

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA DA MATÉRIA CONDENSADA

CAIO LEITE FAUSTINO

*Aspectos Estatísticos em Dinâmica de Busca em
Ambientes Escassos*

MACEIÓ

2009

CAIO LEITE FAUSTINO

*Aspectos Estatísticos em Dinâmica de Busca em
Ambientes Escassos*

Dissertação apresentada ao curso de Pós-Graduação, em Física, da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Madras Viswanathan Gandhi Mohan

Co-Orientador: Prof. Dr. Marcos Gomes Eleutério da Luz

MACEIÓ

2009

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

F268a Faustino, Caio Leite.
Aspectos estatísticos em dinâmica de busca em ambientes escassos / Caio Leite Faustino, 2009.
742 f. : graf.

Orientador: Madras Viswanathan Gandhi Mohan.
Co- Orientador: Marcos Gomes Eleutério da Luz.
Dissertação (mestrado em Física da Matéria Condensada) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Física. Maceió, 2009.

Bibliografia: f. 70-72.
Índices: f. 73-74.

1. Sistemas complexos. 2. Dinâmica de busca aleatória. 3. Vãos de Lévy.
4. Transições de fase. I. Título.

CDU: 538.91



Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Física
Programa de Pós Graduação em Física

BR 104 km 14. Campus A.C. Simões
Cidade Universitária
Tabuleiro dos Martins
57072-970 Maceió - AL. Brasil
FONE : (82) 3214-1423/FAX 3214-1645

**PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

"Aspectos Estatísticos em Dinâmica de Busca em Ambientes Escassos"

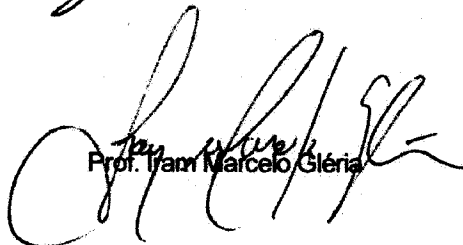
por

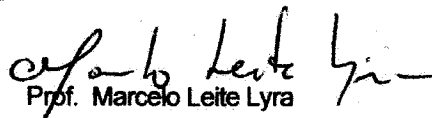
Caio Leite Faustino

A Banca Examinadora composta pelos professores Marcos Gomes Eleutério da Luz (co-orientador), do Instituto de Física da Universidade Federal do Paraná, Iram Marcelo Gléria, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas e Marcelo Leite Lyra do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, consideram o candidato aprovado com grau "A".

Maceió, 12 de fevereiro de 2009


Prof. Marcos Gomes Eleutério da Luz


Prof. Iram Marcelo Gléria


Prof. Marcelo Leite Lyra

Aos meus pais, Ricardo e Ofelia

AGRADECIMENTOS

Em especial:

À minha família, sempre dando-me apoio e que sempre esteve ao meu lado. Aos meus irmãos (Rafael, Juliana, Camila e Fernanda), que essa dissertação possa inspirá-los a uma visão científica mais ampla, dando-lhes motivo a buscar entender os mistérios e fatos existentes na natureza.

Ao meu orientador e amigo, Prof. Dr. Madras Viswanathan Gandhi Mohan, que sempre me acompanhou, reconhecendo minhas idéias e trabalhos. Além de um ótimo amigo pessoal em todos os momentos, é uma excelente pessoa no âmbito profissional.

Ao meu grande amigo e Co-Orientador, Prof. Dr. Marcos Gomes Eleutério da Luz, que mesmo a distância sempre procurou estar ao meu lado, motivando-me e contribuindo intensamente para minha formação. Durante anos de amizade, muitos momentos bons e ruins que vivemos juntos apenas contribuíram para fortalecer nossa amizade e nossa interação profissional. Agradeço também ao Prof. Marcos pela reluzente recepção que tive durante duas semanas de colaboração e orientação em Curitiba-PR.

Ao companheiro profissional, Prof. Dr. Ernesto C. P. Raposo - UFPE, pelos inúmeros debates, pelos ensinamentos, pela paciência e pela excelente colaboração científica.

À minha amiga, amada e companheira, Prof. Dra. Edna Bertoldo, sempre ao meu lado e motivando-me na obtenção de boas conquistas. Seu carinho, atenção e companherismo são indescritíveis.

Aos Professores:

Dr. Iram M. Gléria, pela amizade e incentivo.

Dr. José Carlos Cressoni, por todo apoio dado em momentos nos quais mais precisei.

Dr. Marcelo Leite Lyra, pelos diversos comentários sobre meus trabalhos, além de um grande exemplo como professor e pesquisador.

Dr. Carlos Jacinto, Dr. Jenner Bastos, Dr. Kleber Serra, Dr. Evandro Gouveia, Dr^a. Solange Bessa, Dr^a. Tereza Araujo, Ms. Ornelas Farias, Dr. Jandir M. Hickman, Dr. Dilson Caetano, Dr. Samuel Albuquerque, Dr. Ítalo Nunes, Dr. Pedro Valentim, Dr. Heber Ribeiro e aos demais professores do Instituto de Física - UFAL, que tanto tenho a agradecer nos mais diversos aspectos.

Dr. Fernando Devecchi, Dr. Alexandre D. Ribeiro, Dr. Carlos Fiori e ao Dr. Marcus Beims, todos da Universidade Federal do Paraná e que num curto tempo mostraram ser pessoas super receptivas e legais.

Aos meus amigos:

Manoel Júnior, indiscutivelmente um amigo e irmão.

André (Gabé), uma pessoa ímpar que sempre está ao dispor.

Askery, por sempre está ao lado nos bons e maus momentos, por quem torço bastante.

Willams, pela interatividade.

Aos amigos pessoais:

Sr. Érico Baracho, meu segundo Pai, meu amigo, meu vizinho, meu companheiro de viagens, minha fonte de boas risadas. Uma pessoa inesquecível e sempre presente em minha mente.

Sr^a. Antonieta Baracho, minha segunda mãe, minha eterna amiga. Sempre sorrindo, sempre feliz, é um grande exemplo de vida.

Aos demais amigos Toni, Manuella, Henrique, Rogério, Jobson, Edmilson, Rafael.

Aos demais que imperdoavelmente esqueci de mencionar.

À CAPES e à FAPEAL, pelo apoio financeiro.

À Deus.

“Toda verdade inédita começa como heresia
e acaba como ortodoxia”

(Thomas Huxley)

RESUMO

Neste trabalho, analisamos a dinâmica de busca e propriedades estatísticas de um organismo buscador (“searcher”) à procura de um alvo de interesse (“target”). De forma geral, muitos são os aspectos de interesse nesse tipo de estudo. Por exemplo, se pensarmos no contexto biológico, temos que na natureza constantemente organismos interagem uns com os outros, tanto dentro da mesma como entre diferentes espécies. Os objetivos gerais da busca aleatória são os mais variados, indo desde busca de alimentos, parceiro para reprodução etc, em seres vivos, até processos de interesse socio-econômicos, como busca por crianças desaparecidas, terroristas fugitivos ou então busca por petróleo. Em nosso modelo específico, consideramos o buscador e o alvo caminhando aleatoriamente numa rede unidimensional de tamanho λ e com condições periódicas de contorno. O tipo de difusão no sistema é determinado pela escolha da função de distribuição de probabilidade para os passos individuais dos indivíduos. Assumimos uma distribuição tipo lei de potência, característica de processos de Lévy $P(\ell) \sim \ell^{-\mu}$. Considerando uma energia inicial do buscador ξ_0 , um gasto energético de caminhada e um ganho de energia g cada vez que o buscador encontra o alvo, discutimos algumas quantidades físicas relevantes, como flutuação energética, fração de buscadores sobreviventes e energia acumulada para N passos realizados - tempo de busca - como função de diferentes parâmetros, por exemplo, o comprimento de rede λ . Constatamos que o processo de busca com difusão balística é mais eficiente do que a Browniana, ocasionando a sobrevivência do organismo buscador em situações de densidade de alvos muito baixas. Este comportamento extremo garante a relativa sobrevivência do buscador. Também verificamos fortes evidências de uma transição contínua, para a qual numa dada fase temos sobrevivência e em outra temos extinção. Calculamos as densidades críticas que dependem dos parâmetros de difusão adotados pelos organismos. Também obtemos os expoentes críticos relacionados a tal transição. Nossos resultados sugerem uma universalidade dos expoentes críticos, que independente do tipo de difusão seguida pelos organismos.

Palavras-chave: Dinâmica de Busca, Voos de Lévy, Caminhada Aleatória, Processos de Encontro.

ABSTRACT

In this work, we analyze search dynamics and the statistical properties of an organism in search of a target of interest. In general terms, there are many interesting aspects of studies of this nature. For example, in the biological context, organisms in Nature constantly interact one with another, both of the same as well as of different species. The general objectives of random searches are diverse, ranging from searches for food, reproductive partners, etc. of living organisms to socio-economically relevant processes, such as searches for missing children, fugitive terrorists, or searches for petroleum. In our specific model, we consider the searcher and the target moving randomly in a one dimensional lattice of size λ , with periodic boundary conditions. The type of diffusion in the system is determined by the choice of the probability distribution function for the steps sizes for the individual walkers. We assume a power law distribution, characteristic of Levy processes, $P(\ell) \sim \ell^{-\mu}$. Considering an initial energy ξ_0 for the searcher, an energetic expenditure for the walk and an energetic gain g for each target found, we discuss relevant physical quantities, such as energy fluctuations, the fraction of survival searchers and the cumulative energy for N time steps, as a function of the parameters, e.g., the lattice size λ . We find that searches with ballistic diffusion are more efficient than Brownian ones, allowing the survival of the searcher in situations of ultra-low target density. This extreme behavior guarantees the differential survival of such searchers. We also find strong evidence of a continuous phase transition, in which one phase has survival and the other phase has extinction. We calculate the critical densities which depend on the parameters of diffusion adopted by the organisms. We also obtain the critical exponents for the transition. Our results suggest a universality of the critical exponents, which independent of the type of diffusion of the organisms.

Keywords: Search Dynamics, Lévy Flights, Random Walk, Contact Processes

Sumário

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introdução | 11 |
| 2 | Random Walk e Processos de Lévy | 13 |
| 2.1 | O Movimento Browniano | 13 |
| 2.2 | Random Walk | 15 |
| 2.2.1 | Distribuição Normal | 18 |
| 2.3 | Voos e Caminhadas de Lévy | 20 |
| 2.3.1 | Distribuição de Lévy | 21 |
| 3 | Sistemas Complexos e Fenômenos Críticos | 24 |
| 3.1 | Sistemas Complexos | 24 |
| 3.1.1 | Invariância e Lei de Escala | 25 |
| 3.2 | Fenômenos Críticos | 26 |
| 3.2.1 | Transições de Fase de Primeira Ordem | 27 |
| 3.2.2 | Transições de Fase de Segunda Ordem | 28 |
| 3.3 | Universalidade | 29 |
| 3.4 | Teoria de Escala em Sistemas de Tamanho Finito | 30 |
| 4 | Estratégia de Busca na Borda da Extinção | 33 |
| 4.1 | Motivação | 33 |
| 4.2 | O Problema | 34 |
| 4.3 | Modelo de Busca | 35 |
| 4.4 | Resultados | 36 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 5 | Dinâmica de Busca em Ambientes escassos | 39 |
| 5.1 | Novos Problemas e Motivações | 39 |
| 5.2 | Modelo de Busca | 41 |
| 5.3 | Resultados e Discussões | 42 |
| 5.3.1 | Flutuação Relativa da Energia - FR_{ξ} | 42 |
| 5.3.2 | Taxa de Sobrevivência - f_s | 49 |
| 5.4 | Proposta de Renormalização e Hipótese de Escala | 56 |
| 5.4.1 | O Expoente Crítico α | 56 |
| 5.4.2 | O Expoente crítico β | 61 |
| 5.5 | Discussões gerais | 64 |
| 6 | Conclusão | 68 |
| | REFERÊNCIA | 70 |
| | ÍNDICE | 72 |

Capítulo 1

Introdução

Processos de buscas aleatórias têm sido intensivamente estudados a partir da década de 70, quando alguns cientistas descobriram que determinadas espécies executavam caminhadas superdifusivas como estratégia de busca em momentos ou ambientes escassos de alimento. Nesse sentido, muito esforço tem sido realizado para entender o motivo pelo qual ocorre essa mudança de difusão de busca. De fato, muitos são os organismos biológicos que em alguns períodos do ano vivem em ambientes de escassez alimentar. Algumas vezes a escassez pode ser de moradia ou até mesmo de companheiro reprodutor. O que realmente foi observado é que a dinâmica de busca de fato se modifica conforme o aumento das necessidades vitais de um organismo [1]. Estudos apontam que a eficiência de busca é otimizada quando a dinâmica foge do comportamento de caminhada Browniana e tende a caminhadas de Lévy (alvos não-destrutíveis) ou a caminhadas balísticas (alvos destrutíveis). O entendimento dessa otimização observada em sistemas dinâmicos de busca, pode ser analisado através do comportamento energético de um animal buscador ou através da frequência de sobrevivência deste numa dada busca. Esse tipo de análise, portanto, será o principal foco de estudo nessa dissertação.

No capítulo 2 abordaremos alguns conceitos básicos dos tipos de caminhadas aleatórias, assim como suas respectivas distribuições. Trata-se de um capítulo motivador, expondo os motivos pelos quais as caminhadas aleatórias têm sido largamente estudadas e aplicadas em vários campos da ciência. No capítulo 3 iremos apresentar algumas ferramentas matemáticas e físicas que serão úteis no decorrer da dissertação. Essas ferramentas também são importantes para mostrar as conexões entre dinâmica de buscas e tópicos atuais com a ciência física e exata. No capítulo 4 apresentamos

nosso primeiro resultado consequente dessa linha de pesquisa, trabalho esse publicado na revista científica *Europhysics Letters* e que serviu como motivação para a continuidade da pesquisa. No capítulo 5 apresentaremos novas discussões, assim como novos resultados a cerca do modelo de busca e das quantidades física envolvidas nessa dissertação. No capítulo 6, finalmente, faremos algumas conclusões importantes e descreveremos nossas perspectivas sobre o assunto que aqui será abordado.

Capítulo 2

Random Walk e Processos de Lévy

Neste capítulo faremos uma introdução teórica dos principais tópicos que motivaram esse trabalho, resultando na produção dessa dissertação e nos principais resultados que nesta serão abordados. Apresentaremos o movimento Browniano, o qual sempre despertou a curiosidade de vários cientistas, como por exemplo Albert Einstein, Paul Lévy, Benoît Mandelbrot etc. Em seguida trataremos das Caminhadas Aleatórias (*Random walks*), estas estando presentes em diversas áreas da ciência. Conectado aos *random walks*, abordaremos os voos e caminhadas de Lévy, que têm obtido bastante interesse científico nas três últimas décadas devido à grande aplicabilidade deste tópico nos vários setores da física, matemática, economia, biologia, entre outras áreas. Discutiremos também a distribuição gaussiana e a distribuição de Lévy, ambas também associadas às caminhadas aleatórias .

2.1 O Movimento Browniano

Em 1827 o botânico inglês *Robert Brown* observou que grãos de pólen, imersos num fluido, executavam um movimento irregular e aleatório. Em experimentos posteriores, realizados através de técnicas de microscopia, foi mostrado que esse movimento é bem mais geral e acontece para vários tipos de partículas imersas num fluido não muito viscoso. A esse movimento inerente e incessante de pequenas partículas imersas num fluido foi dado o nome de *Movimento Browniano*, justamente pelo fato de ter sido primeiramente observado pelo botânico Robert Brown. As primeiras teorias sobre esse tipo de movimento aleatório, publicadas independentemente por Einstein (1905) e por Smoluchowski

(1906), representam aplicações de sucesso das idéias atomísticas da teoria cinética dos gases [2] e atualmente estão presentes em vários cenários da natureza.

A expressão completa e rigorosa do movimento Browniano foi dada por Albert Einstein, no chamado “ano milagroso” de 1905, onde Einstein publicou 5 artigos que revolucionaram a física moderna. Um desses 5 artigos se intitulava “*Sobre o movimento de partículas suspensas em um fluido em repouso*”. Nesse artigo, um dos resultados principais do trabalho de Einstein sobre o movimento Browniano foi a obtenção do coeficiente de difusão D , dado por:

$$D = \frac{RT}{6\pi\eta a N_A} \quad (2.1)$$

onde R é a constante universal dos gases, T é a temperatura, η é a viscosidade do fluido em que as partículas estão imersas, a é o raio das partículas e N_A é o número de Avogrado. Esse resultado foi bastante importante na época porque uma vez que se obtia os valores experimentalmente medidos de D , T , η e a , então poderia calcular o número de Avogrado, o que não era algo trivial em 1905. Outro resultado muito importante obtido por Einstein foi a obtenção da equação de difusão em função de D e de n , onde $n = n(x, t)$ é o número de partículas por unidade de volume no instante de tempo t , tal que:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \quad (2.2)$$

cujas solução é dada pela forma:

$$n(x, t) = \frac{N_0}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \quad (2.3)$$

e através de (2.3), podemos obter o deslocamento quadrático médio como sendo:

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 n(x, t) dx = 2Dt = \frac{RTt}{3\pi\eta a N_A} \quad (2.4)$$

onde (2.4) é uma das equações de Einstein bastante conhecida. Notemos que o deslocamento característico dado por $\sqrt{\langle x^2 \rangle}$ cresce com \sqrt{t} , ou seja, afastando-se das formas balísticas usuais, visto que os deslocamentos individuais são aleatórios [3].

Como veremos nas próximas seções, há uma conexão direta entre o raciocínio probabilístico de Einstein do movimento Browniano com as *random walks*. Essa conexão gera diversas aplicações

em várias áreas da ciência, como por exemplo em problemas de biologia, dinâmica de busca, física da matéria mole, econofísica etc.

2.2 Random Walk

“*Random Walks*” é um tópico situado em algum lugar entre o estudo de probabilidade, análise harmônica, geometria, teoria de grafos e álgebra, podendo seu estudo ser aplicado a diversos campos da natureza [4]. A grande motivação para o estudo das Random Walks - RW - surgiu a partir da “descoberta” do movimento Browniano. No entanto, as RW estão presentes em vários outros contextos. Exemplo disso é quando vamos ao cassino, onde precisamos fazer escolhas de jogadas aleatoriamente. Também notamos as RW em animais que procuram por comida, onde o processo de difusão, de caminhada aleatória, torna-se bastante importante para a sobrevivência destes. Oscilação dos preços nas bolsas de valores também é um forte exemplo onde notamos as RW. Observamos, com alguns desses exemplos, que as RW aplicam-se a qualquer quantidade física e matemática que toma valores aleatórios no decorrer do tempo ou espaço.

