

TESE DE DOUTORADO

Aspectos da Transmissão de Ondas  
Eletromagnéticas  
em Filmes de Multicamadas

ELTON MALTA NASCIMENTO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
INSTITUTO DE FÍSICA

TESE DE DOUTORADO

Aspectos da Transmissão de Ondas  
Eletromagnéticas  
em Filmes de Multicamadas

ELTON MALTA NASCIMENTO

*Tese apresentada ao Instituto de Física da  
Universidade Federal de Alagoas como parte dos  
créditos para a obtenção do título de  
Doutor em Ciências.*

*Orientador: Dr. Marcelo Leite Lyra  
Co-orientador: Dr. Francisco Anacleto B. Fidelis de Moura*

Maceió - Alagoas - Brasil

Fevereiro - 2009

---

*Instituto de Física - UFAL*

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**

**Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale**

- N244a Nascimento, Elton Malta.  
Aspectos da transmissão de ondas eletromagnéticas em filmes de multicamadas / Elton Malta Nascimento. – Maceió, 2009.  
122 f. : il. tabs., graf.
- Orientador: Marcelo Leite Lyra.  
Co- Orientador: Francisco Anacleto B. Fidelis de Moura.  
Tese (doutorado em Física da Matéria Condensada) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Física. Maceió, 2009.
- Bibliografia: f. 96-97.  
Anexos: f. 98-122.
1. Ondas eletromagnéticas - Transmissão. 2. Filmes de multicamada.  
3. Cristal fotônico. 4. Meio de propagação desordenado. I. Título.

CDU: 537.87



Universidade Federal de Alagoas  
Instituto de Física  
Programa de Pós Graduação em Física

BR 104 km 14. Campus A.C. Simões  
Cidade Universitária  
Tabuleiro dos Martins  
57072-970 Maceió - AL, Brasil  
FONE : (82) 3214-1423/FAX 3214-1645

**PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE  
TESE DE DOUTORADO**

*“Aspectos da Transmissão de Ondas Eletromagnéticas em Filmes de  
Multicamadas”*

por

*Elton Malta Nascimento*

A Banca Examinadora composta pelos professores Marcelo Leite Lyra (orientador), do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Francisco Anacleto Barros Fidelis de Moura, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Solange Bessa Cavalcanti do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Hugo Nazareno, do Departamento de Física da Universidade de Brasília e Peter Schultz do Instituto de Física da Universidade Estadual de Campinas/SP, consideram o candidato aprovado com grau “\_A\_” com louvor.

Maceió, 13 de fevereiro de 2009

Prof. Marcelo Leite Lyra

Prof. Francisco Anacleto Barros Fidelis de Moura

Profa. Solange Bessa Cavalcanti

Prof. Hugo Nazareno

Prof. Peter Schultz

Dedico este trabalho a todos os  
meus ex-professores, peças fundamentais  
na minha formação e opção profissional.

## AGRADECIMENTOS

As palavras contidas nesta seção representam uma tímida maneira de expressar minha imensa gratidão a todos que contribuíram para a conclusão deste trabalho.

À minha família, que sempre me apoiou e me ajudou em todos os momentos, mesmo estando fisicamente distante deles.

Ao meu orientador prof. Dr. Marcelo Leite Lyra, pela paciência e confiança depositada. A orientação e convivência com o professor Marcelo Lyra não apenas resultou na conclusão deste trabalho, mas também serviu para mim de modelo de profissional e pessoa. Sem dúvida um exemplo a ser seguindo.

Ao meu co-orientador prof. Dr. Francisco A. B. F. de Moura, que não apenas foi um co-orientador mas também um companheiro e incentivador do meu trabalho. Seus conselhos e opiniões foram de grande importância para guiar minha profissional.

À minha companheira Sybelle Oliveira, por toda a dedicação, carinho e companheirismo gratuito oferecidos a mim durante esta etapa, e pela compreensão em dividir desigualmente o meu tempo com as tarefas pertinentes ao doutoramento.

Ao casal Wandearley Dias e Maria Socorro Pereira, sempre companheiros e prestativos em todos os momentos, mostrando o verdadeiro significado da amizade.

Ao prof. Dr. Antônio Delson C. de Jesus, do Departamento de Física da UEFS. O incentivo e a insistência do prof. Delson durante o meu programa de iniciação científica foram elementos fundamentais para que eu atingisse esta conquista. Serei eternamente grato por isso.

À profa. Maria Tereza de Araujo, pela consideração e amizade. Agradeço também a oportunidade que me foi dada para participar de todas as edições da Expofísica, evento que sempre me trouxe muita alegria e satisfação.

Às inesquecíveis amizades que fiz no Instituto de Física da UFAL: André Moura, Askery Canabarro, Arlan Ferreira, Agnaldo dos Santos, Itamar Vidal, Caio Faustino, Francisco de Assis, Nuccia Carla Sousa, Gentil da Silva II, Wagner da Silva, José Ricardo Duarte, Fabio Zanetti, Amadeu Bandeira, Marcelo Felisberto, Ildemir dos Santos, Vinicius Manzoni, Samuel Albuquerque, Pedro Vanlentim e Willamys Silva.

Ao colega Dr. Ítalo Marcos Nunes de Oliveira, que se mostrou uma grande pessoa e foi de fundamental importância durante a etapa final das pesquisas que levaram aos resultados mostrados nesta tese.

Ao prof. Marcos Vinícius Dias Vermelho, pela oportunidade que me foi dada de fazer parte de um trabalho de pesquisa na área experimental.

Ao prof. Carlos Jacinto da Silva, pela importante ajuda dada na compreensão de temas relacionados à óptica e pelos valiosos conselhos e dicas que me ajudaram na minha aprovação no concurso público da UFRB.

Aos demais professores do IF/UFAL, que por mais que não estivessem diretamente relacionados ao programa de doutorado, tiveram sua parcela de participação.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

---

## Resumo

Nesta tese, estudamos vários aspectos da transmissividade de uma onda eletromagnética plana monocromática incidindo sobre algumas configurações de filmes de multicamadas. Aplicando o formalismo de matriz de transferência, inicialmente tratamos o caso de uma seqüência binária de  $N$  camadas dielétricas distribuídas aleatoriamente, cujas características das camadas obedecem à condição de Bragg ( $n_A d_A = n_B d_B$ ). Vemos que o modo para o qual o caminho óptico das camadas corresponde a meio comprimento de onda da luz incidente é insensível à desordem e completamente transparente. A média da transmissão na região de freqüência ao redor desta ressonância cai com  $1/N^{1/2}$  e o comprimento de localização diverge quadraticamente à medida que a freqüência da luz se aproxima desta ressonância. Na vizinhança dos modos de quarto de onda, o comprimento de localização diverge logaritmicamente e a média espectral da transmissão apresenta uma dependência com  $N$  do tipo exponencial alongada. Ainda neste modo, o expoente de Lyapunov para diferentes realizações de desordem apresenta uma distribuição Gaussiana, levando a leis de escala distintas para as médias geométrica e aritmética da transmissão. As leis de escala para os modos de meio e quarto de onda apresentam-se análogas às obtidas no modelo eletrônico 1D de Anderson com dímeros aleatórios e com desordem nos termos de hopping do hamiltoniano respectivamente. Estes sistemas são conhecidos por apresentarem uma violação similar para a localização exponencial de Anderson usual. Estes comportamentos de escala foram comparados ao caso de uma estrutura desordenada onde uma das camadas é constituída por metamaterial. Vimos que a média espectral da transmissão ao redor do modo completamente transmissível decai de maneira mais rápida com o aumento do número de camadas ( $1/N$ ). A ação conjunta da forte localização e do surgimento de modos ressonantes dentro da banda



proibida leva a uma dependência não-monotônica da transmissão com o grau de desordem, que atinge um mínimo para um grau de desordem intermediário. Utilizando os mesmos parâmetros de construção do primeiro caso, investigamos a influência de uma distribuição binária de camadas aperiódica incomensurável. A aperiodicidade é introduzida baseando-se em uma lei senoidal cuja fase  $\varphi$  varia como uma lei de potência do índice das camadas ( $\varphi \propto j^\nu$ ). Para  $\nu > 1$ , a seqüência resultante é efetivamente descorrelacionada, levando à localização de Anderson usual da luz. A transição de uma estrutura uniforme em  $\nu = 0$  para uma estrutura quasi-periódica em  $\nu = 1$  é assinalada por um mínimo na média espectral da transmissão. Realizamos uma análise espectral do seqüência de índices de refração para mostrar sua íntima relação com o comportamento encontrado para a média da transmissão. O último caso de multicamada estudado trata-se da utilização de cristal líquido colestérico (ChLC) na composição do filme. Consideramos uma estrutura de ChLC com ângulos de defeito que obedecem uma seqüência quasi-periódica de Fibonacci assim como uma estrutura formada por camadas alternadas de ChLC e dielétrico isotrópico. Utilizando o formalismo matricial de Berreman, obtivemos o espectro de reflexão e o diagrama cromático destas estruturas. A cromaticidade associada apresentou dependência com o ângulo de incidência. No entanto, para o caso com ângulo de defeito Fibonnaciano, o deslocamento cromático pode ser controlado pelo ângulo de defeito  $\alpha$ . Para a geração  $F_4$  com  $\alpha = \pi/3$ , a cromaticidade da luz refletida se mantém próxima à região do branco para um largo intervalo de ângulos de incidência, seguido por um deslocamento para o azul em incidências intermediários. Esta configuração se aproxima de um refletor RGB omnidirecional. Por outro lado, a estrutura com camadas alternadas exibe uma seqüência complexa de deslocamentos cromáticos com o aumento do ângulo e incidência.

## Abstract

In this thesis, we study some aspects of the transmission of a monochromatic electromagnetic plane wave incident into some configurations of multilayered films. Using a transfer matrix formalism, we firstly investigate the case of a binary sequence of  $N$  dielectric layers distributed in a random way, where the layer parameters follow the Bragg condition ( $n_A d_A = n_B d_B$ ). We could observe that the mode for which the optical thickness of the layers corresponds to half-wavelength is insensitive to disorder and fully transparent. The average transmission in a frequency range around this resonance decays as  $1/N^{1/2}$ , and the localization length diverges quadratically as this resonance mode is approached. In the vicinity of the quarter-wavelength, the localization length diverges logarithmically and the frequency averaged transmission exhibits an stretched exponential dependence on the total thickness. At the quarter-wavelength resonance, the Lyapunov exponent for different realizations of disorder has a Gaussian distribution leading to distinct scaling laws for the geometric and arithmetic averages of the transmission. The scaling laws for the half- and quarter-wavelength modes are analogous to those found in electronic one-dimensional Anderson models with random dimers and pure off-diagonal disorder, respectively, which are known to display similar violations of the usual exponential Anderson localization. These scale behavior were compared with the case of a disordered structure where one kind of constituent material is a metamaterial. We observe that the spectrally averaged transmission in a frequency range around the fully transparent resonant mode is shown to decay faster as the number of layer increases ( $1/N$ ). The interplay of strong localization and the emergence of resonant modes within the gap leads to a non-monotonous disorder dependence of the transmission that reaches a minimum at an intermediate disorder strength. Using

the same layer parameters of the first case, we investigate the influence of a binary aperiodic incommensurated sequence of layers. The aperiodicity is introduced by considering the sequence of refractive indices to follow a sinusoidal function whose phase  $\varphi$  varies as a power-law of the layer index ( $\varphi \propto j^\nu$ ). For  $\nu > 1$  the resulting sequence is effectively uncorrelated leading to the usual Anderson localization of light. The crossover from a uniform structure at  $\nu = 0$  to a quasi-periodic structure at  $\nu = 1$  is signaled by a minimum at the spectrally averaged transmission. We perform a spectral analysis of the refractive index sequence to show its close connection to the main features exhibited by the averaged optical transmittance. The last case studied is about the inclusion of a cholesteric liquid crystal (ChLC) in the film composition. We considered a single-pitched ChLC multilayered system with quasiperiodic Fibonacci phase defects as well as an alternate sequence of single-pitched ChLC and isotropic dielectric layers. Using the Berreman  $4 \times 4$  matrix formalism, we numerically obtain the reflection spectrum and the chromaticity diagram of these structures. The associated chromaticity is shown to depend on the incidence angle. However, for the ChLC Fibonacci phase defect system, the color shift can be controlled by the defect angle  $\alpha$ . For the  $F_4$  generation and  $\alpha = \pi/3$ , the chromaticity of the reflected light remains close to the white color region for a wide range of incidence angles, followed by a blue-shift at intermediate incidence angles. This is the setup that produces the nearest omnidirectional red-green-blue condition for the reflection spectrum. On the other hand, the structure with alternate ChLC and isotropic layers exhibits a complex sequence of color shifts when the incidence angle is increased.

# Sumário

Folha de rosto . . . . .	i
Dedicatória . . . . .	ii
Agradecimentos . . . . .	iii
Resumo . . . . .	v
Abstract . . . . .	vii
<b>1 Introdução</b>	<b>4</b>
1.1 O Modelo de Anderson . . . . .	7
1.1.1 Teoria de Escala para a Transição de Anderson. . . . .	9
1.2 Multicamadas Dielétricas Periódicas: Cristal Fotônico 1D . . . . .	14
<b>2 Multicamadas Aleatórias</b>	<b>20</b>
2.1 Método da Matriz de Transferência . . . . .	21
2.1.1 Coeficientes de transmissão e reflexão . . . . .	30
2.2 Resultados . . . . .	31
<b>3 Multicamadas com Modulação Aperiódica</b>	<b>42</b>
3.1 Distribuição Binária Aperiódica . . . . .	45
3.2 Resultados . . . . .	46

---

<b>4</b>	<b>Multicamadas com Metamateriais</b>	<b>53</b>
4.1	Resultado . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Multicamadas com Cristal Líquido Colestérico</b>	<b>65</b>
5.1	Cristal Líquido Colestérico . . . . .	66
5.2	Matriz de Berreman $4 \times 4$ . . . . .	70
5.3	Coefficiente de Transmissão . . . . .	75
5.4	Espaço de Cores CIE 1931 . . . . .	78
5.4.1	Diagrama Cromático . . . . .	81
5.5	Resultados . . . . .	82
<b>6</b>	<b>Sumário e Conclusões</b>	<b>90</b>
	<b>Referências</b>	<b>95</b>
<b>7</b>	<b>Anexo</b>	<b>101</b>
7.1	<i>“Scaling laws for the transmission of random binary dielectric multilayered structures”</i> , E. M. Nascimento, F. A. B. F. de Moura, M. L. Lyra. Physical Review B <b>76</b> , 115120 (2007) . . . . .	102
7.2	<i>“Suppressed transmission in aperiodically modulated multilayered dielectric structures”</i> , E. M. Nascimento, F. A. B. F. de Moura, M. L. Lyra. Photonics and Nanostructures - Fundamentals and Applications DOI: 10.1016/j.photonics.2008.12.004 . . . . .	108
7.3	<i>“Finite-size scaling and disorder effect on the transmissivity of multilayered structures with metamaterials”</i> , E. M. Nascimento, F. A. B. F. de Moura, M. L. Lyra. Optics Express <b>16</b> , 6860 (2008) . . . . .	115

---

7.4	<i>“Reflection chromaticity of multilayered structures incorporating cholesteric liquid crystals”</i> , E. M. Nascimento, I. N. de Oliveira, M. L. Lyra. <i>Journal of Applied Physics</i> <b>104</b> , 103511 (2008) . . . . .	122
-----	---	-----

# Capítulo 1

## Introdução

Nas últimos duas décadas vem crescendo o interesse da ciência pelo estudo da propagação de ondas eletromagnéticas nas mais diferentes estruturas fotônicas. A possibilidade de controlar a transmissão, emissão e detecção da luz tem aberto um vasto leque de aplicações tecnológicas, como a confecção de novos dispositivos optoeletrônicos e a melhoria do sistema de telecomunicações. [1].

Por conta da simplicidade de construção, uma das estruturas mais estudadas neste contexto são os filmes de multicamadas dielétricas. Originalmente propostos por Yablonovitch [2], estes sistemas tratam-se da superposição de finas camadas de material dielétrico com espessura  $d_i$  da ordem do comprimento de onda da luz incidente e índice de refração  $n_i$ . Posicionando as camadas de maneira que a distribuição de índices de refração seja periódica, o espectro de transmissão apresenta uma estrutura de bandas tal que para determinadas faixas de frequência existem modos transmissíveis e para outras regiões do espectro não existem modos propagantes. Em analogia aos cristais atômicos, esta banda de modos proibidos recebe o nome de *band-gap fotônico* (PBG) e a estrutura como um todo de *Cristal Fotônico*

---

*Unidimensional* (PhC-1D)[2]. As características do PBG, como a largura e a posição no espectro, são controladas pelos parâmetros de construção das camadas, como as espessuras e sua distribuição ao longo do filme e o valor dos índices de refração utilizados. Se, por exemplo, tomarmos um filme com  $N$  camadas formado por uma seqüência alternada de dois tipos de materiais dielétricos  $A$  e  $B$  (seqüência binária), cujos parâmetros de construção obedecem à condição de Bragg  $n_A d_A = n_B d_B$ , o modo central do primeiro PBG obtido para uma incidência normal de luz será caracterizado pelo comprimento de onda  $\lambda_0 = 4n_A d_A = 4n_B d_B$ . Para incidência oblíqua, a luz experimenta uma periodicidade diferente se comparada com o caso de incidência normal, por conta disso, as propriedades do PGB também sofrem modificações, de forma que nem sempre é possível obter um PBG comum à qualquer ângulo de incidência e a qualquer polarização utilizando uma estrutura dielétrica unidimensional. Este tipo de PBG é chamado de *omnidirecional total* e só pode ser obtido em PC 1D sob determinadas condições especiais [3, 4].

Existem várias técnicas para fabricação de uma estrutura de cristal fotônico unidimensional, uma delas é a utilização de *Silício Poroso* [5]. Este material proporciona a obtenção de uma faixa de valores de índice de refração que varia com o grau de dopagem com *Si*. Para silício poroso levemente dopado, é possível uma faixa de valores de índice de refração entre 1.4 e 1.7. Para o caso fortemente dopado, esta faixa cresce para valores entre 1.4 e 2.4.

A manipulação na distribuição de camadas pode fazer surgir fenômenos novos e relevantes. Estruturas que obedecem distribuições quasi-periódicas podem apresentar diferentes tipos de PBGs, como a formação de uma estrutura fractal de gaps em multicamadas do tipo Thue-Morse [6]. Para uma distribuição de camadas que obedece a seqüência quasi-periódica de Fibonacci, o espectro de energia é con-



sistente com o conjunto de Cantor auto-similar [7, 8, 9], onde existem bandas de modos não transmissíveis similares aos PBGs do cristal fotônico[10] e fora destas regiões os modos se apresentam criticamente localizados, ou seja, apresentam um decaimento tipo lei de potência [11].

Devido à sua natureza ondulatória, a propagação de luz em filmes de multicamadas aleatórias representa uma analogia com o modelo de Anderson para elétrons não interagentes em sistemas desordenados. Segundo a lei de escala de Anderson para um sistema eletrônico unidimensional, todos os auto-estados de um elétron não interagente se apresentam exponencialmente localizado para qualquer grau de desordem [12]. Este fenômeno também é observado para ondas eletromagnéticas e recebe o nome de *localização de Anderson da luz* [13, 14, 15]. Em filmes de multicamadas aleatórias, as múltiplas interferências geradas pelas ondas espalhadas nas interfaces são responsáveis por um decaimento exponencial da onda resultante, de forma que a média do logaritmo da transmissão sobre muitas realizações de desordem decai linearmente com a largura da amostra  $L$  [16]. O efeito combinado de reflexão de Bragg e localização da luz resulta em um alargamento do band gap fotônico, de forma parte do espectro apresenta modos refletidos. Esta característica possibilita a construção de dispositivos refletores para uma larga faixa de frequência [19, 20]. Em recentes pesquisas foi observado que o espectro de transmissão de uma estrutura binária de multicamadas com desordem posicional, constituída de camadas dielétricas de mesmo caminho óptico, apresenta picos associados à estados chamados *necklace* [43]. Tais estados estão relacionados com a hibridização de modos degenerados e localizados em diferentes regiões da estrutura.

Nesta tese serão apresentados resultados de um estudo que visa analisar as características da transmissão de ondas eletromagnéticas em algumas estruturas de

multicamadas. Inicialmente será apresentado um estudo de algumas leis de escala para a transmissão, como a transmissão espectral média e o comprimento de localização, em um sistema desordenado composto por dois tipos de dielétricos ordinários que obedecem a condição de Bragg. Utilizando o mesmo sistema físico, analisamos a influência de uma distribuição quasi-periódica nestas leis de escala, o que será apresentado no capítulo 3. A influência dos metamateriais é apresentada no capítulo 4, onde empregamos uma estrutura de multicamadas composta por material dielétrico ordinário e metamaterial distribuídas aleatoriamente. A última estrutura analisada, mostrada no capítulo 5, é constituída por camadas anisotrópicas de cristal líquido colestérico. Neste estudo introduzimos novas quantidades como o diagrama cromático CIE, onde investigamos a variação cromática do espectro de reflexão com a mudança do ângulo de incidência.

## 1.1 O Modelo de Anderson

As predições para sistemas ópticos desordenados se assemelham às obtidas no modelo de Anderson para elétrons não interagentes, por conta disso seus principais resultados serviram como base para nossas pesquisas e serão constantemente citados ao longo desta tese.

Em 1958, P. W. Anderson [21] utilizou um modelo que permitiu estudar os efeitos da desordem sobre a função de onda eletrônica. Seu modelo considera os elétrons movendo-se sobre a influência de um potencial aleatório. Na representação de Wannier (*tight binding*), o Hamiltoniano de Anderson pode ser escrito como:

$$H = \sum_i \epsilon_i |i\rangle\langle i| + \sum_{i \neq j} t_{ij} |i\rangle\langle j| \quad (1.1)$$

O estado  $|i\rangle$  representa o orbital atômico centrado no sítio  $i$ . O termo  $\epsilon_i$  é a energia do sítio  $i$  e  $t_{ij}$  é chamado de integral de transferência entre os sítios  $i$  e  $j$ , também conhecido como amplitude de *hopping*. A desordem é introduzida nas energias  $\epsilon_i$  que são números aleatórios distribuídos no intervalo  $[-W, W]$ . O parâmetro  $W$ , a largura da distribuição de desordem, controla o grau de desordem do sistema. A interação Coulombiana entre os elétrons é desprezada neste Hamiltoniano. Com este modelo, Anderson mostrou a existência da chamada "localização da função de onda eletrônica" pela desordem.

Vamos discutir de forma qualitativa o papel da desordem na localização dos estados eletrônicos. Considere o modelo de Bloch com potencial periódico nulo ( $U(r) = 0$ ), ou seja, um elétron livre. Se introduzirmos uma única barreira de potencial, a função de onda será parcialmente transmitida e parcialmente refletida pela barreira. Se, ao invés de uma única barreira, intruzirmos duas barreiras de potencial, a função de onda sofrerá duas reflexões. As duas barreiras geram ondas refletidas e incidentes que podem sofrer interferências destrutivas ou construtivas a depender da diferença de fase existente. Estas interferências podem mudar bastante o padrão da função de onda. Se um potencial aleatório estiver presente, o que pode ser representado por barreiras de potencial em posições aleatórias ou com intensidades aleatórias, a função de onda sofrerá várias reflexões as quais não mantêm coerência de fase. Estas reflexões causam interferências destrutivas que induzem uma localização exponencial da função de onda. A função de onda se concentra em uma pequena região e tem valor desprezível em qualquer outra região do sólido. Neste regime, o sistema está na fase isolante. No caso de ondas estendidas, onde o elétron fica itinerante na cadeia, temos a fase metálica. O modelo de Anderson tridimensional apresenta uma transição metal-isolante para um valor crítico da força

da desordem ( $W$ ).

Uma função de onda é dita exponencialmente localizada quando suas amplitudes de probabilidade decaem exponencialmente à medida que nos afastamos do centro do pacote, de acordo com uma lei do tipo  $e^{-R/\lambda}$ , onde  $\lambda$  é o chamado comprimento de localização, e como o próprio nome sugere, está relacionado com o grau de localização do estado.

No final da década de 1970, Anderson, juntamente com Abrahams, Licciardello e Ramakrishnan [12], construíram uma teoria de escala para a condutância generalizada do modelo de Anderson e obtiveram a dependência da transição Metal-Isolante com a dimensão. Estes resultados tiveram grande repercussão na comunidade científica. O próprio Ramakrishnan, em entrevista para a *APS News*, atribuiu todo este sucesso ao fato de o trabalho apresentar previsões experimentalmente testáveis e não usuais, baseados em um novo processo de interferência com muitos-corpos que explorava o processo de localização, um tema que atraía muito a atenção dos cientistas no final da década de 70. Hoje, o artigo publicado por eles em 1979 é um dos 10 mais citados da *Physical Review Letter* e Philip Warren Anderson chegou a ganhar o Prêmio Nobel de Física de 1977 por sua grande contribuição no estudo de sistemas desordenados.

### 1.1.1 Teoria de Escala para a Transição de Anderson.

Vamos apresentar a teoria de escala que foi originalmente utilizada por Abrahams, Anderson, Licciardello, e Ramakrishnan [12] para se obter a dependência da transição de Anderson com a dimensão. A hipótese básica desta teoria de escala é que uma única quantidade característica, a condutância generalizada  $g$ , controla a transição de estado estendido para localizado em  $T = 0$ . A teoria de escala foi aplicada

na reformulação do modelo de Anderson feita por Thouless [22]. Na abordagem de Thouless as unidades básicas são agora caixas de volume  $l^d$  que contêm muitos sítios. O sólido é formado de várias caixas acopladas uma às outras.

As energias características do modelo de Anderson  $W$  e  $t$  são mapeadas respectivamente no espaçamento médio entre os níveis  $\Delta E$  e no deslocamento  $\delta E$  causado por mudanças nas condições de contorno. Um elegante argumento eurístico, baseado no princípio da incerteza, conecta  $\delta E$  com a condutividade  $\sigma$  no limite macroscópico.

Através do princípio da incerteza pode-se estabelecer:

$$\delta E = \hbar/t_D, \quad (1.2)$$

onde  $t_D = L^2/D$  é o tempo necessário para um pacote de onda eletrônico difundir até os contornos de uma caixa de lado  $L$ , onde  $D$  é a constante de difusão. Usando a relação de Einstein entre a condutividade e as propriedades de difusão ( $\sigma = e^2 D n(E)$ ) temos :

$$\delta E = \frac{\sigma \hbar}{e^2 (L^2 n(E))}. \quad (1.3)$$

A densidade de estados média pode ser escrita como função do espaçamento médio entre os níveis  $n(E) = 1/(L^d \Delta E)$ . Logo, a razão  $\Delta E/\delta E$  é agora adotada como sendo uma medida da força da desordem no sistema, análoga a razão  $W/t$  no modelo de Anderson tradicional. Estados estendidos são sensíveis a mudanças nas condições de contorno ( $\delta E > \Delta E$ ), enquanto que estados localizados não o são ( $\delta E < \Delta E$ ). Portanto, utilizando estas equações, a condutância generalizada definida por  $g(L) \equiv$

$\frac{\delta E}{\Delta E}$  tem o seguinte comportamento de escala:

$$g(L) = (\hbar/e^2) \sigma L^{d-2}. \quad (1.4)$$

A teoria de escala examina a dependência de  $g(L)$  com o comprimento de escala utilizado. Seja  $g_0 = g(L_0) = \delta E(L_0)/\Delta E(L_0)$  a condutância generalizada para um sistema composto de caixas acopladas de volume  $L_0^d$ . A teoria de escala assume que, dado  $g_0$  em uma escala de comprimento  $L_0$ , podemos obter  $g$  numa escala maior  $L = L_0 b$ . Na nova escala  $L_0 b$  a condutância  $g$  é completamente determinada pelo valor anterior  $g_0$  e pelo fator de escala  $b$ . O comportamento de escala da função  $g$  pode ser obtido a partir da função  $\beta(g)$ :

$$\beta(g) = \frac{d \ln g(L)}{d \ln L}. \quad (1.5)$$

Para  $\beta$  positivo,  $g$  cresce com o crescimento de  $L$ ; para  $\beta$  negativo,  $g$  decresce com o crescimento de  $L$ . O comportamento qualitativo de  $\beta(g)$  está representado na figura 1.1 para  $d = 1, 2$  e  $3$ . A curva mostrada na figura 1.1 foi proposta por Abrahams *et al* [12].

O comportamento qualitativo da função  $\beta(g)$  pode ser determinado a partir dos seus limites assintóticos ( $g \rightarrow \infty$  e  $g \rightarrow 0$ ). Para  $g$  grande podemos usar a Eq. (1.4) e mostrar que

$$\lim_{g \rightarrow \infty} \beta(g) = d - 2. \quad (1.6)$$

Logo,  $\beta(\infty)$  é  $+1$  em  $d = 3$ ,  $0$  em  $d = 2$  e  $-1$  em  $d = 1$ , como mostrado na figura 1.1. Para  $g$  pequeno, ou seja, no limite de fraco acoplamento e forte desordem, o teorema de Anderson prevê que os estados eletrônicos são localizados e decaem

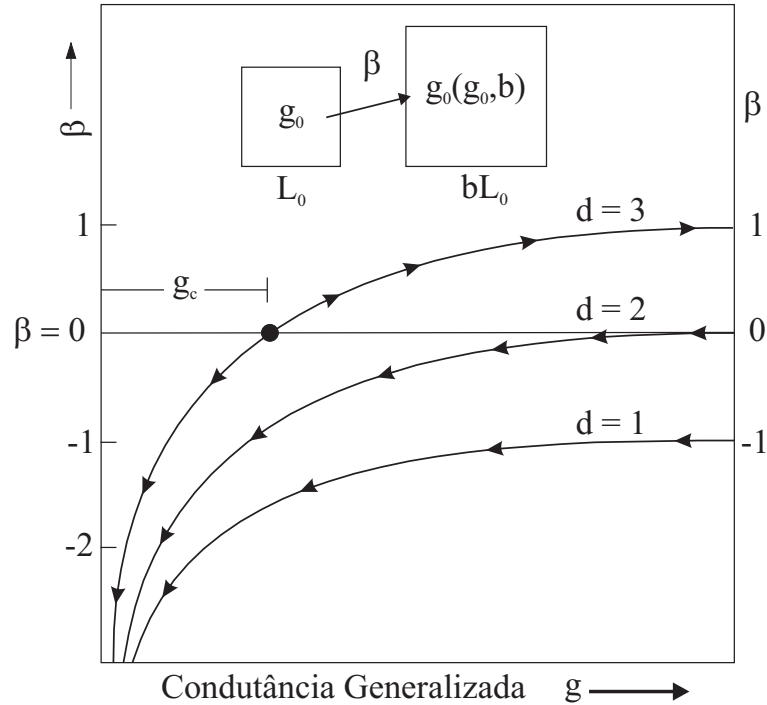


Figura 1.1: O comportamento qualitativo de  $\beta(g)$  para  $d = 1, 2$  e  $3$  na teoria de escala apresentada por Abrahams, Anderson, Licciardello e Ramakrishnam.

exponencialmente com a distância. Nos contornos de uma caixa de dimensão linear  $L$ , a amplitude da função de onda de um elétron localizado dentro da caixa é da ordem de  $e^{-\gamma L}$ , onde  $\gamma$  é o expoente de Lyapunov (inverso do comprimento de localização  $\lambda$ ).

O acoplamento entre as caixas também decaem exponencialmente com  $L$ , de forma que  $g(L) \propto e^{-\gamma L}$ . Usando a Eq. (1.5), temos,

$$\lim_{g \rightarrow 0} \beta(g) = \ln g. \quad (1.7)$$

e portanto,  $\beta(g)$  se aproxima de  $-\infty$  quando  $g$  tende a zero, independente da

dimensão. Assumindo que  $\beta(g)$  tenha variação lenta e monotônica entre os limites  $g \rightarrow \infty$  e  $g \rightarrow 0$ , nossa análise reproduz o comportamento qualitativo da figura 1.1. As setas do diagrama de fluxo sobre as curvas representam a direção em que  $g$  sofre variações quando  $L$  cresce. Para  $d = 1$  e  $d = 2$  as setas indicam que  $g$  sempre diminui quando  $L$  cresce. Em  $d = 3$  temos dois comportamentos: Abaixo de um certo  $g_c$  ( $\beta(g) < 0$ ) as setas do diagrama de fluxo indicam que a condutância generalizada  $g$  diminui quando  $L$  cresce; acima de  $g_c$  ( $\beta(g) > 0$ ) o comportamento é contrário,  $g$  cresce quando  $L$  cresce. O ponto no diagrama de fluxo ( $g_c, \beta(g_c) = 0$ ) é chamado ponto fixo instável. Este diagrama mostra claramente a dependência da transição de Anderson com a dimensão: em  $1d$  e  $2d$  não existe transição metal-isolante, com a condutividade indo sempre a zero quando  $l \rightarrow \infty$ ; em  $3d$  existe uma transição metal-isolante. O comportamento crítico perto desta transição em  $3d$  também foi obtido a partir da teoria de escala [23]. O comprimento de localização  $\lambda$ , próximos da energia crítica de transição (*mobility edge*) tem um comportamento tipo lei de potência  $\lambda \propto (E - E_c)^{-\nu}$  com expoente  $\nu \approx 1.57$  [24, 25, 26, 27].

As descobertas feitas por Anderson foram de fundamental importância para o entendimento das propriedades de condução da matéria. Para um sólido que se encontre a temperatura nula e desconsiderando ligações com outros graus de liberdade, como fônons, ou interações mútuas, uma partícula que se encontre exponencialmente localizada não apresenta participação no processo de condução, pois só há probabilidade dela ser encontrada em uma região finita do sólido, enquanto que, em um estado estendido, a partícula se torna itinerante, pois apresenta probabilidade finita de ser encontrada em qualquer sítio da rede. Como consequência disso, se só existirem estados localizados próximos à energia de Fermi, o sistema será um isolante, ou seja, no limite de  $T=0K$ , a condutividade DC (limite de baixa frequência para



a condutividade linear) será nula. Por outro lado, caso estes estados se apresentem estendidos, esta condutividade será finita e o sistema se torna um condutor. Para temperaturas acima de 0K, o fenômeno da condutividade é explicado por excitações térmicas. Apesar das muitas simplificações, o modelo de Anderson é considerado até hoje a estratégia mais eficiente para estudar os efeitos da desordem sobre as propriedades de transporte eletrônico.

Diversos outros fenômenos também foram explicados com base nas teorias de sistemas desordenados, como exemplo, a existência de Efeito Hall quantizado, que está associado à presença de elétrons em estados localizados quando o material é submetido a um campo magnético externo [28]. Além disso, sistemas macroscópicos, como ondas eletromagnéticas ou ondas mecânicas em meio líquido, assim como nos sistemas quânticos, também apresentam diversas propriedades de localização quando submetidos a algum tipo de desordem [29, 30, 31], o que mostra a vasta aplicabilidade deste ramo teórico.

## 1.2 Multicamadas Dielétricas Periódicas: Cristal Fotônico 1D

Para se ter um parâmetro de comparação a cerca do papel das diferentes distribuições de camadas utilizadas neste trabalho, faz-se necessário um entendimento inicial a cerca do caso de multicamadas periódicas.

Cristais Fotônicos são estruturas regulares de materiais ópticos com diferentes índices de refração (fig. 1.2). Este arranjo assemelha-se ao de um cristal atômico, com a diferença de que a constante de rede ( $a$ ) para cristais atômicos se encontra na ordem de Angstroms de comprimento, enquanto que para os cristais fotônicos

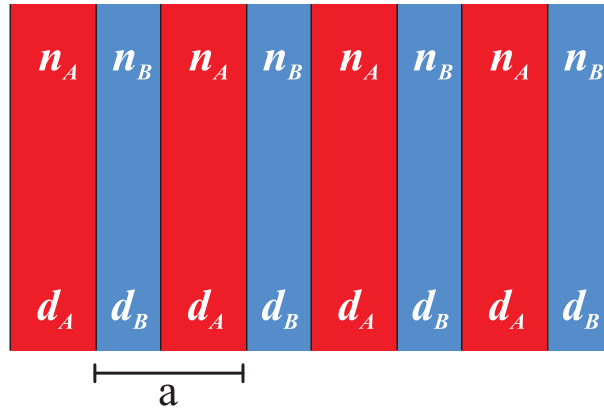


Figura 1.2: Diagrama representando uma estrutura binária de multicamadas periódicas.

está na ordem do comprimento da onda eletromagnética incidente, que para a luz visível está em torno de  $1\text{ nm}$ . As semelhanças entre o cristal atômico e o fotônico não existem apenas em seus arranjos espaciais, na verdade muitas idéias básicas são comuns em ambos os cristais e servirão como base para o entendimento dos resultados apresentados nesta tese.

De acordo com a dimensionalidade do empilhamento das camadas, podemos classificar os cristais fotônicos em unidimensional, bidimensional e tridimensional. A fabricação destes dispositivos para operar com microondas é relativamente simples, já na região do visível, em especial para o caso 3D, sua fabricação é mais difícil por conta do pequeno valor de constante de rede. A maneira mais simples de se obter um cristal fotônico 1D é através do empilhamento periódico de camadas dielétricas com índice de refração diferentes, cuja espessura é da ordem do comprimento da onda eletromagnética considerada.

