



**Universidade Federal de Alagoas**

**Instituto de Matemática**  
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**CLAUDEMIR SILVINO LEANDRO**

**ESTIMATIVAS SOBRE O PRIMEIRO AUTOVALOR  
NÃO-NULO DE STEKLOFF**

MACEIÓ  
DEZEMBRO DE 2005



Universidade Federal de Alagoas  
Departamento de Matemática  
Programa de Mestrado em Matemática  
Dissertação de Mestrado

# Estimativas sobre o Primeiro Autovalor Não-Nulo de Stekloff

Claudemir Silvino Leandro

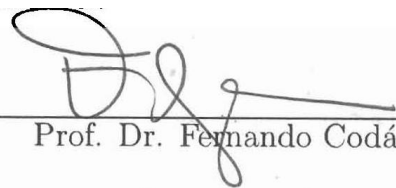
Maceió, Brasil  
Dezembro 2005

# Estimativas sobre o Primeiro Autovalor Não-Nulo de Stekloff

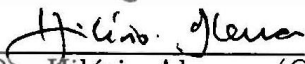
Claudemir Silvino Leandro

Dissertação de Mestrado na área de concentração de Geometria Diferencial submetida em 19 de dezembro de 2005 à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

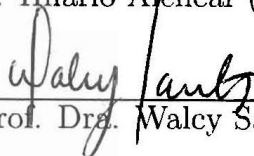
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Fernando Codá Marques



Prof. Dr. Hilário Alencar (Orientador)



Prof. Dra. Walcy Santos

A Edvanilda e Fernando.

# Agradecimentos

- Primeiramente à Deus, por tudo.
- Ao professor Hilário Alencar, meu orientador, pelas conversas, estímulo e paciência durante todo o Programa de Mestrado em Matemática;
- Aos alunos que fizeram parte comigo da primeira turma de Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Alagoas: Davy Christian, Márcio Henrique e Sofia Carolina.
- Aos meus amigos: Erikson Alexandre, Fábio Boia, Maria de Andrade e Thales Miranda, pela amizade e aos colegas: Julio de Almeida, Thiago Fontes e José Arnaldo, pelo companherismo.
- Aos professores que contribuíram na minha formação acadêmica: Krerley Oliveira, Adán Corcho Fernández e, especialmente, a Fernando Codá Marques pela sua orientação.
- Aos meus pais, Maria José Silvino e Lourival Lúcio Leandro, e aos meus irmãos, por todo o incentivo que sempre me deram ao longo da minha jornada acadêmica.
- À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Alagoas (FAPEAL) pelo financiamento da bolsa de mestrado concedida durante o período 15/02/2004 a 01/01/2006.
- Ao professor Adailson Peixoto por suas construtivas conversas, amizade e sua atenciosa presença.
- Um agradecimento especial à Clarissa Codá, por sua presença amável em minha vida.

# Resumo

Este trabalho visa obter estimativas para o primeiro autovalor não-nulo de Stekloff. Nos concentramos, basicamente, em três artigos de J. F. Escobar, publicados nos anos 1997, 1999 e 2000. Nestes artigos, são obtidas estimativas para o primeiro autovalor não-nulo de Stekloff em função da geometria da variedade Riemanianna.

Inicialmente, demonstramos um teorema afirmando que para o problema de Stekloff em uma superfície compacta, com curvatura Gaussiana não-negativa e curvatura geodésica da fronteira limitada inferiormente por uma constante positiva  $c$ , o primeiro autovalor não-nulo de Stekloff é necessariamente maior ou igual a  $c$  e, além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, a superfície é o disco Euclidiano. Este resultado é obtido usando a fórmula de Bochner-Lichnerowicz e o Princípio do Máximo.

No problema de Stekloff em variedades Riemannianas  $n$ -dimensionais, com  $n \geq 3$ , mostramos uma estimativa para o primeiro autovalor não-nulo de Stekloff em função do primeiro autovalor não-nulo do Laplaciano no bordo da variedade dada. Apresentamos também uma conjectura feita por Escobar afirmando que o teorema descrito no parágrafo anterior também é verdadeiro para dimensões maiores ou igual a três. Esta conjectura se encontra em aberto e mostramos uma contribuição para a mesma exibindo uma estimativa aproximada, embora não tão ótima, feita por Escobar em 1999.

**Palavras-chave:** Autovalor, Stekloff, Laplaciano.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>7</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>10</b>
1.1 Preliminares e Definições . . . . .	10
1.2 O Tensor Curvatura . . . . .	15
1.3 As Fórmulas de Green . . . . .	16
1.4 Problemas de Autovalores . . . . .	18
1.5 A Fórmula de Bochner-Lichnerowicz . . . . .	20
<b>2 Teoremas de Comparação em Superfícies</b>	<b>24</b>
2.1 Estimativa Inferior para o Primeiro Autovalor de Stekloff. . . . .	24
2.2 Estimativa em Domínios Simplesmente Conexos. . . . .	37
<b>3 Teoremas de Comparação em Variedades <math>n</math>-Dimensionais</b>	<b>41</b>
3.1 Estimativas em variedades $M^n$ . . . . .	41
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>45</b>

# Introdução

Este trabalho descreve algumas estimativas sobre o primeiro autovalor não-nulo para o problema de Stekloff obtido por J. F. Escobar, publicado no Journal of Functional Analysis em 1997, 1999 e 2000. Este problema foi introduzido por Stekloff em 1902 no seu trabalho intitulado “Sur les problèmes fondamentaux de la physique mathématique”, ver [13], e consiste em encontrar uma função  $\varphi$ , não-nula, satisfazendo o seguinte sistema:

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= 0 \text{ em } M, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} &= \nu\varphi \text{ em } \partial M,\end{aligned}$$

onde  $\nu$  é um número real e  $M$  é uma variedade Riemanniana de dimensão  $n$ .

A motivação para este problema provém da física, neste caso  $M$  é um domínio do plano e a função  $\varphi$  representa o estado de temperatura em  $M$  tal que o fluxo na fronteira é proporcional a temperatura.

Visto que tecnicamente é difícil determinar tais autovalores e autofunções, um importante problema teórico consiste em determinar limites inferiores e superiores sobre os autovalores. Como o primeiro autovalor não-nulo tem um caráter variacional dado por

$$\nu_1 = \min_{\int_{\partial M} f = 0} \frac{\int_M |\text{grad } f|^2 dv}{\int_{\partial M} f^2 d\sigma},$$

observamos que é mais comum obtermos estimativas superiores a estimativas inferiores mas, tanto do ponto de vista matemático quanto físico, os limites inferiores são mais interessantes.

Em 1997, Escobar demonstrou, usando o Princípio do Máximo e a Fórmula de Bochner-Lichnerowicz, o seguinte teorema:

**Teorema 1.** *Seja  $(M, g)$  uma superfície compacta com fronteira. Suponhamos  $M$  com curvatura Gaussiana,  $K$ , não-negativa e, além disso, a curvatura geodésica,  $k_g$ , da fronteira  $\partial M$ , satisfaça  $k_g \geq k_0 > 0$ . Então o primeiro autovalor do problema de Stekloff,  $\nu_1$ , satisfaz  $\nu_1 \geq k_0$ . A igualdade ocorre se, e somente se,  $M$  é o disco Euclidiano de raio  $k_0^{-1}$ .*

Além disso, pelo exemplo 2, seção 2.1, vemos que este resultado pode não ser verificado se retirarmos a hipótese da curvatura Gaussiana ser não-negativa. Este resultado generaliza o Teorema de Payne (1970), o qual tinha mostrado que o teorema acima é verificado para domínios no plano.



Escobar apresentou no mesmo artigo um resultado semelhante para dimensões maiores que dois, a saber:

**Teorema 2.** *Seja  $(M^n, g)$ ,  $n \geq 3$ , uma variedade Riemanniana compacta com fronteira. Assuma que a curvatura de Ricci de  $M$  é não-negativa e a segunda forma fundamental  $\pi$  satisfaz  $\pi \geq k_0 I$  em  $\partial M$ ,  $k_0 > 0$ . Então*

$$\nu_1 > \frac{k_0}{2}.$$

Os detalhes do Teoremas 1 e Teorema 2 podem ser encontrados nas seções 2.1 e 3.1.

Observamos que no Teorema 2 a estimativa não é ótima no sentido de não sabermos onde ocorre a igualdade, ou seja, a estimativa pode ser melhorada conforme Escobar conjecturou em 1999.

Trabalhando em domínios simplesmente conexos em superfícies, Escobar apresentou outras duas estimativas, a primeira, conforme enunciada a seguir:

**Teorema 3.** *Seja  $(M, g_0)$  uma superfície completa simplesmente conexa com curvatura Gaussiana constante. Seja  $\Omega \subset M$  um domínio limitado, simplesmente conexo com  $\text{Área}(\Omega) = \text{Área}(B_r(x_0))$ , onde  $B_r(x_0) \subset M$  é uma bola geodésica de raio  $r$  com centro  $x_0 \in M$ . Então*

$$\nu_1(\Omega) \leq \nu_1(B_r(x_0)).$$

*A igualdade ocorre se, e somente se,  $\Omega$  é isométrico a  $B_r(x_0)$ .*

Usamos para a demonstração deste o Teorema de Weinstock e a Desigualdade Isoperimétrica. A segunda estimativa é uma generalização do Teorema 3 para superfícies compactas com curvatura Gaussiana não-positiva, o qual afirma que:

**Teorema 4.** *Seja  $(M, g)$  uma superfície completa simplesmente conexa com curvatura Gaussiana não-positiva. Seja  $\Omega \subset M$  um conjunto limitado e simplesmente conexo com  $\text{Área}(\Omega) = \text{Área}(B_r(0))$ , onde  $B_r(0)$  é a bola Euclidiana de raio  $r$  com centro na origem. Então*

$$\nu_1(\Omega) \leq \nu_1(B_r(0)).$$

*A igualdade ocorre se, e somente se,  $\Omega$  é isométrico a bola Euclidiana  $B_r(0)$ .*

A demonstração deste último segue-se da Desigualdade Isoperimétrica de Weyl para superfícies com curvatura não-positiva, como pode ser visto na seção 2.2. Salientamos que este resultado pode não ser verificado se retirarmos a hipótese dos domínios serem simplesmente conexos, ver exemplo em [6], página 109.

Na seção 3.1 apresentamos, para variedade Riemanniana  $n$ -dimensional, compacta e com bordo, com  $n \geq 3$ , um resultado o qual estabelece uma estimativa para o primeiro autovalor não-nulo de Stekloff em função do primeiro autovalor não-nulo do Laplaciano no bordo da variedade Riemanniana dada. Usaremos para sua demonstração a caracterização variacional do primeiro autovalor não-nulo de Stekloff. Finalizaremos nosso trabalho apresentando a seguinte conjectura feita por Escobar em 1999, ver [6].

**Conjectura.** *Seja  $(M^n, g)$ ,  $n \geq 3$ , uma variedade Riemanniana compacta com fronteira. Assuma que  $\text{Ric}(g) \geq 0$  e a segunda forma fundamental  $\pi$  satisfaz  $\pi \geq k_0 I$  em  $\partial M$ ,  $k_0 > 0$ . Então*

$$\nu_1 \geq k_0.$$

*A igualdade ocorre se, e somente se,  $M$  é a bola Euclidiana de raio  $\frac{1}{k_0}$ .*

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos as definições básicas e os fatos que serão usados nos capítulos subseqüentes. Na seção 1.1, definiremos operadores importantes em Geometria Riemanniana, como divergente de um campo de vetores e o Laplaciano de uma função  $f \in C^\infty(M)$ , onde demonstraremos, para tais operadores, sua expressão em coordenadas locais. Na seção 1.2, introduziremos o tensor curvatura, operador indispensável para conceituar curvatura seccional e curvatura escalar, apresentaremos também, na mesma seção, o tensor de Ricci. Na seção 1.3, exibiremos os teoremas de divergência e os teoremas de Green tanto para variedades compactas sem bordo quanto para as variedades compactas com bordo. Introduziremos, na seção 1.4, os problemas de autovalores, dentre os quais o que mais estamos interessados é o problema de autovalor de Stekloff e finalizaremos este capítulo com a fórmula de Bochner-Lichnerowicz e com um resultado decorrente da mesma, bastante utilizado nos demais capítulos desta dissertação.