Podemos considerar uma caminhada aleatória simples como sendo constituída de um caminhante que se movimenta para direita ou para esquerda. Assim, a partir de um tempo e posição inicial, o caminhante escolhe um sentido de movimento com probabilidade p de ir para direita e de $q = 1 - p$ como probabilidade de se movimentar para esquerda. Quando consideramos que o sentido do passo atual independe do sentido do passo anterior ou dos demais passos anteriores, ou seja, quando independe de todo o processo de caminhada já realizada, então temos um caso especial de caminhada aleatória a qual é conhecida como *Caminhada Markoviana*. Caso tivéssemos algum tipo de dependência na configuração (direção e sentido) do passo atual com o(s) passo(s) anterior(es), então teríamos uma *Caminhada não-Markoviana*. Considerando uma caminhada aleatória *Markoviana*, no limite em que o tempo entre passos tende a zero para tamanho de passos finitos e pequenos, então temos uma caminhada tipo *Browniana*, na qual o movimento do caminhante é semelhante ao movimento de partículas suspensas num fluido viscoso observado por *R. Brown*. A figura 2.1 ilustra o caso de uma caminhada aleatória Browniana para o caso bidimensional.

Para o caso unidimensional, é relativamente fácil mostrar a conexão entre uma caminhada

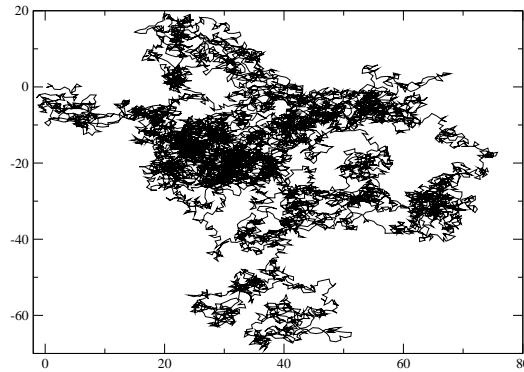


Figura 2.1: Caminhada Aleatória Browniana bidimensional com tamanho de passo unitário e com $N = 10.000$ passos realizados.

aleatória Browniana com a distribuição gaussiana (esta também chamada de distribuição normal). Assim, seja uma partícula (ou um caminhante aleatório) que efetua N passos independentes (numa caminhada Markoviana) de comprimento ℓ . Ao final de N passos realizados, a partícula encontra-se na posição $S_x = k\ell$, onde k é um número inteiro no intervalo $[-N, N]$. Sendo r o número de passos dados para a direita, l o número de passos dados para a esquerda, p a probabilidade de um passo ser para direita e $q = 1 - p$ a probabilidade de um passo ser para esquerda, então a probabilidade $P_N(r)$ de obtermos r passos para a direita e $l = N - r$ passos para esquerda, para qualquer combinação de passos, é dada por:

$$P_N(r) = \frac{N!}{r!(N-r)!} p^r q^{N-r} \quad (2.5)$$

Esta função de probabilidade é geralmente conhecida como *Distribuição Binomial*. Se analisarmos esse tipo de caminhada para um número de passos N muito grande, então é fácil verificar que a função de probabilidade binomial tenderá a um valor máximo para algum valor $r = \tilde{r}$. Se o número de passos é muito grande, então na região muito próxima do máximo da função de probabilidade P , temos que $|P(r+1) - P(r)| \ll P(r)$. Dessa forma, no limite em que N é grande, podemos considerar a função $P_N(r)$ com sendo contínua na variável r . Portanto, para localizar o máximo de P basta calcular $\left. \frac{dP}{dr} \right|_{r=\tilde{r}} = 0$ ou equivalentemente $\left. \frac{d \ln P}{dr} \right|_{r=\tilde{r}} = 0$. Para investigar o comportamento de $P(r)$ próximo de seu valor máximo, é conveniente definir $r \equiv \tilde{r} + \eta$ e assim expandir a função $\ln P(r)$ em torno de \tilde{r} , visto que a função $\ln P$ varia muito mais lentamente do que a função P e portanto na expansão em

série da função $\ln P$, a convergência é mais rápida do que para a expansão da função P . Logo:

$$\ln P(r) = \ln P(\tilde{r}) + \left. \frac{d \ln P}{dr} \right|_{r=\tilde{r}} \eta + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 \ln P}{dr^2} \right|_{r=\tilde{r}} \eta^2 + \frac{1}{6} \left. \frac{d^3 \ln P}{dr^3} \right|_{r=\tilde{r}} \eta^3 + \dots \quad (2.6)$$

Quando η é suficientemente pequeno, os termos de ordem superior podem ser desprezados e sabendo que $\left. \frac{d \ln P}{dr} \right|_{r=\tilde{r}} = 0$, então para a primeira aproximação da expansão em série, temos:

$$P(r) = \tilde{P} e^{\frac{1}{2} B_2 \eta^2} \quad (2.7)$$

onde $B_2 \equiv \left. \frac{d^2 \ln P}{dr^2} \right|_{r=\tilde{r}}$. Para encontrarmos o valor de B_2 , basta analisar a expansão da equação 2.5. Para isso, temos:

$$\ln P(r) = \ln N! - \ln r! - \ln(N-r)! + r \ln p + (N-r) \ln q \quad (2.8)$$

lembrando que para um certo número y , inteiro, tal que $y \gg 1$, $\ln y!$ pode ser considerada como uma função quase contínua tal que:

$$\frac{d \ln y!}{d y} \approx \frac{\ln(y+1)! - \ln y!}{1} = \ln \frac{(y+1)!}{y!} = \ln(y+1) \quad (2.9)$$

portanto, no caso em que $y \gg 1$, temos $\frac{d \ln y!}{d y} \approx \ln y$. Assim, derivando a equação 2.8, obtemos:

$$\frac{d \ln P}{dr} = -\ln r + \ln(N-r) + \ln p - \ln q \quad (2.10)$$

Sabendo que $\left. \frac{d \ln P}{dr} \right|_{r=\tilde{r}} = 0$, logo $\ln \left[\frac{(N-\tilde{r})p}{\tilde{r}q} \right] = 0$ e assim $\tilde{r} = Np$. Derivando a equação 2.10 para $r = \tilde{r}$, considerando que $\tilde{r} = Np$ e que $p + q = 1$, obtemos:

$$B_2 = -\frac{1}{Npq} \quad (2.11)$$

Uma vez determinado B_2 , precisamos agora obter o valor de \tilde{P} . Para isso, basta utilizarmos a condi-

ção de normalização $\sum_{r=0}^N P(r) = 1$. Considerando P e r como quantidades quase contínuas, temos:

$$\sum_{r=0}^N P(r) = 1 \approx \int P(r) dr = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\tilde{r} + \eta) d\eta = 1 \quad (2.12)$$

Notemos que nosso integrando sobre η é uma aproximação razoável visto que para valores de η cada vez maiores, nossa integral gera valores desprezíveis diante de η pequeno. Assim, substituindo a equação 2.7 nesta última, temos:

$$\tilde{P} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2Npq} \eta^2} d\eta = \tilde{P} \sqrt{2\pi Npq} = 1 \quad (2.13)$$

onde aqui usamos o fato de que $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} x^n dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \alpha^{-\frac{1}{2}}$. Finalmente obtemos a aproximação gaussiana que é a probabilidade, depois de N passos, de tomar r passos para a direita.

$$P(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Npq}} e^{-\frac{(r-Np)^2}{2Npq}} \quad (2.14)$$

Tal distribuição é conhecida como *Distribuição Gaussiana*. Assim notamos a conexão entre caminhada aleatória Browniana com a distribuição gaussiana, esta que também está conectada em diversos outros sistemas, apresentando características bastante particulares. Se tivermos uma caminhada na qual o caminhante se distancia da origem de forma muito mais rápida quando comparada à caminhada Browniana, de forma que seja intercalado comprimento de passos longos com curtos, então teremos uma *Caminhada de Lévy*, surgindo assim um outro tipo de distribuição, chamada de *Distribuição de Lévy*. Tais tópicos serão discutidos nas seções seguintes.

2.2.1 Distribuição Normal

A *Distribuição Normal*, também chamada de *Distribuição Gaussiana*, é uma das mais importantes distribuições, visto que medidas obtidas em diversos processos aleatórios, em vários cenários da natureza, apresentam uma distribuição normal [5, 6]. Matematicamente, a distribuição normal é descrita conforme equação:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.15)$$

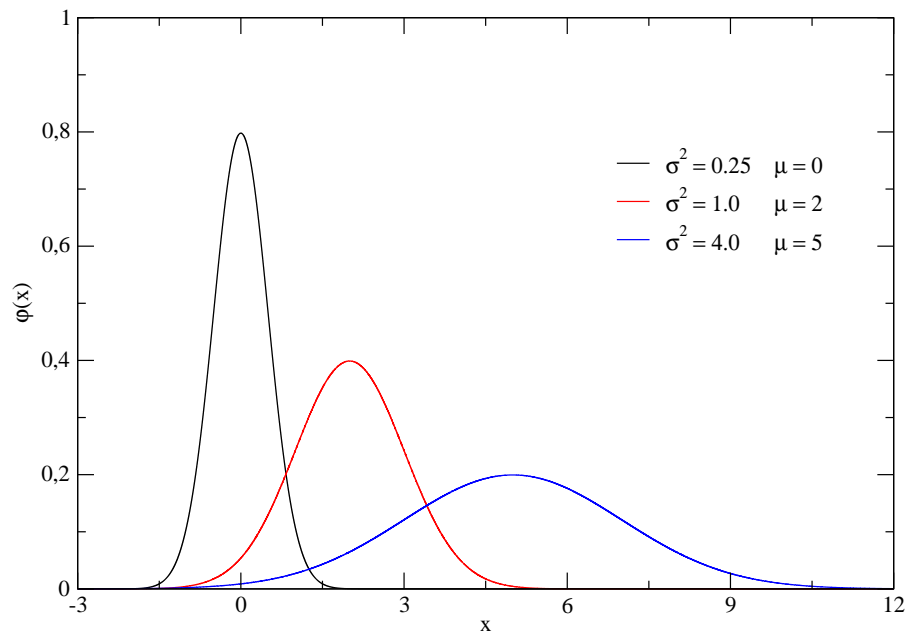


Figura 2.2: Exemplo de distribuição gaussianas para diferentes valores de média μ e variância σ^2 .

onde μ é o valor médio da distribuição, chamado também de primeiro momento. σ é o desvio padrão e σ^2 é a variância, também denominada como segundo momento. Notemos que, uma vez dado a valor μ e σ , então $\varphi(x)$ pode ser obtida para qualquer valor real de x , gerando com isso a curva da distribuição gaussiana conforme exemplo na figura 2.2. Algumas propriedades interessantes desse tipo de distribuição são:

- Presença de simetria;
- Forma de sino;
- Variação de $-\infty$ a ∞ ;
- Sua forma é definida por uma média μ e por um desvio padrão σ ;
- Média, mediana e moda são numericamente iguais.

Aqui vale salientar três observações importantes:

1. É uma distribuição teórica, ou seja, dados experimentais não teriam todas as propriedades acima descritas, apenas confirmariam a descrição de normalidade. Um exemplo desse ponto está no fato de que dados experimentais são finitos, fazendo com que a distribuição não pertença ao intervalo $[-\infty, \infty]$ [6].
2. Toda distribuição normal é numericamente *única*. Assim, por exemplo, a distribuição normal da altura dos homens de uma determinada região é diferente da distribuição normal da massa corpórea de mulheres da mesma região. Porém, embora os valores das médias e desvios padrões sejam diferentes, tais distribuições ainda conservam sua forma sinuosa e simétrica [6].
3. A distribuição normal geralmente pode ser usada como uma aproximação de outros tipos de distribuições, tais como a distribuição de Poisson e a distribuição Binomial [5].

2.3 Voos e Caminhadas de Lévy

Voos e caminhadas de Lévy formam um tipo de caminhada aleatória cujo comprimento dos passos ℓ sorteados seguem uma distribuição de probabilidade que em geral é do tipo:

$$P(\ell) \sim \ell^{-\mu} \quad (2.16)$$

onde $1 < \mu \leq 3$. Em outras palavras, voos ou caminhadas de Lévy nada mais são do que caminhadas aleatórias, onde o comprimento dos passos escolhidos são independentes, em geral intercalando passos grandes com passos curtos. Quando assumimos que o tempo necessário para realizar um passo ℓ seja proporcional ao tamanho de ℓ - com velocidade constante - então temos uma caminhada de Lévy (*Lévy Walks*). Caso este tempo de realização do passo não seja proporcional a ℓ , então teremos Voos de Lévy (*Lévy Flights*) [7]. Foi descoberto que esse tipo de caminhada é útil para descrever um grande número de fenômenos físicos, e mais recentemente, as caminhadas de Lévy foram observadas em vários sistemas biológicos. Por exemplo, alguns pássaros tais como os Albatrozes realizam esse tipo de caminhada na busca por alimentos [8, 9] e modelos de evolução de DNA, baseados em voos de Lévy, foram sugeridos por *Buldyrev* [10]. A Esse tipo de caminhada aleatória temos uma distribuição associada, a qual é conhecida como *Distribuição de Lévy* e que será abordada logo adiante.

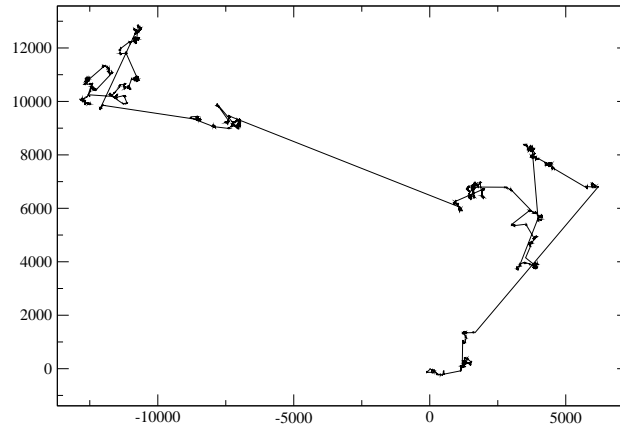


Figura 2.3: Voos de Lévy em 2D para $N = 10.000$ passos e $\mu = 2.0$.

Na figura 2.3 notamos voos grandes intercalando com voos pequenos, aumentando a difusão de caminhada, cobrindo uma maior área de busca.

2.3.1 Distribuição de Lévy

Como já comentado anteriormente, existem muitos processos na natureza que são governados pelas *Distribuições de Lévy*, como exemplo o ritmo cardíaco de indivíduos saudáveis ou a fotocondutividade em semicondutores amorfos. Tais processos, com suas respectivas distribuições, vêm ganhando atenção científica cada vez maior, devido a explicações físicas que justificam diversos mecanismos que apresentam distribuição de lévy. Essa distribuição também tem uma certa importância porque é uma entre poucas distribuições estáveis que tem uma expressão analítica fechada. Essa classe de distribuições estáveis foi caracterizada por *Paul Lévy* em seu estudo de *somas de termos independentes distribuídos identicamente*, no ano de 1920 [11], e posteriormente ficou mais conhecida como *Distribuições Alfa-Estáveis de Lévy*. A maneira mais concreta de descrever todas as possíveis distribuições estáveis de Lévy é através da função característica ou da transformada de Fourier [11]. No caso em que uma variável aleatória X , com uma função densidade de probabilidade $f(x)$, é estável e normalizada, sua função característica (forma relativamente simples que uma dada função toma para certas leis de distribuição, cuja principal importância é o papel de deduzir facilmente os

momentos de qualquer ordem de uma dada distribuição) é definida por:

$$\phi(x) = \langle e^{iuX} \rangle = \begin{cases} \exp(-|\gamma u|^\alpha [1 - i\beta(\tan \frac{\pi\alpha}{2})(\text{sign}u)] + i\delta u) & \alpha \neq 1 \\ \exp(-|\gamma u|^\alpha [1 + i\beta \frac{2}{\pi}(\text{sign}u)\log|u|] + i\delta u) & \alpha = 1 \end{cases} \quad (2.17)$$

onde a função sinal é definida como:

$$\text{sign}u = \begin{cases} -1 & u < 0 \\ 0 & u = 0 \\ 1 & u > 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

Notemos que essas distribuições alfa-estáveis de Lévy são especificadas por 4 parâmetros: γ , α , δ e β . Calculando a transformada de Fourier da função característica descrita acima, para um determinado conjunto de parâmetros:

$$f(x; \alpha, \beta, \gamma, \delta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u) e^{-iux} dx \quad (2.19)$$

encontramos diversas possibilidades de distribuições. Para garantirmos que tais distribuições sejam estáveis, é necessário que $0 < \alpha \leq 2$, $\gamma > 0$, $-1 \leq \beta \leq 1$ e δ podendo ser qualquer número real. O parâmetro α é chamado de parâmetro de estabilidade e está relacionado com a curtose da distribuição. O parâmetro β está relacionado com o grau de assimetria em torno da média. Assim, qualquer distribuição simétrica tem $\beta = 0$. O parâmetro γ está relacionado com o parâmetro de escala (ou parâmetro de dispersão) e está conectado com a largura da distribuição. Finalmente, o parâmetro δ nos dá a média ou média de centralidade da distribuição.

Poucas são as opções em que encontramos uma expressão analítica fechada para a função densidade de probabilidade (“probability density function” - PDF) $f(x)$, que obedece (2.19) com ϕ dado por (2.17). São justamente essas poucas opções que resultam as distribuições mais importantes e utilizadas no meio científico, que são as *Distribuições Gaussianas* (já mencionadas na seção anterior desse capítulo, e que tem $\gamma = \sigma^2$ e $\delta = \mu$ como parâmetros variáveis, $\alpha = 2$ e $\beta = 0$ como parâmetros fixos), *Distribuições de Cauchy* (que apresentam γ e δ como parâmetros variáveis, $\alpha = 1$ e $\beta = 0$

como parâmetros fixos) e as *Distribuições de Lévy*, cuja PDF é:

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \frac{1}{(x - \delta)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\gamma}{2(x - \delta)}\right), \quad \delta < x < \infty \quad (2.20)$$

Notamos que o limite inferior do domínio dessa função tende a δ . Nessa distribuição temos $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\beta = 1$, sendo portanto uma distribuição não-simétrica. A figura 2.4 ilustra uma dessas distribuições de Lévy.

Uma característica bastante importante nas distribuições de Lévy é a divergência do primeiro e segundo momento da distribuição, ou seja, da média e da variância respectivamente. A divergência do segundo momento resulta em outra característica que é a presença de “caudas largas”, sendo uma das principais assinaturas da distribuição de Lévy, podendo ser observada facilmente na figura 2.4.

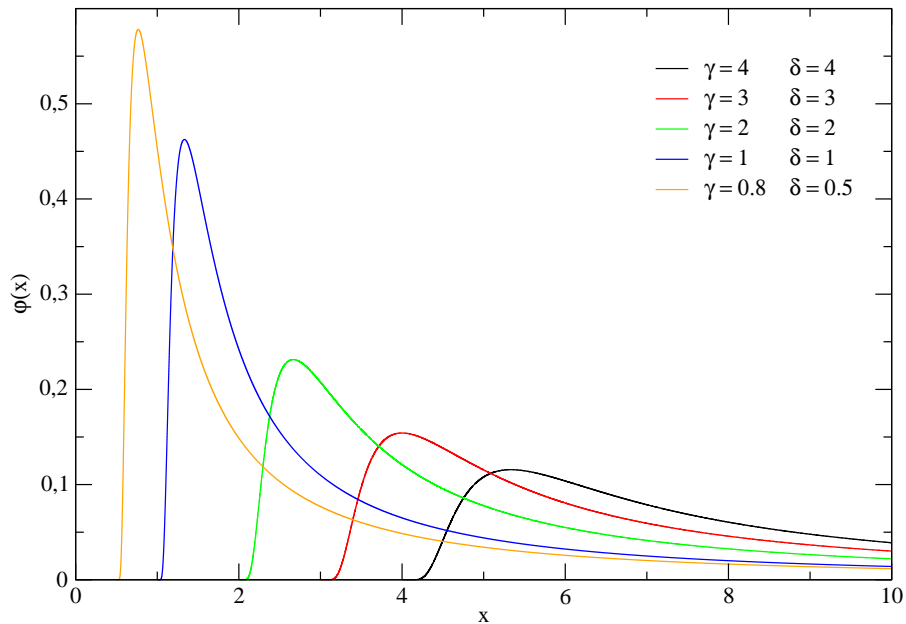


Figura 2.4: Distribuições de Lévy para diferentes valores γ e δ .