Para obter uma descrição quantitativa do cristal fotônico unidimensional, tomemos o eixo  $x$  na direção perpendicular à superfície das camadas dielétricas e

o campo elétrico propagando-se na direção deste eixo e linearmente polarizada ao longo da direção do eixo  $y$ . Desta forma, o campo elétrico  $E(x, t)$  será descrito pela equação:

$$\frac{c^2}{\epsilon(x)} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad (1.8)$$

onde  $\epsilon(x)$  representa a dependência espacial da constante dielétrica relativa do cristal fotônico 1D, chamada de *função dielétrica*. Na (1.8), assumimos a permeabilidade magnética do cristal fotônico como sendo igual à do espaço livre ( $\mu = \mu_0$ ). Devido à periodicidade de  $\epsilon(x)$  em relação à  $x$ , temos que  $\epsilon(x + a) = \epsilon(x)$  e sua inversa  $\epsilon^{-1}(x)$  também será periódica, podendo portanto ser expandida em série de Fourier:

$$\epsilon^{-1}(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \kappa_m \exp\left(i \frac{2\pi m}{a} x\right) \quad (1.9)$$

onde  $m$  é um número inteiro e  $\kappa_m$  são os coeficientes de Fourier. Assumindo  $\epsilon(x)$  real, teremos que  $\kappa_{-m} = \kappa_m^*$ . Assim como ocorre para estruturas atômicas periódicas, a propagação nesta estrutura é regida pelo teorema de Bloch, onde qualquer auto-modo no cristal 1D é caracterizado por um número de onda  $k$  e dado pela expressão:

$$E(x, t) \equiv E_k(x, t) = u_k(x) \exp\{i(kx - \omega_k t)\} \quad (1.10)$$

onde  $\omega_k$  representa as auto-freqüências angulares e  $u_k(x)$  são funções periódicas tal que  $u_k(x + a) = u_k(x)$ , podendo ser portanto expandido em série de Fourier. Como resultado, a eq. (1.10) assume a forma:

$$E_k(x, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} E_m \exp\left\{i \left(k + \frac{2\pi m}{a}\right) x - i\omega_k t\right\} \quad (1.11)$$

onde  $E_m$  são os coeficientes de Fourier. Por medida de simplificação, assumiremos que apenas as componentes com  $m = 0$  e  $m = \pm 1$  são predominantes na expansão 1.9:

$$\epsilon(x)^{-1} \approx \kappa_0 + \kappa_1 \exp\left(i\frac{2\pi}{a}x\right) + \kappa_{-1} \exp\left(-i\frac{2\pi}{a}x\right) \quad (1.12)$$

substituindo (1.11) e (1.12) na equação de onda (1.8), obtemos:

$$\begin{aligned} & \kappa_1 \left\{ k + \frac{2(m-1)\pi}{a} \right\}^2 E_{m-1} + \kappa_{-1} \left\{ k + \frac{2(m+1)\pi}{a} \right\}^2 E_{m+1} \\ & \approx \left\{ \frac{\omega_k^2}{c^2} - \kappa_0 \left( k + \frac{2m\pi}{a} \right)^2 \right\} E_m \end{aligned} \quad (1.13)$$

Para  $m = 0$ ,

$$E_0 \approx \frac{c^2}{\omega_k^2 - \kappa_0 c^2 k^2} \left\{ \kappa_1 \left( k - \frac{2\pi}{a} \right)^2 E_{-1} + \kappa_{-1} \left( k + \frac{2\pi}{a} \right)^2 E_1 \right\} \quad (1.14)$$

Para  $m = -1$ ,

$$E_{-1} \approx \frac{c^2}{\omega_k^2 - \kappa_0 c^2 (k - 2\pi/a)^2} \left\{ \kappa_1 \left( k - \frac{4\pi}{a} \right)^2 E_{-2} + \kappa_{-1} k^2 E_0 \right\} \quad (1.15)$$

Por esta razão, se  $k \approx |k - 2\pi/a|$  (ou seja,  $k \approx \pi/a$ ), e se  $\omega_k^2 \approx \kappa_0 c^2 k^2$ , então  $E_0$  e  $E_{-1}$  são dominantes na expansão (1.11). Neste caso podemos ignorar todos os outros termos e obter as seguintes equações acopladas:

$$(\omega_k^2 - \kappa_0 c^2 k^2) E_0 - \kappa_1 c^2 \left( k - \frac{2\pi}{a} \right)^2 E_{-1} = 0 \quad (1.16)$$

$$-\kappa_{-1} c^2 k^2 E_0 + \left\{ \omega_k^2 - \kappa_0 c^2 \left( k - \frac{2\pi}{a} \right)^2 \right\} E_{-1} = 0 \quad (1.17)$$

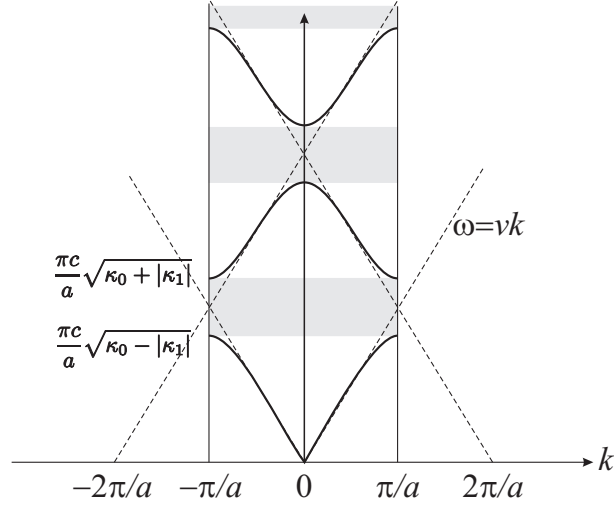


Figura 1.3: Relação de dispersão para um cristal fotônico 1D (linhas sólidas). O limite da primeira zona de Brillouin é denotado pelas duas linhas verticais. As linhas de dispersão para o material uniforme é representado pelas linhas pontilhadas. Quando duas linhas de dispersão se cruzam, elas se repelem mutuamente e um band gap fotônico surge.

estas equações lineares possuem uma solução não trivial quando o determinante dos coeficientes é nulo:

$$\begin{bmatrix} \omega_k^2 - \kappa_0 c^2 k^2 & -\kappa_1 c^2 \left(k - \frac{2\pi}{a}\right)^2 \\ -\kappa_{-1} c^2 k^2 & \omega_k^2 - \kappa_0 c^2 \left(k - \frac{2\pi}{a}\right)^2 \end{bmatrix} = 0$$

introduzindo a variável  $h = k - \pi/a$ , as soluções são dadas por:

$$\omega_{\pm} \approx \frac{\pi c}{a} \sqrt{\kappa_0 \pm |\kappa_1|} \pm \frac{ac}{\pi |\kappa_1|} \left( \kappa_0^2 - \frac{|\kappa_1|^2}{2} \right) h^2 \quad (1.18)$$

com  $h \ll \pi/a$ . Temos portanto que não existem modos no intervalo

$$\frac{\pi c}{a} \sqrt{\kappa_0 - |\kappa_1|} < \omega < \frac{\pi c}{a} \sqrt{\kappa_0 + |\kappa_1|} \quad (1.19)$$

---

e este gap desaparece quando  $\kappa_1 = 0$ , ou seja, a única componente de Fourier considerada não é oscilatória. A relação de dispersão de um cristal fotônico unidimensional para um caso geral é mostrado na fig. 1.3. Para um material uniforme, a relação de dispersão é dada por  $\omega = vk$  (linhas descontínuas). Este comportamento é observado no começo da banda, onde o comprimento de onda é suficientemente grande para perceber a periodicidade da função dielétrica. O cruzamento de duas destas linhas de dispersão sinaliza a formação de um band gap.

## Capítulo 2

# Multicamadas Aleatórias

Uma das principais propriedades do cristal fotônico e sua alta capacidade de reflexão. Nos primórdios da ciência, o principal dispositivo utilizado para reflexão de luz era o espelho de metal, que apresenta capacidade de reflexão para uma vasta faixa de frequência mas possui a desvantagem de apresentar absorção, principalmente na região do visível. Um filme de multicamadas dielétricas pode apresentar baixíssimo grau de absorção, sendo portanto vastamente utilizado em equipamentos ópticos[32]. Neste contexto, torna-se interessante investigar as propriedades do PBG a fim de se controlar, dentre outras coisas, sua largura e posição no espectro.

A largura de um PBG em uma estrutura binária periódica de multicamadas depende do contraste dos índices de refração (diferença entre os índices de refração), o que limita muito sua aplicação à capacidade de se obter pares de materiais de alto contraste. Uma maneira eficiente de alargar o PBG de uma estrutura de multicamadas é introduzindo desordem na sua distribuição de camadas.

O fenômeno da localização de Anderson foi originalmente descrito para elétrons não interagentes em sistemas atômicos cujo potencial de ligação apresentava uma

distribuição aleatória. O efeito resultante da interferência entre múltiplos espalhamentos do elétron pelos defeitos aleatórios nos potenciais modifica as auto-funções de um estado estendido (onda de Bloch) para um estado exponencialmente localizado [21]. Por ser um efeito tipicamente ondulatório, as predições feitas para o caso eletrônico são aplicáveis à ondas eletromagnéticas.

Neste capítulo mostramos os resultados de um estudo teórico sobre algumas leis de escala para a transmissão através de um sistema binário de multicamadas dielétricas aleatoriamente distribuídas. Este tipo de sistema físico já foi estudado por outros pesquisadores [33, 34] e tem se mostrado muito versátil, além de ser de fácil fabricação.

## 2.1 Método da Matriz de Transferência

Uma maneira simples de se obter numericamente a intensidade dos campos elétrico e magnético nas interfaces de um filme estratificado é calculando a chamada Matriz de Transferência [35].

Seja uma onda eletromagnética plana com dependência temporal harmônica. Chamamos de *modo TE* (transverse electric) o caso de uma polarização linear tal que o campo elétrico seja perpendicular ao plano de incidência. Para o caso do campo magnético perpendicular ao plano de incidência, chamamos este caso de *modo TM* (transverse magnetic). Para qualquer polarização arbitrária podemos separar a onda em duas, sendo uma delas do tipo TE e a outra do tipo TM e trata-las de maneira independente, já que as condições de contorno nas interfaces são independentes uma da outra. Além do mais, para um meio ausente de cargas livres e densidade de corrente nula, as equações de Maxwell não sofrem mudança quando  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$ , e simultaneamente  $\epsilon$  e  $-\mu$  são permutados. Assim, qualquer resultado relacionado ao



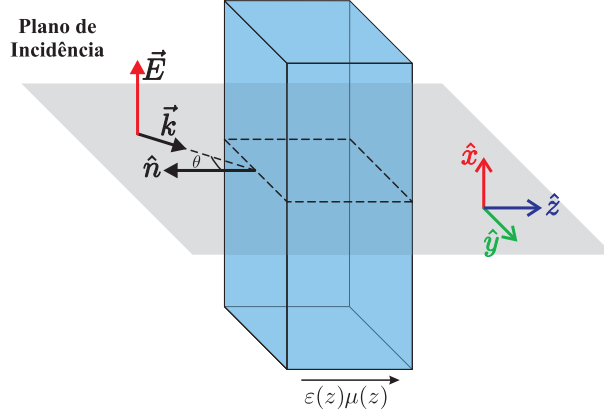


Figura 2.1: Representação esquemática da onda eletromagnética incidente.

modo TM pode ser imediatamente deduzido para o modo TE através desta permuta, sendo suficiente portanto estudar em detalhes apenas o modo TE.

Tomamos o plano de incidência como sendo o plano  $yz$  e sendo  $z$  a direção de estratificação (figura 2.1). Para uma onda em modo TE,  $E_y = E_z = 0$  e as equações de Maxwell são reduzidas para o seguinte conjunto de equações escalares [assumindo uma dependência temporal do tipo  $\exp(-i\omega t)$ ]:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} + \frac{i\epsilon\omega}{c} E_x = 0 \quad (2.1a) \qquad \frac{i\omega\mu}{c} H_x = 0 \quad (2.2a)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = 0 \quad (2.1b) \qquad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{i\omega\mu}{c} H_y = 0 \quad (2.2b)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = 0 \quad (2.1c) \qquad \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{i\omega\mu}{c} H_z = 0 \quad (2.2c)$$

Estas equações mostram que  $H_y, H_z$  e  $E_x$  são funções apenas de  $y$  e  $z$ . Eliminando  $H_y$  e  $H_z$  entre (2.1a), (2.2b) e (2.2c) obtemos:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + n^2 k_0^2 E_x = \frac{d(\log \mu)}{dz} \frac{\partial E_x}{\partial z} \quad (2.3)$$

onde

$$n^2 = \epsilon\mu, \quad k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \quad (2.4)$$

Para resolver (2.3) utilizamos o método da separação de variáveis, ou seja, tomemos uma função que é o produto de duas outras, uma dependente apenas de  $y$  e a outra dependente apenas de  $z$ :

$$E_x(y, z) = Y(y)U(z) \quad (2.5)$$

substituindo na eq. (2.3) obtemos:

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\frac{1}{U} \frac{d^2 U}{dz^2} - n^2 k_0^2 + \frac{d(\log \mu)}{dz} \frac{1}{U} \frac{dU}{dz} \quad (2.6)$$

Temos que o termo da esquerda é função apenas de  $y$ , enquanto que o da direita depende apenas de  $z$ , de forma que podemos igualar cada lado de (2.6) à uma constante ( $-K^2$ ).

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -K^2 \quad (2.7)$$

$$\frac{d^2 U}{dz^2} - \frac{d(\log \mu)}{dz} \frac{dU}{dz} + n^2 k_0^2 U = K^2 U \quad (2.8)$$

A solução para (2.7) será:

$$Y = C e^{ik_0 \alpha y} \quad (2.9)$$

onde foi feita a substituição

$$K^2 = k_0^2 \alpha^2 \quad (2.10)$$

Por consequência,  $E_x$  é dado por:

$$E_x = U(z)e^{i(k_0\alpha y - \omega t)} \quad (2.11)$$

Das eq. (2.2b) e (2.2c) vemos que  $H_y$  e  $H_z$  são dadas por:

$$H_y = V(z)e^{i(k_0\alpha y - \omega t)} \quad (2.12)$$

$$H_z = W(z)e^{i(k_0\alpha y - \omega t)} \quad (2.13)$$

De acordo com (2.1a), (2.2b), (2.2c), as amplitudes  $U$ ,  $V$  e  $W$  são relacionadas pelas equações:

$$\frac{dV}{dz} = ik_0[\alpha W + \epsilon U] \quad (2.14a)$$

$$\frac{dU}{dz} = ik_0\mu V \quad (2.14b)$$

$$\alpha U + \mu W = 0 \quad (2.14c)$$

eliminando  $W$  da eq. (2.14a) através de (2.14c) obtemos, juntamente com (2.14b), o sistema de equações diferenciais para  $U$  e  $V$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU}{dz} &= ik_0\mu V \\ \frac{dV}{dz} &= ik_0 \left( \epsilon - \frac{\alpha^2}{\mu} \right) U \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

desacoplando as equações obtemos finalmente para  $U$  e  $V$ :

$$\frac{d^2U}{dz^2} - \frac{d(\log \mu)}{dz} \frac{U}{z} + k_0^2(n^2 - \alpha^2)U = 0 \quad (2.16)$$

$$\frac{d^2V}{dz^2} - \frac{d \left[ \log \left( \epsilon - \frac{\alpha^2}{\mu} \right) \right]}{dz} \frac{dV}{dz} + k_0^2(n^2 - \alpha^2)V = 0 \quad (2.17)$$

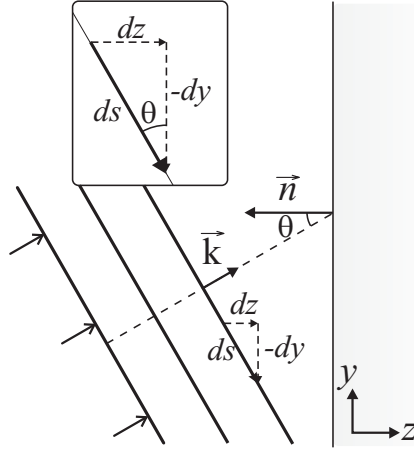


Figura 2.2: Representação de superfícies co-fasais para uma onda plana.

As funções  $U(z)$ ,  $V(z)$  e  $W(z)$  em geral são complexas.

A superfície de amplitude constante de  $E_x$  é dada por  $|U(z)| = cte.$ , enquanto que a superfície de fase constante (co-fasal) é obtida pela equação:

$$\varphi(z) + k_0 \alpha y = cte.$$

onde  $\varphi(z)$  é a fase de  $U$ . Os dois conjuntos de superfícies em geral não coincidem (onda inhomogênea). Para um pequeno deslocamento  $(dy, dz)$  ao longo da superfície co-fasal temos  $\phi'(z)dz + k_0 \alpha dy = 0$  (ver fig. 2.1). Se  $\theta$  representar o ângulo entre a normal à superfície co-fasal e a direção  $OZ$  temos:

$$\tan \theta = -\frac{dz}{dy} = \frac{k_0 \alpha}{\phi'(z)} \quad (2.18)$$

Se considerarmos que a onda é plana e homogênea, podemos adotar  $\theta$  como o ângulo

de incidência e teremos:

$$\phi(z) = k_0 n z \cos \theta, \quad \alpha = n \sin \theta \quad (2.19)$$

onde temos  $\alpha = cte.$  como uma consequência da imposição de (2.10), o que remete à *Lei de Snell da refração* para meios estratificados. Esta condição também será aplicada ao caso apresentado no capítulo 5, onde a constante  $K$  representará a componente do vetor de onda  $k$  ao longo do eixo perpendicular à direção de estratificação.

Sendo as funções  $U(z)$  e  $V(z)$  soluções de uma equação diferencial linear de segunda ordem, podemos expressá-las como uma combinação linear de duas soluções particulares ( $U_1, U_2$  e  $V_1, V_2$ ). Estas soluções particulares são acopladas pelas equações (2.15):

$$\left. \begin{array}{l} U_1' = ik_0 \mu V_1 \\ V_1' = ik_0 \left( \varepsilon - \frac{\alpha^2}{\mu} \right) U_1 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} U_2' = ik_0 \mu V_2 \\ V_2' = ik_0 \left( \varepsilon - \frac{\alpha^2}{\mu} \right) U_2 \end{array} \right\} \quad (2.20)$$

destas equações podemos escrever:

$$V_1 U_2' - U_1' V_2 = 0, \quad U_1 V_2' - V_1' U_2 = 0 \longrightarrow \frac{d}{dz} (U_1 V_2 - U_2 V_1) = 0$$

esta relação implica que o determinante

$$D = \begin{vmatrix} U_1 & V_1 \\ U_2 & V_2 \end{vmatrix} \quad (2.21)$$

associado com duas soluções particulares quaisquer de (2.15) é constante, isto é, que

$D$  é uma invariante de nosso sistema de equações.

Para nosso propósito, escolhamos como soluções particulares:

$$\left. \begin{aligned} U_1 = f(z) & \quad U_2 = F(z) \\ V_1 = g(z) & \quad V_2 = G(z) \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

tal que

$$f(0) = G(0) = 0 \text{ e } F(0) = g(0) = 1. \quad (2.23)$$

Podemos então expressar  $U(0) = U_0$  e  $V(0) = V_0$  na forma

$$\left. \begin{aligned} U &= FU_0 + fV_0 \\ V &= GU_0 + gV_0 \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

que em notação matricial pode ser escrito como

$$Q = NQ_0 \quad (2.25)$$

onde

$$Q = \begin{bmatrix} U(z) \\ V(z) \end{bmatrix} \quad Q_0 = \begin{bmatrix} U_0 \\ V_0 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} F(z) & f(z) \\ G(z) & g(z) \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Por conta da relação  $D = c.t.e.$ , o determinante da matriz  $N$  é uma constante. O valor desta constante pode ser imediatamente encontrado fazendo  $z = 0$ :

$$|N| = Fg - fG = 1 \quad (2.27)$$

Normalmente é mais conveniente expressar  $U_0$  e  $V_0$  como funções de  $U(z)$  e  $V(z)$ .

Resolvendo para  $U_0$  e  $V_0$  obtemos:

$$Q_0 = MQ \quad (2.28)$$

onde

$$M = \begin{bmatrix} g(z) & -f(z) \\ -G(z) & F(z) \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Esta matriz também é unimodular ( $|M| = 1$ ).

O significado de  $M$  é claro: ela relaciona as componentes  $x$  e  $y$  do campo elétrico (ou magnético) no plano  $z = 0$  com as componentes de um plano arbitrário  $z = \text{cte.}$ . Vemos que o conhecimento de  $U$  e  $V$  é suficiente para descrever o campo completamente. Assim, para determinar a propagação de uma onda plana monocromática através em um meio estratificado, este meio precisa ser especificado por uma matriz  $2 \times 2$  unimodular  $M$ . Por esta razão,  $M$  é chamada *matriz característica do meio estratificado*.

Considerando o caso mais simples de um meio dielétrico homogêneo, onde  $\varepsilon$ ,  $\mu$  e  $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$  são constantes. Para um onda TE, as equações (2.16) e (2.17) tomam a forma:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2U}{dz^2} + (k_0^2 n^2 \cos^2 \theta)U &= 0 \\ \frac{d^2V}{dz^2} + (k_0^2 n^2 \cos^2 \theta)V &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre a direção de propagação da onda e o eixo  $z$ . A solução destas equações, sujeita à relação (2.15), são dadas por

$$\left. \begin{aligned} U(z) &= A \cos(k_0 n z \cos \theta) + B \sin(k_0 n z \cos \theta) \\ V(z) &= \frac{1}{i} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos \theta B \cos(k_0 n z \cos \theta) - A \sin(k_0 n z \cos \theta) \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

As soluções particulares (2.22) que satisfazem às condições de contorno (2.23) são:

$$\left. \begin{aligned} U_1 = f(z) &= \frac{i}{\cos \theta} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \sin(k_0 n z \cos \theta) \\ V_1 = g(z) &= \cos(k_0 n z \cos \theta) \\ U_2 = F(z) &= \cos(k_0 n z \cos \theta) \\ V_2 = G(z) &= i \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos \theta \sin(k_0 n z \cos \theta) \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

chamando

$$p = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos \theta \quad (2.33)$$

a matrix característica assume a forma

$$M(z) = \begin{bmatrix} \cos(k_0 n z \cos \theta) & -\frac{i}{p} \sin(k_0 n z \cos \theta) \\ -ip \sin(k_0 n z \cos \theta) & \cos(k_0 n z \cos \theta) \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Para uma onda TM, as equações são mantidas, com a mudança de  $p$  por:

$$q = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cos \theta \quad (2.35)$$

Na interface de dois meios dielétricos, os campos apresentam componentes contínuas, de forma que para um filme formado por  $N$  camadas dielétricas homogêneas, a relação entre os campos elétrico e magnético na primeira interface com os da última interface pode ser escrita pelo produtório das matrizes de características:

$$Q_0 = \underbrace{M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdots M_{N-1} \cdot M_N}_M \cdot Q \quad (2.36)$$

onde  $M_i$  representa a matriz característica (2.34) da  $i$ -ésima camada.



### 2.1.1 Coeficientes de transmissão e reflexão

Considerando uma onda plana incidindo sobre um meio estratificado que se estende desde  $z = 0$  para  $z = z_1$  e que é rodeado em cada lado por um meio semi-infinito e homogêneo. Seja  $A$ ,  $R$  e  $T$  as amplitudes (provavelmente complexas) do vetor campo elétrico da onda incidente, refletida e transmitida. Seja ainda  $\varepsilon_1, \mu_1$  e  $\varepsilon_l, \mu_l$  as constantes dielétrica e a permeabilidade magnética do primeiro e do último meios e  $\theta_1$  e  $\theta_l$  os ângulos entre a direção de propagação das ondas incidente e transmitida com a direção  $z$  (direção de estratificação).

Da condição de contorno que exige a continuidade da componente tangencial dos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  na interface de dois meios de propagação diferentes e da relação:

$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \hat{u} \times \vec{E} \quad (2.37)$$

onde  $\hat{u}$  é um versor que aponta para a direção de propagação da onda, obtemos a seguinte relação para uma onda TE.

$$\left. \begin{aligned} U_0 &= A + R & U(z_1) &= T \\ V_0 &= p_1(A - R) & V(z_1) &= p_l T \end{aligned} \right\} \quad (2.38)$$

onde

$$p_{1l} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{1l}}{\mu_{1l}}} \cos \theta_{1l} \quad (2.39)$$

As quatro quantidades dadas por (2.38) são conectadas pela relação (2.28), logo

$$\left. \begin{aligned} A + R &= (m'_{11} + m'_{12} p_l) T \\ p_1(A - R) &= (m'_{21} + m'_{22} p_l) T \end{aligned} \right\} \quad (2.40)$$

onde  $m'_{ij}$  são os elementos da matriz característica do meio, computada para  $z = z_1$ . De (2.40) obtemos os coeficientes de reflexão e transmissão do filme:

$$r = \frac{R}{A} = \frac{(m'_{11} + m'_{12}p_l)p_1 - (m'_{21} + m'_{22}p_l)}{(m'_{11} + m'_{12}p_l)p_1 + (m'_{21} + m'_{22}p_l)} \quad (2.41)$$

$$t = \frac{T}{A} = \frac{2p_1}{(m'_{11} + m'_{12}p_l)p_1 + (m'_{21} + m'_{22}p_l)} \quad (2.42)$$

Em termos de  $r$  e  $t$ , a refletividade e transmissividade são

$$R = |r|^2, \quad T = \frac{p_l}{p_1}|t|^2 \quad (2.43)$$

As equações correspondentes para uma onda TM são imediatamente obtidas de (2.41)-(2.43) substituindo as quantidades  $p_1$  e  $p_l$  por

$$q_{1l} = \sqrt{\frac{\mu_{1l}}{\varepsilon_{1l}}} \cos \theta_{1l} \quad (2.44)$$

neste caso,  $r$  e  $t$  passam a ser razões da amplitude do campo magnético, e não do elétrico.

## 2.2 Resultados

Consideramos um filme binário aleatório composto por  $N$  camadas dielétricas ideais, com índices de refração  $n_A = 1.45$  e  $n_B = 2.5$ , apesar de o caráter qualitativo que será explorado permanecer o mesmo para outros pares  $(n_A, n_B)$ . A  $i$ -ésima camada da seqüência tem a mesma probabilidade de ser do tipo  $A$  ou  $B$ . A estrutura dielétrica resultante está submersa pelo vácuo, e a espessura das camadas é tomada de forma a satisfazer a condição de Bragg, isto é, ambos os tipos de ca-

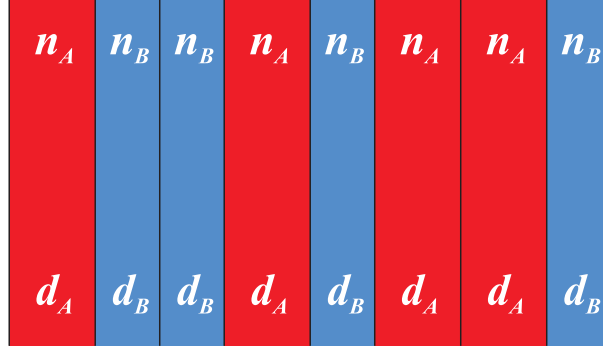


Figura 2.3: Representação de um sistema binário de multicamadas que apresenta desordem na ordem posicional das camadas.

camadas dielétricas apresentam o mesmo caminho óptico  $n_A d_A = n_B d_B = \lambda_0$ , onde a frequência característica  $\nu_0 = c/\lambda_0$  corresponde ao modo cujo comprimento de onda no vácuo é igual ao caminho óptico das camadas.

Uma visão geral da influência da desordem pode ser observada comparando o espectro de transmissão de uma sequência de camadas  $A$  e  $B$  alternadas com o de uma sequência de multicamadas aleatórias, como mostrado na Fig. 2.2 para uma estrutura com  $N = 10^2$  camadas. Para o caso periódico, o espectro de transmissão apresenta uma sequência de bandas de modos transmissíveis e modos proibidos (band gap fotônico). As bandas de modos transmissíveis são centradas em frequências na qual o caminho óptico de cada camada é um múltiplo inteiro de meio comprimento de onda no vácuo, isto é, a mudança de fase gerada em cada camada é dada por  $\delta = m\pi$ , com  $m$  inteiro. A estrutura de multicamadas é completamente transparente para estes modos. As bandas de modos proibidos são centradas nas frequências cujo caminho óptico das camadas apresenta-se com o quarto do comprimento de onda que a luz incidente possui quando propagando no vácuo (mudança de fase  $\delta = (m + 1/2)\pi$ ). A largura do gap fotônico depende da diferença entre os

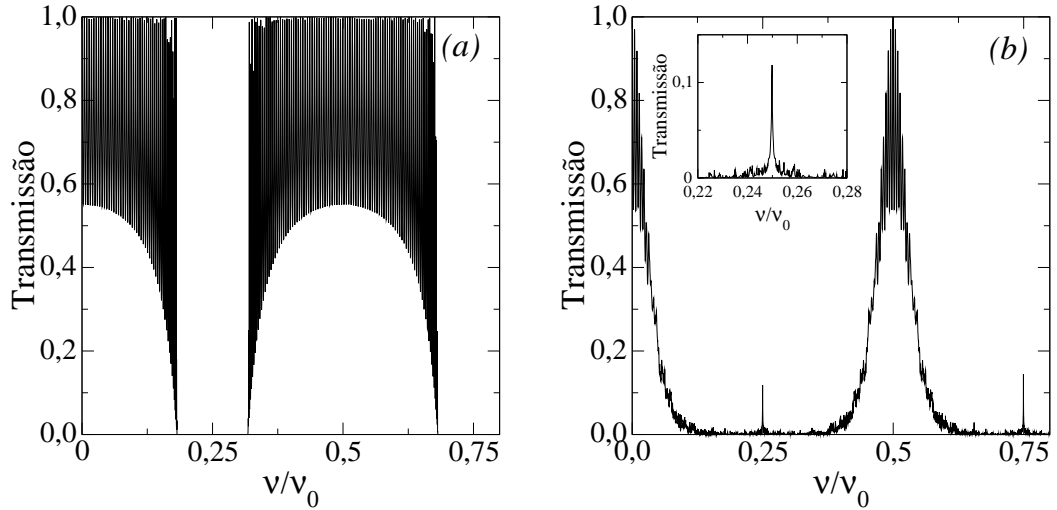


Figura 2.4: Espectro de transmissão de um filme binário periódico (a) e aleatório (b) com  $N = 10^2$  camadas. Para a estrutura aleatória foram utilizadas  $10^2$  diferentes realizações. A desordem na posição das camadas apresenta influências distintas para as regiões de frequência correspondente à banda de modos transmissíveis e a de modos proibidos. O *inset* mostra em detalhes o pico de transmissão induzido pela desordem no centro da região de frequência correspondente ao gap fotônico.

índices de refração  $n_A$  e  $n_B$ .

O espectro de transmissão média em uma estrutura desordenada, calculada sobre  $10^2$  amostras de desordem, é mostrado na figura 2.2(b). A desordem apresenta efeitos diferentes nas regiões de frequência correspondente à banda de transmissão e ao gap. Primeiramente nota-se que o pico central das bandas de transmissão não é afetado pela desordem, o que é esperado já que a matriz de transferência de cada camada transforma-se em uma matriz identidade  $I$  nestes modos (na verdade temos  $\pm I$ ). Além disso, a largura da banda de transmissão é reduzido. Na região de gap fotônico, a desordem induz o surgimento de alguns poucos modos, relacionados com estados de necklace[17, 18], resultantes da hibridização de estados degenerados

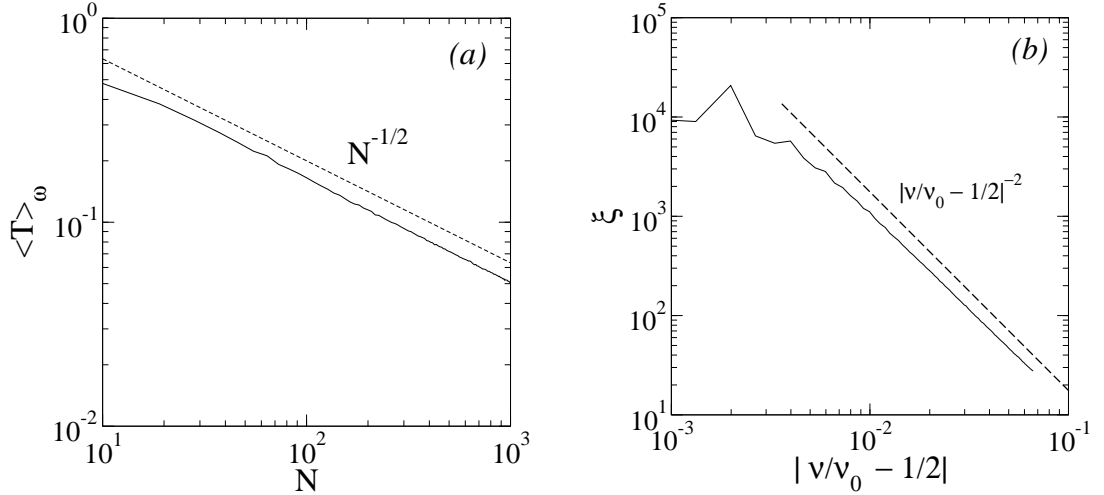


Figura 2.5: (a) Média espectral da transmissão versus o número de camadas  $N$ . (b) Comprimento de localização na vizinhança do modo de meio comprimento de onda. A transmissão média decai com  $1/N^{1/2}$  e o comprimento de localização decai quadraticamente à medida que se aproxima do modo ressonante. A estimativa do comprimento de localização foi obtida considerando-se uma estrutura finita com  $N = 10^4$  camadas e a média foi calculada sobre  $10^3$  seqüências aleatórias distintas. A saturação do comprimento de localização quando muito próximo do modo ressonante é um efeito do tamanho finito do sistema.

localizados em regiões distintas do filme. Apesar destes modos se tornarem raros com o aumento do número de camadas, eles dominam a transmissão média nesta região de frequência, de forma que o espectro de transmissão média apresenta um pequeno pico no centro do gap fotônico.

A insensibilidade do modo de total transmissividade com o arranjo das camadas remete à violação da localização de Anderson que ocorre no modelo eletrônico de dímeros aleatórios[52, 53]. Este modelo também apresenta um modo ressonante no qual o dímero se torna transparente. Uma assinatura típica deste tipo de ressonância é o fato de o comprimento de localização  $\xi$  divergir com  $|E - E_0|^{-2}$ .

Conseqüentemente a faixa de energias dos estados efetivamente estendidos com  $\xi > N$  deve decrescer com  $N^{-1/2}$ . Verificamos estas leis de escala para os modos na vizinhança do modo de quarto comprimento de onda. Como uma medida do comprimento de localização  $\xi$ , consideramos o inverso do expoente de Lyapunov [ $\xi = 1/\Lambda = -\lim_{N \rightarrow \infty} (N/\ln T)$ ]. Calculamos também a média espectral da transmissão  $\langle T \rangle_\omega = (1/\Delta\omega) \int_{\omega_0}^{\omega_0 + \Delta\omega} \langle T(\omega) \rangle d\omega$  para a região de frequência correspondente à banda de transmissão para o caso periódico. Na fig. 2.5 temos os nossos resultados para estas quantidades. Assim como o previsto acima, a média da transmissão decai com  $N^{-1/2}$  e o comprimento de localização diverge quadraticamente à medida que se aproxima do modo ressonante.

No modo central da região de band gap nota-se que a matriz de transferência de ambos os tipos de camadas apresenta elementos não nulos fora da diagonal. Entretanto, estes elementos não diagonais são aleatoriamente distribuídos. Este cenário é análogo ao encontrado no hamiltoniano do modelo eletrônico tight-binding unidimensional de Anderson com termos de hopping aleatórios [54, 55]. O estado central à banda de energias deste modelo tem um comprimento de localização infinito. Apesar disto, a média na desordem da transmissão se aproxima de zero à medida que o comprimento do sistema aumenta. Baseado no teorema do limite central, o logaritmo da transmissão no modo ressonante deve apresentar uma distribuição Gaussiana no regime de  $N$  grande, cujo desvio quadrático médio cresce com  $N^{1/2}$ , como mostrado na referência [54]. Seguindo esta distribuição, o valor da média geométrica [ $\exp(\langle \ln(T) \rangle)$ ] e da harmônica ( $\langle 1/T \rangle^{-1}$ ) da transmissão deve comportar-se como  $\exp(-\alpha\sqrt{L})$ , enquanto que o valor da média aritmética ( $\langle T \rangle$ ) deve obedecer à uma lei de potência  $N^{1/2}$ . À medida que se aproxima do centro da banda, a localização diverge logicamente [55], resultando que a faixa de energia dos

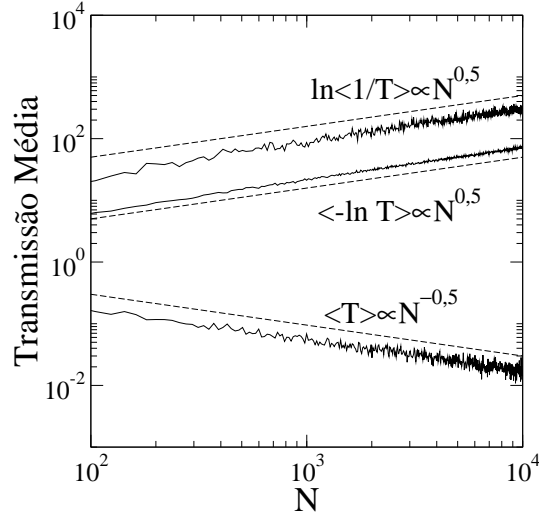


Figura 2.6: Dependência espacial da média geométrica ( $\exp \langle \ln T \rangle$ ), harmônica ( $\langle 1/T \rangle^{-1}$ ) e aritmética ( $\langle T \rangle$ ) da transmissão na frequência da ressonância de 1/4 de comprimento de onda. Tanto a média geométrica quanto a harmônica escalam como uma exponencial alongada, enquanto que a média aritmética exibe decaimento mais lento tipo lei de potência. A média foi tomada sobre  $10^4$  seqüências aleatórias distintas.

estados efetivamente estendidos devem ser estreita, escalando com uma exponencial alongada.

Verificamos o comportamento de escala acima citado no modo de 1/4 de comprimento de onda. Na fig. 2.6 temos a dependência espacial da média geométrica, harmônica e aritmética da transmissão. Tanto a média geométrica como a harmônica apresentam uma escala do tipo exponencial alongada, enquanto que a média aritmética exibe um decaimento mais lento tipo lei de potência. Na fig 2.7 mostramos a distribuição de probabilidade do logaritmo da transmissão no modo de 1/4 de comprimento de onda sobre  $10^4$  diferentes seqüências aleatórias com  $10^4$  camadas. A distribuição numericamente obtida apresenta um bom ajuste com uma curva Gaussiana,

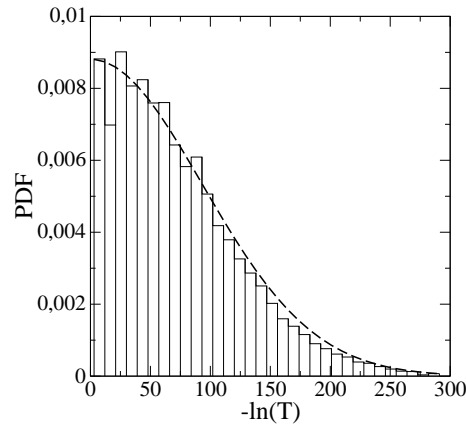


Figura 2.7: Função distribuição de probabilidade do logaritmo da transmissão na frequência de ressonância de  $1/4$  de comprimento de onda. A distribuição obtida numericamente tem bom ajuste com uma curva Gaussiana (linha tracejada), corroborando portanto com a provisão do teorema do limite central. Os dados são os mesmos utilizados na fig 2.3 para  $N = 10^4$  camadas.

corroborando com as previsões do teorema do limite central. É importante mencionar que a configuração de desordem que leva à uma transmissão elevada ocorre com maior probabilidade que a distribuição que leva à uma transmissão baixa. Isto é de certa forma um aspecto contra-intuitivo, uma vez que se espera da desordem um favorecimento da localização. Na verdade, neste valor de frequência, o sistema tem uma ordem parcial escondida. Pares de camadas vizinhas do mesmo tipo são transparentes. Por conta disso, o tamanho efetivo do sistema pode ser renormalizado dizimando tais pares até um nível no qual as camadas restantes formam uma seqüência periódica alternada [18]. A probabilidade de tal dizimação proceder até altas ordens é alta, resultando portanto em um máximo na distribuição de desordem para alta transmissão.