### 1.1 Preliminares e Definições

Denotaremos por  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana de classe  $C^\infty$ , conexa, compacta e com bordo. Assumiremos que  $M$  é orientada e, além disso, que  $\partial M \in C^\infty$ . Para cada  $p \in M$ , denotamos por  $T_p M$  o espaço tangente a  $M$  em  $p$  e  $TM$  o seu fibrado tangente, o qual definiremos como a união de todos os espaços tangentes. A métrica Riemanniana em  $M$  associa, a cada  $p \in M$ , um produto interno em  $T_p M$  o qual denotamos por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . A norma associada a está métrica será representada por  $|\cdot|$ . A métrica Riemanniana é de classe  $C^\infty$  no seguinte sentido: se  $X$  e  $Y$  são dois campos de vetores de classe  $C^\infty$  em  $M$ , então  $\langle X, Y \rangle$  é uma função real de classe  $C^\infty$  em  $M$ .

Sejam  $f \in C^\infty(M)$  uma função definida numa vizinhança de  $p$  e  $\xi \in T_p M$  um vetor. Representaremos por  $\xi(f)$  a derivada direcional de  $f$  em  $p$  na direção  $\xi$ .

**Definição 1.1.1.** *Dada uma função real  $f \in C^\infty(M)$ , definimos o gradiente de  $f$ ,  $\text{grad } f$ , como campo de vetores para o qual*

$$\langle \text{grad } f, \xi \rangle = \xi(f) \tag{1.1}$$

para todo  $\xi \in TM$ .

Segue diretamente das definições que, para  $f, h \in C^\infty(M)$ , temos

$$\begin{aligned} \text{grad}(f + h) &= \text{grad } f + \text{grad } h, \\ \text{grad}(fh) &= h\text{grad } f + f\text{grad } h. \end{aligned}$$

Visto que a diferenciação de funções em variedades é naturalmente determinada por uma estrutura diferenciável, a derivada de campos de vetores não é determinada por uma estrutura diferenciável. Portanto, faz-se necessário introduzir uma conexão, isto é, uma aplicação  $\nabla$ , definida por

$$\begin{aligned} \nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\rightarrow \mathcal{X}(M) \\ (X, Y) &\rightarrow \nabla_X Y, \end{aligned}$$

onde  $\mathcal{X}(M)$  representa o conjunto de campos de vetores, satisfazendo:

1.  $\nabla_{f_1 X_1 + f_2 X_2} Y = f_1 \nabla_{X_1} Y + f_2 \nabla_{X_2} Y$ ;
2.  $\nabla_X (Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$ ;
3.  $\nabla_X (fY) = \nabla_X Y + X(f)Y$ .

A métrica Riemanniana em  $M$  determina uma única conexão, chamada Levi-Civita ou conexão Riemanniana, que satisfaz

1.  $X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$ ,
2.  $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ ,

onde  $[X, Y]$  é o colchete dos campos  $X$  e  $Y$ , ou seja, é o campo de vetores dado por

$$[X, Y] = XY - YX.$$

**Definição 1.1.2.** Dado  $X \in \mathcal{X}(M)$ , definimos divergente de  $X$  a função real,  $\text{div } X$ , dada por

$$\text{div } X = \text{tr}(Y \mapsto \nabla_Y X).$$

O divergente é uma função de classe  $C^\infty$  em  $M$  e, claramente, satisfaz para todo  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ ,

$$\begin{aligned} \text{div}(X + Y) &= \text{div } X + \text{div } Y, \\ \text{div}(fX) &= f\text{div } X + \langle \text{grad } f, X \rangle. \end{aligned}$$

**Definição 1.1.3.** Seja  $f \in C^\infty(M)$ . O Laplaciano de  $f$  é a função real,  $\Delta f$ , dada por

$$\Delta f = \text{div}(\text{grad } f).$$

Segue-se, diretamente, que

$$\begin{aligned}\Delta(f+h) &= \Delta f + \Delta h, \\ \operatorname{div}(h(\operatorname{grad} f)) &= h(\Delta f) + \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h \rangle, \\ \Delta(fh) &= h(\Delta f) + 2 \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h \rangle + f(\Delta h).\end{aligned}\tag{1.2}$$

Consideremos um referencial ortonormal  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  numa vizinhança de um ponto  $p \in M$  e um campo  $X = \sum_{i=1}^n a_i e_i$  definido nesta vizinhança. Podemos escrever o gradiente de  $f$ , o divergente de  $X$  e o Laplaciano de  $f$  neste referencial, como

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} f &= \sum_{i=1}^n (e_i f) e_i, \\ \operatorname{div} X &= \sum_{i=1}^n e_i(a_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, X \rangle, \\ \Delta f &= \sum_{i=1}^n e_i e_i f - (\nabla_{e_i} e_i) f,\end{aligned}$$

respectivamente.

**Definição 1.1.4.** *Seja  $f \in C^\infty(M)$ . Definimos a Hessiana de  $f$ ,  $Hess f$ , como tensor simétrico dado por*

$$Hess f(X, Y) = XYf - \nabla_X Y f.\tag{1.3}$$

Observamos que o Laplaciano é o traço da Hessiana, isto é,

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n Hess f(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^n e_i e_i f - (\nabla_{e_i} e_i) f.\tag{1.4}$$

Calcularemos agora as expressões dos operadores citados acima em coordenadas locais.

Inicialmente, sejam  $U \subset M$  um aberto e  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma carta local. Existem  $n$  campos de vetores,  $\frac{\partial}{\partial x_i}, i = 1, \dots, n$ , associados à carta os quais são chamados derivadas direcionais e satisfazem, para cada  $p \in U$  e  $f$ , função diferenciável numa vizinhança de  $p$ ,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(p)f = \frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ x^{-1})(x(p)).$$

Para cada  $p \in U$ , os vetores  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p) \right\}$  formam uma base para o espaço  $T_p M$ , portanto, dado um campo de vetores  $X$ , podemos escrevê-lo nesta base da seguinte forma:

$$X = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde  $x_i : U \rightarrow \mathbb{R}$  são funções diferenciáveis.

**Observação:** Nos cálculos abaixo substituiremos, sempre que for conveniente,  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  por  $X_i$ .

Tomemos  $f \in C^\infty(M)$ . Então

$$Xf = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} f. \quad (1.5)$$

Seja  $\langle, \rangle$  a métrica Riemanniana, definimos

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle, & G &= (g_{ij}) \\ g &= \det G, & G^{-1} &= (g^{ij}), \end{aligned} \quad (1.6)$$

onde  $i, j = 1, \dots, n$ . Então

$$Xf = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} f = \sum_{i,j,k=1}^n x_i g_{ik} g^{kj} \frac{\partial}{\partial x_j} f = \left\langle X, \sum_{k,j=1}^n \left( g^{kj} \frac{\partial}{\partial x_j} f \right) \right\rangle.$$

Segue-se da Definição 1.1.1 que

$$\text{grad } f = \sum_{k,j=1}^n \left( g^{kj} \frac{\partial}{\partial x_j} f \right). \quad (1.7)$$

Usando os símbolos de Christoffel, os quais são determinados pela igualdade

$$\nabla_{X_j} X_i = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k X_k$$

em  $U$ , calcularemos o divergente do campo  $X$ .

Inicialmente observemos que se  $Y = \sum_{j=1}^n y_j X_j$  é um campo de vetores, então

$$\begin{aligned} \nabla_Y X &= \sum_{j=1}^n y_j \nabla_{X_j} \left( \sum_{i=1}^n x_i X_i \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n y_j x_i \nabla_{X_j} X_i + \sum_{i,j=1}^n y_j X_j(x_i) X_i \\ &= \sum_{i,j,k=1}^n x_i y_j \Gamma_{ij}^k X_k + \sum_{j,k=1}^n y_j X_j(x_k) X_k \\ &= \sum_{j,k=1}^n y_j \left\{ X_j(x_k) + \sum_{i=1}^n x_i \Gamma_{ij}^k \right\} X_k. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Agora, pela Definição 1.1.2, obtemos que

$$\operatorname{div} X = \sum_{j=1}^n \left\{ X_j(x_j) + \sum_{i=1}^n x_i \Gamma_{ij}^j \right\}. \quad (1.9)$$

Por outro lado, temos a seguinte igualdade:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{kl} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{lj} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{il} - \frac{\partial}{\partial x_l} g_{ij} \right\},$$

ver [5], página 56. Logo

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n x_i \Gamma_{ij}^j &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i,j,l=1}^n x_i g^{jl} \frac{\partial}{\partial x_i} g_{lj} + \sum_{i,j,l=1}^n x_i g^{jl} \frac{\partial}{\partial x_j} g_{il} - \sum_{i,j,l=1}^n x_i g^{jl} \frac{\partial}{\partial x_l} g_{ij} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j,l=1}^n g^{jl} \frac{\partial}{\partial x_i} g_{lj} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i \operatorname{tr} \left( G^{-1} \frac{\partial}{\partial x_i} G \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\ln g). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Substituindo (1.10) em (1.9), obtemos

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &= \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} (x_j) + \frac{1}{2} x_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\ln g) \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{j=1}^n \left\{ \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial x_j} (x_j) + \frac{1}{2} \sqrt{g} x_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\ln g) \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (x_j \sqrt{g}). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Usando a Definição 1.1.3 e as equações (1.7) e (1.11), vemos que

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( g^{ij} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial x_j} f \right), \quad (1.12)$$

o qual é a expressão do Laplaciano em coordenadas locais.

## 1.2 O Tensor Curvatura

**Definição 1.2.1.** *Sejam  $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ , definimos o tensor curvatura a correspondência que, para cada  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ , associa a função*

$$R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M), \quad (1.13)$$

dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[Y, X]} Z. \quad (1.14)$$

### Propriedades do tensor curvatura

1. Para quaisquer campos  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$  temos que

$$R(X, Y) + R(Y, X) = 0;$$

2. A função  $R : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$  pode ser vista como uma função de  $T_p M \times T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M$ , ou seja,  $(R(X, Y)Z)(p)$  depende apenas dos valores dos campos  $X, Y, Z$  em  $p$ .

Sejam  $x, y$  vetores linearmente independentes em  $T_p M$ , então

$$K(x, y) = \frac{\langle R(x, y)z, t \rangle}{|x|^2 |y|^2 - \langle x, y \rangle^2}$$

depende apenas do espaço bi-dimensional gerado por  $x, y$ , ver [5] página 94. Denominaremos  $K(x, y)$  a curvatura seccional do 2-plano gerado por  $x, y$ . Se  $G_2(M)$  denota o Grassmanniano, ou seja, a coleção de todos os espaços bi-dimensionais tangentes a  $M$ , então  $G_2(M)$  pode ser munido de modo natural com uma estrutura diferenciável e, portanto,

$$K : G_2(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

é uma função de classe  $C^\infty$ .

No caso particular, quando  $\dim M = 2$  e, conseqüentemente,  $G_2(M) = TM$  denominamos  $K$  a curvatura Gaussiana de  $M$ .

Sejam  $p \in M, x, y, z \in T_p M$ , obtemos para o caso bi-dimensional a igualdade

$$R(x, y)z = K(p) \{ \langle x, z \rangle y - \langle y, z \rangle x \}.$$

Este resultado também é verificado quando a curvatura seccional é constante, ver [5], página 96.

