphi(f(x)) + ... + \varphi(f^n(x))\}.$$

Logo, se $\varphi_n(f(x)) > 0$ temos

$$\varphi(x) + \varphi_n(f(x)) > \varphi(x).$$

Juntando ambas as desigualdades quando $\varphi_n(f(x)) > 0$ obtemos

$$\varphi(x) + \varphi_n(f(x)) \geq \max\{\varphi(x) + \varphi(f(x)), ..., \varphi(x)+$$
$$+\varphi(f(x)) + ... + \varphi(f^n(x))\} = \varphi_n(x).$$

Em suma:

$$\varphi_n(x) = \varphi(x) \quad \text{se} \quad \varphi_n(f(x)) \leq 0,$$
$$\varphi(x) \geq \varphi_n(x) - \varphi_n(f(x)) \quad \text{se} \quad \varphi_n(f(x)) > 0.$$

Substituindo em (3) temos

$$\begin{aligned} I \geq \int_{\{\varphi_n > 0\} \cap \{\varphi_n \circ f \leq 0\}} \varphi_n d\mu + \int_{\{\varphi_n > 0\} \cap \{\varphi_n \circ f > 0\}} \varphi_n - \varphi_n \circ f d\mu = \\ = \int_{\{\varphi_n > 0\}} \varphi_n d\mu - \int_{\{\varphi_n > 0\} \cap \{\varphi_n \circ f > 0\}} \varphi_n \circ f d\mu \end{aligned} \tag{7}$$

Observamos que

$$f^{-1}\left(\{\varphi_n > 0\}\right) = \{\varphi_n \circ f > 0\} \supset \{\varphi_n > 0\} \cap \{\varphi_n \circ f > 0\}.$$

Segue pela Proposição (1.1) e dá observação acima que

$$\int_{\{\varphi_n > 0\}} \varphi_n d\mu = \int \chi_{\{\varphi_n > 0\}}.\varphi_n d\mu = \int (\chi_{\{\varphi_n > 0\}}.\varphi_n) \circ f d\mu =$$

$$= \int (\chi_{\{\varphi_n>0\}} \circ f)(\varphi_n \circ f) d\mu = \int \chi_{f^{-1}(\{\varphi_n>0\})} . (\varphi_n \circ f)\, d\mu =$$

$$= \int (\chi_{\{\varphi_n \circ f>0\}})(\varphi_n \circ f) d\mu = \int_{\{\varphi_n \circ f>0\}} \varphi_n \circ f d\mu.$$

Substituindo este último resultado em (4) temos

$$I \geq \int_{\{\varphi_n \circ f>0\}} \varphi_n \circ f d\mu - \int_{\{\varphi_n>0\} \cap \{\varphi_n \circ f>0\}} \varphi_n \circ f d\mu \geq 0 \tag{8}$$

■

Corolário 1.1.1. *Se $X \subset E(\varphi) \in \Im$ e X é tal que $\varphi^{-1}(X) = X$, então*

$$\int_X \varphi d\mu \geq 0.$$

Demonstração. Seja χ_X a função característica do conjunto X. Agora usando o fato que

$$f^{-1}(X) = X,$$

temos

$$E(f\chi) = X.$$

Logo, pelo Lema, vale

$$0 \leq \int_{E(f\chi)} f\chi d\mu = \int_X f\chi d\mu = \int_X f d\mu.$$

■

Demonstração do Teorema de Birkhoff. Para cada $\varphi \in L^1(\mu)$ definamos

$$E_\alpha^+(\varphi) = \left\{ x \in M; \lim_{n\to\infty} \sup \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \varphi(f^i(x))}{n+1} > \alpha \right\}$$

e

$$E_\alpha^-(\varphi) = \left\{ x \in M; \lim_{n\to\infty} \inf \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \varphi(f^i(x))}{n+1} < \alpha \right\}$$

Notemos que

$$E_0^+(\varphi-\alpha)=\left\{x\in M;\ \limsup_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=0}^{n}(\varphi-\alpha)(f^i(x))}{n+1}>0\right\}=$$
$$=\left\{x\in M;\ \limsup_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=0}^{n}\varphi(f^i(x))}{n+1}-\alpha>0\right\}=E_\alpha^+(\varphi) \tag{9}$$

e

$$E_{-\alpha}^+(\varphi)=\left\{x\in M;\ \limsup_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=0}^{n}(-\varphi)(f^i(x))}{n+1}>-\alpha\right\}=$$
$$=\left\{x\in M;-\limsup_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=0}^{n}\varphi(f^i(x))}{n+1}>-\alpha\right\}=E_\alpha^-(\varphi) \tag{10}$$

Afirmação: Para cada $\varphi\in L^1(\mu)$ e $\alpha\in\mathbb{R}$ tem-se

$$\int_{E_\alpha^+(\varphi)}\varphi d\mu\geq\alpha\mu(E_\alpha^+(\varphi)) \tag{11}$$

De fato,

$$\int_{E_\alpha^+(\varphi)}\varphi d\mu=\int_{E_\alpha^+(\varphi)}(\varphi-\alpha)d\mu+\alpha\mu(E_\alpha^+(\varphi))=$$
$$=\int_{E_0^+(\varphi-\alpha)}(\varphi-\alpha)d\mu+\alpha\mu(E_\alpha^+(\varphi)) \tag{12}$$

Como também vale

$$f^{-1}(E_0^+(\varphi-\alpha))\subset E_0^+(\varphi-\alpha)$$

e

$$E_0^+(\varphi - \alpha) \subset E(\varphi - \alpha)$$

segue do Corolário 1.1.1 que

$$\int_{E_0^+(\varphi-\alpha)} (\varphi - \alpha) d\mu \geq 0 \tag{13}$$

As desigualdades (12) e (13) juntas provam (11)

Se $A \in \Im$ está contido em $E_\alpha^+(\varphi)$ e $f^{-1}(A) = A$, tem-se

$$\int_A \varphi d\mu \geq \alpha\mu(A) \tag{14}$$

pois

$$\int_A \varphi d\mu = \int_A \varphi\chi_A d\mu = \int_{E_\alpha^+(\varphi\chi_A)} \varphi\chi_A d\mu \geq \alpha\mu(E_\alpha^+) = \alpha\mu(A).$$

Finalmente usando (10) segue de (14) que se $\varphi \in L^1(\mu)$, $A \in \Im$ está contido em $E_\beta^-(\varphi)$ e satisfaz $f^{-1}(A) = A$ então vale

$$\int_A \varphi d\mu \leq \beta\mu(A) \tag{15}$$

pois nas condições acima temos

$$\int_A -\varphi d\mu \geq (-\beta)\mu(A) \Rightarrow \int_A \varphi d\mu \leq \beta\mu(A).$$

Por (14) e (15) tem-se para $\alpha > \beta$ que

$$\mu(E_\alpha^+(\varphi) \cap E_\beta^-(\varphi)) = 0 \tag{16}$$

visto que aplicando (14) com $A = E_\alpha^+(\varphi) \cap E_\beta^-(\varphi)$ temos

$$\int_A \varphi d\mu \geq \alpha\mu(E_\alpha^+(\varphi) \cap E_\beta^-(\varphi))$$

e aplicando à (15) resulta

$$\int_A \varphi d\mu \leq \beta\mu(E_\alpha^+(\varphi) \cap E_\beta^-(\varphi))$$

Então tomando uma sequência α_n, $n \geq 1$ densa em $\mathbb{R}$ resulta que

$$\left\{ x \in M; \limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n} \varphi(f^i(x))}{n+1} > \liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n} \varphi(f^i(x))}{n+1} \right\} =$$

$$= \bigcup_{\alpha_n > \alpha_m} E^+_{\alpha_n}(\varphi) \cap E^-_{\alpha_m}(\varphi).$$

e por (16) este último conjunto tem medida 0. Isto prova a primeira afirmação.

Provaremos agora a segunda afirmação. Começamos observando que sendo φ integrável temos $\varphi \in L^1(\mu)$. Definimos

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f^i(x)) \ \text{ e } \ h(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x).$$

Afirmação 1: $\varphi_n, h \in L^1(\mu)$. De fato, seja $I_n = \int_M |\varphi_n| d\mu$, então

$$I_n = \int_M |\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ f^i| d\mu \leq \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \int_M |\varphi \circ f^i| d\mu =$$

$$= \|\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ f^i\|_1 \leq \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \|\varphi \circ f^i\|_1 = \|f\|_1.$$

Portanto,

$$\|\varphi_n\|_1 \leq \|\varphi\|_1 \tag{17}$$

Seja $I = \int_M |h| d\mu$, então pelo Lema de Fatou temos

$$I = \int_M |\lim_{n\to\infty} \varphi_n| d\mu = \int_M \lim_{n\to\infty} |\varphi_n| d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_M |\varphi_n| d\mu = \liminf_{n\to\infty} I_n \leq \|\varphi\|_1.$$

Portanto,

$$\|h\|_1 \leq \|\varphi\|_1 \tag{18}$$

Afirmação 2: $\lim\limits_{n\to\infty} \|\varphi_n - h\|_1 = 0$ De fato, suponha que $\varphi \in L^1(\mu)$ é limitada, isto é, $|\varphi(x)| \leq K$ para todo $x \in M$. Então $|\varphi_n(x)| \leq K$ para todo $x \in M$. Daí, $|h| = \lim\limits_{n\to\infty} |\varphi_n| \leq K$. para q.t.p $x \in M$. Logo, $|\varphi_n - h| \leq 2K$.

