Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Dissertação de Mestrado

Estabilidade de Variações que Preservam Área em Formas Espaciais

Arlyson Alves do Nascimento

Maceió, Brasil
23 de Abril 2009

Arlyson Alves do Nascimento

Estabilidade de Variações que Preservam Área em Formas Espaciais

Dissertação de Mestrado na área de concentração de Geometria Diferencial submetida em 23 de Abril de 2009 à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Prof° Dr. Fernando Enrique Echaiz Espinoza

Maceió
2009

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

N244e Nascimento, Arlyson Alves do.
Estabilidade de variações que preservam área em formas espaciais / Arlyson Alves do Nascimento, 2009.
99 f. : il.

Orientador: Fernando Enrique Echaiz Espinoza.
Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2009.

Bibliografia: f. 97-98.

1. R-ésima. 2. Curvatura média. R-estáveis. 4. Variações que preservam área. 5. Imersão isométrica. 6. Geometria diferencial. I. Título.

CDU: 514.7

Estabilidade de Variações que Preservam Área em Formas Espaciais

Dissertação de Mestrado na área de concentração de Geometria Diferencial submetida em 23 de Abril de 2009 à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Fernando Enrique Echaiz Espinoza (UFAL) (Orientador)

Prof. Dr. Henrique Fernandes de Lima (UFCG)

Prof Dr. Marcos Petrúcio de Almeida Cavalcante (UFAL)

... querer o meu,
não é roubar o seu,
pois o que eu quero,
é só função de eu ...

(Novo aeon - Raul Seixas).

A Deus
e Aos meus pais.

Agradecimentos

Primeiramente, a Deus por tudo.

Ao professor Fernando Enrique Echaiz Espinoza, meu orientador, por esses anos de orientação acadêmica, pela confiança depositada em mim, pela grande amizade e, finalmente, por ter me ajudado a crescer como pessoa e como profissional.

Aos professores Henrique Fernandes, Marcos Petrúcio e Hilario Alencar pelas valiosas correções e sugestões dadas para melhoria desta dissertação.

Aos professores do Mestrado Vinícius Mello, Krerley Oliveira, Ediel Azevedo, Adán Corcho e Guadalupe Reis pela pela contribuição em minha formação acadêmica.

Aos meus amigos do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFAL, Alex Santana, Borges, Carlos Alberto, Darliton Cezário, Erickson Fonseca, Everson Fernando, Fabio Boia, Isnaldo Barbosa, Leandro Favacho, Leonardo, Priscila Santos.

Aos meus amigos e professores Marcius Petrúcio e Márcio Henrique, um agradecimento todo especial pelas importantes dúvidas esclarecidas, as quais deram firmeza a vários argumentos matemáticos desta dissertação.

Aos meus amigos Askery Alexandre, José Eduardo, André Pizzaia e Daniel Nicolau pela força dada, assim como também agradeço a, Gelsivânio Souza, Daniel lemos, Isaura Maria e Rinaldo.

Sou muito grato aos professores Adonai Pereira Seixas e Adroaldo Durvillé pelos cursos ministrados durante a graduação e as dúvidas esclarecidas durante minha formação matemática.

A todos os professores do Instituto de Matemática da UFAL que colaboraram com minha formação matemática, em especial aos profesores Francisco Potiguar, Sinvaldo Gama, José Carlos e Arnon Tavares.

Agradeço a todas as amizades que eu fiz na Ufal, aos companheiros de festa e diversão, agradeço também aos meus companheiros de banda (Absurdos) pela paciência e confiança.

E, finalmente, aos meus padrinhos Silvio Pimentel e Maria do Amparo de coração por todo o carinho e apoio dado até hoje, aos meus irmãos Anderson e Anne e em especial aos meus pais Antônio e Jô.

À Fundação de Amparo à pesquisa do Estado de Alagoas - FAPEAL - pelo apoio financeiro.

Resumo

O objetivo desta dissertação é estudar as hipersuperfícies compactas sem bordo e imersas em *formas espaciais* com $\frac{S_{r+1}}{S_1}$ constante, onde S_{r+1} é a $(r+1)$-ésima função simétrica das curvaturas principais. Tais hipersuperfícies são os pontos críticos de um problema variacional que preserva área. Demonstraremos que tais imersões são r-estáveis se, e somente se, elas forem hipersuperfícies totalmente umbílicas.

Palavras-chave: r-ésima curvatura média, r-estáveis, variações que preservam área.

Abstract

In this dissertation, we deal with compact hypersurfaces without boundary immersed in space forms such that $\frac{S_{r+1}}{S_1}$ is constant. They are critical points for an area-preserving variational problem. We show that they are r-stable if and only if they are totally umbilical hypersurfaces.

Key Words: rth mean curvatures, r-stability, Area-preserving variation.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O trabalho aqui realizado baseia-se no artigo de autoria de Yijun He e Haizhong Li [18]. Considere $\mathbf{M}^n$ como sendo uma variedade Riemanniana n dimensional, conexa, orientada, compacta e sem bordo. Seja $\overline{\mathbf{M}}^{n+1}(c)$ o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$, um hemisfério aberto de $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ ou o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$, de acordo com $c = 0, 1$ ou -1, respectivamente e $x : \mathbf{M}^n \longrightarrow \overline{\mathbf{M}}^{n+1}(c)$ uma imersão isométrica. A r-ésima curvatura média H_r é definida por $H_r = S_r/\binom{n}{r}$, onde S_r é a r-ésima função simétrica elementar. Claramente H_1 é a curvatura média H.

O problema variacional que preserva volume tem sido estudado por muitos autores (consulte [1-8]). É bem sabido que imersões com curvatura média constante são pontos críticos para o problema variacional de minimizar o funcional área mantendo o balanço do volume zero. Uma solução local para este problema variacional diz-se estável. Este conceito foi introduzido por Barbosa, do Carmo e Eschenburg em [8].

Para imersões de hipersuperfícies com a $(r+1)$-ésima curvatura média constante em formas espaciais, Alencar, do Carmo e Rosenberg estudaram o caso de $\mathbb{R}^{n+1}$ em [3], Barbosa e Colares estudaram o caso de um hemisfério aberto de $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ e o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ em [5].

Estas hipersuperfícies são os pontos críticos de um problema variacional de minimizar um funcional do tipo

$$\mathcal{A}_r = \int_{\mathbf{M}} F_r(S_1, \ldots, S_r) d\mathbf{M},$$

mantendo o balanço do volume zero, onde F_r é uma função adequada.

Para o estudo desse problema Y. He e H. Li [18] introduziram o conceito de r-estabilidade de hipersuperfícies o qual generaliza o conceito de estabilidade dado em [8]. Outro problema variacional para hipersuperfícies envolvendo funções de $S_1, \ldots, S_r$ pode ser encontrada em [23].

Nesta dissertação cosideraremos hipersuperfícies orientadas, compactas, conexas e sem bordo em $\overline{\mathbf{M}}^{n+1}(c)$ com curvatura média positiva e $\frac{S_{r+1}}{S_1}$ constante. Veremos que a imersão é r-estável se, e somente se, é totalmente umbilica; no caso em que $c = 0$ o resultado vale para qualquer r, enquanto para $c \neq 0$ o resultado é somente válido para r par (veja [18]).

Capítulo 2

Preliminares

O objetivo deste capítulo é dar um breve resumo de alguns resultados fundamentais da Geometria Riemanniana, que serão utilizados neste trabalho. O conceito de variedade diferenciável serve para estender os métodos do cálculo diferencial a espaços mais gerais que o $\mathbb{R}^n$, baseados nesta noção apresentaremos a noção de campo de vetores, variedade Riemanniana, conexão afim, aplicação exponencial, curvatura, imersões isométricas, gradiente, divergente, laplaciano, hessiano. Maiores detalhes podem ser encontrados em [16],[15] e [12].

2.1 Definições

Definição 2.1.1. *Um campo de vetores X em uma variedade diferenciável $\mathbf{M}$ é uma correspondência que a cada ponto $p \in \mathbf{M}$ associa um vetor $X(p) \in T_p\mathbf{M}$, onde $T_p\mathbf{M}$ é o plano tangente a $\mathbf{M}$ no ponto p. O campo é diferenciável se a aplicação $X : \mathbf{M} \longrightarrow T\mathbf{M}$ é diferenciável, onde $T\mathbf{M}$ é chamado de fibrado tangente de $\mathbf{M}$ que é a união disjunta dos espaços tangentes a $\mathbf{M}$ em todos os pontos de $\mathbf{M}$ (isto é, $T\mathbf{M} = \bigcup_{p\in\mathbf{M}} T_p\mathbf{M}$).*

Definição 2.1.2. *Uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável $\mathbf{M}^n$ é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in \mathbf{M}$ um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ no espaço tangente $T_p\mathbf{M}$, tal que: se $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbf{M}$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p, com $\mathbf{x}(x_1, \dots, x_n) = q \in \mathbf{x}(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx(0, \dots, \underbrace{1}_{i}, \dots, 0)$, então para cada $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q$ é uma função diferenciável em U.*

Definição 2.1.3. *As funções $g_{ij} := \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle$ são chamadas componentes da métrica Riemanniana no sistema de coordenadas $\boldsymbol{x} : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbf{M}^n$. Uma variedade diferenciável com uma métrica Riemanniana é chamada variedade Riemanniana.*

Definição 2.1.4. *Seja $\mathcal{X}(\mathbf{M})$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em $\mathbf{M}$ e $\mathcal{D}(\mathbf{M})$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em $\mathbf{M}$. Uma conexão afim ∇ em*

$\mathbf{M}$ *é uma aplicação*

$$\nabla : \mathcal{X}(\mathbf{M}) \times \mathcal{X}(\mathbf{M}) \longrightarrow \mathcal{X}(\mathbf{M})$$

tal que, $\forall\ X, Y, Z \in \mathcal{X}(\mathbf{M})$ *e* $\forall\ f, g \in \mathcal{D}(\mathbf{M})$*, tem-se*

(i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_X Z$

(ii) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

(iii) $\nabla_X fY = f\nabla_X Y + X(f)Y.$

Definição 2.1.5. *Dizemos que uma conexão afim* ∇ *em uma variedade diferenciável* $\mathbf{M}$ *é simétrica se*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],\ \forall\ X, Y \in \mathcal{X}(\mathbf{M}).$$

Dizemos que uma conexão afim ∇ em uma variedade Riemanniana $\mathbf{M}$ é compatível com a métrica se

$$X \langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \forall\ X, Y, Z \in \mathcal{X}(\mathbf{M}).$$

O próximo Teorema é fundamental em Geometria Riemanniana.

Teorema 2.1.1 (Levi-Civita)**.** *Dada uma variedade Riemanniana* $\mathbf{M}$*, existe uma única conexão afim* ∇ *em* $\mathbf{M}$ *que é simétrica e compatível com a métrica Riemanniana.*

Demonstração. Ver [16], página 61. ∎

Tal conexão é denominada conexão de Levi-Civita (ou Riemanniana) de $\mathbf{M}$.

2.2 Aplicação exponencial

Uma curva α em M é uma *geodésica* em $t \in I$ se $\frac{D}{dt}\alpha'(t) = 0$.

Antes de definir a aplicação exponencial, lembraremos um resultado que é uma consequência direta do Teorema de existência e unicidade de equações diferenciais ordinárias:

Proposição 2.2.1. *Dados* $p \in \mathbf{M}$ *e* $v \in T_p\mathbf{M}$*, existe uma única geodésica* $\alpha : I \longrightarrow \mathbf{M}$ *tal que* $\alpha(0) = p$ *e* $\alpha'(0) = v$*, onde* $I \subset \mathbb{R}$ *é um intervalo contendo o zero.*

Se $v \in T_p\mathbf{M}$, vamos denotar por γ_v a única geodésica de $\mathbf{M}$ que passa por $p \in \mathbf{M}$ com vetor velocidade $v \in T_p\mathbf{M}$.

Seja $\Sigma_p = \{v \in T_p\mathbf{M};\ \gamma_v$ está definida num intervalo contendo $[0, 1]\}$.

Definição 2.2.1. *A aplicação* $\exp_p : \Sigma_p \longrightarrow \mathbf{M}$*, definida por* $\exp_p(v) = \gamma_v(1)$*, é denominada aplicação exponencial.*

Proposição 2.2.2. *As seguintes propriedades são satisfeitas:*

1. *para cada $v \in T_p\mathbf{M}$, a geodésica γ_v é dada por $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$, para todo $t \in \mathbb{R}$ onde os dois lados estão definidos;*

2. *a aplicação $\exp_p$ é diferenciável.*

Demonstração. Ver [16], página 71. ■

Proposição 2.2.3. *Para todo $p \in \mathbf{M}$, existem uma vizinhança V da origem de $T_p\mathbf{M}$ e uma vizinhança U de p, tais que $\exp_p : V \longrightarrow U$ é um difeomorfismo.*

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned} d(\exp_p)_0(v) &= \frac{d}{dt}(\exp_p(tv))\Big|_{t=0}, \\ &= \frac{d}{dt}(\gamma_v(t))\Big|_{t=0}, \\ &= \gamma_v'(0), \\ &= v. \end{aligned}$$

Logo, $d(\exp_p)_0$ é a identidade de $T_p\mathbf{M}$, segue-se então do Teorema da função inversa que $\exp_p$ é um difeomorfismo local numa vizinhança de 0 em $T_p\mathbf{M}$. ■

O aberto U dado pela proposição anterior é chamado *vizinhança normal* de p.

2.3 Curvatura

Considere $\mathbf{M}$ uma variedade Riemanniana de dimensão n e de classe C^∞, seja ∇ sua conexão Riemanniana e $T_p\mathbf{M}$ o espaço tangente a $\mathbf{M}$ em p.

Definição 2.3.1. *O tensor de curvatura R de $\mathbf{M}$ é a aplicação que a cada par $X, Y \in \mathcal{X}(\mathbf{M})$ associa a correspondência*

$$R(X,Y) : \mathcal{X}(\mathbf{M}) \longrightarrow \mathcal{X}(\mathbf{M})$$

dada por

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z, \forall\ Z \in \mathcal{X}(\mathbf{M}).$$

Proposição 2.3.1. *O tensor de curvatura R de uma variedade Riemanniana goza das seguintes propriedades:*

(i) R é bilinear em $\mathcal{X}(\mathbf{M}) \times \mathcal{X}(\mathbf{M})$.

(ii) $\forall\ X, Y \in \mathcal{X}(\mathbf{M})$, o tensor curvatura $R(X,Y) : \mathcal{X}(\mathbf{M}) \longrightarrow \mathcal{X}(\mathbf{M})$ é linear.

Proposição 2.3.2. *O tensor de curvatura R satisfaz as seguintes propriedades para todo $X, Y, Z, T \in \mathcal{X}(\mathbf{M})$:*

(i) $\langle R(X,Y)Z,T\rangle + \langle R(Y,Z)X,T\rangle + \langle R(Z,X)Y,T\rangle = 0$;

(ii) $\langle R(X,Y)Z,T\rangle = -\langle R(Y,X)Z,T\rangle$;

(iii) $\langle R(X,Y)Z,T\rangle = -\langle R(X,Y)T,Z\rangle$;

(iv) $\langle R(X,Y)Z,T\rangle = \langle R(Z,T)X,Y\rangle$.

Para um espaço vetorial V com produto interno $\langle , \rangle$, dados dois vetores linearmente independentes $x, y \in V$,

$$|x \wedge y| = \sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x,y\rangle^2}$$

é a área do paralelogramo gerado por $\{x, y\}$.

Pode-se verificar que, se $\sigma \subset T_p\mathbf{M}$ é um subespaço de dimensão 2 com base $\{x, y\}$, então

$$K(x,y) = \frac{\langle R(x,y)x,y\rangle}{|x \wedge y|^2}$$

só depende de σ.

Definição 2.3.2. *Considere $p \in \mathbf{M}$ e seja $\sigma \subset T_p\mathbf{M}$ um subespaço de dimensão 2.*

$$K(\sigma) := K(x,y),$$

é chamada de curvatura seccional de σ em $\mathbf{M}$ no ponto p, onde $\{x, y\}$ é uma base qualquer de σ.

Usaremos a notação $\mathbf{M}^n(c)$ para indicar as variedades com curvatura seccional constante c de dimensão n. Uma variedade Riemanniana de curvatura seccional constante que seja completa e simplesmente conexa é chamada de *forma espacial*.

Note que quando multiplicamos uma métrica Riemanniana por uma constante positiva c, então a sua curvatura seccional é multiplicada por $\frac{1}{c}$.

A esfera $\mathbb{S}^n(r)$ para $r > 0$ é definida por

$$\mathbb{S}^n(r) = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \langle x,x\rangle = r^2\right\},$$

onde $\langle ., .\rangle$ denota o produto interno canônico de $\mathbb{R}^{n+1}$, o qual mune $\mathbb{S}^n(r)$ como uma métrica Riemanniana. Pode-se provar que $\mathbb{S}^n(r)$ tem curvatura $\dfrac{1}{r^2}$.

Antes de dar um modelo para o espaço hiperbólico definamos para cada $0 \leq s \leq n$:

$$\mathbb{R}^{n,s} := \left\{\mathbb{R}^n \text{ munido com a forma bilinear: } b^{n,s}(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = -\sum_{i=1}^{s} x_i y_i + \sum_{j=s+1}^{n} x_j y_j\right\},$$

onde $\overrightarrow{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e $\overrightarrow{y} = (y_1, \dots, y_n)$. Pode-se verificar que $b^{n,s}$ é uma forma bilinear simétrica não degenerada.

O espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n(r)$ para $r < 0$ é definido por

$$\mathbb{H}^n(r) = \left\{ \overrightarrow{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1,1}; \langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{x} \rangle = -r^2, x_0 > 0 \right\},$$

onde $\langle ., . \rangle$ é a métrica pseudo-Riemannian definida por

$$\langle v, w \rangle = -v_0 w_0 + \sum_{i=1}^{n} v_i w_i.$$

Pode-se provar que $\mathbb{H}^n(r)$ tem curvatura $-\dfrac{1}{r^2}$.

Seja $\mathbf{M}^n$ uma *forma espacial* com curvatura seccional constante $c \in \mathbb{R}$. Então o recobrimento universal $\tilde{\mathbf{M}}$ de $\mathbf{M}$, com a métrica do recobrimento é isometrico a

$$\begin{cases} \mathbb{S}^n\left(\dfrac{1}{\sqrt{c}}\right) & \text{para } c > 0; \\ \mathbb{R}^n & \text{para } c = 0; \\ \mathbb{H}^n\left(\dfrac{1}{\sqrt{-c}}\right) & \text{para } c < 0. \end{cases}$$

(Cf. Cap. 8, página 181 do [16]).

2.4 Imersões isométricas

Seja $x : \mathbf{M}^n \longrightarrow \overline{\mathbf{M}}^{n+k}$ uma imersão, isto é, x é uma aplicação diferenciável e $dx_p : T_p\mathbf{M} \longrightarrow T_{x(p)}\overline{\mathbf{M}}$ é injetiva para todo $p \in \mathbf{M}$. Se $\overline{\mathbf{M}}$ tem uma métrica Riemanniana, x induz uma métrica Riemanniana em $\mathbf{M}$, dada por

$$\langle u, v \rangle_p := \langle dx_p(u), dx_p(v) \rangle_{x(p)}, \ u, v \in T_p\mathbf{M}.$$

Com efeito, como dx_p é injetiva, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é positivo definido. As demais condições da definição de métrica Riemanniana podem ser facilmente verificadas.

A métrica de $\mathbf{M}$ é então chamada a *métrica induzida por x* e a aplicação x é dita uma *imersão isométrica*. Pelo teorema da forma local das imersões, dado $p \in \mathbf{M}$ existe um aberto $\mathcal{U} \ni p$ de $\mathbf{M}$ tal que $x|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \longrightarrow \overline{\mathbf{M}}$ é um mergulho, ou seja, $x(\mathcal{U})$ é uma subvariedade de $\overline{\mathbf{M}}$; por este resultado é natural identificar os pontos de $\mathcal{U}$ com os pontos de $x(\mathcal{U})$ pensando x como uma inclusão. Com está identificação, o $T_p\mathbf{M}$ é identificado com $dx_p(T_p\mathbf{M})$, ou seja, identificamos $v \in T_p\mathbf{M}$ com $dx_p(v)$.

Tomando a métrica induzida em $\mathbf{M}$, x torna-se uma isometria local e $x|_{\mathcal{U}}$ torna-se isometria sobre $x(\mathcal{U})$. Com isto a aplicação dx_p pode ser considerada como a inclusão ou $T_p\mathbf{M}$ ser considerado como subespaço vetorial do espaço vetorial $T_{x(p)}\overline{\mathbf{M}}$. Para cada $p \in \mathbf{M}$ tem-se,

$$T_p\overline{\mathbf{M}} = T_p\mathbf{M} \oplus (T_p\mathbf{M})^{\perp},$$

onde $(T_p\mathbf{M})^\perp$ é o complemento ortogonal de $T_p\mathbf{M}$ em $T_p\overline{\mathbf{M}}$. Com isto, para cada $X \in T_p\overline{\mathbf{M}}$, existem unicos $v \in T_p\mathbf{M}$ e $w \in (T_p\mathbf{M})^\perp$ tal que $X = v + w$. Chamaremos v a componente tangencial de X e w a componente normal de X.

Consideremos $\overline{\nabla}$ como sendo a conexão Riemanniana de $\overline{\mathbf{M}}$. Denotemos por ∇ a conexão Riemanniana em $\mathbf{M}$ induzida pela sua métrica. Prova-se que

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^\top, \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(\mathbf{M}),$$

onde $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ são extensões locais em $\overline{\mathbf{M}}$. Verifica-se que está é a conexão Riemanniana relativa a métrica induzida em $\mathbf{M}$.

Por outro lado, para X, Y campos vetoriais locais em $\mathbf{M}$ definimos a aplicação

$$\alpha(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y,$$

onde $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ são extensões locais de X e Y, respectivamente, em $\overline{\mathbf{M}}$. A aplicação α está bem definida e independe da extensão escolhida(veja [16], pag. 126), também prova-se que α é bilinear e simétrica.

Se ξ é campo normal unitário num aberto $\mathcal{U} \subset \mathbf{M}$ e $X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{U})$, definimos uma forma bilinear e simétrica $H_\xi : T_p\mathbf{M} \times T_p\mathbf{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$H_\xi(X, Y) = \langle \alpha(X, Y), \xi \rangle.$$

A forma quadrática II_ξ, definida em $T_p\mathbf{M}$ por

$$II_\xi(X) = H_\xi(X, X),$$

é chamada segunda forma fundamental da imersão x segundo o vetor normal ξ; à forma H_ξ está associada a um operador linear auto-adjunto $A_\xi : T_p\mathbf{M} \longrightarrow T_p\mathbf{M}$ por

$$\langle A_\xi(X), Y \rangle = H_\xi(X, Y).$$

Dados $p \in \mathbf{M}$, $X \in T_p\mathbf{M}$ e $\xi \in (T_p\mathbf{M})^\perp$, vale a seguinte igualdade:

$$A_\xi(X) = -(\overline{\nabla}_X \xi)^\top.$$

Além disso, a componente normal de $\overline{\nabla}_X \xi$ é chamada a conexão normal $\nabla^\perp$ da imersão, de modo que temos a seguinte igualdade:

$$\nabla^\perp_X \xi = (\overline{\nabla}_X \xi)^N = \overline{\nabla}_X \xi - (\overline{\nabla}_X \xi)^\top = \overline{\nabla}_X \xi + A_\xi(X).$$

Observação 2.4.1. *Se a codimensão for* 1 *podemos dispensar o índice* ξ. *Então,*

$$A(X) = -(\overline{\nabla}_X \xi)^\top,$$

onde A *é chamado operador forma.*

Por outro lado, consideremos $x : \mathbf{M}^n \longrightarrow \overline{\mathbf{M}}^{n+k}$ uma imersão isométrica e seja $\{e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}, \ldots, e_{n+k}\}$, um referencial ortogonal tangente a $\overline{\mathbf{M}}$ numa vizinhança de $p \in \mathbf{M}^n$, adaptado a $\mathbf{M}$, ou seja, com $\{e_1, \ldots, e_n\}$ tangente a $\mathbf{M}^n$e $\{e_{n+1}, \ldots, e_{n+k}\}$ normal à $\mathbf{M}$. Certamente, para cada campo normal N sobre $\mathbf{M}^n$ tem-se

$$\langle A_N(X), Y\rangle = H_N(X,Y) = \langle \alpha(X,Y), N\rangle.$$

Podemos expressar $\alpha(X,Y)$ da seguinte forma

$$\alpha(X,Y) = \sum_{\theta=n+1}^{n+k} h^\theta(X,Y)\ e_\theta.$$

Denotemos por

$$h^\theta_{ij} = h^\theta(e_i, e_j), \quad i,j = 1, \ldots, n,$$

isto é,

$$h^\theta_{ij} = \langle \alpha(e_i, e_j), e_\theta\rangle = \langle A_{e_\theta}(e_i), e_j\rangle,$$

com $i,j = 1, \ldots, n$ e $\theta = n+1, \ldots, n+k$. Podemos notar que sendo A_{e_θ} auto-adjunta, segue-se que $h^\theta_{ij} = h^\theta_{ji}$.

Para cada θ fixado, $\theta = n+1, \ldots, n+k$ e $p \in \mathbf{M}$, a matriz $(h^\theta_{ij}(p))$ é chamada *Matriz da Segunda Forma Fundamental* relativa a e_θ em relação a base $\{e_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, no ponto p. No caso em que $k = 1$, temos a seguinte igualdade:

$$\left\langle \overline{\nabla}_{e_i} e_j, \xi \right\rangle = h_{ij}.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}
\langle e_j, \xi\rangle &= 0, \ \forall\ i,j = 1, 2, \ldots, n \\
e_i \langle e_j, \xi\rangle &= 0, \\
\left\langle \overline{\nabla}_{e_i} e_j, \xi \right\rangle + \left\langle e_j, \overline{\nabla}_{e_i}\xi \right\rangle &= 0 \\
\left\langle \overline{\nabla}_{e_i} e_j, \xi \right\rangle &= -\left\langle e_j, \overline{\nabla}_{e_i}\xi \right\rangle \\
&= -\left\langle e_j, \overline{\nabla}_{e_i}{}^{\top}\xi + \overline{\nabla}_{e_i}{}^{\perp}\xi \right\rangle \\
&= -\left\langle e_j, \overline{\nabla}_{e_i}{}^{\top}\xi \right\rangle - \left\langle e_j, \overline{\nabla}_{e_i}{}^{\perp}\xi \right\rangle \\
&= \left\langle e_j, -\overline{\nabla}_{e_i}{}^{\top}\xi \right\rangle = \langle e_j, Ae_i\rangle \\
\left\langle \overline{\nabla}_{e_i} e_j, \xi \right\rangle &= h_{ij}.
\end{aligned}$$

As equações básicas para subvariedades são: a equação de Gauss, de Codazzi e Ricci. A seguir enunciaremos as equações de Gauss e Codazzi, dando como referência o texto [14].

Proposição 2.4.1. *(Equação de Gauss)*

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \left\langle \overline{R}(X,Y)Z,W\right\rangle + \langle \alpha(X,W),\alpha(Y,Z)\rangle - \langle \alpha(X,Z),\alpha(Y,W)\rangle,$$

onde R e $\overline{R}$ são os tensores de curvatura de $\mathbf{M}$ e $\overline{\mathbf{M}}$, respectivamente. Em particular, se $K(X,Y) = \langle R(X,Y)Y,X\rangle$ e $\overline{K}(X,Y) = \left\langle \overline{R}(X,Y)Y,X\right\rangle$ denotam as curvaturas seccionais em $\mathbf{M}$ e $\overline{\mathbf{M}}$ do plano gerado pelos vetores ortonormais $X,Y \in T_p\mathbf{M}$, a equação de Gauss toma a forma

$$K(X,Y) = \overline{K}(X,Y) + \langle \alpha(X,X),\alpha(Y,Y)\rangle - \|\alpha(X,Y)\|^2.$$

No caso em que $\overline{\mathbf{M}}$ é uma *forma espacial* , isto é, $\overline{\mathbf{M}}(c)$, a equação de Gauss toma a forma:

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = c\,\langle (X\wedge Y)Z,W\rangle + \langle \alpha(X,W),\alpha(Y,Z)\rangle - \langle \alpha(X,Z),\alpha(Y,W)\rangle.$$

Proposição 2.4.2. *(Equação de Codazzi)*

$$\left(\overline{R}(X,Y)Z\right)^{\perp} = \left(\nabla^{\perp}_X\alpha\right)(Y,Z) - \left(\nabla^{\perp}_Y\alpha\right)(X,Z),$$

onde por definição

$$\left(\nabla^{\perp}_X\alpha\right)(Y,Z) = \nabla^{\perp}_X\alpha(Y,Z) - \alpha(\nabla_X Y,Z) - \alpha(Y,\nabla_X Z).$$

No caso em que $\overline{\mathbf{M}}$ é uma *forma espacial* , isto é, $\overline{\mathbf{M}}(c)$, a equação de Codazzi toma a seguinte forma:

$$\nabla_X A(Y,\xi) = \nabla_Y A(X,\xi).$$

2.5 Operadores diferenciais sobre variedades Riemannianas.

2.5.1 Gradiente

Definição 2.5.1. *Seja $f \in \mathcal{D}(\mathbf{M})$. O gradiente de f, denotado por grad f, é o único campo vetorial em $\mathbf{M}$ dado pela seguinte condição:*

$$\langle grad\ f, X\rangle := X(f) = df(X), \forall\ X \in \mathcal{X}(\mathbf{M}).$$

Da definição tem-se

(i) $grad\ (f+g) = grad\ f + grad\ g \quad \forall\ f,g \in \mathcal{D}(\mathbf{M})$.

Com efeito,

$$\begin{aligned}\langle grad\ (f+g), X\rangle &= X(f+g),\\ &= X(f)+X(g),\\ &= \langle grad\ f, X\rangle + \langle grad\ g, X\rangle,\\ &= \langle grad\ f + grad\ g, X\rangle.\end{aligned}$$

(ii) $grad\ (fg) = f\ grad\ g + g\ grad\ f \quad \forall\ f, g \in \mathcal{D}(\mathbf{M})$.