**Definição 1.2.2.** *Seja  $p \in M$ , o tensor de Ricci,  $Ric : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  é definido por*

$$Ric(x, y) = \text{tr}(z \rightarrow R(x, z)y).$$



Denominamos o traço de  $Ric$  com respeito à métrica Riemanniana por curvatura escalar e representamos por  $S$ . Dessa forma, para qualquer base ortonormal,  $\{e_1, \dots, e_n\}$ , de  $T_pM$ , temos

$$Ric(x, y) = \sum_{i=1}^n \langle R(x, e_i)y, e_i \rangle$$

e, em particular,  $Ric$  é uma forma bilinear simétrica em  $T_pM$ . Se  $x = |x|e_n$ , vemos que

$$Ric(x, x) = \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} K(e_i, e_n) \right\} |x|^2.$$

No caso geral, obtemos

$$S = \sum_{i \neq j} K(e_i, e_j).$$

### 1.3 As Fórmulas de Green

Seja  $M$  uma variedade Riemanniana com a métrica Riemanniana dada por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Associamos a tal métrica uma teoria de integração a qual possui as seguintes propriedades:

1. A função  $f$  é mensurável se, para cada carta  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f \circ x^{-1}$  é mensurável na imagem de  $U$  em  $\mathbb{R}^n$ ;
2. Para toda cobertura  $\{x_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n, \alpha \in I\}$ , onde  $I$  é um conjunto aberto de  $M$  por cartas subordinadas a partição da unidade  $\{\varphi_\alpha : \alpha \in I\}$ , a medida Riemanniana em  $M$  é dada pela densidade

$$dv = \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha} \sqrt{g_{\alpha}} dx_{\alpha}^1 \dots dx_{\alpha}^n,$$

onde  $dx_{\alpha}^1 \dots dx_{\alpha}^n$  é a densidade da medida de Lebesgue em  $x_{\alpha}(U_{\alpha}) \subset \mathbb{R}^n$  e  $g_{\alpha}$  é o determinante da matriz  $G_{\alpha} = (g_{\alpha})_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial(x_{\alpha})_i}, \frac{\partial}{\partial(x_{\alpha})_j} \right\rangle$  da carta  $x_{\alpha} : U_{\alpha} \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

O ponto essencial é que a densidade  $\sqrt{g_{\alpha}} dx_{\alpha}^1 \dots dx_{\alpha}^n$  no domínio  $U$  é independente da função  $x$ . A partição da unidade é o artifício no qual a medida é definida globalmente em  $M$ .

**Teorema 1.3.1 (Teorema da Divergência).** *Seja  $X$  uma campo de vetores de classe  $C^1$  com suporte compacto. Então*

$$\int_M (\operatorname{div} X) dv = 0 \tag{1.15}$$

**Demonstração.** Ver [4], página 142.

**Teorema 1.3.2 (Teorema de Green).** *Sejam  $h \in C^1(M)$  e  $f \in C^2(M)$  tais que  $h(\text{grad } f)$  tem suporte compacto. Então*

$$\int_M \{h\Delta f + \langle \text{grad } h, \text{grad } f \rangle\} dv = 0. \quad (1.16)$$

*Se também assumirmos que  $f$  e  $h$  têm suporte compacto e, além disso,  $h \in C^2(M)$  então*

$$\int_M \{h\Delta f - f\Delta h\} dv = 0 \quad (1.17)$$

**Demonstração.** Segue-se diretamente do Teorema 1.3.1 e da igualdade (1.2). ■

Suponhamos que  $M$  tem fronteira  $\partial M \neq \emptyset$  com a métrica e a medida de  $\partial M$  induzida pela métrica Riemanniana e pela densidade em  $M$ . Denotamos a densidade em  $\partial M$  por  $d\sigma$ . Seja  $\eta$  o vetor normal unitário apontando para fora em  $\partial M$ . Diante disso, temos a seguinte versão do Teorema da Divergência.

**Teorema 1.3.3 (Teorema da Divergência).** *Seja  $X$  uma campo de vetores de classe  $C^1(\overline{M})$  com suporte compacto em  $\overline{M}$ . Então*

$$\int_M (\text{div } X) dv = \int_{\partial M} \langle X, \eta \rangle d\sigma. \quad (1.18)$$

**Demonstração.** Ver [4], página 143.

**Teorema 1.3.4 (Fórmula de Green).** *Sejam  $h \in C^1(\overline{M})$ ,  $f \in C^2(\overline{M})$  tais que  $h(\text{grad } f)$  tem suporte compacto em  $\overline{M}$ . Então*

$$\int_M \{h\Delta f + \langle \text{grad } h, \text{grad } f \rangle\} dv = \int_{\partial M} h \frac{\partial f}{\partial \eta} d\sigma \quad (1.19)$$

*Se  $h$  também é  $C^2(\overline{M})$  e ambas  $f$ ,  $h$  tem suporte compacto em  $M$ , então*

$$\int_M \{h\Delta f - f\Delta h\} dv = \int_{\partial M} \left\{ h \frac{\partial f}{\partial \eta} - f \frac{\partial h}{\partial \eta} \right\} d\sigma \quad (1.20)$$

**Demonstração.** Usar o Teorema 1.3.3 e a equação (1.2). ■

Como aplicação dos Teoremas de Green temos os seguintes resultados.

**Corolário 1.3.1.** *Sejam  $M$  uma variedade Riemanniana compacta sem bordo e  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função harmônica. Então  $\varphi$  é uma função constante.*

**Demonstração.** Usando o Teorema 1.3.2 temos, tomando  $h = f = \varphi$ ,

$$\int_M \{\varphi\Delta\varphi + |\text{grad}\varphi|^2\} dv = 0.$$

Como  $\Delta\varphi = 0$  em  $M$ , temos

$$\int_M |\text{grad}\varphi|^2 dv = 0,$$

logo  $\text{grad } \varphi = 0$  e, conseqüentemente,  $\varphi$  é constante. ■

**Corolário 1.3.2.** *Sejam  $M$  uma variedade Riemanniana compacta com bordo e  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função, tal que*

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= 0 \text{ em } M \\ \varphi &= 0 \text{ em } \partial M.\end{aligned}$$

*Então  $\varphi$  é a função identicamente nula.*

**Demonstração.** Tomando  $h = f = \varphi$  no Teorema 1.3.4, obtemos

$$\int_M \{\varphi\Delta\varphi + |\text{grad}\varphi|^2\} dv = \int_{\partial M} \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} d\sigma.$$

Usando as hipóteses do corolário vemos que  $\int_M |\text{grad}\varphi|^2 dv = 0$ , o que implica que  $|\text{grad}\varphi| = 0$  e, portanto,  $\varphi = \text{cte}$ . Visto que  $\varphi = 0$  em  $\partial M$ , temos que  $\varphi \equiv 0$ . ■

## 1.4 Problemas de Autovalores

Os modelos matemáticos para os problemas de autovalores em Geometria Riemanniana surgiram das aplicações físicas em diversas áreas como: acústica, ondulatória, elasticidade, etc. Estes problemas vêm sendo estudados desde o século XVIII e são rigorosamente divididos em dois tipos: problemas diretos e problemas inversos.

O problema direto, o qual é o nosso interesse neste trabalho, busca informações sobre os autovalores e as autofunções, ver Definição 1.4.1, do problema correspondente em termos da geometria da variedade Riemanniana, embora saibamos que usualmente não é possível determinar especificamente tais autofunções e autovalores.

Um importante problema teórico consiste em determinar limites inferiores e superiores sobre os autovalores. Devido a sua forma variacional, ver [3], página 16, vemos que é mais fácil obter limites superiores do que limites inferiores para os autovalores mas, tanto do ponto de vista matemático quanto físico, os limites inferiores são os mais interessantes, ver [1], capítulo III.

No problema inverso assume-se que um dos autovalores do problema é conhecido e busca-se obter informações sobre a variedade Riemanniana  $(M, g)$  como: curvatura, topologia, etc, ver [1], capítulo VII.

Em virtude disso, apresentaremos, nesta seção, alguns problemas de autovalores importantes em geometria Riemanniana e faremos algumas considerações. Para maiores detalhes e informações ver [1], capítulo III; [3], capítulo I; [12], capítulo III e [8], capítulo II.

**Problemas de autovalor fechado:** Seja  $M$  compacta, conexa e sem bordo. Encontrar todos os números reais  $\nu$  para os quais existe uma solução não-trivial  $\varphi \in C^2(M)$  para

$$\Delta\varphi + \nu\varphi = 0.$$

**Problemas de autovalor de Dirichlet:** Seja  $M$  compacta, conexa e com bordo. Encontrar todos os números reais  $\nu$  para os quais existe uma solução não-trivial  $\varphi \in C^2(M) \cap C^0(\overline{M})$  satisfazendo

$$\begin{aligned}\Delta\varphi + \nu\varphi &= 0 \text{ em } M, \\ \varphi &= 0 \text{ em } \partial M.\end{aligned}$$

**Problemas de autovalor de Neumann:** Para  $\partial M \neq \emptyset$ ,  $M$  compacta e conexa. Encontrar todos os números reais  $\nu$  para os quais o sistema

$$\begin{aligned}\Delta\varphi + \nu\varphi &= 0 \text{ em } M \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} &= 0 \text{ em } \partial M\end{aligned}$$

admite uma solução não-trivial  $\varphi \in C^2(M) \cap C^0(\overline{M})$ .

**Problemas de autovalor de Stekloff:** Seja  $M$  compacta, conexa e com  $\partial M \neq \emptyset$ . Encontrar todos os números reais  $\nu$  para os quais o sistema

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= 0 \text{ em } M, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} &= \nu\varphi \text{ em } \partial M.\end{aligned}\tag{1.21}$$

admite uma solução não-trivial  $\varphi \in C^2(M) \cap C^0(\overline{M})$ .

**Definição 1.4.1.** *Uma função  $\varphi$  satisfazendo qualquer um dos problemas descritos acima é denominada autofunção e  $\nu$  é dito autovalor para o problema correspondente. O conjunto das soluções para cada um dos problemas acima associado ao autovalor  $\nu$  constitui um espaço vetorial denominado auto-espaço  $E_\nu$ .*

Um resultado simples é que, para qualquer um dos problemas anteriores, os autovalores devem ser não-negativos. De fato, usando as fórmulas de Green e a condição de fronteira, considerando  $f = g = \varphi$ , obtemos que

$$\nu = \frac{\int_M |\text{grad } \varphi|^2 dv}{\int_M \varphi^2 dv},$$

nos três primeiros problemas. No problema de Stekloff, usando o mesmo argumento anterior, vemos que

$$\nu = \frac{\int_M |\text{grad } \varphi|^2 dv}{\int_{\partial M} \varphi^2 d\sigma}.$$

Visto que nosso objetivo, nesta dissertação, é estimar o primeiro autovalor de Stekloff, apresentaremos alguns resultados para este problema que serão bastante usados posteriormente. Para os leitores interessados em maiores informações sobre os problemas de autovalores: fechado, Dirichlet e Neumann recomendamos [1], [3] e [12], como citados anteriormente.

**Teorema 1.4.1.** *Seja  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana compacta com fronteira. O conjunto de autovalores do problema de Stekloff consiste de uma seqüência*

$$0 \leq \nu_1 \leq \nu_2 \leq \dots \uparrow +\infty$$

*e cada um dos seus auto-espacos associados possui dimensao finita. Além disso, o espaco vetorial gerado por todos os auto-espacos é denso em  $L^2(M)$ .*

**Demonstração.** Ver [8], página 28.

**Teorema 1.4.2.** *Seja  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana compacta com fronteira. Existe um mínimo para o problema variacional*

$$\nu_1 = \min_{f \in A} \frac{\int_M |\text{grad } f|^2 dv}{\int_{\partial M} f^2 d\sigma},$$

*onde  $A = \{f \in C^\infty(M); \int_{\partial M} f d\sigma = 0\}$ . O mínimo satisfaz o problema de Stekloff (1.21).*

**Demonstração.** Ver [8], página 26.

**Teorema 1.4.3.** *O  $k$ -ésimo autovalor para o problema de Stekloff é caracterizado por*

$$\nu_k = \max_{\{f_1, f_2, \dots, f_{k-1}\}} \left( \min_{\varphi \perp \{f_1, f_2, \dots, f_{k-1}\}} \frac{\int_M |\text{grad } \varphi|^2 dv}{\int_{\partial M} \varphi^2 d\sigma} \right),$$

*onde as funções  $\{f_1, f_2, \dots, f_{k-1}\}$  são contínuas por partes.*

**Demonstração.** Ver [8], página 32.

## 1.5 A Fórmula de Bochner-Lichnerowicz

A fórmula de Bochner-Lichnerowicz, embora seja uma identidade simples, é bastante utilizada em Análise Geométrica para obter desigualdades importantes, como se vê em vários teoremas de comparação e em estimativas do gradiente. Também é bastante aplicada para estimar autovalores em variedades Riemanniana compactas e, portanto, será bastante usada em diversas partes desta dissertação.