Pelo Teorema da convergência dominada temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_M |\varphi_n - h| d\mu = \int_M \lim_{n\to\infty} |\varphi_n - h| d\mu = 0.$$

Assim a afirmação fica demonstrada quando f é limitada. Seja $\varphi \in L^1(\mu)$ qualquer. Como as funções simples são limitadas e densas em $L^1(\mu)$, temos que dado $\varepsilon > 0$ existe ϕ simples tal que

$$\|\varphi - \phi\|_1 < \frac{\varepsilon}{3} \tag{19}$$

Pela desigualdade triangular temos

$$\|\varphi_n - h\|_1 \leq \|\varphi_n - \phi_n\|_1 + \|\phi_n - \phi\|_1 + \|\phi - h\|_1 \tag{20}$$

onde $\phi_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \phi(f^i(x))$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \phi_n = \psi$.

Como ϕ é limitada temos pelo caso anterior, para todo n suficientemente grande que

$$\|\phi_n - \psi\|_1 < \frac{\varepsilon}{3} \tag{21}$$

Por (17) e (18) resulta

$$\|\varphi_n - \phi_n\|_1 = \|(\varphi - \phi)_n\|_1 \leq \|\varphi - \phi\|_1 < \frac{\varepsilon}{3} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} \|h - \phi\|_1 = \| \lim_{n\to\infty} (\varphi_n - \phi_n)\|_1 = \| \lim_{n\to\infty} (\varphi - \phi)_n\|_1 = \\ = \|(\varphi - \phi)\|_1 \leq \|\varphi - \phi\|_1 < \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned} \tag{23}$$

Substituindo (21), (22) e (23) em (20) temos

$$\|\varphi_n - h\|_1 < \varepsilon.$$

para todo n suficientemente grande. Isto prova a afirmação 2.

Como para $\varphi \in L^1(\mu)$ temos $\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - h\|_1 = 0$, então

$$\Big| \int_M \varphi_n \, d\mu - \int_M h \, d\mu \Big| \leq \int_M |\varphi_n - h| d\mu = \|\varphi_n - h\|_1 \longrightarrow 0$$

quando $n \longrightarrow \infty$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \int_M \varphi_n \, d\mu = \int_M h \, d\mu.$$

Por outro lado,

$$\int_M \varphi_n d\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \int_M \varphi \circ f^i d\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \int_M \varphi d\mu = \int_M \varphi d\mu$$

Portanto,

$$\int_M \varphi d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_M \varphi_n d\mu = \int_M h \, d\mu.$$

Isto encerra a demonstração do Teorema.

$\blacksquare$

Capítulo 2

Entropia

2.1 Definições e Resultados Básicos

Neste capítulo nos dedicaremos ao estudo da entropia. Nele apresentamos a definição de entropia e demonstramos algumas de suas propriedades. Começamos observando que em todo este capítulo $(M, \mho, \mu)$ denota um espaço de probabilidade.

Definição 2.1. *Uma partição $\mathcal{P}$ de M é uma família de conjuntos em $\mho$ (denominados os átomos da partição) tal que*

1. $\mu(A) > 0$, *para todo* $A \in \mathcal{P}$.
2. $A, B \in \mathcal{P} \Rightarrow \mu(A \cap B) = 0$.
3. $\mu(M - \bigcup_{A \in \mathcal{P}} A) = 0$.

Definição 2.2. *Dadas duas partições $\mathcal{P}$ e $\mathcal{F}$ podemos definir uma nova partição $\mathcal{P} \vee \mathcal{F}$ de M do seguinte modo:*

$$\mathcal{P} \vee \mathcal{F} = \{A \cap B, A \in \mathcal{P} \ \ e \ \ B \in \mathcal{F}\}$$

Dadas uma partição $\mathcal{P}$ e uma transformação $f : M \longrightarrow M$ que preserva medida, denotamos por $\mathcal{P}^n$ a partição

$$\mathcal{P}^n = \bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\mathcal{P}).$$

Definição 2.3. *Sejam $\mathcal{P}$ e $\mathcal{F}$ partições enumeráveis de um espaço de probabilidade. Definimos a entropia $H_\mu(\mathcal{P})$ da partição $\mathcal{P}$ com respeito a medida μ por:*

$$H_\mu(\mathcal{P}) = -\sum_{A\in\mathcal{P}} \mu(A)\log\mu(A),$$

e a entropia relativa $H_\mu(\mathcal{P}/\mathcal{F})$ de $\mathcal{P}$ com respeito a $\mathcal{F}$ e à medida μ por:

$$H_\mu(\mathcal{P}/\mathcal{F}) = -\sum_{A\in\mathcal{P}}\sum_{B\in\mathcal{F}} \mu(A\cap B)\log\frac{\mu(A\cap B)}{\mu(B)},$$

onde se convenciona que $0\log 0 = 0 = \log(0/0)$

Exemplo 2.1. *Seja $f : [0,1] \to [0,1]$ definida por $f(x) = 10x - [10x]$. Se $\mathcal{P}$ é a partição de $[0,1]$ dada por intervalos $P_k = (\frac{k}{10}, \frac{k+1}{10}]$, $k = 0, 1, ..., 9$ e μ é a medida de Lebesgue, então $H_\mu(\mathcal{P}) = \log 10$.*

De fato, temos

$$H_\mu(\mathcal{P}) = -\sum_{P_k\in\mathcal{P}} \mu(P_k)\log\mu(P_k) = H_\mu(\mathcal{P}) =$$

$$= -\sum_{k=0}^{9} \mu((\frac{k}{10}, \frac{k+1}{10}])\log\mu((\frac{k}{10}, \frac{k+1}{10}]) = \sum_{k=0}^{9}\frac{1}{10}\log 10 = \log 10.$$

Antes de passarmos as propriedades de entropia, vamos a dois resultados auxiliares que serão de grande utilidade na demonstração dessas propriedades.

Proposição 2.1. *Seja $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, derivável até a segunda ordem em $(0,1)$ e com derivada segunda negativa. Sejam λ_i uma sequência de números reais ≥ 0, tais que $\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i = 1$, e x_i uma sequência de pontos em $[0,1]$. Nestas condições temos*

$$\phi\left(\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\phi(x_i). \tag{1}$$

Demonstração. Começamos observando que as séries do enunciado são absolutamente convergentes porque seus i-ésimos termos são menores ou iguais, em valor absoluto, que uma constante multiplicada por λ_i e, a série dos λ_i convergem por hipótese.

Afirmação. Se $\sum_{i=1}^{n} \rho_i = 1$ para todo $n \geq 1$ e $\rho_i \geq 0$, então

$$\phi\left(\sum_{i=1}^{n} \rho_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \rho_i \phi(x_i). \tag{2}$$

A prova da afirmação será feita por indução.

Para $n = 1$ é trivial, pois, neste caso, $\rho_1 = 1$.

Para $n = 2$, sejam $x, y \in [0,1]$. Como a segunda derivada de ϕ é negativa, temos que o segmento de reta cujos extremos são os pontos $(x, \phi(x))$ e $(y, \phi(y))$ está abaixo do gráfico de ϕ entre x e y. Isto significa que, para todo $0 \leq \rho \leq 1$, tem-se

$$\phi(\rho x + (1-\rho)y) \geq \rho\phi(x) + (1-\rho)\phi(y).$$

Suponha que a afirmação é verdadeira para n. Vamos mostrar que também vale para $n+1$. Se $\sum_{i=1}^{n+1} \rho_i = 1$, seja $\rho = \sum_{i=1}^{n} \rho_i$, logo $\rho_{n+1} = 1 - \rho$. Seja $X = \sum_{i=1}^{n} \rho_i x_i / \rho$. Assim

$$\sum_{i=1}^{n+1} \rho_i x_i = \rho X + (1-\rho) x_{n+1}.$$

Pelo caso anterior tem-se

$$\phi\left(\sum_{i=1}^{n+1} \rho_i x_i\right) = \phi\left(\rho X + (1-\rho)x_{n+1}\right) \geq \rho\phi(X) + (1-\rho)\phi(x_{n+1}) =$$

$$= \rho\phi\left(\sum_{i=1}^{n} \rho_i x_i/\rho\right) + \rho_{n+1}\phi(x_{n+1}) \geq \rho \sum_{i=1}^{n} \frac{\rho_i x_i}{\rho} + \rho_{n+1}\phi(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \phi(x_i).$$

Agora estamos em condições de obtermos (1).Usando (2) e a continuidade da função ϕ temos

$$\phi\left(\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i x_i\right) = \lim_{n\to\infty}\phi\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}\right) \geq \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\phi(x_i)}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i} = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\phi(x_i).$$

■

Proposição 2.2. *Se x_n, $n \geq 1$ é uma sequência de números reais positivos tal que*

$$\inf_n\left(\frac{x_n}{n}\right) > -\infty$$

e

$$x_{n+m} \leq x_n + x_m$$

para todo n, m então existe

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}.$$

Demonstração. Começamos observando que para $a \geq 1$ e $b \geq 1$ temos

$$x_{ab} \leq \underbrace{x_a + x_a + ... + x_a}_{b-vezes} = bx_a.$$

Seja $k = \inf_n(\frac{x_n}{n})$. Dado $\varepsilon > 0$ seja n_0 tal que

$$\frac{x_n}{n_0} \leq k + \varepsilon.$$

Então, para $n > n_0$, podemos escrever $n = n_0p + q$, com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $n_0 \geq q \geq 1, p \geq 1$. Assim temos

$$\frac{x_n}{n} = \frac{x_{n_0p+q}}{n_0p+q} \leq \frac{x_{n_0p} + x_q}{n_0p+q} \leq \frac{px_{n_0} + x_q}{n_0p+q} = \frac{px_{n_0}}{n_0p+q} + \frac{x_q}{n_0p+q} \leq$$

$$\leq \frac{px_{n_0}}{n_0p} + \frac{x_q}{n} = \frac{x_{n_0}}{n_0} + \frac{x_q}{n} \leq k + \varepsilon + \frac{x_q}{n} \leq k + \varepsilon + \frac{1}{n}\sup_{1\leq i\leq n_0} x_i.$$

Para n suficientemente grande tem-se

$$k \leq \frac{x_n}{n} \leq k + 2\varepsilon.$$

Como ε é qualquer temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = k = \inf_n(\frac{x_n}{n}).$$

$\blacksquare$

Teorema 2.1. *Sejam $\mathcal{A}$, $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ partições. Então*

1. $H_\mu(\mathcal{P}/\mathcal{Q}) \le H_\mu(\mathcal{P})$;
2. $H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \le H_\mu(\mathcal{P}) + H_\mu(\mathcal{Q}/\mathcal{P})$;
3. $H_\mu(\mathcal{A}/\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \le H_\mu(\mathcal{A}/\mathcal{Q})$

Demonstração. A afirmação *1* é conseqüência imediata da afirmação *3* tomando $\mathcal{Q} = \{M\}$.