A média espectral da transmissão na região de frequência próximo ao modo



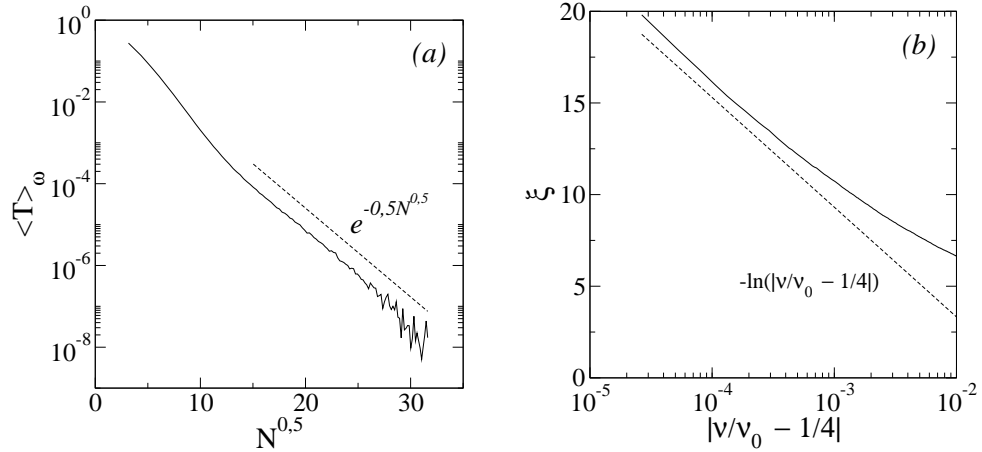


Figura 2.8: (a) Média espectral da transmissão na região de frequência próxima do modo de  $1/4$  de comprimento de onda como uma função do número de camadas. Vemos um decaimento assintótico do tipo exponencial alongada com o aumento do número de camadas. (b) A média na desordem do comprimento de localização na vizinhança da ressonância de  $1/4$  de comprimento de onda apresenta divergência logarítmica lenta. A média foi tomada sobre  $10^4$  seqüências aleatórias. O comprimento de localização em (b) foi estimado para uma estrutura com  $5 \times 10^3$  camadas.

de  $1/4$  de comprimento de onda é mostrado na fig. 2.8(a). Em contraste com a lei de potência obtida na vizinhança do modo de  $1/2$  de comprimento de onda, encontramos agora que a média espectral da transmissão exhibe um decaimento mais rápido com o aumento do número de camadas, do tipo exponencial alongada. Esta tendência é consistente com a lenta divergência logarítmica do comprimento de localização quando próximo deste modo ressonante, como mostra a fig. 2.8(b). Todos os comportamentos de escala relatados na ressonância de  $1/4$  de comprimento de onda são consistentes com os obtidos para o modelo eletrônico *tight-binding* de hopping aleatório e deve se manter para modelos unidimensional gerais com desordem apenas nos termos fora da diagonal.

A análise acima mostrou que a desordem exerce influência oposta no compor-

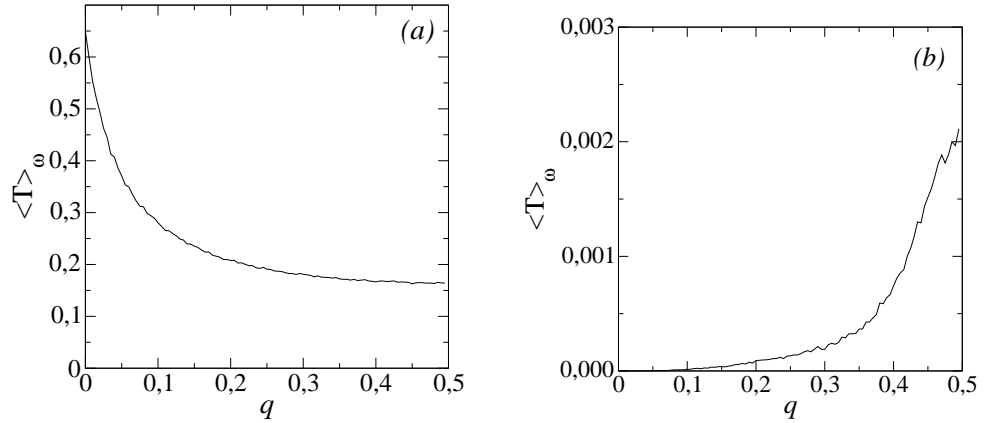


Figura 2.9: Média espectral da transmissão no entorno das ressonâncias de  $1/2$  (a) e  $1/4$  (b) de comprimento de onda como função do grau de desordem. A desordem exerce tendências opostas no comportamento da transmissão próximo de cada ressonância. Ao redor da ressonância e  $1/2$  de comprimento de onda, a localização de Anderson é o efeito predominante e a transmissão decai com o aumento da desordem. Por outro lado, próximo da ressonância de  $1/4$  de comprimento de onda, a desordem induz o surgimento de estados dentro da banda de gap, o que promove uma pequena transmissão nesta região de frequência. Dados obtidos de  $5 \times 10^3$  seqüências aleatórias distintas com  $10^2$  camadas cada.

tamento da transmissão próximo dos modos de  $1/2$  e  $1/4$  de comprimento de onda. Próximo da condição de  $1/2$  comprimento de onda, isto é, na banda de transmissão da seqüência periódica, o principal efeito da desordem é promover a localização exponencial dos modos, com exceção da ressonância. Por conta disso, a média espectral da transmissão é reduzida pela desordem. Por outro lado, dentro da banda de gap fotônico, a desordem promove o surgimento de estados que apresentem uma pequena mas finita transmissão em sistemas finitos.

A fim de mostrar explicitamente estas tendências opostas, computamos a média espectral da transmissão na região em volta das ressonâncias de  $1/2$  e  $1/4$  de comprimento de onda como uma função do grau de desordem. Iniciamos com

uma seqüência periódica de camadas alternadas  $A$  e  $B$ . Então, o tipo de camada de cada sítio desta seqüência é trocado com uma probabilidade  $q$ . Para  $q = 0$  obtemos uma seqüência completamente periódica, enquanto que para o limite de  $q = 1/2$  teremos a seqüência desordenada e descorrelacionada. Nossos resultados são mostrados na figura 2.6 para  $N = 10^2$  camadas, com valores médios obtidos sobre  $5 \times 10^3$  configurações de desordem e dentro da região de freqüência correspondente à banda de transmissão (a) e à de reflexão (b). Nota-se que a transmissão média no entorno do modo de  $1/2$  de comprimento de onda decai com o aumento do grau de desordem, uma vez que a localização de Anderson é o efeito predominante. A média espectral da transmissão em torno da ressonância de  $1/4$  de comprimento de onda descreve uma tendencia oposta, crescendo com o aumento do grau de desordem devido à emergência de estados dentro do gap. A média na transmissão é pequena devido à baixa probabilidade de ocorrência de estados de *necklace*.

Temos portanto que o emprego de uma distribuição desordenada em um filme binário de  $N$  camadas que obedecem à condição de Bragg cria um alargamento da região do gap fotônico, que aumenta com o número de camadas  $N$  e é centrada pelo modo de quarto de onda. Apesar deste alargamento, a desordem faz surgir alguns poucos modos de baixa transmissividade nesta região, de forma que a média espectral da transmissão aumenta ligeiramente com o grau de desordem nesta região.

Calculando o logaritmo da transmissão do modo ressonante de quarto de comprimento de onda para várias realizações de desordem, observamos que esta quantidade apresenta uma distribuição Gaussiana, o que reflete uma ordem parcial escondida que pode ser revelada pela dizimação dos pares de camadas vizinhas similares. Nesta ressonância, as médias geométrica e harmônica da transmissão escalam como uma exponencial alongada de  $N$ , enquanto que a média aritmética

---

apresenta um decaimento mais lento, tipo lei de potência, proporcional à  $N^{-1/2}$ . Além disso, a média espectral da transmissão no entorno desta ressonância também decai com o número total de camadas como uma exponencial alongada, corroborando com a lenta divergência logarítmica do comprimento de localização. As leis de escala para esta ressonância são similares às obtidas para o modelo de Anderson com hopping aleatório.

A pequena região de modos transmissíveis é centrada pelo modo de meio comprimento de onda. Este modo é completamente transparente e insensível à desordem. A largura desta banda decai com o grau de desordem e com o número de camadas, de forma que a média espectral da transmissão escala com  $N^{1/2}$ . Além disto, o comprimento de localização diverge quadraticamente à medida que se aproxima da frequência de ressonância. Estas leis de escala são as mesmas encontradas no modelo tight-binding de Anderson com dímeros aleatórios para estados eletrônicos.

## Capítulo 3

# Multicamadas com Modulação Aperiódica

Seqüências quasi-periódicas atraem o fascínio dos cientistas por apresentarem características intermediárias entre o caso periódico e o desordenado. Como foi discutido no capítulo introdutório, os auto-estados de um elétron em uma cadeia atômica periódica se comportam como ondas de Bloch, enquanto que para uma cadeia desordenada os elétrons se apresentam confinados à uma região finita da cadeia. A utilização de uma distribuição quasi-periódica pode, a princípio, cobrir uma transição entre estes dois regimes, e por isso tem sido muito empregada nos diversos problemas de localização.

Por não apresentar simetria translacional, uma seqüência quasi-periódica se assemelha a uma seqüência desordenada. No entanto, a primeira é gerada por uma regra determinística, onde temos como exemplo as distribuições de Thue-Morse, Fibonacci e as com modulação aperiódica, esta última sendo escolhida como tema de estudo a ser apresentado neste capítulo.

---

No modelo de Anderson para elétrons não interagentes, a utilização de potenciais modulados aperiodicamente tem produzido resultados fascinantes. No final dos anos 70, M. A. Azbel [36], utilizando o modelo de Kromig-Penney, mostrou que o espectro de energias de uma partícula em um potencial 1D periódico, cujo período é incomensurável, é do tipo *devil's stair*. Utilizando trajetórias no espaço de fase, mostrou-se que existem estados localizados e estendidos separados por um *mobility edge*, resultado que viola a teoria de escala de Anderson. Baseado nos trabalhos de Azbel[36] e Aubry[37], J. B. Sokoloff [38] estudou a localização de elétrons no modelo *tight-binding* contendo um potencial de modulação periódica incomensurável, no qual a equação de Schrödinger é dada por

$$f_{n+1} + f_{n-1} + V_0(\cos qn)f_n = Ef_n \quad (3.1)$$

onde  $f_n$  é o coeficiente de expansão para a função de onda na aproximação *tight-binding* [ $\psi(x) = \sum_n f_n \phi(x - na)$ ] e  $\phi$  representa um orbital atômico. A incomensurabilidade é obtida ao assumirmos que  $q$  é um número irracional. Estudos numéricos da convergência da fração contínua resultante para a auto-energia indicou que em uma dimensão existe uma transição em um valor crítico de  $V_0$  de todos os estados localizados para todos os estados estendidos. Estudos em duas e três dimensões mostraram que existe uma faixa intermediária de valores de  $V_0$  no qual pode existir *mobility edge* separando estados estendidos e localizados. Um estudo posterior de Soukoulis e Economou [39], utilizando a densidade de estados, mostrou que com a inclusão de incomensurabilidade no potencial, até mesmo um sistema unidimensional pode apresentar *mobility edge*. Em 1988 M. Griniasty e S. Fishman estudaram o comprimento de localização em um modelo *tight-binding* onde o potencial modulado

periodicamente, cujo período obedece uma lei de potência, ou seja

$$\epsilon_n = V \cos(\pi \alpha |n|^\nu) \quad (3.2)$$

onde  $\alpha$  é um número irracional. Foi mostrado que para  $\nu \geq 2$  todos os estados são localizados e o sistema se comporta de maneira pseudo-aleatória, enquanto que para  $0 < \nu \leq 1$  existem estados estendidos. No regime intermediário de  $1 < \nu < 2$  foram encontradas discordâncias entre os resultados previstos pelo método perturbativo e os resultados numéricos, tendo o autor sugerido uma maior investigação do problema.

Outros estudos utilizando o potencial 3.2 [40, 41] mostraram a existência de estados localizados e estendidos controlados pela largura da desordem e pelos valores de  $\nu$ , resumidamente descrito abaixo:

- Quando  $0 < \nu < 1$  e  $V < 2$ : Estados estendidos em  $-2 + V < E < 2 - V$   
Estados localizados em  $2 - V < E < 2 + V$  e  $-2 - V < E < -2 + V$
- Quando  $0 < \nu < 1$  e  $V > 2$ : Todos os estados são localizados
- Quando  $\nu = 1$  e  $V < 2$ : Todos os estados são estendidos
- Quando  $\nu = 1$  e  $V > 2$ : Todos os estados são localizados
- Quando  $1 < \nu < 2$ : Todos os estados são localizados, mas o coeficiente de Lyapunov se aproxima de zero no centro da banda
- Quando  $\nu > 2$ : O sistema se comporta como no caso desordenado, sendo portanto todos os estados exponencialmente localizados.

Neste capítulo apresentamos o resultado de uma análise da influência de

uma distribuição binária de camadas que obedece uma lei baseada na eq.3.2. Os parâmetros de construção das camadas seguem sendo os mesmos utilizados no capítulo anterior, ou seja, vamos considerar a estrutura de multicamadas composta por dois tipos de materiais dielétricos não-absorventes e não-dispersivos cujas espessuras satisfazem à condição  $n_A d_a = n_B d_B$ .

### 3.1 Distribuição Binária Aperiódica

A aperiodicidade foi aplicada baseando-se no procedimento descrito em [41]. A seqüência de índices de refração é tomada de acordo com a regra:

$$V_j = \cos(\alpha\pi j^\nu) \rightarrow n_j = \begin{cases} n_A & \text{se } V_j \leq 0 \\ n_B & \text{se } V_j > 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

A regra acima utiliza uma função senoidal cuja fase  $\phi$  varia como uma lei de potência,  $\phi \propto j^\nu$ , onde  $j$  representa o índice da camada no filme dielétrico. O expoente  $\nu$  controla o grau de aperiodicidade da estrutura. Consideramos que a estrutura dielétrica resultante é envolvida pelo vácuo. Para  $\nu = 1$  e  $\alpha$  racional, teremos uma seqüência de índices de refração puramente periódica e o espectro de transmissão apresenta bandas de transmissão alternadas por bandas de gap fotônico. Para  $\nu = 1$  e  $\alpha$  irracional, a seqüência se torna quasi-periódica (incomensurável) e o espectro de modos propagantes se torna fractal [7, 8]. Para  $\nu < 1$  a seqüência é aperiódica com o comprimento de onda da modulação dos índices de refração aumentando como uma função do índice  $j$  da camada. Neste regime, o espectro exhibe modos localizados e estendidos. No regime oposto de  $\nu > 1$ , o comprimento de onda da modulação decresce com o índice  $j$  da camada e muitos estados se



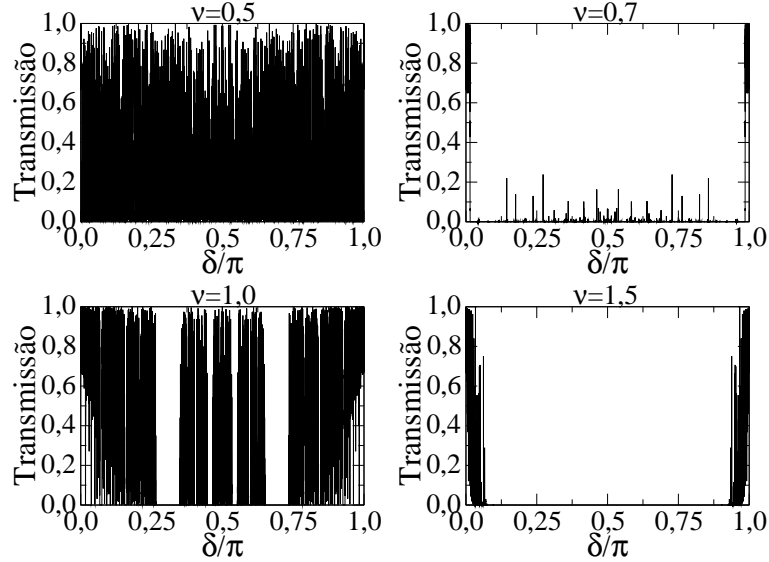


Figura 3.1: Espectro de transmissão de uma estrutura de multicamadas com diferentes valores de  $\nu$  e  $5 \times 10^3$  camadas como função de  $\delta = \omega nd/c$  ( $nd = n_A d_A = n_B d_B$ ). Para  $\nu > 1$ , a estrutura é pseudo-aleatória e o espectro possui picos estreitos de transmissão na vizinhança das ressonâncias de Bragg. Para  $\nu < 1$ , a transmissão pode ser largamente suprimida com o aumento de  $\nu$ . No caso periódico incommensurável ( $\nu = 1$ ) o espectro apresenta uma estrutura auto-similar de gaps típico de uma seqüência dielétrica de Fibonacci.

tornam localizados, com exceção dos modos ressonantes, caracterizando um regime pseudo-aleatório.

## 3.2 Resultados

Em nossos cálculos utilizamos  $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$  (a “média dourada”),  $n_A = 1.5$  e  $n_B = 2.5$ . Fig 3.1 mostra o espectro de transmissão de uma estrutura de multicamadas com diferentes valores de  $\nu$  e  $N = 5 \times 10^3$ . Como foi utilizado camadas de mesmo caminho óptico, a frequência do modo é proporcional à mudança de

fase  $\delta$  dentro de cada camada. Para  $\nu = 0,5$ , o espectro é denso com um grande número de frequências transmissíveis. Esta característica é devida ao fato de que o número de interfaces entre camadas dielétricas distintas é pequeno neste regime. Para  $\nu = 1,0$  temos a presença de gaps que seguem um padrão auto-similar. Este espectro é típico de estruturas quasi-periódicas com seqüências incomensuráveis. Para  $\nu = 1,5$ , a seqüência apresenta um caráter pseudo-aleatório e muitos dos modos passam a ser localizados, com exceção dos modos na vizinhança das ressonâncias de Bragg. Um aspecto interessante é observado quando se incrementa o valor de  $\nu$  de  $\nu = 0$  (seqüência uniforme) para  $\nu = 1$  (seqüência quasi-periódica). O número de frequências transmissíveis muda de maneira não-monotônica neste regime. Esta característica é representada pelo caso de  $\nu = 0,7$  que exhibe poucos modos de transmissão.

O comportamento não-monotônico do espectro de transmissão é descrito mais quantitativamente na Fig. 3.2, onde temos a média espectral da transmissão ( $\langle T \rangle_\delta = (1/\pi) \int_0^\pi T(\delta) d\delta$ ) como uma função do número de camadas  $N$  para diferentes valores de  $\nu$ . A média espectral da transmissão decai à medida que o número de camadas aumenta. Entretanto, a dependência espacial é mais fraca no regime quasi-periódico de  $\nu = 1$ , especialmente no caso de  $N$  grande. Para  $\nu > 1$ , o decaimento da transmissão média com o número de camadas se torna mais forte com o aumento de  $\nu$ , uma característica associada com o forte caráter pseudo-aleatório da seqüência resultante. Por outro lado, no regime de  $\nu < 1$ , a dependência com  $N$  da transmissão média inicialmente é forte como o aumento de  $\nu$ , mas esta tendência é revertida à medida que o regime quasi-periódico aproxima-se.

Uma análise complementar da influência do expoente de aperiodicidade  $\nu$  na média espectral da transmissão pode ser obtida traçando o gráfico de sua de-

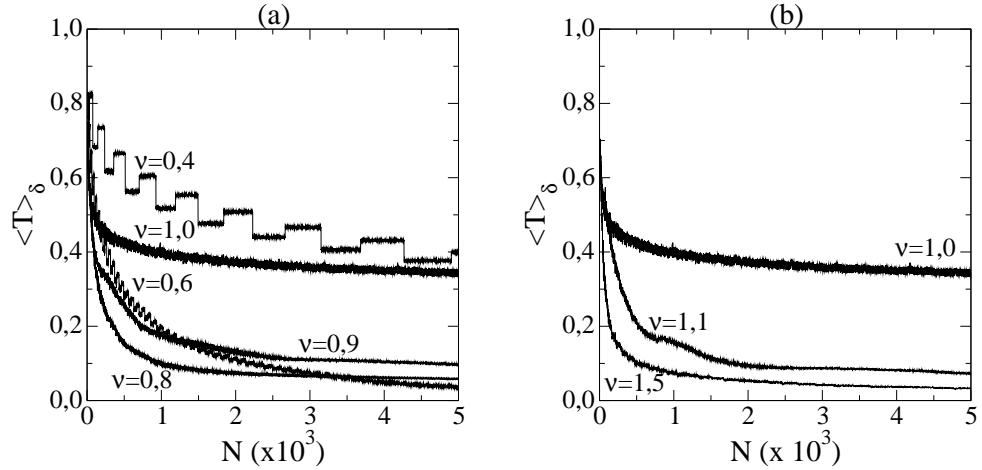


Figura 3.2: Média espectral da transmissão como função do número de camadas  $N$  para diferentes valores de  $\nu$ . (a)  $\nu \leq 1.0$ ; (b)  $\nu \geq 1.0$ . Para o caso periódico incomensurável  $\nu = 1$ , a transmissão apresenta uma dependência espacial muito fraca. Para pequenos valores de  $\nu$ , a média espectral da transmissão em estruturas finas pode se tornar tão pequena quanto a obtida para o caso pseudo-aleatório com  $\nu > 1$ .

pendência com  $\nu$  para um número fixo de camadas, como mostrado na fig. 3.3 onde consideramos  $N = 10^4$  camadas. A transmissão média apresenta um pico em  $\nu = 1$  com forte flutuação no entorno desta condição. Para  $\nu$  grande, a transmissão é pequena, apresentando uma pequena flutuação ao redor de um valor constante. No regime de fraca aperiodicidade, temos um mínimo bem definido, sinalizando o cruzamento entre o comportamento da estrutura uniforme e da quasi-periódica.

Uma visão geral da dependência da transmissão média com o expoente  $\nu$  pode ser diretamente correlacionado com a decomposição espectral da seqüência de camadas que forma a estrutura. Na fig. 3.4, plotamos uma seqüência típica de índices de refração juntamente com o sua densidade espectral de Fourier. Nota-se que, para  $\nu$  pequeno o espectro de Fourier apresenta um pico estreito nas baixas

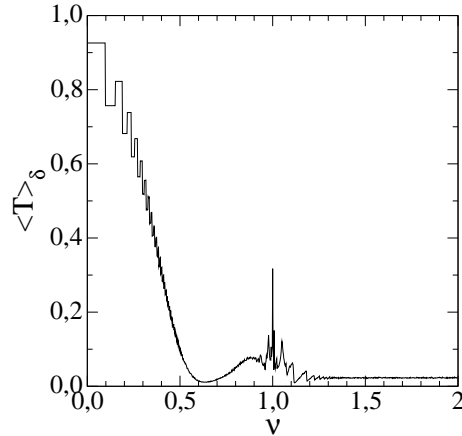


Figura 3.3: Média espectral da transmissão como função de  $\nu$  para um amostra com número fixo de camadas  $N = 10^4$ . A média espectral da transmissão mostra um máximo para o caso periódico incomensurável  $\nu = 1.0$  e um mínimo local no regime de  $\nu < 1$ . O *plateau* atingido para  $\nu > 1$  é uma característica do regime pseudo-aleatório.

freqüências, o que reflete o longo comprimento de onda médio da modulação dos índices de refração. Este pico se torna ligeiramente maior à medida que o número de interfaces entre as camadas aumenta. No caso incomensurável  $\nu = 1$ , a densidade espectral da seqüência assume um padrão auto-similar do tipo *delta* com uma freqüência predominante igual a  $f = \alpha/2$ , típico de uma seqüência quasi-periódica de Fibonacci. No regime de  $\nu > 1$ , o índice de refração se assemelha a um *ruido-rosa* descorrelacionado e a densidade espectral de Fourier não apresenta freqüência típica.

O grau de correlação na seqüência dos índices de refração pode ser quantificado através do cálculo do Espectro de Fourier Integrado (IFS). Uma seqüência ruidosa deve apresentar um IFS elevado, enquanto que seqüências mais regulares apresentam espectro de Fourier mais estreito e conseqüentemente um IFS menor. O IFS da seqüência de índices de refração como uma função de  $\nu$  é reportada na fig.

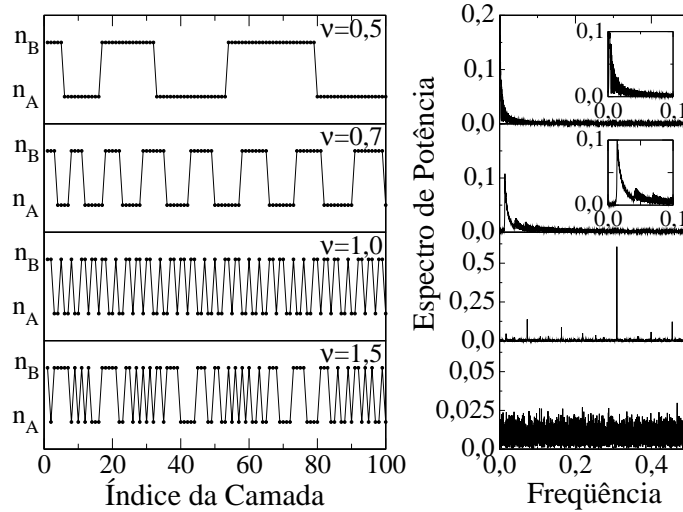


Figura 3.4: Painel esquerdo: Seqüência típica de índices de refração gerados por uma função de modulação aperiódica. Painel direito: densidade espectral de Fourier correspondente para cada seqüência de índices de refração. Para pequenos valores de  $\nu$ , a densidade espectral apresenta um pico estreito ao redor da freqüência média da modulação da seqüência. Em  $\nu = 1$  a estrutura obedece uma seqüência de Fibonacci, a qual apresenta uma densidade espectral auto-similar. Para  $\nu > 1$  a seqüência é pseudo-aleatória com um espectro do tipo ruído-rosa.

3.5. Vemos um *plateau* para valor de  $\nu$  grande, apontando uma irrelevância do valor em questão com relação ao expoente de aperiodicidade no regime fortemente pseudo-aleatório. O mínimo em  $\nu = 1$  está associado com a estrutura quasi-periódica da seqüência de Fibonacci para este caso particular. No regime fracamente aperiódico, o IFS passa por um máximo que é resultado das contribuições opostas gerada pelas própria inclusão de interfaces, o que produz espalhamentos, e a proximidade da quasi-periodicidade, o que faz surgir modos ressonantes. Nota-se que o comportamento geral da média espectral da transmissão, apresentada na fig. 3.3, de certa forma captura as características essenciais mostradas pela IFS da estrutura em questão. Uma seqüência fortemente correlacionada apresenta um espectro de

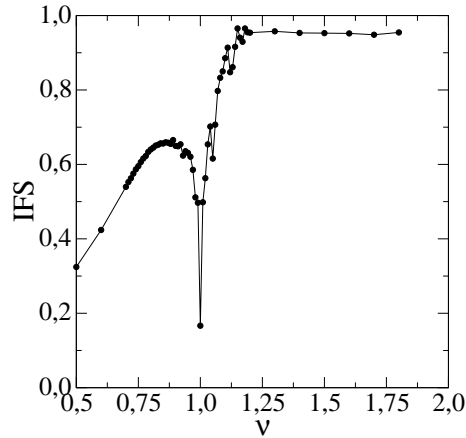


Figura 3.5: Espectro de Fourier Integrado (IFS) como função do expoente de aperiódicidade  $\nu$ . O mínimo pronunciado em  $\nu = 1$  aponta uma forte correlação devido à relação da seqüência de camadas em questão com a tipo Fibonacci. O *plateau* para  $\nu > 1$  reflete a natureza não correlacionada da seqüência de camadas neste regime. O máximo em  $\nu < 1$  é uma consequência do efeito oposto causado pelo espalhamento em interfaces e o surgimento de modos ressonantes (ver texto).

Fourier estreito, levando a um pequeno IFS e uma transmissão média alta.

Em resumo, vimos que as propriedades de transmissão de uma estrutura binária de multicamadas dielétricas com modulação aperiódica sobre a seqüência de índices de refração apresenta diferentes comportamentos para cada grau de aperiódicidade. Para o caso  $\nu > 1$  temos uma seqüência resultante do tipo pseudoaleatória, de forma que a localização de Anderson dos modos eletromagnéticos faz surgir um largo gap no espectro de transmissão e estreitas bandas de transmissão centradas pelos modos ressonantes de Bragg. No regime de  $\nu < 1$ , obtivemos uma dependência não monotônica da média espectral da transmissão com o expoente de aperiódicidade  $\nu$ . Este comportamento não convencional está associado com a ação de dois efeitos opostos que surgem neste tipo de distribuição. Um efeito está relaci-

---

onado com o espalhamento nas interfaces entre camadas dielétricas distintas. Este fenômeno leva à uma redução da transmissão quando o número de interfaces começa a crescer. No entanto, quando este número se torna grande o suficiente, a condição de quasi-periodicidade se aproxima, estabilizando modos transmissíveis ressonantes. Como consequência, a média da transmissão passa por um mínimo no intervalo de  $0 < \nu < 1$  que é menor que o apresentado no regime de forte pseudo-aleatoriedade. Uma análise do espectro de Fourier mostra que tendência é diretamente relacionada com a correlação exibida pela própria seqüência de índices de refração.

## Capítulo 4

# Multicamadas com Metamateriais

Os metamateriais são estruturas ópticas construídas de tal maneira a apresentarem permissividade e permeabilidade ambos negativos. Esta característica leva a fenômenos eletromagnéticos não usuais, com por exemplo, o produto vetorial entre os campos  $\vec{E} \times \vec{H}$  aponta para a direção  $-\vec{k}$  para onda plana propagante. Este tipo de material foi inicialmente idealizado em meados do século passado pelo cientista russo Victor Veselago [42], mas suas previsões não puderam ser verificadas experimentalmente por que até então não se conhecia uma substância que apresentasse permeabilidade e permissividade negativas. No final dos anos 90, Pendry [43] et. al. introduziram uma matriz periódica de anéis condutores abertos não-magnéticos cujo comportamento dominante pode ser interpretado como havendo uma permeabilidade magnética efetiva. Fazendo a unidade constituinte da matriz de maneira ressonante, a magnitude de  $\mu_{eff}(\omega)$  é consideravelmente incrementada, levando a um valor de  $\mu_{eff}$  positivo grande próximo do lado de baixa frequência da ressonância e, mais notavelmente, um valor negativo de  $\mu_{eff}$  próximo do lado de alta frequência da ressonância, esta estrutura recebeu o nome de *Split Ring Resonator* (SRR).



Baseado neste trabalho, Smith *et. al.* propuseram um meio composto por uma matriz periódica de SRRs inter-espçados por fios contínuos(fig. 4.1) Esta estrutura apresenta simultaneamente um valor negativo para a permeabilidade magnética efetiva  $\mu_{eff}(\omega)$  e para a permissividade efetiva  $\epsilon_{eff}(\omega)$  na região de frequência do micro-ondas. A matriz de fios metalicos finos é responsável por criar um meio de propagação com permissividade efetiva dada por:

$$\epsilon_{eff} = 1 - \frac{f_e^2}{f^2 + i\gamma_e f} \quad (4.1)$$

A matriz de SRR's, por outro lado, é responsável pela forma ressonante da permeabilidade magnética efetiva. Sua fórmula teórica é dada por:

$$\mu_{eff} = 1 - \frac{F f^2}{f^2 - f_m^2 + i\gamma_m f} \quad (4.2)$$

onde  $f_e$  é a frequência do plasma eletrônico,  $f_m$  é a frequência de ressonância magnética,  $\gamma_e$  ( $\gamma_m$ ) representa as perdas do sistema, e  $F$  é um fator de preenchimento dos SRR.

A partir daí, verificações experimentas das predições de Veselago puderam ser realizadas. K. Guven, M. D. Caliskan e E. Ozbay [44] demonstraram experimentalmente a banda de transmissão de um metamaterial unidimensional sob uma propagação normal ao plano no regime de microondas.

Novos e fascinantes fenômenos foram descobertos com a utilização de metamateriais. Pendry comprovou que uma lâmina de material com índice de refração negativo tem o poder de focalizar todas as componentes de Fourier de uma imagem 2D. Ele nomeou este dispositivo de “superlente” [45]. Esta estrutura também mostrou promover um deslocamento lateral de um feixe Gaussiano de incidência oblíqua

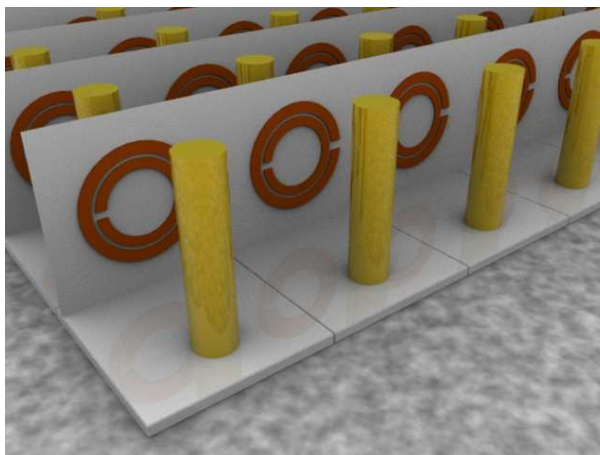


Figura 4.1: Representação da estrutura proposta por Smith. Os anéis abertos ressonantes proporcionam permeabilidade magnética negativa, enquanto que a matriz periódica de fios é responsável pela permissividade elétrica negativa na região de micro-ondas

[46].

Para uma estrutura de multicamadas contendo metamaterial, novos fenômenos também se manifestam, como o surgimento de pseudo-modos de frequência complexa, modos discretos e modos de tunelamento fotônico na estrutura de bandas [47]. A união de camadas de metamaterial e dielétrico ordinário ainda faz surgir um novo tipo de PBG de natureza diferente do obtido em um PC ordinário. Este PBG recebe o nome de *zero- $\hat{n}$  gap* [48, 49] e emerge naturalmente quando a média volumétrica do índice de refração efetivo se iguala a zero. Este PBG apresenta características especiais tais como a invariância com a mudança da constante de rede. Verificações experimentais deste novo tipo de PBG foram realizadas utilizando metamateriais do tipo *double-S shaped*[50].

O efeito da desordem em uma seqüência unidimensional constituída de metamaterial e dielétrico ordinário foi estudado teoricamente por Ara A. Asatryan *et.*

*al.* [51]. Em seu artigo, a permeabilidade e a permissividade da *j*-ésima são dados por  $\mu_j = \pm 1$  e  $\epsilon_j = \pm(1 + \delta_j \pm i\sigma)^2$  respectivamente. O sinal negativo diz respeito às camadas de metamaterial e o positivo às camadas dielétricas ordinárias. A flutuação no índice de refração  $\delta_j$  é uma quantidade aleatória independente distribuída uniformemente no intervalo  $[-Q, Q]$ . No regime de comprimento de onda longo, o comprimento de localização mostrou ser ordens de magnitude maior se comparado com a estrutura puramente ordinária, proporcional à sexta potência do comprimento de onda, em contraste com a dependência quadrática usual para o sistema puramente ordinário.

Nosso estudo, diferentemente do trabalho de Asatryan[51], considera que as camadas apresentam valor de índice de refração e espessura bem definidos, a desordem sendo portanto introduzida no posicionamento de tais camadas. Analisamos a influência da inclusão de metamateriais confrontando diretamente com resultados obtidos para uma estrutura puramente ordinária.

Apesar de os metamateriais serem essencialmente dispersivos, este fato não foi considerado em nossos estudos. Apostando em futuras descobertas de novas estruturas de metamaterial, nos preocupamos em obter resultados que independam da relação de dispersão particular de cada estrutura.

## 4.1 Resultado

Para uma análise numérica, assumimos camadas ideais (não dispersivas e não absorventes). A estrutura de multicamadas sendo composta por uma seqüência aleatória de camadas de dois tipos distintos, uma dielétrica isotrópica *A* e uma de metamaterial *B*. O índice de refração e a espessura foram calculadas de tal maneira que o caminho óptico de ambas as camadas obedecem à condição  $|n_A d_A| = \frac{5}{3}|n_B d_B|$ .

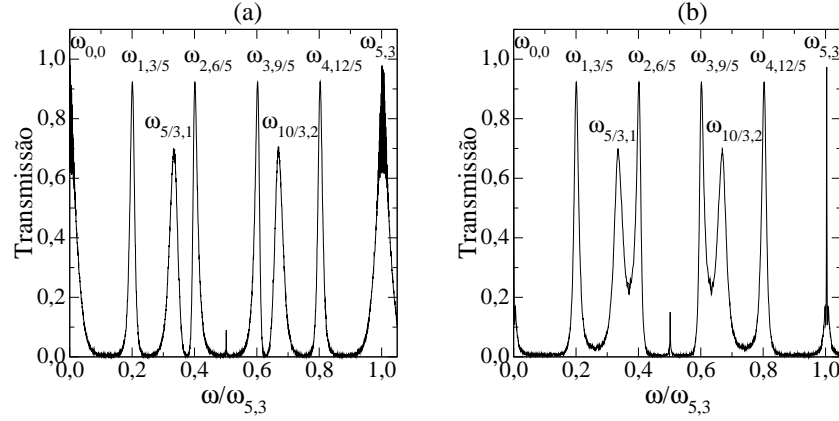


Figura 4.2: Espectro de transmissão de uma estrutura aleatória de multicamadas ordinária (a) (composta unicamente por camadas dielétricas ordinárias) e mista (b) (composto por metamateriais e camadas dielétricas) para o caso particular de  $|n_A d_A| = \frac{5}{3}|n_A d_A|$ . Ambos os casos possuem um padrão de picos de transmissão similar. Picos com transmissão finita ocorrem sempre que um múltiplo do modo de meio comprimento de onda iguala-se com o comprimento óptico de um dos tipos de camadas constituinte. Na vizinhança do modo completamente transparente  $\omega_{0,0}$  e  $\omega_{5,3}$ , a largura da banda de transmissão é muito menor para o caso misto, indicando uma maior sensibilidade à desordem com a inclusão dos metamateriais.