De fato,

$$\begin{aligned}
\langle grad\ (fg), X\rangle &= X(fg),\\
&= f\, X(g) + g\, X(f),\\
&= f\langle grad\ g, X\rangle + g\langle grad\ f, X\rangle,\\
&= \langle f\ grad\ g, X\rangle + \langle g\ grad\ f, X\rangle,\\
&= \langle f\ grad\ g + g\ grad\ f, X\rangle.
\end{aligned}$$

Observação 2.5.1. *(Referencial móvel) Sejam $\mathbf{M}^n$ uma variedade Riemanniana de dimensão n, e $p \in \mathbf{M}$. Então existem uma vizinhança $U \subset \mathbf{M}$ de p e n campos de vetores $e_1, \cdots, e_n \in \mathcal{X}(U)$, tais que $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$, $\forall\ i, j = 1, \cdots, n$. O conjunto $\{e_1, \cdots, e_n\}$ é chamado de referencial ortonormal local, se além de disso $(\nabla_{e_i}\ e_j)_{(p)} = 0$, $\forall\ i, j = 1, \cdots, n$, então dizemos que $\{e_1, \cdots, e_n\}$ é um referencial geodésico em p.*

Proposição 2.5.1. *Se $\{e_1, \cdots, e_n\}$ é um referencial ortonormal local em $\mathbf{M}$, então*

$$grad\ f = \sum_{i=1}^{n} e_i(f)e_i. \tag{2.1}$$

Demonstração. Escrevendo grad $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, temos que

$$e_j(f) = \langle \text{grad } f, e_j\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, e_j\rangle = \alpha_j.$$

Logo,

$$\text{grad } f = \sum_{i=1}^{n} e_i(f)e_i.$$

■

2.5.2 Divergente

Definição 2.5.2. *Seja $\mathbf{M}$ uma variedade Riemanniana munida da conexão ∇. Para cada $X \in \mathcal{X}(M)$ definimos o divergente de X, denotado por div X, dada por*

$$\begin{array}{rccl}
div: & \mathcal{X}(\mathbf{M}) & \longrightarrow & C^\infty(\mathbf{M}, \mathbb{R})\\
& X & \longmapsto & (div\ X)_{(p)} := \text{traço}\ (Y \longmapsto \nabla_Y X),\ \text{onde } Y \in T_p\mathbf{M}.
\end{array}$$

Decorre da definição que, para quaisquer $X, Z \in \mathcal{X}(\mathbf{M})$ e qualquer $f \in \mathcal{D}(\mathbf{M})$:

(i) $div\ (X+Z) = div\ (X) + div\ (Z)$.

Com efeito,

$$\begin{aligned} div\ (X+Z) &= tra\c{c}o\ (Y \longmapsto \nabla_Y(X+Z)), \\ &= tra\c{c}o\ (Y \longmapsto \nabla_Y X + \nabla_Y Z), \\ &= tra\c{c}o\ (Y \longmapsto \nabla_Y X) + tra\c{c}o\ (Y \longmapsto \nabla_Y Z), \\ &= div\ (X) + div\ (Z). \end{aligned}$$

(ii) $div\ (fX) = f div\ (X) + \langle grad\ f, X\rangle$.

De fato, pois

$$\begin{aligned} div\ (fX) &= tra\c{c}o\ (Y \longmapsto \nabla_Y(fX)), \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle e_i, \nabla_{e_i}(fX)\right\rangle, \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle e_i, f\nabla_{e_i}X + e_i(f)X\right\rangle, \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle e_i, f\nabla_{e_i}X\right\rangle + \sum_{i=1}^{n} \left\langle e_i, e_i(f)X\right\rangle, \\ &= f\sum_{i=1}^{n} \left\langle e_i, \nabla_{e_i}X\right\rangle + \sum_{i=1}^{n} \left\langle e_i(f)e_i, X\right\rangle, \\ &= f[tra\c{c}o\ (Y \longmapsto \nabla_Y X)] + \left\langle \sum_{i=1}^{n} e_i(f)e_i, X\right\rangle, \\ &= f div\ (X) + \left\langle grad\ f, X\right\rangle. \end{aligned}$$

Proposição 2.5.2. *Se* $X = \sum_{i=1}^{n} X_i e_i$, *onde* $\{e_1, \cdots, e_n\}$ *é um referencial ortonormal local em* $\mathbf{M}$, *então*

$$\text{div } X = \sum_{i=1}^{n}(e_i(X_i) - \langle\nabla_{e_i}e_i, X\rangle). \tag{2.2}$$

Demonstração. Temos,

$$\begin{aligned} \text{div } X &= \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{e_i}X, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{e_i}(\sum_{j=1}^{n}X_j e_j), e_i\rangle, \\ &= \sum_{i,j=1}^{n}\langle e_i(X_j)e_j, e_i\rangle + \sum_{i,j=1}^{n}X_j\langle\nabla_{e_i}e_j, e_i\rangle. \end{aligned}$$

Como $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, tem-se que

$$0 = e_i\langle e_i, e_j\rangle = \langle \nabla_{e_i} e_i, e_j\rangle + \langle e_i, \nabla_{e_i} e_j\rangle,$$

ou seja,

$$\langle \nabla_{e_i} e_i, e_j\rangle = -\langle e_i, \nabla_{e_i} e_j\rangle.$$

Daí,

$$\begin{aligned}\text{div } X &= \sum_{i=1}^{n} e_i(X_i) - \sum_{i,j=1}^{n} X_j \langle \nabla_{e_i} e_i, e_j\rangle,\\ &= \sum_{i=1}^{n} e_i(X_i) - \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} e_i, \sum_{i=1}^{n} X_j e_j\rangle.\end{aligned}$$

Logo,

$$\text{div } X = \sum_{i=1}^{n} (e_i(X_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, X\rangle).$$

■

Teorema 2.5.1. *(Da divergência I) Seja X um campo vetorial $C^1(\mathbf{M})$ em $\mathbf{M}$ com suporte compacto, sem nenhuma condição sobre a orientabilidade de $\mathbf{M}$ temos:*

$$\int_{\mathbf{M}} div\ (X) dV = 0.$$

Demonstração. Ver [12], página 149. ■

2.5.3 O operador de Laplace

Definição 2.5.3. *Seja $\mathbf{M}$ uma variedade Riemanniana munida da conexão ∇. O operador de Laplace, define-se por*

$$\begin{array}{rccl}\Delta : & \mathcal{D}(\mathbf{M}) & \longrightarrow & \mathcal{D}(\mathbf{M}) \\ & f & \longmapsto & \Delta f := div\ (grad\ f).\end{array}$$

Decorre das propriedades do gradiente e do divergente que:

(i) $\Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g$.

Com efeito,

$$\begin{aligned}\Delta(f+g) &= div\ (grad\ (f+g)),\\ &= div\ (grad\ f + grad\ g),\\ &= div\ (grad\ f) + div\ (grad\ g),\\ &= \Delta f + \Delta g.\end{aligned}$$

(ii) $\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \ grad\ f,\ \ grad\ g\rangle$, *para quaisquer* $f, g \in \mathcal{D}(\mathbf{M})$.

De fato, pois

$$\begin{aligned}
\Delta(fg) &= div\ (\ grad\ (fg)),\\
&= div\ (f\ \ grad\ g + g\ \ grad\ f),\\
&= div\ (f\ \ grad\ g) + div\ (g\ \ grad\ f),\\
&= f div\ (\ grad\ g) + \langle\ grad\ f,\ \ grad\ g\rangle + g div\ (\ grad\ f) + \langle\ grad\ g,\ \ grad\ f\rangle\,,\\
&= f\Delta g + g\Delta f + 2\langle\ grad\ f,\ \ grad\ g\rangle.
\end{aligned}$$

Proposição 2.5.3. *Se* $\{e_1, \cdots, e_n\}$ *é um referencial ortonormal local em* $\mathbf{M}$*, então*

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n}(e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i}e_i)(f)).$$

Demonstração. Por definição

$$\Delta f = \text{div}\ (\ \text{grad}\ f),$$

por (2.2) e usando 2.1:

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n}(e_i(e_i(f)) - \langle\nabla_{e_i}e_i, \text{grad}\ f\rangle)$$

da definição de gradiente

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n}(e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i}e_i)(f)).$$

■

2.5.4 Hessiano

Definição 2.5.4. *Seja* $\mathbf{M}$ *uma variedade Riemanniana munida da conexão* ∇ *e* $f \in \mathcal{D}(\mathbf{M})$*. Definimos o Hessiano de* f *em* $p \in \mathbf{M}$*, denotado por* $(Hessf)_p$ *como o operador linear* $(Hessf)_p : T_p\mathbf{M} \longrightarrow T_p\mathbf{M}$*, dado por:*

$$(Hessf)X = \nabla_X grad\ f,\ \forall\ X \in T_p\mathbf{M}.$$

Verifica-se que $\langle (Hessf)_pX, Y\rangle = \langle X, (Hessf)_pY\rangle$*, mostrando que o* $(Hessf)_p$ *é auto-adjunto e portanto determina uma forma bilinear simétrica em* $T_p\mathbf{M}$*.*

$$Hess\ f_p(X, Y) = \langle \nabla_X grad\ f_p, Y\rangle.$$

Observemos que

$$\text{Hess } f_p(X,Y) = \langle \nabla_X \text{grad } f_p, Y\rangle;$$

por ser a conexão compatível com a métrica, num ponto $p \in \mathbf{M}$, temos:

$$\text{Hess } f(X,Y) = X\langle \text{grad } f, Y\rangle - \langle \text{grad } f, \nabla_X Y\rangle;$$

mas sabemos que $\langle \text{grad } f, Z\rangle = Z(f), \quad \forall Z \in \mathcal{X}(\mathbf{M})$, de onde:

$$\text{Hess } f(X,Y) = X(Y(f)) - (\nabla_X Y)(f).$$

Em particular se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é um referencial geodésico num ponto $p \in \mathbf{M}$,

$$\text{Hess } f(e_i, e_j) = e_i(e_j(f)) - (\nabla_{e_i} e_j)(f).$$

Portanto,

$$\text{Hess } f_p(e_i, e_j) = e_i(e_j(f))_p,$$

denotando Hess $f_p(e_i, e_j)$ por f_{ij}, segue-se que

$$f_{ij}(p) = \text{Hess } f_p(e_i, e_j) = e_i(e_j(f))_p.$$

2.6 Operadores lineares elípticos de segunda ordem

Um multi-indice é um vetor $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ satisfazendo $\alpha_i \in \mathbb{Z}^+$. Quando α e β denotam multi-indices usaremos a notação $\alpha \geq \beta$ para indicar que $\alpha_i \geq \beta_i$ para cada i. Para qualquer multi-indice α define-se:

$$\begin{aligned} |\alpha| =& \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n; \\ \alpha! =& \alpha_1!\, \alpha_2!\, \ldots \alpha_n!. \end{aligned}$$

Por outro lado, para qualquer $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, define-se

$$\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1}\, x_2^{\alpha_2}\, \ldots\, x_n^{\alpha_n}.$$

Usaremos a seguinte notação para escrever equações diferenciais parciais

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\, \partial x_2^{\alpha_2}\, \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Por exemplo quando $\alpha = (1, 2)$, temos

$$D^{\alpha}\, u = \frac{\partial^3 u}{\partial x_1\, \partial x_2^2},$$

onde $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função.

Considere agora um operador diferencial linear

$$L(\mathbf{x}, D)u = \sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha}(\mathbf{x})\, D^{\alpha} u, \tag{2.3}$$

onde $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Com este operador agindo em funções vamos associar-lhe um operador algebrico, chamado de o simbolo.

Definição 2.6.1. *O simbolo da expressão $L(\mathbf{x}, D)$, definida em (2.3) é*

$$L(\mathbf{x}, i\xi) := \sum_{|\alpha| = m} a_{\alpha}(\mathbf{x})\, (i\xi)^{\alpha}.$$

A parte principal do simbolo define-se por

$$L^p(\mathbf{x}, i\xi) := \sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha}(\mathbf{x})\, (i\xi)^{\alpha}.$$

O simbolo nos diz como um operador diferencial age nas funções que tem seu suporte contido numa pequena vizinhança do ponto $\mathbf{x}$. Se os coeficientes são suaves, então eles são aproximadamente constantes naquela pequena vizinhança. Por outro lado, se a função u varia rapidamente, então suas derivadas de maior ordem dominam sobre as derivadas de menor ordem, logo a parte principal contem os termos mais importantes. A classificação das equações diferenciais parciais em classes baseia-se na parte principal do simbolo.

Agora, seja Ω um conjunto aberto e não vazio de $\mathbb{R}^n$. Diz-se que um operador linear em derivadas parciais é de ordem dois, se é da forma:

$$L\, u(z) := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(z)\, \partial_j \big(a_{ij}(z)\, \partial_i\, u(z)\big) + \sum_{i=1}^{n} b_i(z)\, \partial_i\, u(z) + c(z)\, u(z) \tag{2.4}$$

ou

$$L\, u(z) := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(z)\, \partial_i \partial_j\, u(z) + \sum_{i=1}^{n} b_i(z)\, \partial_i\, u(z) + c(z)\, u(z), \tag{2.5}$$

onde $a_{ij}, b_i, c : \Omega \to \mathbb{R}$ são funções mensuráveis
$u \in C^2(\Omega)$ e $z \in \Omega$. O operador que é da forma (2.4) chama-se de operador na forma "divergente" e o operador que é da forma (2.5) chama-se de operador na forma "não divergente". Observamos ainda que se as funções a_{ij} são funções $C^1(\Omega)$, então um operador dado na forma divergente pode ser expressado na forma de não divergente, e reciprocamente.

Sem perda de generalidade, podemos supor que $a_{ij}(z) = a_{ji}(z)$, de forma que a matriz

$$A(z) := \Big(a_{ij}\Big)_{i,j=1,\cdots,n}$$

é simétrica. L diz-se elíptico em Ω se $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(z)\,\xi_i\,\xi_j > 0$ para todo $z \in \Omega$ e para todo $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$. Para qualquer $z \in \Omega$ existe

$$\lambda(z) := \min\{a_{ij}(z)\,\xi_i\,\xi_j\ ;\ |\xi| = 1\},$$

$\lambda(z)$ deve ser positivo (na verdade é o menor auto-valor de $A(z)$). De modo que podemos expressar a elipticidade, na seguinte forma: o operador L é elíptico em $z \in \Omega$ se existe um número $\lambda(z) > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(z)\,\xi_i\,\xi_j \geq \lambda(z)\,|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Diremos que L é elíptico em Ω, se é elíptico em cada $z \in \Omega$ e diremos que o operador L é uniformemente elíptico em Ω, se existe uma constante $\lambda_0 > 0$ tal que $\lambda(z) \geq \lambda_0$ para cada $z \in \Omega$.

Observação 2.6.1. *É possivel demonstrar que Δ é auto–adjunto relativo a $C^2(\mathbf{M}, g)$ e que é eliptico.*

Seja $\mathbf{M}$ uma variedade conexa, com fecho compacto e fronteira suave. O *problema de Dirichlet* de auto-valores consiste em encontrar todos os números reais λ tais que exista uma solução não trivial $\varphi \in C^2(\mathbf{M}) \bigcap C^0(\overline{\mathbf{M}})$ satisfazendo

$$\begin{cases} \Delta\varphi + \lambda\varphi & = 0 \\ \varphi_{|\partial\mathbf{M}} & = 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

O *Espetro de uma variedade Riemanniana* $(\mathbf{M}, g)$ para o problema 2.6 é o conjunto

$$\mathrm{Spec}(\mathbf{M}) = \{\lambda \in \mathbb{R};\ \exists\varphi \in C^2(\mathbf{M}) \cap C^0(\overline{\mathbf{M}}) \text{ satisfazendo } 2.6\}$$

Os números $\lambda \in$ Spec$(\mathbf{M})$ são chamados de auto-valores e as soluções associadas aos λ são as auto-funções.

Proposição 2.6.1. *O espectro de uma variedade Riemanniana é discreto iniciando-se com o valor 0 e tendo $+\infty$ como seu único ponto de acumulação, será conveniente listar os auto-valores da seguinte forma $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ com repetições apropriadas para os casos degenerados, cada auto–valor neste espectro tem multiplicidade finita. As auto–funções associadas a estes auto–valores são funções C^∞.*
Seja $\mathcal{E}_j$ o auto–espaço correspondente ao auto–valor λ_j, então $\dim \mathcal{E}_j < +\infty$ e $\mathcal{E}_j$ é subspaço de $C^\infty(\mathbf{M})$.
Podemos escolher os auto–espaços $\mathcal{E}_j$ de modo que formem uma base ortonormal para $C^2(\mathbf{M}, g)$ e a soma direta destes espaços é todo $C^2(\mathbf{M}, g)$.

Demonstração: Veja [9]. ■

Capítulo 3

O operador L_r

3.1 Identidades de Newton

Definição 3.1.1. *As somas de potências $w_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, são definidas por*

$$w_r(\mathbf{X}) = w_r(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{i=1}^{n} (x_i)^r,$$

e observe que $w_0(\mathbf{X}) = n$.

A próxima proposição relacionará as funções $w_r(\mathbf{X})$ com as funções simétricas $S_k(\mathbf{X})$.

Proposição 3.1.1 (Identidades de Newton). *Dado $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$, então:*

$$\begin{aligned}
w_1(\mathbf{X}) &= S_1(\mathbf{X}),\\
w_2(\mathbf{X}) &= S_1(\mathbf{X})w_1(\mathbf{X}) - 2S_2(\mathbf{X}),\\
w_3(\mathbf{X}) &= S_1(\mathbf{X})w_2(\mathbf{X}) - S_2(\mathbf{X})w_1(\mathbf{X}) + 3S_3(\mathbf{X}),\\
&\ \ \vdots \qquad\qquad\quad \vdots
\end{aligned}$$

em geral,

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{r-1} (-1)^k S_k(\mathbf{X}) w_{r-k}(\mathbf{X}) + (-1)^r r S_r(\mathbf{X}) = 0 & , \text{ se } 1 \leq r \leq n, \\ \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k S_k(\mathbf{X}) w_{r-k}(\mathbf{X}) = 0 & , \text{ se } r > n. \end{cases}$$

Demonstração. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(t) = \prod_{j=1}^{n} (1 + tx_j) = 1 + S_1(\mathbf{X})t + S_2(\mathbf{X})t^2 + \cdots + S_n(\mathbf{X})t^n,$$

onde $\mathbf{X} = (x_1, \ldots, x_n)$.

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{d}{dt}\log g(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dt}\log(1 + tx_j) = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{1 + tx_j}$$

usando que $\dfrac{x_j}{1 + tx_j} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \ (x_j)^{k+1} \ t^k$, temos

$$\begin{aligned} \frac{g'(t)}{g(t)} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \ (x_j)^{k+1} \ t^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \ w_{k+1}(\mathbf{X}) \ t^k. \end{aligned}$$

Donde,

$$g'(t) = \left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \ w_{k+1}(\mathbf{X}) \ t^k\right) g(t).$$

Também temos,

$$g'(t) = S_1(\mathbf{X}) + 2S_2(\mathbf{X})t + \cdots + nS_n(\mathbf{X})t^{n-1}.$$

Comparando os coeficientes das potências de t^k obtemos as identidades de Newton. ■

3.2 Os polinômios de Newton.

Definição 3.2.1. *Seja A um operador auto-adjunto. O r-ésimo polinômio simétrico associado a A, é a função $S_r : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$S_r = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad r = 0 \\ \displaystyle\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n} k_{i_1} \ldots k_{i_n}, & \text{se} \quad r \in \{1, \cdots, n\} \\ 0, & \text{se} \quad r \in \ \mathbb{Z} - \{0, \cdots, n\}, \end{cases}$$

onde $k_1, \cdots, k_n$ são os auto-valores do operador auto-adjunto A.

Seja A um operador auto-adjunto e considere $\{e_1, \cdots, e_n\}$ uma base ortonormal de A, isto é, $Ae_i = k_i e_i$.

Define-se

$$A_i := A\Big|_{span\{e_i\}^{\perp}} \quad ,$$

isto é, A_i é a restrição de A ao subespaço normal a e_i.

Denotamos por $S_r(A_i)$ a r-ésima função simétrica associada a A_i. Pode-se verificar que

$$S_{r+1}(A_i) = S_{r+1} - k_i S_r(A_i). \tag{3.1}$$

Definição 3.2.2. *Seja $x : \mathbf{M}^n \to \overline{\mathbf{M}}^{n+1}$ uma imersão isométrica e A a segunda forma fundamental de x. Para cada $r \in \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$ definimos de forma recursiva os polinômios de Newton $P_r : T_p\mathbf{M} \to T_p\mathbf{M}$, por:*

$$\begin{aligned} P_0 &= I \\ P_1 &= S_1 I - A \\ &\vdots \\ P_r &= S_r I - AP_{r-1}, r > 1. \end{aligned}$$

Segue-se da fórmula de recorrêcia dada acima que

$$P_r = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j S_{r-j} A^j.$$

Proposição 3.2.1. *Seja $x : \mathbf{M}^n \to \overline{\mathbf{M}}^{n+1}$ uma imersão isométrica entre duas variedades Riemannianas e seja A o operador linear associado à segunda forma fundamental. Os polinômios de Newton associado a A satisfazem:*

(a) $P_r(e_i) = S_r(A_i)\ e_i$; *para cada* $1 \leq i \leq n$;

(b) *traço*$(P_r) = (n-r)S_r$;

(c) *traço*$(AP_r) = (r+1)S_{r+1}$;

(d) *traço*$(AP_r) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k S_r(A_k)$;

(e) *traço*$(A^2 P_r) = S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2}$;

(f) *traço*$(A^2 P_r) = \sum_{k=1}^{n} {\lambda^2}_k S_r(A_k)$.

Demonstração. a) Faremos a prova por indução sobre r. Para $r = 1$, temos $P_1 = S_1 I - A$. Portanto,

$$\begin{aligned} P_1(e_i) &= S_1 e_i - Ae_i, \\ &= S_1 e_i - k_i e_i, \\ &= (S_1 - k_i)e_i, \\ &= (k_1 + \cdots + \widehat{k_i} + \cdots + k_n), \\ &= S_1(A_i)e_i. \end{aligned}$$

Suponhamos que vale para $r-1$, isto é, $P_{r-1}(e_i) = S_{r-1}(A_i)e_i$. Então

$$\begin{aligned}
P_r(e_i) &= S_r e_i - AP_{r-1}e_i, \\
&= S_r e_i - A(S_{r-1}(A_i)e_i), \\
&= (S_r - S_{r-1}(A_i)k_i)e_i, \\
&= S_r(A_i)e_i.
\end{aligned}$$

b) Seja λ_k um auto-valor e v_k seu correspondente auto-vetor associado a segunda forma fundamental A (isto é, $Av_k = \lambda_k v_k$, com $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$); pela definição do traço de um operador temos:

$$\begin{aligned}
\text{traço } (P_r) &= \sum_{k=1}^{n} \langle P_r v_k, v_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle \sum_{j=0}^{r} (-1)^j S_{r-j} A^j v_k, v_k \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \ S_{r-j} \ \lambda_k^j \ \langle v_k, v_k \rangle \\
&= \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \ S_{r-j} \left(\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k)^j \right) = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \ S_{r-j} w_j(A) \\
&= nS_r + \sum_{j=1}^{r} (-1)^j \ S_{r-j} w_j(A) \\
&= nS_r + \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^{r-k} S_k w_{r-k}(A) \quad (\text{fizemos } k = r - j) \\
&= nS_r + (-1)^r \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k S_k w_{r-k}(A).
\end{aligned}$$

Usando as identidades de Newton

$$\sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k S_k w_{r-k}(A) = -(-1)^r r S_r$$

temos:

$$\text{traço } (P_r) = nS_r + (-1)^r(-1)(-1)^r r S_r = (n-r)S_r.$$

c) Da identidade $P_{r+1} = S_{r+1}I - AP_r$, segue-se que $AP_r = S_{r+1}I - P_{r+1}$. Tomando o traço, temos que

$$\begin{aligned}
\text{traço}(AP_r) &= S_{r+1}\text{traço}(I) - \text{traço}(P_{r+1}), \\
&= nS_{r+1} - \text{traço}(P_{r+1}).
\end{aligned}$$

Usando a parte (b) obtemos

$$\begin{aligned}
\text{traço}(AP_r) &= nS_{r+1} - (n - (r+1))S_{r+1}, \\
&= (n - n + r + 1)S_{r+1}, \\
&= (r+1)S_{r+1}.
\end{aligned}$$

d) Seja λ_k um auto-valor e v_k seu correspondente auto-vetor associado a segunda forma fundamental A (isto é, $Av_k = \lambda_k v_k$, com $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$); pela definição do traço de um operador temos:

$$\begin{aligned}
\text{traço}(AP_r) &= \sum_{k=1}^{n} \langle AP_r v_k, v_k \rangle , \\
&= \sum_{k=1}^{n} \langle P_r v_k, Av_k \rangle , \\
&= \sum_{k=1}^{n} \langle S_r(A_k) v_k, \lambda_k v_k \rangle , \\
&= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k S_r(A_k) \langle v_k, v_k \rangle , \\
&= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k S_r(A_k).
\end{aligned}$$

e) Da identidade $P_{r+1} = S_{r+1}I - AP_r$, segue-se que $AP_{r+1} = S_{r+1}A - A^2P_r$.
Assim, temos que $A^2P_r = S_{r+1}A - AP_{r+1}$. Tomando o traço, temos que

$$\begin{aligned}
\text{traço}(A^2P_r) &= S_{r+1}\text{traço}(A) - \text{traço}(AP_{r+1}), \\
&= S_{r+1}S_1 - [(r+1)+1]S_{(r+1)+1}, \\
&= S_1S_{r+1} - (r+2)S_{r+2}.
\end{aligned}$$

f) Seja λ_k um auto-valor e v_k seu correspondente auto-vetor associado a segunda forma fundamental A (isto é, $Av_k = \lambda_k v_k$, com $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$); pela definição do traço de um operador temos:

$$\begin{aligned}
\text{traço}(A^2P_r) &= \sum_{k=1}^{n} \left\langle A^2 P_r v_k, v_k \right\rangle , \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left\langle P_r v_k, A^2 v_k \right\rangle , \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left\langle S_r(A_k) v_k, {\lambda^2}_k v_k \right\rangle ,
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} {\lambda^2}_k S_r(A_k) \langle v_k, v_k \rangle ,$$
$$= \sum_{k=1}^{n} {\lambda^2}_k S_r(A_k).$$

o que completa a demonstração. ■

3.3 O operador L_r

Definição 3.3.1. *Considere $\mathbf{M}^n$ uma variedade orientável conexa e diferenciável e $x : \mathbf{M}^n \to \overline{\mathbf{M}}^{n+1}$ uma imersão isométrica. Define-se o operador diferencial de segunda ordem*

$$L_r : C^\infty(\mathbf{M}, \mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbf{M}, \mathbb{R})$$

em cada ponto $p \in \mathbf{M}^n$, como sendo:

$$L_r(f)_{(p)} = \begin{cases} \textit{traço}\Big(\big(P_r \; \textit{Hess}(f)\big)_{(p)}\Big) & , \; r \in \{0, \cdots, n-1\}; \\ 0 & , \; r \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \cdots, n-1\}; \end{cases}$$

onde A é a segunda forma fundamental associada a um campo vetorial normal unitário N globalmente definido.

Esse operador foi introduzido por Cheng e Yau (Veja [13]). Na literatura este operador é chamado o operador L_r. (Veja [5], [22])

Lema 3.3.1. *Seja $x : \mathbf{M}^n \longrightarrow \overline{\mathbf{M}}^{n+1}(c)$ uma imersão isométrica, então temos que*

$$\textit{traço } (u \longmapsto \nabla_u P_r \; e_i) = \textit{traço } (u \longmapsto \nabla_{_{P_r u}} \; e_i),$$

onde $\{e_i\}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ é um referencial ortonormal numa vizinhança de um ponto p fixado.

Demonstração. Para todo $u \in T_p\mathbf{M}$, temos

$$\nabla_{P_r u} \; e_k = \nabla_{\sum_{j=0}^{r}(-1)^j S_{r-j} A^j u} \; e_k,$$
$$= \sum_{j=0}^{r} (-1)^j S_{r-j} \nabla_{(A^j u)} \; e_k,$$

como $u \in T_p\mathbf{M}$, então $u = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$, assim

$$
\begin{aligned}
\nabla_{P_r u}\ e_k &= \sum_{j=0}^{r}(-1)^j S_{r-j}\nabla_{(A^j\sum_{i=1}^{n} a_i e_i)}\ e_k,\\
&= \sum_{j=0}^{r}(-1)^j S_{r-j}\nabla_{(\sum_{i=1}^{n} a_i A^j e_i)}\ e_k,
\end{aligned}
$$

mas $A^j e_i = {\lambda_i}^j e_i$, então

$$
\begin{aligned}
\nabla_{P_r u}\ e_k &= \sum_{j=0}^{r}(-1)^j S_{r-j}\nabla_{(\sum_{i=1}^{n} a_i {\lambda_i}^j e_i)}\ e_k,\\
&= \sum_{j=0}^{r}(-1)^j S_{r-j}\sum_{i=1}^{n} a_i {\lambda_i}^j \nabla_{e_i}\ e_k,
\end{aligned}
$$

como $\nabla_{e_i}\ e_k = 0$, então

$$\nabla_{P_r u}\ e_k = 0.$$

Portanto,

$$\text{traço } (u \longmapsto \nabla_{P_r u}\ e_i) = 0.$$

Logo nossa Proposição é equivalente a mostrar que

$$\text{traço } (u \longmapsto \nabla_u P_r\ e_i) = 0.$$

Portanto,

$$
\begin{gathered}
\text{traço } (u \longmapsto \nabla_u P_r\ e_i) = \text{traço } (u \longmapsto \nabla_{P_r u}\ e_i)\\
\Updownarrow\\
\text{traço } (u \longmapsto \nabla_u P_r\ e_i) = 0.
\end{gathered}
$$

Por outro lado $P_r = S_r I - P_{r-1}A$, então

$$
\begin{gathered}
\text{traço } (u \longmapsto \nabla_u P_r\ e_i) = 0\\
\Updownarrow\\
\text{traço } (u \longmapsto \nabla_u (S_r I - P_{r-1}A) e_i) = 0\\
\Updownarrow\\
\text{traço } (u \longmapsto \nabla_u S_r e_i) = \text{traço } (u \longmapsto \nabla_u P_{r-1}A e_i).
\end{gathered}
$$

De onde temos as seguintes equivalências:

$$
\begin{gathered}
\text{traço } (u \longmapsto \nabla_u P_r\ e_i) = \text{traço } (u \longmapsto \nabla_{P_r u}\ e_i) \qquad (I)\\
\Updownarrow
\end{gathered}
$$

$$\text{traço } (u \longmapsto \nabla_u P_r \; e_i) = 0 \qquad (II)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{traço } (u \longmapsto \nabla_u S_r e_i) = \text{traço } (u \longmapsto \nabla_u P_{r-1} A e_i). \qquad (III)$$

A prova do nosso Lema será feita por indução.