Vamos para a afirmação *2*.

$$H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) = -\sum_{A\in\mathcal{P}}\sum_{B\in\mathcal{Q}} \mu(A\cap B)\log\mu(A\cap B) =$$

$$= -\sum_{A\in\mathcal{P}}\sum_{B\in\mathcal{Q}} \mu(A\cap B)\log\frac{\mu(A\cap B)}{\mu(A)} - \sum_{A\in\mathcal{P}}\sum_{B\in\mathcal{Q}} \mu(A\cap B)\log\mu(A) =$$

$$= H_\mu(\mathcal{P}/\mathcal{Q}) - \sum_{A\in\mathcal{P}} \mu(A)\log\mu(A) = H_\mu(\mathcal{P}/\mathcal{Q}) + H_\mu(\mathcal{P}).$$

provemos agora a afirmação *3*. Seja

$$\phi(x) = \begin{cases} -x\log x, & se\ x \in (0,1] \\ 0, & se\ x = 0 \end{cases}$$

Note que ϕ é contínua em $[0,1]$ e tem a segunda derivada negativa em $(0,1)$. Logo ϕ satisfaz as hipóteses da Proposição (2.1)

$$H_\mu(\mathcal{A}/\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) = -\sum_{A\in\mathcal{A}}\sum_{B\in\mathcal{P}}\sum_{C\in\mathcal{Q}} \mu(A\cap B\cap C)\log\frac{\mu(A\cap B\cap C)}{\mu(B\cap C)} =$$

$$= \sum_{C\in\mathcal{Q}} \mu(C) - \sum_{A\in\mathcal{A}}\sum_{B\in\mathcal{P}} \frac{\mu(A\cap B)}{\mu(C)}\phi\left(\frac{\mu(A\cap B\cap C)}{\mu(A\cap B)}\right).$$

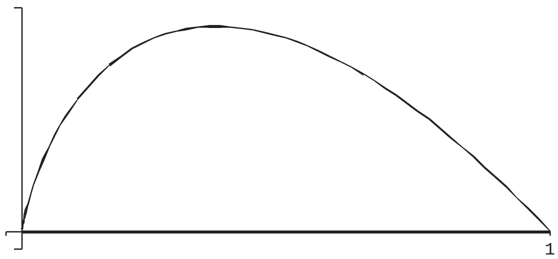

Gráfico da funcão $f(x) = -x \log x$ em $(0, 1]$

Tomemos $A \in \mathcal{A}$ e $C \in \mathcal{Q}$ fixos. Enumeremos com subindice $i \geq 0$ todos os conjuntos $B_i \in \mathcal{P}$ tais que $\mu(B_i \cap C) \neq 0$. Definamos os números $\lambda_i = \mu(B_i \cap C)/\mu(C)$ e $x_i = \mu(B_i \cap A \cap C)/\mu(B_i \cap C)$. Observe que: $x_i \in [0, 1]$, $\lambda_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = 1$. Aplicando a proposição (2.1) temos

$$H_\mu(\mathcal{A}/\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) = \sum_{C \in \mathcal{Q}} \mu(C) \sum_{A \in \mathcal{A}} \sum_{i \geq 1} \lambda_i \phi(x_i) \leq \sum_{C \in \mathcal{Q}} \mu(C) \sum_{A \in \mathcal{A}} \phi\left(\sum_{i \geq 1} \lambda_i x_i\right).$$

Como $\sum_{i \geq 1} \lambda_i x_i = \mu(A \cap C)/\mu(B)$ temos

$$H_\mu(\mathcal{A}/\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \leq -\sum_{C \in \mathcal{Q}} \mu(C) \sum_{A \in \mathcal{A}} \frac{\mu(A \cap C)}{\mu(B)} \log \frac{\mu(A \cap C)}{\mu(B)} = H_\mu(\mathcal{A}/\mathcal{Q}).$$

■

Observamos que combinando os ítens *1* e *2* da proposição (2.1) temos

$$H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \leq H_\mu(\mathcal{P}) + H_\mu(\mathcal{Q})$$

Observamos também que se T preserva medida então $H_\mu(T^{-1}(\mathcal{P})) = H_\mu(\mathcal{P})$. De fato,

$$H_\mu(T^{-1}(\mathcal{P})) = -\sum_{A \in (T^{-1}(\mathcal{P}))} \mu(T^{-1}(A)) \log \mu(T^{-1}(A)) =$$

$$= -\sum_{A \in \mathcal{P}} \mu(A) \log \mu(A) = H_\mu(\mathcal{P})$$

Definição 2.4. *Dada uma transformação $f : M \longrightarrow M$ que preserva medida e $\mathcal{P}$ uma partição de M, definimos a entropia $H_\mu(f,\mathcal{P})$ de f com respeito a $\mathcal{P}$ e à medida μ por:*

$$h_\mu(f,\mathcal{P}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_\mu(\mathcal{P}^n).$$

Mostraremos que a sequência $\frac{1}{n}H_\mu(\mathcal{P}^n)$ é convergente.

Pela proposição (2.2) é suficiente mostrar que $H_\mu(\mathcal{P}^n)$ é sub-aditiva. Seja $a_n = H_\mu(\mathcal{P}^n) \geq 0$.

$$a_{n+m} = H_\mu(\mathcal{P}^{n+m}) = H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n+m-1} f^{-i}(\mathcal{P})\right) =$$

$$= H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\mathcal{P}) \vee \bigvee_{i=n}^{n+m-1} f^{-i}(\mathcal{P})\right) \leq H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\mathcal{P})\right) +$$

$$+ H_\mu\left(\bigvee_{i=n}^{n+m-1} f^{-i}(\mathcal{P})\right) = a_n + H_\mu\left(\bigvee_{i=n}^{n+m-1} f^{-i}(\mathcal{P})\right) =$$

$$= H_\mu(f^{-n}(\mathcal{P}^m)) = a_n + a_m.$$

Exemplo 2.2. *Sejam Seja $f : [0,1] \to [0,1]$ definida por $f(x) = 10x - [10x]$, μ a medida de Lebesgue em $[0,1]$ e $\mathcal{P}$ a partição definida no exemplo (2.1). Então a entropia de $H_\mu(f,\mathcal{P})$ de f com respeito a partição $\mathcal{P}$ e à medida μ igual a* $\log 10$.

De fato, começamos observando que se $\mathcal{P}$ é a partição definida no exemplo (2.1), então existe exatamente 10^n elementos em $\mathcal{P}^n$ sendo cada um deles um intervalo de comprimento 10^{-n}. Assim dado $P \in \mathcal{P}^n$, temos $\mu(P) = 10^{-n}$. Daí,

$$H_\mu(\mu, f) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{P\in\mathcal{P}^n} -\mu(P)\log\mu(P) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(-10^n 10^{-n} \log 10^{-n}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(-\log 10^{-n}) = \log 10.$$

2.2 Medidas de Bernoulli

Seja $N = \{1, 2, ..., k\}$, $k \geq 1$ um conjunto finito. O conjunto N é chamado alfabeto e os elementos de N são chamados de símbolos.

Definição 2.5. *Seja M o conjunto formado por todas as seqüencias bi-infinitas $\alpha : \mathbb{Z} \to N$, isto é,*

$$M = \{\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{Z}}; \alpha_n \in N \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}\}.$$

Chama-se shift (para a esquerda) a aplicação $\sigma : M \to M$ definida por $\sigma(\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{Z}}) = \{\beta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que $\beta_n = \alpha_{n+1}$. O shift é um deslocamento dos termos de uma sequência uma posição para a esquerda.

Definição 2.6. *Seja X o conjunto formado por todas as seqüencias $\alpha : \mathbb{N} \to N$, isto é,*

$$X = \{\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}; \alpha_n \in N \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}.$$

Chama-se shift unilateral a aplicação $\sigma : X \to X$ definida por $\sigma(\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = \{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\beta_n = \alpha_{n+1}$.

Definição 2.7. *Sejam σ e X como na definição anterior. Para cada subconjunto compacto $\sum \subset X$ tal que $\sigma \sum \subset \sum$, chamaremos de subshift a aplicação $\sigma|_{\sum}$.*

Definição 2.8. *Seja A uma matriz $p \times p$ tal que todas as suas entradas a_{ij} são 0 ou 1 e X e σ como na definição (2.6). Considere o subconjunto compacto $\sum_A \subset X$ composto das sequências $(i_0, i_1, ...)$ tal que $a_{i_n i_{n+1}} = 1$ para todo $n \geq 0$. A aplicação $\sigma|_{\sum_A}$ é chamada subshift do tipo finito com matriz de transferencia A.*

Definição 2.9. *Seja $\underline{\alpha} = \{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in M$. Chama-se cilindro os subconjuntos da forma*

$$[k, l; a_k, ..., a_l] = \{\underline{\alpha} \in M; \alpha_k = a_k, ..., \alpha_l = a_l\}$$

onde $k, l \in \mathbb{N}$, com $k \leq l$ e cada $a_i \in N$.