Capítulo 3

Sistemas Complexos e Fenômenos Críticos

3.1 Sistemas Complexos

Sistemas complexos é um tópico da física contemporânea presente em vários cenários da natureza, como na econofísica, biofísica, medicina, físico-química, cristais líquidos, clima terrestre, redes neurais, processos de busca etc. De uma forma geral, quando se une um grande número de sistemas, as propriedades macroscópicas ou coletivas não estão relacionadas com as propriedades dos seus constituintes individuais e, nesse caso, o sistema composto é chamado de *Sistema Complexo* [12]. Pode ser entendido também como um composto de muitos elementos e/ou subsistemas diferentes, interagindo espacialmente e temporalmente de forma não linear, gerando padrões emergentes que são observáveis apenas em escalas maiores quando comparados a escala de seus subsistemas [13]. Então fica claro o porquê de notarmos a presença de sistemas complexos em muitos setores da ciência e do mundo cotidiano, tais como turbulências, doenças, epidemias, extinções entre outros nos quais muito frequentemente estão relacionados com a vida do homem.

Alguns dos sistemas complexos são os *Sistemas Caóticos* (cuja principal característica é a sensibilidade das condições iniciais), os *Sistemas Complexos adaptativos* ou *Auto-Organizáveis* (sistemas capazes de aprender e mudar com as experiências as quais se passam com ele, tendo como exemplos colônias de insetos, o cérebro, ecossistemas, sistemas sociais), e os *Sistemas Não-Lineares* (sistemas que não obedecem ao princípio de superposição, ou seja, quando a soma do comportamento das partes do sistema não resulta no comportamento do sistema como um todo).

Sistemas Complexos apresentam várias características e propriedades, tais como invariância de escala, leis de potência, criticalidade e universalidade. Tais características são observadas em sistemas nas mais variadas áreas da ciência, como em sistemas predador-presa e processos de busca - foco de assunto dessa dissertação. Em seguida abordaremos algumas dessas características.

3.1.1 Invariância e Lei de Escala

Invariância de escala é a característica que certos objetos têm de não ter forma (padrão) alterada(o) quando mudamos sua escala espacial. Em geral, atribuímos essa característica ao termo de objetos *auto-similares*. Fractais, por exemplo, são interessantes classes de objetos que apresentam essa característica. Não apenas presente na geometria de objetos, a invariância de escala também é vista na matemática, referindo-se num caso mais geral à invariância de funções e/ou curvas. Essa invariância funcional pode ser vista, por exemplo, quando tomamos a seguinte função $f(x) = ax^\beta$, pois dilatando (ou comprimindo) a escala da função por um fator h , teremos:

$$f(hx) = a(hx)^\beta = h^\beta ax^\beta = h^\beta f(x) \propto f(x) \quad (3.1)$$

isso implica dizer que a curva não foi descaracterizada a menos do fator h^β multiplicada pela função, sendo h definido como o comprimento de reescala. Generalizando, o requisito para que uma função $f(x)$ seja invariante sob todo processo de reescala é usualmente tomado como sendo:

$$f(x) = \lambda^{-\alpha} f(\lambda x) \quad (3.2)$$

onde α é o expoente característico da função $f(x)$ para qualquer λ quando mudamos sua escala.

Uma *Lei de Escala* (ou usualmente chamada de *Lei de potência*) nada mais é do que uma relação polinomial que exhibe propriedades de invariância de escala. Essas leis de potência ocorrem em diversos fenômenos na natureza, como na lei de Coulomb, lei da gravitação universal etc, e tem relevado interesse científico visto que tais relações de leis de potência podem descrever diversas classes de mecanismos físicos e matemáticos com um certo grau de facilidade, tal que a observação dessas leis nas informações de um dado mecanismo físico, pode especificar a espécie do processo físico e assim entender o fenômeno natural sob investigação. Notemos, por exemplo, que a função

densidade de probabilidade do tamanho do passo escolhido numa caminhada de lévy, isto é, $P(\ell) \sim \ell^{-\mu}$, segue a um comportamento tipo lei de potência, tendo portanto invariância de escala (auto-similaridade).

Em sistemas complexos as leis de potência são geralmente consideradas como uma “assinatura” do processo físico em questão. Essa assinatura geralmente é observada quando plotamos sua função na escala $\log - \log$, onde teremos $\log f(x) = \alpha \log x$, evidenciando a linearidade da função nessa escala. Assim, uma forma prática e segura da verificação de existência de lei de potência para uma dada função, é plotar os pontos da informação que temos na escala logarítmica. Caso a função resultante seja uma reta, então temos lei de potência para essa função onde o expoente α pode ser obtido através de uma simples regressão tipo lei de potência, que nos dá a equação da reta plotada com o valor de α especificado.

3.2 Fenômenos Críticos

A palavra “crítico” é usada na física com vários sentidos. Aqui consideraremos um fenômeno crítico aquele que é estudado em física estatística e que tem ligação direta com transições de fase [14]. Esses fenômenos ocorrem geralmente em sistemas que se encontram longe do equilíbrio, em processos no qual a história é importante [15]. Tais fenômenos também estão relacionados com a física dos pontos críticos, esses geralmente vistos em sistemas que apresentam transições de fase. Nesse sentido, fenômenos críticos ocorrem na borda da transição, entre a fase “ordenada” e “desordenada” de um sistema, tendo nesse ponto forte correlação (geralmente denotada por ξ e que mede a ordem do sistema em questão) e divergência de certas quantidades físicas presentes no sistema. Essa transição entre fases ocorre em pontos que são conhecidos como *pontos críticos* e a divergência (singularidade) de quantidades associadas a transição (tal como comprimento de correlação, calor específico, susceptibilidade) está associada aos *expoentes críticos*.

As teorias clássicas de fenômenos críticos passaram por um processo mais rigoroso de análise a partir de 1960, quando foram desenvolvidas técnicas para a realização de experimentos na vizinhança de *pontos críticos* [15]. Os resultados das experiências, bem como diversos outros resultados teóricos, apontavam para a existência de classes de universalidade (abordado mais adiante),

definidas por alguns poucos expoentes críticos diferentes dos expoentes clássicos [2]. Em geral, o estudo de transições de fase representa uma boa forma de entender o comportamento desses pontos críticos, assim como o fenômeno crítico associado ao sistema. Nesse sentido, há dois grandes tipos de transições de fase: transições de fase de primeira ordem (ou transições descontínuas) e transições de fase de segunda ordem (ou transições contínuas).

3.2.1 Transições de Fase de Primeira Ordem

É caracterizada pela transformação termodinâmica de uma fase para outra. Quando essa transição ocorre de forma abrupta, temos então uma transição de primeira ordem ou descontínua. Um exemplo bastante conhecido com respeito à transição de fase de primeira ordem é a condensação da água ou o derretimento do gelo, na qual a passagem de um estado para outro ocorre numa dada temperatura e na coexistência de fases (presença de calor latente). Existem diversos outros sistemas na natureza que apresentam esse tipo de transição. Considerando como energia livre o trabalho que pode ser extraído de um sistema termodinâmico, as transições de fase de primeira ordem são aquelas onde a primeira derivada da energia livre diverge ou não é definida em relação a variável termodinâmica no ponto de transição. Dessa forma elas são consideradas como transições de fase descontínuas, apresentando justamente algum tipo de descontinuidade na função num certo ponto de transição.

Na análise de transições de fase se faz necessário a definição de uma quantidade que descreva esse processo de transição. Essa quantidade geralmente é conhecida como parâmetro de ordem, que está em função de outra quantidade, esta chamada de parâmetro de controle. Assim, com a variação do parâmetro de controle, podemos analisar a evolução do parâmetro de ordem e assim estudar a transição do sistema. Este parâmetro de ordem precisa ser definido de tal forma que seja identicamente zero na fase desordenada (maior entropia, definida como a fase após o parâmetro de controle crítico) e maior que zero (ou finito) na fase ordenada (menor entropia e definida antes do parâmetro de controle crítico). Quando a primeira derivada do parâmetro de ordem é descontínua no ponto crítico (no limite termodinâmico), então temos presença de transição de fase de primeira ordem, tendo também como característica peculiar a coexistência de estados no momento da transição. A escolha de um parâmetro de ordem para um dado sistema geralmente não é trivial e está associado à ordem de longo alcance do sistema no limite termodinâmico [16]. Existem casos nos quais se faz

necessário um maior rigor para a escolha desse parâmetro, mas a grosso modo podemos dizer que o parâmetro de ordem caracteriza o tipo de ordem que cresce espontaneamente quando estamos abaixo do parâmetro de controle crítico.

3.2.2 Transições de Fase de Segunda Ordem

De uma forma geral, transições de fase de segunda ordem ocorrem na mudança de uma fase a outra de forma contínua, ou seja, não-abrupta. Por isso esse tipo de transição também é conhecida como transições contínuas. Essas transições se identificam com os fenômenos críticos e os valores das variáveis macroscópicas que especificam as condições nas quais a transição ocorre, são conhecidos como pontos críticos [17]. Assim, nessas transições, não temos coexistência de fases e a mudança entre uma e outra fase ocorre de forma contínua, além disso, para esse tipo de transição devemos ter continuidade da primeira derivada e no mínimo descontinuidade da segunda derivada do parâmetro de ordem[18]. Para alguns sistemas, há transições contínuas para certas condições e transições descontínuas para outras. Por exemplo, a condensação de gases é uma transição de fase descontínua a baixas temperaturas e apresenta transição contínua distante de baixas pressões, no ponto crítico. Um outro grande exemplo bastante estudado na literatura a respeito de transições contínuas é o sistema paramagnético-ferromagnético, que apresenta como parâmetro de ordem a magnetização e como parâmetro de controle a temperatura. Notemos na figura 3.1 o comportamento de $|M|$ - parâmetro de ordem - em função da temperatura para dois diferentes tamanho de rede. A transição do estado magnetizado (fase ordenada) para o desmagnetizado (fase desordenada) ocorre num processo sem descontinuidades.

Um exemplo visual entre transições contínuas e descontínuas pode ser visto na figura 3.2, para o caso de materiais piroelétricos (materiais que quando sujeitos a uma tensão mecânica ou pressão dinâmica geram cargas elétricas), ao analisar o efeito de polarização próximo à temperatura de Curie. Os fenômenos associados à transição de ordem contínua são chamados de fenômenos críticos, justamente devido à presença de expoentes críticos que a caracteriza.

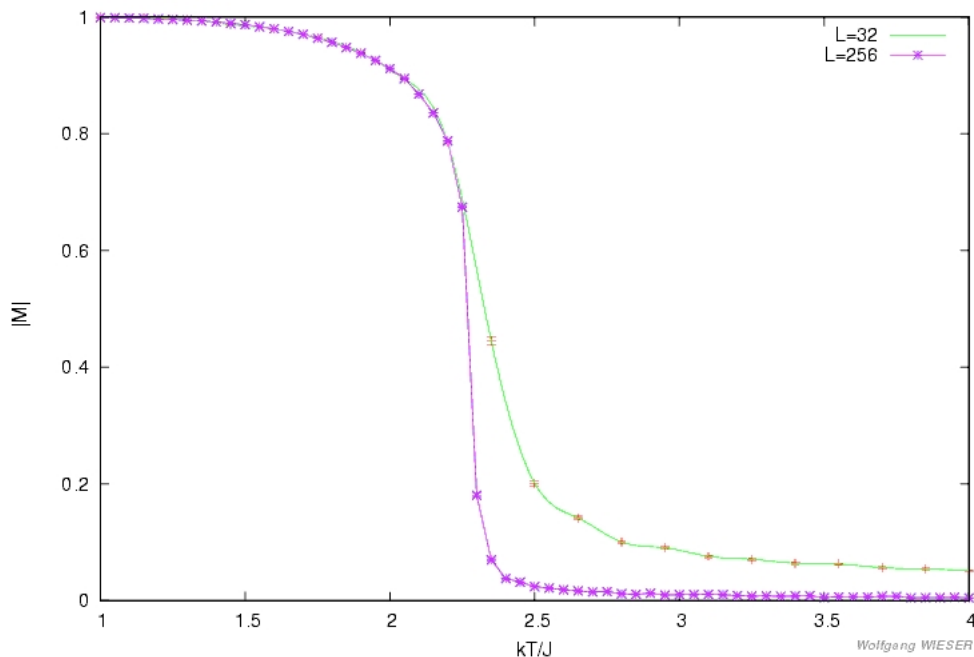


Figura 3.1: Magnetização vs. Temperatura para dois diferentes tamanhos do sistema $L \times L$ num modelo simples de Ising [19].

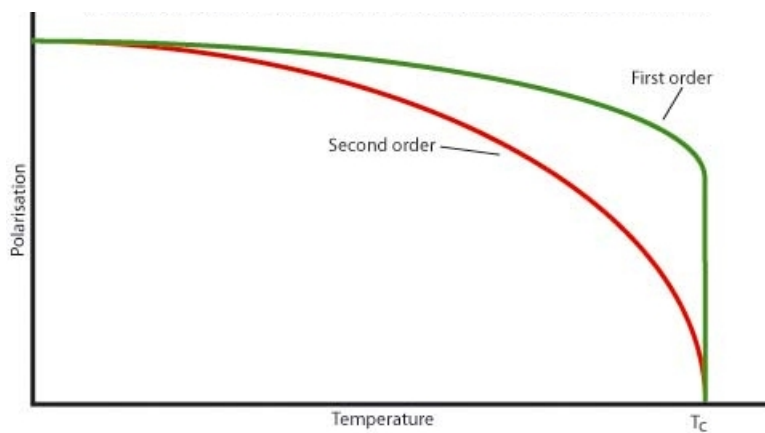


Figura 3.2: Polarização de materiais piroelétricos próximos à temperatura de Curie como exemplo qualitativo entre transições de segunda ordem (*second order*) e de primeira ordem (*first order*) [20].

3.3 Universalidade

Uma importante questão no estudo de fenômenos críticos é como o parâmetro de ordem e outras variáveis termodinâmicas variam conforme o sistema se aproxima do ponto crítico. Como já comentado, associado ao ponto crítico temos os *expoentes críticos* que caracterizam a transição. Estes têm uma característica bastante peculiar: são insensíveis quanto a detalhes macroscópicos e depen-

dem somente de características mais gerais do sistema, como a dimensionalidade do sistema (1D, 2D etc) e a dimensionalidade de seu parâmetro de ordem (número de componentes do parâmetro - graus de liberdade). Alguns sistemas com mesma dimensionalidade mas diferentes quanto à estrutura e mecanismo microscópico, têm os mesmos expoentes críticos e com isso formam o que é denominado de *Classe de Universalidade* [17]. O sistema ferromagnético uniaxial (que pode ser descrito pelo modelo de *Ising*) [21], um simples sistema líquido e um sistema de duas misturas líquidas pertencem à *classe de universalidade de Ising*. O sistema Líquido ^4He e o modelo-XY são membros da *classe de universalidade XY* [21]. Um sistema ferromagnético isotrópico descrito pelo modelo de Heisenberg pertence à *classe de universalidade de Heisenberg* [21]. Portanto, podemos ter várias classes de universalidade onde cada uma pode englobar sistemas com parâmetros e variáveis diferentes mas com mesmos expoentes críticos.

3.4 Teoria de Escala em Sistemas de Tamanho Finito

Leis fundamentais da teoria moderna de transição de fases podem ser formuladas através de propriedades de escala [16]. Essas propriedades expressam assintoticamente a dependência homogênea das funções termodinâmicas em função dos parâmetros termodinâmicos próximo ao ponto de transição de fase. A busca pelo entendimento do modo pelo qual as singularidades termodinâmicas são modificadas ao levar em consideração sistemas finitos, em algumas (ou todas) dimensões, é feito pela *Teoria de Escala de Tamanho Finito* [16]. Podemos definir como *sistemas de tamanho finito* qualquer sistema que tem tamanho finito de no mínimo uma dimensão espacial. É importante salientar que singularidades das funções termodinâmicas nos pontos críticos ocorrem somente no limite termodinâmico. Se algum sistema é completamente finito, nenhuma singularidade seria observada e, a grosso modo, poderíamos pensar que não haveria nenhuma transição de fase. No entanto a realidade da natureza apresenta um número muito grande mas finito de partículas ($N \sim 10^{23}$), e transições de fase ainda continuam sendo observadas. Mesmo em simulações numéricas, onde em diversas situações os sistemas em questão tem uma quantidade pequena de partículas sendo avaliadas, os fenômenos críticos ainda continuam presentes. A grande questão, portanto, é como entender e analisar as transições de fases que ocorrem em sistemas de tamanho finito, longe do limite termodinâmico.

Muitos matemáticos e físicos se interessaram por esta questão, principalmente nas décadas de 70 e 80, visando uma explicação para a presença de transição em sistemas finitos. Com isso, técnicas importantes e muito usadas recentemente foram desenvolvidas para este fim. Uma delas é o processo de *Renormalização Numérica Fenomenológica*, desenvolvida por *M. E. Fisher* [22] em 1971 e que ainda continua sendo bastante estudada e aplicada nos mais variados sistemas físicos. De acordo com a teoria de Fisher, qualquer variação de uma quantidade P_L de um sistema linear de tamanho L , pode ser escrita como:

$$P(p, L) \sim L^{-\zeta} f(u) \quad (3.3)$$

para valores arbitrários do fator de escala L , onde $u = L^{1/\nu}(p - p_c)$ e $f(u)$ é uma função não-singular. Aqui a variável p representa o parâmetro de controle. Reescrevendo, temos:

$$P(p, L) \sim L^{-\zeta} f[(p - p_c)L^\phi] \quad (3.4)$$

onde $\phi = 1/\nu$. No limite em que $L \rightarrow \infty$, P_∞ segue uma lei de potência tal que o expoente ζ define o comportamento crítico da quantidade P , sendo esse expoente chamado de dimensão de escala da quantidade avaliada[23]. Como precisamos analisar o comportamento do sistema para tamanho L finito, uma alternativa é escalar P com um novo fator de escala L_o , tal que:

$$P(p, L_o) \sim L_o^{-\zeta} f[(p - p_c)L_o^\phi] \quad (3.5)$$

Dividindo a equação 3.4 por 3.5, temos:

$$\frac{P(p, L)}{P(p, L_o)} \sim \left(\frac{L}{L_o}\right)^{-\zeta} \frac{f[(p - p_c)L^\phi]}{f[(p - p_c)L_o^\phi]} \quad (3.6)$$

Notamos, com isso, que no caso onde nosso parâmetro de ordem evolui para a região onde $p \rightarrow p_c$ (próximo ao ponto crítico), o comportamento da quantidade P tem uma dimensão de escala ζ , e este expoente é o mesmo independente dos pares de L que podemos obter no cálculo da equação 3.6. Assim, o comportamento da quantidade P é tipo uma lei de potência na vizinhança do ponto crítico, e o “expoente característico da transição” é denominado de expoente crítico. O cálculo do expoente ϕ é semelhante ao que foi feito acima, e sua abordagem será dada com mais ênfase no capítulo 5. Dessa

maneira os expoentes críticos podem ser obtidos mesmo em tamanhos de rede finita, utilizando para isso a hipótese de escala e de renormalização inicialmente elaborada por Fisher.