**Proposição 1.5.1 (Fórmula de Bochner-Lichnerowicz).** *Seja  $f \in C^3$  uma função definida em  $M$ . Então*

$$\frac{1}{2} \Delta (|\text{grad } f|^2) = |\text{Hess } f|^2 + \langle \text{grad } f, \text{grad } (\Delta f) \rangle + \text{Ric}(\text{grad } f, \text{grad } f).$$

**Demonstração.** Seja  $\{e_1, \dots, e_n\}$  um referencial ortonormal em torno do ponto  $p$ . Neste referencial, o gradiente de  $f$  é dado por

$$\text{grad } f = \sum_{i=1}^n a_i e_i.$$

Logo

$$e_i f = f_i = \langle \text{grad } f, e_i \rangle = a_i,$$

portanto,

$$\text{grad } f = \sum_{i=1}^n f_i e_i.$$

Conseqüentemente,

$$|\text{grad } f|^2 = \sum_{i=1}^n f_i^2.$$

Observe que, para cada  $j = 1, \dots, n$ , temos

$$\left( \frac{1}{2} |\text{grad } f|^2 \right)_j = \sum_{i=1}^n f_i f_{ij}.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta (|\text{grad } f|^2) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (|\text{grad } f|^2)_{jj} \\ &= \left( \sum_{i,j=1}^n f_i f_{ij} \right)_j = \sum_{i,j=1}^n (f_{ij}^2 + f_i f_{ijj}). \end{aligned} \quad (1.22)$$

A equação de Ricci é dada por, para todo  $1 \leq i, j \leq n$ ,

$$f_{jij} = f_{ijj} + R_{ij} f_j, \quad (1.23)$$

onde  $R_{ij}$  denota os coeficientes do tensor de Ricci.

Usando a simetria da hessiana e a equação de Ricci, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\Delta |\text{grad } f|^2) &= \sum_{i,j=1}^n (f_{ij}^2 + f_i f_{jji} + R_{ij} f_i f_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^n f_{ij}^2 + \sum_{i,j=1}^n f_i f_{jji} + \sum_{i,j=1}^n R_{ij} f_i f_j \\ &= |\text{Hess } f|^2 + \langle \text{grad } f, \text{grad } (\Delta f) \rangle + \text{Ric}(\text{grad } f, \text{grad } f). \end{aligned}$$

■

**Proposição 1.5.2.** *Sejam  $(M^n, g)$  uma variedade  $n$ -dimensional, compacta com fronteira e  $f \in C^\infty(M)$ . Então*

$$\begin{aligned} &\int_M ((\Delta f)^2 - |\text{Hess } f|^2 - \text{Ric}(\text{grad } f, \text{grad } f)) \, dv \\ &= \int_{\partial M} (\pi(\overline{\text{grad}} v, \overline{\text{grad}} v) + u(\overline{\Delta} v + (n-1)h_g u) - \langle \overline{\text{grad}} v, \overline{\text{grad}} u \rangle) \, d\sigma, \end{aligned}$$

onde  $u = \frac{\partial f}{\partial \eta}$ ,  $v = f$ ,  $\overline{\Delta}$  é o Laplaciano e  $\overline{\text{grad}}$  é o gradiente em  $\partial M$  com respeito à métrica induzida em  $M$ , e além disso,  $\pi$  é a segunda forma fundamental e  $h_g$  é a curvatura média.

**Demonstração.** Integrando a fórmula de Bochner-Lichnerowicz, obtemos que

$$\int_M \frac{1}{2} \Delta (|\text{grad } f|^2) dv = \int_M (|\text{Hess } f|^2 + \langle \text{grad } f, \text{grad } (\Delta f) \rangle + \text{Ric}(\text{grad } f, \text{grad } f)) d\sigma.$$

Por outro lado, usando o Teorema da Divergência, vemos que o membro esquerdo da expressão acima é dado por

$$\begin{aligned} \int_M \frac{1}{2} \Delta (|\text{grad } f|^2) dv &= \frac{1}{2} \int_M \text{div } \text{grad } (|\text{grad } f|^2) dv \\ &= \frac{1}{2} \int_{\partial M} \langle \text{grad } (|\text{grad } f|^2), \eta \rangle d\sigma \\ &= \frac{1}{2} \int_{\partial M} \frac{\partial}{\partial \eta} (|\text{grad } f|^2) d\sigma. \end{aligned}$$

Agora, para calcularmos os termos da expressão acima na fronteira, tomaremos um campo ortonormal numa vizinhança do ponto  $P \in \partial M$ ,  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ , tal que  $e_n$  seja o vetor normal apontando para fora. Assim,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (|\text{grad } f|^2) = \frac{1}{2} e_n \left( \sum_{i=1}^n f_i^2 \right) = \sum_{i=1}^{n-1} f_i f_{in} + f_n f_{nn}. \quad (1.24)$$

Observe que, para  $1 \leq i \leq n-1$ ,

$$f_{in} = e_i e_n f - \nabla_{e_i} e_n f = u_i - \sum_{j=1}^{n-1} \langle \nabla_{e_i} e_n, e_j \rangle f_j = u_i - \sum_{j=1}^{n-1} h_{ij} f_j = u_i - \sum_{j=1}^{n-1} h_{ij} v_j,$$

onde  $h_{ij}$  são os coeficientes da segunda forma fundamental. Dessa forma,

$$\sum_{i=1}^{n-1} f_i f_{in} = \sum_{i=1}^{n-1} v_i u_i - \sum_{i,j=1}^{n-1} h_{ij} v_i v_j = \langle \overline{\text{grad}} v, \overline{\text{grad}} u \rangle - \pi(\overline{\text{grad}} v, \overline{\text{grad}} v). \quad (1.25)$$

Usando integração por partes, temos

$$\int_M \langle \text{grad } f, \text{grad } (\Delta f) \rangle = - \int_M (\Delta f)^2 dv + \int_{\partial M} (\Delta f) \frac{\partial f}{\partial \eta} d\sigma. \quad (1.26)$$

Como  $p \in \partial M$  e  $\Delta f = f_{nn} + \sum_{i=1}^{n-1} f_{ii}$ , vemos que

$$\begin{aligned}
\Delta f - f_{nn} &= \sum_{i=1}^{n-1} f_{ii} = \sum_{i=1}^{n-1} e_i e_i f - \nabla_{e_i} e_i f \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} e_i e_i f - \bar{\nabla}_{e_i} e_i f + \sum_{i=1}^{n-1} \bar{\nabla}_{e_i} e_i f - \nabla_{e_i} e_i f \\
&= \bar{\Delta} f + \sum_{i=1}^{n-1} \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_i - \nabla_{e_i} e_i, e_n \rangle f_n,
\end{aligned}$$

onde última igualdade segue-se da definição do  $\bar{\Delta}$  e do fato que  $\bar{\nabla}$  é a projeção ortogonal de  $\nabla$  em  $\partial M$ . Portanto

$$\begin{aligned}
\Delta f - f_{nn} &= \bar{\Delta} f - \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla_{e_i} e_i, e_n \rangle f_n \\
&= \bar{\Delta} f + \sum_{i=1}^{n-1} \langle e_i, \nabla_{e_i} e_n \rangle f_n = \bar{\Delta} v + (n-1)h_g u, \tag{1.27}
\end{aligned}$$

onde  $h_g$  é a curvatura média.

Usando (1.24), (1.25) e (1.27), obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \int_{\partial M} \frac{\partial}{\partial \eta} (|\text{grad } f|^2) d\sigma - \int_{\partial M} (\Delta f) \frac{\partial f}{\partial \eta} d\sigma = \\
&\int_{\partial M} \langle \overline{\text{grad}} v, \overline{\text{grad}} u \rangle d\sigma - \int_{\partial M} \pi (\overline{\text{grad}} v, \overline{\text{grad}} v) d\sigma - \int_{\partial M} u (\bar{\Delta} v + (n-1)h_g u) d\sigma
\end{aligned}$$

Usando esta última igualdade, temos

$$\begin{aligned}
&\int_M \text{Ric}(\text{grad } f, \text{grad } f) dv + \int_M |\text{Hess } f|^2 dv + \int_M \langle \text{grad } f, \text{grad}(\Delta f) \rangle dv - \int_{\partial M} (\Delta f) \frac{\partial f}{\partial \eta} d\sigma = \\
&\int_{\partial M} \langle \overline{\text{grad}} v, \overline{\text{grad}} u \rangle d\sigma - \int_{\partial M} \pi (\overline{\text{grad}} v, \overline{\text{grad}} v) d\sigma - \int_{\partial M} u (\bar{\Delta} v + (n-1)h_g u) d\sigma,
\end{aligned}$$

e, portanto, usando a equação (1.26), concluímos que

$$\begin{aligned}
\int_M ((\Delta f)^2 - \text{Ric}(\text{grad } f, \text{grad } f) - |\text{Hess } f|^2) dv &= \int_{\partial M} \pi (\overline{\text{grad}} v, \overline{\text{grad}} v) d\sigma - \\
&\int_{\partial M} \langle \overline{\text{grad}} v, \overline{\text{grad}} u \rangle d\sigma + \int_{\partial M} u (\bar{\Delta} v + (n-1)h_g u) d\sigma.
\end{aligned}$$

■



# Capítulo 2

## Teoremas de Comparação em Superfícies

Neste capítulo, analisaremos o problema de autovalores de Stekloff para as superfícies, ou seja, em variedades Riemannianas de dimensão igual a dois. Nosso interesse neste problema é estimar, inferiormente e superiormente, o primeiro autovalor não-nulo do problema de Stekloff em função da geometria da superfície. Na seção 2.1, usaremos a geometria da superfície para estimar, inferiormente, o primeiro autovalor de Stekloff em superfícies de curvatura Gaussiana não-negativa. Na seção 2.2, estimaremos superiormente o primeiro autovalor de Stekloff em domínios simplesmente conexos na superfície.

### 2.1 Estimativa Inferior para o Primeiro Autovalor de Stekloff.

Seja  $(M, g)$  uma superfície compacta com fronteira. Discutiremos o primeiro autovalor não-nulo do problema de Stekloff, a saber:

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= 0 \text{ em } M, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} &= \nu_1\varphi \text{ em } \partial M.\end{aligned}$$

**Teorema 2.1.1.** *Seja  $(M, g)$  uma superfície compacta com fronteira. Suponhamos  $M$  com curvatura Gaussiana,  $K$ , não-negativa e, além disso, a curvatura geodésica,  $k_g$ , da fronteira  $\partial M$ , satisfaça  $k_g \geq k_0 > 0$ . Então o primeiro autovalor do problema de Stekloff,  $\nu_1$ , satisfaz  $\nu_1 \geq k_0$ . A igualdade ocorre se, e somente se,  $M$  é o disco Euclidiano de raio  $k_0^{-1}$ .*

**Demonstração.** Seja  $\varphi$  uma autofunção não-constante para o problema de Stekloff. Aplicando a fórmula de Bochner-Lichnerowicz à função  $f = \frac{1}{2}|\text{grad } \varphi|^2$ , obtemos

$$\Delta f = |\text{Hess}\varphi|^2 + \langle \text{grad } \varphi, \text{grad } (\Delta\varphi) \rangle + K|\text{grad } \varphi|^2.$$

Como  $\varphi$  é uma função harmônica e  $K \geq 0$ , temos

$$\Delta f = |Hess\varphi|^2 + K|grad \varphi|^2 \geq 0, \quad (2.1)$$

e, portanto,  $f$  é uma função subharmônica. O Princípio do Máximo mostra que se  $M$  é uma variedade Riemanniana compacta com bordo e  $f \in C^2(M)$  é uma função tal que

$$\Delta f \geq 0$$

em  $M$  e, além disso, seja  $P$  é o ponto de máximo de  $f$  então verifica-se que:

1. Se  $P$  é um ponto interior em  $M$  então  $f$  é identicamente constante;
2. Se  $P \in \partial M$  então  $\frac{\partial f}{\partial \eta}(P) > 0$ , ou seja, a derivada na direção normal apontando para fora tomada em  $P$  é positiva, ver [11].