Definição 2.10. *Chama-se vetor de probabilidade um vetor* $p = (p_1, ..., p_k) \in (0,1)^k$ *tal que*

$$\sum_{i=1}^{k} p_i = 1.$$

O valor p_i *se chama probabilidade do símbolo* $i \in N$.

Dado um vetor de probabilidade p definimos uma medida de probabilidade nos borelianos de M da seguinte forma:

Definição 2.11. *Seja* $\mathcal{C}$ *a coleção dos cilindros e* $\mathcal{A}_0$ *a álgebra das uniões finitas de cilindros disjuntos dois a dois. Dado um vetor de probabilidade* $(p_1, ..., p_k)$ *defina* $\nu_0 : \mathcal{A}_0 \to [0,1]$ *por*

- $\nu_0(\emptyset) = 0$
- $\nu_0(M) = 1$
- $\nu_0(A) = \sum_{i=1}^{l} \nu_0(C_i)$, *para todo* $A \in \mathcal{A}_0$ *tal que* $A = \bigcup_{i=1}^{p} C_i$, *onde* C_i *são cilindros disjuntos.*
- $\nu_0(C_i) = \prod_{j=1}^{k} p_{a_j}$, *onde* $C_i = [l, k; \alpha_l = a_1, \alpha_{l+1} = a_2, ..., \alpha_{l+k-1} = a_k]$

Observe que ν_0 é uma pré-medida. Logo existe uma única medida ν que é a extensão de ν_0 a σ-álgebra $\mathcal{A}$ gerada pela álgebra $\mathcal{A}_0$. A medida ν assim definida é chamada medida de Bernoulli associada ao vetor p. Note que a medida de Bernoulli nada mais é que a medida-produto $\eta^{\mathbb{N}}$, onde η é a medida de probabilidade definida no conjunto $\{0, \ldots m-1\}$ por $\eta(\{i\}) = p_i$. Para mais informações sobre estes tipos de medida, veja [1], [4], [10].

Proposição 2.3. *A medida de Bernoulli* ν *é invariante pela transformação* $\sigma : M \to M$ *(o shift).*

Demonstração. Seja $C = [u, v; a_u, ..., a_v]$ um cilindro. Então,

$$\sigma^{-1}(C) = [u+1, v+1; a_u, ..., a_v].$$

Logo,

$$\nu(C) = \nu(\sigma^{-1}(C)).$$

Como a família dos cilindros gera a σ-álgebra $\mathcal{A}$ de M, isto juntamente com o Lema (1.1) prova que ν é invariante para σ.

∎

Teorema 2.2. *Seja $\mathcal{P}$ uma partição por cilindros de comprimento 1, então a entropia da partição $\mathcal{P}^n$ com respeito a medida de Bernoulli ν associada ao vetor de probabilidade $p = (p_1, ..., p_k)$ é dada por*

$$H_\nu(\mathcal{P}^n) = -n \sum_{i=1}^{k} p_i \log p_i.$$

Demonstração. Como os elementos de $\mathcal{P}$ são cilindros de comprimento 1, então os elementos de $\mathcal{P}^n$ são cilindros de comprimento n. Seja $C \in \mathcal{P}^n$, então $\nu(C) = p_{i_1}.p_{i_2}...p_{i_n}$. Portanto,

$$H_\nu(\mathcal{P}^n) = -\sum (p_{i_1}.p_{i_2}...p_{i_n}) \log(p_{i_1}.p_{i_2}...p_{i_n}) =$$

$$= -\sum_{i_1=1}^{k} \sum_{i_2=1}^{k} ... \sum_{i_n=1}^{k} (p_{i_1}.p_{i_2}...p_{i_n}) \log(p_{i_1}.p_{i_2}...p_{i_n}) =$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} \sum_{i_1=1}^{k} ... \sum_{i_j=1}^{k} ... \sum_{i_n=1}^{k} p_{i_1}...p_{i_j}...p_{i_n} \log p_{i_j} =$$

Como $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$, temos

$$H_\nu(\mathcal{P}^n) = -\sum_{j=1}^{n} \sum_{i_j=1}^{k} p_{i_j} \log p_{i_j} = -n \sum_{i=1}^{k} p_i \log p_i.$$

∎

Corolário 2.2.1. *Sejam $\mathcal{P}$ a partição definida no Teorema (2.2) e $\sigma : M \to M$ o shift. Então a entropia $H_\nu(\sigma, \mathcal{P})$ de σ com respeito à partição $\mathcal{P}$ e a medida de Bernoulli ν é dada por*

$$h_\nu(\sigma, \mathcal{P}) = -\sum_{i=1}^{k} p_i \log p_i.$$

Demonstração. Pelo Teorema temos

$$H_\nu(\mathcal{P}^n) = -n \sum_{i=1}^{k} p_i \log p_i.$$

Por outro lado,

$$h_\mu(\sigma, \mathcal{P}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\mathcal{P}^n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(-n \sum_{i=1}^{k} p_i \log p_i \right) = -\sum_{i=1}^{k} p_i \log p_i.$$

∎

Definição 2.12. *A entropia de uma transformação f com respeito à uma medida μ é dada por*

$$h_\mu(f) = \sup_{\mathcal{P}} h_\mu(f, \mathcal{P}),$$

onde o supremo é tomado sobre todas as partições finitas $\mathcal{P}$ de M.

Definição 2.13. *Seja $f : M \to M$ uma transformação invertível preservando uma medida de probabilidade μ no espaço de probabiliodade $(M, \mho, \mu)$. Uma partição $\mathcal{P}$ é dita geradora se $\bigvee_{i=-\infty}^{+\infty} f^{-i}(\mathcal{P})$ gera a σ-álgebra $\mho$. No caso de f ser não-invertível, então $\mathcal{P}$ é geradora se $\bigvee_{i=0}^{+\infty} f^{-i}(\mathcal{P})$ gera a σ-álgebra.*

Teorema 2.3 (Kolmogorov-Sinai). *Seja $\mathcal{P}$ uma partição geradora para $f : M \to M$ preservando uma probabilidade μ no espaço $(M, \mho, \mu)$. Então,*

$$h_\mu(f) = h_\mu(f, \mathcal{P}).$$

Exemplo 2.3. *A entropia de uma medida de Bernoulli ν associada a um vetor de probabilidade $p = (p_1, ..., p_k)$ é dada por*

$$h_\nu(\sigma) = -\sum_{i=1}^{k} p_i \log p_i.$$

De fato, sejam $\mathcal{P}$ uma partição por cilindros de comprimento 1 e $\sigma : M \to M$ o shift. Então, os elementos de $\mathcal{P}^n$ são cilindros de comprimento n. Como a família dos cilindros gera a σ-álgebra de Borel a partição $\mathcal{P}$ é geradora. Logo, pelo Corolário (2.2.1) e Teorema (2.3) temos

$$h_\nu(\sigma) = -\sum_{i=1}^{k} p_i \log p_i.$$

Exemplo 2.4. *Dentre as medidas que são de Bernoulli, a de maior entropia é a que possui vetor de probabilidade $p = (1/k, ..., 1/k)$.*

De fato, seja ν a medida de Bernoulli com vetor de probabilidade $p = (1/k, ..., 1/k)$. Então, a entropia é dada por

$$-\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k} \log \frac{1}{k} = -k \frac{1}{k} \log \frac{1}{k} = \log k.$$

Para qualquer outro vetor de probabilidade, usando a função $\phi(x) = -x \log x$ e a Proposição (2.1) temos que a entropia é dada por

$$-\sum_{i=1}^{k} \phi(p_i) = -k \sum_{i=1}^{k} \phi(p_i)/k \leq k\, \phi \left(\sum_{i=1}^{k} \phi(p_i)/k \right) = k\, \phi(1/k) = \log k.$$

Capítulo 3

Dimensão de Hausdorff de Conjuntos Regulares

3.1 Introdução

Seja $m > 1$ um inteiro positivo. Dado $w \in [0,1]$ denotamos por $0, w_1w_2w_3...$ sua representação na base m.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{0,1,...,m-1\}$ e $w \in [0,1]$ seja

$$N_k(w,n) = \#\{i \in \{1,...,n\}; w_i = k\}$$

Quando o limite existir

$$N_k(w) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} N_k(w,n)$$

ele será chamado de freqüência do número k na representação de w na base m.

Neste capítulo vamos determinar a dimensão de Hausdorff do conjunto dos pontos $w \in [0,1]$ para os quais o limite

$$N_k(w) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} N_k(w,n)$$

existe. No começo do século passado em 1909, Borel mostrou que para Lebesgue quase todo $w \in [0,1]$ tem $N_k(w) = \dfrac{1}{m}$ para todo k. Um pouco mais tarde, em 1934 Besicovitch mostrou que

$$\dim_H\{w \in [0,1]; \limsup_{n\to\infty} \frac{N_1(w,n)}{n} \leq \alpha\} = -\frac{\alpha\log\alpha + (1-\alpha)\log(1-\alpha)}{\log 2},$$

onde $m = 2$ e $\alpha \in (0, 1/2)$. E em 1949, Eggleston provou que

$$\dim_H\{w : N_i(w) = p_i, i = 0, ..., m-1\} = -\frac{1}{\log m}\sum_{i=0}^{m-1} p_i \log p_i,$$

onde $\dim_H M$ denota a dimensão de Hausdorff do conjunto M.

3.2 Dimensão de Hausdorff

Sejam M um subconjunto do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$.

Definição 3.1. *Uma ρ-cobertura de M é uma cobertura enumerável de M por bolas fechadas S_i de diâmetro $< \rho$.*

Seja

$$l_\alpha(M, \rho) = \inf \sum_i (\text{diam } S_i)^\alpha \tag{1}$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as ρ-coberturas de M. Observe que quando ρ diminui a classe de coberturas de M admissíveis em (1) é reduzida, conseqüentemente, o ínfimo, $l_\alpha(M, \rho)$, aumenta e aproxima-se de um limite quando $\rho \to 0$.