Se este parâmetro obedecesse à condição de Bragg  $|n_A d_A| = |n_B d_B|$ , teríamos o surgimento de um *zero- $\bar{n}$  gap*, onde uma das principais características é a insensibilidade à desordem. Esta condição faz com que uma estrutura de multicamadas não-dispersivas apresente um largo band-gap que cobre todo o espectro, com exceção apenas dos modos onde a diferença de fase  $\delta = \omega n d / c = i\pi$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ). Este cenário não suportaria bandas de transmissão de largura finita.

A desordem foi implementada assumindo que a  $i$ -ésima camada da sequência possui a mesma probabilidade de ser do tipo  $A$  ou do tipo  $B$ . A fim de se mostrar explicitamente a influência direta das camadas de metamaterial, todas as quantidades foram obtidas tanto para o caso misto (consistindo de metamateriais e

dielétrico ordinário) como para uma estrutura ordinária (consistindo apenas de camadas dielétricas ordinárias). Em ambos os casos, assumimos o mesmo valor absoluto para o índice de refração e espessura.

Do ponto de vista matemático, a única mudança que deve ser feita no cálculo da matriz de transferência (eq. 2.34) é a inclusão do sinal negativo no argumento das funções trigonométricas  $\delta = -k|n|d$  para matrizes relacionadas com camadas de metamaterial.

A primeira quantidade analisada foi o espectro de transmissão. Figura 4.2 representa uma média sobre  $10^3$  realizações de desordem em uma estrutura com  $N = 200$  camadas. Os gráficos fazem referência à estrutura ordinária Fig. 4.2(a) e a estrutura mista Fig. 4.2(b). Observamos o mesmo padrão de picos de transmissão independente da presença ou não das camadas de metamateriais. Estes modos ressonantes ocorrem quando um múltiplo inteiro de meio comprimento de onda da luz incidente iguala-se ao comprimento óptico de uma das camadas constituintes. Sob esta condição, a onda eletromagnética não sofre espalhamento por tal camada, independentemente do sinal do índice de refração da camada. Rotulamos as frequências de ressonância como  $\omega_{i,j}$ , onde  $i$  e  $j$  estão relacionados com o número de meios comprimentos de onda ajustáveis no tamanho do caminho óptico de cada camada. O índice  $i$  está relacionado com a camada de maior caminho óptico enquanto que  $j$  está relacionado com a camada de menor caminho óptico. Se  $i$  e  $j$  são ambos inteiros, o modo se torna completamente transparente. Formalmente, isto reflete o fato de que todas as matrizes no produto (2.36) assumirem o tipo unitário ( $\pm I$ ). Outros modos ressonantes ocorrem quando apenas um dos índices assume valor inteiro. Neste caso, apenas as matrizes associadas com as camadas cujo caminho óptico comporta um número inteiro de meios comprimentos de onda assumem um tipo unitário  $\pm I$ .

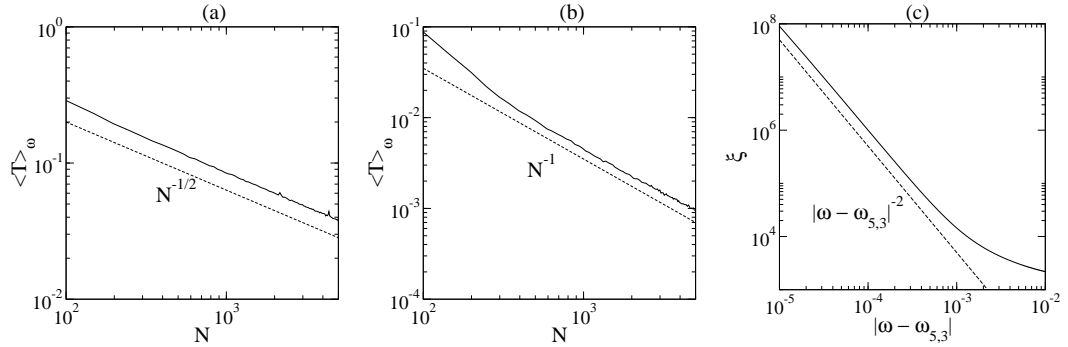


Figura 4.3: (a) Média espectral da transmissão versus o número de camadas  $N$  em uma região de frequência em volta do modo ressonante da estrutura ordinária. A transmissão decai com  $1/N^{1/2}$ . (b) O mesmo que o anterior para uma estrutura composta por camadas ordinárias e metamaterial. Neste caso, a dependência de tamanho finito é mais forte, com o decaimento assintótico da transmissão dado por  $1/N$ . (c) Comprimento de localização próximo ao modo ressonante  $\omega_{5,3}$  de uma estrutura mista de  $N = 10^4$  camadas. A divergência quadrática reproduz a mesma lei de escala encontrada na estrutura puramente ordinária.

Neste caso, o sistema comporta-se como uma única camada composto pelo material do tipo oposto.

Uma característica importante é observada no espectro de transmissão ao redor dos modos completamente transparentes  $\omega_{0,0}$  e  $\omega_{5,3}$ . Nestas regiões de frequência, a largura da banda de transmissão é muito mais estreita para a estrutura mista contendo metamateriais. A fim de investigar mais detalhadamente este fato, calculamos a média espectral da transmissão na região de frequência no entorno destes picos, como mostrado na fig. 4.3(a-b). Os resultados representam uma média sobre  $10^2$  realizações de desordem. Comparamos o comportamento de escala de tamanho finito para as estruturas de multicamadas ordinária [Fig. 4.3(a)] e mista. [Fig. 4.3(b)]. A média espectral da transmissão para o caso ordinário decai com  $1/N^{1/2}$ . O mesmo expoente obtido no capítulo 2, onde os parâmetros das cama-

das satisfazem a condição de Bragg. Encontramos uma nova lei de escala quando uma das camadas é composta por um metamaterial. Neste caso, a média da transmissão possui uma forte dependência como o número total de camadas, decaindo assintoticamente com  $1/N$ . Uma outra quantidade importante que caracteriza a localização de Anderson da luz em estruturas dielétricas desordenadas é o comprimento de localização ( $\xi$ ), considerado como o inverso do expoente de Lyapunov [ $\xi = 1/\Lambda = -\lim_{N \rightarrow \infty} (N/\ln T)$ ]. Fig.4.3(c) mostra uma média sobre 10 realizações de desordem, calculada na vizinhança do modo  $\omega_{5,3}$ . Observamos uma divergência quadrática do comprimento de localização com a aproximação do modo ressonante. Isto reproduz a mesma lei de escala relatada previamente para o caso puramente ordinário.

A competição entre um forte decaimento da transmissão com o número de camadas e o surgimento de modos ressonantes de *necklace* gerados pela desordem sugerem que a influência da desordem nas propriedades de transmissão podem apresentar uma nova característica na presença de metamateriais. Para explorar este ponto, investigamos a média espectral da transmissão como função do grau de desordem, conforme o estudo descrito no capítulo 2. Nossos resultados são mostrados na fig. 4.4 para  $N = 10^2$  camadas, média calculada sobre  $5 \times 10^3$  diferentes amostras de desordem e dentro de uma região de frequência centrada no modo  $\omega_{5,3}$ . A curva “O” corresponde ao caso ordinário enquanto que o “M” corresponde ao caso misto.

O efeito predominante da desordem é a localização de Anderson e, conseqüentemente, a redução da banda de transmissão. Este fenômeno se dá devido às múltiplas superposições incoerentes das ondas espalhadas pelas interfaces das camadas. Esta característica é claramente observada para uma estrutura puramente ordinária (ver fig. 4.4) no qual a média espectral da transmissão decresce mono-

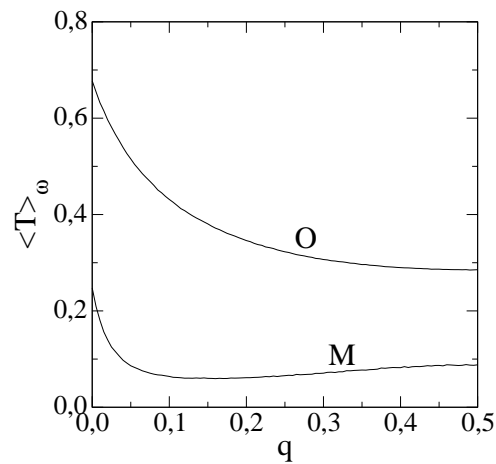


Figura 4.4: Média espectral e na desordem da transmissão na vizinhança do modo completamente transparente como função do grau de desordem  $q$ . A média foi computada sobre  $5 \times 10^3$  configurações de desordem em estruturas contendo  $10^2$  camadas. O caso misto (M) mostra um mínimo da transmissão para um grau intermediário de desordem. Sendo a estrutura contendo metamaterial mais sensível à desordem do que a estrutura ordinária, esta exibe uma média da transmissão menor que para o caso ordinário (O).



tonicamente à medida que o grau de desordem aumenta. Uma tendência similar é observada para a estrutura mista no limite de fraca desordem. Entretanto, para a estrutura mista, a média espectral da transmissão apresenta um mínimo aproximadamente em  $q = 0.15$ . Este comportamento inesperado é relacionado com um segundo efeito da desordem, que se torna mais proeminente na estrutura mista. Desordem também promove o surgimento de alguns modos ressonantes do tipo *necklace* que conduzem à uma pequena transmissão nas frequências de gap. Tal efeito secundário é ocultado pela lenta evolução do gap na estrutura ordinária, como mostrado na fig. 4.5(a). Na estrutura mista, o gap evolui de uma maneira mais rápida devido à forte dependência da média da transmissão com o número de camadas, levando a um forte decaimento da transmissão no regime de fraca desordem (fig. 4.5(b)). Neste regime de desordem, onde a localização de Anderson é predominante, a estrutura de bandas do caso periódico ( $q = 0$ ) dá lugar a uma larga região de frequência de baixa transmissão. A contribuição dos estados ressonantes de *necklace* para a transmissão então se torna mais evidente no regime de desordem forte. Uma vez que estes modos se tornam mais frequentes neste grau de desordem, o aumento de  $q$  promove um melhoramento da transmissão da luz na região espectral ao redor do modo completamente transparente, como mostra fig. 4.2(c).

Finalmente, gostaríamos de evidenciar que o pico estreito de transmissão na vizinhança próxima do modo completamente transparente é relativamente insensível à desordem na estrutura mista, como pode ser visto na fig. 4.5(b-c). De fato, estes picos relembram pontos de frequência singular das estruturas mistas com *zero -  $\bar{n}$*  [48]. Em estruturas finitas, a singularidade é trocada por um pico estreito cuja largura é inversamente proporcional ao número total de camadas, o que é consistente com nossas previsões anteriores de uma lei de escala de  $1/n$  para a média espectral

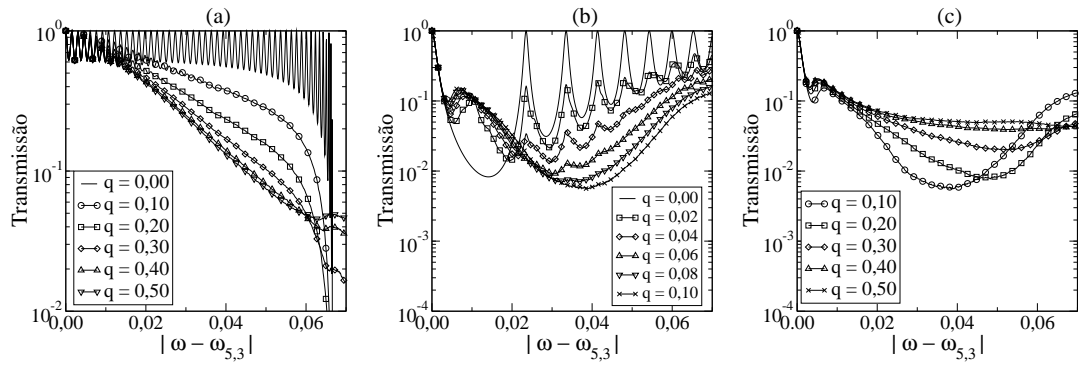


Figura 4.5: Espectro de transmissão na vizinhança do modo  $\omega_{5,3}$  para diferentes graus de desordem. Consideramos estruturas com  $N = 10^2$  camadas e média sobre  $10^5$  realizações de desordem. Figura (a) mostra o espectro de uma estrutura ordinária. Neste caso, a transmissão decresce monotonicamente como o aumento do grau de desordem. Figura (b) mostra o regime de fraca desordem de uma estrutura mista, onde o efeito predominante é a forte localização de Anderson, que leva a um rápido decaimento da transmissão à medida que o grau de desordem aumenta. No regime de forte desordem (c), a transmissão de uma estrutura mista é reforçada pela aumento do grau de desordem à medida que o número de modos de necklace também aumenta.

de transmissão.

Com estes resultados podemos constatar que a inclusão de metamaterial na composição de uma estrutura binária de multicamadas aleatória modifica as leis de escala para a transmissão na região de frequência ao redor do modo completamente transparente. A média espectral da transmissão decai com  $1/N$ , sendo portanto mais rápido que o obtido para uma estrutura puramente ordinária. Apesar deste fato, o comprimento de localização obedece à mesma lei quadrática do caso ordinário à medida que a frequência se aproxima do modo ressonante. O rápido decaimento e o surgimento de alguns poucos modos de necklace dentro da região de gap para o regime de forte desordem promovem uma dependência não monotônica da transmissão com o grau de desordem para a região espectral próxima do modo completamente transparente. Esta nova característica está em contraste com o fenômeno usual de localização de Anderson, que resulta em um decaimento da transmissão como função do grau de desordem. Nas estruturas contendo metamaterial existe um grau de desordem característico no qual o sistema apresenta um mínimo da média espectral da transmissão. Esta característica precisa ser levada em conta ao se projetar dispositivos ópticos com esta estrutura de multicamadas.

## Capítulo 5

# Multicamadas com Cristal Líquido Colestérico

Recentemente, vários trabalhos investigaram estruturas de multicamadas utilizando cristal líquido colestérico (ChLC)[56, 57, 58]. Os cristais líquidos na sua fase colestérica apresentam como principal característica o vetor diretor da orientação preferencial das moléculas girante ao redor de um eixo fixo. Devido à esta orientação helicoidal, uma estrutura de ChLCs constitui um cristal fotônico unidimensional natural auto-consistente. De fato, estes sistemas apresentam uma única banda de reflexão para ondas eletromagnéticas com polarização circular cuja orientação coincide com o sinal da hélice do meio quiral (reflexão seletiva)[59]. Além disso, ChLCs exibem um *band gap* bem definido, cujas características dependem da birrefringência e do comprimento do *pitch* da estrutura helicoidal do material. Por conta disso, as propriedades únicas do ChLCs têm motivado aplicações em dispositivos ópticos de difração seletiva[60, 61] e *displays* sem o uso de luz traseira [57, 58]. Estudos teóricos e experimentais recentes sobre as propriedades de reflexão em sistemas de multica-

madras com ChLC que apresentam uma descontinuidade na orientação do vetor diretor (ângulo de defeito) demonstraram que múltiplos PBGs emergem no espectro de transmissão de um sistema ChLC. As características destes múltiplos PBGs podem ser ajustadas pela orientação do ângulo de defeito na estrutura helicoidal [57]. Em particular, uma reflexão no vermelho-verde-azul (RGB) foi observada quando um ângulo de defeito de  $\pi/3$  foi introduzido na estrutura de multicamadas com ChLC. Múltiplos PBGs também foram obtidos em filmes formados por uma seqüência alternada de ChLC polimérico e camadas dielétricas isotrópicas [58]. Em ambos os casos, as características espectrais dos múltiplos PBGs podem ser convenientemente controladas, tal como a reflectância, posição espectral, largura, e o número de bandas. Apesar das propriedades espectrais dos múltiplos PBGs em multicamadas de ChLC terem sido extensivamente investigadas sob incidência normal, poucos trabalhos se propuseram a estudar a robustez de suas propriedades de reflexão para incidência oblíqua.

Neste capítulo, apresentamos os resultados de um estudo das propriedades fotônicas de um sistema de multicamadas com ChLC para defeito de fase Fibonacci assim como para uma seqüência alternada de camadas de ChLC e camadas dielétricas isotrópicas. Utilizando o método da matriz  $4 \times 4$  de Berreman [62, 63], determinamos o espectro de reflexão e o diagrama cromático CIE 1931 para estas estruturas.

## 5.1 Cristal Líquido Colestérico

Determinados materiais podem apresentar uma série de transições envolvendo novas fases quando passam do estado sólido para estado líquido. As propriedades mecânicas, estruturais e ópticas destas novas fases são intermediárias entre aquelas

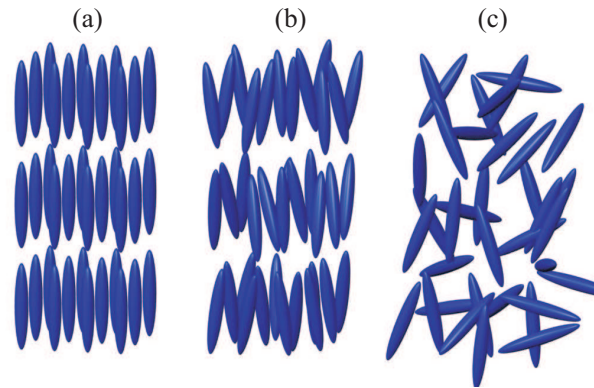


Figura 5.1: Esquema gráfico do alinhamento médio das moléculas para a fase sólida (a), cristal líquido (b) e líquida isotrópica (c)

de um sólido e de um líquido isotrópico. Por conta disto, chamamos tais materiais de *Cristais Líquidos*.

As primeiras observações de um comportamento líquido-cristalino ou *mesomórfico* foram feitas em 1888 pelo físico alemão O. Lehmann e pelo botânico austríaco Friedrich Reintzer [64, 65], o qual notou que um determinado composto, o *benzoato de colesterila*, apresentava dois pontos de fusão distintos. Seu artigo, originalmente publicado em Alemão [64], foi traduzido para o Inglês e publicado no periódico *Liquid Crystal* [65], para celebrar o centenário do primeiro artigo na área.

Em 1907, Vorländer [66] descobriu que para uma determinada substância apresentar dois pontos de fusão era necessário que suas moléculas apresentassem um formato alongado tipo bastão. Com esta descoberta foi possível modelar matematicamente a estrutura molecular de muitas fases de cristal líquido, dando origem ao estudo teórico desta área.

Segundo de Gennes e Prost [59], podemos definir o cristal líquido como uma fase intermediária que tem uma ordem semelhante a de um líquido em pelo menos uma direção e possui um grau de anisotropia que é característico de um certo tipo

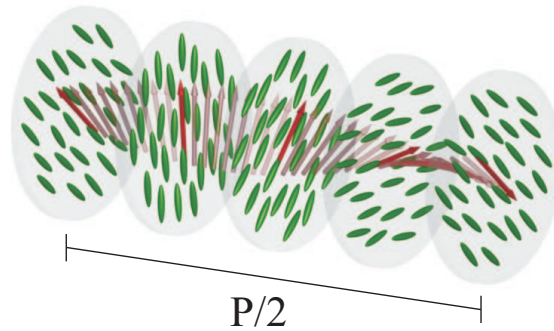


Figura 5.2: Esquema representativo da fase colestérica. O vetor diretor sofre uma distorção, rotacionando em torno de um eixo perpendicular a ele, descrevendo uma hélice circular. O esquema da figura representa uma estrutura com largura igual à metade do comprimento do pitch  $P$ .

de ordem que pode ser satisfeita se as moléculas que o formam são anisotrópicas, em formato de bastão (calamíticas) ou disco (discóides) por exemplo. Apesar de todas as fases líquido-cristalinas serem formadas por moléculas de estrutura anisotrópica, nem todos os materiais formados por este tipo de moléculas formam um cristal líquido.

No estado líquido-cristalino, as moléculas apresentam uma tendência de alinharem-se ao longo de um eixo comum chamado *diretor*. Esta tendência é intermediária à ausência de orientação preferencial da fase líquida isotrópica e ao forte ordenamento da fase sólida (ver fig. 5.1).

Podemos classificar as fases dos cristais líquidos de acordo com a orientação posicional das suas moléculas. Neste sentido temos três grandes categorias: fase nemática, fase colestérica e fase esméctica.

A fase colestérica apresenta uma orientação molecular em forma de hélice,

ou seja, o vetor diretor sofre uma distorção, rotacionando em torno de um eixo perpendicular a ele, descrevendo uma hélice circular, conforme figura 5.2.

Várias moléculas que formam a fase colestérica são derivadas do colesterol, daí a origem do nome, apesar de existirem casos que não estão relacionados com o colesterol. O comportamento helicoidal do vetor diretor pode tomar um sentido rotacional tanto esquerdo (*left-handed*) quanto direito (*right-handed*).

Assim como acontece na fase nemática, os centros de massa de cada molécula não apresentam ordem de longo alcance e a orientação molecular segue a direção de um eixo preferencial  $\hat{n}$ , sendo que para a fase colestérica, este eixo preferencial rotaciona progressivamente em torno do eixo da hélice (ou eixo colestérico). Esta mudança do vetor diretor ocorre naturalmente, sem a presença de qualquer campo externo.

Se assumirmos o eixo da hélice paralelo à direção  $z$ , as componentes de  $\hat{n}$  são dadas por:

$$\begin{aligned} n_x &= \cos\left(\pm\frac{2\pi}{P}z\right) \\ n_y &= \sin\left(\pm\frac{2\pi}{P}z\right) \\ n_z &= 0 \end{aligned}$$

A escolha do sinal determina o sentido de rotação da polarização. A variação do vetor diretor é periódica em  $z$ , cujo período é dado por  $P$ , esta quantidade varia como a temperatura e recebe o nome de *pitch*. O valor do pitch depende do material e da temperatura, podendo variar por várias ordens de grandeza, sendo valores típicos na ordem de  $200nm$  em diante. A função tensor dielétrico  $\varepsilon(z)$  é dada por  $\varepsilon_{i,j} = \varepsilon_{\perp}\delta_{i,j} + \Delta\varepsilon n_i n_j$ , onde  $(i,j) \in x,y,z$ ,  $\delta_{i,j}$  é o delta de Kronecker e



$$\Delta\varepsilon = (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}).$$

A estrutura helicoidal do cristal líquido colestérico é responsável pela característica peculiar de reflexão seletiva para luz circularmente polarizada, de forma que o espectro de transmissão para uma luz incidente cuja orientação rotacional da polarização tem o mesmo sentido da orientação rotacional da hélice apresenta uma região de modos proibidos centrada pelo modo de comprimento de onda igual ao pitch ótico  $\lambda_P = nP$  do cristal líquido, onde  $n$  é índice de refração médio entre os índices ordinário e extraordinário, enquanto que luz circularmente polarizada com sentido rotacional de polarização contrário ao da hélice é completamente transmitida. A largura do PBG do cristal líquido colestérico é proporcional à anisotropia dos índices de refração  $\Delta n = n_e - n_o$ , onde, em coordenadas gaussianas e para  $\mu = 1$ ,  $n_e = \sqrt{\varepsilon_{\parallel}}$  é o índice de refração extraordinário e  $n_o = \sqrt{\varepsilon_{\perp}}$  o ordinário.

## 5.2 Matriz de Berreman $4 \times 4$

Diferentemente dos casos estudados até aqui, neste capítulo tratamos de camadas birrefringentes. Por conta disso, o formalismo matricial que relaciona os campos elétrico e magnético nas interfaces se torna um pouco mais elaborado. Seja uma onda plana monocromática de frequência angular  $\omega$ , circularmente polarizada e propagando-se em um meio que apresenta propriedades dielétricas uniformes no plano  $xy$ . Tomando o plano de incidência como sendo  $xz$  podemos assumir  $\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}(z) \exp[-i(\omega t - \eta kx)]$  e  $\vec{H}(x, y, z, t) = \vec{H}(z) \exp[-i(\omega t - \eta kx)]$ , onde  $\eta = n_i \sin(\phi)$  é proporcional à componente  $x$  do vetor de onda  $\vec{k}$ . Substituindo nas equações de Maxwell em coordenadas Gaussianas, obtemos o conjunto de equações escalares:

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial E_y}{\partial z} &= ikB_x & (5.1a) & & \frac{\partial H_y}{\partial z} &= ikD_x & (5.2a) \\
\frac{\partial E_x}{\partial z} - i\eta k E_z &= ikB_y & (5.1b) & & \frac{\partial H_x}{\partial z} - i\eta k H_z &= -ikD_y & (5.2b) \\
\eta E_y &= B_z & (5.1c) & & \eta H_y &= -D_z & (5.2c)
\end{aligned}$$

Assumindo um meio não magnético ( $\mu = I$ , onde  $I$  é a matriz unitária) com uma tensor dielétrico constante dado por:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

podemos reescrever as equações (5.1) e (5.2) utilizando as equações constitutivas da matéria ( $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$  e  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ ).

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial E_y}{\partial z} &= ikH_x & (5.4a) & & \frac{\partial H_y}{\partial z} &= ik(\varepsilon_{11}E_x + \varepsilon_{12}E_y + \varepsilon_{13}E_z) & (5.5a) \\
\frac{\partial E_x}{\partial z} - i\eta k E_z &= ikH_y & (5.4b) & & \frac{\partial H_x}{\partial z} - i\eta k H_z &= -ik(\varepsilon_{21}E_x + \varepsilon_{22}E_y + \varepsilon_{23}E_z) & (5.5b) \\
\eta E_y &= H_z & (5.4c) & & \eta H_y &= -(\varepsilon_{31}E_x + \varepsilon_{32}E_y + \varepsilon_{33}E_z) & (5.5c)
\end{aligned}$$

De (5.4c) podemos escrever  $H_z$  a partir de  $E_y$ . Podemos eliminar  $E_z$  utilizando (5.5c):

$$E_z = -\frac{1}{\varepsilon_{33}} (\eta H_y + \varepsilon_{31}E_x + \varepsilon_{32}E_y) \quad (5.6)$$

substituindo  $H_z$  e  $E_z$  obtemos:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = ik \left[ -\eta \frac{\varepsilon_{31}}{\varepsilon_{33}} E_x - \eta \frac{\varepsilon_{32}}{\varepsilon_{33}} E_y + \left( 1 - \frac{\eta^2}{\varepsilon_{33}} H_y \right) \right] \quad (5.7a)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = -ik H_x \quad (5.7b)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = ik \left[ \left( \frac{\varepsilon_{23}\varepsilon_{31}}{\varepsilon_{33}} - \varepsilon_{21} \right) E_x + \left( \frac{\varepsilon_{23}\varepsilon_{32}}{\varepsilon_{33}} - \varepsilon_{22} + \eta^2 \right) E_y + \frac{\varepsilon_{23}}{\varepsilon_{33}} \eta H_y \right] \quad (5.7c)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = ik \left[ \left( \varepsilon_{11} - \frac{\varepsilon_{13}\varepsilon_{31}}{\varepsilon_{33}} \right) E_x + \left( \varepsilon_{12} - \frac{\varepsilon_{13}\varepsilon_{32}}{\varepsilon_{33}} \right) E_y - \frac{\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{33}} \eta H_y \right] \quad (5.7d)$$

Escrevendo em notação matricial temos:

$$\frac{\partial \psi(z)}{\partial z} = ik \mathcal{D} \cdot \psi(\dagger) \quad (5.8)$$

onde  $\psi(z) = [E_x(z), E_y(z), H_x(z), H_y(z)]^T$  e  $\mathcal{D}$  é a chamada Matriz  $4 \times 4$  de Berreman [62, 63]:

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} -\eta \frac{\varepsilon_{31}}{\varepsilon_{33}} & -\eta \frac{\varepsilon_{32}}{\varepsilon_{33}} & 0 & 1 - \frac{\eta^2}{\varepsilon_{33}} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \varepsilon_{23} \frac{\varepsilon_{31}}{\varepsilon_{33}} - \varepsilon_{21} & \eta^2 - \varepsilon_{22} + \varepsilon_{23} \frac{\varepsilon_{32}}{\varepsilon_{33}} & 0 & -\eta \frac{\varepsilon_{23}}{\varepsilon_{33}} \\ \varepsilon_{11} - \varepsilon_{13} \frac{\varepsilon_{31}}{\varepsilon_{33}} & \varepsilon_{12} - \varepsilon_{13} \frac{\varepsilon_{32}}{\varepsilon_{33}} & 0 & -\eta \frac{\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{33}} \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

A solução da equação (5.8) rege a propagação dos campos elétrico e magnético em um meio anisotrópico e pode ser expresso como a superposição de quatro ondas planas distintas

$$\psi(z) = \sum_{l=1}^4 C_l \psi^{(l)} \exp(ik\lambda_l z) \quad (5.10)$$

onde  $\psi^{(l)}$  são os autovetores e  $\lambda_l$  os autovalores da matriz de Berreman. Para uma camada de ChLC de espessura  $a$ , a helicidade do vetor diretor implica em uma

dependência em  $z$  da matriz de Berreman, o que invalidaria a solução exata (5.10). Uma solução numérica aproximada pode ser obtida subdividindo virtualmente a camada de ChLC em um grande número  $M$  de finas lâminas, de tal maneira que  $\mathcal{D}$  possa ser tratada de maneira constante em cada lâmina. Baseado na solução (5.10) escrevemos as componentes dos campos para um plano  $z = z_1$  por:

$$\begin{aligned} E_x &= C_1 \psi_1^{(1)} e^{ik\lambda_1 z_1} + C_2 \psi_1^{(2)} e^{ik\lambda_2 z_1} + C_3 \psi_1^{(3)} e^{ik\lambda_3 z_1} + C_4 \psi_1^{(4)} e^{ik\lambda_4 z_1} \\ E_y &= C_1 \psi_2^{(1)} e^{ik\lambda_1 z_1} + C_2 \psi_2^{(2)} e^{ik\lambda_2 z_1} + C_3 \psi_2^{(3)} e^{ik\lambda_3 z_1} + C_4 \psi_2^{(4)} e^{ik\lambda_4 z_1} \\ H_x &= C_1 \psi_3^{(1)} e^{ik\lambda_1 z_1} + C_2 \psi_3^{(2)} e^{ik\lambda_2 z_1} + C_3 \psi_3^{(3)} e^{ik\lambda_3 z_1} + C_4 \psi_3^{(4)} e^{ik\lambda_4 z_1} \\ H_y &= C_1 \psi_4^{(1)} e^{ik\lambda_1 z_1} + C_2 \psi_4^{(2)} e^{ik\lambda_2 z_1} + C_3 \psi_4^{(3)} e^{ik\lambda_3 z_1} + C_4 \psi_4^{(4)} e^{ik\lambda_4 z_1} \end{aligned}$$

As equações acima podem ser expressas de uma maneira mais compacta através do formalismo matricial:

$$\psi(z_1) = \Psi_1 \cdot \Gamma_1(z_1) \cdot \mathcal{C} \quad (5.11)$$

onde as matrizes são definidas por:

$$\Psi_1 = \begin{pmatrix} \psi_1^{(1)} & \psi_1^{(2)} & \psi_1^{(3)} & \psi_1^{(4)} \\ \psi_2^{(1)} & \psi_2^{(2)} & \psi_2^{(3)} & \psi_2^{(4)} \\ \psi_3^{(1)} & \psi_3^{(2)} & \psi_3^{(3)} & \psi_3^{(4)} \\ \psi_4^{(1)} & \psi_4^{(2)} & \psi_4^{(3)} & \psi_4^{(4)} \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_1(z_1) = \begin{pmatrix} e^{ik\lambda_1 z_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{ik\lambda_2 z_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{ik\lambda_2 z_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{ik\lambda_4 z_1} \end{pmatrix} \quad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}$$

Para o plano  $z = z_1 + \delta z$ , onde  $\delta z = a/M$  temos:

$$\Psi(z_1 + \delta z) = \Psi_1 \cdot \Gamma_1(\delta z) \cdot \Gamma(z_1) \cdot \mathcal{C} \quad (5.12)$$

Sendo  $\Psi$  uma matriz inversível, podemos escrever a relação entre os campos elétrico e magnético nas interfaces das lâminas por:

$$\psi(z_1 + \delta z) = \underbrace{\Psi_1 \cdot \Gamma_1(\delta z) \cdot \Psi_1^{-1}}_{T_1} \cdot \psi(z_1) \quad (5.13)$$

Finalmente podemos relacionar os campos nas interfaces da camada completa de ChLC através do produto das matrizes  $T_i$  de cada lâmina criada virtualmente

$$\psi(z_1 + a) = T_M \cdot T_{M-1} \cdot \dots \cdot T_1 \cdot \psi(z_1) \quad (5.14)$$

Em uma estrutura de multicamadas, as condições de contorno exigem a continuidade das componentes paralelas dos campos elétrico e magnético nas interfaces. Por conta disso, a relação entre os campos nas duas interfaces do filme que o separam do meio de entrada e do meio de saída pode ser escrita como uma função do produto de todas as matrizes de transferência. Para a camada dielétrica isotrópica, o cálculo é feito sem a necessidade de fatiamento virtual da camada em finas lâminas.

### 5.3 Coeficiente de Transmissão

Assumindo uma onda plana monocromática incidindo no filme estratificado sob um ângulo  $\theta$ . Podemos decompor o campo elétrico nos meios de entrada ( $\vec{E}_i$ ) e de saída ( $\vec{E}_o$ ) nas bases  $O'$  e  $O''$  respectivamente, cujos versores  $\hat{i}'\hat{j}'$  e  $\hat{i}''\hat{j}''$  formam planos paralelos às frentes de onda (ver fig. 5.3a). Sendo  $A$ ,  $R$  e  $T$  as amplitudes (geralmente complexas) do vetor campo elétrico da onda incidente, refletida e transmitida temos:

$$\vec{E}_i = E_{ix}\hat{i}' + E_{iy}\hat{j}' = (A_x + R_x)\hat{i}' + (A_y + R_y)\hat{j}' \quad (5.15)$$

$$\vec{E}_o = E_{ox}\hat{i}'' + E_{oy}\hat{j}'' = T_x\hat{i}'' + T_y\hat{j}'' \quad (5.16)$$

Fazendo a mudança para a base  $O$  (fig. 5.3b):

$$\vec{E}_i = (A_x + R_x) \cos(\theta_i)\hat{i} + (A_y + R_y)\hat{j} + (A_x + R_x) \sin(\theta_i)\hat{k} \quad (5.17)$$

$$\vec{E}_o = T_x \cos(\theta_o)\hat{i} + T_y\hat{j} + T_x \sin(\theta_o)\hat{k} \quad (5.18)$$

Por apresentar a mesma simetria no plano  $xz$ , podemos empregar os mesmos argumentos utilizados no cap. 2 que demonstram que a componente  $x$  do vetor de onda  $k$  deve ser constante ao longo do filme. Sendo os meios de entrada e saída iguais e opticamente isotrópicos, com índice de refração  $n_o$ , podemos afirmar que  $\theta_i = \theta_o = \theta$ . Para ondas planas monocromáticas em meios isotrópicos, o campo magnético pode ser escrito em função do campo elétrico pela expressão:

$$\vec{H}(z) = \gamma \hat{u} \times [E_{0+}^{\vec{}} e^{-ikz} - E_{0-}^{\vec{}} e^{ikz}] \quad (5.19)$$

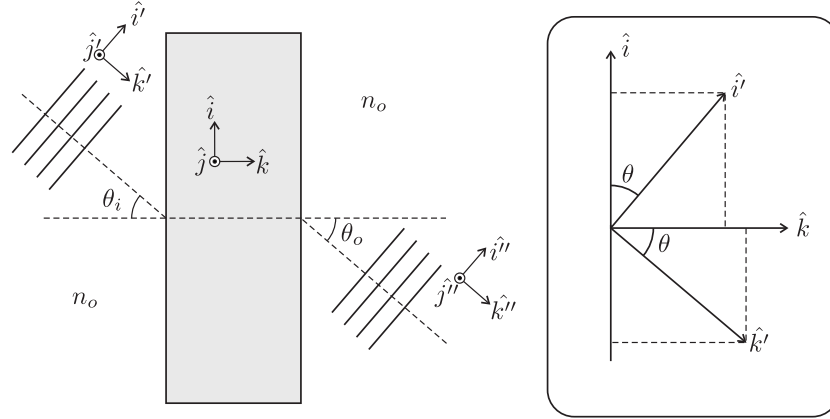


Figura 5.3: Representação dos sistemas de referência para a frente de onda ( $O'$  e  $O''$ ) e para a interface da camada ( $O$ ). Devido à simetria do problema, a constância da componente  $k_x$  impõe que os ângulos de incidência e refração são iguais.

onde  $\gamma = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}$  e  $E_{0+}$  e  $E_{0-}$  representam respectivamente os vetores amplitude da onda progressiva e da onda retrógrada ao longo da direção de propagação  $\hat{u}$ . Temos portanto como campos de entrada:

$$\vec{E}_i = (A_x + R_x) \cos(\theta) \hat{i} + (A_y + R_y) \hat{j} + (A_x + R_x) \sin(\theta) \hat{k} \quad (5.20)$$

$$\vec{H}_i = -\gamma_0 (A_y - R_y) \cos(\theta) \hat{i} + \gamma_0 (A_x - R_x) \hat{j} - \gamma_0 (A_y - R_y) \sin(\theta) \hat{k} \quad (5.21)$$

e para os campos de saída

$$\vec{E}_o = T_x \cos(\theta) \hat{i} + T_y \hat{j} + T_x \sin(\theta) \hat{k} \quad (5.22)$$

$$\vec{H}_o = -\gamma_0 T_y \cos(\theta) \hat{i} + \gamma_0 T_x \hat{j} - \gamma_0 T_y \sin(\theta) \hat{k} \quad (5.23)$$

A relação entre as componentes  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$  dos campos  $\vec{E}(z)$  e  $\vec{H}(z)$  na primeira e última interfaces do filme é obtida através da matriz de transferência (5.14) obtida na seção anterior. Por questão de conveniência, utilizaremos a inversa da matriz  $T$ , de forma

que:

$$\begin{bmatrix} (A_x + R_x) \cos(\theta) \\ (A_y + R_y) \\ -\gamma_0(A_y - B_y) \cos(\theta) \\ \gamma_0(A_x - R_x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_x \cos(\theta) \\ T_y \\ -\gamma_0 T_y \cos(\theta) \\ \gamma_0 T_x \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

Resolvendo o sistema acima para as componentes das ondas  $A$  e  $R$  temos:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ R_x \\ A_y \\ R_y \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} D_{11} + \gamma_0 D_{41} & 0 & D_{12} + \gamma_0 D_{42} & 0 \\ D_{11} - \gamma_0 D_{41} & 0 & D_{12} - \gamma_0 D_{42} & 0 \\ D_{21} - \gamma_0 D_{31} & 0 & D_{22} - \gamma_0 D_{32} & 0 \\ D_{21} + \gamma_0 D_{31} & 0 & D_{22} + \gamma_0 D_{32} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_x \\ 0 \\ T_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

onde  $D_{uv}$  são os elementos da matriz  $4 \times 2$ :

$$D = \begin{bmatrix} T_{11} + \gamma_0 T_{14} / \cos(\theta) & T_{12} / \cos(\theta) - \gamma_0 T_{13} \\ T_{21} \cos(\theta) + \gamma_0 T_{24} & T_{22} - \gamma_0 T_{23} / \cos(\theta) \\ T_{31} + \gamma_0 T_{34} / \cos(\theta) & T_{32} / \cos(\theta) - \gamma_0 T_{33} \\ T_{41} \cos(\theta) + \gamma_0 T_{44} & T_{42} - \gamma_0 T_{43} / \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

Definimos como coeficiente de transmissão complexo a razão entre as amplitudes complexas de  $T$  e  $A$ . Das equações acima, podemos calcular o coeficiente de transmissão para cada componente:

$$t_x = \frac{T_x}{A_x} = \frac{v_{13}}{v_{31}v_{13} - v_{33}v_{11}} \begin{bmatrix} A_y \\ A_x \end{bmatrix} - \frac{v_{33}}{v_{13}} \quad (5.27)$$

$$t_y = \frac{T_y}{A_y} = \frac{v_{11}}{v_{33}v_{11} - v_{31}v_{13}} \left[ 1 - \frac{v_{31} A_x}{v_{11} A_y} \right] \quad (5.28)$$



Onde  $v_{ij}$  são os elementos da matriz da equação 5.25. A quantidade de interesse aqui é a razão entre o quadrado do módulo da amplitude da onda transmitida sobre o quadrado do módulo da amplitude da onda incidente (transmissividade):

$$\tau = \frac{|T|^2}{|A|^2} = \frac{|T_x|^2 + |T_y|^2}{|A_x|^2 + |A_y|^2} = \frac{|t_x|^2 \left(\frac{|A_x|^2}{|A_y|^2}\right) + |t_y|^2}{\frac{|A_x|^2}{|A_y|^2} + 1} \quad (5.29)$$

Como era esperado, o coeficiente de transmissão e a transmissividade dependem das componentes  $\hat{i}'$  e  $\hat{j}'$  da onda incidente. Para nosso estudo, estamos interessados em ondas circularmente polarizadas, tomando portanto  $\vec{A} = C(\hat{i}' \pm i\hat{j}')$  onde  $|A|^2 = 1$  e o sinal determina o sentido de rotação da polarização.