(i) Vejamos o caso $r = 1$ e para esté caso provaremos a identidade (III).

Para $r = 1$, devemos mostrar que

$$\text{traço } (u \longmapsto \nabla_u S_1 e_k = \text{traço } (u \longmapsto \nabla_u A e_k) = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, \nabla_{e_i} A e_k \rangle$$

Como e_i diagonaliza a segunda forma fundamental (isto é, $Ae_i = \lambda_i e_i$), o fato do referencial ser geodésico e usando a equação de codazzi, temos que:

$$\begin{aligned}
\text{traço } (u \longmapsto \nabla_u A e_k) &= \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, \nabla_{e_i} A e_k \rangle, \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, \nabla_{e_k} A e_i \rangle, \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, \nabla_{e_k} \lambda_i e_i \rangle, \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, \lambda_i \nabla_{e_k} e_i + e_k(\lambda_i) e_i \rangle, \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, \lambda_i \nabla_{e_k} e_i \rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, e_k(\lambda_i) e_i \rangle, \\
&= 0 + \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, e_k(\lambda_i) e_i \rangle, \\
&= \sum_{i=1}^{n} e_k(\lambda_i) \langle e_i, e_i \rangle, \\
&= \sum_{i=1}^{n} e_k(\lambda_i), \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \text{grad } \lambda_i, e_k \rangle,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{traço } (u \longmapsto \nabla_u A e_k) &= \left\langle \text{grad } (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i), e_k \right\rangle, \\
&= \langle \text{grad } (S_1), e_k \rangle, \\
&= e_k(S_1).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\text{traço } (u \longmapsto \nabla_u S_1 e_k) &= \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, \nabla_{e_i} S_1 e_k \rangle, \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, S_1 \nabla_{e_i} e_k + e_i(S_1) e_k \rangle, \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, S_1 \nabla_{e_i} e_k \rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, e_i(S_1) e_k \rangle, \\
&= 0 + \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, e_i(S_1) e_k \rangle, \\
&= \sum_{i=1}^{n} e_i(S_1) \langle e_i, e_k \rangle, \\
&= e_k(S_1) \langle e_k, e_k \rangle, \\
&= e_k(S_1).
\end{aligned}$$

Isto mostra que

$$\text{traço } (u \longmapsto \nabla_u S_1 e_k = \text{traço } (u \longmapsto \nabla_u A e_k).$$

(ii) vamos supor que vale para $r-1$, isto significa que as identidades (I), (II) e (III) são todas validas para $r-1$.

(iii) Vamos mostrar que vale para r.

Vamos verificar que vale para a identidade (III). Por um lado,

$$\text{traço } (u \longmapsto \nabla_u S_r e_k) = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, \nabla_{e_i} S_r e_k \rangle,$$

mas $(\nabla_{e_i} S_r) e_k = \nabla_{e_i} S_r e_k - S_r \nabla_{e_i} e_k$.

Por ser referencial gedésico $\nabla_{e_i} e_k = 0$, então

$$(\nabla_{e_i} S_r) e_k = \nabla_{e_i} S_r e_k.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\text{traço } (u \longmapsto \nabla_u S_r e_k) &= \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, (\nabla_{e_i} S_r) e_k \rangle, \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{e_i} S_r) \langle e_i, e_k \rangle, \\
&= \nabla_{e_k} S_r \langle e_k, e_k \rangle, \\
&= \nabla_{e_k} S_r.
\end{aligned}$$

Falta mostrar que

$$\text{traço } (u \longmapsto \nabla_u P_{r-1} A e_k) = \nabla_{e_k} S_r.$$

Mas,

$$\text{traço } (u \longmapsto \nabla_u P_{r-1} A e_k) = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, \nabla_{e_i} P_{r-1} A e_k \rangle,$$

como nossa identidade (I) é valida para $r-1$, temos que

$$\sum_{i=1}^{n} \langle e_i, \nabla_{e_i} P_{r-1} A e_k \rangle = \sum_{i=1}^{n} \left\langle e_i, \nabla_{P_{r-1} e_i} A e_k \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, P_{r-1} \nabla_{e_i} A e_k \rangle.$$

Por ser um referencial geodésico e usando codazzi temos que

$$\sum_{i=1}^{n} \langle e_i, P_{r-1} \nabla_{e_i} A e_k \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, P_{r-1} \nabla_{e_k} A e_i \rangle.$$

Assim,

$$\text{traço } (u \longmapsto \nabla_u P_{r-1} A e_k) = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, P_{r-1} \nabla_{e_k} A e_i \rangle,$$

onde nos resta mostrar que

$$\sum_{i=1}^{n} \langle e_i, P_{r-1} \nabla_{e_k} A e_i \rangle = \nabla_{e_k} S_r,$$

como P_{r-1} é auto-adjunto, então

$$\sum_{i=1}^{n} \langle e_i, P_{r-1} \nabla_{e_k} A e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle P_{r-1} e_i, \nabla_{e_k} A e_i \rangle,$$

mas $P_{r-1}e_i = S_{r-1}(A_i)e_i$ e $A_i = \lambda_i e_i$, então

$$\sum_{i=1}^{n} \langle P_{r-1}e_i, \nabla_{e_k} Ae_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle S_{r-1}(A_i)e_i, \nabla_{e_k} \lambda_i e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} S_{r-1}(A_i) \langle e_i, \nabla_{e_k} \lambda_i e_i \rangle ,$$

mas $(\nabla_{e_k}\lambda_i)e_i = \nabla_{e_k}\lambda_i e_i - \lambda_i \nabla_{e_k} e_i$.
Por ser referencial geodésico $\nabla_{e_k} e_i = 0$, então

$$(\nabla_{e_k}\lambda_i)e_i = \nabla_{e_k}\lambda_i e_i.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \langle e_i, P_{r-1}\nabla_{e_k} Ae_i \rangle &= \sum_{i=1}^{n} S_{r-1}(A_i) \langle e_i, (\nabla_{e_k}\lambda_i)e_i \rangle , \\
&= \sum_{i=1}^{n} S_{r-1}(A_i)(\nabla_{e_k}\lambda_i) \langle e_i, e_i \rangle , \\
&= \sum_{i=1}^{n} S_{r-1}(A_i)(\nabla_{e_k}\lambda_i), \\
&= \nabla_{e_k} S_r.
\end{aligned}$$

Assim, fica provado o nosso Lema.

■

Proposição 3.3.1. *Seja* $x : \mathbf{M}^n \longrightarrow \overline{\mathbf{M}}^{n+1}(c)$ *uma imersão isométrica, então temos que*

$$\textit{traço } (u \longmapsto \nabla_u P_r \ v) = \textit{traço } (u \longmapsto \nabla_{P_r u} \ v),$$

onde u *e* v *são campos diferenciais em* $\mathbf{M}$*.*

Demonstração. Já que nosso Lema é verdadeiro para um e_k vejamos que ele é válido para um λe_k, assim pela propriedade das conexões,

$$\nabla_{P_r u}\lambda e_k = \lambda \nabla_{P_r u} e_k + (P_r u)(\lambda) e_k,$$

de onde,

$$\begin{aligned}
\text{traço } (u \longmapsto \nabla_{P_r(u)} \ \lambda e_k) &= \text{traço } (u \longmapsto \lambda \nabla_{P_r u} e_k + (P_r u)(\lambda) e_k), \\
&= \text{traço } (u \longmapsto \lambda \nabla_{P_r u} e_k) + \text{traço } (u \longmapsto (P_r u)(\lambda) e_k), \\
&= \lambda \text{ traço } (u \longmapsto \nabla_{P_r u} e_k) + \text{traço } (u \longmapsto (P_r u)(\lambda) e_k),
\end{aligned}$$

pelo Lema anterior, temos

$$\begin{aligned}\text{traço } (u \longmapsto \nabla_{P_r(u)}\ \lambda e_k) =& \lambda \text{ traço } (u \longmapsto \nabla_u P_r e_k) + \text{traço } (u \longmapsto (P_r u)(\lambda) e_k),\\ =& \text{ traço } (u \longmapsto \lambda \nabla_u P_r e_k) + \text{traço } (u \longmapsto (P_r u)(\lambda) e_k),\end{aligned}$$

mas por definição,

$$\begin{aligned}\text{traço } (u \longmapsto (P_r u)(\lambda) e_k) &= \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, (P_r e_i)(\lambda) e_k \rangle\,,\\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, \langle \text{grad } \lambda, P_r e_i \rangle\, e_k \rangle\,.\end{aligned}$$

Mas $P_r e_i = S_r(A_i) e_i$, então

$$\begin{aligned}\text{traço } (u \longmapsto (P_r u)(\lambda) e_k) &= \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, \langle \text{grad } \lambda, S_r(A_i) e_i \rangle\, e_k \rangle\,,\\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, S_r(A_i) \langle \text{grad } \lambda, e_i \rangle\, e_k \rangle\,,\\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle S_r(A_i) e_i, \langle \text{grad } \lambda, e_i \rangle\, e_k \rangle\,,\\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle P_r e_i, \langle \text{grad } \lambda, e_i \rangle\, e_k \rangle\,,\end{aligned}$$

por ser P_r auto-adjunto, temos

$$\begin{aligned}\text{traço } (u \longmapsto (P_r u)(\lambda) e_k) &= \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, \langle \text{grad } \lambda, e_i \rangle\, P_r e_k \rangle\,,\\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, e_i(\lambda) P_r e_k \rangle\,,\\ &= \text{traço } (u \longmapsto u(\lambda) P_r e_k).\end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}\text{traço } (u \longmapsto \nabla_{P_r(u)}\ \lambda e_k) &= \text{traço } (u \longmapsto \lambda \nabla_u\ P_r e_k) + \text{traço } (u \longmapsto u(\lambda) P_r e_k),\\ &= \text{traço } (u \longmapsto \nabla_u\ \lambda P_r e_k),\\ &= \text{traço } (u \longmapsto \nabla_u\ P_r(\lambda e_k)).\end{aligned}$$

Finalmente para cada $v \in T_p\mathbf{M}$ temos que $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i e_i$, assim

$$
\begin{aligned}
\text{traço } (u \longmapsto \nabla_{P_r u}\ v) &= \text{traço } (u \longmapsto \nabla_{P_r u}\ \sum_{i=1}^{n} a_i e_i),\\
&= \sum_{i=1}^{n} \text{traço } (u \longmapsto \nabla_{P_r u}\ a_i e_i),\\
&= \sum_{i=1}^{n} \text{traço } (u \longmapsto \nabla_{u}\ P_r(a_i e_i)),\\
&= \text{traço } (u \longmapsto \nabla_{u}\ \sum_{i=1}^{n} P_r(a_i e_i)),\\
&= \text{traço } (u \longmapsto \nabla_{u}\ P_r(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i)),\\
&= \text{traço } (u \longmapsto \nabla_{u}\ P_r v).
\end{aligned}
$$

■

Quando a variedade ambiente é uma *forma espacial* $\overline{\mathbf{M}}(c)$ simplesmente conexa com curvatura seccional constante c, provaremos que $L_r(f) = \text{div }(P_r \text{ grad } f)$:

Teorema 3.3.1. *Sejam* $\mathbf{M}^n$ *uma variedade orientável conexa e diferenciável e* $x : \mathbf{M}^n \to \overline{\mathbf{M}}^{n+1}(c)$ *uma imersão isométrica. Para qualquer número inteiro* $r \in [0, n-1]$ *e qualquer função* $f \in \mathcal{D}(\mathbf{M})$*, tem-se*

$$
L_r(f)_{(p)} = div_{_M}\left(\left(P_r \quad grad_{_M}(f)\right)_{(p)}\right) \quad \forall p \in \mathbf{M},
$$

onde A *é a segunda forma fundamental associada a um campo vetorial normal unitário* N *globalmente definido.*

Demonstração.

$$
\begin{aligned}
L_r(f) &= \text{traço } (P_r\ Hessf)\\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, P_r\ Hessfe_i\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, P_r(\nabla_{e_i} \text{ grad } f)\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle P_r e_i, \nabla_{e_i} \text{ grad } f\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle S_r(A_i) e_i, \nabla_{e_i} \text{ grad } f\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, S_r(A_i)\nabla_{e_i} \text{ grad } f\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\langle e_i, \nabla_{S_r(A_i)e_i} \text{ grad } f\right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, \nabla_{P_r e_i} \text{ grad } f\rangle \\
&= \text{traço } (u \longmapsto \nabla_{P_r u} \text{ grad } f)
\end{aligned}
$$

pela Proposição 3.3.1, temos que

$$
\begin{aligned}
&= \text{traço } (u \longmapsto \nabla_u \ P_r \text{grad } f) \\
&= \text{div } (P_r \text{ grad } f).
\end{aligned}
$$

■

Observamos que

$$L_0(f) = \text{traço } (P_0 \ Hessf) = \text{traço } (Hessf) = \Delta f.$$

Podemos considerar L_r como uma extensão do Laplaciano.

Lema 3.3.2. ([5]) *Sejam* $\mathbf{M}$ *uma variedade Riemanniana de dimensão* n*, compacta e sem bordo. Considere* $x : \mathbf{M}^n \longrightarrow \overline{\mathbf{M}}^{n+1}(c)$ *uma imersão isométrica de* $\mathbf{M}$ *em uma forma espacial de dimensão* $n+1$ *e curvatura seccional* c*, então*

$$\int_{\mathbf{M}} L_r(f)d\mathbf{M} = 0, \quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathbf{M}); \tag{3.2}$$

e

$$\int_{\mathbf{M}} fL_r(g)d\mathbf{M} = -\int_{\mathbf{M}} \langle P_r grad\ f, grad\ g\rangle d\mathbf{M}, \quad \forall f, g \in \mathcal{D}(\mathbf{M}). \tag{3.3}$$

Demonstração.

$$\int_{\mathbf{M}} L_r(f)d\mathbf{M} = \int_{\mathbf{M}} \text{div } (P_r \text{ grad } f)d\mathbf{M},$$

a igualdade (3.2) segue-se diretamente do Teorema da Divergência.

$$\int_{\mathbf{M}} fL_r(g)d\mathbf{M} = \int_{\mathbf{M}} f \text{ div } (P_r \text{ grad } g)d\mathbf{M}$$

de f div $(X) =$ div $(fX) - \langle \text{grad } f, X\rangle$ segue-se que

$$\int\limits_{\mathbf{M}} fL_r(g)d\mathbf{M} = \int\limits_{\mathbf{M}} \{ \text{ div } (fP_r \text{ grad } g) - \langle \text{grad } f, P_r \ \text{ grad } g\rangle\}\, d\mathbf{M},$$

pelo Teorema da Divergência

$$\int\limits_{\mathbf{M}} fL_r(g)d\mathbf{M} = -\int\limits_{\mathbf{M}} \langle \text{grad } f, P_r \ \text{ grad } g\rangle\, d\mathbf{M}$$

como P_r é auto-adjunto

$$\int\limits_{\mathbf{M}} fL_r(g)d\mathbf{M} = -\int\limits_{\mathbf{M}} \langle P_r \text{ grad } f, \text{grad } g\rangle\, d\mathbf{M}.$$

■

Observação 3.3.1. *O Lema 3.3.2 também é válido quando* $\mathbf{M}$ *não for compacta, porém* f *tem suporte compacto.*

Proposição 3.3.2. *Considere* $\mathbf{M}^n$ *uma variedade orientável conexa e diferenciável e* $x : \mathbf{M}^n \to \overline{\mathbf{M}}^{n+1}$ *uma imersão isométrica, se* $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ *é um referencial geodésico num ponto* $p \in \mathbf{M}$, *então*

$$L_r(f)_{(p)} = \sum_{i,j} (Hessf)_{(p)}\,(e_i, e_j)\,\langle P_r e_i, e_j\rangle_p$$

Demonstração. Por definição

$$\begin{aligned} L_r(f)_{(p)} &= \text{traço } (P_r \ Hessf)_{(p)} \\ &= \sum_i \langle P_r \ Hessf \ e_i, e_i\rangle_p \\ &= \sum_i \langle Hessf \ e_i, P_r e_i\rangle_p \\ &= \sum_i \langle \nabla_{e_i} \text{ grad } f, P_r e_i\rangle_p \end{aligned}$$

mas grad $f = \sum\limits_j e_j(f)e_j$

$$\begin{aligned} &= \sum_i \left\langle \nabla_{e_i} \ \sum_j e_j(f)e_j, P_r e_i \right\rangle_p \\ &= \sum_{i,j} \langle \nabla_{e_i} e_j(f)e_j, P_r e_i\rangle_p \\ &= \sum_{i,j} \langle e_j(f)\nabla_{e_i} e_j + e_i(e_j(f))e_j, P_r e_i\rangle_p \end{aligned}$$

mas como o referencial é geodésico $\nabla_{e_i} e_j = 0$, assim

$$= \sum_{i,j} e_i(e_j(f)) \langle e_j, P_r e_i \rangle_p$$

mas sabemos que $Hessf_p(e_i, e_j) = e_i(e_j(f))$

$$= \sum_{i,j} (Hessf)_{(p)} (e_i, e_j) \langle P_r e_i, e_j \rangle_p.$$

■

Temos o seguinte Teorema:

Teorema 3.3.2. *Seja $x : \mathbf{M}^n \longrightarrow \overline{\mathbf{M}}^{n+1}(c)$ uma hipersuperfície com campo vetorial normal unitário N. Assim, temos que*

$$L_r(x) = (r+1) S_{r+1} N - c(n-r) S_r x,$$

e

$$L_r(N) = -\, grad\ (S_{r+1}) - (S_1 S_{r+1} - (r+2) S_{r+2}) N + c(r+1) S_{r+1} x. \tag{3.4}$$

Demonstração. Vejamos o caso $c = 0$, neste caso $x : \mathbf{M}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é uma imersão isométrica com campo vetorial normal unitário N. Seja $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}\}$ uma base ortonormal em $\mathbb{R}^{n+1}$ tangente a $\mathbf{M}$ numa vizinhança de um ponto $p \in \mathbf{M}$.

Dado $p \in \mathbf{M}$, podemos observar que $x(p) \in \mathbb{R}^{n+1}$, então $x(p) = \sum_k \alpha_k e_k$.

Assim, $\langle x(p), e_i \rangle = \sum_k \alpha_k \langle e_k, e_i \rangle = \sum_k \alpha_k \delta_{ki} = \alpha_i$.

Logo, $\alpha_i = \langle x(p), e_i \rangle$.

Desse modo, $x(p)$ fica escrito em coordenas na base $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}\}$ como:

$$x(p) = (\langle x(p), e_1 \rangle, \langle x(p), e_2 \rangle, \ldots, \langle x(p), e_{n+1} \rangle),$$

isto é,

$$x = (\langle x, e_1 \rangle, \langle x, e_2 \rangle, \ldots, \langle x, e_{n+1} \rangle).$$

Para cada $1 \leq i \leq n+1$, definamos $f_i := \langle x, e_i \rangle$.

Assim,

$$\begin{aligned} \langle \text{grad } f_i, X \rangle &= X(f_i), \\ &= \langle e_i, X \rangle + \left\langle \overline{\nabla}_X e_i, X \right\rangle, \ \forall\ X \in T\mathbf{M}, \end{aligned}$$

mas $\overline{\nabla}_X e_i = 0$, então

$$\begin{aligned}\langle \text{grad } f_i, X\rangle &= \langle e_i, X\rangle \\ &= \left\langle {e_i}^{\top} + {e_i}^{\perp}, X\right\rangle \\ &= \left\langle {e_i}^{\top}, X\right\rangle + \left\langle {e_i}^{\perp}, X\right\rangle\end{aligned}$$

mas $\left\langle {e_i}^{\perp}, X\right\rangle = 0$, então

$$\langle \text{grad } f_i, X\rangle = \left\langle {e_i}^{\top}, X\right\rangle, \ \forall\ X \in T\mathbf{M}.$$

Portanto,

$$\text{grad } f_i = {e_i}^{\top}.$$

Como

$$\mathbf{M}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}.$$

Temos,

$$\mathbb{R}^{n+1} = T_p\mathbf{M} \oplus [N].$$

Sendo $e_i = {e_i}^{\top} + \mu_i N$ e $e_i = {e_i}^{\top} + {e_i}^{\perp}$, temos que

$${e_i}^{\perp} = \mu_i N.$$

Desse modo,

$$\langle e_i, N\rangle = \left\langle {e_i}^{\top}, N\right\rangle + \mu_i \langle N, N\rangle.$$

Logo,

$$\mu_i = \langle e_i, N\rangle.$$

Portanto,

$${e_i}^{\perp} = \langle e_i, N\rangle N.$$

De modo que

$$e_i = {e_i}^{\top} + \langle e_i, N\rangle N.$$

Assim,

$$\text{grad } f_i = e_i - \langle e_i, N\rangle N. \tag{3.5}$$

Por outro lado, sabemos que $\forall\ X, Y \in T\mathbf{M}$

$$Hess\ f_i(X,Y) = \left\langle \overline{\nabla}_X \text{grad } f_i, Y\right\rangle. \tag{3.6}$$

Substituindo (3.5) em (3.6), temos que

$$\begin{aligned} Hess\ f_i(X,Y) &= \left\langle \overline{\nabla}_X (e_i - \langle e_i, N\rangle N), Y \right\rangle \\ &= \left\langle \overline{\nabla}_X e_i, Y \right\rangle - \left\langle \overline{\nabla}_X \langle e_i, N\rangle N, Y \right\rangle \end{aligned}$$

mas $\overline{\nabla}_X e_i = 0$, então

$$= - \left\langle \overline{\nabla}_X \langle e_i, N\rangle N, Y \right\rangle$$

Definamos $g_i := \langle e_i, N\rangle$, $\forall\ i = 1, 2, \ldots, n+1$, então

$$\begin{aligned} Hess\ f_i(X,Y) &= - \left\langle \overline{\nabla}_X\ g_i N, Y \right\rangle \\ &= - \left\langle g_i \overline{\nabla}_X N + X(g_i) N, Y \right\rangle \\ &= - g_i \left\langle \overline{\nabla}_X N, Y \right\rangle - X(g_i) \langle N, Y\rangle \end{aligned}$$

mas $\langle N, Y\rangle = 0$, então

$$\begin{aligned} &= - g_i \left\langle \overline{\nabla}_X N, Y \right\rangle \\ &= - g_i \left\langle \left(\overline{\nabla}_X N\right)^{\top} + \left(\overline{\nabla}_X N\right)^{\perp}, Y \right\rangle \\ &= - g_i \left\{ \left\langle \left(\overline{\nabla}_X N\right)^{\top}, Y \right\rangle + \left\langle \left(\overline{\nabla}_X N\right)^{\perp}, Y \right\rangle \right\} \end{aligned}$$

mas $\left\langle \left(\overline{\nabla}_X N\right)^{\perp}, Y \right\rangle = 0$, então

$$\begin{aligned} &= g_i \left\langle - \left(\overline{\nabla}_X N\right)^{\top}, Y \right\rangle \\ &= g_i \langle AX, Y\rangle, \end{aligned}$$

onde A é a segunda forma fundamental da imersão x.

Logo,

$$Hess\ f_i(X,Y) = g_i \langle AX, Y\rangle, \ \forall\ X, Y \in T\mathbf{M}.$$

Agora seja $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ um referencial geodésico no ponto $p \in \mathbf{M}$ que diagonaliza o operador A.

Portanto,

$$Hess\ f_i(E_k, E_l) = g_i \langle AE_k, E_l\rangle .$$

Pela Proposição 3.3.2, temos que

$$\begin{aligned} L_r(f_i)_{(p)} &= \sum_{k,l} (Hess\ f_i)_{(p)} (E_k, E_l) \langle P_r E_k, E_l\rangle_p \\ &= \sum_{k,l} g_i \langle AE_k, E_l\rangle \langle P_r E_k, E_l\rangle_p \end{aligned}$$

como $AE_k = \lambda_k E_k$ e pelo item (a) da Proposição 3.2.1, segue-se que

$$
\begin{aligned}
&= g_i \sum_{k,l} \langle \lambda_k E_k, E_l \rangle \langle S_r(A_k) E_k, E_l \rangle_p \\
&= g_i \sum_{k,l} \lambda_k S_r(A_k) \langle E_k, E_l \rangle^2{}_p \\
&= g_i \sum_{k,l} \lambda_k S_r(A_k) {\delta_{kl}}^2 \\
&= g_i \sum_{k} \lambda_k S_r(A_k)
\end{aligned}
$$

pelo item (d) da Proposição 3.2.1, segue-se que

$$= g_i \text{ traço}(AP_r)$$

mas do item (c) da Proposição 3.2.1, temos que

$$= g_i \ (r+1) S_{r+1}$$

onde $g_i := \langle e_i, N \rangle$, então

$$L_r(f_i)_{(p)} = (r+1) S_{r+1} \langle e_i, N \rangle .$$

Observe que

$$x = f_1 e_1 + f_2 e_2 + \cdots + f_{n+1} e_{n+1}.$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
L_r(x) &:= L_r(f_1) e_1 + L_r(f_2) e_2 + \cdots + L_r(f_{n+1}) e_{n+1} \\
&= (r+1) S_{r+1} \langle e_1, N \rangle e_1 + (r+1) S_{r+1} \langle e_2, N \rangle e_2 + \cdots + (r+1) S_{r+1} e_{n+1} \langle e_{n+1}, N \rangle \\
&= (r+1) S_{r+1} \{ \langle e_1, N \rangle e_1 + \langle e_2, N \rangle e_2 + \cdots + \langle e_{n+1}, N \rangle e_{n+1} \} \\
&= (r+1) S_{r+1} N.
\end{aligned}
$$

Analogamente,

$$
\begin{aligned}
\langle \text{grad } g_i, X \rangle &= X(g_i), \\
&= X(\langle e_i, N \rangle) \\
&= \left\langle \overline{\nabla}_X e_i, N \right\rangle + \left\langle e_i, \overline{\nabla}_X N \right\rangle, \ \forall \ X \in T\mathbf{M},
\end{aligned}
$$

mas $\overline{\nabla}_X e_i = 0$, então

$$
\begin{aligned}
&= \left\langle e_i, \overline{\nabla}_X N \right\rangle \\
&= \left\langle e_i, \left(\overline{\nabla}_X N\right)^{\top} + \left(\overline{\nabla}_X N\right)^{\perp} \right\rangle \\
&= \left\langle e_i, \left(\overline{\nabla}_X N\right)^{\top} \right\rangle + \left\langle e_i, \left(\overline{\nabla}_X N\right)^{\perp} \right\rangle
\end{aligned}
$$

mas $\left\langle e_i, \left(\overline{\nabla}_X N\right)^{\perp}\right\rangle = 0$, então

$$\begin{aligned}
&= \langle e_i, -AX\rangle \\
&= -\left\langle {e_i}^{\top} + {e_i}^{\perp}, AX\right\rangle \\
&= -\left\langle {e_i}^{\top}, AX\right\rangle - \left\langle {e_i}^{\perp}, AX\right\rangle
\end{aligned}$$

mas $\left\langle {e_i}^{\perp}, AX\right\rangle = 0$, então

$$\begin{aligned}
&= -\left\langle {e_i}^{\top}, AX\right\rangle \\
&= \left\langle -A{e_i}^{\top}, X\right\rangle \\
\langle \text{grad } g_i, X\rangle &= \left\langle -A{e_i}^{\top}, X\right\rangle, \ \forall\ X \in T\mathbf{M}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\text{grad } g_i = -\, A{e_i}^{\top}. \tag{3.7}$$

Por outro lado, sabemos que $\forall\ X, Y \in T\mathbf{M}$

$$Hess\ g_i(X,Y) = \left\langle \overline{\nabla}_X \text{ grad } g_i, Y\right\rangle. \tag{3.8}$$

Substituindo (3.7) em (3.8), temos que

$$\begin{aligned}
Hess\ g_i(X,Y) &= \left\langle \overline{\nabla}_X(-A{e_i}^{\top}), Y\right\rangle \\
&= -\left\langle \overline{\nabla}_X(A{e_i}^{\top}), Y\right\rangle.
\end{aligned}$$

Assim,

$$Hess\ g_i(X,Y) = -\left\langle \left(\overline{\nabla}_X A\right) {e_i}^{\top} + A\left(\overline{\nabla}_X {e_i}^{\top}\right), Y\right\rangle,$$

usando codazzi, temos que

$$\begin{aligned}
&= -\left\langle \left(\overline{\nabla}_{{e_i}^{\top}} A\right) X + A\left(\overline{\nabla}_X {e_i}^{\top}\right), Y\right\rangle \\
&= -\left\langle \left(\overline{\nabla}_{{e_i}^{\top}} A\right) X, Y\right\rangle - \left\langle A\left(\overline{\nabla}_X {e_i}^{\top}\right), Y\right\rangle
\end{aligned}$$

mas $e_i = {e_i}^{\top} + \langle e_i, N\rangle N$, então

$$\begin{aligned}
Hess\ g_i(X,Y) &= -\left\langle \left(\overline{\nabla}_{{e_i}^{\top}} A\right) X, Y\right\rangle - \left\langle A\overline{\nabla}_X \left(e_i - \langle e_i, N\rangle N\right), Y\right\rangle \\
&= -\left\langle \left(\overline{\nabla}_{{e_i}^{\top}} A\right) X, Y\right\rangle - \left\langle A\overline{\nabla}_X e_i - A\overline{\nabla}_X \langle e_i, N\rangle N, Y\right\rangle \\
&= -\left\langle \left(\overline{\nabla}_{{e_i}^{\top}} A\right) X, Y\right\rangle - \left\langle A\overline{\nabla}_X e_i, Y\right\rangle + \left\langle A\overline{\nabla}_X (g_i N), Y\right\rangle \\
&= -\left\langle \left(\overline{\nabla}_{{e_i}^{\top}} A\right) X, Y\right\rangle - \left\langle A\overline{\nabla}_X e_i, Y\right\rangle + \left\langle g_i \overline{\nabla}_X N + X(g_i)N, AY\right\rangle \\
&= -\left\langle \left(\overline{\nabla}_{{e_i}^{\top}} A\right) X, Y\right\rangle - \left\langle A\overline{\nabla}_X e_i, Y\right\rangle + g_i \left\langle \overline{\nabla}_X N, AY\right\rangle + X(g_i)\left\langle N, AY\right\rangle
\end{aligned}$$

como $\langle N, AY\rangle = 0$ e $\overline{\nabla}_X e_i = 0$, então

$$= -\left\langle \left(\overline{\nabla}_{e_i^\top} A\right) X, Y\right\rangle + g_i \left\langle \overline{\nabla}_X N, AY\right\rangle$$

mas $\overline{\nabla}_X N = \left(\overline{\nabla}_X N\right)^\top + \left(\overline{\nabla}_X N\right)^\perp$, então

$$\begin{aligned}
&= -\left\langle \left(\overline{\nabla}_{e_i^\top} A\right) X, Y\right\rangle + g_i \left\langle \left(\overline{\nabla}_X N\right)^\top + \left(\overline{\nabla}_X N\right)^\perp, AY\right\rangle \\
&= -\left\langle \left(\overline{\nabla}_{e_i^\top} A\right) X, Y\right\rangle + g_i \left\langle \left(\overline{\nabla}_X N\right)^\top, AY\right\rangle + g_i \left\langle \left(\overline{\nabla}_X N\right)^\perp, AY\right\rangle
\end{aligned}$$

como $\left\langle \left(\overline{\nabla}_X N\right)^\perp, AY\right\rangle = 0$, então

$$= -\left\langle \left(\overline{\nabla}_{e_i^\top} A\right) X, Y\right\rangle + g_i \left\langle \left(\overline{\nabla}_X N\right)^\top, AY\right\rangle$$

mas $\left(\overline{\nabla}_X N\right)^\top = -AX$, então

$$Hess\ g_i(X, Y) = -\left\langle \left(\overline{\nabla}_{e_i^\top} A\right) X, Y\right\rangle - g_i \left\langle AX, AY\right\rangle.$$