Capítulo 4

Estratégia de Busca na Borda da Extinção

Aqui nós analisamos o problema geral de um caminhante aleatório (buscador) em busca por alvos (fonte de energia) que se movimentam também aleatoriamente. Investigamos como a Energia acumulada do buscador varia com a densidade de alvos via simulação numérica para diferentes estratégias de busca. Introduziremos algumas motivações, o problema de estudo, em seguida descreveremos o modelo de busca e por fim os resultados obtidos. Esse capítulo é basicamente um retrato do nosso primeiro trabalho nesta área de pesquisa que resultou em nosso primeiro artigo, o qual foi motivante para a continuação dos estudos e na obtenção de novos resultados.

4.1 Motivação

É fato reconhecer que grande parte do tempo de vida de diversos animais é dedicada na busca por alimentos. Essa dedicação, obviamente, é para gerar continuidade ao processo metabólico do organismo, garantindo portanto sua sobrevivência. Uma outra parte do tempo de vida é dedicada na busca por companheiros(as) sexuais com objetivo da reprodução e evolução da espécie. No meio humano, existem várias outras situações de processos de busca, como por exemplo a busca de poços petrolíferos ou busca por crianças perdidas. Em todos esses exemplos, o alvo a ser encontrado pode estar em movimento ou em repouso em relação ao organismo buscador e sua localização a priori não é conhecida. Nesse sentido, tendo a necessidade de busca por esses alvos, é fundamental para o buscador realizar um processo de busca aleatória eficiente, que minimize o tempo e a energia necessária

para a busca.

No começo da década de 70, *Hassell* e *May* descobriram que trajetórias balísticas seguem como estratégia de busca de alguns animais predadores [1]. Foi visto também que algumas espécies de peixes (tubarões)[24], de mamíferos(macacos-aranhas)[25] e de aves-marítimas(albatrozes)[8], apresentam processos de busca balísticas, oriundas das caminhadas de Lévy. Já algumas outras espécies de peixes e insetos intensificam o processo de busca em períodos de escassez de comida [8, 26, 27] - baixa densidade de alvos - aumentando a difusão de seus movimentos quando comparados às condições normais. Todos esses fatos acima citados nos motivaram nesse estudo, buscando entender o porquê que a mudança do processo de busca favorece (ou não) à sobrevivência em ambientes de baixas densidades de alvos para os buscadores.

4.2 O Problema

Num contexto maior, nosso problema se resume em entender como um processo dinâmico consegue alcançar um determinado estado específico sem ser necessária a inclusão de fatores externos no sistema. Relacionado a esse problema, conceitos como criticalidade auto-organizada e borda do caos são considerados importantes para entender sistemas que se auto-ajustam durante a dinâmica. Temos, portanto, um problema de processos reação-difusão, o qual tem vasta aplicação em física, química, biologia, ecologia e até mesmo em fenômenos sociais.

O comportamento da dinâmica de busca em altas dimensões seguem as equações de campo médio. Já para baixas dimensões a presença de flutuações locais tornam-se importantes. Em particular, alguns estudos têm mostrado que a natureza da dinâmica de difusão (caminhadas aleatórias Brownianas vs. caminhadas de Lévy) tornam-se relevantes em baixas dimensões[28, 29]. Para entender essa dinâmica de busca, tem-se realizado uma grande aplicação de caminhadas aleatórias para descrever o movimento de animais em busca, assim como também estudar a taxa de encontro entre animais e alvos (sistema predador-presa). Essas aplicações tornam-se importantes justamente pela necessidade de interação entre animais de mesma espécie (reprodução) ou de espécies distintas (obtenção de alimento).

Nesse sentido, um fator indispensável à sobrevivência de organismos biológicos é a energia

calórica mínima necessária ao sustento das atividades metabólicas. Como já comentado anteriormente, muitos organismos gastam considerável parte de suas vidas essencialmente procurando por alimentos. Portanto, vamos considerar como nosso problema de estudo um caminhante realizando uma caminhada aleatória em busca por alvos que também se movimentam aleatoriamente e que podem somente ser detectados dentro de um raio máximo de visão do buscador.

Estudos desse problema de busca aleatória [26, 30, 31], em particular no contexto ecológico [8, 32], nos mostram como otimizar a eficiência de busca partindo de uma distribuição de lei de potência dos comprimentos dos passos sorteados ($\ell > r_\nu$) tomado pelo buscador:

$$P(\ell) \sim \ell^{-\mu} \quad (4.1)$$

com $1 < \mu \leq 3$. Para $\mu \geq 3$ temos distribuições gaussianas e para $1 < \mu < 3$ temos distribuições de Lévy. Notemos que para $\mu \leq 1$ não corresponde a distribuições normalizadas. Estudos têm mostrado que no limite de baixas densidades de alvos, o valor $\mu_{opt} = 2$ é o expoente de busca otimizado quando os alvos podem ser visitados qualquer número de vezes (buscas não-destrutiva) [26]. Por outro lado, temos $\mu_{opt} \rightarrow 1.0$ quando os alvos podem ser visitados apenas uma única vez, correspondente ao caso de buscas destrutivas [26].

4.3 Modelo de Busca

Nós simulamos dois caminhantes aleatórios - buscador e alvo - com velocidades escalares constantes e idênticas, numa rede periódica 1D, cujo comprimento dos passos é calculado através do método inverso obtido a partir da distribuição dada pela equação 4.1 [33], tal que:

$$\ell_j \sim x_j^{(1-\mu)^{-1}} \quad (4.2)$$

onde x_j é uma variável aleatória distribuída no intervalo (0,1). Variando o parâmetro μ , podemos estudar a melhor estratégia de busca que permite a sobrevivência do buscador no limite de baixas densidades de alvos. Trataremos do caso particular de alvos destrutíveis, ou seja, imediatamente após o processo de encontro o alvo é destruído e um outro surge numa posição aleatória da rede. O

mecanismo de movimentos dos caminhantes segue as regras:

1. O buscador e o alvo iniciam numa posição aleatória da rede de tamanho λ , tal que $d = \lambda/2$ é o comprimento máximo do tamanho do voo escolhido pelo buscador e pelo alvo.
2. De maneira aleatória, o buscador e o alvo escolhem o sentido de movimento e o tamanho do voo ℓ_j (obedecendo a condição $r_\nu < \ell_j \leq \lambda/2$) e movem-se com velocidades constantes.
3. A cada voo j executado, o buscador perde uma energia α_j . Assumimos que $\alpha_j = \alpha \ell_j$, sendo α uma constante (estudos têm mostrado que a função custo de locomoção dada de forma mais complexa não afeta o comportamento qualitativo durante a busca[30, 31]).
4. O buscador, a cada passo durante o voo, verifica se há (ou não) alvo em seu raio de visão r_ν . Se nenhum alvo for detectado depois de ℓ_j , então o buscador retorna ao passo 2.
5. Se o alvo é detectado, este é eliminado, o buscador ganha uma energia constante g e retorna ao passo 2. Um novo alvo é criado (obedecendo ao passo 2) numa posição aleatória da rede - processo de busca destrutiva.

4.4 Resultados

Para nosso processo de busca, a energia obtida pelo buscador após N passos é:

$$\xi_N = \xi_0 + \sum_{i=1}^N (g\delta_i - \alpha_i) \quad (4.3)$$

onde ξ_0 é a energia inicial do buscador. Se houver (não houver) encontro entre os organismos, $\delta_i = 1$ ($\delta_i = 0$). Através de simulação numérica de acordo com nosso modelo de busca (passos 1-5 acima descritos), mostramos na figura 4.1 a quantidade $(\xi_N - \xi_0)/N$ em função da densidade de alvos para diferentes valores dos expoentes μ , tanto para o buscador quanto para o alvo. A figura representa uma média sobre 1000 amostras, onde para cada realização o buscador a princípio caminha um total de $N = 10^4$ passos. Se durante a simulação de uma amostra a energia do buscador toma valor nulo (isto é, quando entra no estado absorvedor) antes de completar os N passos, então a simulação é abortada e a presente amostra contribui com energia zero para o cálculo da energia média. Esse processo

mostra uma forma simples de introduzirmos flutuações estatísticas no processo de busca. Foram usados vários conjuntos de parâmetros, onde na figura 4.1 temos a situação de $\xi_0 = 100$, $g = 100$, $\alpha = 1$, $r_\nu = 1$ e velocidades unitárias. Se $(\xi_N - \xi_0)/N = 0$, então a busca torna-se não eficiente, levando o buscador a extinção. Assim, para $g/\lambda < (g/\lambda)_c$ a busca é ineficiente e para $g/\lambda > (g/\lambda)_c$ a busca é eficiente. É fato notar também que a sobrevivência de um organismo é garantida quando há eficiência de busca, caso contrário, uma busca ineficiente ao longo do tempo resultará em morte. Portanto, $(g/\lambda)_c$ nos dá um valor quantitativo do limite de extinção e também uma idéia de transição entre a fase de densidades que geram eficiência de busca (sobrevivência) com a fase de densidades que geram ineficiência (extinção).

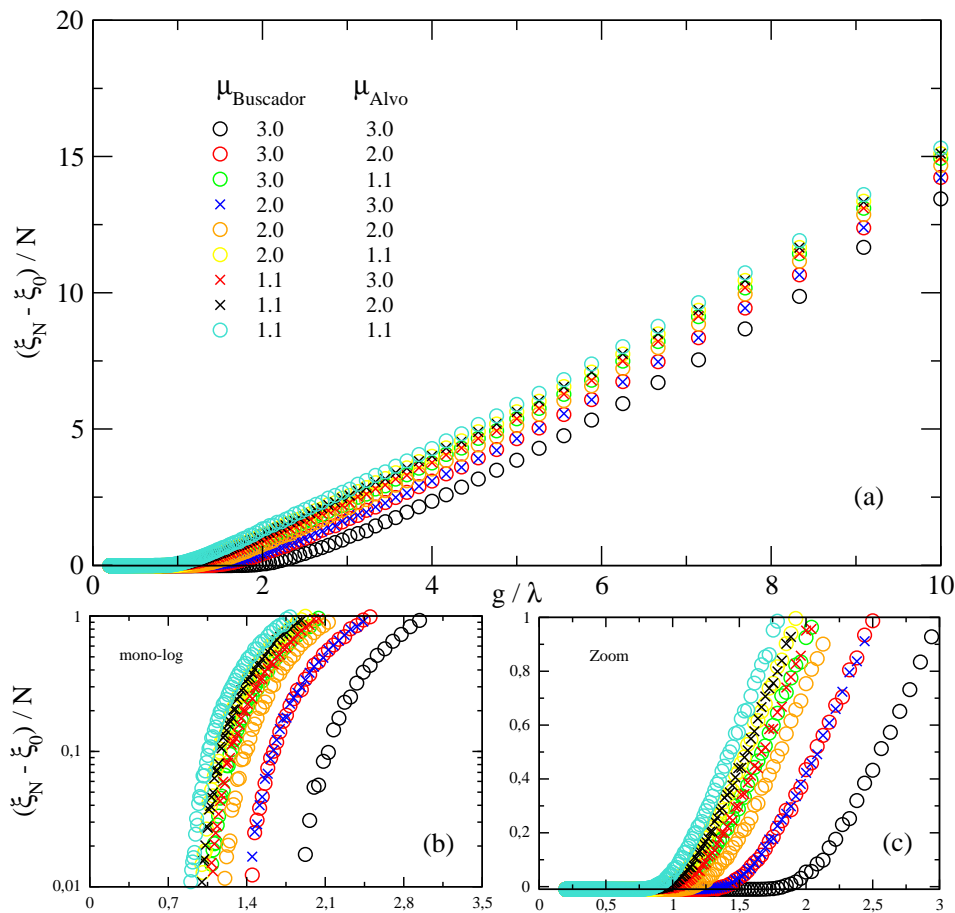


Figura 4.1: (a) O ganho energético em função da densidade efetiva normalizada g/λ para várias combinações de μ . (b) Ganho energético na escala mono-log, ajudando a evidenciar a região de densidade crítica. (c) Comportamento do ganho energético próximo à extinção [27].

Nós encontramos a maior eficiência de busca quando a estratégia adotada foge da difusão Browniana, ou seja, quando temos valores de $\mu \rightarrow 1$ (estratégia de busca balística). Podemos notar também que quanto mais superdifusivos forem os alvos, mais eficiente será o buscador. Na tabela 4.1 temos as densidades de sobrevivência crítica (ou seja, próximo à extinção) e $\rho_c \equiv \lambda_c/g$ (valores de ρ serão úteis para o próximo capítulo) para várias combinações de μ . Baseado nesses resultados, podemos concluir que a sobrevivência de um organismo depende claramente do tipo de difusão. Embora a diferença entre a estratégia de busca não seja significativa em altas densidades de alvos, ela é de suma importância no limite de baixas densidades, na beira da inanição, conforme visto na figura 4.1(c). Além disso, considerando um ecossistema como um todo (vários predadores e presas), nosso modelo pode ser relevante tão quanto é no caso simples aqui abordado, bastando assumir que cada indivíduo de uma determinada espécie tem uma energia calórica próximo a um dado valor médio. Então podemos esperar que uma espécie entrará inteiramente em extinção se a densidade de alvos per capita decair significativamente abaixo de um valor mínimo.

Tabela 4.1: Densidades críticas conforme conjuntos de parâmetros μ [27]

| $\mu_{Buscador}$ | μ_{Alvo} | Densidade crítica de sobrevivência $(g/\lambda)_c$ | $\rho_c \equiv (\lambda/c)_c$ |
|------------------|--------------|--|-------------------------------|
| 3.0 | 3.0 | 1.852 | 0.54 |
| 3.0 | 2.0 | 1.409 | 0.72 |
| 3.0 | 1.1 | 1.042 | 0.96 |
| 2.0 | 3.0 | 1.389 | 0.72 |
| 2.0 | 2.0 | 1.163 | 0.86 |
| 2.0 | 1.1 | 0.962 | 1.04 |
| 1.1 | 3.0 | 1.021 | 0.96 |
| 1.1 | 2.0 | 0.961 | 1.04 |
| 1.1 | 1.1 | 0.869 | 1.15 |

Capítulo 5

Dinâmica de Busca em Ambientes escassos

Neste capítulo iremos abordar resultados inéditos sobre a dinâmica de busca em ambientes escassos. Com objetivo de entender o significado físico das densidades críticas encontradas no capítulo anterior, iremos trabalhar com novas quantidades físicas, como por exemplo a taxa de sobrevivência de buscadores e a flutuação relativa da energia armazenada pelo buscador. Para investigar se há ocorrência de transições de fase, propomos analisar o processo de renormalização numérica particular ao nosso modelo de busca, a qual poderá ser útil na identificação de transições de fase e na busca por densidades e expoentes críticos.

5.1 Novos Problemas e Motivações

Como já comentado em capítulos anteriores, várias são as motivações para o problema da busca aleatória. Já sabemos que vários organismos necessitam interagir com outros devido a diversos fatores naturais e sociais, onde essa interação tem sido analisada através da poderosa ferramenta de caminhadas aleatórias descrita por esses organismos. Exemplos de sistemas predador-presa, flor-polinador, interação macho-fêmea etc [26], são alguns dos exemplos que podem ser descritos através da análise de caminhadas aleatórias e de processos de encontros. Também já sabemos que alguns organismos biológicos realmente adotam estratégias de busca de Lévy para otimizarem a busca por seus alvos (alimentos) e com isso garantir sua sobrevivência em tempos de inanição (seca, escassez de alimento). No capítulo anterior vimos que a estratégia de busca que otimiza a taxa de encontros,

consequentemente otimiza a densidade crítica de sobrevivência, é aquela que foge do comportamento browniano e tende à caminhada balística - movimento superdifusivo. Nesse momento, uma das principais questões a ser analisada é se há (ou não) algum tipo de transição entre uma “fase de sobrevivência” e uma “fase de extinção” (morte), ou seja, se acima de uma dada densidade crítica de alvos podemos ter uma fase na qual há sobrevivência e abaixo uma fase de extinção. Obviamente simulações numéricas têm limites computacionais e nosso modelo de busca será analisado através da teoria de escala de sistemas de tamanho finito na busca da transição.

No capítulo anterior vimos que estratégia de busca balísticas (para o processo de busca destrutiva) torna o buscador mais eficiente em densidades de alvos extremamente baixas, tendo sua eficiência máxima quando $\mu_{opt} \rightarrow 1^+$. Outro fato é que as densidades críticas dependem do conjunto de parâmetros de μ 's usados na simulação e que para um determinado conjunto de μ 's temos:

$$\left(\frac{g}{\lambda}\right)_c \Big|_{\mu_B=x, \mu_A=y} \approx \left(\frac{g}{\lambda}\right)_c \Big|_{\mu_B=y, \mu_A=x} \quad (5.1)$$

onde x e y pertencem ao intervalo $(1, 3]$. A equação acima foi comprovada numericamente na figura 4.1 mas sua veracidade já poderia ser esperada uma vez que a eficiência de busca depende essencialmente do número de encontros entre organismos, o que se torna indiferente quando trocamos os valores de μ dos organismos durante a caminhada. Uma vez que sabemos das densidades críticas, algumas questões surgem, tais como:

1. Nas densidades críticas temos pontos críticos característicos de uma transição de fase entre o estado de sobrevivência e o estado de extinção?
2. Caso tenhamos pontos críticos, que tipo de transição caracteriza essa dinâmica de busca?
3. Quais os expoentes críticos para cada densidade crítica? Expoentes críticos são iguais independente da estratégia de caminhada usada pelos organismos? Se sim, presença de uma classe de universalidade?

No decorrer do capítulo tentaremos responder algumas dessas perguntas diante dos resultados obtidos.

5.2 Modelo de Busca

Essencialmente o modelo de busca é o mesmo que o descrito no capítulo anterior, ou seja, caminhantes aleatórios - buscador e alvo - com velocidades escalares constantes e idênticas, numa rede periódica 1D, cujo comprimento dos voos segue a distribuição dada pela equação 4.1, sendo ℓ calculado através da equação 4.2. No entanto, visando responder às perguntas motivadores para nosso trabalho, passaremos a analisar duas novas quantidades físicas nesse modelo: *Flutuação Relativa da Energia* - FR_ξ - do buscador e a *Taxa de organismos buscadores sobreviventes* - f_s . Dessa forma se faz útil redefinir alguns parâmetros para a simplificação do problema e assim obter um melhor entendimento.