## 5.4 Espaço de Cores CIE 1931

Neste capítulo introduzimos uma nova ferramenta para análise de espectro, o chamado Diagrama Cromático CIE 1931, criado pela Comissão Internacional em Iluminação (CIE) em 1931 [67, 68].

Em linhas gerais trata-se de uma representação da sensação cromática do olho humano a um determinado espectro, ou seja, ao observar a reflexão de uma luz policromática sobre uma determinada estrutura óptica, os modos refletidos formarão uma determinada cor ao atingir os olhos do observador, que está diretamente relacionada com as características do espectro. Utilizando o diagrama cromático, podemos representar um determinado espectro por um par ordenado que se localiza sobre uma cromaticidade do diagrama, desta maneira podemos ter uma noção da cor observada quando se incide uma luz policromática sobre um filme de multicamadas, conforme será descrito abaixo.

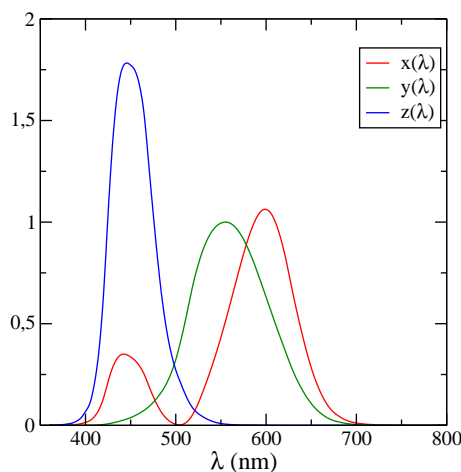


Figura 5.4: Funções de associação cromática que caracterizam um observador padrão no espaço de cores CIE 1931.

O olho humano possui receptores (chamados de células cone) para comprimento de onda pequeno (S), médio (M), e grande. Por conta disso, em princípio, três parâmetros descrevem a sensação de cores. Os **valores de tristímulus** de uma cor são a quantidade de três cores primárias em um modelo cromático aditivo de 3-componentes necessário para representar uma determinada cor-teste. Os valores de tristímulus são muito frequentemente expressados no espaço de cores CIE 1931, no qual são denotados por X, Y e Z e representam aproximadamente as cores vermelho (R), verde (G) e azul (b).

Qualquer método específico para associar valores de tristímulus com cores é chamado de *espaço de cores*. O CIE XYZ, um de muitos de tais espaços, é especial por que é baseado na medida direta da percepção visual humana, e serve como base para definir outros espaços de cores.

Devido à natureza da distribuição de células cone no olho, os valores de tristímulus dependem do campo de visão do observador. Para eliminar esta variável,

o CIE definiu um observador padrão como sendo a resposta cromática média do olho humano sob um ângulo de visão de 2 graus, devido à crença de que as células cone sensíveis a cores residem dentro de um arco de 2 graus da fóvea. Por conta disso, o *Observador Padrão CIE 1931* também é conhecido como *Observador Padrão CIE 1931*  $\mathcal{P}$ .

O observador padrão é caracterizado por três *funções de associação cromática* (ver fig. 5.4), que são descrições numéricas da resposta cromática de um observador. O CIE tem definido um conjunto de três funções de associação cromática, chamadas  $\bar{x}(\lambda)$ ,  $\bar{y}(\lambda)$ , e  $\bar{z}(\lambda)$ , que podem ser interpretadas como curvas de sensibilidade espectral de três detectores lineares de luz que levam aos valores de tristímulus X, Y e Z. Os valores numéricos tabelados destas funções são conhecidos como Observador Padrão CIE.

Os valores de tristímulus para uma determinada cor com distribuição espectral  $I(\lambda)$  são dados em termos do observador padrão por:

$$X = \int_0^{\infty} I(\lambda)\bar{x}(\lambda)d\lambda \quad (5.30)$$

$$Y = \int_0^{\infty} I(\lambda)\bar{y}(\lambda)d\lambda \quad (5.31)$$

$$Z = \int_0^{\infty} I(\lambda)\bar{z}(\lambda)d\lambda \quad (5.32)$$

onde  $\lambda$  é o comprimento de onda da luz monocromática equivalente (medida em nanômetros). Outros observadores, tal como o espaço CIERGB ou outros espaços de cores RGB, são definidos por outros conjuntos de funções de associação cromática, e levam a valores de tristímulus para estes espaços.

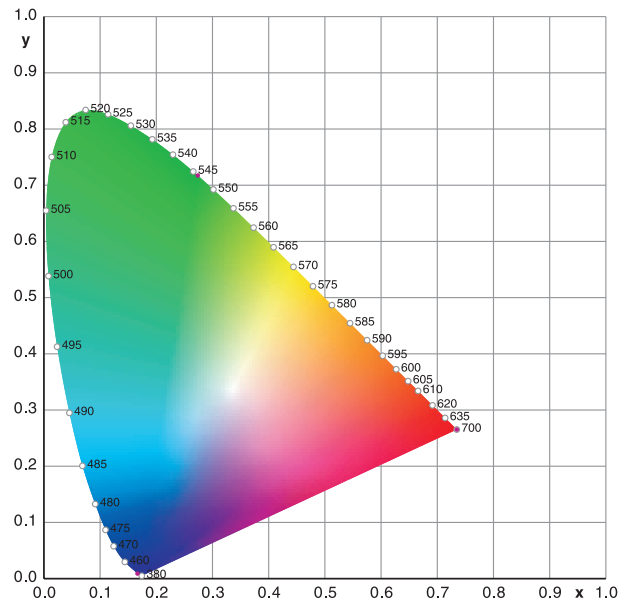


Figura 5.5: Diagrama cromático utilizado para representar todas as cores visíveis em média pelo sistema visual humano, baseado no valor dos tristímulos obtidos das funções de associação cromática do sistema CIE 1931.

### 5.4.1 Diagrama Cromático

Devido ao fato de o olho humano apresentar três tipos de sensores cromáticos para responder às diferentes faixas de comprimento de onda, a plotagem completa de todas as cores visíveis é uma figura tridimensional. Entretanto, o conceito de cores pode ser dividido em duas partes: brilho e cromaticidade. Por exemplo, a cor branca é uma cor clara, enquanto que a cor cinza é considerada uma versão menos clara do mesmo branco. Em outras palavras, a cromaticidade do branco e do cinza é a mesma, enquanto que o brilho é diferente.

O espaço de cores CIE XYZ é designado de tal forma que o parâmetro Y representa a medida de brilho ou luminescência de uma cor. A cromaticidade é

portanto especificada por dois parâmetros derivados  $x$  e  $y$ :

$$x = \frac{X}{X + Y + Z} \quad (5.33)$$

$$y = \frac{Y}{X + Y + Z} \quad (5.34)$$

$$z = \frac{Z}{X + Y + Z} = 1 - x - y \quad (5.35)$$

O espaço de cores derivado especificado por  $x, y$  e  $Z$  é conhecido por espaço de cores CIE $xyZ$  e é largamente utilizado para especificar cores na prática, sendo portanto o espaço de cores utilizado no trabalho descrito nesta tese.

O diagrama (fig. 5.5) representa todas as cromaticidades visíveis em média por uma pessoa. Estas são mostradas em cores e a região é chamada de *gamut da visão humana*. O gamut de todas as cromaticidades visíveis no diagrama CIE tem o formato de uma língua, cuja curva que a delinea é chamada *locus spectral* e representa a cromaticidade de luzes monocromáticas, com comprimentos de onda dados em nanômetros. A linha reta na fronteira inferior do gamut é chamada *line of purples*. As cores contidas nela, apesar de estarem na fronteira do gamut, não apresentam correspondente monocromático de luz.

## 5.5 Resultados

Primeiramente, analisamos a estrutura composta por camadas de ChLC destrógeno, com índices de refração do plano birrefringente  $n_o = 1.56$  e  $n_e = 1.78$  e *pitch* óptico de  $\lambda_P = \bar{n}P = 532nm$ , onde  $\bar{n}$  é o índice de refração médio dado por  $\bar{n} = [(n_o^2 + n_e^2)]^{1/2}$ . Na interface entre camadas adjacentes, a orientação do vetor diretor do cristal líquido exibe uma descontinuidade  $\alpha$ . As camadas de ChLC são

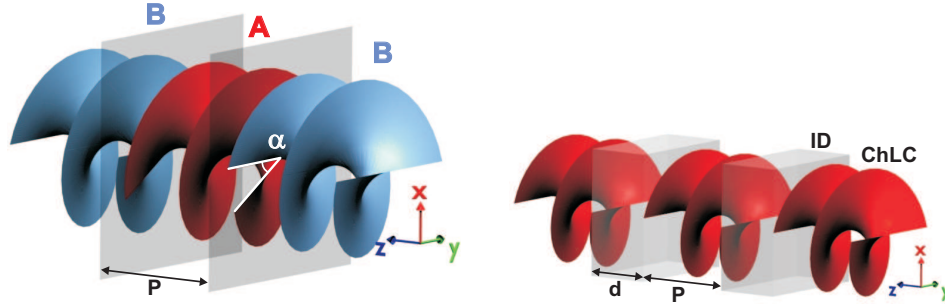


Figura 5.6: Representação gráfica da estrutura de multicamadas formada por (a) ChLCs de pitch único com ângulo de defeito  $\alpha$  e (b) por camadas alternadas de ChLCs e dielétricos isotrópicos.  $P$  representa o comprimento do pitch e  $d$  a largura das camadas isotrópicas. Para o primeiro caso temos a representação da geração  $F_3 = [BAB]$  de Fibonacci e para o outro caso a geração  $S_3 = [ABABA]$ .

distribuídas seguindo a seqüência quasi-periódica de Fibonacci, que é baseada na relação recursiva  $F_0 = A$ ,  $F_1 = B$ , e  $F_j = F_{j-2}F_{j-1}$  para  $j \geq 2$ . As seqüências de menor ordem são  $F_2 = AB$ ,  $F_3 = BAB$ ,  $F_4 = ABBAB$ , etc. Figura 5.7 mostra o Diagrama Cromático CIE 1931 para uma estrutura obedecendo a geração  $F_4$  de Fibonacci com ângulo de incidência entre  $0 \leq \phi \leq 90^\circ$  e diferentes ângulos de defeito. O procedimento numérico fatia virtualmente cada camada em 500 lâminas finas.

Para desenvolver um estudo comparativo, calculamos o caso de  $\alpha = 0^\circ$  no qual o sistema consiste de uma camada única de ChLC. Neste regime, o sistema apresenta uma única banda de reflexão, localizada na região do verde para incidência normal. Com o aumento do ângulo de incidência, a cor associada de reflexão se desloca para a região do azul, mostrando um largo deslocamento cromático. À medida que aumentamos o ângulo de defeito, a cor associada de reflexão para incidência normal se aproxima da região do branco e o deslocamento cromático é reduzido. Para  $\alpha = \pi/3$ , temos o caso com um menor deslocamento cromático, concentrado na região do branco para ângulos de incidência menores que  $30^\circ$ , sinalizando uma reflexão RGB

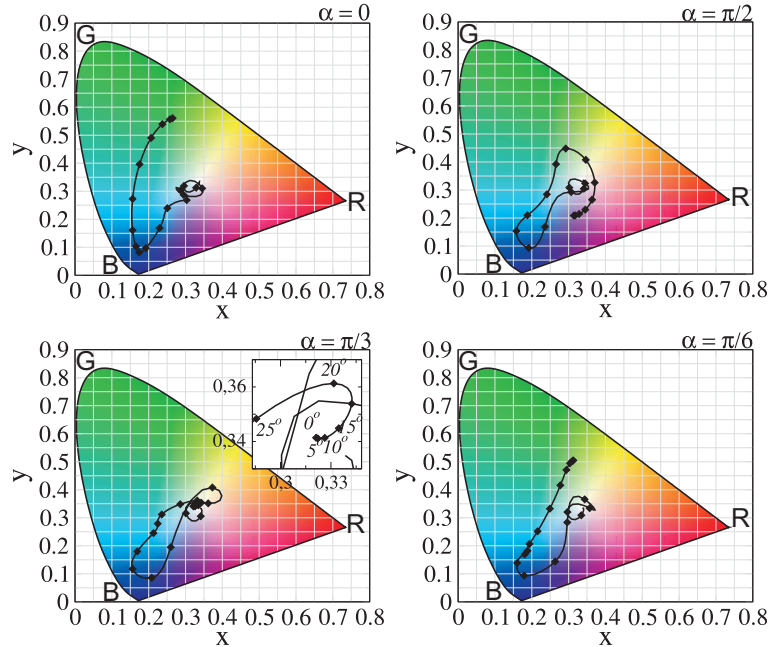


Figura 5.7: Diagrama cromático CIE 1931 de uma estrutura  $F_4$ . A linha contínua representa a trajetória da cromaticidade da luz refletida com a mudança do ângulo de incidência a partir de incidência normal até uma tangencial. O diagrama para quatro estruturas com ângulos de defeito diferentes é mostrado. O deslocamento cromático é mínimo para um ângulo de defeito  $\alpha = \pi/3$ , para o qual a cor associada de reflexão se mantém próximo à região do branco para ângulos de incidência  $\phi < 30^\circ$  (ver *inset*). Para ângulos de incidência intermediários, a cromaticidade exibe um deslocamento pronunciado para o azul.

omnidirecional. No entanto, um desvio considerável em direção à região do azul permanece presente para ângulos de incidência intermediários  $30^\circ < \alpha < 60^\circ$ . Para ângulos de defeito maiores, o deslocamento cromático aumenta novamente e desvia da região do branco para incidência normal. O resultado acima está relacionado com o que foi reportado em [57] no qual um sistema  $F_4$  de Fibonacci com ângulo de defeito  $\alpha = \pi/3$  apresentou múltiplos PBG nas cores associadas vermelho (R), verde (G) e azul (B) para incidência normal. Aqui, mostramos que esta reflexão RGB é

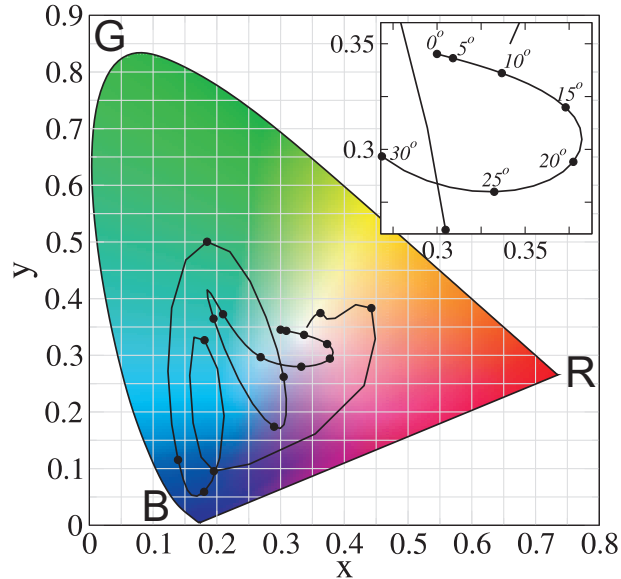


Figura 5.8: Diagrama cromático CIE 1931 de um sistema  $S_4$ . As linhas contínuas representam a trajetória da cromaticidade da luz refletida à medida que se varia o ângulo de incidência. Apesar da cromaticidade da luz refletida sob incidência normal ser similar à obtida para uma estrutura  $F_4$  de Fibonacci com ângulo de defeito  $\alpha = 30^\circ$ , a estrutura  $S_4$  exibe uma seqüência complexa de deslocamentos cromáticos para incidência oblíqua.

sustentada para uma larga região de ângulos de incidência (ver *inset* da Fig. 5.7), com um desvio em direção ao azul para incidência oblíqua intermediária.

No segundo caso, estudamos uma estrutura formada por uma seqüência alternada de camadas de ChLC de *pitch* único, com os mesmos parâmetros utilizados acima, e camadas isotrópicas dielétricas, com índice de refração  $n = 1.5$  e largura  $d = 0.5\mu m$ . Foi imposto que a primeira e a última camadas sejam tomadas como ChLC, tal que as seqüências de menor ordem são  $S_1 = \{A\}$ ,  $S_2 = \{ABA\}$ .,  $S_3 = \{ABABA\}$ ,  $S_4 = \{ABABABA\}$  onde  $A$  é a camada de ChLC porimérico e  $B$  é a camada dielétrica isotrópica. O diagrama cromático CIE 1931 de um sistema  $S_4$  é mostrado na figura 5.8.



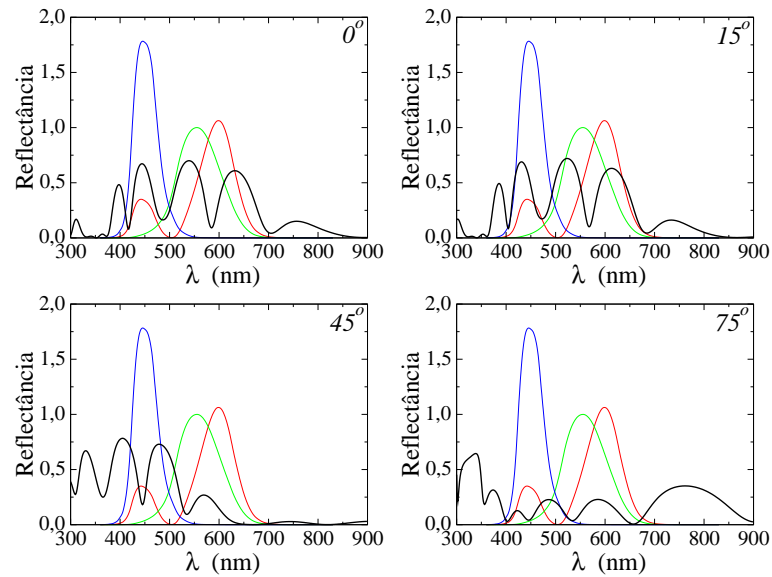


Figura 5.9: Espectro de reflexão de uma estrutura  $F_4$  com ângulo de defeito  $\alpha = 30^\circ$  para diferentes ângulos de incidência ( $\phi$ ). As funções (*color matching functions*) utilizadas para obter o diagrama cromático também são mostrados. Para  $\phi \leq 30^\circ$  os espectros de reflexão são relativamente similares com um ligeiro desvio da banda de reflexão em direção à região de baixos comprimentos de onda. Para ângulos de incidência maiores, os espectros de reflexão mostram apenas uma pequena superposição com as *color matching functions* do vermelho e do azul, o que gera um deslocamento para azul da cromaticidade resultante. Para incidência se aproximando da tangente, a banda de reflexão se torna mais larga e a luz refletida converge para uma cromaticidade branca, independente do ângulo de defeito.

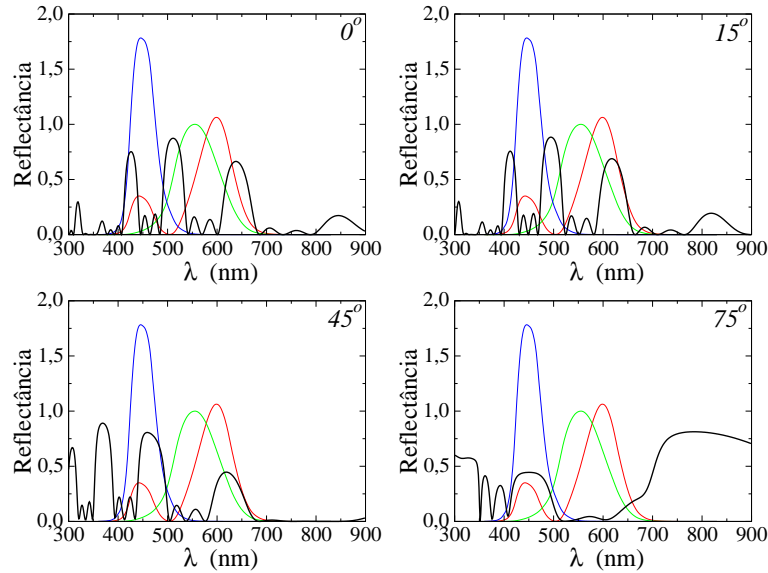


Figura 5.10: Espectro de reflexão do sistema  $S_4$  para diferentes ângulos de incidência ( $\phi$ ). Em comparação com os espectros de  $F_4$ , a banda de reflexão para incidência normal são mais estreitas, o que resulta em uma forte sensibilidade da cromaticidade com o ângulo de incidência. Apesar de haver uma tendência geral de deslocamento para a região do azul, a cromaticidade apresenta uma dependência complexa com o ângulo de incidência à medida que a banda de reflexão cruza as *color matching functions*.

Para incidência normal, esta estrutura exibe um espectro de reflexão com uma cromaticidade similar à presente na estrutura  $F_4$  apresentada acima com ângulo de defeito  $\alpha = 30^\circ$  [58]. Apesar desta semelhança, obtivemos uma trajetória cromática diferente no diagrama CIE 1931 como uma função do ângulo de incidência. Neste caso, um descolamento cromático bem maior é observado com o aumento do ângulo de incidência, com uma dependência complexa da cromaticidade com o ângulo de incidência. Um sensível desvio em direção ao vermelho já é observado para um ângulo de incidência de  $15^\circ$ , seguido por uma seqüência complexa de mudanças cromáticas à medida que se aumenta o ângulo de incidência.

Para se obter uma melhor compreensão a cerca das diferenças encontradas no diagrama cromático CIE 1931 para as estruturas  $F_4$  e  $S_4$ , traçamos o espectro de reflexão para cada estrutura para ângulos de incidência típicos, como mostrado na fig. 5.9 e fig. 5.10. Nestas figuras também mostramos as *color matching functions* para as cores azul, verde e vermelho, utilizadas para obter o diagrama cromático. Note que ambas as estruturas apresentam um espectro de reflexão similar para pequenos ângulos de incidência, com um espectro de reflexão da estrutura  $F_4$  apresentando uma semelhança ligeiramente melhor com as bandas RGB. Até um ângulo de incidência  $\phi \simeq 30^\circ$ , estes espectros são aproximadamente independentes do ângulo de incidência, apresentando apenas um pequeno deslocamento de todo o espectro da região do visível para a região de comprimentos de onda menores. Este processo é o responsável pelo deslocamento principal em direção ao azul da cromaticidade da luz refletida em ambas as estruturas  $F_4$  e  $S_4$ . Uma diferença substancial já é observada para  $\phi \geq 45^\circ$ , onde a banda cromática RGB inicial se torna mais estreita e deslocada na direção da região do azul e do ultravioleta, com uma pequena superposição com as *color matching functions* das cores vermelha e azul. Bandas de reflexão que eram originalmente centradas na região espectral do infravermelho à incidência normal, são deslocadas para a região espectral do visível. Entretanto, o deslocamento das bandas, assim como suas distorções, apresentam um impacto na expressão da cromaticidade. Este impacto é mais pronunciado para o caso onde as bandas de reflexão originais são mais estreitas, como acontece com a estrutura alternada  $S_4$ . À medida que se aproxima de uma incidência tangencial, o espectro de reflexão se torna mais largo e a luz refletida naturalmente retorna à cromaticidade branca.

Os resultados mostraram portanto que, para uma estrutura de multicamadas dielétricas contendo ChLC com defeito nos ângulos de fase que obedecem uma

---

série de Fibonacci, assim como uma estrutura alternada de camadas dielétricas isotrópicas e ChLCs, a cromaticidade associada aos seus espectros de reflexão apresentam um desvio com o ângulo de incidência. No entanto, a cromaticidade da estrutura Fibonacciana é menos sensível à mudança no ângulo de incidência quando comparada com a estrutura alternada. O caso mais próximo de um refletor RGB omnidirecional é encontrado portanto para um ângulo de defeito  $\alpha = 30^\circ$ , cuja cromaticidade se apresenta próximo à região do branco para ângulos de incidência  $\varphi < 30^\circ$ . Esta característica é fundamental para o desenvolvimentos de *displays* coloridos por luz refletida.

# Capítulo 6

## Sumário e Conclusões

O estudo das propriedades dos filmes de multicamadas tem sido um objeto de muito interesse nos últimos anos devido à capacidade de controlar a transmissão, emissão e absorção da luz de uma maneira relativamente simples. O domínio destas propriedades pode trazer para a humanidade diversas facilidades tecnológicas, principalmente no campo da opto-eletrônica e das comunicações.

Neste contexto, os resultados apresentados nesta tese mostram alguns aspectos da transmissão de ondas eletromagnéticas planas e monocromáticas que se propagam em filmes binários de multicamadas de diferentes configurações, seja com a distribuição dos índices de refração seguindo a determinadas sequências numéricas particulares ou seja utilizando diferentes tipos de materiais ópticos na composição das camadas. Podemos verificar com isso a forte dependência das características do espectro com tais parâmetros, de forma que é possível obter as mais diferentes propriedades com a escolha adequada da ordem posicional das camadas e do tipo de material óptico utilizado.

Utilizando o método de matriz de transferência, verificamos numericamente

---

que a aplicação da desordem na posição das camadas de um filme binário de  $N$  camadas dielétricas, cujas características de construção obedecem à condição de Bragg ( $n_A d_A = n_B d_B$ ), provoca a localização exponencial da maioria dos modos, de forma que o espectro de transmissão apresenta um largo gap fotônico e a banda de modos transmissíveis é centrada em um modo completamente transparente e insensível à desordem, caracterizado pelo fato de que o caminho óptico das camadas é a metade do seu comprimento de onda (modo de meia-onda). Com o aumento do número de camadas, a quantidade de modos localizados aumenta, juntamente com a largura do gap fotônico, de forma que a transmissão média para uma região de frequências próximas da ressonância de meia-onda cai com  $1/N^{1/2}$  e o comprimento de localização diverge quadraticamente à medida que a frequência se aproxima desta ressonância. O largo gap fotônico obtido neste sistema é centrado no modo cujo caminho óptico das camadas corresponde a  $1/4$  do seu comprimento de onda (modo quarto-de-onda). Na vizinhança deste modo, o comprimento de localização diverge quadraticamente e a média espectral da transmissão apresenta uma dependência com  $N$  do tipo exponencial alongada. Calculando o expoente de Lyapunov para este modo em diferentes realizações de desordem, pudemos verificar que este apresenta uma distribuição Gaussiana, levando à leis de escala distintas para as médias geométrica e aritmética da transmissão. As leis de escala encontradas para estes dois modos ressonantes são análogas às encontradas nos modelos eletrônicos unidimensionais de Anderson com dímeros aleatórios e com desordem *off-diagonal* respectivamente.

Não apenas a mudança na ordem posicional das camadas como também a inclusão de outros tipos de materiais ópticos é capaz de gerar fortes mudanças das características de transmissão de um filme de multicamadas. Com a inclusão de

---

metamateriais como parte da constituição de um filme binário desordenado, verificamos que a média espectral da transmissão para uma região do espectro próximo da ressonância de meia-onda decai com  $1/N$ , ou seja, de maneira mais rápida se comparada ao caso puramente ordinário. Esta nova característica se torna importante quando se deseja um filtragem mais eficiente com uma quantidade menor de camadas. Em decorrência desta forte localização, o surgimento de modos ressonantes dentro da banda de modos proibidos para um grau de desordem intermediário faz modificar a dependência da média espectral da transmissão com o grau de desordem, de maneira que este apresenta um comportamento não-monotônico, atingindo um valor de mínimo para um grau de desordem intermediário.

Novas características foram encontradas com o emprego de uma distribuição de camadas moduladas aperiódicamente em um filme binário. A aperiódicidade é introduzida baseando-se em uma lei senoidal cuja fase  $\varphi$  varia como uma lei de potência do índice das camadas  $\varphi \propto j^\nu$ , onde o expoente  $\nu$  controla o grau de aperiódicidade. Para  $\nu > 1$  a função oscila de tal maneira que a seqüência resultante é efetivamente desordenada e descorrelacionada, levando à localização de Anderson usual. Diferentemente dos resultados obtidos para o modelo eletrônico de Anderson com potencial aperiódico, a média espectral da transmissão apresentou também um comportamento não-monotônico quando o sistema varia entre o caso uniforme em  $\nu = 0$  e o caso quasi-periódico em  $\nu = 1$ , atingindo um mínimo para um grau intermediário de aperiódicidade. Uma análise espectral da distribuição dos índices de refração mostrou haver uma analogia entre o comportamento do espectro da seqüência de índices e da transmissão média, comprovando portanto uma forte relação entre as características da distribuição de camadas com as propriedades de transporte.

Por fim, investigamos as características de reflexão de um filme com camadas birrefringentes. O espectro de reflexão depende fortemente do tipo de polarização da luz incidente. O material escolhido para tal finalidade foi o cristal líquido colestérico (ChLC), caracterizado pelo seu arranjo molecular em forma de hélice. Este arranjo transforma uma simples camada de ChLC em uma cristal fotônico unidimensional, de forma que uma luz circularmente polarizada com a orientação rotacional da polarização igual à orientação rotacional da hélice do ChLC apresentará no seu espectro de transmissão uma região de modos proibidos. A composição de um filme binário com este material pode fazer surgir outras regiões de gap no espectro. Estes novos gaps são controlados pelos parâmetros de construção das camadas, de tal maneira que podemos obter um espectro de reflexão na região do RGB, característica importante para a criação de displays de LCD por reflexão. Neste trabalho investigamos a relação entre a mudança de cromaticidade e o ângulo de incidência de uma luz circularmente polarizada que se propaga através de uma estrutura de ChLC com ângulos de defeito que obedecem a uma seqüência quasi-periódica de Fibonacci assim como uma estrutura formada por camadas alternadas de ChLC e dielétrico isotrópico. O diagrama cromático para cada tipo de filme apresentou uma dependência bem particular, onde a menor variação foi obtida para a geração  $F_4$  do caso Fibonacciano com ângulo de defeito  $\alpha = \pi/3$ . Neste caso a luz refletida se manteve próxima à região do branco para um largo intervalo de ângulos de incidência, aproximando-se assim de um refletor RGB omnidirecional. A forte sensibilidade entre a maneira com que o correspondente cromático da reflexão varia com o ângulo de incidência e as características de construção do filme abriu precedentes para que novas distribuições de camadas birrefringentes possam ser investigadas a fim de ser obter uma melhor aproximação de um refletor RGB omnidirecional, característica fundamental



na aplicação de displays LCD por luz refletida.

O estudo das multicamadas, como foi mostrado nesta tese, pode trazer para o campo da óptica e da ciência dos materiais, uma vasta gama de novos fenômenos simplesmente modificando as distribuições de camadas e utilizando os materiais adequados. Esta versatilidade foi o *motor primário* durante todo o nosso estudo e nos motiva a continuar investigando cada vez mais este rico tema.

# Referências Bibliográficas

- [1] J. D. Joannopoulos, R. D. Meade, e J. N. Winn, *Photonic Crystals* (Princeton University Press, Princeton, 1995); C. N. Sokoulis *Photonic Band Gaps Localization* (Plenum, New York, 1993).
- [2] E. Yablonovitch, Phys. Rev. Lett. **58**, 2059 (1987); S. John, *ibid.* **58**, 2486 (1987).
- [3] Y. Fink, J. N. Winn, S. Fan, C. Chen, J. Michel, J. D. Joannopoulos, E. L. Thomas, Science **282**, 1679 (1998).
- [4] D. N. Chigrin, A. V. Lavrinenko, D. A. Yarotsky, S. V. Gaponenko, Appl. Phys. A **68**, 25-28 (1999).
- [5] C. J. Oton, L. Dal Negro, P. Pettotti, L. Pancheri, Z. Gaburro, L. Pavesi
- [6] X. Jiang, Y. Zhang, S. Feng, K. C. Huang, Y. Yi, and J. D. Joannopoulos, Appl. Phys. Lett. **86**, 201110 (2005).
- [7] G. Gumbs and M. K. Ali, Phys. Rev. Lett. **60**, 1081 (1988).
- [8] W. Gellermann, M. Kohmoto, B. Sutherland, and P. C. Taylor, Phys. Rev. Lett. **72**, 633 (1994).

- 
- [9] R.W. Peng, Mu Wang, A. Hu, S.S. Jiang, G.J. Jin, and D. Feng, Phys. Rev. B, **57**, 1544 (1998).
- [10] F. Nori and J. P. Rodriguez, Phys. Rev. B **34**, 2207 (1986).
- [11] T. Fujiwara, M. Kohmoto, and T. Tokihiro, Phys. Rev. B **40**, 7413 (1989).
- [12] E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello, and T. V. Ramakrishnan, Phys. Rev. Lett. **42**, 673 (1979).
- [13] D. S. Wiersma, P. Bartolini, A. Lagendijk, and R. Righini, Nature (London) **390**, 671 (1997).
- [14] M. Storzer, P. Gross, C. M. Aegerter, and G. Maret, Phys. Rev. Lett. **96**, 063904 (2006).
- [15] T. Schwartz, G. Bartal, S. Fishman, and M. Segev, Nature (London) **446**, 52 (2007).
- [16] J. B. Pendry, Adv. Phys. **43**, 461 (1994).
- [17] J. Bertolotti, S. Gottardo, D. S. Wierma, M. Ghulinyan, and L. Pavesi, Phys. Rev. Lett. **94**, 113903 (2005).
- [18] J. Bertolotti, M. Galli, R. Sapienza, M. Ghulinyan, S. Gottardo, L. C. Andreani, L. Pavesi, and D. S. Wiersma, Phys. Rev. E **74**, 035602 (R) (2006).
- [19] H. Q. Li, H. Chan, and X. J. Qiu, Physica B **279**, 164 (2000).
- [20] V. A. Tolmachev, T. S. Perova, J. A. Pilyugina, and R. A. Moore, Opt, Commun. **259**, 104 (2006).

- 
- [21] P. W. Anderson, *Phys. Rev.*, **109**, 1492 (1958).
- [22] D. J. Thouless, *Physics Reports* **13**, 93 (1974).
- [23] B. Kramer e A. MacKinnon, *Rep. Prog. Phys.* **56**, 1469 (1993).
- [24] K. Slevin e T. Ohtsuki, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 382 (2001).
- [25] K. Slevin, P. Marko e, T. Ohtsuki, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 3594 (2001).
- [26] S. L. A. de Queiroz, *Phys. Rev. B* **63**, 214202 (2001).
- [27] K. Slevin, T. Ohtsuki e, T. Kawarabayashi, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 3915 (2000).
- [28] H. Aoki e T. Ando, *Solid State Commun* **18**, 1981 (1979).
- [29] S. Etamad, R. Thompson e M. J. Andrejco, *Phys. Rev. Lett* **57**, 575 (1986).
- [30] E. Akkermans e R. Maynard, *J. Physique Lett.* **46** L1045 (1985).
- [31] p. E. Lindelof, J. Nørregaard e J. Hanberg, *Phys. Scr.* **T14**, 17 (1986).
- [32] *ver, por exemplo*, Scalora M, Bloemer M J, Pethel A. S., Dowling J. P. and Bowden C. M., *J. Appl. Phys.* **83** (1998) 2846.
- [33] Li H., Chen. H, Qiu X, *Physica B* **279** 164 (2000)
- [34] Xu J., Fang H., Lin Z., *Journal of Physics D* **34** 445 (2001)
- [35] M. Born e E. Wolf. *Principles of Optics*, 5 ed., Pergamon Press (1975).
- [36] M. Ya. Azbel, *Physical Review Letters* **43**, 1954 (1979).
- [37] S. Aubry, in *Proc. Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics*, March, 1979, *Lectures in Physics* (Springer, Berlin, in Press).