Definição 3.2. *A medida de Hausdorff α-dimensional do conjunto M, $l_\alpha(M)$, é dada por*

$$l_\alpha(M) = \lim_{\rho \to 0} l_\alpha(M, \rho).$$

Proposição 3.1. *São válidas as propriedades de $l_\alpha(M)$:*

1. $l_\alpha(M) \leq l_\alpha(N)$, *se* $M \subset N$.
2. $l_\alpha\big(\bigcup_n M_n\big) \leq \sum_n l_\alpha(M_n)$

Demonstração. *1*. Note que para $M \subset N$ temos

$$l_\alpha(M,\rho) \leq l_\alpha(N,\rho) \Rightarrow \lim_{\rho\to 0} l_\alpha(M,\rho) \leq \lim_{\rho\to 0} l_\alpha(N,\rho) \Rightarrow l_\alpha(M) \leq l_\alpha(N).$$

Quanto a *2*, dada uma sequência de conjuntos M_n, escolha ρ-coberturas $\{S_{n_i}\}$ com

$$\sum_i (\text{diam } S_{n_i})^\alpha < l_\alpha(M,\rho) + \frac{\varepsilon}{2^n} \leq l_\alpha(M) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Todas as coberturas S_{n_i} juntas formam uma ρ-cobertura de $\bigcup_n M_n$ com

$$\sum_n \sum_i (\text{diam } S_{n_i})^\alpha < \sum_n l_\alpha(M) + \varepsilon \Rightarrow l_\alpha\big(\bigcup_n M_n\big) \leq \sum_n l_\alpha(M_n).$$

∎

Como $l_\alpha(\emptyset) = 0$ temos pela proposição acima que $l_\alpha(M)$ é como função de M uma medida exterior.

Proposição 3.2. *Se $l_\alpha(M) < \infty$, então $l_\beta(M) = 0$ para todo $\beta > \alpha$.*

Demonstração. Seja $\{S_i\}$ é alguma ρ-cobertura de M para a qual

$$\sum_i (\text{diam } S_i)^\alpha \leq l_\alpha(M,\rho) + 1 \leq l_\alpha(M) + 1 = K < \infty,$$

então

$$l_\beta(M,\rho) \leq \sum_i (\text{diam } S_i)^\beta = \sum_i (\text{diam } S_i)^{\beta-\alpha+\alpha} =$$

$$= \sum_i (\text{diam } S_i)^{\beta-\alpha} (\text{diam } S_i)^\alpha \leq \rho^{\beta-\alpha} \sum_i (\text{diam } S_i)^\alpha < \rho^{\beta-\alpha} K.$$

Daí temos que

$$l_\beta(M) \to 0 \text{ quando } \rho \to 0 \Rightarrow l_\beta(M) = 0.$$

∎

Observação: Se $l_\beta(M) > 0$, então $l_\alpha(M) = \infty$, para todo $\alpha < \beta$

De fato, pela proposição acima, se $l_\alpha(M) < \infty$, então $l_\beta(M) = 0$.

∞

α_0

Definição 3.3. *Segue da proposição e da observação que existe um valor crítico de* α*, no qual* $l_\alpha(M)$ *"salta"de* ∞ *para* 0*. Este valor crítico chamamos de dimensão de Hausdorff de* M*, e denotamos por* $dim_H M$*. Formalmente,*

$$dim_H M = \sup\{\alpha; l_\alpha(M) = \infty\} = \inf\{\alpha; l_\alpha(M) = 0\}.$$

Observamos que

$$l_\alpha(M) = \begin{cases} \infty, & \text{se } \dim_H M > \alpha \\ 0, & \text{se } \dim_H M < \alpha \end{cases}$$

Proposição 3.3. *Valem as seguintes afirmações:*

(i) $l_\alpha(M) > 0 \Rightarrow dim_H M \geq \alpha$.

(ii) $l_\alpha(M) < \infty \Rightarrow dim_H M \leq \alpha$.

Demonstração. (i) Para $\beta < \alpha$, temos $l_\beta(M) = \infty$. Logo,

$$\dim_H M = \sup\{\beta; l_\beta(M) = \infty\} \geq \alpha.$$

(ii) Para $\beta > \alpha$, temos $l_\beta(M) = 0$. Logo,

$$\dim_H M = \inf\{\beta; l_\beta(M) = 0\} \leq \alpha.$$

∎

Proposição 3.4. *Valem as propriedades:*

(i) $dim_H M \leq dim_H N$ *se* $M \subset N$.

(ii) $dim_H \bigcup_n M_n = \sup_n dim_H M_n$.

Demonstração. (i) Como $l_\alpha(M) \leq l_\alpha N$ temos $l_\alpha(N) = 0 \Rightarrow l_\alpha(M) = 0$. Daí,

$$\dim_H M = \inf\{\alpha; l_\alpha(M) = 0\} \leq \inf\{\alpha; l_\alpha(N) = 0\} = \dim_H N.$$

(ii) $\dim_H M_n < \alpha$ para todo n implica que $l_\alpha(M_n) = 0$ para todo n. Sendo $l_\alpha(*)$ sub-aditiva veja proposição 3.1 temos

$$l_\alpha\big(\bigcup_n M_n\big) = 0 \Rightarrow \dim_H \bigcup_n M_n \leq \alpha \Rightarrow \sup_n \dim_H M_n \geq \dim_H \bigcup_n M_n.$$

Por outro lado,

$$M_n \subset \bigcup M_n \Rightarrow \dim_H M_n \leq \dim_H \bigcup_n M_n \Rightarrow \sup_n \dim_H M_n \leq \dim_H \bigcup_n M_n.$$

■

3.3 Dimensão no Intervalo Unitário

Em todo o restante deste capítulo, M denotará um subconjunto do intervalo unitário. Para cada conjunto M, $l_1(M)$ é uma medida exterior de M, conseqüentemente $l_1(M) \leq 1$. Portanto,

$$0 \leq \dim_H M \leq 1.$$

Se M é um conjunto de Borel com medida de Lebesgue positiva, então $l_1(M) > 0$. Conseqüentemente, $\dim_H M \geq 1$. Logo, $\dim_H M = 1$.

Dado um vetor de probabilidade definimos o conjunto $M(p_0, ..., p_{m-1})$ por

$$M(p_0, ..., p_{m-1}) = \{w : N_i(w) = p_i, i = 0, ..., m-1\}$$

No final da primeira metade do século passado Eggleston mostrou um importante resultado sobre dimensão de Hausdorff de conjuntos numéricos, mais precisamente, ele demonstrou o seguinte Teorema:

Teorema 3.1. *$dim_H M(p_0, ..., p_{m-1}) = -\dfrac{1}{\log m} \displaystyle\sum_{i=0}^{m-1} p_i \log p_i$.*

De agora em diante nosso objetivo é provar o Teorema (3.1). Para isto necessitamos de algumas ferramentas que nos darão suporte para o cumprimento de nosso objetivo. Para isto começamos definindo um cilindro no intervalo $[0,1]$, visto que é nesse intervalo que está concentrado todo o nosso trabalho.

Definição 3.4. *Um cilindro no intervalo* $[0,1]$ *é um intervalo da forma*

$$v = \left[\frac{j}{m^n}, \frac{j+1}{m^n}\right),$$

para algum $n = 1, 2, ...$ *e* $j \in \{0, 1, ..., m^n - 1\}$.

Denotaremos por $u_n(w)$ o cilindro que contém o ponto w e está contido em $[0,1]$.

No intervalo unitário, bolas são intervalos e diâmetro é comprimento. Portanto (1) reduz-se a

$$l_\alpha(M, \rho) = \inf \sum_i |v_i|^\alpha \tag{2}$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as coberturas de M por intervalos v_i de comprimento $|v_i| < \rho$.

Proposição 3.5. *Se definirmos*

$$\lambda_\alpha(M) = \inf \sum_i |v_i|^\alpha$$

onde o ínfimo é tomado agora sobre todas as coberturas de M *por cilindros de comprimento* $< \rho$. *Então*

$$l_\alpha(M, \rho) \leq \lambda_\alpha(M, \rho) \leq 2\, m\, l_\alpha(M, \rho).$$

Segue da proposição que se,

$$\lambda_\alpha(M) = \lim_{\rho \to 0} \lambda_\alpha(M, \rho),$$

então

$$\lambda_\alpha(M) = \begin{cases} \infty, & \text{se } \dim_H M > \alpha \\ 0, & \text{se } \dim_H M < \alpha \end{cases}$$

Conseqüentemente podemos definir $\dim_H M$ em termos de $\lambda_\alpha(M)$ tão bem quanto em termos de $l_\alpha(M)$.

Demonstração. A desigualdade do lado esquerdo de (3.5) é clara. Vamos provar a segunda desigualdade para o caso em que $m = 2$(O caso geral é feito de forma similar). Começamos provando que dado qualquer intervalo u, podemos cobri-lo com quatro cilindro de comprimento menor que o comprimento de u. De fato, escolha dentro de u um cilindro v_1 de comprimento máximo, digamos $|v_1| = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, conseqüentemente u não contém cilindro de comprimento $|v_1| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. Se v_0 e v_1 são cilindros de comprimento $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ localizados respectivamente a esquerda e a direita de v_1, então um dos intervalos $v_0 \cup v_1$ e $v_1 \cup v_2$ é um cilindro de comprimento $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. Suponha que seja $v_0 \cup v_1$. Como $v_0 \cup v_1$ não está contido em u, temos que v_0 extende-se além do ponto final de u. Se v_3 é o cilindro de comprimento $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ próximo de v_2 localizado na sua direita, então $v_2 \cup v_3$ é um cilindro de comprimento $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ e portanto não pode está contido em u. Logo, v_3 extende-se além do ponto final de u, donde v_0, v_1, v_2, v_3 cobrem u e $|v_i| = \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq |u|$. Daí temos

$$\lambda_\alpha(M,\rho) = \inf \sum_i |v_i|^\alpha \leq \sum_{l=1}^{4} \left(\inf \sum_i |v_i^l|^\alpha\right) \leq \sum_{l=1}^{4} \left(\inf \sum_i |u_i|^\alpha\right) =$$

$$= \sum_{l=1}^{4} l_\alpha(M,\rho) = 4\ l_\alpha(M,\rho) = 2\,m\ l_\alpha(M,\rho).$$

■

Logo podemos redefinir $\dim_H M$ como sendo

$$\dim_H M = \sup\{\alpha; \lambda_\alpha(M) = \infty\} = \inf\{\alpha; \lambda_\alpha(M) = 0\}.$$

Seja μ uma medida de probabilidade em conjuntos de Borel no intervalo unitário. Ponha

$$\mu_\alpha(M,\rho) = \inf \sum_i \mu(v_i)^\alpha \tag{3}$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as coberturas por cilindros v_i com $\mu(v_i) < \rho$.