Observemos que os resultados apresentados no capítulo 4 mostram a variação da energia acumulativa versus a densidade de alvos normalizada pela energia ganha a cada encontro, ou seja, g/λ . Daqui em diante, passaremos a analisar as quantidades em função de λ/g , ou seja, quanto maior for λ menor será a densidade e vice versa. O motivo para essa mudança no eixo $0x$ ficará mais claro adiante. Passaremos a denominar essa quantidade λ/g como sendo simplesmente ρ (comprimento da rede normalizada pela energia ganha a cada encontro). Assim, lembrando o mecanismo de busca, o modelo apresenta as seguintes condições:

1. O buscador e o alvo iniciam numa posição aleatória da rede de tamanho λ , tal que $d = \lambda/2$ é o livre caminho médio de caminhada. Notemos que esse truncamento do voo é relevante visto que, por exemplo, para redes pequenas (caso não houvesse tal truncamento) o voo escolhido muito provavelmente seria maior do que o valor λ o que resultaria numa probabilidade de 100% de encontro entre os organismos, podendo o buscador dar vários passos sem parar, passando por todos os pontos da rede e eliminando assim o sentido de busca aleatória. Além disso, em sistemas físicos reais, o espaço de busca geralmente é muito maior do que os comprimentos de voos escolhidos. O truncamento, portanto, tem um sentido físico para o nosso modelo.
2. De maneira aleatória, o buscador e o alvo escolhem o sentido de movimento e o tamanho do voo ℓ_j (obedecendo a condição $r_v < \ell_j \leq \lambda/2$) e movem-se com velocidades constantes. Buscador e alvo executam uma caminhada markoviana - sem memória. Podemos aqui ter difusão balística ($\mu \rightarrow 1$), difusão de Lévy puro ($\mu = 2$) e movimento browniano ($\mu = 3$).

3. A cada voo j executado, o buscador perde uma energia α_j . Assumimos que $\alpha_j = \alpha \ell_j$, sendo α uma constante.
4. O buscador, a cada passo durante o voo, verifica se há ou não alvo em seu raio de visão r_ν . Se nenhum alvo for detectado depois de ℓ_j , então o buscador retorna ao passo 2.
5. Se o alvo é detectado, este é eliminado, o buscador ganha uma energia constante g e retorna à regra 2, contudo continuando a busca na posição em que obteve o alvo. Um novo alvo é criado numa nova posição aleatória da rede, obedecendo também à regra 2 - processo de busca destrutivo.

Esse modelo é executado para um número máximo de N passos (denominaremos essa quantidade de passos permitidos como sendo o tempo de simulação t) adotados e para vários valores de λ . Com objetivo de obter uma boa estatística para esse modelo, as quantidades são obtidas a partir de médias sobre cada valor de tempo e sobre cada valor de rede. Vamos também levar em consideração a equação 5.1 e assim apresentar os resultados de forma mais compacta.

5.3 Resultados e Discussões

5.3.1 Flutuação Relativa da Energia - FR_ξ

Flutuações de quantidades físicas são muito importantes para caracterizar propriedades estatísticas e termodinâmicas de vários sistemas. Além disso, ela é uma quantidade interessante para nosso modelo porque pode nos dizer em quais densidades notamos fortes e baixas flutuações. Como já sabemos das densidades críticas, então podemos analisar como ocorre essa flutuação próximo a elas, o que de fato pode nos dizer algo interessante. Aqui, com objetivo de permitir que a flutuação esteja normalizada, teremos a flutuação da energia como sendo:

$$FR_\xi = \frac{\langle \xi^2 \rangle - \langle \xi \rangle^2}{\langle \xi^2 \rangle} \quad (5.2)$$

Como $\langle \xi^2 \rangle \geq \langle \xi \rangle^2$, logo $0 \leq FR_\xi \leq 1$. Nas simulações, realizamos (para um dado t máximo, num determinado comprimento de rede λ) um conjunto $\Gamma = 1.000$ amostras (quantidade

de buscadores testados seguindo o modelo de busca). Ao final do primeiro conjunto Γ , obtemos uma energia acumulativa ξ , assim como ξ^2 . Fazemos um total de 50 conjuntos Γ , tal que $\langle \xi \rangle$ e $\langle \xi \rangle^2$ podem ser obtidos a partir da média sobre esses 50 conjuntos Γ . Diante desses dados, torna-se possível obter FR_ξ para um dado λ e para um dado tempo t . Aqui variamos λ no intervalo $[10, 250]$ para $t = 100, 200, 400, 800, 1600, 3200, 6400, 12800, 25600, 51200$. A energia inicial do Buscador é definida como sendo $G = 100$. O ganho energético a cada encontro vale $g = 100$, sendo o raio de visão r_v e as velocidades unitários. Raio de visão sendo unitário implica que a captura (processo de encontro) ocorre somente nos primeiros vizinhos. Vale lembrar que a energia acumulativa segue a equação 4.3. Os resultados de FR_ξ em função de ρ para diferentes tempos, numa dada combinação de difusão do buscador e do alvo, são mostrados a seguir.

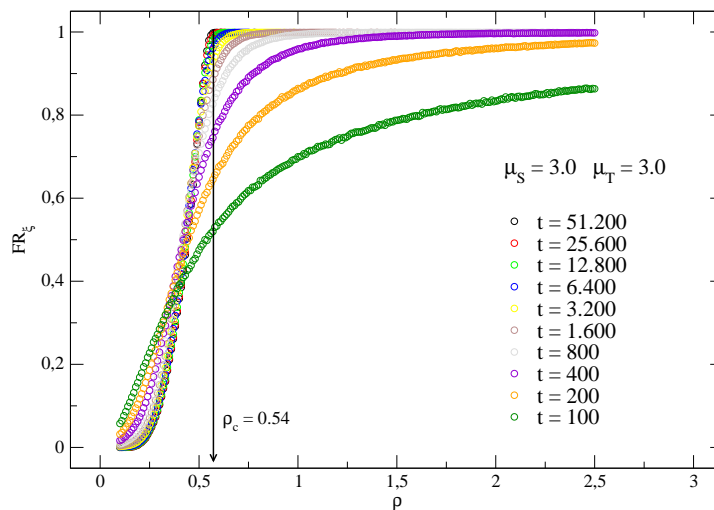


Figura 5.1: Flutuação relativa da energia vs ρ com difusão $\mu_s = 3.0$ e $\mu_t = 3.0$ para vários tempos t .

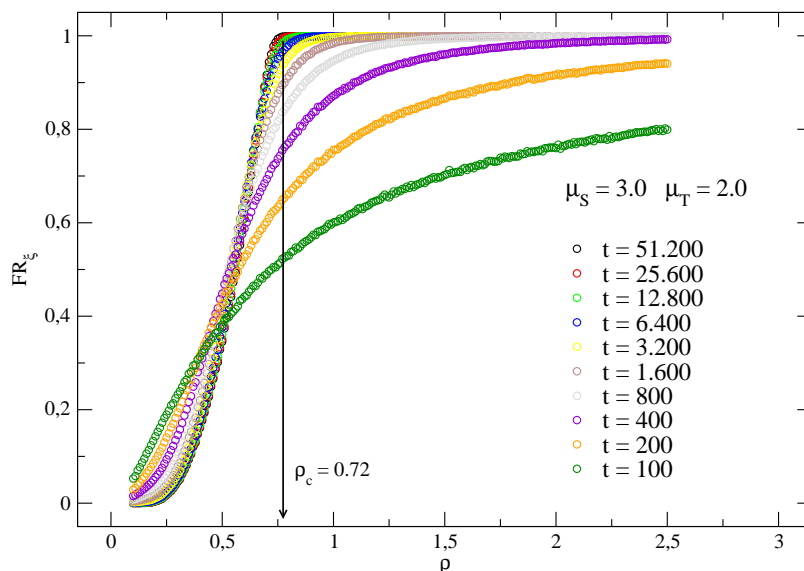


Figura 5.2: Flutuação relativa da energia vs ρ com difusão $\mu_s = 3.0$ e $\mu_t = 2.0$ para vários tempos t .

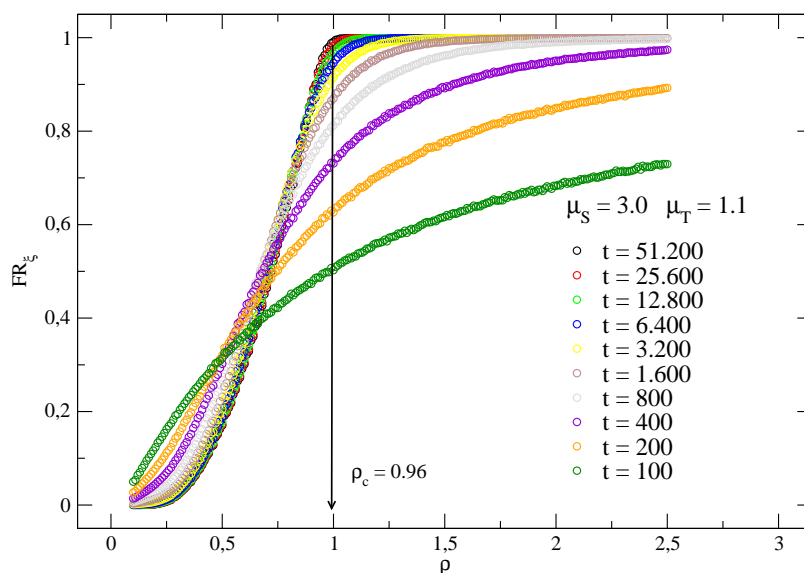


Figura 5.3: Flutuação relativa da energia vs ρ com difusão $\mu_s = 3.0$ e $\mu_t = 1.1$ para vários tempos t .

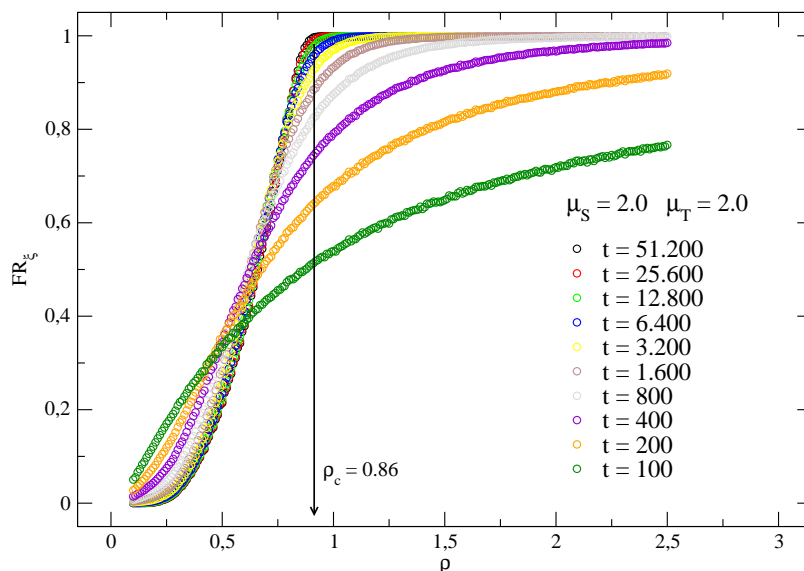


Figura 5.4: Flutuação relativa da energia vs ρ com difusão $\mu_s = 2.0$ e $\mu_t = 2.0$ para vários tempos t .

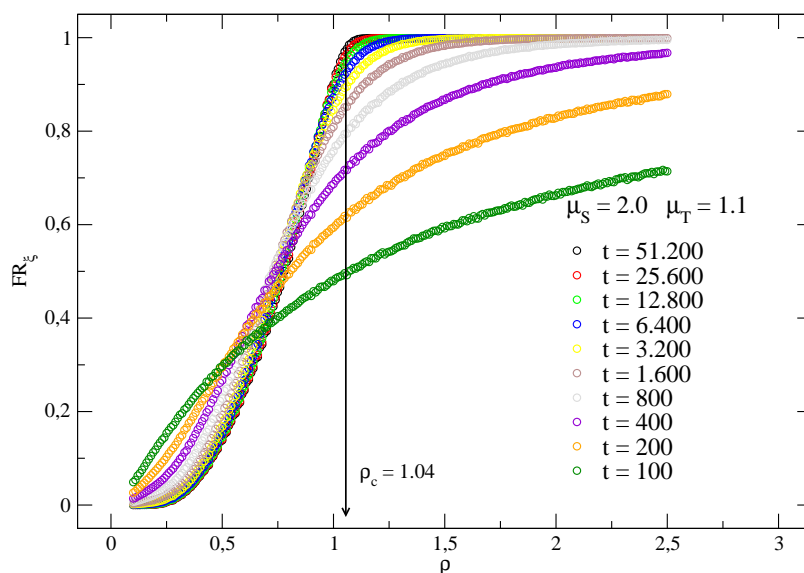


Figura 5.5: Flutuação relativa da energia vs ρ com difusão $\mu_s = 2.0$ e $\mu_t = 1.1$ para vários tempos t .

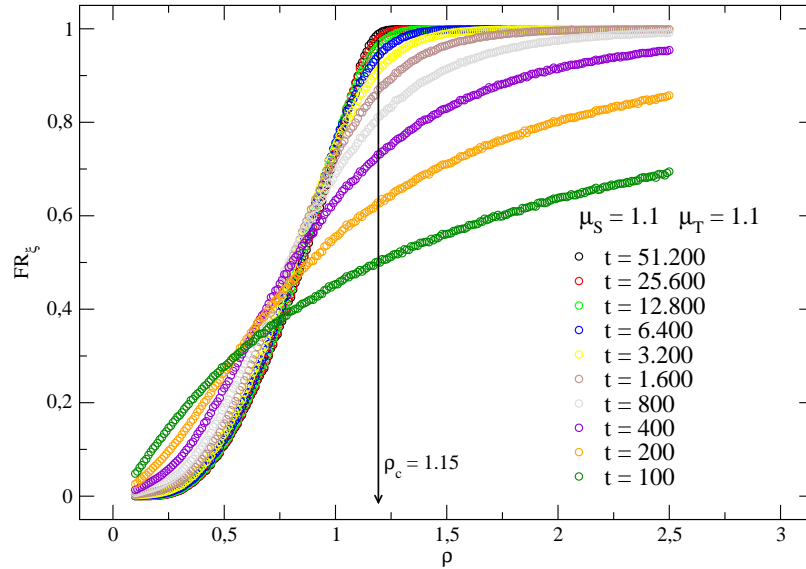


Figura 5.6: Flutuação relativa da energia vs ρ com difusão $\mu_s = 1.1$ e $\mu_t = 1.1$ para vários tempos t .

Pela definição da nossa flutuação relativa, FR_ξ apenas é definida quando $\langle \xi^2 \rangle > 0$, ou equivalentemente, quando $\langle \xi \rangle > 0$. Com isso analisemos os seguintes casos:

- $\rho \rightarrow 0$: Nesse caso, temos que $FR_\xi \rightarrow 0$, ou seja, $\langle \xi^2 \rangle \approx \langle \xi \rangle^2$. O que nos leva a concluir que para redes pequenas (alta densidade) $\xi \approx \langle \xi \rangle$.
- $\rho \rightarrow \rho_c$: Para cada estratégia de busca temos um ρ_c (ver tabela 4.1). A medida que ρ se aproxima pela esquerda de ρ_c (no limite em que $t \rightarrow \infty$), observamos que $FR_\xi \rightarrow 1$, ou seja, $\langle \xi \rangle^2 \ll \langle \xi^2 \rangle$. Essa condição nos diz que quanto mais o buscador se aproximar de ρ_c , menor será sua energia média, o que também é esperado acontecer. Nessa situação, o termo $\langle \xi^2 \rangle$ torna-se bem maior do que $\langle \xi \rangle^2$, favorecendo portanto que $FR_\xi \rightarrow 1$, tendo flutuação máxima na energia e ficando no limiar da extinção.

Para as figuras 5.1 a 5.6 notamos o efeito do tempo de busca nos resultados numéricos. Lembrando que aqui o tempo de busca é análogo ao número máximo de passos dados pelo buscador, percebemos que no limite termodinâmico ($t \rightarrow \infty$) as curvas tendem a se sobreporem (como visto para $t = 25.600$ e $t = 51.200$), deixando também evidente que a flutuação tende ao seu máximo quando

$\rho \rightarrow \rho_c$ para t grande. Nosso tempo de busca, portanto, é análogo ao tamanho do sistema visto em sistemas para-ferromagnéticos, onde esses efeitos de tamanhos são similares, conforme também visto na figura 3.1. Abaixo seguem figuras mostrando notáveis diferenças entre estratégias de busca com respeito às FR_ξ para três diferentes valores de t .

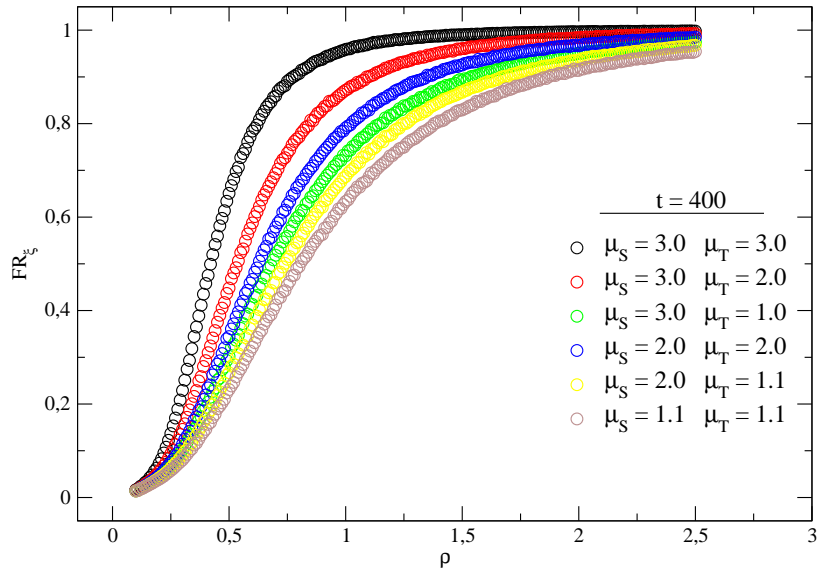


Figura 5.7: Flutuação relativa da energia vs ρ para $t = 400$ para várias estratégias de busca.

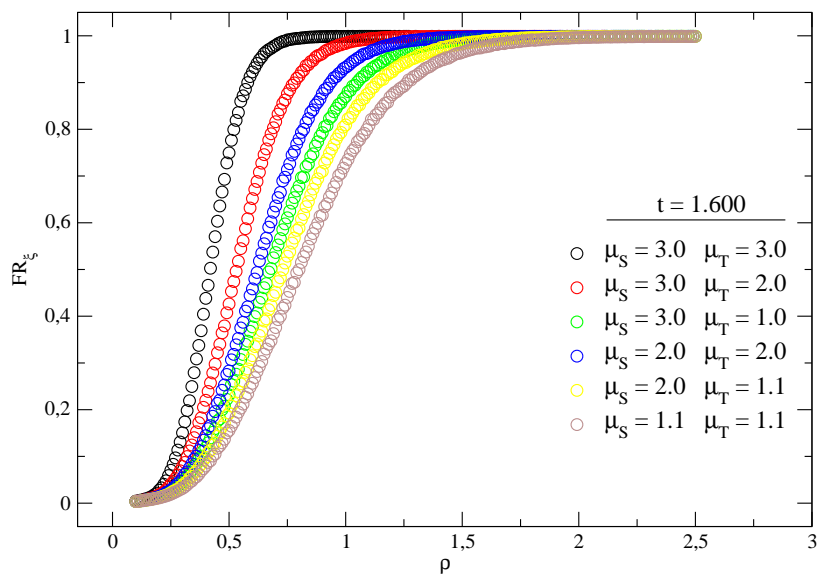


Figura 5.8: Flutuação relativa da energia vs ρ para $t = 1600$ para várias estratégias de busca.