Pela Proposição 3.3.2, temos que

$$\begin{aligned}
L_r(g_i)_{(p)} &= \sum_{k,l} (Hess\ g_i)_{(p)} (E_k, E_l) \left\langle P_r E_k, E_l\right\rangle_p \\
&= \sum_{k,l} \left(-\left\langle \left(\overline{\nabla}_{e_i^\top} A\right) E_k, E_l\right\rangle - g_i \left\langle AE_k, AE_l\right\rangle\right) \left\langle P_r E_k, E_l\right\rangle_p \\
&= -\sum_{k,l} \left\langle \left(\overline{\nabla}_{e_i^\top} A\right) E_k, E_l\right\rangle \left\langle P_r E_k, E_l\right\rangle_p - g_i \sum_{k,l} \left\langle A^2 E_k, E_l\right\rangle \left\langle P_r E_k, E_l\right\rangle_p \\
&= -\sum_{k,l} \left\langle \left(\overline{\nabla}_{e_i^\top} A\right) E_k, E_l\right\rangle S_r(A_k) \langle E_k, E_l\rangle_p - g_i \sum_{k,l} {\lambda_k}^2 S_r(A_k) {\langle E_k, E_l\rangle_p}^2 \\
&= -\sum_{k,l} \left\langle \left(\overline{\nabla}_{e_i^\top} A\right) E_k, E_l\right\rangle S_r(A_k) \delta_{kl} - g_i \sum_{k,l} {\lambda_k}^2 S_r(A_k) {\delta_{kl}}^2 \\
&= -\sum_{k} \left\langle \left(\overline{\nabla}_{e_i^\top} A\right) E_k, E_k\right\rangle S_r(A_k) - g_i \sum_{k} {\lambda_k}^2 S_r(A_k)
\end{aligned}$$

pelo item (f) da Proposição 3.2.1, segue-se que

$$\begin{aligned}
&= -\sum_{k} \left\langle \left(\overline{\nabla}_{e_i^\top} A\right) S_r(A_k) E_k, E_k\right\rangle - g_i \ \text{traço}(A^2 P_r) \\
&= -\sum_{k} \left\langle \left(\overline{\nabla}_{e_i^\top} A\right) P_r E_k, E_k\right\rangle - g_i \ \text{traço}(A^2 P_r) \\
&= -\ \text{traço}\left(P_r \left(\overline{\nabla}_{e_i^\top} A\right)\right) - g_i \ \text{traço}(A^2 P_r)
\end{aligned}$$

mas do item (e) da Proposição 3.2.1, temos que

$$L_r(g_i)_{(p)} = -\langle \text{grad } (S_{r+1}), e_i\rangle - (S_1S_{r+1} - (r+2)S_{r+2})\langle e_i, N\rangle .$$

Observe que

$$N = g_1e_1 + g_2e_2 + \cdots + g_{n+1}e_{n+1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} L_r(N) := {} & L_r(g_1)e_1 + L_r(g_2)e_2 + \cdots + L_r(g_{n+1})e_{n+1} \\ = {} & (-\langle \text{grad } (S_{r+1}), e_1\rangle - (S_1S_{r+1} - (r+2)S_{r+2})\langle e_1, N\rangle)\, e_1 + \cdots + (-\langle \text{grad } (S_{r+1}), e_{n+1}\rangle \\ & -(S_1S_{r+1} - (r+2)S_{r+2})\langle e_{n+1}, N\rangle)\, e_{n+1} \\ = {} & -\langle \text{grad } (S_{r+1}), e_1\rangle e_1 - \cdots - \langle \text{grad } (S_{r+1}), e_{n+1}\rangle e_{n+1} \\ & -(S_1S_{r+1} - (r+2)S_{r+2})\langle e_1, N\rangle e_1 - \cdots - (S_1S_{r+1} - (r+2)S_{r+2})\langle e_{n+1}, N\rangle e_{n+1} \\ = {} & -\text{grad } (S_{r+1}) - (S_1S_{r+1} - (r+2)S_{r+2})\{\langle e_1, N\rangle e_1 + \cdots + \langle e_{n+1}, N\rangle e_{n+1}\} \\ = {} & -\text{grad } (S_{r+1}) - (S_1S_{r+1} - (r+2)S_{r+2})N. \end{aligned}$$

Vejamos o caso $c \neq 0$, neste caso $x : \mathbf{M}^n \longrightarrow \overline{\mathbf{M}}^{n+1}(c)$ é uma imersão isométrica com campo vetorial normal unitário N, onde $\overline{\mathbf{M}}^{n+1}(c)$ = hemisfério de $\mathbb{S}^{n+1}(1) \subset \mathbb{R}^{n+2}$ ou $\overline{\mathbf{M}}^{n+1}(c) = \mathbb{H}^{n+1}(-1) \subset {\mathbb{R}_1}^{n+2}$. Seja $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n+2}\}$ uma base ortonormal em $\mathbb{R}^{n+2}$ tangente a $\mathbf{M}$ numa vizinhança de um ponto $p \in \mathbf{M}$.

Analogamente ao que foi feito no caso $c = 0$, temos que

$$\begin{aligned} \langle \text{grad } f_i, X\rangle &= X(f_i), \\ &= \langle e_i, X\rangle + \left\langle \overline{\nabla}_X e_i, X\right\rangle, \ \forall\ X \in T\mathbf{M}, \end{aligned}$$

mas $\overline{\nabla}_X e_i = 0$, então

$$\begin{aligned} \langle \text{grad } f_i, X\rangle &= \langle e_i, X\rangle \\ &= \left\langle {e_i}^\top + {e_i}^\perp, X\right\rangle \\ &= \left\langle {e_i}^\top, X\right\rangle + \left\langle {e_i}^\perp, X\right\rangle \end{aligned}$$

mas $\left\langle {e_i}^\perp, X\right\rangle = 0$, então

$$\langle \text{grad } f_i, X\rangle = \left\langle {e_i}^\top, X\right\rangle, \ \forall\ X \in T\mathbf{M}.$$

Portanto,

$$\text{grad } f_i = {e_i}^\top.$$

Como

$$\mathbf{M}^n \longrightarrow \overline{\mathbf{M}}^{n+1}(c) \longrightarrow \mathbb{R}^{n+2}.$$

Temos,

$$\mathbb{R}^{n+2} = T_p\mathbf{M} \oplus [N] \oplus [x] \, .$$

Sendo $e_i = {e_i}^{\top} + \gamma_i N + \beta_i x$ e $e_i = {e_i}^{\top} + {e_i}^{\perp}$, temos que

$${e_i}^{\perp} = \gamma_i N + \beta_i x.$$

Desse modo,

$$\langle e_i, N \rangle = \left\langle {e_i}^{\top}, N \right\rangle + \gamma_i \langle N, N \rangle + \beta_i \langle x, N \rangle \, .$$

Logo,

$$\gamma_i = \langle e_i, N \rangle \, .$$

De modo analogo,

$$\langle e_i, x \rangle = \left\langle {e_i}^{\top}, x \right\rangle + \gamma_i \langle N, x \rangle + \beta_i \langle x, x \rangle \, .$$

Logo,

$$\beta_i = c. \langle e_i, x \rangle \, .$$

Portanto,

$${e_i}^{\perp} = \langle e_i, N \rangle N + c. \langle e_i, x \rangle x.$$

De modo que

$$e_i = {e_i}^{\top} + \langle e_i, N \rangle N + c. \langle e_i, x \rangle x.$$

Assim,

$$\text{grad } f_i = e_i - \langle e_i, N \rangle N - c. \langle e_i, x \rangle x. \tag{3.9}$$

Por outro lado, sabemos que $\forall \; X, Y \in T\mathbf{M}$

$$Hess \; f_i(X,Y) = \left\langle \overline{\nabla}_X \text{grad } f_i, Y \right\rangle . \tag{3.10}$$

Substituindo (3.9) em (3.10), temos que

$$\begin{aligned} Hess \; f_i(X,Y) &= \left\langle \overline{\nabla}_X (e_i - \langle e_i, N \rangle N - c. \langle e_i, x \rangle x), Y \right\rangle \\ &= \left\langle \overline{\nabla}_X e_i, Y \right\rangle - \left\langle \overline{\nabla}_X \langle e_i, N \rangle N, Y \right\rangle - c. \left\langle \overline{\nabla}_X \langle e_i, x \rangle x, Y \right\rangle \end{aligned}$$

mas $\overline{\nabla}_X e_i = 0$, então

$$= - \left\langle \overline{\nabla}_X \langle e_i, N \rangle N, Y \right\rangle - c. \left\langle \overline{\nabla}_X \langle e_i, x \rangle x, Y \right\rangle .$$

Como $g_i := \langle e_i, N\rangle$ e $f_i := \langle e_i, x\rangle$, $\forall\ i = 1, 2, \ldots, n+2$, então

$$\begin{aligned}
Hess\ f_i(X,Y) &= -\left\langle \overline{\nabla}_X g_i N, Y\right\rangle - c.\left\langle \overline{\nabla}_X f_i x, Y\right\rangle\\
&= -\left\langle g_i \overline{\nabla}_X N + X(g_i)N, Y\right\rangle - c.\left\langle f_i\overline{\nabla}_X x + X(f_i)x, Y\right\rangle\\
&= -\, g_i\left\langle \overline{\nabla}_X N, Y\right\rangle - X(g_i)\langle N, Y\rangle - c.f_i\left\langle \overline{\nabla}_X x, Y\right\rangle - c.X(f_i)\langle x, Y\rangle
\end{aligned}$$

mas $\langle N, Y\rangle = 0 = \langle x, Y\rangle$, então

$$\begin{aligned}
&= -\, g_i\left\langle \overline{\nabla}_X N, Y\right\rangle - c.f_i\langle X, Y\rangle\\
&= -\, g_i\left\langle \left(\overline{\nabla}_X N\right)^{\top} + \left(\overline{\nabla}_X N\right)^{\perp}, Y\right\rangle - c.f_i\langle X, Y\rangle\\
&= -\, g_i\left\{\left\langle \left(\overline{\nabla}_X N\right)^{\top}, Y\right\rangle + \left\langle\left(\overline{\nabla}_X N\right)^{\perp}, Y\right\rangle\right\} - c.f_i\langle X, Y\rangle
\end{aligned}$$

mas $\left\langle \left(\overline{\nabla}_X N\right)^{\perp}, Y\right\rangle = 0$, então

$$\begin{aligned}
&= \ -\, g_i\left\langle \left(\overline{\nabla}_X N\right)^{\top}, Y\right\rangle - c.f_i\langle X, Y\rangle\\
&= g_i\langle AX, Y\rangle - c.f_i\langle X, Y\rangle,
\end{aligned}$$

onde A é a segunda forma fundamental da imersão x.

Logo,

$$Hess\ f_i(X,Y) = g_i\langle AX, Y\rangle - c.f_i\langle X, Y\rangle,\ \forall\ X, Y \in T\mathbf{M}.$$

Agora seja $\{E_1, E_2, \ldots, E_n, E_{n+1} = N, E_{n+2} = x\}$ um referencial geodésico no ponto $p \in \mathbf{M}$ que diagonaliza o operador A.

Portanto,

$$Hess\ f_i(E_k, E_l) = g_i\langle AE_k, E_l\rangle - c.f_i\langle E_k, E_l\rangle.$$

Pela Proposição 3.3.2, temos que

$$\begin{aligned}
L_r(f_i)_{(p)} &= \sum_{k,l}\left(Hess\ f_i\right)_{(p)}(E_k, E_l)\langle P_r E_k, E_l\rangle_p\\
&= \sum_{k,l}\left(g_i\langle AE_k, E_l\rangle - c.f_i\langle E_k, E_l\rangle\right)\langle P_r E_k, E_l\rangle_p
\end{aligned}$$

como $AE_k = \lambda_k E_k$ e pelo item (a) da Proposição 3.2.1, segue-se que

$$\begin{aligned}
&= g_i\sum_{k,l}\langle \lambda_k E_k, E_l\rangle\langle S_r(A_k)E_k, E_l\rangle_p - c.f_i\sum_{k,l}\langle E_k, E_l\rangle\langle S_r(A_k)E_k, E_l\rangle_p\\
&= g_i\sum_{k,l}\lambda_k S_r(A_k)\langle E_k, E_l\rangle^2{}_p - c.f_i\sum_{k,l}S_r(A_k)\langle E_k, E_l\rangle^2{}_p\\
&= g_i\sum_{k,l}\lambda_k S_r(A_k){\delta_{kl}}^2 - c.f_i\sum_{k,l}S_r(A_k){\delta_{kl}}^2\\
&= g_i\sum_{k}\lambda_k S_r(A_k) - c.f_i\sum_{k}S_r(A_k)
\end{aligned}$$

pelo item (d) da Proposição 3.2.1, segue-se que

$$= g_i \text{ traço}(AP_r) - c.f_i \text{ traço}(P_r)$$

mas do item (b) e (c) da Proposição 3.2.1, temos que

$$= g_i \ (r+1)S_{r+1} - c.f_i(n-r)Sr$$

onde $g_i := \langle e_i, N\rangle$ e e $f_i := \langle e_i, x\rangle$, então

$$L_r(f_i)_{(p)} =(r+1)S_{r+1} \langle e_i, N\rangle - c(n-r)Sr \langle e_i, x\rangle .$$

Observe que

$$x =f_1e_1 + f_2e_2 + \cdots + f_{n+2}e_{n+2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} L_r(x) :=& L_r(f_1)e_1 + L_r(f_2)e_2 + \cdots + L_r(f_{n+2})e_{n+2} \\ =& (r+1)S_{r+1} \langle e_1, N\rangle e_1 + \cdots + (r+1)S_{r+1} \langle e_{n+2}, N\rangle e_{n+2} \\ & - c(n-r)Sr \langle e_1, x\rangle e_1 - \cdots - c(n-r)Sr \langle e_{n+2}, x\rangle e_{n+2} \\ =& (r+1)S_{r+1} \{\langle e_1, N\rangle e_1 + \cdots + \langle e_{n+2}, N\rangle e_{n+2}\} \\ & - c(n-r)Sr \{\langle e_1, x\rangle e_1 - \cdots - \langle e_{n+2}, x\rangle e_{n+2}\} \\ =& (r+1)S_{r+1}N - c(n-r)Srx. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \langle \text{grad } g_i, X\rangle =& X(g_i), \\ =& X(\langle e_i, N\rangle) \\ =& \left\langle \overline{\nabla}_X e_i, N\right\rangle + \left\langle e_i, \overline{\nabla}_X N\right\rangle , \ \forall \ X \in T\mathbf{M}, \end{aligned}$$

mas $\overline{\nabla}_X e_i = 0$, então

$$\begin{aligned} =& \left\langle e_i, \overline{\nabla}_X N\right\rangle \\ =& \left\langle e_i, \left(\overline{\nabla}_X N\right)^\top + \left(\overline{\nabla}_X N\right)^\perp\right\rangle \\ =& \left\langle e_i, \left(\overline{\nabla}_X N\right)^\top\right\rangle + \left\langle e_i, \left(\overline{\nabla}_X N\right)^\perp\right\rangle \end{aligned}$$

mas $\left\langle e_i, \left(\overline{\nabla}_X N\right)^\perp\right\rangle = 0$, então

$$\begin{aligned} =& \langle e_i, -AX\rangle \\ =& - \left\langle {e_i}^\top + {e_i}^\perp, AX\right\rangle \\ =& - \left\langle {e_i}^\top, AX\right\rangle - \left\langle {e_i}^\perp, AX\right\rangle \end{aligned}$$

mas $\left\langle {e_i}^{\perp}, AX \right\rangle = 0$, então

$$\begin{aligned} &= -\left\langle {e_i}^{\top}, AX \right\rangle \\ &= \left\langle -A{e_i}^{\top}, X \right\rangle \\ \langle \text{grad } g_i, X \rangle &= \left\langle -A{e_i}^{\top}, X \right\rangle, \ \forall \ X \in T\mathbf{M}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\text{grad } g_i = -\, A{e_i}^{\top}. \tag{3.11}$$

Por outro lado, sabemos que $\forall \ X, Y \in T\mathbf{M}$

$$Hess \ g_i(X,Y) = \left\langle \overline{\nabla}_X \text{grad } g_i, Y \right\rangle. \tag{3.12}$$

Substituindo (3.11) em (3.12), temos que

$$\begin{aligned} Hess \ g_i(X,Y) &= \left\langle \overline{\nabla}_X (-A{e_i}^{\top}), Y \right\rangle \\ &= -\left\langle \overline{\nabla}_X (A{e_i}^{\top}), Y \right\rangle. \end{aligned}$$

Assim,

$$Hess \ g_i(X,Y) = -\left\langle \left(\overline{\nabla}_X A\right) {e_i}^{\top} + A\left(\overline{\nabla}_X {e_i}^{\top}\right), Y \right\rangle,$$

usando codazzi, temos que

$$\begin{aligned} &= -\left\langle \left(\overline{\nabla}_{{e_i}^{\top}} A\right) X + A\left(\overline{\nabla}_X {e_i}^{\top}\right), Y \right\rangle \\ &= -\left\langle \left(\overline{\nabla}_{{e_i}^{\top}} A\right) X, Y \right\rangle - \left\langle A\left(\overline{\nabla}_X {e_i}^{\top}\right), Y \right\rangle \end{aligned}$$

mas $e_i = {e_i}^{\top} + \langle e_i, N \rangle N + c. \langle e_i, x \rangle x$, então

$$\begin{aligned} Hess \ g_i(X,Y) &= -\left\langle \left(\overline{\nabla}_{{e_i}^{\top}} A\right) X, Y \right\rangle - \left\langle A\overline{\nabla}_X \left(e_i - \langle e_i, N \rangle N - c. \langle e_i, x \rangle x\right), Y \right\rangle \\ &= -\left\langle \left(\overline{\nabla}_{{e_i}^{\top}} A\right) X, Y \right\rangle - \left\langle A\overline{\nabla}_X e_i - A\overline{\nabla}_X \langle e_i, N \rangle N - A\overline{\nabla}_X c. \langle e_i, x \rangle x, Y \right\rangle \\ &= -\left\langle \left(\overline{\nabla}_{{e_i}^{\top}} A\right) X, Y \right\rangle - \left\langle A\overline{\nabla}_X e_i, Y \right\rangle + \left\langle A\overline{\nabla}_X (g_i N), Y \right\rangle + c. \left\langle A\overline{\nabla}_X (f_i x), Y \right\rangle \\ &= -\left\langle \left(\overline{\nabla}_{{e_i}^{\top}} A\right) X, Y \right\rangle - \left\langle A\overline{\nabla}_X e_i, Y \right\rangle + \left\langle g_i \overline{\nabla}_X N + X(g_i) N, AY \right\rangle \\ &\quad + c. \left\langle f_i \overline{\nabla}_X x + X(f_i) x, AY \right\rangle \\ &= -\left\langle \left(\overline{\nabla}_{{e_i}^{\top}} A\right) X, Y \right\rangle - \left\langle A\overline{\nabla}_X e_i, Y \right\rangle + g_i \left\langle \overline{\nabla}_X N, AY \right\rangle + X(g_i) \langle N, AY \rangle \\ &\quad + c. f_i \langle X, AY \rangle + c. X(f_i) \langle x, AY \rangle \end{aligned}$$

como $\langle N, AY \rangle = 0 = \langle x, AY \rangle$ e $\overline{\nabla}_X e_i = 0$, então

$$Hess \ g_i(X,Y) = -\left\langle \left(\overline{\nabla}_{{e_i}^{\top}} A\right) X, Y \right\rangle + g_i \left\langle \overline{\nabla}_X N, AY \right\rangle + c. f_i \langle X, AY \rangle$$

mas $\overline{\nabla}_X N = \left(\overline{\nabla}_X N\right)^\top + \left(\overline{\nabla}_X N\right)^\perp$, então

$$= -\left\langle \left(\overline{\nabla}_{e_i^\top} A\right) X, Y\right\rangle + g_i \left\langle \left(\overline{\nabla}_X N\right)^\top + \left(\overline{\nabla}_X N\right)^\perp, AY\right\rangle + c.f_i \langle X, AY\rangle$$
$$= -\left\langle \left(\overline{\nabla}_{e_i^\top} A\right) X, Y\right\rangle + g_i \left\langle \left(\overline{\nabla}_X N\right)^\top, AY\right\rangle + g_i \left\langle \left(\overline{\nabla}_X N\right)^\perp, AY\right\rangle + c.f_i \langle X, AY\rangle$$

como $\left\langle \left(\overline{\nabla}_X N\right)^\perp, AY\right\rangle = 0$, então

$$= -\left\langle \left(\overline{\nabla}_{e_i^\top} A\right) X, Y\right\rangle + g_i \left\langle \left(\overline{\nabla}_X N\right)^\top, AY\right\rangle + c.f_i \langle X, AY\rangle$$

mas $\left(\overline{\nabla}_X N\right)^\top = -AX$, então

$Hess\ g_i(X,Y) = -\left\langle \left(\overline{\nabla}_{e_i^\top} A\right) X, Y\right\rangle - g_i \langle AX, AY\rangle + c.f_i \langle X, AY\rangle .$

Pela Proposição 3.3.2, temos que

$$\begin{aligned}
L_r(g_i)_{(p)} &= \sum_{k,l} (Hess\ g_i)_{(p)} (E_k, E_l) \langle P_r E_k, E_l\rangle_p \\
&= \sum_{k,l} \left(-\left\langle \left(\overline{\nabla}_{e_i^\top} A\right) E_k, E_l\right\rangle - g_i \langle AE_k, AE_l\rangle + c.f_i \langle E_k, AE_l\rangle\right) \langle P_r E_k, E_l\rangle_p \\
&= -\sum_{k,l} \left\langle \left(\overline{\nabla}_{e_i^\top} A\right) E_k, E_l\right\rangle \langle P_r E_k, E_l\rangle_p - g_i \sum_{k,l} \left\langle A^2 E_k, E_l\right\rangle \langle P_r E_k, E_l\rangle_p \\
&\quad + c.f_i \sum_{k,l} \langle AE_k, E_l\rangle \langle P_r E_k, E_l\rangle_p \\
&= -\sum_{k,l} \left\langle \left(\overline{\nabla}_{e_i^\top} A\right) E_k, E_l\right\rangle S_r(A_k) \langle E_k, E_l\rangle_p - g_i \sum_{k,l} {\lambda_k}^2 S_r(A_k) {\langle E_k, E_l\rangle_p}^2 \\
&\quad + c.f_i \sum_{k,l} \lambda_k S_r(A_k) {\langle E_k, E_l\rangle_p}^2 \\
&= -\sum_{k,l} \left\langle \left(\overline{\nabla}_{e_i^\top} A\right) E_k, E_l\right\rangle S_r(A_k) \delta_{kl} - g_i \sum_{k,l} {\lambda_k}^2 S_r(A_k) {\delta_{kl}}^2 \\
&\quad + c.f_i \sum_{k,l} \lambda_k S_r(A_k) {\delta_{kl}}^2 \\
&= -\sum_{k} \left\langle \left(\overline{\nabla}_{e_i^\top} A\right) E_k, E_k\right\rangle S_r(A_k) - g_i \sum_{k} {\lambda_k}^2 S_r(A_k) + c.f_i \sum_{k} \lambda_k S_r(A_k)
\end{aligned}$$

pelo item (d) e (f) da Proposição 3.2.1, segue-se que

$$\begin{aligned}
&= -\sum_{k} \left\langle \left(\overline{\nabla}_{e_i^\top} A\right) S_r(A_k) E_k, E_k\right\rangle - g_i \text{ traço}(A^2 P_r) + c.f_i \text{ traço}(AP_r) \\
&= -\sum_{k} \left\langle \left(\overline{\nabla}_{e_i^\top} A\right) P_r E_k, E_k\right\rangle - g_i \text{ traço}(A^2 P_r) + c.f_i \text{ traço}(AP_r) \\
&= -\text{ traço}\left(P_r \left(\overline{\nabla}_{e_i^\top} A\right)\right) - g_i \text{ traço}(A^2 P_r) + c.f_i \text{ traço}(AP_r)
\end{aligned}$$

mas do item (c) e (e) da Proposição 3.2.1, temos que

$$= - \langle \text{grad } (S_{r+1}), e_i \rangle - (S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2}) \langle e_i, N \rangle + c.(r+1)S_{r+1} \langle e_i, x \rangle \ .$$

Observe que

$$N = g_1 e_1 + g_2 e_2 + \cdots + g_{n+2} e_{n+2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
L_r(N) := & \ L_r(g_1)e_1 + L_r(g_2)e_2 + \cdots + L_r(g_{n+2})e_{n+2} \\
= & \ (- \langle \text{grad } (S_{r+1}), e_1 \rangle - (S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2}) \langle e_1, N \rangle \\
& \ +c.(r+1)S_{r+1} \langle e_1, x \rangle) \, e_1 + \cdots + (- \langle \text{grad } (S_{r+1}), e_{n+2} \rangle \\
& \ -(S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2}) \langle e_{n+2}, N \rangle + c.(r+1)S_{r+1} \langle e_1, x \rangle) \, e_{n+2} \\
= & \ - \langle \text{grad } (S_{r+1}), e_1 \rangle \, e_1 - \cdots - \langle \text{grad } (S_{r+1}), e_{n+2} \rangle \, e_{n+2} \\
& \ - (S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2}) \{ \langle e_1, N \rangle \, e_1 + \cdots + \langle e_{n+2}, N \rangle \, e_{n+2} \} \\
& \ + c.(r+1)S_{r+1} \{ \langle e_1, x \rangle \, e_1 + \cdots + \langle e_{n+2}, x \rangle \, e_{n+2} \} \\
= & \ - \text{grad } (S_{r+1}) - (S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2})N + c.(r+1)S_{r+1} x.
\end{aligned}$$

■

Para uma hipersuperfície $\mathbf{M}$ em $\mathbb{R}^{n+1}$, tomando $f = \langle x, N \rangle$ e $g = \frac{1}{2} |x|^2$ no Lema 3.3.2, obtemos a seguinte Proposição:

Proposição 3.3.3. *Seja $x : \mathbf{M}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície com campo vetorial normal unitário N. Assim, temos que*

$$\int_{\mathbf{M}} \langle x, N \rangle \{ (n-r)S_r + (r+1)S_{r+1} \langle x, N \rangle \} \, d\mathbf{M} = \int_{\mathbf{M}} \left\langle P_r A x^{\top}, x^{\top} \right\rangle d\mathbf{M},$$

onde $x^{\top}$ denota a componente tangente de x.