Se μ é a medida de Lebesgue que denotamos por λ, então (3) reduz-se a (2). Quando

$$\rho \to 0, \quad \mu_\alpha(M,\rho) \to \mu_\alpha(M)$$

monotonamente. Um cálculo análogo ao que foi feito na seção (3.1) mostra que $\mu_\alpha(M,\rho)$ é uma medida exterior como função de M e que para M fixado existe α_0 tal que

$$\mu_\alpha(M) = \begin{cases} \infty, & se\ \alpha < \alpha_0 \\ 0, & se\ \alpha > \alpha_0 \end{cases}$$

Esse α_0 nós definimos como sendo a dimensão de M com respeito a medida μ e denotamos por $\dim_\mu M$. Formalmente,

$$\dim_\mu M = \sup\{\alpha; \mu_\alpha(M) = \infty\} = \inf\{\alpha; \mu_\alpha(M) = 0\}.$$

Proposição 3.6. *Valem as propriedades:*

(*i*) $dim_\mu M \leq dim_\mu N$ *se* $M \subset N$.

(*ii*) $dim_\mu \bigcup_n M_n = \sup_n dim_\mu M_n$.

Demonstração.

(*i*) Como $\mu_\alpha(M) \leq \mu_\alpha N$ temos $\mu_\alpha(N) = 0 \Rightarrow \mu_\alpha(M) = 0$. Daí,

$$\dim_\mu M = \inf\{\alpha; \mu_\alpha(M) = 0\} \leq \inf\{\alpha; \mu_\alpha(N) = 0\} = \dim_\mu N.$$

(*ii*) $\dim_\mu M_n < \alpha$ para todo n implica que $l_\alpha(M_n) = 0$ para todo n. Sendo $\mu_\alpha(*)$ sub-aditiva temos

$$\mu_\alpha\big(\bigcup_n M_n\big) = 0 \Rightarrow \dim_\mu \bigcup_n M_n \leq \alpha \Rightarrow \sup_n \dim_\mu M_n \geq \dim_\mu \bigcup_n M_n.$$

Por outro lado,

$$M_n \subset \bigcup M_n \Rightarrow \dim_\mu M_n \leq \dim_\mu \bigcup_n M_n \Rightarrow \sup_n \dim_\mu M_n \leq \dim_\mu \bigcup_n M_n.$$

■

Observe que $\dim_\lambda M$ coincide com $\dim_H M$ para qualquer M no intervalo unitário. Além disso temos $0 \leq \dim_\mu M \leq 1$, mais ainda $\dim_\mu M = 0$ se M é enumerável e $\dim_\mu M = 1$ se M é um conjunto de Borel com $\mu(M) > 0$.

3.4 A prova do resultado de Eggleston

Sejam μ e ν duas medidas de probabilidades no intervalo.

Teorema 3.2. *Se*

$$M \subset \left\{ w; \lim_{n\to\infty} \frac{\log \nu(u_n(w))}{\log \mu(u_n(w))} = \delta \right\}$$

então

$$dim_\mu M = \delta \; dim_\nu M.$$

Antes de demonstrar o teorema, vamos fazer algumas convenções. Se $0 < \xi, \eta < 1$, então

$$\begin{cases} \dfrac{\log \xi}{\log 0} = \dfrac{\log 1}{\log \eta} = \dfrac{\log 1}{\log 0} = 0 \\ \dfrac{\log 0}{\log \eta} = \dfrac{\log \xi}{\log 1} = \dfrac{\log 0}{\log 1} = \infty \\ \dfrac{\log 0}{\log 0} = \dfrac{\log 1}{\log 1} = 1 \end{cases}$$

Demonstração. Fixado $\varepsilon > 0$ definamos os conjuntos M_k por

$$M_k = \{w \in M; \delta - \varepsilon \leq \frac{\log \nu(u_n(w))}{\log \mu(u_n(w))} \leq \delta + \varepsilon, \text{para todo } n \geq k\}.$$

Observe que

$$M = \bigcup_{k\geq 1} M_k.$$

Seja $\{v_i\}$ uma cobertura qualquer de M_k por cilindros os quais intersectam M_k, com comprimento suficientimente pequeno. Então qualquer v_i possui a forma $v_i = u_n(w)$ para algum $n \geq k$ e para algum $w \in M_k$. Logo,

$$\mu(v_i)^{\delta-\varepsilon} \leq \nu(v_i) \leq \mu(v_i)^{\delta+\varepsilon}.$$

Donde,

$$\sum_i \mu(v_i)^{\alpha(\delta-\varepsilon)} \leq \sum_i \nu(v_i)^\alpha \leq \sum_i \mu(v_i)^{\alpha(\delta+\varepsilon)}$$

para qualquer cobertura $\{v_i\}$ de M_k por cilindros de tamanho maior que k. De onde segue

$$\mu_{\alpha(\delta-\varepsilon)}(M_k) \leq \nu_\alpha(M_k) \leq \mu_{\alpha(\delta+\varepsilon)}(M_k).$$

Logo, por um lado temos

$$\dim_\nu M_k = \sup\{\alpha; \nu_\alpha(M_k) = \infty\} \leq \sup\{\alpha; \mu_{\alpha(\delta+\varepsilon)}(M_k) = \infty\} =$$

$$= \sup\{\frac{1}{\delta+\varepsilon}\alpha(\delta+\varepsilon); \mu_{\alpha(\delta+\varepsilon)}(M_k) = \infty\} = \frac{1}{\delta+\varepsilon}\sup\{\alpha(\delta+\varepsilon); \mu_{\alpha(\delta+\varepsilon)}(M_k) = \infty\} =$$

$$= \frac{1}{\delta+\varepsilon}\dim_\mu M_k.$$

Por outro lado

$$\dim_\nu M_k = \sup\{\alpha; \nu_\alpha(M_k) = \infty\} \geq \sup\{\alpha; \mu_{\alpha(\delta-\varepsilon)}(M_k) = \infty\} =$$

$$= \sup\{\frac{1}{\delta-\varepsilon}\alpha(\delta-\varepsilon); \mu_{\alpha(\delta-\varepsilon)}(M_k) = \infty\} = \frac{1}{\delta-\varepsilon}\sup\{\alpha(\delta-\varepsilon); \mu_{\alpha(\delta-\varepsilon)}(M_k) = \infty\} =$$

$$= \frac{1}{\delta-\varepsilon}\dim_\mu M_k.$$

Ou seja,

$$\dim_\mu M_k \geq (\delta+\varepsilon)\dim_\nu M_k \tag{4}$$

e

$$\dim_\mu M_k \leq (\delta-\varepsilon)\dim_\nu M_k \tag{5}$$

Como $\dim_\mu \sup_k M_k \geq \dim_\mu M_k$, temos
pela desigualdade (4) que

$$\dim_\mu \sup_k M_k \geq (\delta+\varepsilon)\dim_\nu M_k.$$

Logo pelo item (ii) da Proposição (3.6) temos

$$\dim_\mu M \geq (\delta+\varepsilon)\dim_\nu M_k.$$

Daí,

$$\dim_\mu M \geq (\delta+\varepsilon)\sup_k \dim_\nu M_k.$$

Aplicando outra vez o item (ii) da Proposição (3.6)

$$\dim_\mu M \geq (\delta + \varepsilon) \dim_\nu M.$$

tem-se

$$\dim_\mu M \geq (\delta + \varepsilon) \dim_\nu M. \tag{6}$$

Por outo lado aplicando o item (i) da Proposição (3.6) a desigualdade (5) temos

$$\dim_\mu M_k \leq (\delta - \varepsilon) \dim_\nu M.$$

Daí,

$$\sup_k \dim_\mu M_k \leq (\delta - \varepsilon) \dim_\nu M.$$

De novo pelo item (ii) da Proposição (3.6) tem-se

$$\dim_\mu M \leq (\delta - \varepsilon) \dim_\nu M \tag{7}$$

Finalmente, fazendo $\varepsilon \longrightarrow 0$ nas desigualdades (6) e (7) temos

$$\dim_\mu M = \delta \dim_\nu M.$$

■

Agora vamos obter o Teorema (3.1) como aplicação do Teorema (3.2). Para tanto, vamos construir uma medida ν que se prestará para as estimativas que desejamos. O procedimento para construção dessa medida será o seguinte:

Primeiramente consideraremos a medida de Bernoulli τ definida no conjunto $M = \{0, 1, \ldots, m-1\}^{\mathbb{N}}$ das sequências associada ao vetor de probabilidade $p = (p_1, \ldots, p_m)$. Definamos $\phi : M \to [0, 1]$ por:

$$\phi((\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{m^i}.$$

Observe que ϕ associa a sequência $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ o número cujo os dígitos na escrita em base m são dados pelos α_k´s.