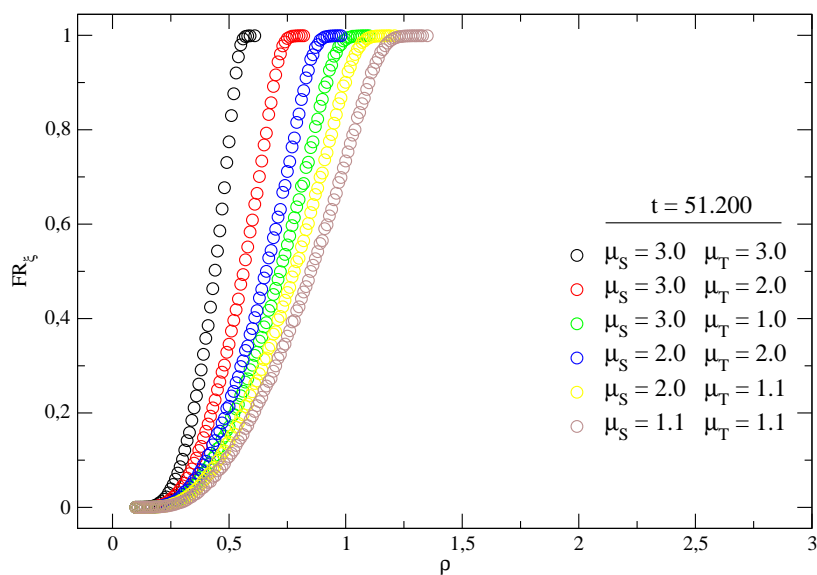


Figura 5.9: Flutuação relativa da energia vs ρ para $t = 51200$ para várias estratégias de busca.

Nessas figuras, para todos os tempos e em particular para tempo grande, notamos a diferença entre as estratégias de busca adotadas. O tipo de difusão *Balístico-Balístico* (organismo buscador e alvo sendo superdifusivos) apresenta altas flutuações (significativas próximas ao limiar da extinção) para valores de ρ maiores que comparados as outras estratégias, confirmando assim a sobrevivência em densidades menores como visto também nos resultados da tabela 4.1 do capítulo anterior.

5.3.2 Taxa de Sobrevivência - f_s

Para obtermos a taxa de sobrevivência, realizamos as mesmas simulações que foram feitas para a flutuação relativa, com a diferença de que em cada conjunto $\Gamma = 1000$ amostras, precisamos contar quantos buscadores (dos 1.000 simulados) sobreviveram. Dividir essa quantia de buscadores sobreviventes pelo número total de buscadores simulados nos fornece f_s . Obtemos o valor final de f_s sobre uma média de 50 conjuntos Γ . Essa quantidade não surgiu sem interesse, pelo contrário, ela é importante para busca de transições, visto que em transições de fase se faz necessário definir um parâmetro de ordem para caracterizá-la. Esse parâmetro de ordem, como já comentado, nem sempre é fácil de se definir. No mínimo, para termos uma quantidade que seja utilizada como parâmetro de ordem, precisamos obedecer sua característica básica: ser maior que zero para $\rho < \rho_c$ (“fase ordenada”) e igual a zero para $\rho > \rho_c$ (“fase desordenada”). Nesse sentido, essa quantidade *taxa de sobrevivência* - f_s obedece a esta característica. Ora, para $\rho \rightarrow 0$, todos os buscadores simulados irão sobreviver ($f_s = 1$). Para $\rho \rightarrow \infty$, todos os simulados irão morrer ($f_s = 0$). Assim f_s pode ser considerado como um “forte candidato” ao parâmetro de ordem nesse modelo de busca. Com isso precisamos analisar como evolui f_s quando variamos as estratégias de buscas para diferentes t 's (tempos de busca). Ainda mais, podemos questionar qual o comportamento de f_s a medida que ρ se aproxima de ρ_c , onde ρ passa a ser agora o nosso parâmetro de controle. Vejamos os resultados:

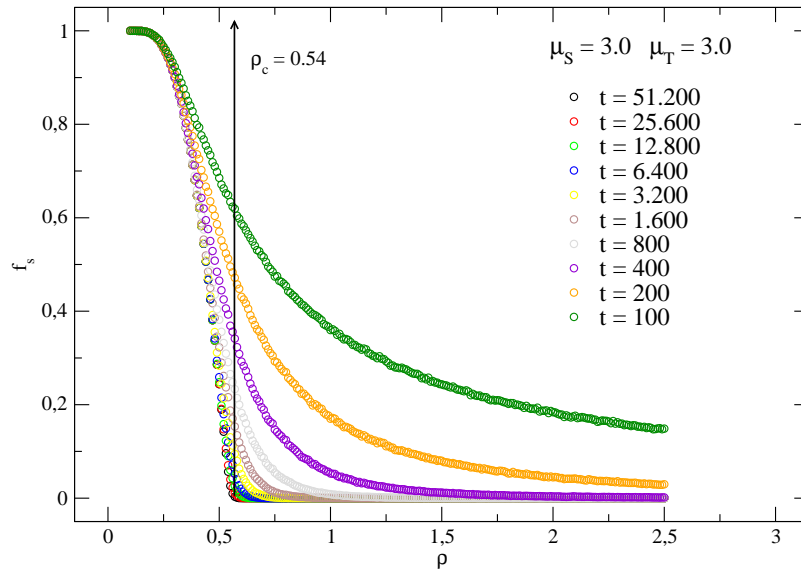


Figura 5.10: Taxa de sobrevivência vs ρ com difusão $\mu_s = 3.0$ e $\mu_t = 3.0$ para vários tempos t .

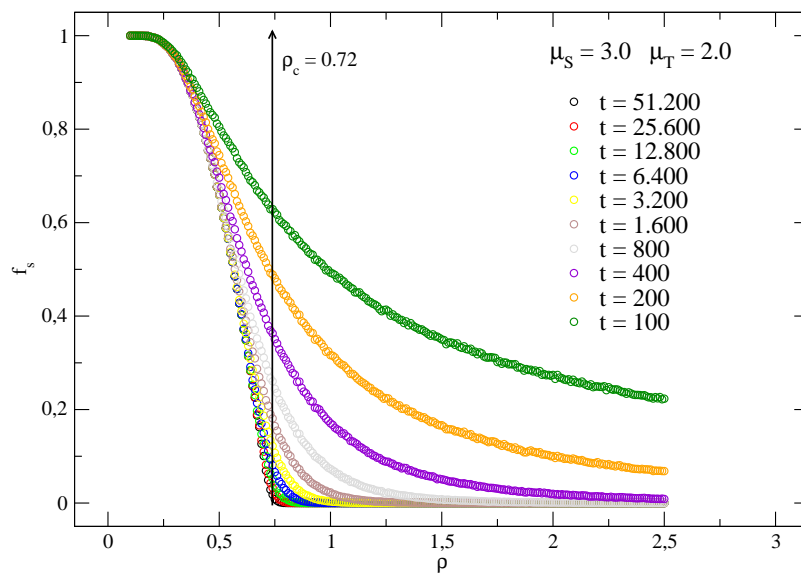


Figura 5.11: Taxa de sobrevivência vs ρ com difusão $\mu_s = 3.0$ e $\mu_t = 2.0$ para vários tempos t .

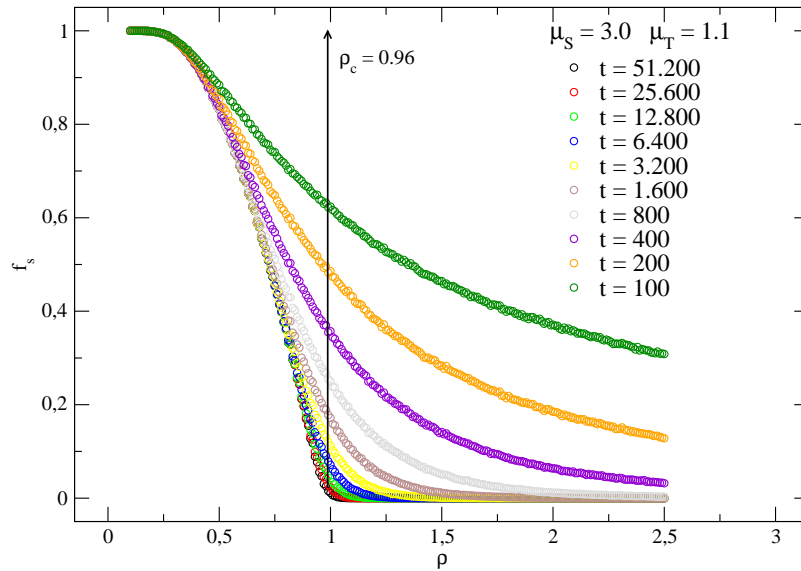


Figura 5.12: Taxa de sobrevivência vs ρ com difusão $\mu_s = 3.0$ e $\mu_t = 1.1$ para vários tempos t .

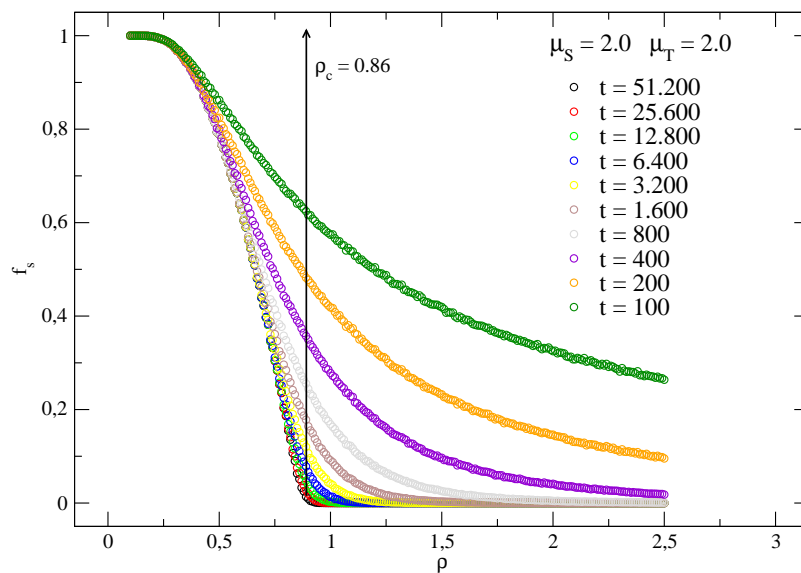


Figura 5.13: Taxa de sobrevivência vs ρ com difusão $\mu_s = 2.0$ e $\mu_t = 2.0$ para vários tempos t .

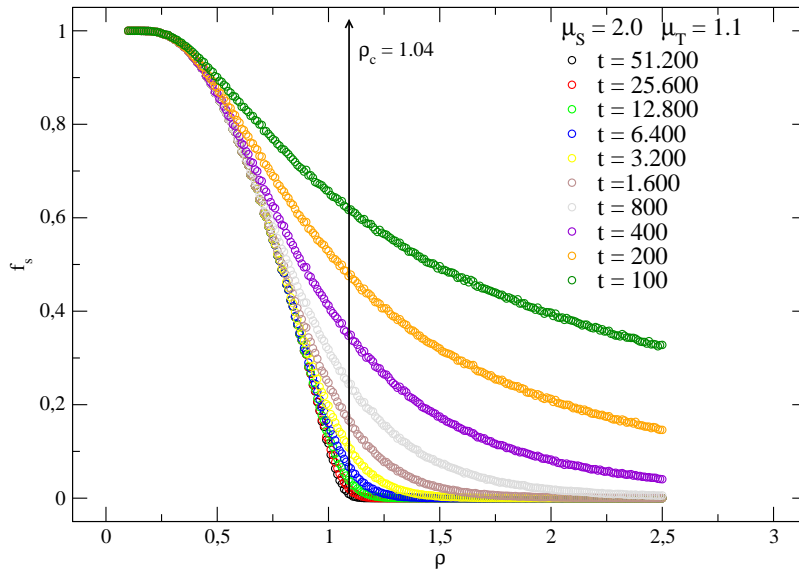


Figura 5.14: Taxa de sobrevivência vs ρ com difusão $\mu_s = 2.0$ e $\mu_t = 1.1$ para vários tempos t .

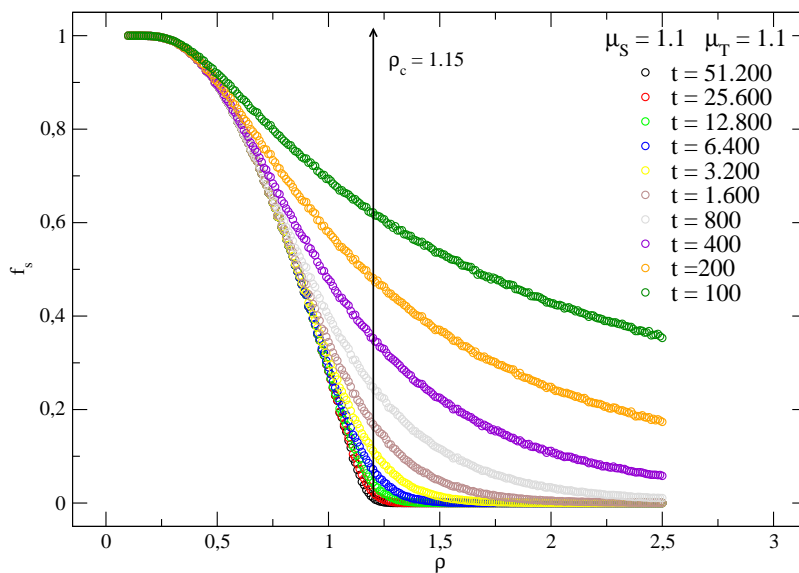


Figura 5.15: Taxa de sobrevivência vs ρ com difusão $\mu_s = 1.1$ e $\mu_t = 1.1$ para vários tempos t .

Notória é a evolução do sistema quando aumentamos os valores de t . As figuras indicam que para $t \rightarrow \infty$ (limite termodinâmico), vemos claramente $\rho \rightarrow 0 \Rightarrow f_s = 1$ e quando $\rho \rightarrow \infty \Rightarrow f_s = 0$, o que caracteriza f_s como um bom parâmetro de ordem. Notemos que, para cada estratégia de busca, ρ_c é exatamente o valor abordado na tabela 4.1. Assim, através do nosso parâmetro de ordem f_s , podemos confirmar mais uma vez esses valores de densidades críticas para cada combinação de estratégia de busca. Verificamos também que a escolha de estratégia de busca não é significativa em altas densidades de alvos ($\rho \rightarrow 0$), como já era intuitivo esperar. Conforme também observado na flutuação relativa, notamos os efeitos de diferentes tempos de busca para esse modelo. Abaixo segue um melhor comparativo das estratégias de busca para três tempos distintos.

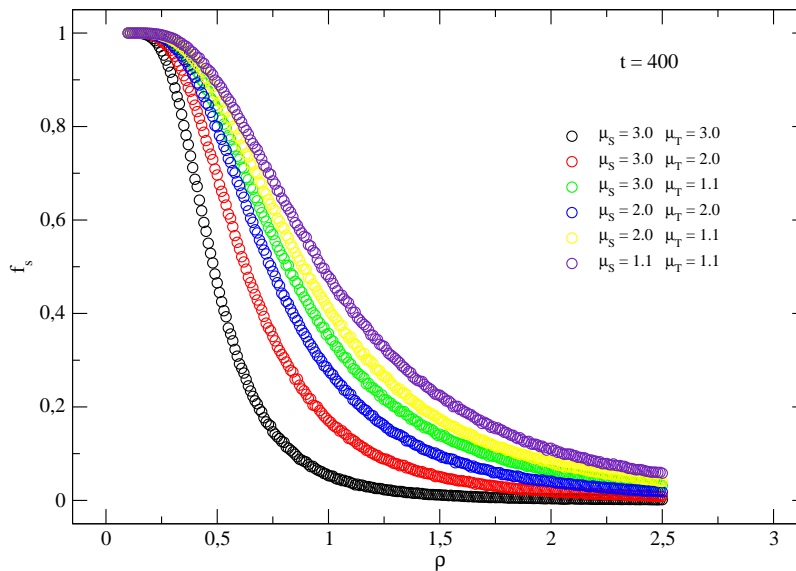


Figura 5.16: Taxa de sobrevivência vs ρ para $t = 400$ para várias estratégias de busca.

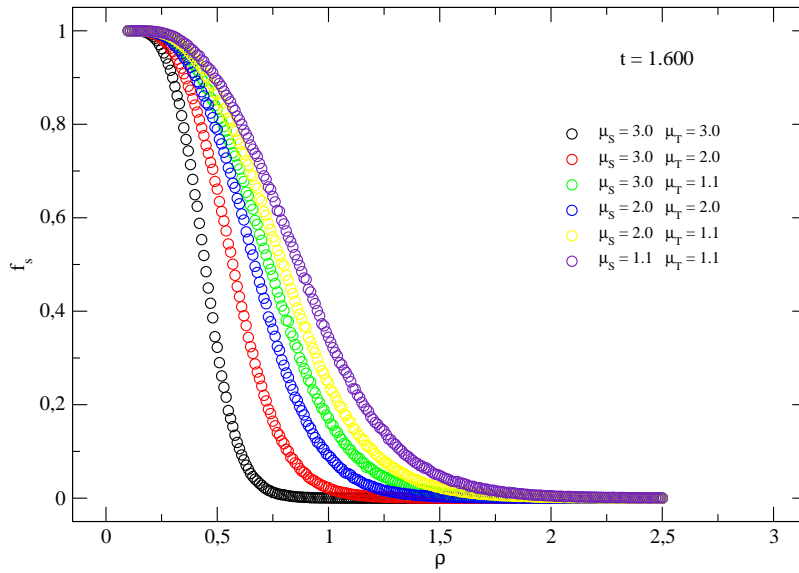


Figura 5.17: Taxa de sobrevivência vs ρ para $t = 1600$ para várias estratégias de busca.