- 
- [38] J. B. Solokoff, Physical Review B **22** 5823 (1980).
- [39] C. M. Soulloulis e E. N. Economou, Physical Review Letters **48**, 1043 (1981).
- [40] D. J. Thouless, Physical Review Letters **61**, 2141 (1988).
- [41] S. Das Sarma, S. He, and X. C. Xie, Phys. Rev. Lett. **61**, 2144 (1988); Phys. Rev. B **41**, 5544 (1990).
- [42] V. G. Veselago, Sov. Phys. Usp. **10**, 509-514 (1968).
- [43] J. B. Pendry, A. J. Holden, D. J. Robbins, W. J. Stewart, IEEE Trans. Microwave Theory Tech. **47**, 2075 (1999).
- [44] K. Guven, M. D. Caliskan, E. Ozbay, Optics Express **14**, 8685 (2006).
- [45] J. B. Pendry, Phys. Rev. Lett. **85**, 3966 (2000).
- [46] J. A. Kong, B. -I, Wu, Y. Zhang, Microwave Opt. Technol. Lett. **33**, 136-139 (2002).
- [47] L. Wu, S. He, L. Shen, Phys. Rev. B **67**, 235103 (2003).
- [48] J. Li, Lei Zhou, C. T. Chan, P. Sheng, Phys. Rev. Lett. **90**, 083901 (2003).
- [49] J. A. Monsoriu, R. A. Despina, M. L. Martínez-Ricci, E. Silvestre, Opt. Express **14**, 12958 (2006).
- [50] Y. Yuan, L. Ran, J. Huangfu, H. Chan, L. Shen, J. Au Kong, Opt. Express **14**, 2220 (2006).
- [51] A. A. Asatryan, et. al. Phys. Rev. Lett. **99**, 193902 (2007).

- 
- [52] D. H. Dunlap, H.-L. Wu, and P. W. Phillips, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 88 (1990).
- [53] P. W. Phillips and H.-L. Wu, *Science* **252**, 1805 (1991).
- [54] G. Theodorou e M. Cohen, *Phys. Rev. B* **13**, 4597 (1976).
- [55] L. Fleishman e D. C. Licciardello, *J. Phys. C* **10**, L125 (1977).
- [56] R. Ozaki, Y. Matsuhisa, H. Yoshida, K. Yoshino, and M. Ozaki, *J. Appl. Phys.* **100**, 023102 (2006).
- [57] N. Y. Ha, Y. Takanishi, K. Ishikawa, H. Takezoe, *Opt. Express* **15**, 1024 (2007).
- [58] N. Y. Ha, Y. Ohtsuka, S. M. Jeonh, S. Nishimura, G. Suzaki, Y. Takanishi, K. Ishikawa, e H. Takezoe, *Nature Mater.* **7** 43 (2008).
- [59] P. G. De Gennes and J. Prost, *The Physics os Liquid Crystals* (Clarendon, Oxford, 1993).
- [60] ,D. Subacius, P. J. Bos, and O. D. Lavrentovich, *Appl. Phys. Lett.* **71**, 1350 (1997).
- [61] S. W. Kang, S. Sprunt, L. C. Chien, *Appl. Phys. Lett.* **76**, 3516 (2000).
- [62] S. Stallinga, *J. Appl. Phys.* **85**, 3023 (1999).
- [63] D. W. Berreman, *J. Opt. Soc. Am.* **62**, 502 (1972).
- [64] F. Reintzer, *Beiträge zur Kenntnis des Cholesterins.* *Monatsh. Chem.* **9**, 421 (1888).
- [65] F. Reintzer, *Contributions to the knowledge of cholesterol.* *Liq. Cryst.* **5**, 7, (1989). Tradução para o inglês da referência [64].

- 
- [66] D. Vorländer, *Eingluß der molekularen Gestalt den krystallinisch-flüssigen Zustand*. Ber Deutsch. Chem. Ges. **40**, 1970 (1907).
- [67] CIE (1931). *Commission internationale de l'Eclairage proceedings, 1931*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [68] T. Smith, J. Guild, "The C.I.E. colorimetric standards and their use". *Transactions of the Optical Society* **33** (3): 73-134. doi:10.1088/1475-4878/33/3/301.

# Capítulo 7

## Anexo



## Scaling laws for the transmission of random binary dielectric multilayered structures

E. M. Nascimento, F. A. B. F. de Moura, and M. L. Lyra  
*Instituto de Física, Universidade Federal de Alagoas, 57072-970 Maceió, Alagoas, Brazil*  
 (Received 21 May 2007; published 20 September 2007)

We investigate several scaling aspects of the transmission spectrum of disordered one-dimensional dielectric structures. We consider a binary stratified medium composed of a random sequence of  $N$  slabs with refraction indices satisfying the Bragg condition. The mode for which the optical thickness corresponds to half wavelength is insensitive to disorder and fully transparent. The average transmission in a frequency range around this resonance decays as  $1/N^{1/2}$ , and the localization length diverges quadratically as this resonance mode is approached. In the vicinity of the quarter-wavelength mode, the localization length diverges logarithmically and the frequency averaged transmission exhibits a stretched exponential dependence on the total thickness. At the quarter-wavelength resonance, the Lyapunov exponent for different realizations of disorder has a Gaussian distribution leading to distinct scaling laws for the geometric and arithmetic averages of the transmission. The scaling laws for the half- and quarter-wavelength modes are analogous to those found in electronic one-dimensional Anderson models with random dimers and pure off-diagonal disorder, respectively, which are known to display similar violations of the usual exponential Anderson localization.

DOI: [10.1103/PhysRevB.76.115120](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.76.115120)

PACS number(s): 78.67.Pt, 42.25.Dd, 78.20.Bh, 72.15.Rn

### I. INTRODUCTION

The study of wave transport in random media has been a subject of renewable interest during the last decades, motivated by its inherent importance to the understanding of electric, magnetic, mechanic, and optical properties of matter with potential applications to the development of new devices. Within this scenario, the Anderson theory for noninteracting electrons in random media plays a central role.<sup>1-4</sup> Although initially intended to study electronic transport in random media, the predictions of the Anderson theory have a quite broad range of applications which extend to general wave transport phenomena.

According to scaling arguments,<sup>2</sup> three-dimensional systems with weak disorder may sustain extended modes over the whole sample, although with a finite coherence length. In this regime, wave propagation can occur, thus leading to most of the transport properties of condensed matter. For strong disorder, the incoherent interference of waves scattered by impurities leads to an exponential localization and, consequently, to the absence of long distance transport. The exponential localization is predominant in low-dimensional systems. In particular, the scaling theory of Anderson localization predicts that all wave modes shall be exponentially localized for any amount of disorder in one dimension.<sup>2-4</sup>

Violations of the exponential localization in one-dimensional (1D) disordered systems have been reported in a series of model systems. The random-dimer model,<sup>5,6</sup> which consists of a random binary chain with one of the species always appearing in pairs, has a resonant mode with no back-scattering due to dimers that remain extended. In the Anderson chain with diluted disorder, i.e., with disorder present just in a given sublattice, there is a Bloch state with vanishing amplitudes at the disordered sublattice that also remains delocalized.<sup>7-10</sup> The presence of resonant delocalized modes promotes a diffusivelike spread of initially localized wave packets, thus being relevant for electronic transport. Models that include long-range correlated disorder have also been

shown to display a band of extended states for strong enough correlations which can sustain coherent Bloch oscillations in the presence of a static electric field.<sup>11-13</sup> Another class of models that exhibit nonexponentially localized modes is that with chiral symmetry, such as the tight-binding 1D model with pure off-diagonal disorder and only first-neighbor couplings.<sup>14,15</sup> This model has a special mode at the band center whose wave-function envelope has an asymptotic stretched exponential tail. Another mechanism for the emergence of nonexponentially localized states in 1D random systems is through the hybridization of spatially separated degenerate modes. Recently, the existence of these so-called necklace states<sup>16</sup> has been reported by transmission measurements in random dielectric multilayers.<sup>17</sup>

Actually, the propagation of electromagnetic waves in random media corresponds to the ideal physical scenario to apply the concepts of Anderson localization, since photons are truly noninteracting particles.<sup>18</sup> Anderson localization of light waves has indeed been observed in disordered materials.<sup>19-21</sup> In 1D disordered system, the localized modes decay exponentially and, as a consequence, the ensemble average of the transmission logarithm over many realizations of the disorder usually decays linearly with the sample thickness  $L$ .<sup>16</sup> The simplest 1D optical disordered system corresponds to a sequence of thin dielectric layers with no translational order. A multilayer system has the advantage of being simple to fabricate using different procedures,<sup>22-24</sup> thus having potential applications in optoelectronics and optical communication.<sup>25</sup>

In the absence of disorder, the transmission spectra of periodic multilayered structures exhibit a characteristic range of frequencies with no propagating modes. Materials with such property are called *photonic crystals*,<sup>26</sup> in analogy with atomic crystals. The region of forbidden frequencies is called *photonic band gap* and, as in the electronic case, arises as a result of multiple interference of Bragg scatterings. However, due to the vectorial character of the electromagnetic field, in contrast to the scalar nature of the electronic wave function,

photonic crystals exhibit new features related to polarization and incidence angle dependent effects.<sup>27-31</sup>

The band gap in multilayered systems can be controlled by changing the physical characteristics and the positional distribution of the layers. Several interesting results have been reported for structures following quasiperiodic (pseudo-random) sequences such as the raising of non-Bragg gaps in a Thue-Morse multilayer<sup>32</sup> and the self-similarity of the energy spectrum of Fibonacci structures.<sup>33,34</sup> Scale invariant gaps have also been obtained with the utilization of metamaterials in the multilayer composition.<sup>35,36</sup> For truly random sequences, the combined effect of Bragg reflection and light localization has been explored to demonstrate a band-gap extension effect with possible applications in the design of broadband high reflectors composed of a periodic layer sequence with fluctuating optical lengths.<sup>37,38</sup> Recently, the transmission spectrum of binary multilayer structure with positional disorder, composed of dielectric slabs with the same optical length, has been reported<sup>17,39,40</sup> and shown to display peaks associated with necklace states.<sup>16</sup> Numerical results on finite-size samples showed a transmission peak when the optical length corresponds to a quarter wavelength as a signature of hidden partial order.<sup>40</sup>

In this paper, we will report the scaling behavior associated with several aspects of the transmission spectrum of a binary multilayer structure with positional disorder. We will particularly address the case on which the dielectric layers have distinct refractive indices but their thicknesses are chosen to give them the same optical length. By employing a transfer matrix calculation in finite-size samples, we will compute the transmission coefficient as a function of the mode frequency. We will drive special attention to the spectral ranges at the vicinity of the half- and quarter-wavelength modes. The transmission peaks at these frequencies originate from distinct mechanisms reflected on different scaling laws for the size dependence of the average transmission and for the localization length singularities. These scaling laws will be shown to be analogous to the ones observed in the tight-binding models for electronic states in random-dimer and random-hopping chains.

## II. TRANSFER MATRIX FORMALISM

The transfer matrix formalism is particularly suited to compute the transmission spectrum of electromagnetic waves in stratified dielectric media.<sup>41,42</sup> Here, we will sketch the main lines of the transfer matrix technique for the particular case of normal incidence. We will assume a plane wave of frequency  $\omega$  propagating along the  $z$  axis direction, which is normal to the interfaces of a dielectric slab of thickness  $d$  and linearly polarized in such a way that the electric field amplitude can be written as  $\vec{E}(z) = E(z)\hat{x}$ . The extension for the case of oblique incidence of transverse electric and transverse magnetic waves is straightforward. The relation between the electric and magnetic fields at the interface located at  $z = z_1$  and the fields at the interface at  $z = z_1 + d$  can be expressed in transfer matrix form as

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} E_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta & \frac{i}{p} \sin \delta \\ ip \sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

where the phase change  $\delta = \omega nd/c$ ,  $n$  is the refractive index of the medium, and  $p = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}$ , where  $\epsilon$  and  $\mu$  are the dielectric constant and magnetic permeability, respectively. The boundary conditions across an interface requires the continuity of the parallel components of the fields. As a consequence, for a stratified medium consisting of a sequence of  $N$  dielectric layers, the fields at the first and last interfaces can be related through a product of individual transfer matrices as

$$\begin{pmatrix} E_0 \\ B_0 \end{pmatrix} = M_1 M_2 \cdots M_N \begin{pmatrix} E_N \\ B_N \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} E_N \\ B_N \end{pmatrix}, \quad (2)$$

where  $M_i$  is the transfer matrix of the  $i$ th layer,  $E_0$  and  $B_0$  are the electric and magnetic field amplitudes at the first interface, and  $E_N$  and  $B_N$  the field amplitudes at the last interface. The complex transmission coefficient of such stratified medium can be obtained by assuming that the incident beam is coming from the left and that one has just the outgoing transmitted wave at the right of the multilayer structure. It can be expressed as

$$t(\omega) = \frac{2p_i}{(m_{11} + m_{12}p_o)p_i + (m_{21} + m_{22}p_o)}, \quad (3)$$

where  $m_{ij}$ 's represent the elements of the total transfer matrix  $M$ .  $p_i$  and  $p_o$  are related to the input and output media. The complex transmission coefficient brings information regarding both the phase and amplitude of the transmitted wave. From the phase, one can have access to the dispersion properties of the wave propagating through the multilayered structure such as its group velocity. In what follows, we will be particularly interested in analyzing the ratio between the intensities of the outgoing and incoming waves, which is given by the transmission  $T(\omega) = \frac{p_o}{p_i} |t(\omega)|^2$ .

## III. TRANSMISSION SPECTRUM OF BINARY RANDOM SEQUENCES

We will consider a random stratified binary medium composed of  $N$  nonabsorbing dispersionless dielectric layers. As representative refraction indices, we will consider  $n_A = 1.45$  and  $n_B = 2.5$ , although the qualitative aspects we are going to explore remains the same for any pair  $(n_a, n_b)$ . The layers can be considered as consisting of porous silicon, whose refractive index can be made to vary in a wide range by controlling the porosity.<sup>43</sup> The  $i$ th layer of the sequence has the same probability of being type  $A$  or  $B$ . The resulting dielectric structure is surrounded by vacuum, and the layer thicknesses will be taken in such a way as to satisfy the Bragg condition, i.e., both kinds of dielectric layers will have the same optical length  $n_A d_A = n_B d_B = \lambda_0$ . In what follows, the characteristic frequency  $\nu_0 = c/\lambda_0$  corresponds to the mode whose wavelength in vacuum equals the layer's optical length.

In order to have an overall picture of the role played by disorder, we compared the transmission spectrum of a peri-

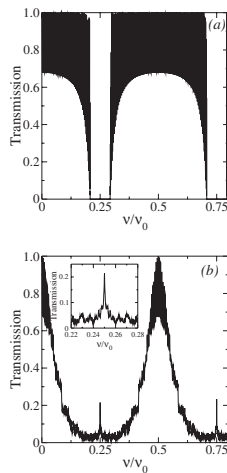


FIG. 1. Transmission spectra of (a) periodic and (b) random stratified binary media with  $N=10^2$  layers. For the random structure, we performed an average over  $10^2$  distinct realizations of disorder, which plays quite distinct roles in the range of frequencies corresponding to transmitting and nontransmitting bands. The inset shows in detail the disorder induced transmission peak at the center of the stop band.

odic sequence of alternating  $A$  and  $B$  layers with that of a random multilayer sequence, as shown in Fig. 1 for structures with  $N=10^2$  layers. The periodic sequence constitutes the so-called distributed Bragg reflector. The transmission spectrum displays a sequence of transmitting and nontransmitting bands. The transmitting bands are centered at frequencies for which the optical length of each layer is an integer multiple of the half wavelength in vacuum, i.e., the phase change in each layer is  $\delta=m\pi$ , with  $m$  integer. The multilayer structure is fully transparent to these modes. The nontransmitting photonic band gaps are centered at frequencies that match the optical length to be a quarter wavelength displaced from the multiples of half wavelengths [phase change  $\delta=(m+1/2)\pi$ ]. The width of the photonic band gap depends on the relation between the refractive indices  $n_a$  and  $n_b$ .

The transmission spectrum of random sequences, averaged over  $10^2$  realizations of the disorder, is depicted in Fig. 1(b). Disorder has quite distinct effects in the range of frequencies corresponding to transmitting and nontransmitting bands. Firstly, one notices that the high transmission at the center of the transmitting bands is not affected by disorder, as expected once the transfer matrix of each layer becomes an identity matrix  $I$  for these modes (actually  $\pm I$ ). However, the width of the transmission band is much narrower. Within the nontransmitting band, disorder induces the emergence of a few modes. These are related to necklace states which result from hybridization of degenerate states localized in dis-

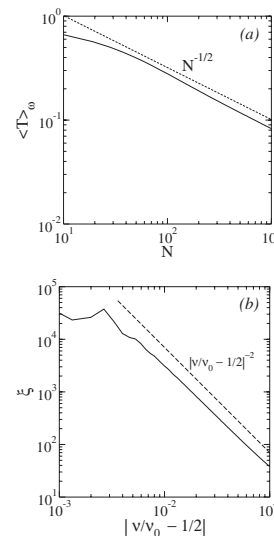


FIG. 2. (a) Spectral average of the transmission versus the number of layers  $N$ . (b) Localization length in the vicinity of the half-wavelength mode. The average transmission decays with  $1/N^{1/2}$ , and the localization length diverges quadratically as one approaches the resonance mode. The estimate of the localization length was performed considering a finite structure with  $N=10^4$  layers, and the averages were taken over  $10^3$  distinct random sequences. The saturation of the localization length very close to the resonance frequency is a finite-size effect.

tinct regions of the structure.<sup>17,40</sup> Although these modes become rare as the number of layers increases, they dominate the average transmission in this frequency range. Further, the average transmission spectrum develops a narrow peak at the center of the photonic band gap.

The insensitivity of the fully transmitting mode on the spatial arrangement of the layers resembles the violation of the Anderson localization in the random-dimer model.<sup>5,6</sup> This model also has a resonant mode for which the dimers become transparent. A typical signature of this kind of resonance is that the localization length  $\xi$  shall diverge as  $|E - E_0|^{-2}$ . Consequently, the energy range of effectively extended states with  $\xi > N$  shall decrease as  $N^{-1/2}$ . We test for the above scalings on the vicinity of the half-wavelength mode. As a measure of the localization length  $\xi$ , we considered the inverse of the Lyapunov exponent [ $\xi=1/\Lambda = -\lim_{N \rightarrow \infty} (N/\ln T)$ ]. We also computed the spectral average of the transmission for the frequency range corresponding to the transmission band of the periodic sequence. Its size dependence shall reflect the narrowing of the transmission peak. In Fig. 2, we report our results for these quantities. As anticipated above, the average transmission decays as  $N^{-1/2}$ , and the localization length diverges quadratically as one approaches this resonance mode.

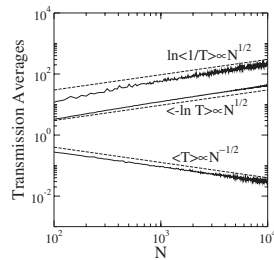


FIG. 3. Size dependence of the geometric ( $\exp(\ln T)$ ), harmonic ( $\langle 1/T \rangle$ ), and arithmetic ( $\langle T \rangle$ ) average values of the transmission at the quarter-wavelength resonance frequency. Both the geometric and harmonic averages display an stretched exponential scaling, while the arithmetic average exhibits a slower power-law decay. Here, we averaged over  $10^4$  distinct random sequences.

At the center of the photonic band gap of the periodic sequence, disorder promotes a narrow peak of the transmission. At this frequency, one can notice that the transfer matrices of both kinds of layer become off diagonal, i.e., have null diagonal elements. However, the off-diagonal elements will be randomly distributed. This scenario resembles the one achieved for one-dimensional electronic tight-binding Hamiltonians with only random hoppings.<sup>14,15</sup> The state at the middle of the energy band of this model has an infinite localization length. In spite of this, the disorder averaged transmission approaches zero as the size of the system increases. On the basis of the central limit theorem, it has been argued that the logarithm of the transmission at this resonance shall have a Gaussian distribution in the regime of large  $N$ , whose mean square deviation grows as  $N^{1/2}$  as shown in Ref. 14. Following this distribution, the geometric [ $\exp(\ln(T))$ ] and harmonic ( $\langle (1/T)^{-1} \rangle$ ) mean values of the transmission shall behave as  $\exp(-\alpha\sqrt{L})$ , while the arithmetic mean value ( $\langle T \rangle$ ) shall follow a power law  $N^{-1/2}$ . As one approaches the band center, the localization diverges logarithmically,<sup>15</sup> which implies that the energy range of effectively extended states shall be very narrow, scaling as a stretched exponential.

We have verified the above scaling behavior at the quarter-wavelength mode. In Fig. 3, we report the size dependence of the geometric, harmonic, and arithmetic average values of the transmittance. Both the geometric and harmonic averages indeed display a stretched exponential scaling, while the arithmetic average exhibits a slower power-law decay. In Fig. 4, we display the probability distribution function of the transmittance logarithm at the quarter-wavelength condition as obtained from  $10^4$  distinct realizations of the disorder in structures with  $10^4$  layers. The numerically obtained distribution is well fitted by a Gaussian, thus corroborating the central limit theorem prediction. It is worth mentioning that disorder configurations that lead to high transmittance occur with larger probability than those leading to low transmittance. This is a somewhat counterintuitive aspect once disorder is expected to favor localization.

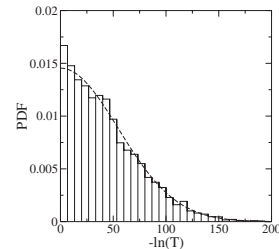


FIG. 4. Probability distribution function of the transmission logarithm at the quarter-wavelength resonance frequency. The numerically obtained distribution is well fitted by a Gaussian (dashed line), thus corroborating the central limit theorem prediction. Data were the same as those used in Fig. 3 for  $N=10^4$  layers.

Actually, at this frequency, the system has a hidden partial order. Pairs of neighboring layers of the same kind are transparent. Therefore, the effective size of the system can be renormalized by decimating such pairs until a level at which the remaining layers form a periodic alternate sequence.<sup>40</sup> The probability that such decimation proceeds up to a high order is large, thus resulting in a maximum of the probability distribution function for high transmissions.

The spectral average of the transmittance in a frequency range around the quarter-wavelength mode is shown in Fig. 5(a). In contrast with the power-law scaling obtained at the vicinity of the half-wavelength mode, we now find that the transmission spectral average exhibits a faster stretched exponential decay as the number of layers is increased. This trend is consistent with the slow logarithmic divergence of the localization length when approaching this resonant mode, as shown in Fig. 5(b). All the reported scaling behaviors at the quarter-wavelength resonance are consistent with those of the electronic tight-binding random-hopping model and shall hold for general one-dimensional models with pure off-diagonal disorder.

The above analysis showed that disorder plays opposite trends in the transmission behavior near half- and quarter-wavelength modes. Near the half-wavelength condition, i.e., at the transmission band of the periodic sequence, the main effect of disorder is to promote the exponential localization of the modes, except at the resonance. Therefore, the transmission spectral average is reduced by disorder. On the other hand, within the photonic band gap, disorder promotes the emergence of states that support a small but finite transmission in finite systems.

In order to explicitly show these opposite trends, we computed the spectral average of the transmission around the half- and quarter-wavelength resonances as a function of the disorder strength. We started with a periodic sequence of alternate  $A$  and  $B$  layers. Then, each layer of this sequence is replaced by a layer of the other species with probability  $q$ . For  $q=0$ , one retains the fully periodic sequence, while the  $q=1/2$  limit recovers the uncorrelated fully disordered sequence. Our results are shown in Fig. 6 for  $N=10^2$  layers, averaged over  $5 \times 10^3$  disorder configurations and within

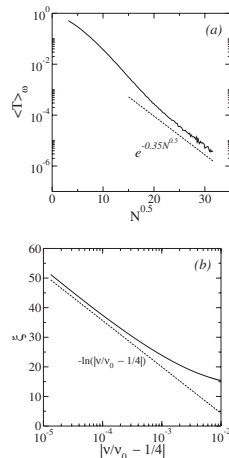


FIG. 5. (a) Spectral average of the transmittance in a frequency range around the quarter-wavelength mode as a function of the number of layers. It exhibits an asymptotic stretched exponential decay as the number of layers is increased. (b) The disorder averaged localization length in the vicinity of the quarter-wavelength resonance showing its slow logarithmic divergence. Here, we averaged over  $10^4$  random sequences. The localization length in (b) was estimated from structures having  $5 \times 10^3$  layers.

spectral ranges corresponding to the transmission (a) and reflecting (b) bands. Notice that the average transmission around the half-wavelength mode decays with increasing disorder strengths once Anderson localization is the predominant effect. The spectrally averaged transmission around the quarter-wavelength resonance depicts the opposite trend, growing as the disorder strength is increased due to the emergence of states within the gap. The average transmission is small due to the low probability of occurrence of extended necklace states.

#### IV. SUMMARY AND CONCLUSIONS

In summary, we investigated the scaling behavior of the transmission spectrum in stratified dielectric media composed of binary random sequences of  $N$  layers satisfying the Bragg reflection condition. We paid special attention to the resonance states for which the optical length of the layers corresponds to half and quarter of the mode wavelength.

The half-wavelength resonance is at the center of the transmission band of the corresponding periodic sequence of alternating layers. It is fully transparent irrespective to disorder. We numerically demonstrated that the transmission bandwidth is a decreasing function of the total number of layers and disorder strength, with the spectrally averaged transmission scaling as  $N^{-1/2}$ . Further, the localization length diverges quadratically as one approaches the resonance fre-

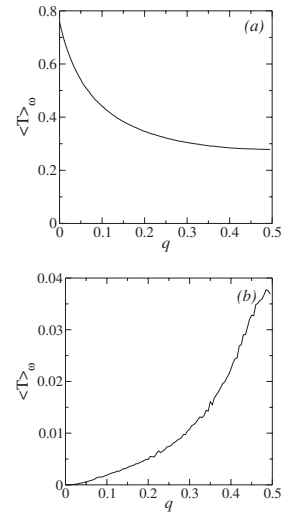


FIG. 6. Spectral average of the transmission around (a) the half- and (b) the quarter-wavelength resonances as a function of the disorder strength. Disorder plays opposite trends in the transmission behavior near each resonance. Around the half-wavelength resonance, Anderson localization is predominant and the transmission decreases with increasing disorder. On the other hand, near the quarter-wavelength resonance, disorder induces the emergence of states within the stop band and thus promotes a small transmittance in this frequency range. Data were obtained from  $5 \times 10^3$  random sequences with  $10^2$  layers each.

quency. These scaling laws are the same ones appearing in the random-dimer tight-binding Hamiltonian model for one-electron states.

At the quarter-wavelength mode, the logarithm of the transmission has a Gaussian distribution when considering distinct disorder configurations whose width scales as  $N^{1/2}$  in the limit of large  $N$ . This Gaussian distribution reflects a hidden partial order which can be revealed by decimating the pairs of neighboring similar layers. At this resonance, the geometric and harmonic averages of the transmission scale as stretched exponentials of the total number of layers, while the arithmetic average displays a slower power-law decay proportional to  $N^{-1/2}$ . Further, the spectral average of the transmission around the quarter-wavelength resonance also decays with the total thickness as an stretched exponential, which is consistent with a slow logarithmic divergence of the localization length. However, the transmission within this frequency range increases with the disorder strength. The scaling laws at this resonance are similar to the ones present in the Hamiltonian model for one-electron states in chains with random hoppings and might hold for general 1D systems with pure off-diagonal disorder.

In summary, a random binary dielectric multilayer satisfying the Bragg reflection condition exhibits two of the

known scenarios that lead to violations of the Anderson exponential localization due to disorder. Once the propagation of electromagnetic waves in random media represents the ideal setup for testing the predictions associated with the Anderson theory of localization, it would be interesting to have experimental observations of the herein reported scaling laws. However, fluctuations in the layer thicknesses of real systems shall be finely controlled to allow the Bragg condition to be closely satisfied. These fluctuations may suppress the resonance transmission peaks of thick multilayer

structures, especially the narrow peak corresponding to the quarter-wavelength condition.

#### ACKNOWLEDGMENTS

We would like to acknowledge the partial financial support from CAPES, CNPq, CNPq-Rede Nanobioestruturas, and FINEP (Brazilian Research Agencies), as well as from FAPEAL (Alagoas State Research Agency).

- <sup>1</sup>P. W. Anderson, *Phys. Rev.* **109**, 1492 (1958).  
<sup>2</sup>E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello, and T. V. Ramakrishnan, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 673 (1979).  
<sup>3</sup>P. A. Lee and T. V. Ramakrishnan, *Rev. Mod. Phys.* **57**, 287 (1985).  
<sup>4</sup>B. Kramer and A. MacKinnon, *Rep. Prog. Phys.* **56**, 1469 (1993).  
<sup>5</sup>D. H. Dunlap, H.-L. Wu, and P. W. Phillips, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 88 (1990).  
<sup>6</sup>P. W. Phillips and H.-L. Wu, *Science* **252**, 1805 (1991).  
<sup>7</sup>M. Hilke, *J. Phys. A* **30**, L367 (1997).  
<sup>8</sup>E. Lazo and M. E. Onell, *Physica B* **299**, 173 (2001); *Phys. Lett. A* **283**, 376 (2001).  
<sup>9</sup>F. A. B. F. de Moura, M. N. B. Santos, U. L. Fulco, M. L. Lyra, E. Lazo, and M. E. Onell, *Eur. Phys. J. B* **36**, 81 (2003).  
<sup>10</sup>M. Hilke, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 226403 (2003).  
<sup>11</sup>F. A. B. F. de Moura and M. L. Lyra, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3735 (1998); **84**, 199 (2000).  
<sup>12</sup>F. A. B. F. de Moura and M. L. Lyra, *Physica A* **266**, 465 (1999).  
<sup>13</sup>F. Domínguez-Adame, V. A. Malyshev, F. A. B. F. de Moura, and M. L. Lyra, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 197402 (2003).  
<sup>14</sup>G. Theodorou and M. Cohen, *Phys. Rev. B* **13**, 4597 (1976).  
<sup>15</sup>L. Fleishman and D. C. Licciardello, *J. Phys. C* **10**, L125 (1977).  
<sup>16</sup>J. B. Pendry, *Adv. Phys.* **43**, 461 (1994).  
<sup>17</sup>J. Bertolotti, S. Gottardo, D. S. Wiersma, M. Ghulinyan, and L. Pavesi, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 113903 (2005).  
<sup>18</sup>S. John, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 2169 (1984); P. W. Anderson, *Philos. Mag. B* **52**, 505 (1985).  
<sup>19</sup>D. S. Wiersma, P. Bartolini, A. Lagendijk, and R. Righini, *Nature (London)* **390**, 671 (1997).  
<sup>20</sup>M. Storz, P. Gross, C. M. Aegerter, and G. Maret, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 063904 (2006).  
<sup>21</sup>T. Schwartz, G. Bartal, S. Fishman, and M. Segev, *Nature (London)* **446**, 52 (2007).  
<sup>22</sup>R. P. Stanley, R. Houdre, U. Oesterle, M. Ilegems, and C. Weisbuch, *Appl. Phys. Lett.* **65**, 2093 (1994).  
<sup>23</sup>L. dal Negro, M. Stolfi, Y. Yi, J. Michel, X. Duan, L. C. Kimmerling, J. LeBlanc, and J. Haavisto, *Appl. Phys. Lett.* **84**, 5186 (2004).  
<sup>24</sup>L. Dal Negro, C. J. Oton, Z. Gaburro, L. Pavesi, P. Johnson, A. Lagendijk, R. Righini, M. Colocci, and D. S. Wiersma, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 055501 (2003); M. Ghulinyan, C. J. Oton, G. Bonetti, Z. Gaburro, and L. Pavesi, *J. Appl. Phys.* **93**, 9724 (2003).  
<sup>25</sup>J. D. Joannopoulos, R. D. Meade, and J. N. Winn, *Photonic Crystals* (Princeton University Press, Princeton, 1995); C. M. Soukoulis, *Photonic Band Gaps Localization* (Plenum, New York, 1993).  
<sup>26</sup>E. Yablonovitch, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2059 (1987); S. John, *ibid.* **58**, 2486 (1987).  
<sup>27</sup>S. H. Fan, P. R. Villeneuve, and J. D. Joannopoulos, *Phys. Rev. B* **54**, 11245 (1996).  
<sup>28</sup>J. F. Galisteo-Lopez, F. Lopez-Tejeda, S. Rubio, C. Lopez, and J. Sanchez-Dehesa, *Appl. Phys. Lett.* **82**, 4068 (2003).  
<sup>29</sup>L. G. Wang, H. Chen, and S. Y. Zhu, *Phys. Rev. B* **70**, 245102 (2004).  
<sup>30</sup>V. Kimberg, F. Gel'mukhanov, H. Agren, E. Pent, A. Plekhanov, I. Kuchin, M. Rodionov, and V. Shelkovich, *J. Opt. A, Pure Appl. Opt.* **6**, 991 (2004).  
<sup>31</sup>E. Pavarini, L. C. Andreani, C. Soci, M. Galli, F. Marabelli, and D. Comoretto, *Phys. Rev. B* **72**, 045102 (2005).  
<sup>32</sup>X. Jiang, Y. Zhang, S. Feng, K. C. Huang, Y. Yi, and J. D. Joannopoulos, *Appl. Phys. Lett.* **86**, 201110 (2005).  
<sup>33</sup>G. Gumbs and M. K. Ali, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 1081 (1988).  
<sup>34</sup>W. Gellermann, M. Kohmoto, B. Sutherland, and P. C. Taylor, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 633 (1994).  
<sup>35</sup>J. Li, L. Zhou, C. T. Chan, and P. Sheng, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 083901 (2003).  
<sup>36</sup>H. Jiang, H. Chen, H. Li, Y. Zhang, J. Zi, and S. Zhu, *Phys. Rev. E* **69**, 066607 (2004).  
<sup>37</sup>H. Q. Li, H. Chen, and X. J. Qiu, *Physica B* **279**, 164 (2000).  
<sup>38</sup>V. A. Tolmachev, T. S. Perova, J. A. Pilyugina, and R. A. Moore, *Opt. Commun.* **259**, 104 (2006).  
<sup>39</sup>P. Sebbah, B. Hu, J. M. Klosner, and A. Z. Genack, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 183902 (2006).  
<sup>40</sup>J. Bertolotti, M. Galli, R. Sapienza, M. Ghulinyan, S. Gottardo, L. C. Andreani, L. Pavesi, and D. S. Wiersma, *Phys. Rev. E* **74**, 035602(R) (2006).  
<sup>41</sup>F. L. Pedrotti and L. S. Pedrotti, *Introduction to Optics* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1987).  
<sup>42</sup>L. Carretero, M. Perez-Molina, P. Acebal, S. Blaya, and A. Fimia, *Opt. Express* **14**, 11385 (2006).  
<sup>43</sup>O. Bisi, S. Ossicini, and L. Pavesi, *Surf. Sci. Rep.* **38**, 5 (2000).



ELSEVIER

Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)
**PHOTONICS AND  
NANOSTRUCTURES**  
Fundamentals and Applications

Photonics and Nanostructures – Fundamentals and Applications xxx (2009) xxx–xxx

[www.elsevier.com/locate/photronics](http://www.elsevier.com/locate/photronics)

## Suppressed transmission in aperiodically modulated multilayered dielectric structures

E.M. Nascimento, F.A.B.F. de Moura, M.L. Lyra\*

*Instituto de Física, Universidade Federal de Alagoas, 57072-970 Maceió - AL, Brazil*

Received 5 September 2008; received in revised form 12 November 2008; accepted 20 December 2008

### Abstract

We investigate the transmission of electromagnetic plane waves through 1D binary dielectric multilayered structures that exhibit aperiodic incommensurate sequences of refractive indices. The aperiodicity is introduced by considering the sequence of refractive indices to follow a sinusoidal function whose phase  $\phi$  varies as a power-law of the layer index,  $\phi \propto i^p$ . For  $p > 1$ , the resulting sequence is effectively uncorrelated leading to the Anderson localization of most of the electromagnetic modes, except at the Bragg resonances. The crossover from a uniform structure at  $p = 0$  to a quasi-periodic structure at  $p = 1$  is signaled by a minimum at the spectrally averaged transmission. We perform a spectral analysis of the refractive index sequence to show its close connection to the main features exhibited by the averaged optical transmittance. Our results suggest that aperiodically modulated dielectric structures can potentially be used in the development of wide-band filters.

© 2008 Published by Elsevier B.V.

PACS : 78.67.Pt; 42.25.Dd; 78.20.Bh

Keywords: Multilayered structures; Transmission spectrum; Aperiodic sequences; Anderson localization

### 1. Introduction

The pioneer Anderson's theory concerning the localization of non-interacting electrons in disordered systems [1] led to a deeper understanding of several important condensed matter phenomena. According to the Anderson theory, the interference between multiply scattered Schroedinger waves leads to exponentially localized electron eigenfunctions in one-dimensional disordered systems. Along the last two decades, such exponential localization has been shown to be violated in a series of model systems. The random-dimer model [2,3], which consists of a random binary chain with one of

the species always appearing in pairs, has a resonant mode with no back-scattering due to dimers that remain extended. Models that include long-range correlated disorders have also been shown to display a band of extended states for strongly enough correlations with can sustain coherent Bloch oscillation in the presence of a static electric field [4–6]. Another class of 1D models that can exhibit an Anderson-like localization-delocalization transition, involves non-random deterministic potentials which are incommensurate with the underlying lattice [7]. This class of models depicts features that are in between those of the Anderson model and the periodic Bloch model. The localized or extended nature of the energy eigenstates presented by this class of models has been extensively investigated in the physics literature [8,9] and has been related to the general characteristics of the aperiodic on-site energy distribution.

\* Corresponding author.

E-mail address: [marcelo@if.ufal.br](mailto:marcelo@if.ufal.br) (M.L. Lyra).

53  
54  
55  
56  
57  
58  
59  
60  
61  
62  
63  
64  
65  
66  
67  
68  
69  
70  
71  
72  
73  
74  
75  
76  
77  
78  
79  
80  
81  
82  
83  
84  
85  
86  
87  
88  
89  
90  
91  
92  
93  
94  
95  
96  
97  
98  
99  
100  
101  
102  
103  
104  
105

As a purely interference phenomenon, Anderson localization is also observed to occur with vibrational [10–14], magnetic [15–19] and electromagnetic [20–23] waves. In fact, it has been observed in random dielectric multilayer system, where the localized modes decay exponentially and, as a consequence, the ensemble average of the transmission logarithm over many realizations of the disorder usually decays linearly with the sample thickness  $L$ .