Demonstração. Consideremos $\{e_1, \ldots, e_n\}$ como sendo um referencial geodésico num ponto $p \in \mathbf{M}$. Definamos $f = \langle x, N \rangle$ e $g = \frac{1}{2} |x|^2$. Então

$$\begin{aligned}
e_i(g) = & \ e_i(\frac{1}{2} \langle x, x \rangle) = \frac{1}{2}(\left\langle \overline{\nabla}_{e_i} x, x \right\rangle + \left\langle x, \overline{\nabla}_{e_i} x \right\rangle) \\
= & \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} x, x \right\rangle = \langle dx(e_i), x \rangle \\
= & \ \langle e_i, x \rangle \, .
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
g_{ij} = e_j(e_i(g)) = & \ e_j(\langle e_i, x \rangle) = \left\langle \overline{\nabla}_{e_j} e_i, x \right\rangle + \left\langle e_i, \overline{\nabla}_{e_j} x \right\rangle, \\
= & \left\langle \overline{\nabla}_{e_j} e_i, x \right\rangle + \langle e_i, dx(e_j) \rangle = \left\langle \overline{\nabla}_{e_j} e_i, x \right\rangle + \langle e_i, e_j \rangle \, ;
\end{aligned}$$

mas $\overline{\nabla}_{e_j} e_i = \nabla_{e_j} e_i + \left\langle \overline{\nabla}_{e_j} e_i, N \right\rangle N$. De onde,

$$g_{ij} = \left\langle \nabla_{e_j} e_i + \left\langle \overline{\nabla}_{e_j} e_i, N \right\rangle N, x \right\rangle + \delta_{ij} \ ;$$

por ser o referencial geodésico, segue-se que:

$$\begin{aligned} &= \left\langle \left\langle \overline{\nabla}_{e_j} e_i, N \right\rangle N, x \right\rangle + \delta_{ij}, \\ &= \left\langle \overline{\nabla}_{e_j} e_i, N \right\rangle \langle N, x \rangle + \delta_{ij}, \\ g_{ij} &= h_{ij} \ f + \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Por outro lado, da definição de $f = \langle x, N \rangle$ temos que:

$$\begin{aligned} \langle \text{grad } f, e_i \rangle =& e_i(f) = \ e_i(\langle x, N \rangle); \\ =& \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} x, N \right\rangle + \left\langle x, \overline{\nabla}_{e_i} N \right\rangle, \\ =& \langle dx(e_i), N \rangle + \left\langle x, \overline{\nabla}_{e_i} N \right\rangle, \\ =& \left\langle x, \overline{\nabla}_{e_i} N \right\rangle; \end{aligned}$$

mas $\overline{\nabla}_{e_i} N = -Ae_i + \nabla^{\perp}_{e_i} N = -Ae_i$. Então,

$$\langle \text{grad } f, e_i \rangle = - \langle x, Ae_i \rangle \, ;$$

decompondo x, restrito a $\mathbf{M}$, em uma componente $x^{\top}$ tangente a $\mathbf{M}$ e uma componente $x^{\perp}$ normal a $\mathbf{M}$ temos

$$\langle \text{grad } f, e_i \rangle = - \left\langle x^{\top}, Ae_i \right\rangle - \left\langle x^{\perp}, Ae_i \right\rangle = - \left\langle x^{\top}, Ae_i \right\rangle;$$

por ser A auto adjunta

$$\langle \text{grad } f, e_i \rangle = \left\langle -Ax^{\top}, e_i \right\rangle.$$

Portanto,

$$\text{grad } f = - \, Ax^{\top}.$$

De forma análoga,

$$\langle \text{grad } g, e_i \rangle = e_i(g);$$

mas demostramos que $e_i(g) = \langle e_i, x \rangle$. Assim,

$$\langle \text{grad } g, e_i \rangle = \left\langle x^{\top} + x^{\perp}, e_i \right\rangle = \left\langle x^{\top}, e_i \right\rangle.$$

Logo,

$$\text{grad } g = x^{\top}.$$

Por outro lado, por definição

$$L_r g = \text{traço } (P_r \text{ Hess } g) = \sum_{i,j=1}^{n} (P_r)_{ij}\ g_{ij}$$

substituindo g_{ij} por $h_{ij}\ f + \delta_{ij}$ temos que

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i,j=1}^{n} (P_r)_{ij}(h_{ij} f + \delta_{ij}) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} (P_r)_{ij} h_{ij} f + \sum_{i,j=1}^{n} (P_r)_{ij}\delta_{ij} \\
&= f \sum_{i,j=1}^{n} (P_r)_{ij} h_{ij} + \sum_{i,j=1}^{n} (P_r)_{ij}\delta_{ij} \\
&= f \text{ traço } (P_r A) + \text{traço } (P_r).
\end{aligned}$$

Pela Prop. 3.2.1, temos que

$$L_r g = f(r+1)S_{r+1} + (n-r)S_r$$

lembrando que $f = \langle x, N \rangle$, finalmente obtemos

$$= \langle x, N \rangle (r+1)S_{r+1} + (n-r)S_r.$$

Já que grad $f = -Ax^{\top}$ e grad $g = x^{\top}$, segue-se imediatamente do Lema 3.3.2 que

$$\int_{\mathbf{M}} \langle x, N \rangle \{(n-r)S_r + (r+1)S_{r+1} \langle x, N \rangle\}\, d\mathbf{M} = \int_{\mathbf{M}} \left\langle P_r A x^T, x^T \right\rangle d\mathbf{M}.$$

■

3.3.1 Elipticidade dos operadores L_r

Proposição 3.3.4. *Sejam $\mathbf{M}^n$ uma variedade conexa e diferenciável e $x : \mathbf{M}^n \to \overline{\mathbf{M}}^{n+1}(c)$ uma imersão isométrica, onde $\overline{\mathbf{M}}^{n+1}(c)$ é de curvatura seccional constante c. L_r é elíptico se, e somente se, P_r é definido positivo, isto é, $S_r(A_i) > 0\ \forall\ i = 1, 2, \ldots, n-1$.*

Demonstração. Fazendo uso de um sistema de coordenadas locais, verificaremos que o operador L_r é elíptico, para isto, seja $\phi : U \subset \mathbf{M}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um sistema de coordenadas locais na vizinhança de um ponto $p \in \mathbf{M}$.

Denotemos por $\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_2}, \ldots\ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}$ os campos coordenados a ϕ.

Definamos

$$g_{ij} := \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle$$
$$G := (g_{ij})$$
$$G^{-1} := \left(g^{ij}\right).$$

Consideremos um campo vetorial diferenciável X definido em $\mathbf{M}$, usando as coordenadas locais dadas acima, podemos representar X nestas coordenadas como:

$$X = \sum_i x^i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

e prova-se que o divergente deste campo X, no sistema de coordenadas dado, é dado por (veja a página 151 de [12])

$$\text{div } (X) = \frac{1}{\sqrt{\det G}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(x^i \sqrt{\det G} \right). \tag{3.13}$$

Por outro lado consideremos uma função diferenciável $f : \mathbf{M} \longrightarrow \mathbb{R}$. Podemos provar que o gradiente de f neste sistema de coordenadas é dado por

$$\text{grad } f = \sum_k f_k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

onde $f_k = \sum_j g^{jk} \dfrac{\partial f}{\partial x_j}$.

Por outro lado

$$P_r \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_l \beta_{lj} \frac{\partial}{\partial x_l}. \tag{3.14}$$

Assim,

$$P_r(\text{grad } f) = P_r \left(\sum_j f_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right),$$

como P_r é um operador linear, então

$$
\begin{aligned}
P_r(\text{grad } f) =& \sum_j f_j \left(P_r \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right), \\
=& \sum_j f_j \left(\sum_l \beta_{lj} \frac{\partial}{\partial x_l} \right), \\
=& \sum_l \left(\sum_j f_j \; \beta_{lj} \right) \frac{\partial}{\partial x_l}.
\end{aligned} \tag{3.15}
$$

Quando **M** está isometricamente imersa em uma *forma espacial*, vimos no Teorema 3.3.1 que:

$$L_r(f) = \text{div } (P_r \text{ grad } f),$$

usando 3.15 em 3.13 temos que

$$L_r(f) = \frac{1}{\sqrt{\det G}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\sum_j f_j \; \beta_{ij} \right) \sqrt{\det G} \right].$$

Mas,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\sum_j f_j \; \beta_{ij} \right) \sqrt{\det G} \right] = \sqrt{\det G} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_j f_j \; \beta_{ij} \right) + \left(\sum_j f_j \; \beta_{ij} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \sqrt{\det G} \right).$$

De modo que

$$
\begin{aligned}
L_r(f) =& \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_j f_j \; \beta_{ij} \right) + \frac{1}{\sqrt{\det G}} \sum_i \sum_j f_j \; \beta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{\det G} \right) \\
=& \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(f_j \; \beta_{ij} \right) + \frac{1}{\sqrt{\det G}} \sum_{i,j} f_j \; \beta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{\det G} \right).
\end{aligned}
$$

Desconsiderando todos os termos que não contém derivadas de segunda ordem, temos que a parte principal do operador L_r é dada por

$$\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(f_j \; \beta_{ij} \right).$$

A elípticidade do operador L_r é dada pela sua parte principal.
Mas,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(f_j \; \beta_{ij} \right) = \beta_{ij} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} + f_j \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial x_i}.$$

Assim,
$$\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} (f_j \ \beta_{ij}) = \sum_{i,j} \beta_{ij} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} + \sum_{i,j} f_j \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial x_i}.$$
Lembrando que $f_j = \displaystyle\sum_k g^{kj} \frac{\partial f}{\partial x_k}$, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} (f_j \ \beta_{ij}) &= \sum_{i,j} \beta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_k g^{kj} \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) + \sum_{i,j} f_j \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial x_i} \\
&= \sum_{i,j} \beta_{ij} \sum_k \left[\frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial g^{kj}}{\partial x_i} + g^{kj} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \right] + \sum_{i,j} f_j \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial x_i} \\
&= \sum_{i,j,k} \beta_{ij} g^{kj} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i,j,k} \beta_{ij} \frac{\partial g^{kj}}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{i,j} f_j \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial x_i}.
\end{aligned}$$

De onde L_r é elíptico se, e somente se, a matriz $A = \left(\displaystyle\sum_k \beta_{ik} \ g^{jk} \right)_{ij}$ for definida positiva.

Observe que $A = BG^{-1}$, onde $B := (\beta_{ij})$.

Logo, L_r é elíptico se, e somente se, BG^{-1} for definida positiva.

Por outro lado, P_r será semidefinido positivo se, e somente se, $\langle P_r W, W \rangle > 0$ para todo campo W. Mas para um campo W qualquer fixado, podemos escreve-ló em coordenadas locais como:

$$W = \sum_i x^i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\langle P_r W, W \rangle &= \left\langle P_r \left(\sum_i x^i \frac{\partial}{\partial x_i} \right), \sum_j x^j \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle \\
&= \sum_{i,j} x^i x^j \left\langle P_r \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle.
\end{aligned}$$

Mas de (3.14) temos que:

$$\begin{aligned}
\langle P_r W, W \rangle &= \sum_{i,j} x^i x^j \left\langle \sum_k \beta_{ki} \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle \\
&= \sum_{i,j,k} x^i x^j \beta_{ki} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle \\
&= \sum_{i,j,k} x^i x^j \beta_{ki} g_{kj}.
\end{aligned}$$

De modo que a matriz associada a forma quadratica associada a P_r. Assim a forma quadratica $\langle P_r W, W\rangle$ associada a P_r tem a seguinte matriz

$$D = \left(\sum_k \beta_{ki} g_{kj}\right)_{ij}.$$

Observe que $D = B^\top G$, onde $B := (\beta_{ij})$.

Logo, P_r é elíptico se, e somente se, $B^\top G$ for definida positiva.

Vejamos que BG^{-1} é definida positivo $\Longleftrightarrow$ $B^\top G$ é definida positivo. Com efeito, $\left\langle B^\top GW, W\right\rangle \geq 0,\ \forall W \iff \langle GW, BW\rangle \geq 0,\ \forall W \iff \langle GW, BG^{-1}(GW)\rangle \geq 0,\ \forall W \iff \langle Z, BG^{-1}Z\rangle \geq 0,\ \forall Z$.

Portanto $B^\top G \geq 0 \Longleftrightarrow BG^{-1} \geq 0$.

Logo $L_r(f)$ é elíptico $\Longleftrightarrow$ P_r é definido positivo.

■

3.3.2 Elipticidade dos operadores $\tilde{L}_r$

Vamos definir um operador $\tilde{L}_r$ por

$$\tilde{L}_r(f) = L_r(f) - \frac{S_{r+1}}{S_1}\Delta f, \quad S_1 \neq 0.$$

Podemos ver que

$$\begin{aligned} \tilde{L}_r(f) &= L_r(f) - \frac{S_{r+1}}{S_1}\text{traço } (Hessf) \\ &= \text{traço } (P_r Hessf) - \frac{S_{r+1}}{S_1}\text{traço } (Hessf) \\ &= \text{traço } (P_r Hessf - \frac{S_{r+1}}{S_1} Hessf) \\ &= \text{traço } \left[\left(P_r - \frac{S_{r+1}}{S_1} I\right) Hessf\right]. \end{aligned}$$

Proposição 3.3.5. *Sejam $\mathbf{M}^n$ uma variedade conexa e diferenciável e $x : \mathbf{M}^n \to \overline{\mathbf{M}}^{n+1}(c)$ uma imersão isométrica, onde $\overline{\mathbf{M}}^{n+1}(c)$ é de curvatura seccional constante c. Considerando que $\dfrac{S_{r+1}}{S_1}$ é constante temos que L_r é elíptico se, e somente se, os valores próprios de $P_r - \dfrac{S_{r+1}}{S_1} I$ são positivos.*

Demonstração. Temos que

$$\tilde{L}_r(f) = \text{traço } (P_r Hessf) - \frac{S_{r+1}}{S_1}\Delta f, \quad S_1 \neq 0.$$

Pela Proposição 3.3.1, temos que

$$\tilde{L}_r(f) = \text{div}\ (P_r\ \text{grad}\ f) - \frac{S_{r+1}}{S_1}\Delta f,$$

mas $\Delta f = \text{div}\ (\text{grad}\ f)$,

$$\tilde{L}_r(f) = \text{div}\ (P_r\ \text{grad}\ f) - \frac{S_{r+1}}{S_1}\ \text{div}\ (\text{grad}\ f),$$

mas $\text{div}\left(\frac{S_{r+1}}{S_1}\ \text{grad}\ f\right) = \frac{S_{r+1}}{S_1}\ \text{div}\ (\text{grad}\ f) + \left\langle \text{grad}\ \frac{S_{r+1}}{S_1}, \text{grad}\ f\right\rangle$,

$$\Longrightarrow \frac{S_{r+1}}{S_1}\ \text{div}\ (\text{grad}\ f) = \text{div}\left(\frac{S_{r+1}}{S_1}\ \text{grad}\ f\right) - \left\langle \text{grad}\ \frac{S_{r+1}}{S_1}, \text{grad}\ f\right\rangle.$$

Logo

$$\begin{aligned}\tilde{L}_r(f) &= \text{div}\ (P_r\ \text{grad}\ f) - \text{div}\left(\frac{S_{r+1}}{S_1}\ \text{grad}\ f\right) + \left\langle \text{grad}\ \frac{S_{r+1}}{S_1}, \text{grad}\ f\right\rangle, \\ &= \text{div}\ \left(P_r\ \text{grad}\ f - \frac{S_{r+1}}{S_1}\ \text{grad}\ f\right) + \left\langle \text{grad}\ \frac{S_{r+1}}{S_1}, \text{grad}\ f\right\rangle, \\ &= \text{div}\ \left(\left(P_r - \frac{S_{r+1}}{S_1}I\right)\text{grad}\ f\right) + \left\langle \text{grad}\ \frac{S_{r+1}}{S_1}, \text{grad}\ f\right\rangle,\end{aligned}$$

por hipótese $\frac{S_{r+1}}{S_1}$ é constante,

$$\tilde{L}_r(f) = \text{div}\ \left(\left(P_r - \frac{S_{r+1}}{S_1}I\right)\text{grad}\ f\right). \tag{3.16}$$

Fazendo uso de um sistema de coordenadas locais, verificaremos que o operador $\tilde{L}_r$ é elíptico, para isto, seja $\phi : U \subset \mathbf{M}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um sistema de coordenadas locais na vizinhança de um ponto $p \in \mathbf{M}$.

Denotemos por $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots\ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ os campos coordenados a ϕ.

Definamos

$$g_{ij} := \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right\rangle$$
$$G := (g_{ij})$$
$$G^{-1} := \left(g^{ij}\right).$$

Consideremos um campo vetorial diferenciável X definido em $\mathbf{M}$, usando as coordenadas locais dadas acima, podemos representar X nestas coordenadas como:

$$X = \sum_i x^i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

e prova-se que o divergente deste campo X, no sistema de coordenadas dado, é dado por (veja a página 151 de [12])

$$\text{div } (X) = \frac{1}{\sqrt{\det G}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(x^i \sqrt{\det G} \right). \tag{3.17}$$

Por outro lado consideremos uma função diferenciável $f : \mathbf{M} \longrightarrow \mathbb{R}$. Podemos provar que o gradiente de f neste sistema de coordenadas é dado por

$$\text{grad } f = \sum_k f_k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

onde $f_k = \displaystyle\sum_j g^{jk} \frac{\partial f}{\partial x_j}$.

Por outro lado

$$\left(P_r - \frac{S_{r+1}}{S_1} I \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_l \beta_{lj} \frac{\partial}{\partial x_l}. \tag{3.18}$$

Assim,

$$\left(P_r - \frac{S_{r+1}}{S_1} I \right) (\text{grad } f) = \left(P_r - \frac{S_{r+1}}{S_1} I \right) \left(\sum_j f_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right),$$

como $\left(P_r - \dfrac{S_{r+1}}{S_1} I \right)$ é um operador linear, então

$$\begin{aligned} \left(P_r - \frac{S_{r+1}}{S_1} I \right) (\text{grad } f) &= \sum_j f_j \left(\left(P_r - \frac{S_{r+1}}{S_1} I \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right), \\ &= \sum_j f_j \left(\sum_l \beta_{lj} \frac{\partial}{\partial x_l} \right), \\ &= \sum_l \left(\sum_j f_j \, \beta_{lj} \right) \frac{\partial}{\partial x_l}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Quando $\mathbf{M}$ está isometricamente imersa em uma *forma espacial*, vimos em 3.16 que:

$$\tilde{L}_r(f) = \text{div } \left(\left(P_r - \frac{S_{r+1}}{S_1} I \right) \text{ grad } f \right),$$

usando 3.15 em 3.13 temos que

$$\tilde{L}_r(f) = \frac{1}{\sqrt{\det G}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\sum_j f_j \ \beta_{ij} \right) \sqrt{\det G} \right].$$

Mas,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\sum_j f_j \ \beta_{ij} \right) \sqrt{\det G} \right] = \sqrt{\det G} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_j f_j \ \beta_{ij} \right) + \left(\sum_j f_j \ \beta_{ij} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \sqrt{\det G} \right).$$

De modo que

$$\begin{aligned} \tilde{L}_r(f) &= \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_j f_j \ \beta_{ij} \right) + \frac{1}{\sqrt{\det G}} \sum_i \sum_j f_j \ \beta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{\det G} \right) \\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(f_j \ \beta_{ij} \right) + \frac{1}{\sqrt{\det G}} \sum_{i,j} f_j \ \beta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{\det G} \right). \end{aligned}$$

Desconsiderando todos os termos que não contém derivadas de segunda ordem, temos que a parte principal do operador $\tilde{L}_r$ é dada por

$$\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(f_j \ \beta_{ij} \right).$$

A elípticidade do operador $\tilde{L}_r$ é dada pela sua parte principal.
Mas,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(f_j \ \beta_{ij} \right) = \beta_{ij} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} + f_j \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial x_i}.$$

Assim,

$$\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(f_j \ \beta_{ij} \right) = \sum_{i,j} \beta_{ij} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} + \sum_{i,j} f_j \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial x_i}.$$

Lembrando que $f_j = \displaystyle\sum_k g^{kj} \frac{\partial f}{\partial x_k}$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(f_j \ \beta_{ij} \right) &= \sum_{i,j} \beta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_k g^{kj} \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) + \sum_{i,j} f_j \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial x_i} \\ &= \sum_{i,j} \beta_{ij} \sum_k \left[\frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial g^{kj}}{\partial x_i} + g^{kj} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \right] + \sum_{i,j} f_j \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial x_i} \\ &= \sum_{i,j,k} \beta_{ij} g^{kj} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i,j,k} \beta_{ij} \frac{\partial g^{kj}}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{i,j} f_j \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

De onde $\tilde{L}_r$ é elíptico se, e somente se, a matriz $A = \left(\sum_k \beta_{ik}\, g^{jk}\right)_{ij}$ for definida positiva.

Observe que $A = BG^{-1}$, onde $B := (\beta_{ij})$.

Logo, $\tilde{L}_r$ é elíptico se, e somente se, BG^{-1} for definida positiva.

Por outro lado, $\left(P_r - \frac{S_{r+1}}{S_1}I\right)$ será semidefinido positivo $\Leftrightarrow \left\langle \left(P_r - \frac{S_{r+1}}{S_1}I\right)W, W\right\rangle >$ 0 para todo campo W. Mas para um campo W qualquer fixado, podemos escreve-ló em coordenadas locais como:

$$W = \sum_i x^i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\left\langle \left(P_r - \frac{S_{r+1}}{S_1}I\right)W, W\right\rangle &= \left\langle \left(P_r - \frac{S_{r+1}}{S_1}I\right)\left(\sum_i x^i \frac{\partial}{\partial x_i}\right), \sum_j x^j \frac{\partial}{\partial x_j}\right\rangle \\
&= \sum_{i,j} x^i x^j \left\langle \left(P_r - \frac{S_{r+1}}{S_1}I\right)\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right\rangle.
\end{aligned}$$

Mas de (3.14) temos que:

$$\begin{aligned}
\left\langle \left(P_r - \frac{S_{r+1}}{S_1}I\right)W, W\right\rangle &= \sum_{i,j} x^i x^j \left\langle \sum_k \beta_{ki}\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right\rangle \\
&= \sum_{i,j,k} x^i x^j \beta_{ki} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right\rangle \\
&= \sum_{i,j,k} x^i x^j \beta_{ki} g_{kj}.
\end{aligned}$$

De modo que a matriz associada a forma quadratica associada a $\left(P_r - \frac{S_{r+1}}{S_1}I\right)$. Assim a forma quadratica $\left\langle \left(P_r - \frac{S_{r+1}}{S_1}I\right)W, W\right\rangle$ associada a $\left(P_r - \frac{S_{r+1}}{S_1}I\right)$ tem a seguinte matriz

$$D = \left(\sum_k \beta_{ki} g_{kj}\right)_{ij}.$$

Observe que $D = B^\top G$, onde $B := (\beta_{ij})$.

Logo, $\left(P_r - \frac{S_{r+1}}{S_1}I\right)$ é elíptico se, e somente se, $B^\top G$ for definida positiva.

Vejamos que BG^{-1} é definida positivo $\Longleftrightarrow$ $B^{\top}G$ é definida positivo. Com efeito, $\left\langle B^{\top}GW, W\right\rangle \geq 0,\ \forall W \iff \langle GW, BW\rangle \geq 0,\ \forall W \iff \langle GW, BG^{-1}(GW)\rangle \geq 0,\ \forall W \iff \langle Z, BG^{-1}Z\rangle \geq 0,\ \forall Z.$

Portanto $B^{\top}G \geq 0 \Longleftrightarrow BG^{-1} \geq 0.$

Logo $\tilde{L}_r(f)$ é elíptico $\Longleftrightarrow$ $\left(P_r - \dfrac{S_{r+1}}{S_1}I\right)$ é definido positivo.

■

Proposição 3.3.6. *Considere $\mathbf{M}^n$ uma variedade Riemanniana conexa, orientada, sem bordo e compacta. Seja $\overline{\mathbf{M}}^{n+1}(c)$ uma forma espacial (isto é, se $c = 0$ é o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$, se $c = 1$ é o hemisfério aberto da esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ e quando $c = -1$ é o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$). Se $x : \mathbf{M}^n \longrightarrow \overline{\mathbf{M}}^{n+1}(c)$ é uma imersão isométrica e tanto S_1 como S_{r+1} são positivos em $\mathbf{M}$, então para cada $1 \leq j \leq r$ temos que*

(i) os operadores L_j e $\tilde{L}_j$ são ambos elípticos, e

(ii) cada r-ésima curvatura média satisfaz $H_j > 0$.

Demonstração. Foi provado em [5] que para cada $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$ os L_j são elípticos e os $H_j > 0$.

A elipticidade dos $\tilde{L}_j$ é equivalente a mostrar que os valores próprios do operador $P_j - \dfrac{S_{j+1}}{S_1}I$ são positivos.

Mas,

$P_j - \dfrac{S_{j+1}}{S_1}I = \dfrac{1}{S_1}\left(P_jS_1 - S_{j+1}I\right)$

de modo que a positividade dos valores próprios do operador $P_j - \dfrac{S_{j+1}}{S_1}I$ é equivalente a positividade dos valores próprios do operador $\frac{1}{S_1}\left(P_jS_1 - S_{j+1}I\right)$, sendo $S_1 > 0$ a positividade dos valores próprios do operador $P_j - \dfrac{S_{j+1}}{S_1}I$ é equivalente a positividade dos valores próprios do operador $P_jS_1 - S_{j+1}I$.

De (a) e (c) da Prop. 3.2.1 e sabendo que $S_{r+1}(A_i) = S_{r+1} - k_iS_r(A_i)$, os outovalores de $S_1P_j - S_{j+1}I$ são:

$$\begin{aligned}
S_1S_j(A_i) - S_{j+1} &= (S_1(A_i) + k_i)S_j(A_i) - S_{j+1} \\
&= S_1(A_i)S_j(A_i) + [S_{j+1} - S_{j+1}(A_i)] - S_{j+1} \\
&= S_1(A_i)S_j(A_i) - S_{j+1}(A_i).
\end{aligned}$$

Como $H_j(A_i) = \dfrac{S_j(A_i)}{\binom{n-1}{j}}$ para $1 \leq j \leq n-1$, então temos

$$S_1(A_i)S_j(A_i) - S_{j+1}(A_i) = (n-1)\binom{n-1}{j}H_1(A_i)H_j(A_i) - \binom{n-1}{j+1}H_{j+1}(A_i),$$

a partir da elipticidade de L_j e (a) da Prop. 3.2.1, temos que $H_j(A_i) > 0$ para cada $1 \leq j \leq r$, por isso temos $H_1(A_i)H_j(A_i) \geq H_{j+1}(A_i)$ $(Ver[17, 24])$.

Daí, temos

$$\begin{aligned} S_1(A_i)S_j(A_i) - S_{j+1}(A_i) &\geq \left((n-1)\binom{n-1}{j} - \binom{n-1}{j+1}\right) H_1(A_i)H_j(A_i) \\ &= j\binom{n}{j+1} H_1(A_i)H_j(A_i) > 0. \end{aligned} \tag{3.20}$$

■

Corolário 3.3.1. *Nas mesmas condições da proposição anterior, temos*

$$(r+2)S_1S_{r+2} - 2S_2S_{r+1} < 0. \tag{3.21}$$

Demonstração. Faremos uso da seguinte desigualdade

$$H_i^2 - H_{i-1}H_{i+1} \geq 0,$$

sua demonstração encontra-se na página 52 de [17] (também pode consultar [24]). De modo que

$$H_iH_i \geq H_{i-1}H_{i+1}.$$

Pela positividade dos H_i e H_{i-1}, temos

$$\frac{H_i}{H_{i-1}} \geq \frac{H_{i+1}}{H_i}.$$

De modo que

$$\frac{H_2}{H_1} \geq \frac{H_3}{H_2} \geq \frac{H_4}{H_3} \geq \cdots \geq \frac{H_{r+1}}{H_r} \geq \frac{H_{r+2}}{H_{r+1}}.$$

Segue-se por transitividade que

$$\frac{H_2}{H_1} \geq \frac{H_{r+2}}{H_{r+1}} \text{ ou equivalentemente } H_1H_{r+2} \geq H_2H_{r+1}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (r+2)S_1S_{r+2} - 2S_2S_{r+1} &= (r+2)n\binom{n}{r+2}H_1H_{r+2} - n(n-1)\binom{n}{r+1}H_2H_{r+1} \\ &\leq ((r+2)n\binom{n}{r+2} - n(n-1)\binom{n}{r+1})H_2H_{r+1} \\ &= \ -nr\binom{n}{r+1}H_2H_{r+1}. \end{aligned}$$

Finalmente da positividade dos H_r, temos que

$$(r+2)S_1S_{r+2} - 2S_2S_{r+1} < 0.$$

■

Capítulo 4

O problema variacional que preserva área

Ao longo deste capítulo vamos supor $\mathbf{M}^n$ uma variedade conexa, compacta e orientável, e

$$x : \mathbf{M}^n \to \overline{\mathbf{M}}^{n+1}(c)$$

uma imersão isométrica.

Como $\mathbf{M}$ é orientável podemos escolher ao longo de $\mathbf{M}$ um campo vetorial normal unitário N globalmente definido. Seja $\{e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}\}$ um referencial adaptado ortonormal numa vizinhança $U \subset \mathbf{M}$ de $x(p)$, $p \in \mathbf{M}$; de modo que os $e_1, \ldots, e_n$ são tangentes a $x(\mathbf{M})$ com $d\overline{\mathbf{M}}(e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}) > 0$ onde $d\overline{\mathbf{M}}$ é o elemento de volume de $\overline{\mathbf{M}}$, e podemos escolher $N := e_{n+1}$ como sendo a orientação de $\mathbf{M}$.

Seja A a segunda forma fundamental de x associada a N.

Definição 4.0.2. *Considerando $\mathbf{M}^n$ e $\overline{\mathbf{M}}^{n+1}(c)$ segundo as hipóteses dadas acima. Uma variação de $x : \mathbf{M}^n \to \overline{\mathbf{M}}^{n+1}(c)$ é uma aplicação diferenciável $\mathbf{X} : \mathbf{M}^n \times]-\varepsilon, \varepsilon[\to \overline{\mathbf{M}}^{n+1}(c), \varepsilon > 0$ tal que $\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ a aplicação*

$$\begin{array}{rll} \mathbf{X}_t : & \mathbf{M}^n & \to \overline{\mathbf{M}}^{n+1}(c) \\ & p & \mapsto \mathbf{X}_t(p) := \mathbf{X}(p,t) \end{array}$$

é uma imersão para cada $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, e $\mathbf{X}_0 = x$.

Observação 4.0.2. *A definição acima pode ser estendida a um caso mais geral, em que $\partial\mathbf{M} \neq \emptyset$. Neste caso acrescentamos a seguinte condição*

$$\mathbf{X}_{t_{|\partial\mathbf{M}}} = x_{|\partial\mathbf{M}}, \ \forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$$

Denotemos por N_t como sendo um campo vetorial normal unitário ao longo da imersão $\mathbf{X}_t$.

Definição 4.0.3. *Para uma variação* $\mathbf{X}:\mathbf{M}^n\times]-\varepsilon,\varepsilon[\longmapsto\overline{\mathbf{M}}^{n+1}(c)$*, da imersão* x*, definimos a área de* $x(\mathbf{M}_t)$ *por*

$$\mathcal{A}(t):=\int_{\mathbf{M}} d\mathbf{M}_t$$

onde $d\mathbf{M}_t$ *é o elemento de volume de* $\mathbf{M}$ *na métrica induzida por* X_t*.*

Definição 4.0.4. *Dizemos que uma variação* $\mathbf{X}$ *de* x *preserva a área se*

$$\mathcal{A}(t)=\mathcal{A}(0),\forall t\in]-\varepsilon,\varepsilon[.$$

Definição 4.0.5. *Para uma variação* $\mathbf{X}$ *da imersão* x*, definimos a função balanço de volume (esta função também é conhecida na literatura como a função volume) de* $x(\mathbf{M}_t)$ *por*

$$\mathcal{V}(t):=\int_{\mathbf{M}\times[0,t]}\mathbf{X}^*d\overline{\mathbf{M}}$$

onde $d\overline{\mathbf{M}}$ *é o elemento de volume de* $\overline{\mathbf{M}}$*.*

Definição 4.0.6. *Dizemos que uma variação* $\mathbf{X}$ *de* x *preserva o volume se* $\mathcal{V}(t)=\mathcal{V}(0)=0,\forall t\in]-\varepsilon,\varepsilon[$*, onde* $\mathcal{V}$ *é o balanço de volume da variação* $\mathbf{X}$ *de* x*.*

Definição 4.0.7. $\dfrac{\partial\mathbf{X}(p,t)}{\partial t}_{|t=0}$ *é chamado de campo variacional de* $\mathbf{X}$ *ou vetor variacional de* $\mathbf{X}$*. Denotaremos por* $\left(\dfrac{\partial\mathbf{X}}{\partial t}\right)^{\top}$ *a componente tangencial de* $\dfrac{\partial\mathbf{X}}{\partial t}_{|t=0}$*.*

Definição 4.0.8. *Seja* N *o campo vetorial normal unitário ao longo de* x*. Dizemos que uma variação é normal se* $\dfrac{\partial\mathbf{X}}{\partial t}$ *é paralelo a* N*, isto é,* $\dfrac{\partial\mathbf{X}(p,t)}{\partial t}_{|t=0}=f(p)N(p)$*, onde* $f\in C^{\infty}(\mathbf{M},\mathbb{R})$*.*

É claro que $\dfrac{\partial\mathbf{X}}{\partial t}=\xi+f\,N$, onde $\xi=\left(\dfrac{\partial\mathbf{X}}{\partial t}\right)^{\top}$.