Suponhamos que  $\frac{\partial f}{\partial \eta}(P) > 0$ . Seja  $(t, x)$  as coordenadas de Fermi em torno de  $P$ , ou seja,  $x$  representa um ponto sobre  $\partial M$  e  $t$  a distância à fronteira do ponto  $x$ .

Escreveremos a métrica na coordenada de Fermi.

Observemos, primeiramente, que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle &= \left\langle \frac{D}{dt} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{D}{dt} \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle. \\ &= \left\langle \frac{D}{dt} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$0 = \frac{d}{dx} \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{D}{dx} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{D}{dt} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle. \quad (2.3)$$

Usando (2.2) e (2.3) temos que, fixado  $x$ ,

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t}(t, x), \frac{\partial}{\partial x}(t, x) \right\rangle = cte.$$

para todo  $t$ . Tomando  $t = 0$ , obtemos

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t}(t, x), \frac{\partial}{\partial x}(t, x) \right\rangle = 0, \quad \forall (t, x) \in M,$$

portanto

$$g = dt^2 + h^2(t, x)dx^2,$$

onde  $h^2(t, x) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}(t, x), \frac{\partial}{\partial x}(t, x) \right\rangle$ .

Considerando que  $\partial M$  está parametrizada pelo comprimento de arco, temos que  $h(P) = 1$  e  $\frac{\partial h}{\partial x}(P) = 0$ .

Calcularemos, agora, o gradiente de  $\varphi$ . Para isso escrevamos

$$\text{grad } \varphi = a \frac{\partial}{\partial t} + b \frac{\partial}{\partial x}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \left\langle \text{grad } \varphi, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = a \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \left\langle \text{grad } \varphi, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = bh^2. \end{aligned}$$

Logo

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} + h^{-2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} |\text{grad } \varphi|^2 = \langle \text{grad } \varphi, \text{grad } \varphi \rangle &= \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} + h^{-2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} + h^{-2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle \\ &= \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + h^{-2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2, \end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + h^{-2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - h^{-3} \frac{\partial h}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2.$$

Calculando a expressão acima no ponto  $P$ , obtemos

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad (2.4)$$

pois  $P$  é um ponto de máximo de  $f$  na direção  $x$ .

Por outro lado, sabemos, da equação (1.12), que o Laplaciano em coordenadas locais é dado por

$$\Delta \varphi = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right).$$

Observe que

$$G = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h^2 \end{pmatrix}, \quad G^{-1} = (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h^{-2} \end{pmatrix}, \quad g = \det G = h^2.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= h^{-1} \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( h g^{i1} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( h g^{i2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right\} \\ &= h^{-1} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left( h \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( h^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right\} \\ &= h^{-1} \left\{ \frac{\partial h}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - h^{-2} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + h^{-1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right\}. \end{aligned}$$

Tomando a equação acima no ponto  $P$ , obtemos que

$$\Delta\varphi = \frac{\partial h}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}. \quad (2.5)$$

Agora, calcularemos a curvatura geodésica de  $\partial M$ . Observemos que

$$\begin{aligned} k_g &= - \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = - \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle \\ &= - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = - \frac{\partial}{\partial t} (h^2) = -h \frac{\partial h}{\partial t} \end{aligned}$$

Tomando esta última igualdade em  $P$ , vemos que

$$k_g = - \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (2.6)$$

Resulta de (2.5) e (2.6) que

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - k_g \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0. \quad (2.7)$$

Derivando  $f$  em relação a  $t$  obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + h^{-2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} - h^{-3} \frac{\partial h}{\partial t} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2.$$

Assumindo a expressão acima em  $P$  e usando o fato que  $k_g = - \frac{\partial h}{\partial t}$ , temos

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} + k_g \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2.$$

Usando (2.7) concluímos, em  $P$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} + k_g \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + k_g \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - k_g \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \\ &= k_g |\text{grad } \varphi|^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \\ &= k_g |\text{grad } \varphi|^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Se  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(P) \neq 0$ , segue-se de (2.4) que

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}. \quad (2.9)$$

A condição de fronteira implica que  $\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \nu_1 \varphi$ , logo  $-\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \nu_1 \varphi$  e, conseqüentemente,

$$-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} = \nu_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (2.10)$$

Dessa forma, (2.9) e (2.10) implicam

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial t} \nu_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} = \nu_1 \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (2.11)$$

Usando (2.8), (2.10) e (2.11) temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= k_g |\text{grad } \varphi|^2 - \nu_1 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \nu_1 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \\ &= k_g |\text{grad } \varphi|^2 - \nu_1 |\text{grad } \varphi|^2 \\ &= (k_g - \nu_1) |\text{grad } \varphi|^2 < 0. \end{aligned}$$

Logo  $\nu_1 > k_g(P) \geq k_0$ .

Suponhamos que  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(P) = 0$ . Sabemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + h^{-2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - h^{-3} \frac{\partial h}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2.$$

Derivando a expressão acima em relação a  $x$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} \right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial t} + h^{-2} \left\{ \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \right\} - 2h^{-3} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \\ &\quad - h^{-3} \left\{ \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right\} + 3h^{-4} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2. \end{aligned}$$

Como  $\frac{\partial h}{\partial x}(P) = 0$  e  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(P) = 0$ , temos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} \right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial t} + \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2. \quad (2.12)$$

Utilizando a equação (2.10) em (2.12), vemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \nu_1^2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial t} + \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2 \\ &= \nu_1^2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + (-\nu_1 \varphi) \left( -\nu_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2. \end{aligned}$$

Como  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(P) = 0$ , obtemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) = \nu_1^2 \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2 \leq 0, \quad (2.13)$$

pois  $P$  é um ponto de máximo de  $f$  na direção  $x$ .

Aplicando a condição de fronteira e a igualdade  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(P) = 0$  na equação (2.8), encontraremos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t}(P) &= k_g \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + \nu_1 \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \\ &= k_g \nu_1^2 \varphi^2 + \nu_1 \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Visto que  $\frac{\partial f}{\partial t}(P) = -\frac{\partial f}{\partial \eta}(P) < 0$  temos

$$k_g \nu_1^2 \varphi^2 + \nu_1 \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} < 0$$

e portanto

$$k_g \nu_1^3 \varphi^2 + \nu_1^2 \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} < 0. \quad (2.14)$$

Somando (2.13) com (2.14) resulta

$$\left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2 + 2\nu_1^2 \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + k_g \nu_1^3 \varphi^2 < 0,$$

o qual completando o quadrado desta última desigualdade, obtemos

$$\left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \nu_1^2 \varphi \right)^2 + \nu_1^3 (k_g - \nu_1) \varphi^2 < 0,$$

portanto  $\nu_1 > k_g \geq k_0$ .

Suponhamos agora que  $f$  é constante. Observe que  $f \neq 0$  pois  $\varphi$  não é constante, logo  $f$  é harmônica e segue-se da equação (2.1) que  $Hess \varphi = 0$  e  $K = 0$  em  $M$ .

Seja  $\{e_1, e_2\}$  um campo ortonormal tal que  $e_1$  é tangente a  $\partial M$  e  $e_2 = \eta$ . Logo

$$\begin{aligned} 0 = Hess \varphi(e_1, e_2) &= e_1 e_2 \varphi - \nabla_{e_1} e_2 \varphi \\ &= e_1 (\nu_1 \varphi) - k_g e_1 \varphi \\ &= (\nu_1 - k_g) e_1 \varphi. \end{aligned}$$

Observe que se  $e_1 \varphi = 0$  em  $\partial M$  então  $\varphi = cte$  em  $\partial M$ .

Dessa forma, chegamos ao seguinte sistema:

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= 0 \text{ em } M \\ \varphi &= cte \text{ em } \partial M.\end{aligned}$$

Considere  $\psi = \varphi - cte$ . Temos

$$\begin{aligned}\Delta\psi &= 0 \text{ em } M \\ \psi &= 0 \text{ em } \partial M.\end{aligned}$$

Pelo corolário (1.3.2) temos que  $\psi$  é constante. Conseqüentemente  $\varphi$  é constante, o que é uma contradição. Logo  $\nu_1 = k_g$ , exceto quando  $e_1\varphi = 0$ . Como  $Hess\varphi(e_1, e_1) = 0$  temos

$$\begin{aligned}Hess\varphi(e_1, e_1) &= e_1e_1\varphi - \nabla_{e_1}e_1\varphi \\ &= e_1e_1\varphi + k_g e_2\varphi \\ &= e_1e_1\varphi + k_g\nu_1\varphi = 0.\end{aligned}$$

Portanto  $\varphi$  satisfaz, na fronteira, a equação diferencial de segunda ordem dada por

$$\begin{aligned}\frac{d^2\varphi}{dx^2} + k_g\nu_1\varphi &= 0 \\ \varphi(0) &= \varphi(l)\end{aligned}$$

onde  $l$  representa o comprimento de  $\partial M$ .

Como a função  $\varphi$  não é identicamente nula temos que  $\varphi_1$  se anula num número finito de pontos, portanto  $\nu_1 = k_g$ , exceto num número finito de pontos. Usando a continuidade de  $k_g$ , concluímos que  $\nu_1 = k_g$  em todos os pontos. Logo  $\nu_1 = k_g \geq k_0$ .

Se  $\nu_1 = k_0$ , então  $f$  é constante, pois caso contrário,  $\frac{\partial f}{\partial \eta}(P) > 0$  e teríamos  $\nu_1 > k_g(P) \geq k_0$ , contradição. Como  $f$  é constante temos que  $k_g = k_0$  em todos os pontos e  $K = 0$  em  $M$ , logo  $M$  é o disco de raio  $\frac{1}{k_0}$ . ■

Estabeleceremos agora algumas relações entre os primeiros autovalores não-nulos de Stekolff em variedades Riemannianas com métricas conformes.

Sejam  $(M, g_0)$  uma superfície compacta com fronteira e  $g = e^{2f}g_0$  a métrica conforme obtida da métrica  $g_0$ . Denotamos por  $\nu_1(g)$  o primeiro autovalor não-nulo para o problema de Stekolff com respeito à métrica  $g$ . As seguintes proposições estabelecem a relação entre  $\nu_1(g)$  e  $\nu_1(g_0)$ .

**Proposição 2.1.1.**

$$\nu_1(g) \geq (\max e^{f(x)})^{-1} \nu_1(g_0).$$

**Demonstração.** Seja  $\varphi \in C^1(\overline{M})$ . Definimos

$$Q_g(\varphi) = \frac{\int_M |\text{grad } \varphi|_g^2 dv_g}{\int_{\partial M} \varphi^2 d\sigma_g}.$$

Como a integral de Dirichlet é um invariante conforme e  $d\sigma_g = e^f d\sigma_{g_0}$ , temos

$$Q_g(\varphi) = \frac{\int_M |\text{grad } \varphi|_{g_0}^2 dv_0}{\int_{\partial M} \varphi^2 e^f d\sigma_0} \geq \frac{Q_{g_0}(\varphi)}{\max_{x \in \partial M} e^{f(x)}}.$$

Por outro lado, sabemos que

$$\nu_1(g) = \min_{f \in A} \frac{\int_M |\text{grad } f|^2 dv}{\int_{\partial M} f^2 d\sigma},$$

onde  $A = \{f \in C^\infty / \int_{\partial M} f d\sigma = 0\}$ .