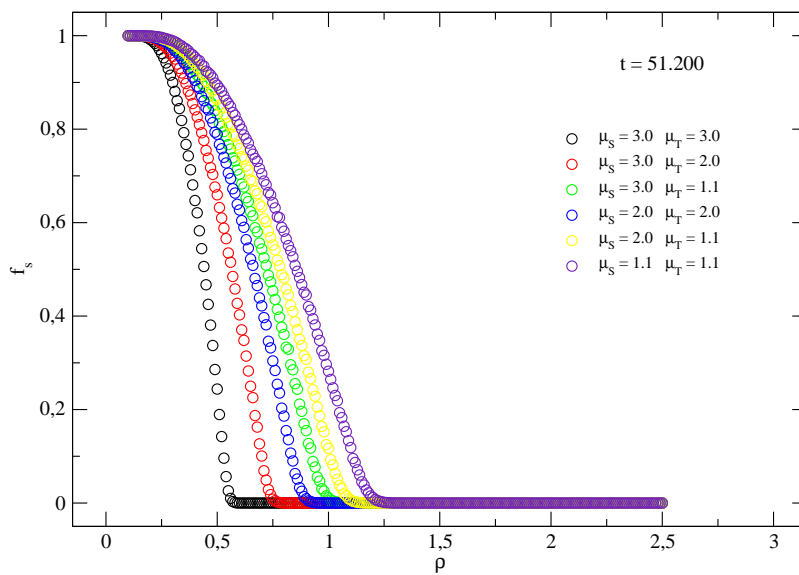


Figura 5.18: Taxa de sobrevivência vs ρ para $t = 51200$ para várias estratégias de busca.

Nessas últimas figuras notamos mais claramente os valores de ρ_c para cada combinação de estratégia. A figura 5.19 mostra os valores de μ_s em seus respectivos ρ_c .

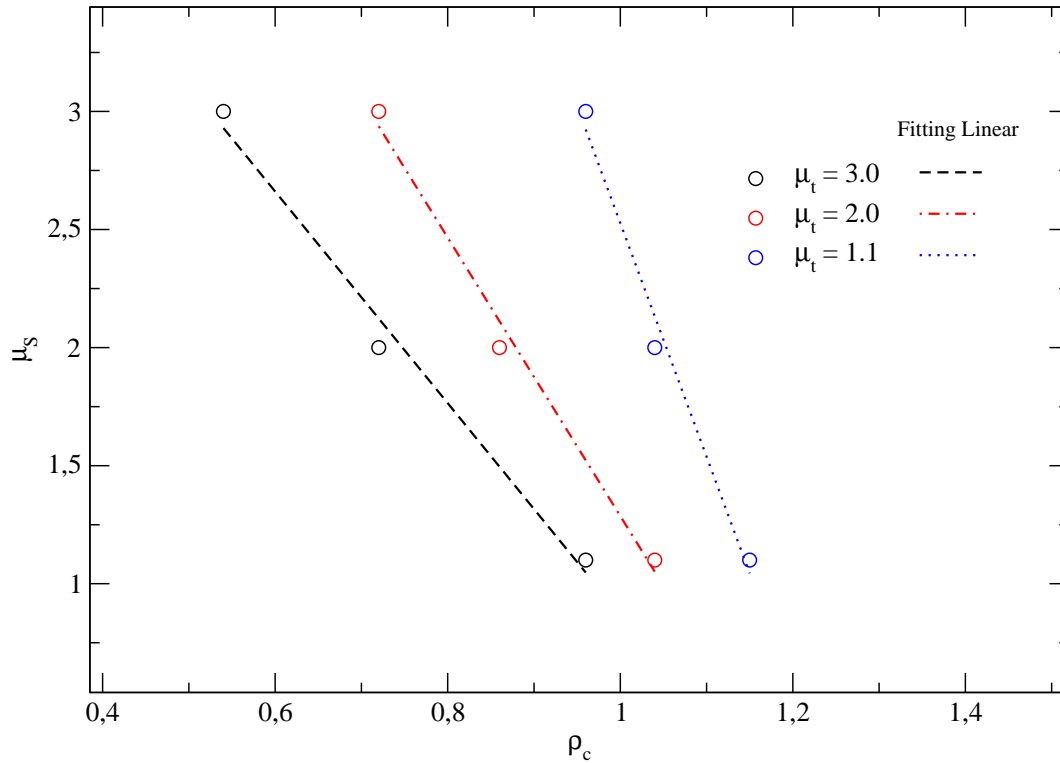


Figura 5.19: Comparativo entre μ_s em função de seus respectivos ρ_c para diferente valores de μ_t .

Essa figura mostra evidências de que ρ_c cresce linearmente quando tomamos estratégias de busca mais superdifusivas. Notamos que de todas as possíveis combinações de μ , as estratégias que apresentam maior eficiência são aquelas que contém, no mínimo, um caminhante com difusão balística.

Uma vez que temos as densidades críticas e um parâmetro de ordem, precisamos saber se temos transições de fase nesse sistema. A grosso modo, poderíamos afirmar que não há transição descontínua visto que o parâmetro de ordem - f_s - tem comportamento contínuo da fase “ordenada” à “desordenada” a medida que aumentamos t . Além disso, comparada as curvas de $f_s \times p$ com as curvas da magnetização num sistema para-ferromagnético $|M| \times T$, onde T é temperatura, notamos profunda

semelhança da evolução do parâmetro de ordem quando aumentamos o parâmetro de controle. Nesses sistemas para-ferromagnéticos há transições de fase contínuas. Diante desse comparativo e do comportamento de f_s , nossas suspeitas de transições de segunda ordem no presente sistemas aumentam significativamente.

5.4 Proposta de Renormalização e Hipótese de Escala

5.4.1 O Expoente Crítico α

No capítulo 3 discutimos o mecanismo no qual *Fisher* e colaboradores buscaram entender as transições de fase que são observadas em sistemas de tamanho finito. Utilizando a ferramenta da hipótese de lei de escala e do processo de renormalização numérica, buscaremos analisar os resultados encontrados até o momento em nosso modelo de busca.

Como visto na seção 3.4, nosso parâmetro aqui pode ser reescalado e escrito como:

$$f_s(\rho, t) = t^{-\alpha} \bar{f}[(\rho - \rho_c)t^\beta] \quad (5.3)$$

Onde \bar{f} é uma função escalar não-singular. Portanto, podemos escrever nossa f_s em função de um outro tempo qualquer, tal que:

$$f_{s,0}(\rho, t_0) = t_0^{-\alpha} \bar{f}[(\rho - \rho_c)t_0^\beta] \quad (5.4)$$

dividindo $f_s(\rho, t)$ por $f_{s,0}(\rho, t_0)$, temos:

$$\frac{f_s(\rho, t)}{f_{s,0}(\rho, t_0)} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\alpha} \frac{f[(\rho - \rho_c)t^\beta]}{f[(\rho - \rho_c)t_0^\beta]} \quad (5.5)$$

Redefinindo as quantidades, por simplicidade, tal que $F \equiv \frac{f_s(\rho, t)}{f_{s,0}(\rho, t_0)}$ e $T = \frac{t}{t_0}$, então a equação 5.5 se torna importante na medida em que desejamos investigar o comportamento do parâmetro de ordem na vizinhança de ρ_c . Nesse intuito, tomando o limite em que $\rho = \rho_c$, temos:

$$F = T^{-\alpha} \quad (5.6)$$

O que significa dizer que F tem comportamento tipo lei de potência na região crítica, apresentando o mesmo expoente α para diferentes combinações de t e t_0 . Essa uma das principais características de transições de fase contínuas, onde a assinatura característica da transição é dada pelo expoente crítico α . Ainda na equação 5.6, podemos reescrevê-la na forma:

$$\frac{\ln F}{\ln T} = -\alpha \quad (5.7)$$

Tendo como base esses argumentos, nossa estratégia na investigação é plotar algumas curvas do tipo $\frac{\ln F}{\ln T}$ vs ρ , para várias combinações de t e t_0 e portanto verificar se as curvas cruzam num único ponto. Caso positivo, esse ponto de cruzamento das curvas será nosso ponto crítico com $\rho = \rho_c$ e poderemos afirmar que nosso sistema tem uma típica transição de segunda ordem caracterizada pelos expoentes críticos α e β .

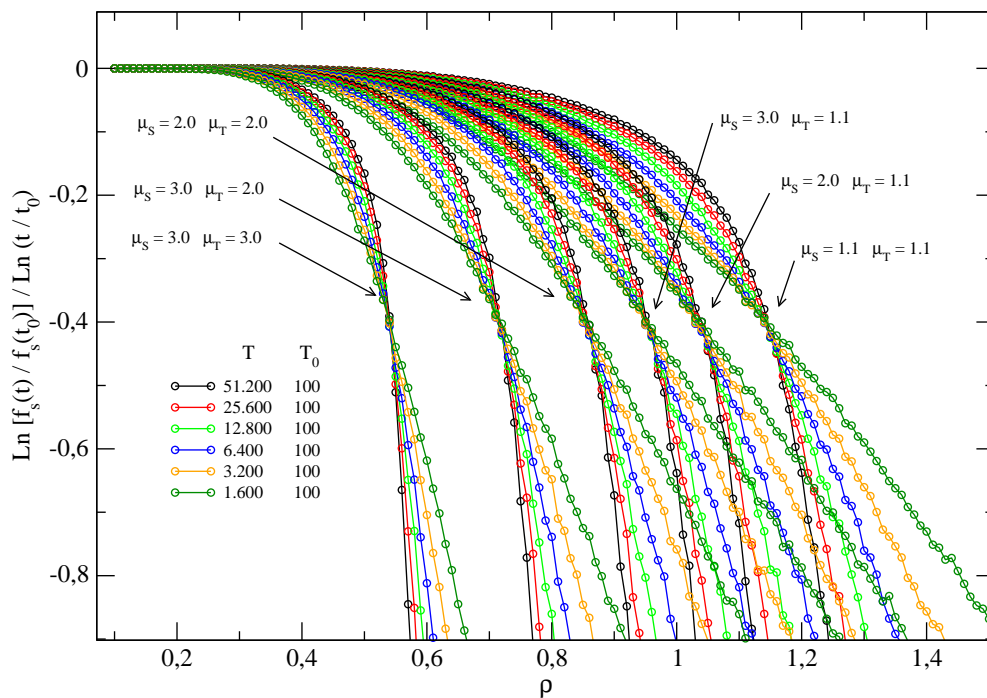


Figura 5.20: Processo de renormalização numérica para diferentes estratégias de busca.

Notamos na figura 5.20 que, para cada estratégia analisada e dentro de uma barra de erro devido aos limites computacionais, há apenas um ponto de cruzamento entre as curvas. Esse ponto de cruzamento ocorre justamente nos pontos críticos já conhecidos. Esse fato nos inspira a aceitar uma existência de transição de fase contínua para nosso sistema. Essa transição sai da fase “ordenada” (onde as densidade de alvos, ao longo do tempo, garantem a sobrevivência do buscador) para a fase “desordenada” (onde o organismo buscador entrará em extinção ao longo do tempo). Conforme equação 5.7, o expoente α é o valor da ordenada do ponto crítico. Com isso, na figura 5.20, o expoente α demonstra ser aproximadamente igual para todas as formas de difusão. Para encontrar uma boa aproximação do valor de α (para cada ponto crítico), um método alternativo é averiguar como $\frac{f_s(t)}{f_s(t_0)}$ varia com $\frac{t}{t_0}$ em ρ_c . Já sabemos que essa dependência deve se comportar conforme uma lei de potência onde, na escala log – log, o expoente α é determinado. Dessa maneira, para cada combinação de difusão, temos:

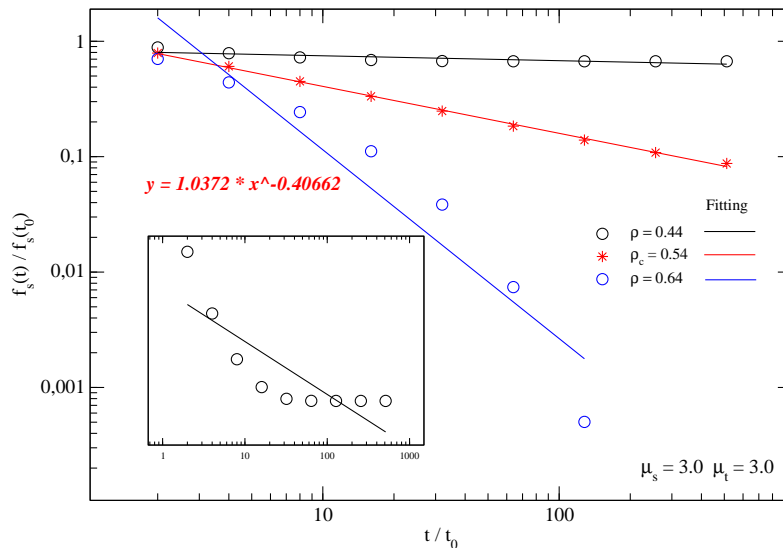


Figura 5.21: Relação entre a taxa de sobrevivência com o tempo de busca, evidenciando a presença de lei de potência em $\rho_c = 0.54$ para o caso $\mu_s = 3.0$ e $\mu_t = 3.0$.

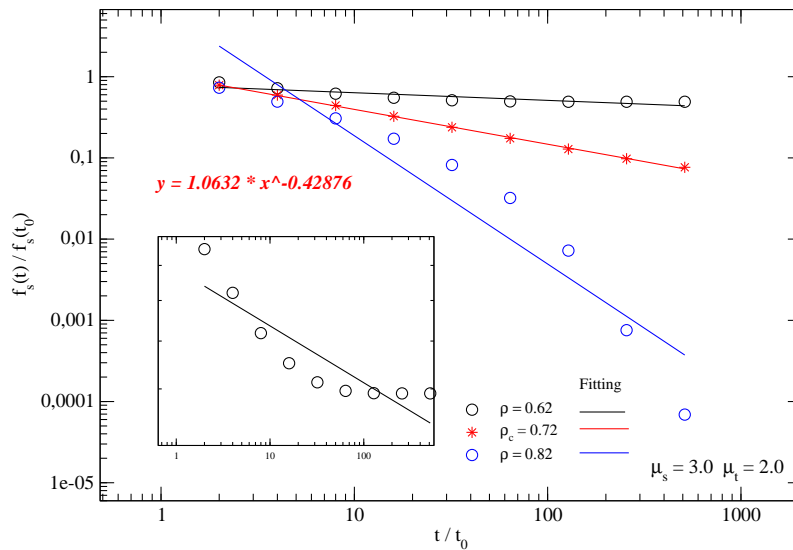


Figura 5.22: Relação entre a taxa de sobrevivência com o tempo de busca, evidenciando a presença de lei de potência em $\rho_c = 0.72$ para o caso $\mu_s = 3.0$ e $\mu_t = 2.0$.

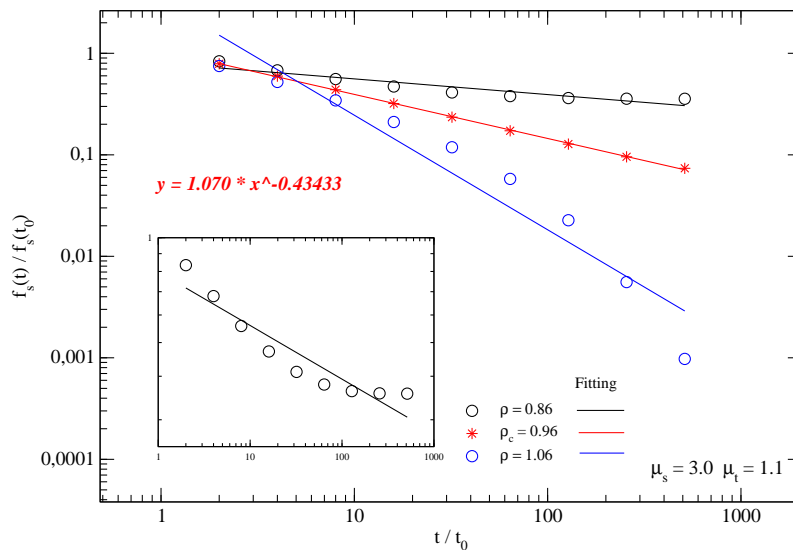


Figura 5.23: Relação entre a taxa de sobrevivência com o tempo de busca, evidenciando a presença de lei de potência em $\rho_c = 0.96$ para o caso $\mu_s = 3.0$ e $\mu_t = 1.1$.

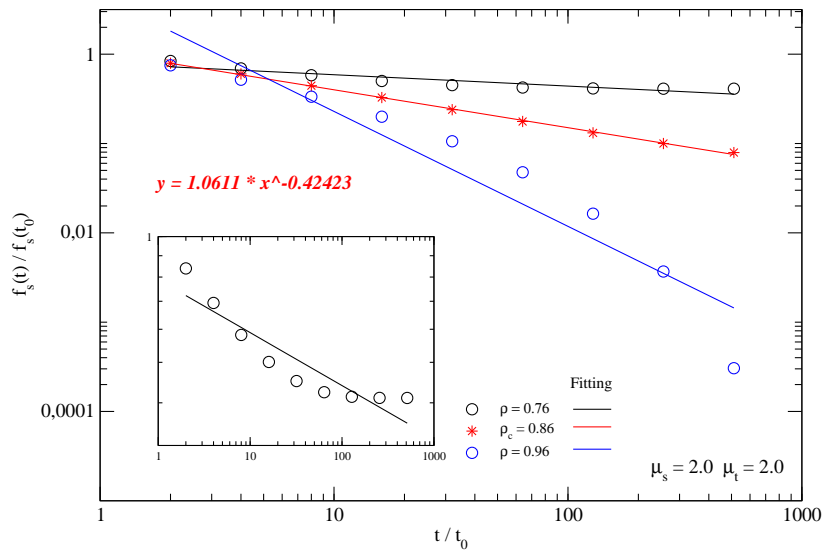


Figura 5.24: Relação entre a taxa de sobrevivência com o tempo de busca, evidenciando a presença de lei de potência em $\rho_c = 0.86$ para o caso $\mu_s = 2.0$ e $\mu_t = 2.0$.

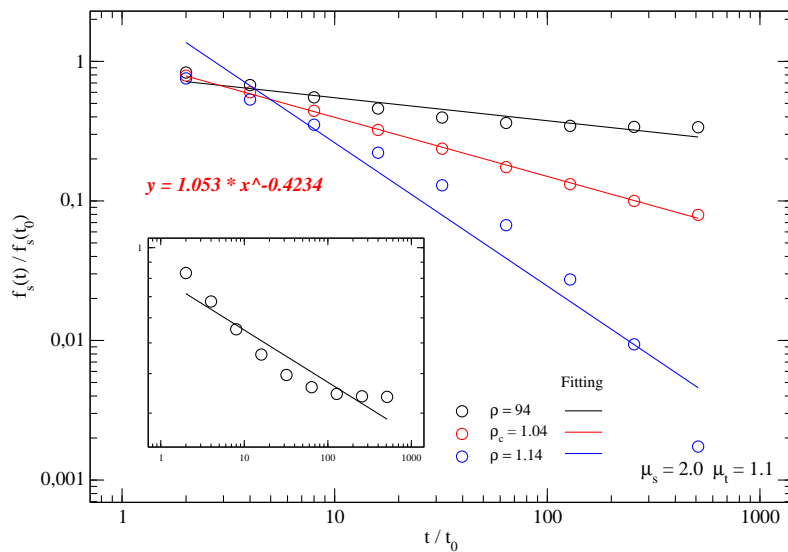


Figura 5.25: Relação entre a taxa de sobrevivência com o tempo de busca, evidenciando a presença de lei de potência em $\rho_c = 1.04$ para o caso $\mu_s = 2.0$ e $\mu_t = 1.1$.