Consideremos agora $\mathbf{M}^n$ sem bordo e $x:\mathbf{M}^n\to\overline{\mathbf{M}}^{n+1}(c)$ uma imersão isométrica. Para cada $r\in\{0,1,\ldots,n\}$, definimos os funcionais em $\mathbf{M}$:

$$\mathcal{A}_{r,c}:=\int_{\mathbf{M}}F_r\left(S_1,S_2,\ldots,S_r\right)d\mathbf{M}\ , \tag{4.1}$$

onde as funções F_r são definidas de forma recursiva por

$$\begin{aligned}
&F_0:=1\\
&F_1:=S_1\\
&F_r:=S_r+\frac{c(n-r+1)}{r-1}F_{r-2}\qquad r=2,3,\ldots,n-1
\end{aligned}$$

Considere o Problema Variacional

$$\begin{cases} Min \quad \mathcal{A}_{r,c} \\ \text{para variações de } x \text{ tal que } \mathcal{A}(t) = \mathcal{A}(0) \end{cases} \tag{4.2}$$

Para resolver este problema, começaremos supondo que um dos seus pontos críticos seja uma imersão dada x. Portanto, quando consideramos as variações que preservam a área, estas variações devem ser um ponto crítico do funcional

$$\mathcal{A}_{r,c}(t) = \int_{\mathbf{M}} F_r\left(S_1, S_2, \ldots, S_r\right) d\mathbf{M}_t \ ,$$

onde $d\mathbf{M}_t$ é o elemento de volume da métrica induzida em $\mathbf{M}$ por $\mathbf{X}_t$. Para determinar a correspondente equação de Euler, usaremos os multiplicadores de Lagrange. Isto significa considerar o operador

$$J_{r,c}(t) := \mathcal{A}_{r,c}(t) + \lambda \mathcal{A}(t) \ ,$$

onde λ é uma constante a ser determinada.

A continuação enunciaremos três Lemas técnicos cujas demonstrações se encontram nas referências [5] ou [21]:

Lema 4.0.3. *Seja $x : \mathbf{M}^n \to \overline{\mathbf{M}}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana orientada e conexa $\mathbf{M}^n$ em uma variedade Riemanniana orientada $\overline{\mathbf{M}}^{n+1}$. Seja $\mathbf{X}$ uma variação de x e $A(t)$ a segunda forma fundamental de $\mathbf{M}_t = \mathbf{X}_t(\mathbf{M})$. Então*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} S_{r+1}(A(t))(f(t)) &= L_r(f(t)) + \left[S_1(A(t))S_{r+1}(A(t)) - (r+2)S_{r+2}(A(t))\right] f(t) \\ &\quad + f(t) \ \textit{traço} \ \left(P_r(A(t))\overline{R}_N\right) + \langle \ \textit{grad} \ S_{r+1}(A(t)), \xi \rangle \ , \end{aligned}$$

onde $\overline{R}_N(Y) = \overline{R}(N, Y)N$ e $\overline{R}$ é o tensor curvatura de $\overline{\mathbf{M}}^{n+1}$.

Em particular para imersões em formas espaciais com curvatura seccional constante c e para uma variação geral, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} S_{r+1}(A(t))(f(t)) &= L_r(f(t)) + \left[S_1(A(t))S_{r+1}(A(t)) - (r+2)S_{r+2}(A(t))\right] f(t) \\ &\quad + c(n-r)S_r(A(t))f(t) + \langle \ \textit{grad} \ S_{r+1}(A(t)), \xi \rangle \, . \end{aligned}$$

Lema 4.0.4. *Seja $\mathbf{X}$ uma variação da imersão isométrica x. Então*

$$\frac{\partial}{\partial t}(d\mathbf{M}_t) = (-S_1 f(t) + div \ \xi) d\mathbf{M}_t,$$

onde $f(t) = \left\langle \dfrac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}, N_t \right\rangle$ é a projeção normal do campo variacional e $d\mathbf{M}_t$ denota o elemento de volume da métrica induzida em $\mathbf{M}$ por $\mathbf{X}_t$.

Lema 4.0.5. *Seja* $\mathbf{X}$ *uma variação da imersão isométrica* x. *Então*

$$\mathcal{A}^{'}(t) = -\int\limits_{\mathbf{M}} nH_1 f(t) d\mathbf{M}_t,$$

onde H_1 *é a curvatura média da imersão* x, $f(t) = \left\langle \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}, N_t \right\rangle$ *é a projeção normal do campo variacional e* $d\mathbf{M}_t$ *denota o elemento de volume da métrica induzida em* $\mathbf{M}$ *por* $\mathbf{X}_t$.

Lema 4.0.6. *Se* $c = 0$, *então* $\mathcal{A}_r^{'}(t) = -(r+1)\int\limits_{\mathbf{M}} S_{r+1} f(t) d\mathbf{M}_t$.

Demonstração. Sabemos que

$$\mathcal{A}_{r,c}(t) = \int\limits_{\mathbf{M}} F_r\left(S_1(A(t)), S_2(A(t)), \ldots, S_r(A(t))\right) d\mathbf{M}_t,$$

onde

$$\begin{aligned} F_0 &:= 1 \\ F_1 &:= S_1(A(t)) \\ F_r &:= S_r(A(t)) + \frac{c(n-r+1)}{r-1} F_{r-2} \qquad r = 2, 3, \ldots, n-1 \end{aligned}$$

em particular, quando $c = 0$, obtemos $F_r = S_r(A(t))$. Assim

$$\mathcal{A}_{r,0}(t) = \int\limits_{\mathbf{M}} S_r(A(t)) d\mathbf{M}_t.$$

Derivando $\mathcal{A}_{r,0}(t)$, temos

$$\mathcal{A}_{r,0}^{'}(t) = \int\limits_{\mathbf{M}} \frac{\partial}{\partial t} S_r(A(t)) d\mathbf{M}_t + \int\limits_{\mathbf{M}} S_r(A(t)) \frac{\partial}{\partial t} d\mathbf{M}_t.$$

Usando simultaneamente os Lemas 4.0.3 e 4.0.4 temos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{r,0}^{'}(t) = \int\limits_{\mathbf{M}} \{ & L_{r-1}(f(t)) + \left[S_1(A(t)) S_r(A(t)) - (r+1) S_{r+1}(A(t))\right] f(t) + \\ & \langle \text{ grad } S_r(A(t)), \xi \rangle + S_r(A(t)) \left(-S_1 f(t) + \text{div } \xi\right) \} \, d\mathbf{M}_t. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{r,0}^{'}(t) = \int\limits_{\mathbf{M}} \{ & L_{r-1}(f(t)) - (r+1) S_{r+1}(A(t)) f(t) + \\ & \langle \text{ grad } S_r(A(t)), \xi \rangle + S_r(A(t)) \text{div } \xi \} \, d\mathbf{M}_t. \end{aligned}$$

Como div $(fX) = f\text{div }(X) + \langle \text{grad } f, X\rangle$, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{A}'_{r,0}(t) &= \int\limits_{\mathbf{M}} \{L_{r-1}(f(t)) - (r+1)S_{r+1}(A(t))f(t) + \text{div }(S_r(A(t))\xi)\}\, d\mathbf{M}_t \\ &= \int\limits_{\mathbf{M}} L_{r-1}(f(t))d\mathbf{M}_t - \int\limits_{\mathbf{M}} (r+1)S_{r+1}(A(t))f(t)d\mathbf{M}_t + \int\limits_{\mathbf{M}} \text{div }(S_r(A(t))\xi)d\mathbf{M}_t.\end{aligned}$$

Por $\mathbf{M}$ ser compacta e pelo Teorema da Divergência a última integral se anula, assim

$$\mathcal{A}'_{r,0}(t) = \int\limits_{\mathbf{M}} L_{r-1}(f(t))d\mathbf{M}_t - \int\limits_{\mathbf{M}} (r+1)S_{r+1}(A(t))f(t)d\mathbf{M}_t.$$

Pelo Lema 3.3.2 a primeira integral se anula, portanto

$$\mathcal{A}'_{r,0}(t) = -(r+1)\int\limits_{\mathbf{M}} S_{r+1}(A(t))f(t)d\mathbf{M}_t.$$

■

Lema 4.0.7. *Se $c \neq 0$ e r é par, então* $\mathcal{A}'_r(t) = -(r+1)\int\limits_{\mathbf{M}} S_{r+1}f(t)d\mathbf{M}_t$.

Demonstração. Sabemos que

$$\mathcal{A}_{r,c}(t) = \int\limits_{\mathbf{M}} F_r\left(S_1(A(t)), S_2(A(t)), \ldots, S_r(A(t))\right) d\mathbf{M}_t,$$

onde

$$\begin{aligned} F_0 &:= 1 \\ F_1 &:= S_1(A(t)) \\ F_r &:= S_r(A(t)) + \frac{c(n-r+1)}{r-1}F_{r-2} \qquad r = 2, 3, \ldots, n-1.\end{aligned}$$

Provaremos por indução sobre r que, para $c \neq 0$ e r par,

$$\mathcal{A}'_{r,c}(t) = -(r+1)\int\limits_{\mathbf{M}} S_{r+1}(A(t))f(t)d\mathbf{M}_t.$$

Para $r = 0$, temos

$$\mathcal{A}'_{0,c}(t) = -\int\limits_{\mathbf{M}} S_1(A(t))f(t)d\mathbf{M}_t,$$

onde o Lema 4.0.5 nos garante a validade para $r = 0$.

Suponhamos que nosso Lema seja verdadeiro para $r-2$, isto é

$$\mathcal{A}'_{r-2,c}(t) = -(r-1)\int\limits_{\mathbf{M}} S_{r-1}(A(t))f(t)d\mathbf{M}_t.$$

Vamos verificar que vale para r.

$$\mathcal{A}_{r,c}(t) = \int\limits_{\mathbf{M}} \left\{ S_r(A(t)) + \frac{c(n-r+1)}{r-1}F_{r-2} \right\} d\mathbf{M}_t,$$

então

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}'_{r,c}(t) &= \int\limits_{\mathbf{M}} \frac{\partial}{\partial t}\left\{ S_r(A(t)) + \frac{c(n-r+1)}{r-1}F_{r-2} \right\} d\mathbf{M}_t \\
&+ \int\limits_{\mathbf{M}} \left\{ S_r(A(t)) + \frac{c(n-r+1)}{r-1}F_{r-2} \right\} \frac{\partial}{\partial t} d\mathbf{M}_t \\
&= \int\limits_{\mathbf{M}} \frac{\partial}{\partial t} S_r(A(t)) d\mathbf{M}_t + \frac{c(n-r+1)}{r-1}\int\limits_{\mathbf{M}} \frac{\partial}{\partial t}\left\{F_{r-2}\right\} d\mathbf{M}_t \\
&+ \int\limits_{\mathbf{M}} S_r(A(t))\frac{\partial}{\partial t} d\mathbf{M}_t + \frac{c(n-r+1)}{r-1}\int\limits_{\mathbf{M}} F_{r-2}\frac{\partial}{\partial t} d\mathbf{M}_t \\
&= \int\limits_{\mathbf{M}} \frac{\partial}{\partial t} S_r(A(t)) d\mathbf{M}_t + \int\limits_{\mathbf{M}} S_r(A(t))\frac{\partial}{\partial t} d\mathbf{M}_t \\
&+ \frac{c(n-r+1)}{r-1}\left\{ \int\limits_{\mathbf{M}} \frac{\partial}{\partial t}\left\{F_{r-2}\right\} d\mathbf{M}_t + \int\limits_{\mathbf{M}} F_{r-2}\frac{\partial}{\partial t} d\mathbf{M}_t \right\}
\end{aligned}$$

Agora veremos que $\left\{ \int\limits_{\mathbf{M}} \frac{\partial}{\partial t}\left\{F_{r-2}\right\} d\mathbf{M}_t + \int\limits_{\mathbf{M}} F_{r-2}\frac{\partial}{\partial t} d\mathbf{M}_t \right\}$ é $\mathcal{A}'_{r-2,c}(t)$, com efeito

$$\mathcal{A}_{r-2,c}(t) = \int\limits_{\mathbf{M}} F_{r-2}\left(S_1(A(t)), S_2(A(t)), \dots, S_{r-2}(A(t))\right) d\mathbf{M}_t,$$

derivando $\mathcal{A}_{r-2,c}(t)$, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}'_{r-2,c}(t) = &\int\limits_{\mathbf{M}} \frac{\partial}{\partial t}\left\{ F_{r-2}\left(S_1(A(t)), S_2(A(t)), \dots, S_{r-2}(A(t))\right)\right\} d\mathbf{M}_t + \\
&\int\limits_{\mathbf{M}} F_{r-2}\left(S_1(A(t)), S_2(A(t)), \dots, S_{r-2}(A(t))\right) \frac{\partial}{\partial t}\left\{d\mathbf{M}_t\right\}.
\end{aligned}$$

Logo

$$\mathcal{A}^{'}_{r,c}(t) = \int\limits_{\mathbf{M}} \frac{\partial}{\partial t} S_r(A(t)) d\mathbf{M}_t + \int\limits_{\mathbf{M}} S_r(A(t)) \frac{\partial}{\partial t} d\mathbf{M}_t + \frac{c(n-r+1)}{r-1} \mathcal{A}^{'}_{r-2,c}(t).$$

Usando simultaneamente os Lemas 4.0.3 e 4.0.4 temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^{'}_{r,c}(t) = & \int\limits_{\mathbf{M}} \{ L_{r-1}(f(t)) + [S_1(A(t))S_r(A(t)) - (r+1)S_{r+1}(A(t))] \, f(t) + \\
& c(n-r+1)S_{r-1}(A(t))f(t) + \langle \text{ grad } S_r(A(t)), \xi \rangle \} \, d\mathbf{M}_t + \\
& \int\limits_{\mathbf{M}} S_r(A(t)) \{ -S_1 f(t) + \text{div } \xi \} \, d\mathbf{M}_t + \frac{c(n-r+1)}{r-1} \mathcal{A}^{'}_{r-2,c}(t) \\
& = \int\limits_{\mathbf{M}} L_{r-1}(f(t)) d\mathbf{M}_t + \int\limits_{\mathbf{M}} S_1(A(t))S_r(A(t))f(t) d\mathbf{M}_t - (r+1) \int\limits_{\mathbf{M}} S_{r+1}(A(t))f(t) d\mathbf{M}_t \\
& + c(n-r+1) \int\limits_{\mathbf{M}} S_{r-1}(A(t))f(t) d\mathbf{M}_t + \int\limits_{\mathbf{M}} \langle \text{ grad } S_r(A(t)), \xi \rangle \, d\mathbf{M}_t \\
& - \int\limits_{\mathbf{M}} S_r(A(t)) S_1 f(t) d\mathbf{M}_t + \int\limits_{\mathbf{M}} S_r(A(t)) \text{ div } \xi \, d\mathbf{M}_t + \frac{c(n-r+1)}{r-1} \mathcal{A}^{'}_{r-2,c}(t) \\
& = \int\limits_{\mathbf{M}} L_{r-1}(f(t)) d\mathbf{M}_t - (r+1) \int\limits_{\mathbf{M}} S_{r+1}(A(t)f(t) d\mathbf{M}_t \\
& + c(n-r+1) \int\limits_{\mathbf{M}} S_{r-1}(A(t))f(t) d\mathbf{M}_t + \int\limits_{\mathbf{M}} \{ S_r(A(t)) \text{ div } \xi + \langle \text{ grad } S_r(A(t)), \xi \rangle \} \, d\mathbf{M}_t \\
& + \frac{c(n-r+1)}{r-1} \mathcal{A}^{'}_{r-2,c}(t)
\end{aligned}$$

Usando novamente que div $(fX) = f\text{div } (X) + \langle \text{grad } f, X \rangle$, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^{'}_{r,c}(t) = & \int\limits_{\mathbf{M}} L_{r-1}(f(t)) d\mathbf{M}_t - (r+1) \int\limits_{\mathbf{M}} S_{r+1}(A(t))f(t) d\mathbf{M}_t \\
& + c(n-r+1) \int\limits_{\mathbf{M}} S_{r-1}(A(t))f(t) d\mathbf{M}_t + \int\limits_{\mathbf{M}} \text{ div } \left(S_r(A(t))\xi \right) d\mathbf{M}_t \\
& + \frac{c(n-r+1)}{r-1} \mathcal{A}^{'}_{r-2,c}(t).
\end{aligned}$$

Pela hipótese de indução,

$$\mathcal{A}^{'}_{r-2,c}(t) = -(r-1) \int\limits_{\mathbf{M}} S_{r-1}(A(t))f(t) d\mathbf{M}_t.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}'_{r,c}(t) &= \int\limits_{M} L_{r-1}(f(t))d\mathbf{M}_t - (r+1)\int\limits_{\mathbf{M}} S_{r+1}(A(t))f(t)d\mathbf{M}_t \\ &+ c(n-r+1)\int\limits_{\mathbf{M}} S_{r-1}(A(t))f(t)d\mathbf{M}_t + \int\limits_{\mathbf{M}} \text{div } (S_r(A(t))\xi)\, d\mathbf{M}_t \\ &- \frac{c(n-r+1)}{r-1}(r-1)\int\limits_{\mathbf{M}} S_{r-1}(A(t))f(t)d\mathbf{M}_t.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}'_{r,c}(t) &= \int\limits_{\mathbf{M}} L_{r-1}(f(t))d\mathbf{M}_t - (r+1)\int\limits_{\mathbf{M}} S_{r+1}(A(t))f(t)d\mathbf{M}_t \\ &+ \int\limits_{\mathbf{M}} \text{div } (S_r(A(t))\xi)\, d\mathbf{M}_t.\end{aligned}$$

Por $\mathbf{M}$ ser compacta e pelo Teorema da Divergência a última integral se anula, assim

$$\mathcal{A}'_{r,c}(t) = \int\limits_{\mathbf{M}} L_{r-1}(f(t))d\mathbf{M}_t - \int\limits_{\mathbf{M}}(r+1)S_{r+1}(A(t))f(t)d\mathbf{M}_t.$$

Pelo Lema 3.3.2 a primeira integral se anula, portanto

$$\mathcal{A}'_{r,c}(t) = -(r+1)\int\limits_{\mathbf{M}} S_{r+1}(A(t))f(t)d\mathbf{M}_t.$$

■

A partir dos Lemas 4.0.6 e 4.0.7, vamos imediatamente à fórmula variacional:

Proposição 4.0.7. *(A primeira fórmula variacional) Suponha $c = 0$ ou $c \neq 0$ e r par, $1 \leq r \leq n-1$, então para qualquer variação de x, temos*

$$J'_{r,c}(t) = -\int\limits_{\mathbf{M}} \left\{(r+1)S_{r+1} + \lambda S_1\right\} f(t)d\mathbf{M}_t.$$

Demonstração. Sabemos que

$$J_{r,c}(t) = \mathcal{A}_{r,c}(t) + \lambda\mathcal{A}(t).$$

Derivando, obtemos

$$J'_{r,c}(t) = \mathcal{A}'_{r,c}(t) + \lambda\mathcal{A}'(t).$$

Pelo Lema 4.0.5

$$J'_{r,c}(t) = \mathcal{A}'_{r,c}(t) - \lambda\left(\int\limits_{\mathbf{M}} S_1 f(t) d\mathbf{M}_t\right).$$

Usando simultaneamente os Lemas 4.0.6 e 4.0.7

$$J'_{r,c}(t) = -(r+1)\int\limits_{\mathbf{M}} S_{r+1}(A(t)) f(t) d\mathbf{M}_t - \lambda \int\limits_{\mathbf{M}} S_1 f(t) d\mathbf{M}_t$$

$$J'_{r,c}(t) = -\int\limits_{\mathbf{M}} \left\{(r+1)S_{r+1}(A(t)) + \lambda S_1(A(t))\right\} f(t) d\mathbf{M}_t.$$

■

A partir de Proposição 4.0.7, sabemos que os pontos críticos do problema variacional acima são para os quais a imersão x tem

$$\frac{S_{r+1}}{S_1} = -\frac{\lambda}{r+1} = constante.$$

A fim de decidir se x é ou não um mínimo local, nos limitamos à variações que preservam área e computamos a segunda derivada de $\mathcal{A}_r(t)$ em $t = 0$. Como $\mathcal{A}(t) \equiv \mathcal{A}$, temos $\mathcal{A}''_{r,c}(0) = J''_{r,c}(0)$. Assim podemos chegar a seguinte Proposição por um cálculo direto utilizando o lema 4.0.3:

Proposição 4.0.8. *(A segunda fórmula variacional) Seja $x : \mathbf{M}^n \longrightarrow \overline{\mathbf{M}}^{n+1}(c)$ uma hipersuperfície para o qual S_1 é positiva, $S_{r+1}/S_1 = constante$, onde $c = 0$, ou $c \neq 0$ e r é par, $1 \leq r \leq n-1$. Para uma variação que preserva área, a segunda derivada de $\mathcal{A}_r$ em $t = 0$ é dada por*

$$\begin{aligned}\mathcal{A}''_{r,c}(0) = &-\int\limits_{\mathbf{M}} \frac{\partial}{\partial t}\left[(r+1)S_{r+1} + \lambda S_1\right]_{t=0} f d\mathbf{M}\\ = &-(r+1)\int\limits_{\mathbf{M}} f\left\{L_r f - \frac{S_{r+1}}{S_1}\Delta f + f\left[\frac{2S_2S_{r+1}}{S_1} - (r+2)S_{r+2}\right.\right.\\ &\left.\left.+ c(n-r)S_r - \frac{cnS_{r+1}}{S_1}\right]\right\} d\mathbf{M}.\end{aligned}$$

Demonstração. Como

$$J'_{r,c}(t) = -\int\limits_{\mathbf{M}} \left\{(r+1)S_{r+1}(A(t)) + \lambda S_1(A(t))\right\} f(t) d\mathbf{M}_t.$$

Derivando $J'_{r,c}(t)$, temos

$$\begin{aligned} J''_{r,c}(t) = &-\int\limits_{\mathbf{M}} \frac{\partial}{\partial t}\left\{(r+1)S_{r+1}(A(t)) + \lambda S_1(A(t))\right\} f(t)d\mathbf{M}_t \\ &-\int\limits_{\mathbf{M}} \left\{(r+1)S_{r+1}(A(t)) + \lambda S_1(A(t))\right\} f'(t)d\mathbf{M}_t \\ &-\int\limits_{\mathbf{M}} \left\{(r+1)S_{r+1}(A(t)) + \lambda S_1(A(t))\right\} f(t)\frac{\partial}{\partial t}d\mathbf{M}_t. \end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned} J''_{r,c}(t) = &-\int\limits_{\mathbf{M}} \frac{\partial}{\partial t}\left\{(r+1)S_{r+1}(A(t)) + \lambda S_1(A(t))\right\} f(t)d\mathbf{M}_t \\ &-\int\limits_{\mathbf{M}} \left\{(r+1)S_1(A(t))\frac{S_{r+1}}{S_1}(A(t)) + \lambda S_1(A(t))\right\} f'(t)d\mathbf{M}_t \\ &-\int\limits_{\mathbf{M}} \left\{(r+1)S_1(A(t))\frac{S_{r+1}}{S_1}(A(t)) + \lambda S_1(A(t))\right\} f(t)\frac{\partial}{\partial t}d\mathbf{M}. \end{aligned}$$

Como $\dfrac{S_{r+1}}{S_1} = -\dfrac{\lambda}{r+1} = constante$, então as duas últimas integrais são nulas. Assim,

$$J''_{r,c}(t) = -\int\limits_{\mathbf{M}} \frac{\partial}{\partial t}\left\{(r+1)S_{r+1}(A(t)) + \lambda S_1(A(t))\right\} f(t)d\mathbf{M}_t.$$

Analisando em $t = 0$, temos

$$\begin{aligned} J''_{r,c}(0) &= -\int\limits_{\mathbf{M}} \frac{\partial}{\partial t}\left\{(r+1)S_{r+1}(A(t)) + \lambda S_1(A(t))\right\} f(t)d\mathbf{M}_t\Big|_{t=0} \\ &= -\int\limits_{\mathbf{M}} \frac{\partial}{\partial t}\left\{(r+1)S_{r+1}(A(t)) + \lambda S_1(A(t))\right\}\Big|_{t=0} f(t)d\mathbf{M}. \end{aligned}$$

Mas, $J''_{r,c}(0) = \mathcal{A}''_{r,c}(0)$.

Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}''_{r,c}(0) &= -\int\limits_{\mathbf{M}} \frac{\partial}{\partial t}\left\{(r+1)S_{r+1}(A(t)) + \lambda S_1(A(t))\right\}\Big|_{t=0} f(t)d\mathbf{M} \\ &= -\int\limits_{\mathbf{M}} \left\{(r+1)\frac{\partial}{\partial t}S_{r+1}(A(t)) + \lambda\frac{\partial}{\partial t}S_1(A(t))\right\}\Big|_{t=0} f(t)d\mathbf{M}. \end{aligned}$$

Usando o Lema 4.0.3, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}''_{r,c}(0) = &-(r+1)\int\limits_{\mathbf{M}} \{L_r(f(t)) + [S_1(A(t))S_{r+1}(A(t)) - (r+2)S_{r+2}(A(t))]\, f(t) \\
&+c(n-r)S_r(A(t))f(t) + \langle \text{ grad } S_{r+1}(A(t)), \xi\rangle\} \big|_{t=0} f(t) d\mathbf{M} \\
&- \lambda \int\limits_{\mathbf{M}} \left\{L_0(f(t)) + \left[{S_1}^2(A(t)) - 2S_2(A(t))\right] f(t)\right. \\
&+cnf(t) + \langle \text{ grad } S_1(A(t)), \xi\rangle\} \big|_{t=0} f(t) d\mathbf{M}.
\end{aligned}$$

Substituindo o valor de $-\lambda = (r+1)\dfrac{S_{r+1}(A(t))}{S_1(A(t))}$ na expressão acima, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}''_{r,c}(0) = &-(r+1)\int\limits_{\mathbf{M}} \{L_r(f(t)) + [S_1(A(t))S_{r+1}(A(t)) - (r+2)S_{r+2}(A(t))]\, f(t) \\
&+c(n-r)S_r(A(t))f(t) + \langle \text{ grad } S_{r+1}(A(t)), \xi\rangle\} \big|_{t=0} f(t) d\mathbf{M} \\
&+ (r+1)\frac{S_{r+1}(A(t))}{S_1(A(t))} \int\limits_{\mathbf{M}} \left\{\Delta(f(t)) + \left[{S_1}^2(A(t)) - 2S_2(A(t))\right] f(t)\right. \\
&+cnf(t) + \langle \text{ grad } S_1(A(t)), \xi\rangle\} \big|_{t=0} f(t) d\mathbf{M}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}''_{r,c}(0) = &-(r+1)\int\limits_{\mathbf{M}} \{L_r(f(t)) + [S_1(A(t))S_{r+1}(A(t)) - (r+2)S_{r+2}(A(t))]\, f(t) \\
&+c(n-r)S_r(A(t))f(t) + \langle \text{ grad } S_{r+1}(A(t)), \xi\rangle\} \big|_{t=0} f(t) d\mathbf{M} \\
&- (r+1)\int\limits_{\mathbf{M}} \left\{-\frac{S_{r+1}(A(t))}{S_1(A(t))}\Delta(f(t)) + \left[-S_{r+1}(A(t))S_1(A(t)) + 2\frac{S_{r+1}(A(t))S_2(A(t))}{S_1(A(t))}\right] f(t)\right. \\
&\left.-cn\frac{S_{r+1}(A(t))}{S_1(A(t))}f(t) - \frac{S_{r+1}(A(t))}{S_1(A(t))}\langle \text{ grad } S_1(A(t)), \xi\rangle\right\} \big|_{t=0} f(t) d\mathbf{M} \\
= &-(r+1)\int\limits_{\mathbf{M}} \{L_r(f(t)) + (S_1(A(t))S_{r+1}(A(t)))\, f(t) - (r+2)S_{r+2}(A(t))f(t) \\
&+ c(n-r)S_r(A(t))f(t) + \langle \text{ grad } S_{r+1}(A(t)), \xi\rangle \\
&- \frac{S_{r+1}(A(t))}{S_1(A(t))}\Delta(f(t)) - S_{r+1}(A(t))S_1(A(t))f(t) + 2\frac{S_{r+1}(A(t))S_2(A(t))}{S_1(A(t))}f(t) \\
&\left.-cn\frac{S_{r+1}(A(t))}{S_1(A(t))}f(t) - \frac{S_{r+1}(A(t))}{S_1(A(t))}\langle \text{ grad } S_1(A(t)), \xi\rangle\right\} \big|_{t=0} f(t) d\mathbf{M}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -(r+1)\int\limits_{\mathbf{M}} \{L_r(f(t)) - (r+2)S_{r+2}(A(t))f(t) + c(n-r)S_r(A(t))f(t) \\
&+ \langle \text{ grad } S_{r+1}(A(t)), \xi\rangle - \frac{S_{r+1}(A(t))}{S_1(A(t))}\Delta(f(t)) + 2\frac{S_{r+1}(A(t))S_2(A(t))}{S_1(A(t))}f(t) \\
&-cn\frac{S_{r+1}(A(t))}{S_1(A(t))}f(t) - \left\langle \frac{S_{r+1}(A(t))}{S_1(A(t))} \text{ grad } S_1(A(t)), \xi \right\rangle \bigg\} \Big|_{t=0} f(t)d\mathbf{M} \\
&= -(r+1)\int\limits_{\mathbf{M}} \{L_r(f(t)) - (r+2)S_{r+2}(A(t))f(t) + c(n-r)S_r(A(t))f(t) \\
&+ \langle \text{ grad } S_{r+1}(A(t)), \xi\rangle - \frac{S_{r+1}(A(t))}{S_1(A(t))}\Delta(f(t)) + 2\frac{S_{r+1}(A(t))S_2(A(t))}{S_1(A(t))}f(t) \\
&-cn\frac{S_{r+1}(A(t))}{S_1(A(t))}f(t) - \left\langle \text{ grad } \left(\frac{S_{r+1}(A(t))}{S_1(A(t))} S_1(A(t))\right), \xi \right\rangle \Bigg\} \Big|_{t=0} f(t)d\mathbf{M} \\
&= -(r+1)\int\limits_{\mathbf{M}} \{L_r(f(t)) - (r+2)S_{r+2}(A(t))f(t) + c(n-r)S_r(A(t))f(t) \\
&+ \langle \text{ grad } S_{r+1}(A(t)), \xi\rangle - \frac{S_{r+1}(A(t))}{S_1(A(t))}\Delta(f(t)) + 2\frac{S_{r+1}(A(t))S_2(A(t))}{S_1(A(t))}f(t) \\
&-cn\frac{S_{r+1}(A(t))}{S_1(A(t))}f(t) - \langle \text{ grad } S_{r+1}(A(t)), \xi\rangle \bigg\} \Big|_{t=0} f(t)d\mathbf{M} \\
&= -(r+1)\int\limits_{\mathbf{M}} \left\{ L_r(f(t)) - \frac{S_{r+1}(A(t))}{S_1(A(t))}\Delta(f(t)) + f(t)\left[2\frac{S_{r+1}(A(t))S_2(A(t))}{S_1(A(t))} \right.\right. \\
&\left.\left. -(r+2)S_{r+2}(A(t)) + c(n-r)S_r(A(t))f(t) - cn\frac{S_{r+1}(A(t))}{S_1(A(t))} \right] \right\} \Big|_{t=0} f(t)d\mathbf{M}
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

Capítulo 5

Estabilidade de hipersuperfícies em $\overline{M}(c)$

Uma variação X da imersão x é chamada de variação normal se o vetor campo variacional apresentado é paralelo à N. Temos o seguinte Lema:

Lema 5.0.8. *Para qualquer função $f : \mathbf{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaça*

$$\int_{\mathbf{M}} f S_1 d\mathbf{M} = 0, \tag{5.1}$$

existe uma variação normal X da imersão x que preserva área, tal que o vetor campo variacional é fN.