As it occurs for the electron localization problem, violations of the exponential localization of electromagnetic waves propagating in random media have been reported in several physical situations. In one-dimensional random  $n$ -mer dielectric systems, where segments with  $n$  atoms are randomly inserted in a host chain, a localization–delocalization transition of electromagnetic modes takes place at some resonance frequencies due the positional correlations in the structure [24]. Microwave-guides with spatially correlated random scatters have also been shown to support transmitting bands due to non-localized modes [25]. Metamaterials have also been extensively studied as an active component in random dielectric multilayered systems [26–28]. This kind of structure exhibits scale invariant bandgaps [26]. For a 1D disordered stacks of alternating right- and left-handed layers, the introduction of metamaterials substantially suppresses Anderson localization [27]. Structures following quasi-periodic sequences can present different kinds of bandgaps as non-Bragg gaps for Thue-Morse multilayer [29] and self-similar energy spectrum in Fibonacci-like structures [30–32]. Another mechanism for the emergence of non-exponentially localized states in 1D random systems is through the hybridization of spatially separated degenerate modes [33]. Recently, the existence of these so-called necklace states has been reported by transmission measurements in random dielectric multilayers [34,35]. Necklace states are in the origin of well-defined oscillations on the fluctuations of the transmittance in one-dimensional random photonic system with resonant layers [36].

In this work, we investigate the transmission properties of electromagnetic waves propagating through 1D binary dielectric multilayered structures that follow an aperiodic and incommensurate modulation over the refractive index sequence. In order to produce an aperiodic multilayered structure, the formalism used in Ref. [7] was considered. It consists in using a sinusoidal modulation of the refractive index sequence whose phase  $\phi$  varies as a power-law,  $\phi \propto i^\nu$ , where  $i$  is the layer index. The exponent  $\nu$  controls the degree of aperiodicity in the structure. Using a transfer

matrix formalism, we compute the transmission spectrum of electromagnetic waves with frequency  $\omega$  propagating along the stratified dielectric media. We will report a non-trivial transmission spectrum that strongly depends on the aperiodicity degree. In general, the spectral transmission, averaged over the frequency band, shows a maximum at  $\nu = 1.0$  and a local minimum between  $\nu = 0.5$  and 1.0. By employing a Fourier analysis of the refractive index distribution, we will associate the main features of the spectrally averaged transmission with the correlations present in the underlying sequence of dielectric layers.

## 2. Transfer matrix formalism

The transfer matrix formalism is well suited to compute the transmission spectrum of electromagnetic waves in stratified dielectric media. We are going to describe the main lines of this formalism to the particular case of normally incident plane waves of frequency  $\omega$ . The stacking direction is along the  $z$  axis and the electric field linearly polarized  $\vec{E}(z) = E(z)e^{-ikz}\hat{x}$ , where  $k$  is the wavenumber. The relation between the amplitudes of the electric and magnetic fields at the interface located at  $z_1$  and the fields at the interface at  $z_2 = z_1 + d$ , where  $d$  is the thickness of the dielectric slab, can be expressed in transfer matrix form as

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ H_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta & iZ \sin \delta \\ i \sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2 \\ H_2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

where the phase change  $\delta = \omega nd/c$ ,  $n$  is the refractive index of the medium and  $Z = \sqrt{\mu/\epsilon}$  is the layer impedance, with  $\epsilon$  and  $\mu$  are the dielectric constant and magnetic permeability, respectively. The boundary conditions across an interface require the continuity of the parallel components of the electric and magnetic fields. The generalization of the above procedure for a stratified medium consisting of a sequence of  $N$  dielectric layers is straightforward. The fields at the first and last interfaces can be related through a product of individual transfer matrices as:

$$\begin{pmatrix} E_0 \\ H_0 \end{pmatrix} = M_1 M_2 \dots M_N \begin{pmatrix} E_N \\ H_N \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} E_N \\ H_N \end{pmatrix} \quad (2)$$

where  $M_i$  is the transfer matrix of the  $i$ th layer,  $E_0$  and  $H_0$  are the electric and magnetic field amplitudes at the first interface, and  $E_N$  and  $H_N$  are the field amplitudes at the last interface. The complex transmission coefficient of such stratified medium can be obtained by assuming that the incident beam is coming from the left ant that

Please cite this article in press as: E.M. Nascimento, et al., Suppressed transmission in aperiodically modulated multilayered dielectric structures, Photon Nanostruct: Fundam Appl (2009), doi:10.1016/j.photonics.2008.12.004



150

151 one has just the outgoing transmitted wave at the right of  
the multilayer structure. It can be expressed as

$$153 \quad t(\omega) = \frac{2/Z_i}{(m_{11} + m_{12}/Z_o)/Z_i + (m_{21} + m_{22}/Z_o)} \quad (3)$$

154 where  $m_{ij}$ 's represents the elements of the total transfer  
155 matrix  $M$ .  $Z_i$  and  $Z_o$  are related to the impedances of the  
156 input and output media. The complex transmission  
157 coefficient brings information regarding both the phase  
158 and amplitude of the transmitted wave. The phase is  
159 related to dispersion properties such as the group velocity.  
160 In what follows, we will be particularly interested  
161 in analyzing the ratio between the intensities of the  
162 outgoing and incoming waves, which is given by the  
163 transmission  $T(\omega) = (Z_i/Z_o)|t(\omega)|^2$ .

### 164 3. Model and results

165

166 We will consider multilayer structures composed of  
167 two kinds of non-absorbing dispersionless dielectric  
168 layers with thicknesses taken in such a way that  
169  $n_A d_A = n_B d_B$ . In order to produce an aperiodic multi-  
170 layered structure, we closely followed the procedure  
described in ref. [7]. The sequence of refractive indices

is taken to obey the aperiodic rule:

$$172 \quad V_j = \cos(\alpha\pi j^\nu) \rightarrow n_j = \begin{cases} n_A & \text{if } V_j \leq 0 \\ n_B & \text{if } V_j > 0 \end{cases} \quad (4)$$

173  
174 The above rule actually uses a sinusoidal function  
175 whose phase  $\phi$  varies as a power-law,  $\phi \propto j^\nu$ , where  $j$   
176 labels the layers of the stratified dielectric structure. The  
177 exponent  $\nu$  controls the degree of aperiodicity in the  
178 structure. The resulting dielectric structure is sur-  
179 rounded by vacuum. For  $\nu = 1$  and rational  $\alpha$  one  
180 has a purely periodic refractive index sequence and  
181 all electromagnetic modes shall become extended. For  
182  $\nu = 1$  and irrational  $\alpha$  the sequence becomes quasi-  
183 periodic (incommensurate) and the spectrum of propa-  
184 gating modes becomes fractal [30,31]. For  $\nu < 1$  the  
185 sequence is aperiodic with the typical wavelength of the  
186 refractive index modulation increasing as a function of  
187 the layer index. In this regime, the spectrum exhibits  
188 localized and delocalized modes. In the opposite regime  
189 of  $\nu > 1$ , the modulation wavelength decreases with the  
190 layer index and most states become localized except at  
191 specific resonances, characterizing a pseudo-random  
192 regime.

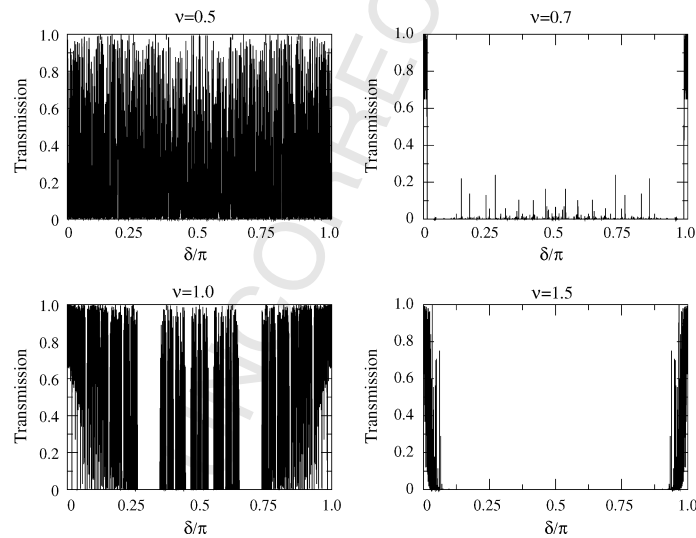


Fig. 1. Transmission spectra of multilayered structures with different values of  $\nu$  and  $N = 5 \times 10^3$  layers as a function of  $\delta = \omega d/c$  ( $nd = n_A d_A = n_B d_B$ ). For  $\nu > 1$ , the structure is pseudo-random and the spectrum has narrow transmission peaks in the vicinity of the Bragg resonances. For  $\nu < 1$ , the transmission can be widely suppressed as  $\nu$  increases. In the periodic incommensurate case ( $\nu = 1$ ) the spectrum presents a self-similar structure of gaps typical of Fibonacci dielectric sequences.

Please cite this article in press as: E.M. Nascimento, et al., Suppressed transmission in aperiodically modulated multilayered dielectric structures, Photon Nanostruct: Fundam Appl (2009), doi:10.1016/j.photonics.2008.12.004

4

E.M. Nascimento et al. / Photonics and Nanostructures – Fundamentals and Applications xxx (2009) xxx–xxx

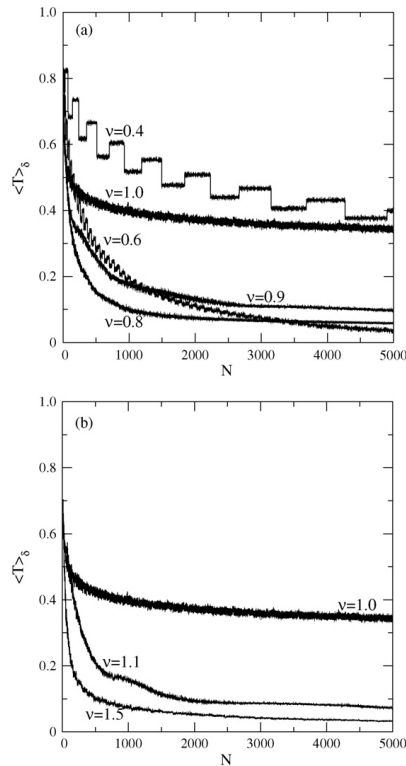


Fig. 2. Spectrally averaged transmission as a function of the number of layers  $N$  for different values of  $\nu$ . (a)  $\nu \leq 1.0$ ; (b)  $\nu \geq 1.0$ . For the periodic incommensurate case  $\nu = 1$ , the transmission displays a very weak size dependence. Notice that for smaller values of  $\nu$  (roughly in the range  $0.6 < \nu < 0.8$ ), the spectral average transmission of thick structures can become as small as that presented by pseudo-random structures with  $\nu > 1$ .

191

192

193

194

195

196

197

198

199

200

201

202

In our calculations we used  $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$  (the golden mean),  $n_A = 1.5$  and  $n_B = 2.5$ . Fig. 1 shows the transmission spectra of multilayered structures with different  $\nu$  values and  $N = 5 \times 10^3$ . As we used layers with the same optical length, the mode frequency is proportional to the phase change  $\delta$  within each layer. For  $\nu = 0.5$ , the spectrum is dense with a large number of transmitting frequencies. This feature is due to the fact that the number of interfaces between distinct dielectric slabs is small in this regime. For  $\nu = 1.0$ , well-defined bandgaps are present that follow a self-

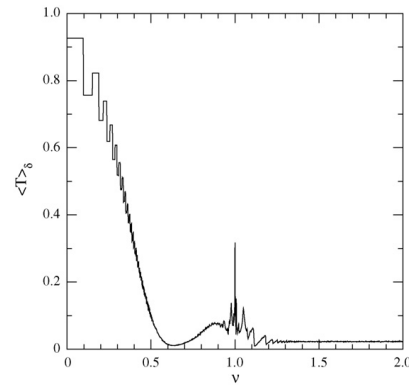


Fig. 3. Spectrally averaged transmission as a function of  $\nu$  for a fixed sample thickness  $N = 10^4$ . The spectrally averaged transmission shows a local maximum at periodic incommensurate case  $\nu = 1.0$  and a local minimum in the regime of  $\nu < 1$ . The plateau reached for  $\nu > 1$  is a characteristic of the pseudo-random regime.

202

similar pattern. This spectrum is typical of quasi-periodic structures with incommensurate sequences. For  $\nu = 1.5$ , the sequence presents a pseudo-random character and most of the modes become localized, except in the vicinity of the Bragg resonances. An interesting aspect is observed when we increase  $\nu$  from  $\nu = 0$  (uniform sequence) to  $\nu = 1$  (quasi-periodic sequence). The number of transmitting modes changes non-monotonically in this region. This feature is represented by the case of  $\nu = 0.7$  which exhibits just very few transmitting modes.

203

204

205

206

207

208

209

210

211

212

213

The above non-monotonic behavior of the transmission spectrum is described more quantitatively in Fig. 2, which shows the spectrally averaged transmission  $\langle T \rangle_\delta = (1/\pi) \int_0^\pi T(\delta) d\delta$  as a function of sample thickness  $N$  for different values of  $\nu$ . The spectrally averaged transmission typically decreases as the number of layers increases. However, the size dependence is rather weak for the quasi-periodic case of  $\nu = 1$ , specially in the regime of large  $N$ . For  $\nu > 1$ , the decrease in the average transmission with the system size becomes faster, a feature associated with the pseudo-random character of the resulting sequence. The average transmission becomes readily  $\nu$ -independent when  $\nu$  further deviates from unit. On the other hand, in the regime of  $\nu < 1$ , the size dependence of the spectrally averaged transmission initially becomes stronger as  $\nu$  increases, but reverses this trend as the quasi-periodic regime is approached.

214

215

216

217

218

219

220

221

222

223

224

225

226

227

228

229

230

231

Please cite this article in press as: E.M. Nascimento, et al., Suppressed transmission in aperiodically modulated multilayered dielectric structures, Photon Nanostruct: Fundam Appl (2009), doi:10.1016/j.photonics.2008.12.004

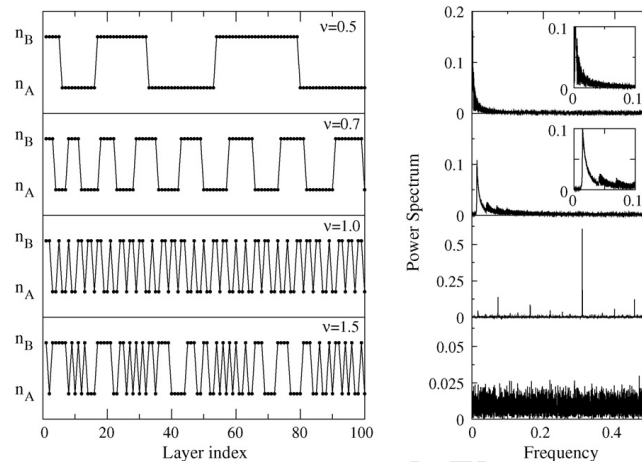


Fig. 4. Left panel: Typical sequences of refractive indices generated by the aperiodic modulated function. Right panel: the corresponding Fourier spectral densities of each refractive index sequence. For small values of  $\nu$ , the spectral density displays a narrow peak around the average frequency of the sequence modulation. At  $\nu = 1$  the structure follows a Fibonacci sequence which has a self-similar spectral density. For  $\nu = 1.5$  the sequence is pseudo-random with a white-noise spectrum.

231

232

A complementary analysis of the influence of the aperiodicity exponent  $\nu$  on the spectrally averaged transmission can be performed by plotting it as a function of  $\nu$  for a fixed sample thickness, as shown in Fig. 3 where we considered  $N = 10^4$  layers. The averaged transmission depicts a peak at  $\nu = 1$  with strong fluctuations in the vicinity of this quasi-periodicity condition. For large values of  $\nu$ , the transmission is small, presenting weak fluctuations around a constant value. In the weakly aperiodic regime, it displays a well-defined minimum, signaling the crossover from the behavior of a uniform and a quasi-periodic structure.

245

246

247

248

249

250

251

252

253

254

255

256

257

The overall dependence of the averaged transmission on the aperiodicity exponent  $\nu$  can be directly correlated to the spectral decomposition of the underlying sequence of layers. In Fig. 4, we plot typical sequences of refractive indices together with their Fourier spectral densities. Notice that, for small  $\nu$  the Fourier spectrum displays a narrow peak at small frequencies, which reflects the long average wavelength of the refractive indices modulation. This peak becomes slightly broader as the number of layer interfaces increases. In the incommensurate case  $\nu = 1$ , the spectral density of the sequence assumes a self-similar pattern of delta-like peaks with a predominant frequency equals to  $f = \alpha/2$ ,

257

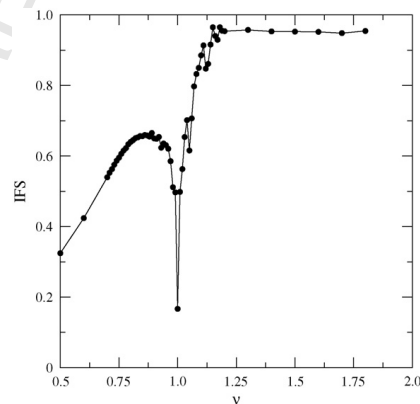


Fig. 5. Integrated Fourier spectrum (IFS) as a function of the aperiodicity exponent  $\nu$ . The pronounced minimum at  $\nu = 1$  signals the strong correlations presented by the underlying Fibonacci sequence of layers. The plateau for  $\nu > 1$  reflects the uncorrelated nature of the dielectric layers sequence in this regime. The maximum at  $\nu < 1$  is a consequence of opposite effects played by backscattering at interfaces and the emergence of resonant modes (see text).

Please cite this article in press as: E.M. Nascimento, et al., Suppressed transmission in aperiodically modulated multilayered dielectric structures, Photon Nanostruct: Fundam Appl (2009), doi:10.1016/j.photonics.2008.12.004

6

*E.M. Nascimento et al./Photonics and Nanostructures – Fundamentals and Applications xxx (2009) xxx–xxx*

257

258 typical of a quasi-periodic Fibonacci sequence. In the  
259 regime of  $\nu > 1$ , the refractive index sequence  
260 resembles a fairly uncorrelated white-noise and the  
261 Fourier spectral density has no typical frequency.

262 The degree of correlation in the refractive index  
263 sequence can be quantified by computing the Integrated  
264 Fourier Spectrum (IFS). A noisy-like sequence shall  
265 have a large IFS while more regular structures will  
266 display a narrower Fourier spectrum and consequently  
267 a smaller IFS. The IFS of the refractive index sequences  
268 as a function of the aperiodicity exponent  $\nu$  is reported in  
269 Fig. 5. It exhibits a plateau at large values of  $\nu$  pointing  
270 the irrelevance of the actual value of the aperiodicity  
271 exponent in the strongly pseudo-random regime. The  
272 deep minimum at  $\nu = 1$  is associated with the quasi-  
273 periodic structure of the Fibonacci sequence for this  
274 particular case. In the weakly aperiodic regime, the IFS  
275 passes through a maximum as a result of the opposite  
276 roles played by the own inclusion of interfaces, which  
277 produces backscattering, and the approach to quasi-  
278 periodicity, which promotes the emergence of resonant  
279 modes. Notice that the overall behavior of the  
280 spectrally averaged transmission, presented in Fig. 3,  
281 indeed captures the essential features displayed by the  
282 IFS of the underlying structure. A strongly correlated  
283 sequence displays a narrow Fourier spectrum, thus  
284 leading to a small IFS and to a large averaged  
285 transmission.

#### 4. Summary and conclusions

286

287 In this work, we investigated the transmission  
288 properties of 1D binary dielectric multilayered  
289 structures presenting an aperiodic modulation over  
290 the refractive index sequence. The aperiodicity degree  
291 was governed by a power-law exponent  $\nu$  which  
292 controls the phase of a sinusoidal modulation. We  
293 considered the particular case for which the periodic  
294 case  $\nu = 1$  corresponds to an incommensurate structure  
295 that resembles a Fibonacci sequence of refractive  
296 indices. Using a transfer matrix formalism, we  
297 computed the transmission spectrum along such  
298 stratified dielectric media. For  $\nu > 1$ , the resulting  
299 sequence becomes pseudo-random. In this regime, the  
300 Anderson localization of the electromagnetic modes  
301 leads to a wide gap in the transmission spectrum with  
302 narrow transmission bands centered at the Bragg  
303 resonances. In the regime of  $\nu < 1$ , we reported a non-  
304 monotonic dependence of the spectrally averaged  
305 transmission on the aperiodicity exponent  $\alpha$ . Such  
306 unconventional behavior was associated with two  
307 opposite effects that take place in the presently

308 investigated aperiodic structure. One effect is related  
309 to the backscattering on the interfaces between distinct  
310 dielectric slabs. This phenomenon leads to a reduction  
311 in the transmission when the number of interfaces starts  
312 to increase. However, when the number of interfaces  
313 becomes large enough, the quasi-periodic condition is  
314 approached which stabilizes resonant transmitting  
315 modes. As a consequence, the averaged transmission  
316 passes through a minimum which is smaller than the  
317 transmission in the strongly pseudo-random regime. A  
318 Fourier analysis showed that the trends presented by the  
319 transmission spectrum are directly associated with the  
320 correlations exhibited by the own refractive index  
321 sequence. Our results suggest that aperiodically  
322 modulated dielectric structures can be explored in  
323 the development of wide-band filters which can display  
324 an spectrally averaged transmission even smaller than  
325 the one presented by random structures.

#### Acknowledgments

326 We would like to acknowledge partial financial  
327 support from CAPES, CNPq, CNPq-Rede Nanobioes-  
328 truturas and FINEP-CTInfra (Brazilian Research  
329 Agencies) as well as from FAPEAL (Alagoas State  
330 Research Agency).  
331

#### References

- 332  
333  
334  
335  
336  
337  
338  
339  
340  
341  
342  
343  
344  
345  
346  
347  
348  
349  
350  
351  
352  
353  
354  
355  
356  
357  
358  
359
- [1] P.W. Anderson, Phys. Rev. 109 (1958) 1492.
  - [2] D.H. Dunlap, H.-L. Wu, P.W. Phillips, Phys. Rev. Lett. 65 (1990) 88.
  - [3] P.W. Phillips, H.-L. Wu, Science 252 (1991) 1805.
  - [4] F.A.B.F. de Moura, M.L. Lyra, Phys. Rev. Lett. 81 (1998) 3735; F.A.B.F. de Moura, M.L. Lyra, Phys. Rev. Lett. 84 (2000) 199.
  - [5] F.M. Izrailev, A.A. Krokhin, Phys. Rev. Lett. 82 (1999) 4062.
  - [6] F. Dominguez-Adame, V.A. Malyshev, F.A.B.F. de Moura, M.L. Lyra, Phys. Rev. Lett. 91 (2003) 197402.
  - [7] S. Das Sarma, S. He, X.C. Xie, Phys. Rev. Lett. 61 (1988) 2144; S. Das Sarma, S. He, X.C. Xie, Phys. Rev. B 41 (1990) 5544.
  - [8] D.R. Grempel, S. Fishman, R.E. Prange, Phys. Rev. Lett. 49 (1982) 833.
  - [9] M. Griniasty, S. Fishman, Phys. Rev. Lett. 60 (1988) 1334.
  - [10] P. Dean, Proc. Phys. Soc. London 84 (1964) 727.
  - [11] H. Matsuda, K. Ishii, Suppl. Prog. Theor. Phys. 45 (1970) 56.
  - [12] P.K. Datta, K. Kundu, J. Phys.: Condens. Matter 6 (1994) 4465.
  - [13] F. Dominguez-Adame, E. Macià, A. Sánchez, Phys. Rev. B 48 (1993) 6054.
  - [14] F.A.B.F. de Moura, M.D. Coutinho-Filho, E.P. Raposo, M.L. Lyra, Phys. Rev. B 68 (2003) 012202.
  - [15] T.A.L. Ziman, Phys. Rev. Lett. 49 (1982) 337.
  - [16] G. Theodorou, J. Phys. C 15 (1982) L1315.
  - [17] S.N. Evangelou, D.E. Katsanos, Phys. Lett. A 164 (1992) 456.
  - [18] F.A.B.F. de Moura, M.D. Coutinho-Filho, E.P. Raposo, M.L. Lyra, Phys. Rev. B 66 (2002) 014418.
  - [19] F.A.B.F. de Moura, Eur. Phys. J. B 58 (2007) 389.

Please cite this article in press as: E.M. Nascimento, et al., Suppressed transmission in aperiodically modulated multilayered dielectric structures, Photon Nanostruct: Fundam Appl (2009), doi:10.1016/j.photonics.2008.12.004

- |     |      |  |     |
|-----|------|--|-----|
| 360 | [20] | D.S. Wiersma, P. Bartolini, A. Lagendijk, R. Righini, <i>Nature</i> 390 (1997) 671.  | 375 |
| 361 |      |  | 376 |
| 362 | [21] | M. Storz, P. Gross, C.M. Aegerter, G. Maret, <i>Phys. Rev. Lett.</i> 96 (2006) 063904.   | 377 |
| 363 |      |  | 378 |
| 364 | [22] | T. Schwartz, G. Bartal, S. Fishman, M. Segev, <i>Nature</i> 446 (2007) 52.   | 379 |
| 365 | [23] | E.M. Nascimento, F.A.B.F. de Moura, M.L. Lyra, <i>Phys. Rev. B</i> 76 (2007) 115120.   | 380 |
| 366 |      |  | 381 |
| 367 | [24] | Z. Zhao, F. Gao, R.W. Peng, L.S. Cao, D. Li, Z. Wang, X.P. Hao, M. Wang, C. Ferrari, <i>Phys. Rev. B</i> 75 (2007) 165117.                                       | 382 |
| 368 |      |  | 383 |
| 369 | [25] | U. Kuhl, F.M. Izrailev, A. Krokhin, H.J. Stöckmann, <i>Appl. Phys. Lett.</i> 77 (2000) 633.  | 384 |
| 370 |      |  | 385 |
| 371 | [26] | J. Li, L. Zhou, C.T. Chan, P. Sheng, <i>Phys. Rev. Lett.</i> 90 (2003) 083901.   | 386 |
| 372 |      |  | 387 |
| 373 | [27] | A.A. Asatryan, L.C. Botten, M.A. Byrne, V.D. Freilikher, S.A. Gredeskul, I.V. Shadrivov, R.C. McPhedran, Y.S. Kivshar, <i>Phys. Rev. Lett.</i> 99 (2007) 193902. | 388 |
| 374 |      |  | 389 |
| 375 |      |  | 390 |
|     | [28] | E.M. Nascimento, F.A.B.F. de Moura, M.L. Lyra, <i>Opt. Exp.</i> 16 (2008) 6860.  | 391 |
|     | [29] | X. Jiang, Y. Zhang, S. Feng, K.C. Huang, Y. Yi, J.D. Joannopoulos, <i>Appl. Phys. Lett.</i> 86 (2005) 201110.  |     |
|     | [30] | G. Gumbs, M.K. Ali, <i>Phys. Rev. Lett.</i> 60 (1988) 1081.  |     |
|     | [31] | W. Gellermann, M. Kohmoto, B. Sutherland, P.C. Taylor, <i>Phys. Rev. Lett.</i> 72 (1994) 633.  |     |
|     | [32] | R.W. Peng, M. Wang, A. Hu, S.S. Jiang, G.J. Jin, D. Feng, <i>Phys. Rev. B</i> 57 (1998) 1544.  |     |
|     | [33] | J.B. Pendry, <i>Adv. Phys.</i> 43 (1994) 461.  |     |
|     | [34] | J. Bertolotti, S. Gottardo, D.S. Wiersma, M. Ghulinyan, L. Pavesi, <i>Phys. Rev. Lett.</i> 94 (2005) 113903.   |     |
|     | [35] | J. Bertolotti, M. Galli, R. Sapienza, M. Ghulinyan, S. Gottardo, L.C. Andreani, L. Pavesi, D.S. Wiersma, <i>Phys. Rev. E</i> 74 (2006) 035602(R).                |     |
|     | [36] | M. Ghulinyan, <i>Phys. Rev. Lett.</i> 99 (2007) 063905.  |     |

Please cite this article in press as: E.M. Nascimento, et al., Suppressed transmission in aperiodically modulated multilayered dielectric structures, *Photon Nanostruct: Fundam Appl* (2009), doi:10.1016/j.photonics.2008.12.004

## Finite-size scaling and disorder effect on the transmissivity of multilayered structures with metamaterials

E. M. Nascimento, F. A. B. F. de Moura and M. L. Lyra

*Instituto de Física, Universidade Federal de Alagoas, 57072-970 Maceió, Alagoas, Brazil*  
[marcelo@if.ufal.br](mailto:marcelo@if.ufal.br)

**Abstract:** We investigate the influence of metamaterials on the scaling laws of the transmission on multilayered structures composed of random sequences of ordinary dielectric and metamaterial layers. The spectrally averaged transmission in a frequency range around the fully transparent resonant mode is shown to decay with the total number of layers as  $1/N$ . Such thickness dependence is faster than the  $1/N^{1/2}$  decay recently reported to take place in random sequences of ordinary dielectric slabs. The interplay of strong localization and the emergence of resonant modes within the gap leads to a non-monotonous disorder dependence of the transmission that reaches a minimum at an intermediate disorder strength.

© 2008 Optical Society of America

OCIS codes: (230.4170) Multilayers; (160.3918) Metamaterials; (120.7000) Transmission

### References and links

1. V. G. Veselago, "The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of permittivity and permeability," *Sov. Phys. Usp.* **10**, 509-514 (1968).
2. J. B. Pendry, A. J. Holden, W. J. Stewart and I. Youngs, "Extremely low frequency plasmons in metallic mesostructures," *Phys. Rev. Lett.* **76**, 4773 (1996).
3. P. Kolinko and D. R. Smith, "Numerical study of electromagnetic waves interacting with negative index materials," *Opt. Express* **11**, 640 (2003).
4. K. Guven, M. D. Caliskan and E. Ozbay, "Experimental observation of left-handed transmission in a bilayer metamaterial under normal-to-plane propagation," *Opt. Express* **30**, 8685 (2006).
5. Z. Tang, R. Peng, D. Fan, S. Wen, H. Zhang and L. Qian, "Absolute left-handed behaviors in a triangular elliptical-rod photonic crystal," *Opt. Express* **13**, 9796 (2005).
6. D. R. Smith and N. Kroll, "Negative refractive index in left-handed materials," *Phys. Rev. Lett.* **84**, 4184 (2000).
7. P. Markós and C. M. Soukoulis, "Transmission properties and effective electromagnetic parameters of double negative metamaterials," *Opt. Express* **11**, 649 (2003).
8. J. B. Pendry, "Negative refraction makes a perfect lens," *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3966 (2000)
9. J. A. Kong, B.-I. Wu and Y. Zhang, "A unique lateral displacement of a gaussian beam transmitted through a slab with a negative permittivity and permeability," *Microwave Opt. Technol. Lett.* **33**, 136-139 (2002).
10. E. Yablonovitch, "Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics," *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2059 (1987)
11. Liang Wu, Sailing He and Linfang Shen, "Band structure for a one-dimensional photonic crystal containing left-handed materials," *Phys. Rev. B* **67**, 235103 (2003)
12. Jensen Li, Lei Zhou, C. T. Chan and P. Sheng, "Photonic band gap from a stack of positive and negative index materials," *Phys. Rev. Lett.* **90**, 083901 (2003)
13. J. A. Monsoriu, R. A. Depine, M. L. Martínez-Ricci and E. Silvestre, "Interaction between non-Bragg band gaps in 1D metamaterials photonic crystals," *Opt. Express* **14**, 12958 (2006).
14. Y. Yuan, L. Ran, J. Huangfu, H. Chen, L. Shen and J. Au Kong, "Experimental verification of zero order bandgap in a layered stack of left-handed and right-handed materials," *Opt. Express* **14**, 2220 (2006)
15. Mher Ghulinyan, "Formation of optimal-order necklace modes in one-dimensional random photonic superlattices," *Phys. Rev. A* **76**, 013822 (2007)

#94369 - \$15.00 USD Received 28 Mar 2008; revised 25 Apr 2008; accepted 25 Apr 2008; published 28 Apr 2008

- 
16. Mher Ghulinyan, "Periodic oscillations in transmission decay of Anderson localized one-dimensional dielectric system," *Phys. Rev. Lett.* **99**, 063905 (2007)
  17. J. Bertolotti, S. Gottardo, D. S. Wiersma, M. Ghulinyan and L. Pavesi, "Optical necklace states in Anderson localized 1D systems," *Phys. Rev. Lett.* **94**, 113903 (2005)
  18. E. M. Nascimento, F. A. B. F. de Moura and M. L. Lyra, "Scaling laws for the transmission of random binary dielectric multilayered structures," *Phys. Rev. B* **76**, 115120 (2007)
  19. J. Bertolotti, M. Galli, R. Sapienza, M. Ghulinyan, S. Gottardo, L. C. Andreani, L. Pavesi and D. S. Wiersma, "Wave transport in random systems: Multiple resonance character of necklace modes and their statistical behavior," *Phys. Rev. E* **74** 035602(R) (2006)
  20. M. Titov and H. Schomerus, "Nonuniversality of Anderson Localization in Short-Range Correlated Disorder," *Phys. Rev. Lett.* **95** 126602 (2005)
  21. A. A. Asatryan, L. C. Botten, M. A. Byrne, V. D. Freilikher, S. A. Gredeksul, I. V. Shadrivov, R. C. McPhedran and Y. S. Kivsharet, "Suppression of Anderson localization in disordered metamaterials," *Phys. Rev. Lett.* **99** 193902 (2007)
- 

## 1. Introduction

Metamaterials are optical structures designed to present both negative permittivity and negative permeability. This characteristic leads to unusual electromagnetic phenomena, for instance,  $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$  lies along the direction of  $-\mathbf{k}$  for propagating plane waves. A theoretical study of metamaterials was firstly suggested a half-century ago by Veselago [1]. However, the more recent proposal of Pendry [2] for the development of such materials stimulated a wealth of theoretical and experimental researches on this subject [3, 4, 5, 6, 7].

Novel and fascinating phenomena have been shown to emerge in structures that include metamaterials. Pendry proved that a slab of negative refractive index material has the power to focus all Fourier components of a 2D image. He named this device "superlens"[8]. This structure also provides a negative lateral displacement of an obliquely incident Gaussian beam[9].

Multilayer structures have been attracting a widespread interest because of their deep implications on both fundamental and technological aspects. A periodically modulated dielectric function is the simplest way to construct a one-dimensional photonic crystal (PC) [10]. For a PC containing metamaterials, some unusual phenomena such as spurious modes with complex frequencies, discrete modes and photon tunneling modes are observed in the band structure [11]. The mixing of metamaterial and ordinary dielectric slabs creates new features such as the rising of a non-Bragg band-gap called *zero- $\bar{n}$  gap* [12, 13], which emerges naturally when the volume average of the effective refractive index equals to zero. Such gap has a special characteristic: it remains unchanged when the lattice constant varies. Experimental verifications of *zero- $\bar{n}$  gap* were made using *double-S shaped* metamaterials [14].

In 1D disordered multilayered structures, multiple incoherent superposition of waves reflected by the layers interfaces give rises to the exponential localization of most of the electromagnetic modes within the structure. A few resonant necklace modes may remain extended[15, 16, 19]. This phenomenon is similar to the electronic eigenfunction localization in disordered atomic chains and is usually termed as the Anderson localization of light. In a recent paper [18], we investigated a 1D multilayered structure composed of a random sequence of  $N$  ordinary dielectric slabs with refraction indices satisfying the Bragg condition. An experimental observation of resonant transport in similar structures was reported by Bertolotti *et al* [19]. We showed that the half-wavelength mode is insensitive to disorder and fully transparent. The spectrally averaged transmission in a frequency range around this mode decays as  $1/N^{1/2}$  and the localization length diverges quadratically as this resonant mode is approached. In the vicinity of the quarter-wavelength mode, the localization length diverges logarithmically and the frequency averaged transmission exhibits a stretched exponential dependence on the total thickness. These scaling laws were discussed in the context of the Anderson localization of electrons in chains with off-diagonal and correlated disorder. It was recently demonstrated theo-

#94369 - \$15.00 USD Received 28 Mar 2008; revised 25 Apr 2008; accepted 25 Apr 2008; published 28 Apr 2008

retically that correlations may indeed strongly modify the transmission properties of electronic wires and waveguides in small energy windows [20].

New features have been also reported when metamaterials are introduced in disordered optical system. Asatryan *et al.* [21] studied wave propagation in mixed 1D disordered stacks of alternating right- and left-handed layers and revealed that the introduction of metamaterials substantially suppresses the Anderson localization. At long wavelengths, the localization length in mixed stacks is several orders of magnitude larger than in normal structures.

In this work, we study the influence of metamaterials on the scaling laws for the transmission of an electromagnetic plane wave incident normally on a multilayer random structure. We will show that, for layers do not satisfying the Bragg condition, the transmission peak around the fully transmitting mode is quite sensitive to disorder. The spectrally averaged transmission develops a faster decay as a function of the total number of layers when compared with random structures composed just of ordinary dielectric slabs. The scaling behavior of the localization length remains unchanged. The interplay between the faster finite-size scaling and the emergence of resonance necklace modes within the gap leads to a non-monotonous dependence of the transmission as a function of the disorder strength.

## 2. Model and formalism

For a monochromatic plane wave of angular frequency  $\omega$  propagating along the  $z$  axis direction, the electric and magnetic fields at the interfaces of a dielectric slab of thickness  $d$  can be numerically obtained by a transfer matrix formalism. Assuming a normally incident wave, linearly polarized in such a way that the electric field amplitude can be written as  $\vec{E}(z) = E(z)\hat{x}$ , the relation between the electric and magnetic field at the interface placed at  $z = z_1$  and the fields at the interface placed at  $z = z_1 + d$  can be expressed in transfer matrix form as

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = M_2 \begin{pmatrix} E_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta & \frac{i}{p} \sin \delta \\ ip \sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2 \\ B_2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

where the phase change  $\delta = \pm |n| \omega d / c$  [the choice of sign corresponding to right-handed (RH) and left-handed (LH) slabs, respectively],  $|n|$  is the absolute refractive index of the medium, and  $p = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}$ , where  $\epsilon$  and  $\mu$  are the dielectric constant and magnetic permeability, respectively. For a stratified medium consisting of a sequence of  $N$  dielectric layers, the boundary conditions across the interface require the continuity of the parallel components of the fields. This relation can be written as a product of individual transfer matrices as

$$\begin{pmatrix} E_0 \\ B_0 \end{pmatrix} = M_1 M_2 \dots M_N \begin{pmatrix} E_N \\ B_N \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} E_N \\ B_N \end{pmatrix} \quad (2)$$

where  $M_i$  is the transfer matrix of the  $i$ th layer,  $E_0$  and  $B_0$  are the electric and magnetic field amplitudes at the first interface, and  $E_N$  and  $B_N$  the field amplitudes at the last interface. Assuming that the incident wave is coming from the left with electric field amplitude normalized to a unitary value and also that one has only the outgoing transmitted wave at the right of the sample, the complex transmission coefficient of such sample can be written as

$$t(\omega) = \frac{2p_i}{(m_{11} + m_{12}p_o)p_i + (m_{21} + m_{22}p_o)} \quad (3)$$

where  $m_{ij}$ 's are the elements of the total transfer matrix  $M$ .  $p_i$  and  $p_o$  are related to the input and output media. All quantities computed here are related with the ratio between the amplitudes of the outgoing and incoming waves, which given the transmission  $T(\omega) = \frac{p_o}{p_i} |t(\omega)|^2$ .