É fácil notar que a aplicação ϕ é sobrejetora, uma vez que dado $x \in [0,1]$ se $x = 0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$ então $\phi((\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}) = x$. Além disso, ϕ também é contínua, já que se as sequências α e β estão próximas, temos que $\alpha_k = \beta_k$ para $1 \le k \le n$. Logo, $\phi(\alpha)$ está próximo de $\phi(\beta)$.

Observação 3.1. *Seja V o conjunto $V \subset \{0, 1, \ldots, m-1\}^{\mathbb{N}}$ das sequências de dígitos $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tais que não existe k com a propriedade de que $\alpha_n = m-1$ para todo $n > k$. Observe que $U - V$ é enumerável e que isso implica automaticamente que $\tau(V) = 1$. Deste modo, restrita a V, é fácil notar que ϕ é injetora, logo uma bijeção mensurável e sua inversa também é mensurável.*

Seja ν a medida definida como $\nu = \phi_*(\tau)$. Observe que da definição de τ temos que se $x = 0, a_1a_2a_3\ldots$ e $u_n(x) \subset [0,1]$ é o cilindro associado a x, então:

$$\nu(u_{n(x)}) = \prod_{j=1}^{n} p_{a_j}$$

Tomemos

$$\mu = \lambda \text{ e } \delta = \frac{\theta}{\log m}.$$

Como

$$\lambda(u_n(w)) = m^{-n},$$

temos

$$M \subset \left\{ w; \lim_{n\to\infty} \left[-\frac{1}{n} \log \nu(u_n(w)) \right] = \theta \right\} \tag{8}$$

logo pelo Teorema (3.2)

$$\dim_H M = \dim_\lambda M = \frac{\theta}{\log m} \dim_\nu M. \tag{9}$$

Como

$$\nu(u_n) = \prod_{j=1}^{n} p_{a_j} = \prod_{i=0}^{m-1} p_i^{N_k(w,n)} \Rightarrow \log \nu(u_n) = \sum_{i=0}^{m-1} N_k(w,n) \log p_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{n}\log \nu(u_n) = -\sum_{i=0}^{m-1} \frac{N_k(w,n)}{n} \log p_i.$$

temos que (8) vale quando

$$M(p_0, ..., p_{m-1}) \text{ e } \theta = -\sum_{i=0}^{m-1} p_i \log p_i.$$

Visto que $\nu(M(p_0, ..., p_{m-1})) > 0$ temos $\nu(M(p_0, ..., p_{m-1})) = 1$, donde $\dim_H M(p_0, ..., p_{m-1}) = -\dfrac{1}{\log m} \displaystyle\sum_{i=0}^{m-1} p_i \log p_i$.

Capítulo 4

Dimensão de Hausdorff de Conjuntos Irregulares

4.1 Introdução

No capítulo anterior determinamos a dimensão de Hausdorff do conjunto dos pontos $w \in [0,1]$ para os quais o limite

$$N_k(w) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} N_k(w,n) \tag{1}$$

existe. Nosso trabalho agora é estudar algumas propriedades do conjunto dos pontos $w \in [0,1]$ para os quais o limite em (1) não existe.

Para cada $k \in \{0,1,...,m-1\}$ definimos o conjunto

$$M_k = \left\{ x \in [0,1];\ \lim_{n\to\infty} \inf \frac{N_k(w,n)}{n} < \lim_{n\to\infty} \sup \frac{N_k(w,n)}{n} \right\},$$

onde $N_k\,(w,n) = \#\,\{i \in \{1,...,n\}\,;w_i = k\}$

Um clássico resultado de Borel diz que para Lebesgue quase todo $w \in [0,1]$, temos $N_k(w) = \dfrac{1}{m}$. Daí segue que o conjunto M_k possui medida de Lebesgue zero.

Nosso objetivo é provar a seguinte afirmação:

Teorema 4.1. *Para cada $k \in \{0,1,...,m-1\}$ o conjunto M_k contém um conjunto G_δ denso em $[0,1]$ e*

$$dim_H \bigcap_{k=0}^{m-1} M_k = 1.$$

4.2 Conjuntos Irregulares

Definição 4.1. *A dimensão de Hausdorff* $dim_H\mu$ *de uma medida* μ *e definida por*

$$dim_H\mu = \inf\{dim_H Z; \mu(Z) = 1\}.$$

Observe que se $\mu = \lambda$ é a medida de Lebesgue em $[0, 1]$, então facilmente temos que $\dim_H \lambda = 1$, já que se $\lambda(Z) > 0$ temos que $\dim_H Z = 1$. Note que o conceito definido acima é de certo modo global, não levando em conta a priori o que acontece numa vizinhança de um ponto. Em [11], encontramos a definição de dimensão de uma medida em **um ponto**. Segue esta definição abaixo:

Definição 4.2. *A dimensão da medida* μ *no ponto* x *é definida por:*

$$d_\mu(x) = \lim_{r\to 0} \frac{\log\big(\mu(B_r(x))\big)}{\log r}, \tag{2}$$

toda vez que o limite acima fizer sentido.

Observação 4.1. *Quando o limite acima não existe, definimos a dimensão superior da medida* μ *no ponto* x *como sendo:*

$$\bar{d}_\mu(x) = \limsup_{r\to 0} \frac{\log\big(\mu(B_r(x))\big)}{\log r}.$$

Analogamente definimos a dimensão inferior, $\underline{d}_\mu(x)$*.*

Quando $d_\mu(x)$ existe e é constante para μ-quase todo ponto x, dizemos que μ é dimensionalmente exata. Porém, não existe razão para que o limite acima exista em μ-quase todo ponto ponto x. Foi mostrado por Barreira, Pesin e Schmeling (veja [11]) que se f é um difeomorfismo $C^{1+\alpha}$ e μ é uma medida ergódica com todos os expoentes de Lyapounov não-nulos, então μ é dimensionalmente exata e a dimensão $d_\mu(x) = d$ é constante em quase todo ponto x. Isso contempla o caso onde f é um difeomorfismo hiperbólico, já que neste caso todos os expoentes de Lyapounov de todos os pontos são diferentes de zero. Neste trabalho, foi mostrado também que no caso de μ ser dimensionalmente exata, $d = \dim_H \mu$. Em [11], obtêm-se uma uma estimativa sobre a dimensão de uma medida no intervalo unitário. Para isso, procedemos do seguinte modo:

Fixe um inteiro positivo m e considere a aplicação $g_m : [0,1] \to [0,1]$ definida por $g_m(w) = mw \pmod 1$. Observe que se $0, w_1 w_2 w_3 ...$ é a representação de $w \in [0,1]$ na base m, então $g_m(w) = 0, w_2 w_3 ...$ Para qualquer medida de probabilidade ergódica em $[0,1]$ invariante pela transformação g_m, temos

$$\dim_H \mu = \frac{h_\mu(g_m)}{\log m}.$$

Para cada $\underline{\alpha} < \overline{\alpha}$ considere o conjunto

$$M_k^{\underline{\alpha},\overline{\alpha}} = \left\{ x \in [0,1];\ \liminf_{n\to\infty} \frac{N_k(w,n)}{n} = \underline{\alpha} \text{ e } \limsup_{n\to\infty} \frac{N_k(w,n)}{n} = \overline{\alpha} \right\}.$$

Note que pelo Teorema ergódico de Birkhoff o conjunto $M_k^{\underline{\alpha},\overline{\alpha}}$ possui medida zero com respeito a qualquer medida de probabilidade g_m-invariante.

Teorema 4.2. *Para cada $k \in \{0, 1, ..., m-1\}$ o conjunto $M_k^{0,1}$ é residual, isto é, contém um conjunto G_δ denso em $[0,1]$.*

Demonstração. Escolha $l \in \{0, 1, ..., m-1\}$ diferente de k. Seja $w = 0, w_1 w_2 w_3 ... \in [0,1]$ e fixe $n \in \mathbb{N}$. Considere o conjunto $U_n(w)$ dos pontos $y = 0, y_1 y_2 y_3 ... \in [0,1]$ tal que

$$y_i = \begin{cases} w_i, & \textit{se } 1 \le i \le n \\ k, & \textit{se } n < i \le n^2 \\ l, & \textit{se } n^2 < i \le n^3 \end{cases}$$

Observamos que se $y \in U_n(w)$ então

$$N_k(y, n^2) \ge n^2 - n \Rightarrow \frac{N_k(y,n^2)}{n^2} \ge 1 - \frac{1}{n}$$

e

$$N_k(y, n^3) \le n^2 \Rightarrow \frac{N_k(y,n^3)}{n^3} \le \frac{1}{n}$$

Note que somente os n^3 primeiros dígitos de y são especificados.

Afirmação. O conjunto aberto

$$V_m = \bigcup_{n>m} \bigcup_{w\in[0,1]} \operatorname{int} U_n(w)$$

é denso em $[0,1]$.

De fato, seja $z \in [0,1]$ qualquer. Dado $\varepsilon > 0$, escolha $n > m$ tal que $m^{-n} < \varepsilon$ e, seja $\mathcal{B}(z,\varepsilon)$ a bola de centro em z e raio ε. Observe que para essa escolha de n temos $\operatorname{int} U_n(z) \subset \mathcal{B}(z,\varepsilon)$. Logo,

$$\operatorname{int} U_n(z) \cap \mathcal{B}(z,\varepsilon) \neq \emptyset.$$

Donde concluímos que

$$\mathcal{B}(z,\varepsilon) \cap V_m \neq \emptyset$$

Isto mostra que V_m é denso em $[0,1]$.

Como

$$\frac{N_k(y,n^2)}{n^2} \geq 1 - \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad \frac{N_k(y,n^3)}{n^3} \leq \frac{1}{n}$$

temos que o conjunto $\bigcap_{m=1}^{\infty} V_m$ é um G_δ , é denso em $[0,1]$ e está contido em $M_k^{0,1}$. Isto completa a prova do Teorema.