Portanto, tomando o ínfimo sobre todas as funções  $\varphi \in A$ , obtemos que

$$\nu_1(g) \geq \left( \max_{x \in \partial M} e^{f(x)} \right)^{-1} \nu_1(g_0).$$

■

Segue-se diretamente da proposição anterior, os seguintes resultados:

**Corolário 2.1.1.** *Se  $f$  for constante em  $\partial M$ , então*

$$\nu_1(g) = e^{-f} \nu_1(g_0).$$

**Corolário 2.1.2.** *Seja  $(M, g_0)$  uma superfície compacta com fronteira e curvatura Gaussiana não-negativa. Suponhamos que a curvatura geodésica de  $\partial M$ , com respeito à métrica  $g_0$ , satisfaz  $k_{g_0} \geq k_0 > 0$ . Então para a métrica  $g = e^{2f} g_0$ , temos*

$$\nu_1(g) \geq \left( \max_{x \in \partial M} e^{f(x)} \right)^{-1} k_g$$

e

$$\nu_1(g) \geq \left( \max_{x \in \partial M} e^{f(x)} \right)^{-1} \left( \min_{x \in \partial M} \left\{ e^{f(x)} k_g(x) - \frac{\partial f}{\partial \eta_{g_0}}(x) \right\} \right).$$

**Demonstração.** A primeira desigualdade é conseqüência direta da Proposição 2.1.1 e do Teorema 2.1.1. A segunda desigualdade segue do fato que, se  $g = e^{2f} g_0$ , então  $k_g$  e  $k_{g_0}$  satisfazem

$$k_g = e^{-f} \left( k_{g_0} + \frac{\partial f}{\partial \eta_{g_0}} \right).$$

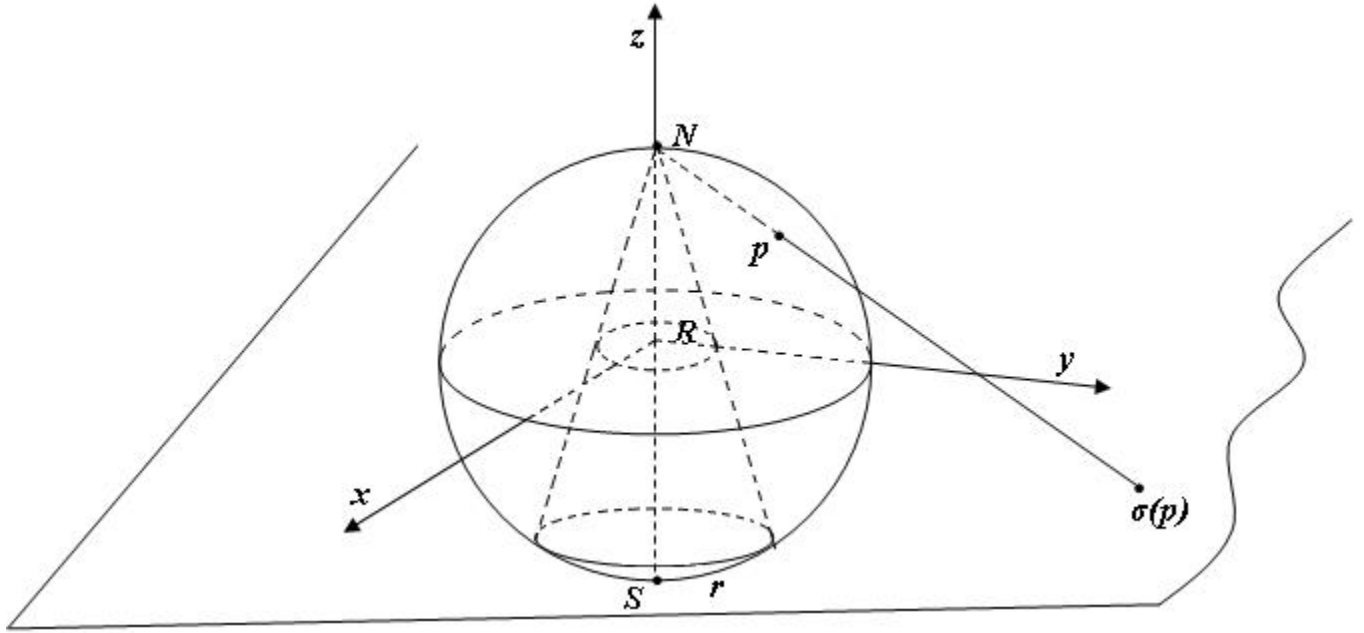
■



Apresentaremos, a seguir, dois exemplos do problema de autovalor de Stekloff.

**Exemplo 1.** Sejam  $S^2$  a esfera unitária em  $\mathbb{R}^3$  e  $N = \{(0, 0, 1)\}$  o pólo norte. Seja  $\sigma: S^2 - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  a projeção estereográfica, a qual é definida por

$$\sigma(x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3} \right)$$



Usando coordenadas locais temos que

$$\varphi(u, v) = \left( \sqrt{1 - v^2} \cos u, \sqrt{1 - v^2} \sin u, v \right), \quad v \in (-1, 1)$$

é uma parametrização de  $S^2 - \{N \cup S\}$  e, além disso

$$\psi = \sigma \circ \varphi = \left( \sqrt{\frac{1+v}{1-v}} \cos u, \sqrt{\frac{1+v}{1-v}} \sin u \right).$$

Desta forma,

$$\varphi_u = \left( -\sqrt{1 - v^2} \sin u, \sqrt{1 - v^2} \cos u, 0 \right), \quad \varphi_v = \left( \frac{-v}{\sqrt{1 - v^2}} \cos u, \frac{-v}{\sqrt{1 - v^2}} \sin u, 1 \right)$$

implicam

$$g_{11} = 1 - v^2, \quad g_{12} = 0 \quad \text{e} \quad g_{22} = \frac{1}{1 - v^2}.$$

Por outro lado, os coeficientes de  $\psi$  são dados por

$$\bar{g}_{11} = \frac{1+v}{1-v}, \quad \bar{g}_{12} = 0 \quad \text{e} \quad \bar{g}_{22} = \frac{1}{(1-v)^3(1+v)}.$$

Observe que

$$\bar{g}_{11} = \left(\frac{1}{1-v}\right)^2 g_{11}, \quad \bar{g}_{12} = \left(\frac{1}{1-v}\right)^2 g_{12} \text{ e } \bar{g}_{22} = \left(\frac{1}{1-v}\right)^2 g_{22}.$$

Portanto, para  $w_1, w_2 \in T_p S$  temos

$$\lambda^2 \langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle d\sigma_p(w_1), d\sigma_p(w_2) \rangle_{\sigma(p)},$$

onde  $\lambda = \frac{1}{1-v}$ .

Como

$$\sigma^{-1}(x_1, x_2) = \left( \frac{2x_1}{1+x_1^2+x_2^2}, \frac{2x_2}{1+x_1^2+x_2^2}, \frac{-1+x_1^2+x_2^2}{1+x_1^2+x_2^2} \right),$$

temos

$$v = \frac{-1+x_1^2+x_2^2}{1+x_1^2+x_2^2}.$$

Denominamos  $x = (x_1, x_2)$ , podemos escrever

$$v = \frac{-1+\|x\|^2}{1+\|x\|^2} \Rightarrow 1-v = \frac{2}{1+\|x\|^2}$$

Definimos a métrica em  $T_p S$  por

$$\begin{aligned} \langle w_1, w_2 \rangle_p &= \frac{1}{\lambda^2} \langle d\sigma_p(w_1), d\sigma_p(w_2) \rangle_{\sigma(p)} \\ \langle w_1, w_2 \rangle_p &= (1-v)^2 \langle d\sigma_p(w_1), d\sigma_p(w_2) \rangle_{\sigma(p)} \\ \langle w_1, w_2 \rangle_p &= \left( \frac{2}{1+\|x\|^2} \right)^2 \langle d\sigma_p(w_1), d\sigma_p(w_2) \rangle_{\sigma(p)}, \end{aligned}$$

a qual representamos abreviadamente por

$$(\sigma^{-1})^*(g_0) = e^{2f} \delta_{ij},$$

onde  $e^{2f} = \frac{4}{(1+\|x\|^2)^2}$ .

A bola geodésica de raio  $r$  com centro  $S = (0, 0, -1)$ ,  $B_r(S) \subset S^2$  satisfaz que  $\sigma(B_r(S)) = B_R(0)$ , onde  $R = \tan\left(\frac{r}{2}\right)$ . Tomando  $g = (\sigma^{-1})^*(g_0)$  vemos que a função  $f$  é constante em  $\partial B_R$ . Dessa forma o corolário (2.1.1) implica que

$$\nu_1(g) = e^{-f} \frac{1}{R}. \quad (2.15)$$

Usando a igualdade

$$k_g = e^{-f} \left( k_{g_0} + \frac{\partial f}{\partial \eta_{g_0}} \right), \quad (2.16)$$

obtemos,

$$\begin{aligned}
k_g &= e^{-f} \left( k_{g_0} + \frac{\partial f}{\partial \eta_{g_0}} \right) \\
&= e^{-f} \frac{1}{R} + e^{-f} \frac{\partial f}{\partial \eta_{g_0}} \\
&= e^{-f} \frac{1}{R} - \frac{\partial}{\partial \eta_{g_0}} (e^{-f}) \\
&= \frac{1+R^2}{2} \frac{1}{R} - \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1+R^2}{2} \right) \\
&= \frac{1+R^2}{2R} - R = \frac{1-R^2}{2R} = \left( \frac{2R}{1-R^2} \right)^{-1} \\
&= \left( \frac{2 \tan(r/2)}{1 - \tan^2(r/2)} \right)^{-1} = \tan^{-1} r = \cot r.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Por outro lado, por (2.15) e (2.17) temos

$$\begin{aligned}
\nu_1(g) &= k_g + \frac{\partial}{\partial \eta_{g_0}} (e^{-f}) \\
&= \cot r + \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1+R^2}{2} \right) \\
&= \cot r + R \\
&= \cot r + \tan \frac{r}{2}.
\end{aligned}$$

**Exemplo 2.** Considere  $\mathbb{R}^3$  munido com a métrica  $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$ , onde  $x = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ . Definimos espaço Hiperbólico o conjunto

$$H^2 = \{x \in \mathbb{R}^3; \langle x, x \rangle = -1, x_3 > 0\}.$$

Seja  $D = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2; u_1^2 + u_2^2 < 1\}$ . Consideremos a “projeção estereográfica”  $\sigma : H^2 \rightarrow D$  definida por

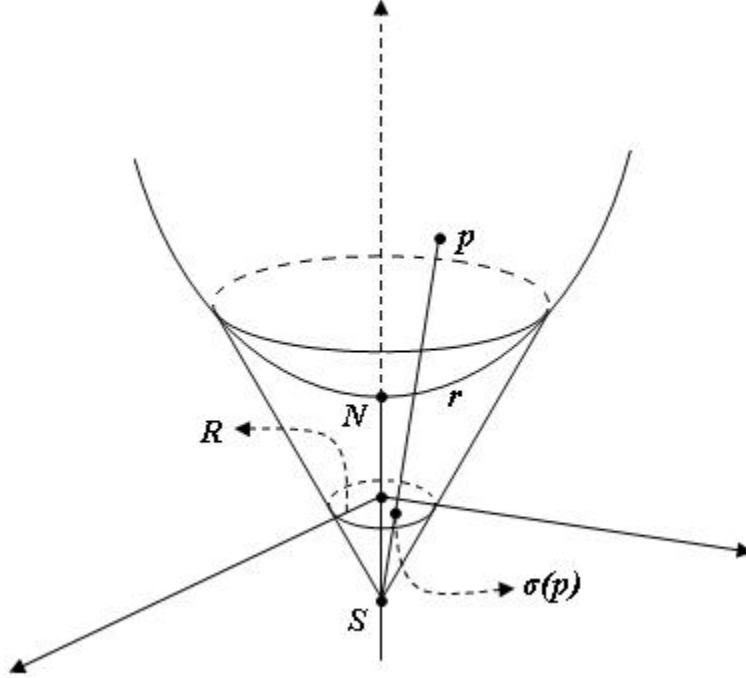
$$\sigma(x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{x_1}{1+x_3}, \frac{x_2}{1+x_3} \right).$$

Usando coordenadas locais temos que

$$\varphi(u, v) = \left( v \cos u, v \sin u, \sqrt{1+v^2} \right),$$

$v > 0$  e  $u \in (0, 2\pi)$ , é uma parametrização do espaço hiperbólico excluindo apenas um meridiano e o ponto  $N = (0, 0, 1)$ , mas qualquer ponto a menos de  $N$  é coberto ajustando o domínio.

Os coeficientes de  $\varphi$  são  $g_{11} = v^2$ ,  $g_{12} = 0$ ,  $g_{22} = \frac{1}{1+v^2}$ .