#94369 - \$15.00 USD Received 28 Mar 2008; revised 25 Apr 2008; accepted 25 Apr 2008; published 28 Apr 2008



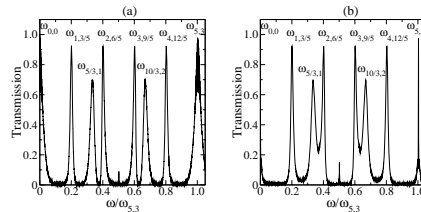


Fig. 1. Transmission spectrum of (a) an ordinary multilayered structure (composed uniquely of ordinary dielectric layers) and (b) a mixed one (composed of metamaterial and ordinary dielectric layers) for the particular case of  $|n_a d_a| = \frac{5}{3}|n_b d_b|$ . Both cases have a similar transmission peaks pattern. Peaks with finite transmission occur whenever a multiple of the mode half-wavelength equals the optical length of just one constituent layer. At the vicinity of the fully transparent resonant modes  $\omega_{0,0}$  and  $\omega_{5,3}$ , the transmission band width is much narrower for the mixed case indicating a stronger finite-size scaling of these transmission peaks.

### 3. Results

For the numerical analysis, we assume non-absorbing dispersionless layers. The multilayer structure is composed of a random sequence of two distinct dielectric slabs, namely, an ordinary dielectric  $A$  and a left-handed dielectric  $B$ . The refraction indices and thicknesses were taken in such a way that the optical lengths on the slabs  $A$  and  $B$  were  $|n_a d_a| = \frac{5}{3}|n_b d_b|$ . If the slabs were chosen to satisfy the Bragg condition  $|n_a d_a| = |n_b d_b|$ , we would have the emergence of a *zero- $\bar{n}$  gap*. This kind of gap is insensitive to disorder [?]. This condition taken on a dispersionless multilayered structure creates a large photonic band-gap that covers the whole spectrum, except for singular modes where the phase change  $\delta = \omega n d / c = i\pi$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ). This scenario does not support transmitting bands in finite-size structures. The disorder was implemented assuming that the  $i$ -th layer of the sequence has the same probability of being type  $A$  or  $B$ . In order to be able to explicitly show the direct influence of the metamaterial slabs, all quantities were obtained both for a mixed structure (consisting of metamaterials and ordinary dielectric layers) as well as for an ordinary structure (consisting of only ordinary dielectric layers). In both cases, we assumed the same absolute values of refraction indices and thicknesses.

The first quantity analyzed was the transmission spectrum. Fig. 1 represents an average over  $10^3$  realizations of disorder in a structure with  $N = 200$  layers. The plots are related to the ordinary structure Fig. 1(a) and the mixed structure containing a metamaterial Fig. 1(b). We observe the same pattern of transmission peaks irrespective to the presence or not of the metamaterial. These resonant modes occur when multiple integers of the half-wavelength equal the optical length of one of the constituent layers. Under this condition, the electromagnetic wave is not scattered by such layer, independently of the refraction index sign. We labeled the resonance frequencies as  $\omega_{i,j}$ , where  $i$  and  $j$  are associated with the number of half-wavelength fitting in the optical length of each layer. The index  $i$  is related to the larger optical length layer and  $j$  is related to the smaller one. If  $i$  and  $j$  are both integers, the mode becomes fully transparent. Formally, it reflects the fact that all matrices in the product (2) turn out to be  $\pm I$ , where  $I$  is the identity operator. Other resonant modes occur when just one of the indices is integer. In this case, only the matrices associated with the layers that fit integer numbers of half-wavelength become  $\pm I$ . In this case, the system behaves like a single slab composed of the other material.

An important feature is observed in the transmission spectrum around the fully transparent

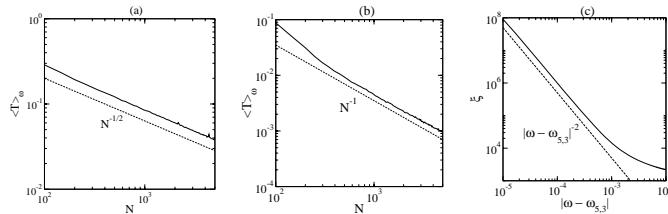


Fig. 2. (a) Spectral average of the transmission versus the number of layers  $N$  in a frequency range around the fully resonant mode of an ordinary structure. The transmission decays as  $1/N^{1/2}$ . (b) Same as before for a structure composed of ordinary and metamaterial layers. In this case, the finite-size dependence is stronger, with the transmission decaying asymptotically as  $1/N$ . (c) Localization length near the resonant mode  $\omega_{5,3}$  of a mixed structure containing  $N = 10^3$  layers. The quadratic divergence reproduces the same scaling law found in purely ordinary structures.

modes  $\omega_{0,0}$  and  $\omega_{5,3}$ . In these frequency regions, the transmission band width is much narrower for the mixed structure containing the metamaterial. In order to investigate more accurately this fact, we compute the spectral average of the transmission in the frequency range around these peaks, as shown in Fig. 2(a-b). The result represents an average over  $10^2$  realizations of disorder. We compare the finite-size scaling behavior for the ordinary [Fig. 2(a)] and mixed [Fig. 2(b)] multilayer structures. The spectrally averaged transmission for the purely ordinary case decays as  $1/N^{1/2}$ . The same exponent was found in Ref. [18] where the layer parameters satisfied the Bragg condition. We found a new scaling law when one of the layers is composed of a metamaterial. In this case, the averaged transmission has a stronger dependence on the total number of layers, decaying asymptotically as  $1/N$ . Another important quantity to characterize the Anderson localization of light in disordered dielectric structures is the localization length ( $\xi$ ), considered as the inverse of the Lyapunov exponent [ $\xi = 1/\Lambda = -\lim_{N \rightarrow \infty} (N/\ln T)$ ]. Fig. 2(c) shows an average over 10 realizations of disorder, computed in the vicinity of  $\omega_{5,3}$  mode. We observe the localization length diverging quadratically as one approaches the resonance. It reproduces the same scaling law previously reported for the ordinary case [18].

The interplay of the strong finite-size decay of the transmission and the stabilization of resonance necklace modes by disorder [15, 16, 19] suggests that the influence of disorder on the transmission properties may show new features in the presence of metamaterials. In order to explore this point, we investigate the spectral average of the transmission as a function of the disorder strength. Starting with an initial periodic structure of alternating  $A$  and  $B$  layers, the disorder strength was controlled by introducing the probability  $q$  of the  $i$ th layer to be replaced by the other species. For  $q = 0$ , one retains the periodic sequence, while the  $q = 1/2$  limit recovers the uncorrelated fully disordered sequence. Our results are shown in Fig. 3 for  $N = 10^2$  layers, averaged over  $5 \times 10^3$  disorder configurations and within a spectral range around the  $\omega_{5,3}$  mode. ‘‘O’’ labels the ordinary case and ‘‘M’’ corresponds to the mixed case.

The most prominent disorder effect is to promote the Anderson localization and, consequently, to reduce the transmission band. This phenomenon is due to the multiple incoherent superposition of waves scattered at the layers interfaces. This feature is clearly observed for the purely ordinary structure (see Fig. 3) on which the spectral average of the transmission decreases monotonically as the disorder strength increases. A similar trend is observed for the mixed structure in the weak disorder limit. However, for such mixed structure, the spectrally

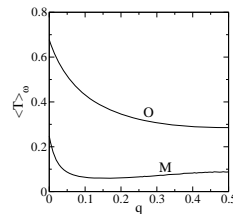


Fig. 3. Spectral and disorder averaged transmission in the vicinity of the fully transparent mode as a function of the disorder strength  $q$ . Average was performed over  $5 \times 10^5$  disorder configurations in structures containing  $10^2$  layers. The mixed case (M) shows a minimum transmission at a finite disorder strength. Since the structure containing a metamaterial is more sensitive to disorder than the ordinary structure, it exhibits a smaller average transmission than the purely ordinary (O) structure

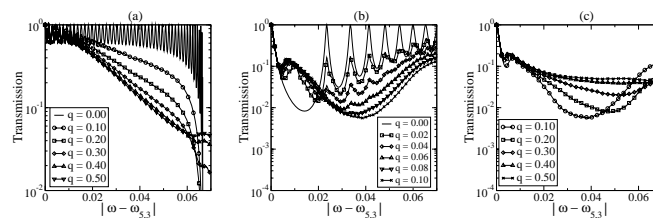


Fig. 4. Transmission spectra in the vicinity of the  $\omega_{s,3}$  mode for different values of the disorder strength. We considered structures with  $N = 10^2$  layers and averaged over  $10^5$  realizations of disorder. Figure (a) shows the spectra of ordinary structures. In this case, the transmission monotonously decreases with the disorder strength. Figure (b) shows the weak disorder region of a mixed structure, where the predominant effect is the strong Anderson localization which leads to a faster decrease of the transmission as the disorder strength is increased. In the strong disorder region (c), the transmission of a mixed structure is enhanced by increasing disorder strengths as the number of resonant necklace modes also increases.

averaged transmission presents a minimum value around  $q = 0.15$ . This unexpected behavior is related to a secondary disorder effect, which becomes more prominent in the mixed structure. Disorder also promotes the emergence of a few resonance necklace modes that may lead to a small transmission in frequency gaps. Such secondary effect is hidden by the slow development of the gap in ordinary structures, as shown in Fig. 4(a). In the mixed structure containing a metamaterial, the gap develops rather quickly due to the stronger finite-size scaling dependence of the average transmission. This leads to the strong decay of the transmission in the weak disorder regime reported in Fig. 4(b). At weak disorder, where the Anderson localization is predominant, the band structure of the periodic case ( $q = 0$ ) gives place to a wide low-transmission frequency range. The contribution of the resonant necklace states to the transmission thus becomes predominant in the high-disorder regime. Once these modes become more frequent at strong disorder, increasing disorder promotes an enhancement of the light transmission in the spectral range around the fully transparent mode, as seen in Fig. 4(c).

#94369 - \$15.00 USD Received 28 Mar 2008; revised 25 Apr 2008; accepted 25 Apr 2008; published 28 Apr 2008

Finally, we would like to stress that the narrow transmission peak in the close vicinity of the fully transparent mode is quite insensitive to disorder in the mixed structure, as can be seen in Fig.4(b-c). Actually, this peak resembles the singular frequency points of mixed structures with *zero- $\bar{n}$*  [12]. In finite structures, the singularity is replaced by a narrow peak whose width is inversely proportional to the total number of layers, which is consistent with our previous finding of a  $1/N$  scaling law for the spectrally averaged transmission.

#### 4. Summary and conclusions

In this work, we reported that the inclusion of metamaterials on the composition of a random binary multilayered structure changes the finite-size scaling law for the transmission in the frequency range around the fully transparent mode. The spectrally averaged transmission decays as  $1/N$  which is faster than the scaling-law obtained for ordinary structures. In spite of this, the localization length obeys the ordinary quadratic scaling-law as the frequency approaches the resonance mode. The faster finite-size scaling and the emergence of a few transmission necklace modes inside the band-gap at the strong disorder regime promote a non-monotonous disorder dependence of the transmission in the frequency range around the fully transparent mode. This new feature is in contrast with the usual Anderson localization phenomenon that implies in a decreasing transmission as a function of the disorder strength. In structures containing metamaterials there is a characteristic disorder strength for which the system shows a minimum on the spectrally averaged transmission. Although we limited our investigation to non-absorbing structures, the main role played by absorption shall be to promote an overall reduction of the transmission in the vicinity of the resonant modes, with no direct impact on the finite-size scaling law or on the non-monotonicity of the spectrally averaged transmission. Our findings indicate that the strength of disorder shall be carefully chosen in the development of devices, such as band filters, that exploit the joint properties of binary structures, light localization and left-handed materials.

#### Acknowledgments

We would like to thank the partial financial support from CAPES, CNPq, CNPq-Rede Nanobioestruturas and FINEP (Brazilian Research Agencies), as well as from FAPEAL (Alagoas State Research Agency).

## Reflection chromaticity of multilayered structures incorporating cholesteric liquid crystals

E. M. Nascimento, I. N. de Oliveira, and M. L. Lyra<sup>a)</sup>

*Instituto de Física, Universidade Federal de Alagoas, 57072-970 Maceió AL, Brazil*

(Received 26 August 2008; accepted 2 October 2008; published online 18 November 2008)

We investigate the chromaticity of the light reflected by multilayered structures containing cholesteric liquid crystals (ChLCs). We considered a single-pitched ChLC multilayered system with quasiperiodic Fibonacci phase defects as well as an alternate sequence of single-pitched ChLC and isotropic dielectric layers. Using the Berreman  $4 \times 4$  matrix formalism, we numerically obtain the reflection spectrum and the chromaticity diagram of these structures. The associated chromaticity is shown to depend on the incidence angle. However, for the ChLC Fibonacci phase defect system, the color shift can be controlled by the defect angle  $\alpha$ . For the  $F_4$  generation and  $\alpha = \pi/3$ , the chromaticity of the reflected light remains close to the white color region for a wide range of incidence angles, followed by a blueshift at intermediate incidence angles. This is the setup that produces the nearest omnidirectional red-green-blue condition for the reflection spectrum. On the other hand, the structure with alternate ChLC and isotropic layers exhibits a complex sequence of color shifts when the incidence angle is increased. © 2008 American Institute of Physics. [DOI: 10.1063/1.3021143]

### I. INTRODUCTION

During the past decade, one-dimensional periodic photonic structures have been extensively investigated due to their potential applications in the development of ultrafast optical switches,<sup>1,2</sup> tunable filters,<sup>3-5</sup> waveguides,<sup>6</sup> and other optical devices.<sup>7,8</sup> In particular, these systems consist of a stack of dielectric layers that exhibit a frequency range of reflected modes, denominated as photonic band gap (PBG).<sup>7</sup> A suitable manipulation of the layer parameters allows to finely tune the PBG characteristics. Further, the typical properties of the conventional photonic crystals may be modified when the periodicity is broken. More specifically, localized modes appear inside the band gap when a defect is introduced in the periodic structure. Such behavior has been explored in optical microcircuits,<sup>9,10</sup> optical limiter,<sup>11</sup> and lasers with low thresholds.<sup>12,13</sup> Moreover, the optical transmittance of photonic systems was recently shown to present distinct scaling behaviors at quarter and a half-wavelength resonances on multilayered structures.<sup>14,15</sup>

Recently, several works have investigated multilayered structures using single-pitched cholesteric liquid crystals (ChLCs).<sup>16-19</sup> Due to its helical orientational order, ChLCs constitute a natural one-dimensional self-assembled photonic crystal. In fact, these systems present one-color reflection band for electromagnetic waves with a circular polarization that coincides with the chiral medium helix sign (selective reflection).<sup>20</sup> Also, ChLCs exhibit a well defined band gap for a range of wavelengths, which depends on the birefringence and the pitch of the helical structure of the material.<sup>21</sup> Indeed, the unique optical properties of ChLCs have motivated their applications in switchable diffractive optical devices<sup>22,23</sup> and reflective color displays without the use of a

back light.<sup>17,18</sup> By investigating ChLC multilayered structures with quasiperiodic Fibonacci phase defects, recent theoretical and experimental studies have demonstrated that a multiple PBG emerges in the transmittance spectra of single-pitched ChLC systems, which may be suitably adjusted by the orientational defect angle in the helical structure.<sup>17</sup> In particular, a red-green-blue (RGB) reflection was observed when a  $\pi/3$  defect angle was inserted in the ChLC multilayered structure. Multiple PBGs have been also obtained in films composed by an alternated sequence of single-pitch polymeric ChLC and isotropic dielectric slabs.<sup>18</sup> In both cases, the spectral characteristics of the multiple PBGs can be conveniently controlled, such as the total reflectance, spectral position, width, and the number of bands. Although the spectral properties of multiple PBGs in ChLC multilayered structures have been extensively investigated under normal incidence, only a few works have been devoted to study the robustness of their reflection properties under oblique incidence.<sup>21,24,25</sup>

In this work, we investigate the photonic properties of ChLC multilayered systems with a quasiperiodic Fibonacci phase defect as well as an alternate sequence of single-pitched ChLC and isotropic dielectric slabs. By using the Berreman  $4 \times 4$  matrix method,<sup>25,26</sup> we compute the reflection spectra as well as the chromaticity diagram according to the International Commission on Illumination (CIE) for these structures.<sup>27</sup> Our results show that the photonic properties of these systems are strongly dependent on the incidence angle. In particular, we observe a pronounced and irregular color shift in the associated reflection chromaticity for alternate sequences of single-pitched ChLC and isotropic dielectric layers. On the other hand, we show that the color shift can be minimized by adjusting the defect angle for ChLC Fibonacci phase defect multilayers and RGB reflection can be obtained for a wide range of incidence angles.

<sup>a)</sup>Electronic mail: marcelo@if.ufal.br.

## II. BERREMAN 4×4 MATRIX FORMALISM

We will consider a monochromatic plane wave of angular frequency  $\omega$ , circularly polarized and propagating in a medium that is uniform in its dielectric properties in one plane (stratified media), which is taken to be the  $xy$  plane. The  $x$ - $y$  components of the electric field  $E$  and the magnetic field  $H$  can be written as

$$\begin{pmatrix} E_x(x,y,z,t) \\ E_y(x,y,z,t) \\ H_x(x,y,z,t) \\ H_y(x,y,z,t) \end{pmatrix} = \psi(z) e^{-i\omega(t-\eta z/c)}, \quad (1)$$

where, for the sake of convenience, the light wave is assumed to propagate in the  $xz$  plane, i.e., the  $xz$  is the plane of incidence.  $\psi(z)$  is a column vector and  $\eta$  is proportional to the  $x$  component of the wave vector  $k$ . From the Maxwell equations in Gaussian units, one can derive the following set of four differential equations:

$$\frac{d\psi(z)}{dz} = ikD(z) \cdot \psi(z), \quad (2)$$

where  $D$  is the so-called Berreman 4×4 matrix.<sup>25,26</sup> Assuming the medium to be nonmagnetic ( $\mu=I$ , where  $I$  is the unit matrix) with a constant dielectric tensor  $\epsilon$ , the Berreman matrix does not depend on  $z$  and can be written as

$$D = \begin{pmatrix} -\frac{\epsilon_{zx}}{\epsilon_{zz}} & -\frac{\epsilon_{zy}}{\epsilon_{zz}} & 0 & 1 - \frac{\eta^2}{\epsilon_{zx}} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{\epsilon_{zx}}{\epsilon_{yz}\epsilon_{zz}} - \epsilon_{yx} & \eta^2 - \epsilon_{yy} + \epsilon_{yz}\frac{\epsilon_{zy}}{\epsilon_{zz}} & 0 & \eta\frac{\epsilon_{yz}}{\epsilon_{zz}} \\ \epsilon_{xx} - \frac{\epsilon_{zx}^2}{\epsilon_{zz}} & \epsilon_{xy} - \frac{\epsilon_{zy}}{\epsilon_{zz}} & 0 & -\frac{\epsilon_{xz}}{\epsilon_{zz}} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

The solution of Eq. (2) can be expressed as a superposition of four distinct plane waves

$$\psi(z) = \sum_{i=1}^4 C_i \psi^{(i)} e^{ik\lambda_i z}, \quad (4)$$

where  $\psi^{(i)}$  are the eigenvectors and  $\lambda_i$  are the eigenvalues of the Berreman matrix. For a ChLC layer of thickness  $a$ , the helicity of the director implies in a  $z$ -dependence of the Berreman matrix, which invalidates the above exact solution. However, an approximate numerical solution can be obtained by virtually slicing the ChLC layer into a large number  $M$  of thin slabs. In such a way,  $D$  can be treated as fairly constant within each slab. The relation between the electric and magnetic fields at the interfaces at  $z=z_1$  and  $z=z_1+a$  can be written in transfer matrix form as

$$\psi(z_1+a) = T_M \cdot T_{M-1} \cdot \dots \cdot T_1 \cdot \psi(z_1), \quad (5)$$

$$T_i = \Psi_i \Gamma_i \Psi_i^{-1}, \quad (6)$$

where  $T_i$  is the transfer matrix associated with the virtual  $i$ th slice of the ChLC layer. Here,  $\Psi_i$  is a 4×4 unitary matrix

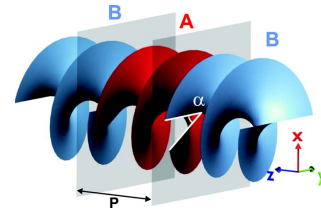


FIG. 1. (Color online) Schematic of a multilayered structure composed of single-pitched ChLCs with helicity mismatch.  $P$  represents the pitch length and  $\alpha$  is the defect angle in the nematic orientation at the interface between  $A$  and  $B$  cholesteric layers. The three layer structure shown corresponds to the  $F_3=\{BAB\}$  Fibonacci sequence.

whose columns are formed by the eigenvectors of  $D$  ( $\psi^{(i)}$ ) and  $\Gamma_i$  is a diagonal matrix with elements  $\Gamma_{i,j} = e^{ik\lambda_i \Delta z}$  ( $\Delta z = a/M$ ).

In a multilayered structure, the boundary conditions require the parallel components of the electric and magnetic fields to be continuous at the interfaces. Therefore, the relation between the in-plane components of the fields at the two external interfaces that separate the film from the surround medium can be written as a function of the product of all transfer matrices, with no virtual slicing being needed for uniform layers. In every Berreman matrix, one can write  $\eta = n_0 \sin(\varphi)$ , where  $n_0$  is the refractive index of the input medium and  $\varphi$  is the incidence angle. In what follows, we considered  $n_0=1.5$ , typical of glass cells.<sup>27</sup>

The multilayered structures incorporating ChLC layers were assumed to have the  $z$  direction as the twist axis and right handedness. In these layers, the liquid crystal director is represented by  $\hat{n} = [\cos(q_0 z), \sin(q_0 z), 0]$ , where  $q_0 = 2\pi/P$ . Its dielectric tensor function  $\epsilon(z)$  is given by  $\epsilon_{i,j} = \epsilon_{\perp} \delta_{i,j} + \Delta \epsilon n_i n_j$ . Here,  $(i,j) \in x,y,z$ ,  $\delta_{i,j}$  is the Kronecker delta, and  $\Delta \epsilon = (\epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp})$ .<sup>20</sup>

## III. RESULTS

First, we analyzed a structure composed of right-handed ChLC slabs with refractive indices of the birefringent planes  $n_o=1.56$  and  $n_e=1.78$  and optical pitch  $\lambda_P = \bar{n}P = 532$  nm, where  $\bar{n}$  is the average refractive index given by  $\bar{n} = [(n_o^2 + n_e^2)/2]^{1/2}$ . At the interface between adjacent layers, the orientation of the liquid crystal director vector exhibits a discontinuity  $\alpha$ . The ChLC layers are distributed following a quasiperiodic Fibonacci sequence, which is based on the recursive relation  $F_0=\{A\}$ ,  $F_1=\{B\}$ , and  $F_j = F_{j-2}F_{j-1}$  for  $j \geq 2$ . The lower order sequences are  $F_2=\{AB\}$ ,  $F_3=\{BAB\}$ ,  $F_4=\{ABBAB\}$ , etc. Figure 1 shows a schematic view of the  $F_3$  Fibonacci structure. In Fig. 2, we present the CIE 1931 chromaticity diagram of the  $F_4$  Fibonacci generation system with incidence angles in the range  $0 \leq \varphi \leq 90^\circ$  and different defect angles. The numerical procedure virtually slices each layer in 500 thin slabs.

In order to develop a comparative study, we compute the  $\alpha=0^\circ$  case for which the system consists of a single ChLC layer. In this case, the system exhibits only one associated color reflection band located on the green region for normal

103511-3 Nascimento, de Oliveira, and Lyra

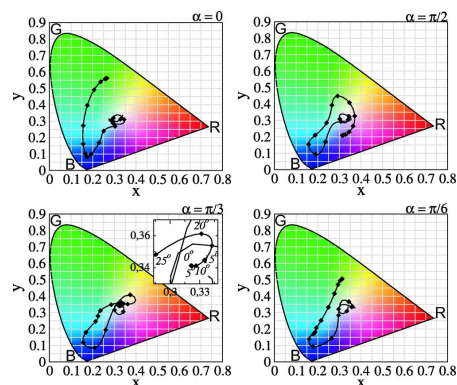


FIG. 2. (Color online) CIE 1931 chromaticity diagram of the  $F_4$  structure. The continuous lines represent the trajectory of the reflected light chromaticity as the incidence angle is varied from normal to tangent incidence. The diagrams of four structures with different defect angles are shown. The color shift is minimum for a defect angle  $\alpha = \pi/3$  for which the associated color reflection remains close to the white region for incidence spectrum angles  $\varphi < 30^\circ$  (see inset). At intermediate incidence angles the chromaticity exhibits a pronounced blueshift (the letters R-G-B stand for red-blue-green chromaticities).

incidence. As the incidence angle increases, the associated color reflection moves toward the blue region, showing a large color shift. As the defect angle increases, the associated color for normal incidence approaches the white region and the color shift is reduced. At  $\alpha = \pi/3$ , we have a scenario with the smallest color shift concentrated in the white region for incident angles up to  $30^\circ$ , signaling a nearly omnidirectional RGB reflection. However, a considerable deviation toward the blue is still present for intermediate incident angles  $30^\circ < \alpha < 60^\circ$ . For larger defect angles, the color shift again increases and deviates from the white region for normal incidence. The above result extends the one reported in Ref. 17 at which an  $F_4$  Fibonacci system with defect angle  $\alpha = \pi/3$  was shown to display a multiple PBG with RGB-color reflection for normal incidence. Here, we showed that such RGB reflection is sustained in a wide range of incident angles (see inset of Fig. 2) with a deviation toward the blue for intermediate oblique incidence.

The second case we studied corresponds to an alternate sequence of single-pitched ChLC, with the same parameters as above, and an isotropic dielectric slab, with refractive index  $n = 1.5$  and thickness  $d = 0.5 \mu\text{m}$ . We imposed the first and last layers to be a polymeric ChLC so that the lower order sequences are  $S_1 = \{A\}$ ,  $S_2 = \{ABA\}$ ,  $S_3 = \{ABABA\}$ , and  $S_4 = \{ABABABA\}$ , where  $A$  is the polymeric ChLC layer and  $B$  is the isotropic dielectric one (see a schematic view of the  $S_3$  alternate sequence in Fig. 3). The CIE 1931 chromaticity diagram of the  $S_4$  system is shown in Fig. 4.

For normal incidence, this structure exhibits a reflection spectrum with white chromaticity similar to the one presented by the previous  $F_4$  structure with defect angle  $\alpha = 30^\circ$ .<sup>18</sup> Despite this fact, we obtained a quite different color

J. Appl. Phys. 104, 103511 (2008)

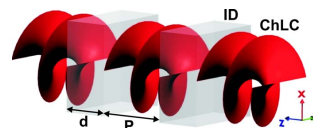


FIG. 3. (Color online) Schematic of a multilayered structure composed of an alternate sequence of a single-pitched ChLC and an isotropic dielectric layer with helicity mismatch.  $P$  represents the pitch length and  $d$  is the thickness of the isotropic dielectric layer. The five layer structure shown corresponds to the  $S_3 = \{ABABA\}$  alternate sequence.

trajectory in the CIE 1931 chromaticity diagram as a function of the incidence angle. In this case, a much larger color shift is observed as the incidence angle is increased with a complex dependence of the chromaticity on the incidence angle. A sensible deviation toward the red is already obtained for incidence angles of  $15^\circ$ , followed by a complex sequence of chromaticity change as the incidence angle is further increased.

In order to have a closer understanding of the observed differences between the CIE 1931 chromaticity diagrams of the  $F_4$  and  $S_4$  structures, we plot the reflection spectrum for each structure at typical incidence angles, as shown in Figs. 5 and 6. In these figures, we also show the blue, green, and red color matching functions used to obtain the chromaticity diagrams. Notice that both structures display similar reflection spectra for small incidence angles, with the reflection spectrum of the  $F_4$  structure having a slightly closer matching with the RGB bands. Up to  $\varphi = 30^\circ$ , these spectra are also nearly independent of the incidence angle with just a slight displacement of the whole spectrum in the visible region toward smaller wavelengths. It is this process that pro-

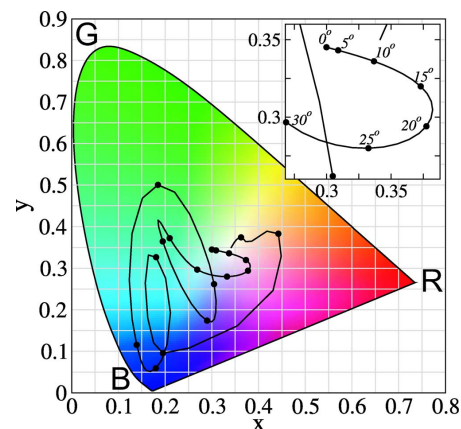


FIG. 4. (Color online) CIE 1931 chromaticity diagram of the  $S_4$  system. The continuous lines represent the trajectory of the reflected light chromaticity as the incidence angle is varied. Although the chromaticity of the reflected light for normal incidence is similar to that of the  $F_4$  Fibonacci structure with defect angle  $\alpha = 30^\circ$ , the  $S_4$  structure exhibits a complex sequence of color shifts for oblique incidence.

Downloaded 15 Jan 2009 to 200.128.84.10. Redistribution subject to AIP license or copyright; see <http://jap.aip.org/jap/copyright.jsp>

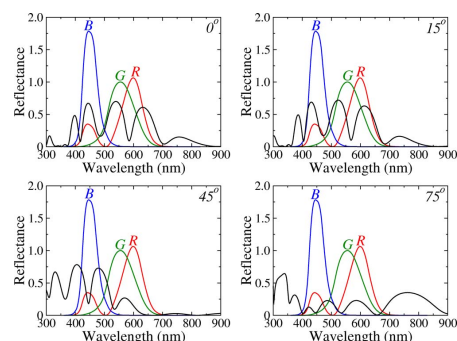


FIG. 5. (Color online) Reflection spectra of the  $F_4$  structure with defect angle  $\alpha=30^\circ$  for different incidence angles ( $\varphi$ ). The color matching functions used to obtain the chromaticity diagrams are also shown. For  $\varphi \leq 30^\circ$  the reflection spectra are quite similar with a slight deviation in the reflection bands toward lower wavelengths. For larger incidence angles, the reflection spectra display just a small superposition with the red and green color matching functions, which result in the overall blueshift of the resulting chromaticity. Approaching nearly tangent incidence, the reflection bands become wider and the reflected light converges to the white chromaticity irrespective of the defect angle.

duces the main shift in the reflection chromaticity toward the blue of both  $F_4$  and  $S_4$  structures. A substantial difference is already observed for  $\varphi \geq 45^\circ$ , where the initial RGB color bands become narrower and displaced toward the blue and ultraviolet regions with just a small superposition with the red and green color matching functions. Reflection bands that were originally centered in the infrared spectral region at normal incidence are displaced to the visible spectrum. Therefore, the displacement of the bands, as well as their distortion, has an impact on the chromatic expression. This impact is more pronounced for the case where the original

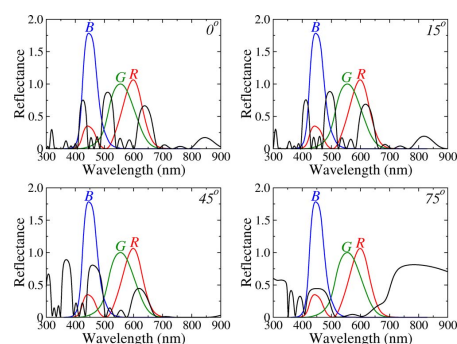


FIG. 6. (Color online) Reflection spectra of the  $S_4$  system for different incidence angles ( $\varphi$ ). In comparison to  $F_4$  spectra, the reflection bands for normal incidence are narrower, which result in a stronger sensitivity of the chromaticity on the incidence angle. Although there is an overall tendency toward a blueshift, the chromaticity presents a complex dependence on the incidence angle as the reflection bands cross over the color matching functions.

reflection bands are narrower, as it happens with the alternate  $S_4$  structure. As one approaches to nearly tangent incidences, the reflection spectrum becomes broader and the reflected light naturally returns to the white chromaticity.

#### IV. CONCLUSION

In conclusion, we studied the reflection spectrum of multilayered dielectric structures incorporating ChLCs by employing the Berreman matrix formalism. In particular, we considered a single-pitched ChLC multilayered film with quasiperiodic Fibonacci phase defects as well as an alternate sequence of single-pitched ChLC and isotropic dielectric layers. These systems were recently shown to exhibit a RGB reflection spectrum of circularly polarized light for normal incidence,<sup>17,18</sup> especially the  $n=4$  generation. Here, we showed that the chromaticity of both structures deviates from the white color as the incidence angle is increased. However, the chromaticity of the Fibonacci structure is less sensitive to the incidence angle when compared to the alternate sequence. The closer omnidirectional RGB reflectivity is obtained for defect angle  $\alpha=30^\circ$  with some chromatic deviation to the blue for incidence angles in the range  $30 < \varphi < 60^\circ$ . This feature was associated to the fact that the Fibonacci structure sustains wider RGB reflection bands at normal incidence. We would like to stress that to promote the development of feasible reflective color displays, it is essential to achieve a nearly omnidirectional RGB reflection. Our results indicate that multilayered structures, with wide reflection bands that can be tuned at the RGB frequencies by controlling a few system parameters, are ideal candidates that can sustain a reduced chromaticity shift in a wide range of incidence angles.

#### ACKNOWLEDGMENTS

We would like to thank partial financial support from CAPES, CNPq, CNPq-Rede Nanobioestruturas, and FINEP-CTInfra (Brazilian Research Agencies) as well as from FA-PEAL (Alagoas State Research Agency).

<sup>1</sup>G. Ma, J. Shen, Z. Zhang, Z. Hua, and S. H. Tang, *Opt. Express* **14**, 858 (2006).

<sup>2</sup>A. E. Miroshnichenko, E. Brasselet, and Y. S. Kivshar, *Appl. Phys. Lett.* **92**, 253306 (2008).

<sup>3</sup>K. L. Jim, D. Y. Wang, C. W. Leung, C. L. Choy, and H. L. W. Chan, *J. Appl. Phys.* **103**, 083107 (2008).

<sup>4</sup>H. Němec, L. Duvilleart, F. Garet, P. Kužel, P. Xavier, J. Richard, and D. Raully, *J. Appl. Phys.* **96**, 4072 (2004).

<sup>5</sup>Y. J. Xiang, X. Y. Dai, S. C. Wen, and D. Y. Fan, *Opt. Lett.* **33**, 1255 (2008).

<sup>6</sup>H. Taniyama, *J. Appl. Phys.* **91**, 3511 (2002).

<sup>7</sup>J. D. Joannopoulos, R. D. Meade, and J. N. Winn, *Photonic Crystals: Modeling the Flow of Light* (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1995).

<sup>8</sup>T. T. Larsen, A. Bjarklev, D. S. Hermann, and J. Broeng, *Opt. Express* **11**, 2589 (2003).

<sup>9</sup>S. Lan, K. Kanamoto, T. Yang, S. Nishikawa, Y. Sugimoto, N. Ikeda, H. Nakamura, K. Asakawa, and H. Ishikawa, *Phys. Rev. B* **67**, 115208 (2003).

<sup>10</sup>E. H. El Boudouti, Y. El Hassouani, H. Aynaou, B. Djafari-Rouhani, A. Akjouj, and V. R. Velasco, *J. Phys.: Condens. Matter* **19**, 246217 (2007).

<sup>11</sup>B. Y. Soon, J. W. Haus, M. Scalora, and C. Sibilia, *Opt. Express* **11**, 2007 (2003).



103511-5 Nascimento, de Oliveira, and Lyra

J. Appl. Phys. **104**, 103511 (2008)

- <sup>12</sup>S. Noda, M. Imada, M. Okano, S. Ogawa, M. Mochizuki, and A. Chutinan, *IEEE J. Quantum Electron.* **38**, 726 (2002).
- <sup>13</sup>M. H. Song, B. Park, K.-C. Shin, T. Ohta, Y. Tsunoda, H. Hoshi, Y. Takanishi, K. Ishikawa, J. Watanabe, S. Nishimura, T. Toyooka, Z. Zhu, T. M. Swager, and H. Takezoe, *Adv. Mater. (Weinheim, Ger.)* **16**, 779 (2004).
- <sup>14</sup>E. M. Nascimento, F. A. B. F. de Moura, and M. L. Lyra, *Phys. Rev. B* **76**, 115120 (2007).
- <sup>15</sup>E. M. Nascimento, F. A. B. F. de Moura, and M. L. Lyra, *Opt. Express* **16**, 6860 (2008).
- <sup>16</sup>R. Ozaki, Y. Matsuhisa, H. Yoshida, K. Yoshino, and M. Ozaki, *J. Appl. Phys.* **100**, 023102 (2006).
- <sup>17</sup>N. Y. Ha, Y. Takanishi, K. Ishikawa, and H. Takezoe, *Opt. Express* **15**, 1024 (2007).
- <sup>18</sup>N. Y. Ha, Y. Ohtsuka, S. M. Jeonh, S. Nishimura, G. Suzuki, Y. Takanishi, K. Ishikawa, and H. Takezoe, *Nature Mater.* **7**, 43 (2008).
- <sup>19</sup>Y. Matsuhisa, R. Ozaki, K. Yoshino, and M. Ozaki, *Appl. Phys. Lett.* **89**, 101109 (2006).
- <sup>20</sup>P. G. De Gennes and J. Prost, *The Physics of Liquid Crystals* (Clarendon, Oxford, 1993).
- <sup>21</sup>J. Y. Chen and L. W. Chen, *Phys. Rev. E* **71**, 061708 (2005).
- <sup>22</sup>D. Subacius, P. J. Bos, and O. D. Lavrentovich, *Appl. Phys. Lett.* **71**, 1350 (1997).
- <sup>23</sup>S. W. Kang, S. Sprunt, and L. C. Chien, *Appl. Phys. Lett.* **76**, 3516 (2000).
- <sup>24</sup>J. Y. Chen and L. W. Chen, *J. Phys. D* **38**, 1118 (2005).
- <sup>25</sup>S. Stallinga, *J. Appl. Phys.* **85**, 3023 (1999).
- <sup>26</sup>D. W. Berreman, *J. Opt. Soc. Am.* **62**, 502 (1972).
- <sup>27</sup>D. B. Judd and G. Wyszecki, *Color in Business, Science, and Industry* (Wiley, New York, 1963).