Demonstração. Seja $g : \mathbf{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave tal que $\int_{\mathbf{M}} g S_1 d\mathbf{M} \neq 0$. Consideremos a variação a dois parâmetros

$$X(t, \bar{t}) := exp_x \left\{ (tf + \bar{t}g)N \right\},$$

onde exp é a aplicação exponencial em $\overline{\mathbf{M}}(c)$. Denotemos a área de $\mathbf{M}$ sob a métrica induzida da imersão $X(t, \bar{t})$ por $\mathcal{A}(t, \bar{t})$, e consideremos a seguinte equação:

$$\mathcal{A}(t, \bar{t}) = \text{constante}. \tag{5.2}$$

Da propriedade da aplicação exponencial, temos

$$\left.\frac{\partial X}{\partial t}\right|_{t=\bar{t}=0} = fN,$$

$$\left.\frac{\partial X}{\partial \bar{t}}\right|_{t=\bar{t}=0} = gN.$$

Assim, do Lema 4.0.6 temos

$$\left.\frac{\partial \mathcal{A}(t,\bar{t})}{\partial t}\right|_{t=\bar{t}=0} = -\int\limits_{\mathbf{M}} fS_1 d\mathbf{M} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial \mathcal{A}(t,\bar{t})}{\partial \bar{t}}\right|_{t=\bar{t}=0} = -\int\limits_{\mathbf{M}} gS_1 d\mathbf{M} \neq 0.$$

Assim, a partir do teorema da função implícita , em uma vizinhança de $(t,\bar{t}) = (0,0)$, podemos obter uma solução $\bar{t} = s(t)$ da eq. (5.2) que satisfaz $s(0) = 0$. Assim, obtemos uma variação que preserva área

$$X(t) = exp_x \left\{(tf + s(t)g)N\right\}.$$

Observe que

$$s^{'}(0) = -\left.\left\{\frac{\partial \mathcal{A}(t,\bar{t})}{\partial t} / \frac{\partial \mathcal{A}(t,\bar{t})}{\partial \bar{t}}\right\}\right|_{t=\bar{t}=0} = \int\limits_{\mathbf{M}} fS_1 d\mathbf{M} / \int\limits_{\mathbf{M}} gS_1 d\mathbf{M} = 0.$$

Obtemos que a variação do vetor campo de $X(t)$ é

$$\left.\frac{\partial X}{\partial t}\right|_{t=0} = (f + s^{'}(0)g)N = fN.$$

■

Do Lema 5.0.8 e da Proposição 4.0.8, a expressão de $\mathcal{A}_r^{''}(0)$ depende apenas da imersão x e da função f que pode ser qualquer função que satisfaz a eq. (5.1).

Portanto, vamos fixar a seguinte notação:

$$I_r(f) = -\int\limits_{\mathbf{M}} f\left\{\tilde{L}_r(f) + f\left[\frac{2S_2S_{r+1}}{S_1} - (r+2)S_{r+2} + c(n-r)S_r - \frac{cnS_{r+1}}{S_1}\right]\right\} d\mathbf{M}. \quad (5.3)$$

Definição 5.0.9. *Dizemos que uma hipersuperfície* $x : \mathbf{M}^n \longrightarrow \overline{\mathbf{M}}^{n+1}(c)$ *com* S_1 *positiva e* $S_{r+1}/S_1 =$ *constante é* r*-estável se* $I_r(f) \geq 0$ *para qualquer função* $f : \mathbf{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ *que satisfaça 5.1, onde* $c = 0$*, ou* $c \neq 0$ *e* r *é par,* $1 \leq r \leq n-1$*.*

Proposição 5.0.9. *Hipersuperfícies totalmente umbilicas de* $\overline{\mathbf{M}}^{n+1}(c)$ *que não são totalmente geodésicas são* r*-estáveis, onde* $c = 0$*, ou* $c \neq 0$ *e* r *é par,* $1 \leq r \leq n-1$*.*

Demonstração. Seja Σ uma hipersuperfície totalmente umbilica de $\overline{\mathbf{M}}^{n+1}(c)$, e suponha que Σ não é totalmente geodésica. Escolhemos o vetor normal de modo que a curvatura principal de Σ é igual a $k > 0$.

Logo,

$$S_j = \binom{n}{j} k^j, \; S_j(A_j) = \binom{n-1}{j} k^j, \; e \; L_r(f) = \binom{n-1}{r} k^r \Delta f.$$

De fato,

$$S_j = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq n} k_{i_1} \ldots k_{i_j}.$$

Mas, $k_{i_1} = \ldots = k_{i_j} = k$. Assim,

$$S_j = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq n} k^j \; = \; k^j \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq n} 1 = \binom{n}{j} k^j.$$

$$S_j(A_i) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq n-1} k_{i_1} \ldots k_{i_j}.$$

Mas, $k_{i_1} = \ldots = k_{i_j} = k$. Assim,

$$S_j(A_i) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq n-1} k^j \; = \; k^j \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq n-1} 1 = \binom{n-1}{j} k^j.$$

Seja $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ uma base ortonormal que diagonaliza A, isto é, $Ae_i = k_i e_i$. Assim,

$$\begin{aligned} P_r e_i =& \sum_{j=0}^{r} (-1)^j S_{r-j} A^j e_i = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{n}{r-j} k^{r-j} A^j e_i = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{n}{r-j} k^{r-j} k^j e_i \\ =& k^{r-j+j} \left(\sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{n}{r-j} \right) e_i = k^r \binom{n-1}{r} e_i = \binom{n-1}{r} k^r e_i. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} L_r(f) =& \text{traço } (P_r \; Hessf) = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, P_r \; Hessf e_i \rangle \\ =& \sum_{i=1}^{n} \langle P_r e_i, Hessf e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \left\langle \binom{n-1}{r} k^r e_i, Hessf e_i \right\rangle \\ =& \binom{n-1}{r} k^r \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, Hessf e_i \rangle = \binom{n-1}{r} k^r \Delta f. \end{aligned}$$

Observe que $S_1 > 0$ e $S_j > 0 \; \forall \; j$. Daí, $\frac{S_{r+1}}{S_1} = \frac{\binom{n}{r+1} k^{r+1}}{nk} = \frac{1}{n} \binom{n}{r+1} k^r > 0$ e é constante em cada ponto de Σ.

Portanto, Σ é uma hipersuperfície com $S_1 > 0$ e $\frac{S_{r+1}}{S_1} > 0$ é uma constante, a partir de 5.3 temos

$$
\begin{aligned}
I_r(f) &= -\int\limits_{\Sigma} f\left\{\tilde{L}_r(f) + f\left[\frac{2S_2S_{r+1}}{S_1} - (r+2)S_{r+2} + c(n-r)S_r - \frac{cnS_{r+1}}{S_1}\right]\right\} d\mathbf{M} \\
&= -\int\limits_{\Sigma} f\left\{L_r f - \frac{S_{r+1}}{S_1}\Delta f + f\left[\frac{2S_2S_{r+1}}{S_1} - (r+2)S_{r+2} + c(n-r)S_r - cn\frac{S_{r+1}}{S_1}\right]\right\} d\mathbf{M} \\
&= -\int\limits_{\Sigma} f\left\{\binom{n-1}{r}k^r\Delta f - \frac{1}{n}\binom{n}{r+1}k^r\Delta f\right. \\
&\quad + f\left[\frac{2}{nk}\binom{n}{2}\binom{n}{r+1}k^2k^{r+1} - (r+2)\binom{n}{r+2}k^{r+2}\right. \\
&\quad \left.\left. +\ c(n-r)\binom{n}{r}k^r - \frac{cn}{n}\binom{n}{r+1}k^r\right]\right\} d\mathbf{M} \\
&= -\int\limits_{\Sigma} \left\{\left[\binom{n-1}{r} - \frac{1}{n}\binom{n}{r+1}\right] k^r f\Delta f\right. \\
&\quad + \left[\frac{2}{n}\binom{n}{2}\binom{n}{r+1} - (r+2)\binom{n}{r+2}\right] k^{r+2}f^2 \\
&\quad \left. + \left[(n-r)\binom{n}{r} - \binom{n}{r+1}\right] ck^r f^2\right\} d\mathbf{M} \\
&= -\int_{\Sigma} \left\{\frac{r}{n}\binom{n}{r+1}k^r f\Delta f + r\binom{n}{r+1}k^{r+2}f^2 + r\binom{n}{r+1}ck^r f^2\right\} d\mathbf{M} \\
&= -\frac{r}{n}\binom{n}{r+1}k^r \int\limits_{\Sigma} \left\{f\Delta f + nk^2f^2 + ncf^2\right\} d\mathbf{M} \\
&= -\frac{r}{n}\binom{n}{r+1}k^r \int\limits_{\Sigma} \left\{f\Delta f + n(k^2+c)f^2\right\} d\mathbf{M} \\
&= \frac{r}{n}\binom{n}{r+1}k^r \int\limits_{\Sigma} \left\{-f\Delta f - n(k^2+c)f^2\right\} d\mathbf{M}
\end{aligned}
$$

Seja λ_1 o primeiro autovalor do Laplaciano de Σ, então, pela caracterização variacional de λ_1 (Veja [11]).

$$
I_r(f) \geq \frac{r}{n}\binom{n}{r+1}k^r \int\limits_{\Sigma} \left\{\lambda_1 - n(k^2+c)\right\} f^2 d\mathbf{M} = 0.
$$

Logo

$I_r(f) \geq 0,$

onde a última igualdade foi obtida da hipótese de que Σ é isométrica a uma n-esfera euclidiana com curvatura seccional constante k^2+c. Por isso $\lambda_1 = n(k^2+c)$. Portanto, Σ é r-estável. ■

Agora estamos diante do nosso principal Teorema.

Teorema 5.0.3. *Considere $\mathbf{M}^n$ uma Variedade Riemanniana conexa, orientada e compacta sem bordo, $1 \leq r \leq n-1$. Uma imersão isometrica $x : \mathbf{M}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ para o qual S_1 positiva e $S_{r+1}/S_1 =$ constante é r-estavél se, e somente se, $\mathbf{M}$ é uma esfera e x é a sua inclusão, e é uma hipersuperfície totalmente umbilica.*

Demonstração. Da Proposição 5.0.9, a condição é suficiente. Agora vamos provar que também é necessário. Pela proposição 3.3.6, o operador $\tilde{L}_r$ é elíptico.

Seja $\int\limits_{\mathbf{M}} xS_1 d\mathbf{M} = C$, vetor constante do $\mathbb{R}^{n+1}$, então

$$\tilde{x} = x - \frac{C}{\int\limits_{\mathbf{M}} S_1 d\mathbf{M}},$$

satisfaz $\int\limits_{\mathbf{M}} \tilde{x}S_1 d\mathbf{M} = 0$. De fato,

$$\tilde{x} = x - \frac{C}{\int\limits_{\mathbf{M}} S_1 d\mathbf{M}} \Rightarrow \tilde{x}S_1 = xS_1 - \frac{S_1}{\int\limits_{\mathbf{M}} S_1 d\mathbf{M}}C \Rightarrow \int\limits_{\mathbf{M}} \tilde{x}S_1 d\mathbf{M} = \int\limits_{\mathbf{M}} xS_1 d\mathbf{M} - \frac{\int\limits_{\mathbf{M}} S_1 d\mathbf{M}}{\int\limits_{\mathbf{M}} S_1 d\mathbf{M}}C$$

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbf{M}} \tilde{x}S_1 d\mathbf{M} &= \int\limits_{\mathbf{M}} xS_1 d\mathbf{M} - \frac{\int\limits_{\mathbf{M}} S_1 d\mathbf{M}}{\int\limits_{\mathbf{M}} S_1 d\mathbf{M}}C \\
&= \int\limits_{\mathbf{M}} xS_1 d\mathbf{M} - C \\
&= C - C = 0
\end{aligned}$$

Como as condições de (5.3) são as mesmas para x e $\tilde{x}$, assim, sem perda de generalidade, podemos assumir que

$$\int\limits_{\mathbf{M}} xS_1 d\mathbf{M} = 0.$$

Tome uma base ortonormal $\{E_1, E_2, \ldots, E_{n+1}\}$ do $\mathbb{R}^{n+1}$ e defina as funções f_j, g_j por

$$f_j = \langle N, E_j \rangle, \quad g_j = \langle x, E_j \rangle. \tag{5.4}$$

A hipótese de r-estabilidade implica que $I_r(g_j) \geq 0$ para cada j, $1 \leq j \leq n+1$. Assim, usando (5.3) com $c = 0$ temos

$$\begin{aligned}
0 \leq I_r(g_j) &= -\int_{\mathbf{M}} g_j \left\{ \tilde{L}_r g_j + g_j \left[2S_2 \frac{S_{r+1}}{S_1} - (r+2)S_{r+2} \right] \right\} d\mathbf{M} \\
&= -\int_{\mathbf{M}} g_j \left\{ L_r g_j - \frac{S_{r+1}}{S_1} \Delta g_j + g_j \left[2S_2 \frac{S_{r+1}}{S_1} - (r+2)S_{r+2} \right] \right\} d\mathbf{M}
\end{aligned}$$

usando o Teorema 3.3.2, no caso $c = 0$, para obter $L_r g_j$ e $\Delta g_j = L_0 g_j$ obtemos

$$\begin{aligned}
&= -\int_{\mathbf{M}} g_j \left\{ (r+1)S_{r+1} f_j - \frac{S_{r+1}}{S_1} S_1 f_j + g_j \left[2S_2 \frac{S_{r+1}}{S_1} - (r+2)S_{r+2} \right] \right\} d\mathbf{M} \\
&= -\int_{\mathbf{M}} g_j \left\{ (r+1)S_{r+1} f_j - S_{r+1} f_j + g_j \left[2S_2 \frac{S_{r+1}}{S_1} - (r+2)S_{r+2} \right] \right\} d\mathbf{M} \\
&= -\int_{\mathbf{M}} g_j \left\{ r S_{r+1} f_j + g_j \left[2S_2 \frac{S_{r+1}}{S_1} - (r+2)S_{r+2} \right] \right\} d\mathbf{M} \\
&= -\int_{\mathbf{M}} \left\{ r S_{r+1} f_j g_j + {g_j}^2 \left[2S_2 \frac{S_{r+1}}{S_1} - (r+2)S_{r+2} \right] \right\} d\mathbf{M}.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Tomando o somatório para $1 \leq j \leq n+1$, temos que

$$0 \leq -\int_{\mathbf{M}} \left\{ r S_{r+1} \sum_{j=1}^{n+1} f_j g_j + \sum_{j=1}^{n+1} {g_j}^2 \left[2S_2 \frac{S_{r+1}}{S_1} - (r+2)S_{r+2} \right] \right\} d\mathbf{M}. \tag{5.6}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
f_j g_j &= \langle N, E_j \rangle \langle x, E_j \rangle \\
&= \langle N, \langle x, E_j \rangle E_j \rangle \\
\sum_{j=1}^{n+1} f_j g_j &= \left\langle N, \sum_{j=1}^{n+1} \langle x, E_j \rangle E_j \right\rangle = \langle N, x \rangle.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} {g_j}^2 &= \langle x, E_j \rangle \langle x, E_j \rangle \\ &= \langle x, \langle x, E_j \rangle E_j \rangle \\ \sum_{j=1}^{n+1} {g_j}^2 &= \left\langle x, \sum_{j=1}^{n+1} \langle x, E_j \rangle E_j \right\rangle = |x|^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} 0 \leq & \int_{\mathbf{M}} \left\{ -rS_{r+1} \langle x, N \rangle - \left[2S_2 \frac{S_{r+1}}{S_1} - (r+2)S_{r+2} \right] |x|^2 \right\} d\mathbf{M} \\ = & \int_{\mathbf{M}} \left\{ -rS_{r+1} \langle x, N \rangle - \left[2S_2 \frac{S_{r+1}}{S_1} - (r+2)S_{r+2} \right] \left(\left| x^T \right|^2 + \langle x, N \rangle^2 \right) \right\} d\mathbf{M}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Observe que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{M}} \left\langle \left(P_{r+1} - \frac{S_{r+1}}{S_1} P_1 \right) Ax^T, x^T \right\rangle d\mathbf{M} = & \int_{\mathbf{M}} \left\langle P_{r+1} Ax^T, x^T \right\rangle d\mathbf{M} \\ & + \int_{\mathbf{M}} \left\langle - \frac{S_{r+1}}{S_1} P_1 Ax^T, x^T \right\rangle d\mathbf{M}. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Pela Prop. 3.3.3 e sabendo que $\frac{S_{r+1}}{S_1}$ é uma constante, temos que

$$\int_{\mathbf{M}} \left\langle P_{r+1} Ax^T, x^T \right\rangle d\mathbf{M} = \int_{\mathbf{M}} \left\{ (n-r-1) S_{r+1} \langle x, N \rangle + (r+2) S_{r+2} \langle x, N \rangle^2 \right\} d\mathbf{M}. \tag{5.9}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{M}} \left\langle - \frac{S_{r+1}}{S_1} P_1 Ax^T, x^T \right\rangle d\mathbf{M} = & \int_{\mathbf{M}} - \frac{S_{r+1}}{S_1} \left\{ (n-1) S_1 \langle x, N \rangle + 2S_2 \langle x, N \rangle^{\ 2} \right\} d\mathbf{M} \\ = & \int_{\mathbf{M}} \left\{ -(n-1) S_{r+1} \langle x, N \rangle - 2 \frac{S_2 S_{r+1}}{S_1} \langle x, N \rangle^{\ 2} \right\} d\mathbf{M}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Substituindo (5.9) e (5.10) na equação 5.8, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{M}} \left\langle \left(P_{r+1} - \frac{S_{r+1}}{S_1} P_1 \right) Ax^T, x^T \right\rangle d\mathbf{M} &= \int_{\mathbf{M}} \left\{ (n-r-1) S_{r+1} \langle x, N \rangle + (r+2) S_{r+2} \langle x, N \rangle^2 \right\} d\mathbf{M} \\
&\quad + \int_{\mathbf{M}} \left\{ -(n-1) S_{r+1} \langle x, N \rangle - 2 \frac{S_2 S_{r+1}}{S_1} \langle x, N \rangle^{\,2} \right\} d\mathbf{M} \\
&= \int_{\mathbf{M}} \{ ((n-r-1) - (n-1)) S_{r+1} \langle x, N \rangle \\
&\quad - \left(2 \frac{S_2 S_{r+1}}{S_1} - (r+2) S_{r+2} \right) \langle x, N \rangle^2 \Bigg\} d\mathbf{M} \\
&= \int_{\mathbf{M}} \{ -r S_{r+1} \langle x, N \rangle \\
&\quad - \left(2 \frac{S_2 S_{r+1}}{S_1} - (r+2) S_{r+2} \right) \langle x, N \rangle^2 \Bigg\} d\mathbf{M}.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Substituindo (5.11) na equação (5.7), temos

$$0 \leq \int_{\mathbf{M}} \left\{ \left((r+2) S_{r+2} - 2 S_2 \frac{S_{r+1}}{S_1} \right) \left| x^T \right|^2 + \left\langle \left(P_{r+1} - \frac{S_{r+1}}{S_1} P_1 \right) Ax^T, x^T \right\rangle \right\} d\mathbf{M}. \tag{5.12}$$

Seja $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ vetores ortonormais principais correspondentes as curvaturas principais $\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$, respectivamente. Assim,

$$x^T = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i. \tag{5.13}$$

e

$$\begin{aligned}
Ax^T &= \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle Ae_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle k_i e_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} k_i \langle x, e_i \rangle e_i.
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Substituindo (5.13) e (5.14) na expressão

$$\left\langle \left(P_{r+1} - \frac{S_{r+1}}{S_1} P_1 \right) Ax^T, x^T \right\rangle.$$

Temos que

$$\left\langle \left(P_{r+1} - \frac{S_{r+1}}{S_1}P_1\right) Ax^T, x^T \right\rangle = \left\langle \left(P_{r+1} - \frac{S_{r+1}}{S_1}P_1\right) \sum_{i=1}^{n} k_i \langle x, e_i\rangle e_i, \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j\rangle e_j \right\rangle$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} k_i \langle x, e_i\rangle \langle x, e_j\rangle \left\langle \left(P_{r+1} - \frac{S_{r+1}}{S_1}P_1\right) e_i, e_j \right\rangle$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} k_i \langle x, e_i\rangle \langle x, e_j\rangle \left\langle P_{r+1}\ e_i - \frac{S_{r+1}}{S_1}P_1\ e_i, e_j \right\rangle.$$

Utilizando a Prop.(3.2.1), temos que

$$\left\langle \left(P_{r+1} - \frac{S_{r+1}}{S_1}P_1\right) Ax^T, x^T \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} k_i \langle x, e_i\rangle \langle x, e_j\rangle \left\langle P_{r+1}\, e_i - \frac{S_{r+1}}{S_1}P_1\, e_i, e_j \right\rangle$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} k_i \langle x, e_i\rangle \langle x, e_j\rangle \left\langle S_{r+1}(A_i)e_i - \frac{S_{r+1}}{S_1}S_1(A_i)e_i, e_j \right\rangle$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} k_i \langle x, e_i\rangle \langle x, e_j\rangle \left\langle \left(S_{r+1}(A_i) - \frac{S_{r+1}}{S_1}S_1(A_i)\right) e_i, e_j \right\rangle$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} k_i \langle x, e_i\rangle \langle x, e_j\rangle \left(S_{r+1}(A_i) - \frac{S_{r+1}}{S_1}S_1(A_i)\right) \langle e_i, e_j\rangle$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} k_i \langle x, e_i\rangle \langle x, e_j\rangle \left(S_{r+1}(A_i) - \frac{S_{r+1}}{S_1}S_1(A_i)\right) \delta_{ij}$$

fazendo $j = i$ e utilizando a equação (3.1), temos

$$= \sum_{i=1}^{n} k_i \langle x, e_i\rangle^2 \left(S_{r+1}(A_i) - \frac{S_{r+1}}{S_1}S_1(A_i)\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{S_1} \left(S_1 S_{r+1}(A_i) - S_{r+1}S_1(A_i)\right) \langle x, e_i\rangle^2$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{S_1} \left(\left(k_i S_0(A_i) + S_1(A_i)\right) S_{r+1}(A_i) - \left(k_i S_r(A_i)\right.\right.$$
$$\left.\left. + S_{r+1}(A_i)\right) S_1(A_i)\right) \langle x, e_i\rangle^2$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{S_1} \left(k_i S_{r+1}(A_i) + S_1(A_i)S_{r+1}(A_i) - k_i S_1(A_i)S_r(A_i)\right.$$
$$\left. - S_1(A_i)S_{r+1}(A_i)\right) \langle x, e_i\rangle^2$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{{k_i}^2}{S_1} \left(S_{r+1}(A_i) - S_1(A_i)S_r(A_i)\right) \langle x, e_i\rangle^2. \tag{5.15}$$

Usando 5.15, obtemos que

$$\left((r+2)S_{r+2} - 2S_2\frac{S_{r+1}}{S_1}\right)\left|x^T\right|^2 + \left\langle\left(P_{r+1} - \frac{S_{r+1}}{S_1}P_1\right)Ax^T, x^T\right\rangle$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left\{(r+2)S_{r+2} - 2S_2\frac{S_{r+1}}{S_1} + \frac{{k_i}^2}{S_1}\left(S_{r+1}(A_i) - S_1(A_i)S_r(A_i)\right)\right\}\langle x, e_i\rangle^2$$
$$= \frac{1}{S_1}\sum_{i=1}^{n}\left\{(r+2)S_1S_{r+2} - 2S_2S_{r+1} + {k_i}^2\left(S_{r+1}(A_i) - S_1(A_i)S_r(A_i)\right)\right\}\langle x, e_i\rangle^2. \qquad (5.16)$$

Utilizando as equações (3.20) e (3.21), temos que

$$(r+2)S_1S_{r+2} - 2S_2S_{r+1} + {k_i}^2\left(S_{r+1}(A_i) - S_1(A_i)S_r(A_i)\right) < 0.$$

Das equações (5.12) e (5.16), concluimos que $x^T = 0$, isto significa que $x = kN$ para alguma função k. Dai, temos que

$$d|x|^2 = 2\langle dx, x\rangle = 2\langle dx, kN\rangle = 2k\langle dx, N\rangle = 0.$$

Isto significa que $|x|^2$ é uma constante, ou seja, $\mathbf{M}$ é uma esfera. Isso completa a prova do Teorema. ■

No caso de $\overline{\mathbf{M}}^{n+1}(c)$ ser uma hipersuperfície de um hemisfério aberto de $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ ou o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$, temos o seguinte Teorema:

Teorema 5.0.4. *Considere $\mathbf{M}^n$ uma Variedade Riemanniana conexa, orientada e compacta sem bordo, $1 \leq r \leq n-1$. Seja $\overline{\mathbf{M}}^{n+1}(c)$ um hemisferio aberto de $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ ou o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ se $c = 1$ ou $c = -1$, respectivamente. Dado $r \in [1, n-1] \cap \mathbb{N}$ com r par. Uma imersão isometrica $x : \mathbf{M}^n \longrightarrow \overline{\mathbf{M}}^{n+1}(c)$, satisfazendo simultaneamente que $S_1 > 0$ e $S_{r+1}/S_1 =$ constante é r-estavél se, e somente se, $\mathbf{M}$ é uma esfera e x é a sua inclusão, x não é totalmente geodesica e é totalmente umbilica.*

Demonstração.
($\Leftarrow$) Foi provada na Proposição 5.0.9.
Antes de provarmos a condição necessária, observamos que, pela Proposição 3.3.6, $\tilde{L}_r$ é elíptico.
($\Rightarrow$) Consideremos separadamente dois casos:
Caso 1: $\overline{\mathbf{M}}^{n+1}(c) =$ hemisfério de $\mathbb{S}^{n+1}(1) \subset \mathbb{R}^{n+2}$.
Sendo N o campo normal unitário, definamos

$$\bar{N} := \int_{\mathbf{M}} NS_1 d\mathbf{M}.$$

Afirmamos que $\bar{N}$ não é nulo, com efeito, a prova será feita por contradição, para isto suponha que $\bar{N} = 0$.