Tomando

$$\psi = \sigma \circ \varphi = \left( \frac{v}{1 + \sqrt{1 + v^2}} \cos u, \frac{v}{1 + \sqrt{1 + v^2}} \operatorname{sen} u \right),$$

obtemos,

$$\bar{g}_{11} = \frac{v^2}{(1 + \sqrt{1 + v^2})^2}, \quad \bar{g}_{12} = 0 \text{ e } \bar{g}_{22} = \frac{1}{(1 + v^2)(1 + \sqrt{1 + v^2})^2}.$$

donde,

$$\bar{g}_{11} = \left( \frac{1}{1 + \sqrt{1 + v^2}} \right)^2 g_{11}, \quad \bar{g}_{12} = \left( \frac{1}{1 + \sqrt{1 + v^2}} \right)^2 g_{12} \text{ e } \bar{g}_{22} = \left( \frac{1}{1 + \sqrt{1 + v^2}} \right)^2 g_{22}.$$

Portanto para  $w_1, w_2 \in T_p H^2$  temos,

$$\lambda^2 \langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle d\sigma_p(w_1), d\sigma_p(w_2) \rangle_{\sigma(p)},$$

onde  $\lambda = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + v^2}}$ . Como

$$\sigma^{-1}(x_1, x_2) = \left( \frac{2x_1}{1 - x_1^2 - x_2^2}, \frac{2x_2}{1 - x_1^2 - x_2^2}, \frac{1 + x_1^2 + x_2^2}{1 - x_1^2 - x_2^2} \right),$$

escrevendo  $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2$ , obtemos

$$\sqrt{1 + v^2} = \frac{1 + \|x\|^2}{1 - \|x\|^2} \Rightarrow 1 + \sqrt{1 + v^2} = \frac{2}{1 - \|x\|^2}.$$

Definimos a métrica em  $T_p H^2$  por

$$\begin{aligned}\langle w_1, w_2 \rangle_p &= \frac{1}{\lambda^2} \langle d\sigma_p(w_1), d\sigma_p(w_2) \rangle_{\sigma(p)} \\ \langle w_1, w_2 \rangle_p &= \left(1 + \sqrt{1 + v^2}\right)^2 \langle d\sigma_p(w_1), d\sigma_p(w_2) \rangle_{\sigma(p)} \\ \langle w_1, w_2 \rangle_p &= \left(\frac{2}{1 - \|x\|^2}\right)^2 \langle d\sigma_p(w_1), d\sigma_p(w_2) \rangle_{\sigma(p)},\end{aligned}$$

ou abreviadamente por

$$(\sigma^{-1})^*(g_0) = e^{2f} \delta_{ij},$$

onde  $e^{2f} = \frac{4}{(1 - \|x\|^2)^2}$ .

Tomemos agora a bola geodésica de centro  $N = (0, 0, 1)$  e raio  $r$ . Então  $r = \ell(\alpha(t))$ , onde  $t \in [0, R]$  e  $\alpha(t) = \sigma^{-1}(t) = \left(0, \frac{2t}{1 - t^2}, \frac{1 + t^2}{1 - t^2}\right)$ .

Dessa forma,

$$r = \int_0^R \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^R \frac{2}{1 - t^2} dt = \ln \left(\frac{1 + R}{1 - R}\right).$$

Logo  $e^r = \frac{1 + R}{1 - R}$  e, portanto,  $R = \frac{e^r - 1}{e^r + 1} = \tanh\left(\frac{r}{2}\right)$ . Novamente pelo corolário (2.1.1) temos,

$$\nu_1(g) = e^{-f} \frac{1}{R}.$$

Usando (2.16), vemos que

$$\begin{aligned}k_g &= e^{-f} \frac{1}{R} - \frac{\partial}{\partial \eta_{g_0}} (e^{-f}) \\ &= \frac{1 - R^2}{2} \frac{1}{R} - \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1 - R^2}{2}\right) \\ &= \frac{1 - R^2}{2R} + R = \frac{1 + R^2}{2R} \\ &= \frac{e^{2r} + 1}{e^{2r} - 1} = \frac{e^r + e^{-r}}{e^r - e^{-r}} \\ &= \coth r.\end{aligned}$$

Segue-se então que

$$\begin{aligned}\nu_1(g) &= k_g + \frac{\partial}{\partial \eta_{g_0}} (e^{-f}) \\ &= \coth r + \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1 - R^2}{2}\right) \\ &= \coth r - R \\ &= \coth r - \tanh \frac{r}{2}.\end{aligned}$$

Este exemplo nos mostra que, se a curvatura Gaussiana for negativa então o Teorema 2.1.1 pode não ser verificado.

## 2.2 Estimativa em Domínios Simplesmente Conexos.

Seja  $M$  um domínio simplesmente conexo do plano. R. Weinstock obteve em [15] que o primeiro autovalor não-nulo de Stekloff,  $\nu_1$ , satisfaz  $\nu_1 \leq \frac{2\pi}{L}$ , onde  $L$  é o comprimento da fronteira e a igualdade é satisfeita se, e somente se,  $M$  é o disco unitário. Posteriormente, J. Hersch, L. E Payne e M. M Schiffer demonstraram em [9] que  $\nu_1\nu_2 \geq \frac{4\pi^2}{L^2}$ , onde  $\nu_2$  é o segundo autovalor não-nulo do problema de Stekloff. Nesta seção, apresentaremos um resultado, demonstrado por Escobar em [6], o qual generaliza os resultados obtidos por Weinstock, ou seja, obtemos um resultado análogo para superfícies compactas com fronteira.

**Teorema 2.2.1.** *Seja  $(M, g_0)$  uma superfície completa simplesmente conexa com curvatura Gaussiana constante. Seja  $\Omega \subset M$  um domínio limitado, simplesmente conexo com  $\text{Área}(\Omega) = \text{Área}(B_r(x_0))$ , onde  $B_r(x_0) \subset M$  é uma bola geodésica de raio  $r$  com centro  $x_0 \in M$ . Então*

$$\nu_1(\Omega) \leq \nu_1(B_r(x_0)).$$

*A igualdade ocorre se, e somente se,  $\Omega$  é isométrico a  $B_r(x_0)$ .*

**Demonstração.** Seja  $g_1 = cg_0$ ,  $c > 0$ . Considere  $(M, g_1)$ . Como  $(M, g_0)$  tem curvatura Gaussiana constante  $K_0$ , então  $(M, g_1)$  terá curvatura constante e igual a  $\frac{1}{c}K_0$ . Além disso, pelo Corolário 2.1.1 temos que

$$\nu_1(g_1) = c\nu_1(g_0).$$

Dessa forma, basta considerarmos no enunciado do teorema a curvatura Gaussiana de  $(M, g_0)$ ,  $K_0 \in \{1, 0, -1\}$ . Portanto, temos que  $M$  é isométrica a esfera unitária, o plano Euclidiano ou ao espaço hiperbólico de curvatura  $-1$ . O Teorema de Wienstock diz que  $\nu_1(\Omega) \leq \frac{2\pi}{L}$ , onde  $L$  é o perímetro de  $\partial\Omega$ . A desigualdade isoperimétrica em  $M$  implica que, em  $M$ ,  $L \geq L(r)$  onde  $L(r)$  representa o perímetro da  $\partial B_r(x_0)$ , igualdade satisfeita somente quando  $\Omega$  é isométrica a  $B_r(x_0)$ . Portanto

$$\nu_1(\Omega) \leq \frac{2\pi}{L(r)}. \tag{2.18}$$

No Exemplo 1 mostramos que, se  $B_r(x_0) \in S^2$ , então

$$\begin{aligned}
 \nu_1(B_0(x_0)) &= \cot r + \tan\left(\frac{r}{2}\right) \\
 &= \frac{\cos r}{\sin r} + \frac{\sin\left(\frac{r}{2}\right)}{\cos\left(\frac{r}{2}\right)} \\
 &= \frac{\cos^2\left(\frac{r}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{r}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{r}{2}\right) \cos\left(\frac{r}{2}\right)} + \frac{\sin\left(\frac{r}{2}\right)}{\cos\left(\frac{r}{2}\right)} \\
 &= \frac{\cos^2\left(\frac{r}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{r}{2}\right) + 2 \sin^2\left(\frac{r}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{r}{2}\right) \cos\left(\frac{r}{2}\right)} \\
 &= \frac{1}{2 \sin\left(\frac{r}{2}\right) \cos\left(\frac{r}{2}\right)} = \frac{1}{\sin r}.
 \end{aligned}$$

Se no Exemplo 1 tomarmos  $\alpha(t) = (R \cos t, R \sin t)$  e

$$\beta(t) = \sigma^{-1}(\alpha(t)) = \left( \frac{2R \cos t}{1 + R^2}, \frac{2R \sin t}{1 + R^2}, \frac{-1 + R^2}{1 + R^2} \right)$$

então

$$L(r) = \int_0^{2\pi} \|\beta'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \frac{2R}{1 + R^2} dt = 2\pi \left( \frac{2R}{1 + R^2} \right),$$

onde  $R = \tan\left(\frac{r}{2}\right)$ . Logo

$$\begin{aligned}
 L(r) &= 2\pi \left( \frac{2 \tan\left(\frac{r}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{r}{2}\right)} \right) \\
 &= 2\pi \left( \frac{2 \tan\left(\frac{r}{2}\right)}{\sec^2\left(\frac{r}{2}\right)} \right) \\
 &= 2\pi \left( 2 \sin\left(\frac{r}{2}\right) \cos\left(\frac{r}{2}\right) \right) = 2\pi \sin r.
 \end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$\nu_1(B_r(x_0)) = \frac{2\pi}{L(r)}.$$

Analogamente, usando o Exemplo 2, se  $B_r(x_0) \subset H^2$ , então

$$\begin{aligned}
\nu_1(B_0(x_0)) &= \coth r - \tanh\left(\frac{r}{2}\right) \\
&= \frac{\cosh r}{\sinh r} - \frac{\sinh\left(\frac{r}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{r}{2}\right)} \\
&= \frac{\cosh^2\left(\frac{r}{2}\right) + \sinh^2\left(\frac{r}{2}\right)}{2 \sinh\left(\frac{r}{2}\right) \cosh\left(\frac{r}{2}\right)} - \frac{\sinh\left(\frac{r}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{r}{2}\right)} \\
&= \frac{\cosh^2\left(\frac{r}{2}\right) + \sinh^2\left(\frac{r}{2}\right) - 2 \sinh^2\left(\frac{r}{2}\right)}{2 \sinh\left(\frac{r}{2}\right) \cosh\left(\frac{r}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{2 \sinh\left(\frac{r}{2}\right) \cosh\left(\frac{r}{2}\right)} = \frac{1}{\sinh r}.
\end{aligned}$$

Tomando agora  $\alpha(t) = (R \cos t, R \sin t)$  e

$$\beta(t) = \sigma^{-1}(\alpha(t)) = \left( \frac{2R \cos t}{1 - R^2}, \frac{2R \sin t}{1 - R^2}, \frac{1 + R^2}{1 - R^2} \right),$$

temos

$$L(r) = \int_0^{2\pi} \|\beta'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \frac{2R}{1 - R^2} dt = 2\pi \left( \frac{2R}{1 - R^2} \right),$$

onde  $R = \tanh\left(\frac{r}{2}\right)$ . Logo

$$\begin{aligned}
L(r) &= 2\pi \left( \frac{2 \tanh\left(\frac{r}{2}\right)}{1 - \tanh^2\left(\frac{r}{2}\right)} \right) \\
&= 2\pi \left( \frac{2 \tanh\left(\frac{r}{2}\right)}{\cosh^{-2}\left(\frac{r}{2}\right)} \right) \\
&= 2\pi \left( 2 \sinh\left(\frac{r}{2}\right) \cosh\left(\frac{r}{2}\right) \right) = 2\pi \sinh r.
\end{aligned}$$

Desta forma, temos

$$\nu_1(B_r(x_0)) = \frac{2\pi}{L(r)}. \quad (2.19)$$

No caso da bola Euclidiana, vê-se facilmente que (2.19) é satisfeita. Observamos que para todos estes casos a igualdade de (2.18) é satisfeita. ■

Generalizamos este último resultado para superfícies completas e simplesmente conexas com curvatura Gaussiana não-positiva, como pode ser visto em [6], página 108.