∎

Dadas funções $\varphi, \psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $\psi > 0$ consideremos o conjunto

$$K_p(\varphi,\psi) = \left\{ x \in [0,1];\ \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n} \varphi(g_m^i(x))}{\sum_{i=0}^{n} \psi(g_m^i(x))} = p \right\},$$

onde g_m é definida por $g_m(x) = m\,x \pmod 1$. Por exemplo, se $\varphi_k = \chi_{[k/m,\,(k+1)/m)}$ e $\psi_k = 1$ para $k = 0,1,...,m-1$ então

$$\bigcap_{k=0}^{m-1} K_{p_k}(\varphi_k,\psi_k) = M(p_0,...,p_{m-1}).$$

De fato,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}\varphi(g_m^i(x))}{\sum\limits_{i=0}^{n}\psi(g_m^i(x))}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}\chi_{[k/m,\,(k+1)/m)}(g_m^i(x))}{n+1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\{\#\{i\in\{1,...,n\}\,;g_m^i(x)\in[k/m,\,(k+1)/m)\}\}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\{\#\,\{i\in\{1,...,n\}\,;w_i=k\}\}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}N_k(x,n+1)=N_k(x).$$

Assim,

$$K_{p_k}(\varphi_k,\psi_k)=\{x\in[0,1];N_k(x)=p_k\}.$$

Portanto,

$$\bigcap_{k=0}^{m-1}K_{p_k}(\varphi_k,\psi_k)=M(p_0,...,p_{m-1}).$$

Definição 4.3. *Uma função $\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}$ é chamada m-Hölder contínua se é Hölder contínua por partes com um número de descontinuidade finito, no máximo em potências negativas de m, isto é, o conjunto de descontinuidades está contido em $\{1/m^k;k\geq 1\}$.*

Definição 4.4. *Uma família de medidas de probabilidades invariantes $\mu_1,...,\mu_l$ é uma família distinguida para as seqüências de funções $(f_{1,n})_n,...,(f_{d,n})_n$ desde que para $i=1,...,d$ existam medidas $\nu_{i,1}$ e $\nu_{i,2}$ em $\{\mu_1,...,\mu_l\}$ e constantes $a_{i,1}\neq a_{i,2}$ tal que para cada $j=1,2$ e $\nu_{i,j}$- quase todo ponto x,*

$$\lim_{n\to\infty}f_{i,n}(x)=a_{i,j}.$$

Definição 4.5. *Sejam $\sum\subset\{0,1,...,m-1\}^{\mathbb{N}}$ um sunconjunto compacto, $C(\sum)$ o espaço das funções contínuas em $\sum$ e σ o shift. Dizemos que g_1 e g_2 são coomologas se $g_1-g_2=\psi-\psi\circ\sigma+c$, para algum $\psi\in C(\sum)$ e $c\in\mathbb{R}$.*

Os dois Lemas seguintes serão úteis na demostração do próximo Teorema.

Lema 4.1. *Se as medidas de probabilidades g_m-invariantes $\mu_1, ..., \mu_l$ forem uma família distinguida para as seqüências de funções m-Hölder contínuas $(f_{1,n})_n, ..., (f_{d,n})_n$ então*

$$dim_H \Lambda \geq \min\{dim_H \mu_1, ..., dim_H \mu_l\},$$

onde

$$\Lambda = \{x \in [0,1]; \lim_{n\to\infty} \inf f_{i,n}(x) < \lim_{n\to\infty} \sup f_{i,n}(x) : i = 1, 2, ..., d\}.$$

Demonstração. Veja a demostração do Teorema 7.6 em [3].

■

Lema 4.2. *Sejam $\sigma|\sum$ o subshift do tipo finito, $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m$ funções Hölder contínuas em $\sum$, g e u funções estritamente positivas e Hölder contínuas em $\sum$. Se para cada $i = 1, ..., m$ as funções φ_i é não-coomologa a $\alpha_i g$, onde α_i é o único zero de $P(\alpha_i g) = P(\varphi_i)$ (P denota a pressão topologica com rspeito a σ, para definição ver [11]), então, para qualquer $\varepsilon > 0$ existe medidas $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m$ ergódiga σ-invariante tal que:*

(1) *$\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m$ são medidas totais para o espectrum $\mathcal{D}_u$;*

(2) *$\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m, \mu_u$ é uma coleção de medidas destinguidas para a sequência de funções $\{S_n\varphi_1/S_ng\}_{n\in\mathbb{N}}, ..., \{S_n\varphi_m/S_ng\}_{n\in\mathbb{N}}$;*

(3) $\min\{dim_u \mu_1, ..., dim_u \mu_m\} > dim_u \sum - \varepsilon.$

Demonstração. Veja a demostração do Teorema 7.3 em [3].

■

Teorema 4.3. *Sejam $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_d, \psi_1, \psi_2, ..., \psi_d$ funções m-Hölder contínuas com $\psi_i > 0$ para todo i. Nestas condições temos*

$$dim_H \left([0,1] \setminus \bigcup_{i=1}^{d} \bigcup_{p\in\mathbb{R}} K_p(\varphi_k, \psi_k) \right) = 1,$$

se $K_p(\varphi_k, \psi_k) \neq [0,1]$ para todo k e para todo p.

Demonstração. Considere as seqüências

$$f_{i,n}(x) = \frac{\sum_{j=0}^{n} \varphi_i(g_m^j(x))}{\sum_{j=0}^{n} \psi_i(g_m^j(x))}$$

para $i = 1, ..., d$.

Como

$$K_p(\varphi_k, \psi_k) = \{x \in [0,1]; \lim_{n\to\infty} f_{i,n}(x) = p\}$$

temos

$$\Lambda = [0,1] \setminus \bigcup_{i=1}^{d} \bigcup_{p\in\mathbb{R}} K_p(\varphi_k, \psi_k).$$

Pelo Lema 4.2, para cada $i = 1, ..., d$ e $\varepsilon > 0$ existem medidas de probabilidade g_m-invariante $\nu_{i,1}$ e $\nu_{i,2}$ satisfazendo

$$\min\{\dim_H \nu_{i,1}, \dim_H \nu_{i,2}\} > 1 - \varepsilon$$

para cada i, tal que a família $\{\nu_{i,1}, \nu_{i,2}; i = 1, ..., d\}$ é uma família destinguida de medidas para as seqüências de funções $(f_{1,n})_n, ..., (f_{d,n})_n$. Isso nos permite aplicar o Lema 4.1 e concluir que

$$\dim_H \Lambda \geq \min\{\dim_H \nu_{i,1}, \dim_H \nu_{i,2}\} > 1 - \varepsilon.$$

Como ε foi tomado arbitrariamente temos

$$\dim_H \Lambda = 1,$$

isto é,

$$\dim_H \left([0,1] \setminus \bigcup_{i=1}^{d} \bigcup_{p\in\mathbb{R}} K_p(\varphi_k, \psi_k) \right) = 1.$$

∎

Agora podemos estabelecer o Teorema 4.1

Demonstração do Teorema 4.1. A primeira afirmação segue do Teorema 4.2. Tomando $\varphi_k = \chi_{[k/m,\,(k+1)/m)}$ e $\psi_k = 1$ temos $K_p(\varphi_k, \psi_k) \neq [0,1]$ para todo i e para todo p, pois

$$K_p(\varphi_k, \psi_k) = \{x \in [0,1]; N_k(x) = p\}.$$

Além disso,

$$f_{i,n}(x) = \frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \varphi_k(g_m^j(x))}{\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \psi_k(g_m^j(x))} = \frac{N_k(x, n+1)}{n+1},$$

para $k = 0, ..., m-1$.

Logo,

$$\bigcap_{k=0}^{m-1} M_k = \{x \in [0,1]; \lim_{n\to\infty} \inf f_{i,n}(x) < \lim_{n\to\infty} \sup f_{i,n}(x) : k = 0, 1, 2, ..., m-1\},$$

ou seja,

$$\bigcap_{k=0}^{m-1} M_k = [0,1] \setminus \bigcup_{i=1}^{d} \bigcup_{p\in\mathbb{R}} K_p(\varphi_k, \psi_k).$$

Portanto, pelo Teorema 4.3 temos

$$\dim_H \bigcap_{k=0}^{m-1} M_k = 1.$$

Isto encerra a demonstração do Teorema 4.1.

■

Referências Bibliográficas

[1] Castro, A.A., Teoria da medida. Projeto Euclides, IMPA, 2004.

[2] Barreira, L., Saussol B. and Schmeling, Distribution of frequencies of digits via multifractal analysis, J. Number Theory 97 (2002), 410-438.

[3] Barreira, L. and Schmeling, Sets of "non-typical"points have full topological entropy and full Hausdorff dimension, Israel J. Math. 116 (2000), 29-70.

[4] Bartle, R. G., The Elements of Integration, John Wiley, 1966.

[5] Billingsley, P. Ergodic theory and information, Wiley and Sons, 1965.

[6] Eggleston, H., The fractional dimension of a set defined by decimal properties, Quart. J. Math. Oxford Ser. 20 (1949), 31 - 36.

[7] Falconer, K., Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications, 2nd Edition, Wiley, 2003.

[8] Mañé, R. Introdução a teoria ergódica. Projeto Euclides, IMPA, 1983.

[9] Oliveira, K. ,Um primeiro curso sobre teoria ergódica com aplicações. Publicações Matemática - IMPA, 2005.

[10] Fernandez, J. P., Medida e Integração. Projeto Euclides, IMPA, 1983.

[11] Pesin, Y.B. ,Dimension theory in dynamical systems. Chicago Lectures in Mathematics Series, 1997.

[12] Walters, P. An introduction to ergodic theory, Graduate Texts in Mathematics 79, Springer, 1981.