Agora consideremos $\{E_0, E_1, \ldots, E_{n+1}\}$ como sendo uma base ortonormal do $\mathbb{R}^{n+2}$. Definamos: $f_j = \langle N, E_j\rangle$ e $g_j = \langle x, E_j\rangle$. Temos

$$f_j g_j = \langle N, E_j\rangle \langle x, E_j\rangle = \langle N, \langle x, E_j\rangle E_j\rangle .$$

Logo,

$$\sum_{j=0}^{n+1} f_j g_j = \left\langle N, \sum_{j=0}^{n+1} \langle x, E_j\rangle E_j \right\rangle = \langle N, x\rangle = 0.$$

Da mesma forma,

$$f_j{}^2 = \langle N, E_j\rangle \langle N, E_j\rangle = \langle N, \langle N, E_j\rangle E_j\rangle .$$

Logo,

$$\sum_{j=0}^{n+1} f_j{}^2 = \left\langle N, \sum_{j=0}^{n+1} \langle N, E_j\rangle E_j \right\rangle = \langle N, N\rangle = 1.$$

Da relação (2) do Teorema 3.3.2 com $c = 1$, temos

$$\begin{aligned} L_r \langle N, E_j\rangle &= -\langle \text{grad } (S_{r+1}), E_j\rangle - (S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2}) \langle N, E_j\rangle + (r+1)S_{r+1} \langle x, E_j\rangle \\ L_r f_j &= -\langle \text{grad } (S_{r+1}), E_j\rangle - (S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2}) f_j + (r+1)(S_{r+1}) g_j. \end{aligned}$$

e para $r = 0$, temos também que

$$\begin{aligned} L_0 f_j &= -\langle \text{grad } (S_1), E_j\rangle - (S_1 S_1 - 2S_2) f_j + S_1\ g_j \\ \Delta f_j &= -\langle \text{grad } (S_1), E_j\rangle - (S_1{}^2 - 2S_2) f_j + S_1\ g_j. \end{aligned}$$

Por outro lado, como estamos supondo que a imersão é r-estavél, então $I_r(f_j) \geq 0$. De modo que para qualquer $j \in \{0, 1, 2, 3, \ldots n+1\}$, pela definição temos que

$$I_r(f_j) = -\int_{\mathbf{M}} f_j \left\{ \tilde{L}_r(f_j) + f_j \left[2S_2 \frac{S_{r+1}}{S_1} - (r+2)S_{r+2} + c(n-r)S_r - cn \frac{S_{r+1}}{S_1} \right] \right\} d\mathbf{M}.$$

como estamos no caso em que $c = 1$, então temos

$$\begin{aligned} I_r(f_j) = -\int_{\mathbf{M}} f_j &\left\{ L_r f_j - \frac{S_{r+1}}{S_1} \Delta f_j \right. \\ &\left. + f_j \left[2S_2 \frac{S_{r+1}}{S_1} - (r+2)S_{r+2} + (n-r)S_r - n \frac{S_{r+1}}{S_1} \right] \right\} d\mathbf{M} \geq 0. \end{aligned}$$

Observe que

$$
\begin{aligned}
L_r f_j - \frac{S_{r+1}}{S_1}\Delta f_j =& - \langle \text{grad } (S_{r+1}), E_j\rangle - (S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2})f_j + (r+1)S_{r+1}\ g_j \\
& - \frac{S_{r+1}}{S_1}\left\{- \langle \text{grad } (S_1), E_j\rangle - ({S_1}^2 - 2S_2)f_j + S_1\ g_j\right\} \\
=& - \langle \text{grad } (S_{r+1}), E_j\rangle - (S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2})f_j + (r+1)S_{r+1}\ g_j \\
& + \frac{S_{r+1}}{S_1}\langle \text{grad } (S_1), E_j\rangle + \frac{S_{r+1}}{S_1}({S_1}^2 - 2S_2)f_j - S_{r+1}\ g_j \\
=& \left[\frac{S_{r+1}}{S_1}({S_1}^2 - 2S_2) - (S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2})\right] f_j \\
& + [(r+1)(S_{r+1}) - S_{r+1}]\, g_j + \frac{S_{r+1}}{S_1}\langle \text{grad } (S_1), E_j\rangle - \langle \text{grad } (S_{r+1}), E_j\rangle \\
=& \left[S_{r+1}S_1 - 2S_2\frac{S_{r+1}}{S_1} - S_1 S_{r+1} + (r+2)S_{r+2}\right] f_j \\
& + (rS_{r+1})g_j + \frac{S_{r+1}}{S_1}\langle \text{grad } (S_1), E_j\rangle - \langle \text{grad } (S_{r+1}), E_j\rangle \\
=& \left[(r+2)S_{r+2} - 2S_2\frac{S_{r+1}}{S_1}\right] f_j + rS_{r+1}\ g_j \\
& + \frac{S_{r+1}}{S_1}\langle \text{grad } (S_1), E_j\rangle - \langle \text{grad } (S_{r+1}), E_j\rangle .
\end{aligned}
$$

Assim, temos:

$$
\begin{aligned}
I_r(f_j) =& - \int_{\mathbf{M}} f_j \left\{ L_r f_j - \frac{S_{r+1}}{S_1}\Delta f_j \right. \\
& \left. +\ f_j \left[2S_2\frac{S_{r+1}}{S_1} - (r+2)S_{r+2} + (n-r)S_r - n\frac{S_{r+1}}{S_1}\right]\right\} d\mathbf{M} \qquad (5.17) \\
=& - \int_{\mathbf{M}} f_j \left\{ \left[(r+2)S_{r+2} - 2S_2\frac{S_{r+1}}{S_1}\right] f_j + (rS_{r+1})g_j + \frac{S_{r+1}}{S_1}\langle \text{grad } (S_1), E_j\rangle \right. \\
& \left. - \langle \text{grad } (S_{r+1}), E_j\rangle + f_j \left[2S_2\frac{S_{r+1}}{S_1} - (r+2)S_{r+2} + (n-r)S_r - n\frac{S_{r+1}}{S_1}\right]\right\} d\mathbf{M} \\
=& - \int_{\mathbf{M}} f_j \left\{ (rS_{r+1})g_j + \frac{S_{r+1}}{S_1}\langle \text{grad } (S_1), E_j\rangle - \langle \text{grad } (S_{r+1}), E_j\rangle \right. \\
& \left. +\ f_j \left[(r+2)S_{r+2} - 2S_2\frac{S_{r+1}}{S_1} + 2S_2\frac{S_{r+1}}{S_1} - (r+2)S_{r+2} + (n-r)S_r - n\frac{S_{r+1}}{S_1}\right]\right\} d\mathbf{M} \\
=& - \int_{\mathbf{M}} f_j \left\{ (rS_{r+1})g_j + \left[(n-r)S_r - n\frac{S_{r+1}}{S_1}\right] f_j \right\} d\mathbf{M}
\end{aligned}
$$

$$= -\int_{\mathbf{M}} \left\{ (rS_{r+1}) f_j g_j + \left[(n-r)S_r - n\frac{S_{r+1}}{S_1} \right] {f_j}^2 \right\} d\mathbf{M} \geq 0.$$

Tomando somatório para $0 \leq j \leq n+1$, temos que

$$0 \leq \sum_{j=0}^{n+1} \left\{ -\int_{\mathbf{M}} \left\{ (rS_{r+1}) f_j g_j + \left[(n-r)S_r - n\frac{S_{r+1}}{S_1} \right] {f_j}^2 \right\} d\mathbf{M} \right\}$$

$$0 \leq -\int_{\mathbf{M}} \left\{ (rS_{r+1}) \sum_{j=0}^{n+1} f_j g_j + \left[(n-r)S_r - n\frac{S_{r+1}}{S_1} \right] \sum_{j=0}^{n+1} {f_j}^2 \right\} d\mathbf{M}$$

$$0 \leq -\int_{\mathbf{M}} \left\{ (rS_{r+1}) \langle N, x \rangle + \left[(n-r)S_r - n\frac{S_{r+1}}{S_1} \right] \langle N, N \rangle \right\} d\mathbf{M},$$

como $\langle N, x \rangle = 0$ e $\langle N, N \rangle = 1$, segue-se que

$$0 \leq -\int_{\mathbf{M}} \left\{ (rS_{r+1}) \langle N, x \rangle + \left[(n-r)S_r - n\frac{S_{r+1}}{S_1} \right] \langle N, N \rangle \right\} d\mathbf{M}$$

$$0 \leq -\int_{\mathbf{M}} \left\{ (n-r)S_r - n\frac{S_{r+1}}{S_1} \right\} d\mathbf{M}$$

$$0 \leq -\int_{\mathbf{M}} \frac{1}{S_1} \left[(n-r)S_1 S_r - nS_{r+1} \right] d\mathbf{M}.$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}
I_r(f_j) &= -\int_{\mathbf{M}} \frac{1}{S_1} \left[(n-r)S_1 S_r - nS_{r+1} \right] d\mathbf{M} \\
&= -\int_{\mathbf{M}} \frac{1}{S_1} \left[(n-r)H_1 \binom{n}{1} H_r \binom{n}{r} - n\binom{n}{r+1} H_{r+1} \right] d\mathbf{M} \\
&= -\int_{\mathbf{M}} \frac{1}{S_1} \left[n(n-r)\binom{n}{r} H_1 H_r - n\binom{n}{r+1} H_{r+1} \right] d\mathbf{M}
\end{aligned}$$

como $H_1 H_r \geq H_{r+1}$, então

$$\begin{aligned}
&\leq -\int_{\mathbf{M}} \frac{1}{S_1} \left[n(n-r)\binom{n}{r} H_{r+1} - n\binom{n}{r+1} H_{r+1} \right] d\mathbf{M} \\
&= -\int_{\mathbf{M}} \frac{1}{S_1} \left[\left(n(n-r)\binom{n}{r} - n\binom{n}{r+1} \right) H_{r+1} \right] d\mathbf{M}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int\limits_{\mathbf{M}} \frac{1}{S_1}\left[\left(n(n-r)\frac{n!}{r!(n-r)!} - n\binom{n}{r+1}\right)H_{r+1}\right]d\mathbf{M}\\
&= -\int\limits_{\mathbf{M}} \frac{1}{S_1}\left[\left(n(n-r)\frac{n!}{r!(n-r)(n-r-1)!} - n\binom{n}{r+1}\right)H_{r+1}\right]d\mathbf{M}\\
&= -\int\limits_{\mathbf{M}} \frac{1}{S_1}\left[\left(n\frac{(r+1)n!}{(r+1)r!(n-r-1)!} - n\binom{n}{r+1}\right)H_{r+1}\right]d\mathbf{M}\\
&= -\int\limits_{\mathbf{M}} \frac{1}{S_1}\left[\left(n\frac{(r+1)n!}{(r+1)!(n-r-1)!} - n\binom{n}{r+1}\right)H_{r+1}\right]d\mathbf{M}\\
&= -\int\limits_{\mathbf{M}} \frac{1}{S_1}\left[\left(n(r+1)\binom{n}{r+1} - n\binom{n}{r+1}\right)H_{r+1}\right]d\mathbf{M}\\
&= -\int\limits_{\mathbf{M}} \frac{1}{S_1}\left[(n(r+1)-n)\binom{n}{r+1}H_{r+1}\right]d\mathbf{M}\\
&= -\int\limits_{\mathbf{M}} \frac{1}{S_1}\left[(nr+n-n)\binom{n}{r+1}H_{r+1}\right]d\mathbf{M}\\
&= -\int\limits_{\mathbf{M}} \frac{1}{S_1}\left[nr\binom{n}{r+1}H_{r+1}\right]d\mathbf{M}\\
&= -\int\limits_{\mathbf{M}} \frac{1}{S_1}\left[nrS_{r+1}\right]d\mathbf{M}\\
&= -\int\limits_{\mathbf{M}} \frac{nrS_{r+1}}{S_1}d\mathbf{M} < 0.
\end{aligned}
$$

Portanto , chegamos a uma contradição. Assim, $\bar{N}$ não pode ser zero.

Seja $\{E_0, E_1, \ldots, E_{n+1}\}$ uma base ortonormal do $\mathbb{R}^{n+2}$, tome $\bar{N} \neq 0$ tal que $E_0 = \bar{N}/\left|\bar{N}\right|$, e defina f_j e g_j como em (5.4). Agora temos

$$\int\limits_{\mathbf{M}} f_j S_1 d\mathbf{M} = 0, \ para\ 1 \leq j \leq n+1.$$

Note que

$$\sum_{j=0}^{n+1} f_j g_j = 0 \Rightarrow f_0 g_0 + \sum_{j=1}^{n+1} f_j g_j = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n+1} f_j g_j = -f_0 g_0.$$

e

$$\sum_{j=0}^{n+1} {f_j}^2 = 1 \Rightarrow {f_0}^2 + \sum_{j=1}^{n+1} {f_j}^2 = 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n+1} {f_j}^2 = 1 - {f_0}^2.$$

Para estas funções r-estáveis implica a validade de (5.17). Tomando o somatório para $1 \leq j \leq n+1$ obtemos que

$$0 \leq \int\limits_{\mathbf{M}} \left\{ (-rS_{r+1}) \sum_{j=1}^{n+1} f_j g_j - \left[(n-r)S_r - n\frac{S_{r+1}}{S_1} \right] \sum_{j=1}^{n+1} {f_j}^2 \right\} d\mathbf{M}$$
$$= \int\limits_{\mathbf{M}} \left\{ (rS_{r+1}) f_0 g_0 - \left[(n-r)S_r - n\frac{S_{r+1}}{S_1} \right] (1 - {f_0}^2) \right\} d\mathbf{M}.$$

Note que, $n(n-r)\binom{n}{r} \geq n\binom{n}{r+1}$ e como $H_1 H_r \geq H_{r+1}$, então

$$n(n-r)\binom{n}{r} H_1 H_r \geq n\binom{n}{r+1} H_{r+1}.$$

Daí, $(n-r)S_r \geq n\dfrac{S_{r+1}}{S_1}$, isto é, $(n-r)S_r - n\dfrac{S_{r+1}}{S_1} \geq 0$. Como $1 = |E_0|^2 = \sum_{i=0}^{n+1} \langle E_0, e_i \rangle^2 \geq \langle E_0, x \rangle^2 + \langle E_0, N \rangle^2 = {f_0}^2 + {g_0}^2$, então

$$1 \geq {f_0}^2 + {g_0}^2 \implies 1 - {f_0}^2 \geq {g_0}^2.$$

Por outro lado, temos

$$0 \leq \int\limits_{\mathbf{M}} \left\{ (rS_{r+1}) f_0 g_0 - \left[(n-r)S_r - n\frac{S_{r+1}}{S_1} \right] (1 - {f_0}^2) \right\} d\mathbf{M}$$
$$\leq \int\limits_{\mathbf{M}} \left\{ (rS_{r+1}) f_0 g_0 - \left[(n-r)S_r - n\frac{S_{r+1}}{S_1} \right] {g_0}^2 \right\} d\mathbf{M}.$$

Sabemos do Lema 3.3.2 que:

$$\int\limits_{\mathbf{M}} g_0 L_r(g_0) d\mathbf{M} = -\int\limits_{\mathbf{M}} \langle P_r \text{grad } g_0, \text{grad } g_0 \rangle d\mathbf{M}.$$

Mas, $\tilde{L}_r g_0 = L_r g_0 - \frac{S_{r+1}}{S_1} \Delta g_0$ e multiplicando ambos os membros por g_0 temos

$$g_0 \tilde{L}_r g_0 = g_0 L_r g_0 - \frac{S_{r+1}}{S_1} g_0 \Delta g_0.$$

Integrando sobre M, temos

$$\int\limits_{\mathbf{M}} g_0 \tilde{L}_r g_0 d\mathbf{M} = \int\limits_{\mathbf{M}} g_0 L_r g_0 d\mathbf{M} - \int\limits_{\mathbf{M}} \frac{S_{r+1}}{S_1} g_0 \Delta g_0 d\mathbf{M}$$
$$= -\int\limits_{\mathbf{M}} \langle P_r \text{grad } g_0, \text{grad } g_0 \rangle d\mathbf{M} - \int\limits_{\mathbf{M}} \frac{S_{r+1}}{S_1} g_0 \Delta g_0 d\mathbf{M}.$$

Mas,
grad $({g_0}^2) = 2g_0\text{grad } g_0 + 2\langle \text{grad } g_0, \text{grad } g_0\rangle \Rightarrow g_0\text{grad } g_0 = \frac{1}{2}\text{grad } ({g_0}^2) - \langle \text{grad } g_0, \text{grad } g_0\rangle$.
Multiplicando ambos os membros por $\frac{S_{r+1}}{S_1}$ temos

$$\begin{aligned}\frac{S_{r+1}}{S_1}g_0\text{grad } g_0 =& \frac{1}{2}\frac{S_{r+1}}{S_1}\text{grad } ({g_0}^2) - \frac{S_{r+1}}{S_1}\langle \text{grad } g_0, \text{grad } g_0\rangle \\ =& \frac{1}{2}\frac{S_{r+1}}{S_1}\text{grad } ({g_0}^2) - \langle \frac{S_{r+1}}{S_1}\text{grad } g_0, \text{grad } g_0\rangle.\end{aligned}$$

Integrando sobre $\mathbf{M}$, temos

$$\int\limits_{\mathbf{M}} \frac{S_{r+1}}{S_1}g_0\text{grad } g_0 d\mathbf{M} = \int\limits_{\mathbf{M}} \frac{1}{2}\frac{S_{r+1}}{S_1}\text{grad } ({g_0}^2) d\mathbf{M} - \int\limits_{\mathbf{M}} \langle \frac{S_{r+1}}{S_1}\text{grad } g_0, \text{grad } g_0\rangle d\mathbf{M}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbf{M}} g_0\tilde{L}_r g_0 d\mathbf{M} = & -\int\limits_{\mathbf{M}} \langle P_r\text{grad } g_0, \text{grad } g_0\rangle d\mathbf{M} - \frac{1}{2}\int_{\mathbf{M}} \frac{S_{r+1}}{S_1}\text{grad } ({g_0}^2) d\mathbf{M} \\ & + \int\limits_{\mathbf{M}} \langle \frac{S_{r+1}}{S_1}\text{grad } g_0, \text{grad } g_0\rangle d\mathbf{M}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\int\limits_{\mathbf{M}} g_0\tilde{L}_r g_0 d\mathbf{M} = -\int\limits_{\mathbf{M}} \langle (P_r - \frac{S_{r+1}}{S_1}I)\text{grad } g_0, \text{grad } g_0\rangle d\mathbf{M} - \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbf{M}} \frac{S_{r+1}}{S_1}\text{grad } ({g_0}^2) d\mathbf{M}.$$

Como $\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbf{M}} \frac{S_{r+1}}{S_1}\text{grad } ({g_0}^2) d\mathbf{M} = \frac{1}{2}\frac{S_{r+1}}{S_1}\int\limits_{\mathbf{M}} \text{grad } ({g_0}^2) d\mathbf{M} = 0$, pelo Teorema de Stokes, pois $\mathbf{M}$ é compacta, então

$$\int\limits_{\mathbf{M}} g_0\tilde{L}_r g_0 d\mathbf{M} = -\int\limits_{\mathbf{M}} \langle (P_r - \frac{S_{r+1}}{S_1}I)\text{grad } g_0, \text{grad } g_0\rangle d\mathbf{M}.$$

Portanto, utilizando o Lema 3.3.2 e a elipticidade de $\tilde{L}_r$, podemos obter

$$\begin{aligned}0 \leq & \int\limits_{\mathbf{M}} \left\{(rS_{r+1})f_0 g_0 - \left[(n-r)S_r - n\frac{S_{r+1}}{S_1}\right]{g_0}^2\right\} d\mathbf{M} \\ = & \int\limits_{\mathbf{M}} \left\{g_0\left((rS_{r+1})f_0 - \left[(n-r)S_r - n\frac{S_{r+1}}{S_1}\right]g_0\right)\right\} d\mathbf{M} \\ = & \int\limits_{\mathbf{M}} \left\{g_0\left(L_r g_0 - \frac{S_{r+1}}{S_1}\Delta g_0\right)\right\} d\mathbf{M} \\ = & \int\limits_{\mathbf{M}} \left\{g_0\tilde{L}_r g_0\right\} d\mathbf{M}\end{aligned}$$

$$= -\int\limits_{\mathbf{M}} \langle (P_r - \frac{S_{r+1}}{S_1} I)\text{grad } g_0, \text{grad } g_0 \rangle d\mathbf{M} \ \leq \ 0.$$

Dessse modo, todas as desigualdades devem ser igualdades. Em particular, obtemos que grad $g_0 = 0$, portanto g_0 é uma constante. Assim, a imagem de x está contida na intersecção de um hiperplano e uma esfera $\mathbb{S}^{n+1}(1)$. Portanto, $x(\mathbf{M})$ é uma hiperesfera não-geodésica de $\mathbb{S}^{n+1}(1)$.

Caso 2: $\overline{\mathbf{M}}^{n+1}(c) = \mathbb{H}^{n+1}(-1) \subset {\mathbb{R}_1}^{n+2}$, onde ${\mathbb{R}_1}^{n+2}$ é o espaço de Lorentz.

Definamos $\tilde{x} := \int\limits_{\mathbf{M}} x S_1 d\mathbf{M}$. De $\langle x, x \rangle = -{x_0}^2 + \sum\limits_{j=1}^{n+1} {x_j}^2 = -1$ e $x_0 > 0$, obtemos

$$x_0 = \sqrt{1 + \sum_{j=1}^{n+1} {x_j}^2}.$$

Portanto, a partir da fórmula de Minkowski para integral, obtemos

$$\left(\int\limits_{\mathbf{M}} S_1 d\mathbf{M}\right)^2 + \sum_{j=1}^{n+1}\left(\int\limits_{\mathbf{M}} x_j S_1 d\mathbf{M}\right)^2 \leq \left(\int\limits_{\mathbf{M}} \sqrt{1 + \sum_{j=1}^{n+1} {x_j}^2} S_1 d\mathbf{M}\right)^2 = \left(\int\limits_{\mathbf{M}} x_0 S_1 d\mathbf{M}\right)^2.$$

Assim, temos

$$\langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle = -\left(\int\limits_{\mathbf{M}} x_0 S_1 d\mathbf{M}\right)^2 + \sum_{j=1}^{n+1}\left(\int\limits_{\mathbf{M}} x_j S_1 d\mathbf{M}\right)^2 \leq -\left(\int\limits_{\mathbf{M}} S_1 d\mathbf{M}\right)^2 < 0.$$

Tome $E_0 = \tilde{x}/\left|\tilde{x}\right|$ e complete a base ortonormal do ${\mathbb{R}_1}^{n+2}$. Para essa base, defina f_j e g_j como em (5.4). É claro que $\int\limits_{\mathbf{M}} g_j S_1 d\mathbf{M} = 0$, *para* $1 \leq j \leq n+1$. Assim, para tal g_j, r-estável implica:

$$I_r(g_j) = -\int\limits_{\mathbf{M}} g_j \left\{ \tilde{L}_r(g_j) + g_j \left[2S_2 \frac{S_{r+1}}{S_1} - (r+2)S_{r+2} + c(n-r)S_r - cn\frac{S_{r+1}}{S_1} \right] \right\} d\mathbf{M},$$

como estamos no caso em que $c = -1$, então temos

$$0 \leq I_r(g_j) = -\int\limits_{\mathbf{M}} g_j \left\{ L_r g_j - \frac{S_{r+1}}{S_1}\Delta g_j \right.$$
$$\left. + \ g_j \left[2S_2 \frac{S_{r+1}}{S_1} - (r+2)S_{r+2} - (n-r)S_r + n\frac{S_{r+1}}{S_1} \right] \right\} d\mathbf{M}.$$

Da relação (1) do Teorema 3.3.2 com $c = -1$, temos

$$\begin{aligned} L_r \langle x, E_j \rangle =& (r+1)S_{r+1} \langle N, E_j \rangle - (n-r)S_r \langle x, E_j \rangle \\ L_r g_j =& (r+1)S_{r+1} f_j + (n-r)S_r g_j, \end{aligned}$$

e para $r = 0$, temos também que

$$\begin{aligned} L_0 g_j =& S_1 f_j + n g_j \\ \Delta g_j =& S_1 f_j + n g_j. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} L_r g_j - \frac{S_{r+1}}{S_1}\Delta g_j =& (r+1)S_{r+1} f_j + (n-r)S_r g_j - \frac{S_{r+1}}{S_1}(S_1 f_j + n g_j) \\ =& \left[(r+1)S_{r+1} - S_{r+1}\right] f_j + \left[(n-r)S_r - n\frac{S_{r+1}}{S_1}\right] g_j \\ =& (rS_{r+1}) f_j + \left[(n-r)S_r - n\frac{S_{r+1}}{S_1}\right] g_j. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} 0 \leq I_r(g_j) =& -\int_{\mathbf{M}} g_j \left\{ L_r g_j - \frac{S_{r+1}}{S_1}\Delta g_j \right. \\ & \left. + \ g_j \left[2S_2\frac{S_{r+1}}{S_1} - (r+2)S_{r+2} - (n-r)S_r + n\frac{S_{r+1}}{S_1}\right]\right\} d\mathbf{M} \\ =& -\int_{\mathbf{M}} g_j \left\{ (rS_{r+1}) f_j + \left[(n-r)S_r - n\frac{S_{r+1}}{S_1}\right] g_j \right. \\ & \left. + \ g_j \left[2S_2\frac{S_{r+1}}{S_1} - (r+2)S_{r+2} - (n-r)S_r + n\frac{S_{r+1}}{S_1}\right]\right\} d\mathbf{M} \\ =& -\int_{\mathbf{M}} g_j \left\{ (rS_{r+1}) f_j + \left[(n-r)S_r - (n-r)S_r \right.\right. \\ & \left.\left. + \ 2S_2\frac{S_{r+1}}{S_1} - (r+2)S_{r+2} - n\frac{S_{r+1}}{S_1} + n\frac{S_{r+1}}{S_1}\right] g_j \right\} d\mathbf{M} \\ =& -\int_{\mathbf{M}} g_j \left\{ (rS_{r+1}) f_j + \left[2S_2\frac{S_{r+1}}{S_1} - (r+2)S_{r+2}\right] g_j \right\} d\mathbf{M} \\ =& \int_{\mathbf{M}} \left\{ \left[(r+2)S_{r+2} - 2S_2\frac{S_{r+1}}{S_1}\right] {g_j}^2 - (rS_{r+1}) f_j g_j \right\} d\mathbf{M}. \end{aligned}$$

Note que

$$\sum_{j=o}^{n+1} f_j g_j = 0 \Rightarrow -f_0 g_0 + \sum_{j=1}^{n+1} f_j g_j = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n+1} f_j g_j = f_0 g_0,$$

e

$$\sum_{j=o}^{n+1} {g_j}^2 = -1 \Rightarrow {g_0}^2 + \sum_{j=1}^{n+1} {g_0}^2 = -1 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n+1} {g_j}^2 = -1 + {g_0}^2.$$

Tomando somatório para $1 \leq j \leq n+1$, temos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\mathbf{M}} \left\{ \left[(r+2)S_{r+2} - 2S_2 \frac{S_{r+1}}{S_1} \right] \sum_{j=1}^{n+1} {g_j}^2 - (rS_{r+1}) \sum_{j=1}^{n+1} f_j g_j \right\} d\mathbf{M} \\ &= \int_{\mathbf{M}} \left\{ \left[(r+2)S_{r+2} - 2S_2 \frac{S_{r+1}}{S_1} \right] \left(-1 + {g_0}^2\right) - (rS_{r+1}) f_0 g_0 \right\} d\mathbf{M}. \end{aligned}$$

Como $-1 = |E_0|^2 = \sum_{i=0}^{n+1} \langle E_0, e_i \rangle^2 \geq -\langle E_0, x \rangle^2 + \langle E_0, N \rangle^2 = -{g_0}^2 + {f_0}^2$, então

$$-1 \geq -{g_0}^2 + {f_0}^2 \implies -1 + {g_0}^2 \geq {f_0}^2.$$

Por outro lado, usando o Corolário 3.3.1 obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\mathbf{M}} \left\{ \left[(r+2)S_{r+2} - 2S_2 \frac{S_{r+1}}{S_1} \right] \left(-1 + {g_0}^2\right) - (rS_{r+1}) f_0 g_0 \right\} d\mathbf{M} \\ &\leq \int_{\mathbf{M}} \left\{ \left[(r+2)S_{r+2} - 2S_2 \frac{S_{r+1}}{S_1} \right] {f_0}^2 - (rS_{r+1}) f_0 g_0 \right\} d\mathbf{M}. \end{aligned}$$

Portanto, utilizando o Lema 3.3.2 e a elipticidade de $\tilde{L}_r$, podemos obter

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\mathbf{M}} \left\{ \left[(r+2)S_{r+2} - 2S_2 \frac{S_{r+1}}{S_1} \right] {f_0}^2 - (rS_{r+1}) f_0 g_0 \right\} d\mathbf{M} \\ &= \int_{\mathbf{M}} \left\{ f_0 \left(\left[(r+2)S_{r+2} - 2S_2 \frac{S_{r+1}}{S_1} \right] f_0 - (rS_{r+1}) g_0 \right) \right\} d\mathbf{M} \\ &= \int_{\mathbf{M}} \left\{ f_0 \left(L_r f_0 - \frac{S_{r+1}}{S_1} \Delta f_0 \right) \right\} d\mathbf{M} \\ &= \int_{\mathbf{M}} \left\{ f_0 \tilde{L}_r f_0 \right\} d\mathbf{M} \\ &= -\int_{\mathbf{M}} \langle (P_r - \frac{S_{r+1}}{S_1} I) \text{grad } f_0, \text{grad } f_0 \rangle d\mathbf{M} \ \leq \ 0. \end{aligned}$$

Isto implica que f_0 é constante e ${f_0}^2 - {g_0}^2 = 1$. Portanto g_0 é também uma constante, ficando assim provado para o caso 2. Isso completa a prova do Teorema. ■

Referências Bibliográficas

[1] Alencar, H., do Carmo, M., Colares, A.G.: *Stable hypersurfaces with constant scalar curvature*, Math. Z. 213, (1993) 117-131.

[2] Alencar, H., do Carmo, M., Elbert, M.F.: *Stability of hypersurfaces with vanishing r-mean curvatures in Euclidean spaces*, J. Reine Angew. math. 554, (2003) 201-216.

[3] Alencar, H., do Carmo, M., Rosenberg, H.: *On the first eigenvalue of the linearized operator of the r-th mean curbature of a hypersurface*, Ann. Glob. Anal. Geom. 11, (1993) 387-395.

[4] Alencar, H., Rosenberg, H., Santos, W.: *On the Gauss map of hypersurfaces with constant scalar curvature in spheres*, Proc. Am. Math. Soc. 132, (2004) 3731-3739.

[5] Barbosa, J.L., Colares, A.G.: *Stability of hypersurfaces with constant r-mean curvature*, Ann. Glob. Anal. Geom. 15, (1997) 277-297.

[6] Barbosa, J.L., do Carmo, M.: *On stability of cones in* $\mathbb{R}^{n+1}$ *with zero scalar curvature*, Ann. Glob. Anal. Geom. 28, (2005) 107-127.

[7] Barbosa, J.L., do Carmo, M.: *Stability of hypersurfaces with constant mean curvature*, Math. Z. 185, (1984) 339-353.

[8] Barbosa, J.L., do Carmo, M., Eschenburg, J.: *Stability of hypersurfaces of constant mean curvature in Riemannian manifolds*, Math. Z. 197, (1988) 123-138.

[9] Berger, M., Gauduchon, P., Mazet, E.: *Le Spectre d'une Varieté Riemannienne*, Lecture Notes in Mathematics 194. Springer-Verlag, 1971.

[10] Cao, L.F., Li, H.: *r-Minimal submanifolds in space forms*, Ann. Glob. Anal. Geom. 32, (2007) 311-341.

[11] Chavel, I., *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, Academic Press, Inc. 1984.

[12] Chavel, I., *Riemannian Geometry: A Modern Introduction*, Cambridge University Press, 2nd edition, 2006.

[13] Cheng, S.Y., Yau, S.T.: *Hypersurfaces with constant scalar curvature*, Math. Ann. 225, (1977) 195-204.

[14] Dajczer, M. et al.: *Submanifolds and Isometric Immersions*, Publish or Perish, Inc., 1990.

[15] do Carmo, M. P., *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, Textos Universitários, SBM, Rio de Janeiro, 2ª edição, 2005.

[16] do Carmo, M. P., *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 3ª edição, 2005.

[17] Hardy, G.H., Littlewood, J.E., Polya, G.: *Inequalities*, Cambridge University Press, London (1934).

[18] He, Y., Li, H.: *Stability of area-preserving variations in space forms*, Ann. Glob. Anal. Geom. 34, (2008) 55-68.

[19] He, Y., Li, H.: *A new variational characterization of the Wulff shape*, Diff. Geom. App., vol 26, Nº 4, (2008) 377 - 390.

[20] Hounie, J., Leite, M.L.: *The Maximum Principle for Hypersurfaces with vanishing curvature functions*, Journal of Differential Geometry vol 41, (1995) 247-258.

[21] Reilly, R.: *Variational properties of functions of the mean curvatures for hypersurfaces in space forms*, J. Differ. Geom. 8, (1973) 465 - 477.

[22] Rosenberg, H.: *Hypersurfaces of constant curvature in space forms*, Bull. Soc. Math. 26 série 117, (1993) 211 - 239.

[23] Voss, K.: *Variation of curvature integral*, Results. Math. 20, (1991) 789 - 796.

[24] Yano, K.: *Integral Formulas in Riemannian Geometry*, Marcel Dekker, NY (1970).

Índice Remissivo