**Teorema 2.2.2.** *Seja  $(M, g)$  uma superfície completa simplesmente conexa com curvatura Gaussiana não-positiva. Seja  $\Omega \subset M$  um conjunto limitado e simplesmente*



conexo com  $\text{Área}(\Omega) = \text{Área}(B_r(0))$ , onde  $B_r(0)$  é a bola Euclidiana de raio  $r$  com centro na origem. Então

$$\nu_1(\Omega) \leq \nu_1(B_r(0)).$$

A igualdade ocorre se, e somente se,  $\Omega$  é isométrico a bola Euclidiana  $B_r(0)$ .

**Demonstração.** O Teorema de Wienstock diz que

$$\nu_1(\Omega) \leq \frac{2\pi}{L},$$

onde  $L$  é o perímetro de  $\partial\Omega$ . A desigualdade isoperimétrica de Weyl em variedades com curvaturas não-positivas, ver [14], diz que

$$L^2 \geq 4\pi A,$$

onde  $A = \text{Área}(\Omega)$  e a igualdade é satisfeita apenas para a bola Euclidiana. Dessa forma temos que  $L \geq 2\pi r$ , portanto

$$\nu_1(\Omega) \leq \frac{1}{r} = \nu_1(B_r(0)).$$

■  
A hipótese do domínio ser simplesmente conexo nos teoremas anteriores é indispensável e um exemplo, o qual nos mostra isto, foi construído por Escobar e pode ser encontrado em [6], página 109.

# Capítulo 3

## Teoremas de Comparação em Variedades $n$ -Dimensionais

Neste capítulo discutiremos estimativas, superiores e inferiores, do primeiro autovalor não-nulo de Stekloff em variedades  $n$ -dimensionais. Veremos no Teorema 3.1.1 que a estimativa encontrada não é ótima como no caso de superfícies, ver Teorema 2.1.1. Finalizaremos este capítulo com uma conjectura feita por J. F. Escobar em [6], página 115.

### 3.1 Estimativas em variedades $M^n$ .

O próximo teorema estabelece uma estimativa superior do primeiro autovalor não-nulo de Stekloff em função do primeiro autovalor do Laplaciano na fronteira da variedade Riemanniana.

**Teorema 3.1.1.** *Seja  $M^n$ ,  $n \geq 3$ , uma variedade Riemanniana compacta com fronteira. Assuma que a curvatura de Ricci de  $M$  é não-negativa e a segunda forma fundamental de  $\partial M$ ,  $\pi \geq 0$ . Então*

$$\left( \min_{x \in \partial M} h_g(x) \right) \nu_1 < \frac{2\lambda_1}{n-1},$$

onde  $\lambda_1$  é o primeiro autovalor não-nulo do Laplaciano em  $\partial M$  e  $h_g$  é a curvatura média.

**Demonstração.** A Proposição 1.5.2 mostra que para uma função suave  $f$  definida em  $M$  e  $u = \frac{\partial f}{\partial \eta}$  em  $\partial M$ , a seguinte identidade é satisfeita,

$$\begin{aligned} \int_M ((\Delta f)^2 - |Hess f|^2) dv &= \int_M Ric(grad f, grad f) dv + \int_{\partial M} (\bar{\Delta} f + (n-1)h_g u) u d\sigma \\ &\quad - \int_{\partial M} \langle \overline{grad} f, \overline{grad} u \rangle d\sigma + \int_{\partial M} \pi(\overline{grad} f, \overline{grad} f) d\sigma, \end{aligned}$$

onde  $\overline{grad}$ ,  $\overline{\Delta}$  representam, respectivamente, o gradiente e o Laplaciano em  $\partial M$  com respeito à métrica induzida em  $\partial M$ . Seja  $\varphi_1$  a primeira autofunção do Laplaciano em  $\partial M$ .

Seja  $f$  uma função harmônica em  $M$  satisfazendo que  $f = \varphi_1$  em  $\partial M$ . Aplicando a Proposição 1.5.2 encontramos que

$$\int_{\partial M} (\Delta\varphi_1 + (n-1)h_g u) u d\sigma - \int_{\partial M} \langle \overline{grad} \varphi_1, \overline{grad} u \rangle d\sigma < 0.$$

Usando o Teorema de Green, obtemos

$$\int_{\partial M} \langle \overline{grad} \varphi_1, \overline{grad} u \rangle d\sigma = - \int_{\partial M} u \overline{\Delta} \varphi_1 d\sigma,$$

portanto,

$$2 \int_{\partial M} u \overline{\Delta} \varphi_1 d\sigma < -(n-1) \int_{\partial M} h_g u^2 d\sigma.$$

Como  $\overline{\Delta} \varphi_1 + \lambda \varphi_1 = 0$  em  $\partial M$ , temos que

$$-2\lambda_1 \int_{\partial M} \varphi_1 u d\sigma < -(n-1) \int_{\partial M} h_g u^2 d\sigma,$$

donde

$$\frac{2\lambda_1}{n-1} > \frac{\int_{\partial M} h_g u^2 d\sigma}{\int_{\partial M} \varphi_1 u d\sigma}.$$

Dessa forma

$$\frac{2\lambda_1}{n-1} > \min_{x \in \partial M} h_g(x) \frac{\int_{\partial M} u^2 d\sigma}{\int_{\partial M} \varphi_1 u d\sigma}. \quad (3.1)$$

Observe que o primeiro autovalor não-nulo para o problema de Stekloff tem a seguinte caracterização:

$$\nu_1 = \min_{\int_{\partial M} f=0} \frac{\int_M |\nabla f|^2 dv}{\int_{\partial M} f^2 d\sigma}.$$

Por outro lado, usando o Teorema de Green e a condição de fronteira, obtemos que

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \min_{\int_{\partial M} f=0} \frac{\int_M |\nabla f|^2 dv}{\int_{\partial M} f^2 d\sigma} \\ &= \min_{\Delta f=0} \frac{\int_{\partial M} u^2 d\sigma}{\int_{\partial M} u f d\sigma}. \end{aligned}$$

Usando esta última igualdade e a desigualdade (3.1), obtemos

$$\frac{2\lambda_1}{n-1} > \left( \min_{x \in \partial M} h_g(x) \right) \nu_1.$$

■

**Teorema 3.1.2.** *Seja  $(M^n, g)$ ,  $n \geq 3$ , uma variedade Riemanniana compacta com fronteira. Assuma que a curvatura de Ricci de  $M$  é não-negativa e a segunda forma fundamental  $\pi$  satisfaz  $\pi \geq k_0 I$  em  $\partial M$ ,  $k_0 > 0$ . Então*

$$\nu_1 > \frac{k_0}{2}.$$

**Demonstração.** Usando a Proposição 1.5.2 temos que, para uma função suave  $f$  definida em  $M$ ,  $u = \frac{\partial f}{\partial \eta}$  em  $\partial M$ , a seguinte identidade é satisfeita:

$$\begin{aligned} \int_M ((\Delta f)^2 - |Hess f|^2) dv &= \int_M Ric(grad f, grad f) dv + \int_{\partial M} (\overline{\Delta} f + (n-1)h_g u) u d\sigma \\ &\quad - \int_{\partial M} \langle \overline{grad} f, \overline{grad} u \rangle d\sigma + \int_{\partial M} \pi(\overline{grad} f, \overline{grad} f) d\sigma, \end{aligned}$$

onde  $\overline{grad}$ ,  $\overline{\Delta}$  representam, respectivamente, o gradiente e o Laplaciano em  $\partial M$  com respeito à métrica induzida em  $\partial M$ .

Seja  $f$  a primeira autofunção do problema de Stekloff. Como  $f$  é harmônica, obtemos, usando a identidade acima, que

$$\begin{aligned} 0 &> \int_M (-|Hess f|^2 - Ric(grad f, grad f)) dv \\ &= \int_{\partial M} (\overline{\Delta} f + (n-1)h_g u) u d\sigma - \int_{\partial M} \langle \overline{grad} f, \overline{grad} u \rangle d\sigma + \int_{\partial M} \pi(\overline{grad} f, \overline{grad} f) d\sigma \\ &\geq -2 \int_{\partial M} \langle \overline{grad} f, \overline{grad} u \rangle d\sigma + k_0 \int_{\partial M} |\overline{grad} f|^2 d\sigma. \end{aligned}$$

Usando a condição de fronteira da função  $f$ , obtemos que

$$0 > -2\nu_1 \int_{\partial M} |\overline{grad} f|^2 d\sigma + k_0 \int_{\partial M} |\overline{grad} f|^2 d\sigma.$$

Observe que

$$\int_{\partial M} |\overline{grad} f|^2 d\sigma > 0,$$

pois, caso contrário, teríamos  $f \equiv cte$  em  $\partial M$  e, portanto,  $f \equiv cte$  em  $M$ . Isto é uma contradição visto que  $f$  é a primeira autofunção de Stekloff. Dessa forma concluímos que

$$\nu_1 > \frac{k_0}{2}.$$

Vimos no teorema anterior que  $\nu_1 > \frac{k_0}{2}$  quando  $n \geq 3$ . No Teorema 2.1.1, ou seja, quando  $n = 2$ , obtemos uma estimativa melhor,  $\nu_1 \geq k_0$ . Dessa forma vemos que a estimativa obtida pelo teorema acima não é ótima, isto é, ela pode ser melhorada. Diante disso, Escobar acreditava, conforme conjectura em [6], página 115, que o Teorema 3.1.2 também é verdadeiro quando  $\nu_1 \geq k_0$ , isto é, que o resultado a seguir também é válido. ■

**Conjectura 3.1.1.** *Seja  $(M^n, g)$ ,  $n \geq 3$ , uma variedade Riemanniana compacta com fronteira. Assuma que  $\text{Ric}(g) \geq 0$  e a segunda forma fundamental  $\pi$  satisfaz  $\pi \geq k_0 I$  em  $\partial M$ ,  $k > 0$ . Então*

$$\nu_1 \geq k_0.$$

*A igualdade ocorre se, e somente se,  $M$  é a bola Euclidiana de raio  $\frac{1}{k_0}$ .*

# Referências Bibliográficas

- [1] Berard, P. H., *Lectures on Spectral Geometry*, XV Colóquio Brasileiro de Matemática. 1985.
- [2] Calderón, A. P., *On an Inverse Boundary Value Problem*, Seminar in Numerical Analysis and its Applications to Continuum Physics, Soc. Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro (1980), 65-73.
- [3] Chavel, I., *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, Pure and Applied Mathematics, Academic Press Inc, Orlando, FL, vol. 115, 1984.
- [4] Chavel, I., *Riemannian Geometry: A modern Introduction*, Cambridge University Press, 1997.
- [5] do Carmo, M. P., *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 1988.
- [6] Escobar, J. F., *An Isoperimetric Inequality and the First Non-zero Steklov Eigenvalue*, J. Functional Analysis. **165** (1999), 101-116.
- [7] Escobar, J. F., *The geometry of the first non-zero Stekloff eigenvalue*, J. Functional Analysis. **150** (1997), 544-556.
- [8] Escobar, J. F., *Topics en PDE'S and Differential Geometry*, XII Escola de Geometria Diferencial, 2002.
- [9] Hersch, J., Payne, L. E., Schiffer, M. M., *Some Inequalities for Stekloff Eigenvalue*, Arch. Rational Mech. Anal. **57** (1975), 99-114.
- [10] Morgan, F., *Riemannian Geometry: A Beginner's Guide*, A. K. Peters, 1997.
- [11] Protter, M. H., Weinberger H. F., *Maximum Principles in Differential Equations*, Springer Verlag, 1984.
- [12] Schoen, R., Yau, S. T., *Lectures on Differential Geometry*, International Press Inc, Boston, vol. 1. 1994.
- [13] Stekloff, M. W., *Sur Les Problèmes Fondamentaux de la Physique Mathématique*, Ann. Sci. École Norm, Sup. **19** (1902), 455-490.
- [14] Weil, A., *Sur Les Surfaces on Courbure Negative*, C. R. Acad. Sci. Paris 182,(1926) 1096-1071.

- [15] Weinstock, R., *Inequalities for a classical eigenvalue problem*, J, Rational Mech. Anal. **3** (1954), 745-753.