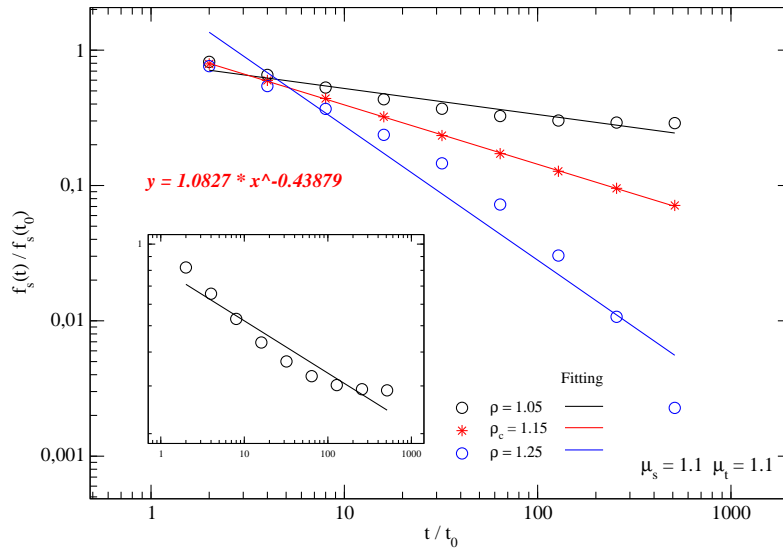


Figura 5.26: Relação entre a taxa de sobrevivência com o tempo de busca, evidenciando a presença de lei de potência em $\rho_c = 1.15$ para o caso $\mu_s = 1.1$ e $\mu_t = 1.1$.

Em todos os gráficos acima, mostramos como o parâmetro de ordem varia com o número de passos (tempo de busca, análogo ao tamanho do sistema em modelos para-ferromagnéticos) em ρ_c e para outros valores de ρ . Confirmando nossa hipótese, em ρ_c , $\frac{f_s(t)}{f_s(t_0)}$ tem comportamento tipo lei de potência em relação à $\frac{t}{t_0}$. Fazendo um “power law fitting”, podemos verificar que todos os pontos aproximadamente se alinham em ρ_c , cujos valores de α são os expoentes da variável x em cada figura, os quais são determinados para cada combinação de difusão. Notamos que os valores do expoentes crítico α são muito parecidos.

5.4.2 O Expoente crítico β

Para obtermos o expoente β , podemos seguir dois tipos de mecanismo:

1. *Derivada da função f_s*

Derivando a equação 5.3 em relação a ρ , temos:

$$f'_s = t^{-\alpha} \bar{f}' t^\beta = t^{\beta-\alpha} \bar{f}' [(\rho - \rho_c) t^\beta] \quad (5.8)$$

para tempos de busca diferentes, podemos escrever:

$$\frac{f'_s(\rho, t)}{f'_{s,0}(\rho, t_0)} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\beta-\alpha} \frac{\bar{f}'[(\rho - \rho_c)t^\beta]}{\bar{f}'[(\rho - \rho_c)t_0^\beta]} \quad (5.9)$$

Na região de transição, $\rho = \rho_c$, temos:

$$\frac{f'_s}{f'_{s,0}} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\beta-\alpha} \quad (5.10)$$

A equação 5.10 segue uma lei de potência, onde na escala $\log - \log$ de $\frac{f'_s}{f'_{s,0}} \times \frac{t}{t_0}$ determinamos uma reta tal que seu coeficiente angular, o expoente crítico, é $\beta - \alpha$. Como já conhecemos α , logo sabemos β .

Esse mecanismo de determinação do expoente β pode aumentar a barra de erro, visto que a derivada da função $f_s(\rho, t)$ tem fortes flutuações devido a discretização do sistema. Objetivando a melhor aproximação possível do valor do expoente, podemos seguir um método alternativo:

2. Derivada da função $\ln(f_s)$

Sabemos que o comportamento da curva do logaritmo de uma função arbitrária é mais suave do que a curva da própria função. Dessa forma, esse método se resume na derivada da função $\ln f_s$. Logo:

$$\frac{D_\rho \ln(f_s)}{D_\rho \ln(f_{s,0})} = \frac{f'_s f_0}{f'_0 f} = \frac{t^{\beta-\alpha} t_0^{-\alpha} f'[(\rho - \rho_c)t^\beta] f[(\rho - \rho_c)t_0^\beta]}{t^{-\alpha} t_0^{\beta-\alpha} f'[(\rho - \rho_c)t^\beta] f'[(\rho - \rho_c)t_0^\beta]} \quad (5.11)$$

Em ρ_c , temos:

$$\frac{D_\rho \ln(f_s)}{D_\rho \ln(f_{s,0})} = \frac{t^{\beta-\alpha} t_0^{-\alpha}}{t^{-\alpha} t_0^{\beta-\alpha}} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^\beta \quad (5.12)$$

Definindo:

$$\frac{f'}{f} = D_\rho(\ln(f)) \equiv K \quad (5.13)$$

e

$$\frac{f'_0}{f_0} = D_\rho(\ln(f_0)) \equiv K_0 \quad (5.14)$$

obtemos:

$$\frac{K}{K_0} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^\beta \quad (5.15)$$

Portanto, ao escalarmos $\log \frac{K}{K_0}$ x $\log \frac{t}{t_0}$, determinaremos uma reta cujo expoente oriunda de uma lei de potência de expoente β . Esse segundo método de obtenção de β reduz as flutuações sofrida pela derivada de f_s e, conseqüentemente, nos fornece valores mais precisos do expoente β . Nós utilizamos esse segundo método e manipulamos a operação para várias combinações de t e t_0 , tal como feito na figura 5.20.

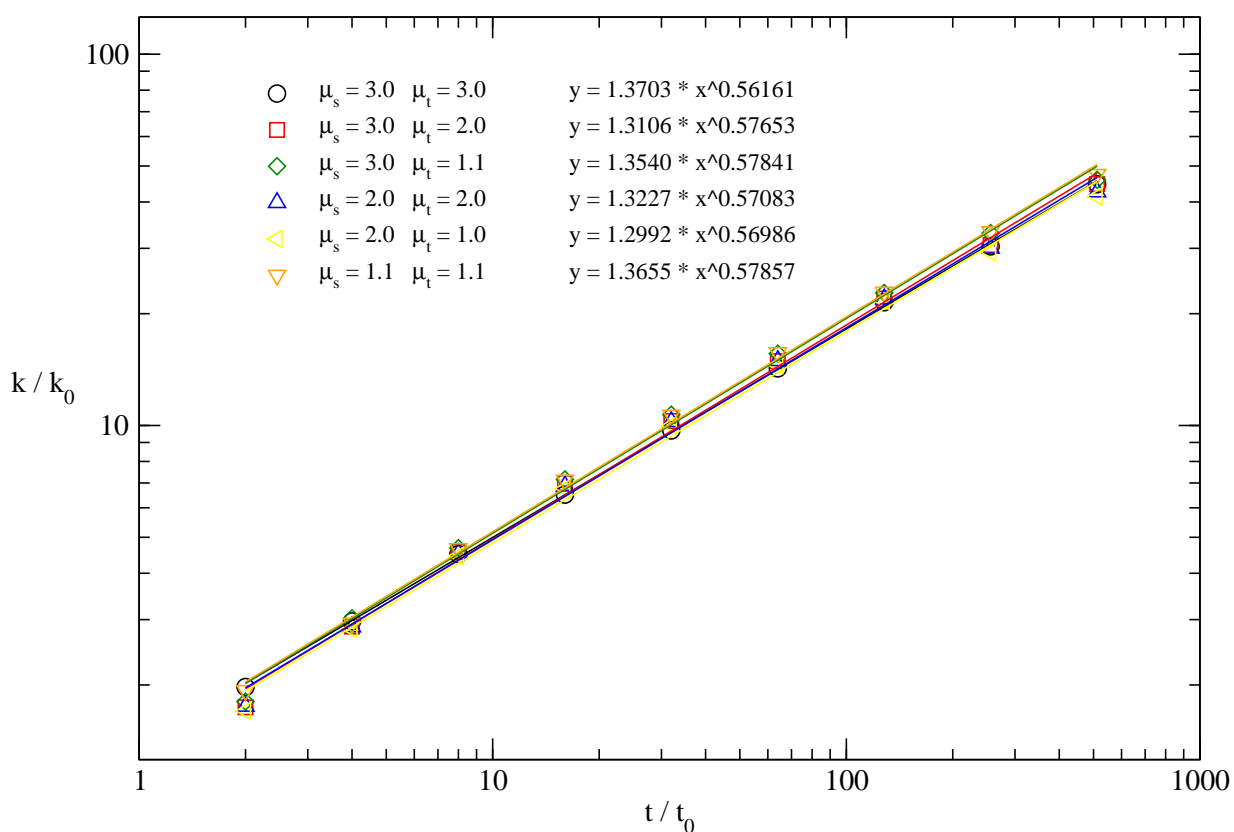


Figura 5.27: Valores do expoente crítico β para todos os tipos de difusão.

Na figura 5.27, podemos observar que os expoentes críticos β , para cada tipo de combinação de difusão, é praticamente o mesmo, levado em consideração os limites computacionais e o relativo número pequeno de médias efetuadas. A tabela abaixo mostra um resumo dos valores críticos encontrados nesse modelo de busca.

Tabela 5.1: Valores críticos conforme estratégias de busca.

| $\mu_{Buscador}$ | μ_{Alvo} | ρ_c | α | β |
|------------------|--------------|----------|----------|---------|
| 3.0 | 3.0 | 0.54 | -0.406 | 0.561 |
| 3.0 | 2.0 | 0.72 | -0.428 | 0.576 |
| 3.0 | 1.1 | 0.96 | -0.434 | 0.578 |
| 2.0 | 2.0 | 0.86 | -0.424 | 0.570 |
| 2.0 | 1.1 | 1.04 | -0.423 | 0.569 |
| 1.1 | 1.1 | 1.15 | -0.438 | 0.578 |

5.5 Discussões gerais

Nesse modelo de busca detectamos uma transição de ordem contínua, caracterizada pelas densidades críticas de cada tipo de busca e também pelos expoentes críticos α e β . Essa transição nos diz que, de acordo com os parâmetros de difusão, existe uma densidade na qual o sistema se torna crítico, onde a eficiência da busca depois de um certo tempo t não é eficiente e portanto o organismo buscador irá se extinguir. Não eficiência energética ($\Delta\xi_N \leq 0$) implica vizinhança na densidade crítica, implica região crítica entre fases de sobrevivência e extinção, e implica em necessidade de caminhada superdifusiva para otimização da busca. Nesse modelo, a transição ocorre apenas num sentido: *Vivo* \longrightarrow *Morto*. O caso inverso não tem sentido físico para o modelo. Além disso, vimos no capítulo 3 que alguns sistemas físicos apresentam universalidade dos expoentes críticos. Para que isto ocorra, é necessário que no mínimo dois expoentes críticos sejam iguais para diferentes parâmetros e variáveis adotadas pelo sistema, com exceção de aspectos mais globais como dimensionalidade. Em vista disso, notamos em nossos resultados que para diferentes processos de busca (desde o *Browniano-Browniano* ao *Balístico-Balístico*) os expoentes críticos são praticamente iguais, o que nos leva a sugerir uma classe de universalidade para o modelo de busca em questão. Isso implica dizer que os detalhes do modelo não são importantes na região crítica e tais expoentes podem ser encontrados em sistemas de busca mais complexos. Esse resultado é relevante porque através de um simples modelo podemos obter embasamento físico e matemático que generalizam os aspectos da transição para outros modelos de busca da mesma classe de universalidade.

Nessa dissertação vale ressaltar que não estamos interessados com o parâmetro μ que otimiza a sobrevivência do alvo, mas sim do buscador. Podemos perceber que a sobrevivência do alvo seria

otimizada para valores altos de $\mu's$, favorecendo nesse caso uma diminuição na taxa de encontros e, como consequência, aumentando o tempo de sobrevivência de cada alvo. Alvos superdifusivos, portanto, tornam-se mais vulneráveis e aumentam a taxa de encontro com o buscador, resultando assim na sobrevivência deste em densidades baixas.

Algo que pode confirmar ainda mais a presença dessa transição contínua nesse modelo, é analisar como a distribuição de probabilidade do parâmetro de ordem se comporta. Em geral, parâmetros de ordem em transições contínuas apresentam distribuições com apenas um pico, representativo de ausência da coexistência de fases no ponto crítico. A coexistência de fases nos informaria presença de transição descontínua - de primeira ordem. Um exemplo da evolução da distribuição da f_s é dado logo abaixo:

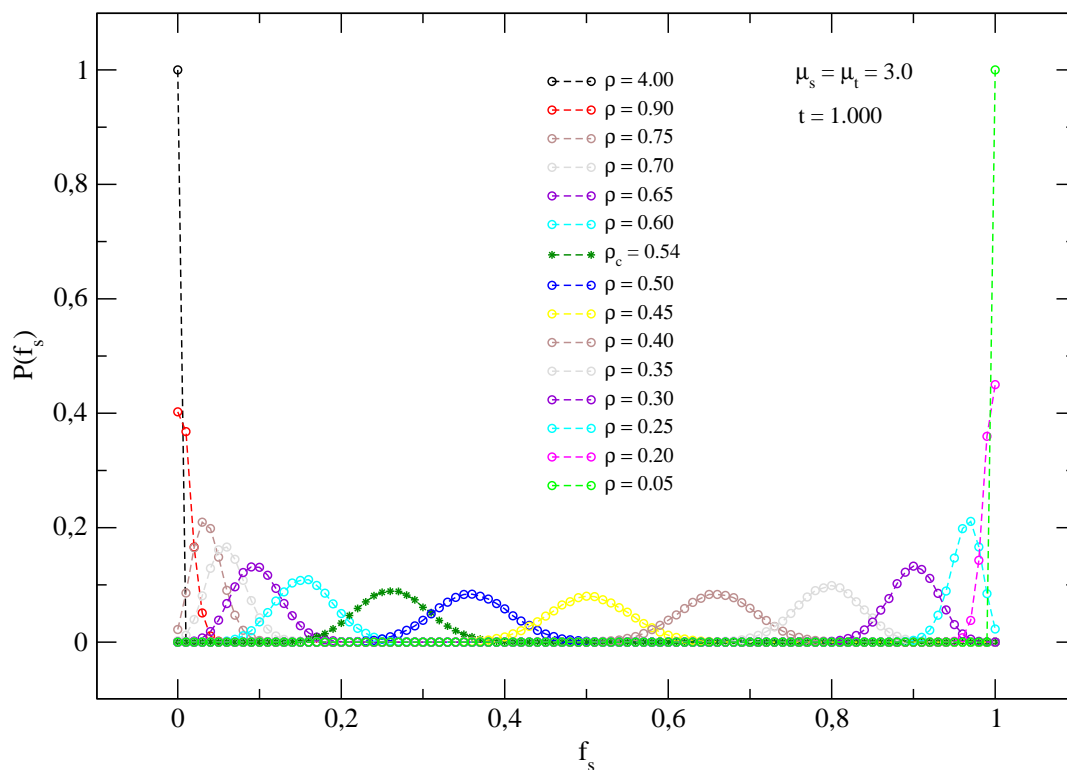


Figura 5.28: Distribuição para o caso $\mu_s = \mu_t = 3.0$, variando ρ e mantendo um tempo fixo t .

Na figura 5.28 apresentamos apenas um simples exemplo para mostrar que a distribuição,

principalmente em ρ_c , não apresenta características bimodais, ou seja, dois picos que no caso seriam representativos de transições de primeira ordem. Podemos ver na variação de ρ que o pico da distribuição “caminha” unimodalmente, processo típico de transições de segunda ordem. Podemos agora ilustrar o efeito da distribuição para cada estratégia de busca com seus respectivos ρ_c num tempo relativamente grande de busca:

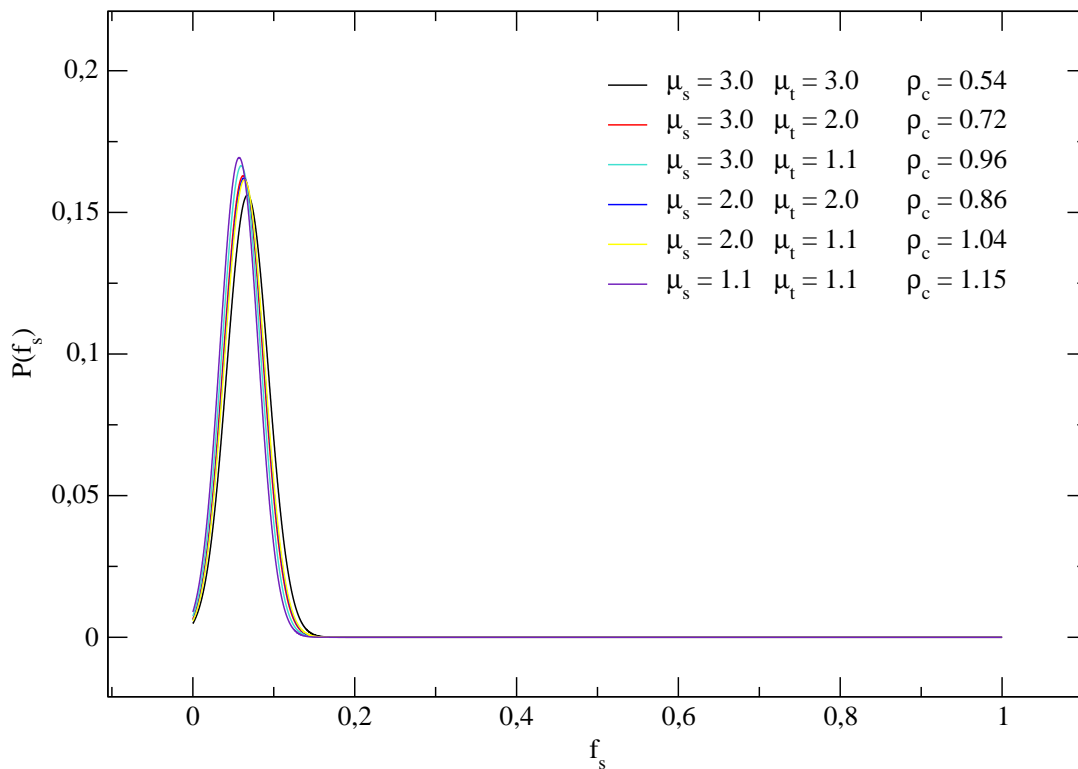


Figura 5.29: Distribuição de f_s para diferentes estratégias de busca fixadas em seus ρ_c . Aqui temos resultados de simulações realizadas sobre 50.000 conjuntos Γ , cada conjuntos tendo uma amostra de 100 buscadores simulados e para $t = 25.600$.

Notamos na figura acima que a distribuição é aproximadamente igual para diferentes estratégias de busca com seus respectivos valores críticos. Como o sistema é finito (tempo de busca limitado), percebemos ainda uma pequena fração de sobreviventes onde $\langle f_s \rangle > 0$. Obviamente que para sistemas com tempos maiores, $t = 51.200$ por exemplo, teríamos a média da distribuição ten-

dendo a zero, o que é de se esperar conforme resultados obtidos. O mais interessante aqui é que distribuições de probabilidades são as mesmas para diferentes estratégias.

Em seguida ilustramos o caso para um valor de ρ genérico, mostrando a diferença entre as estratégias.

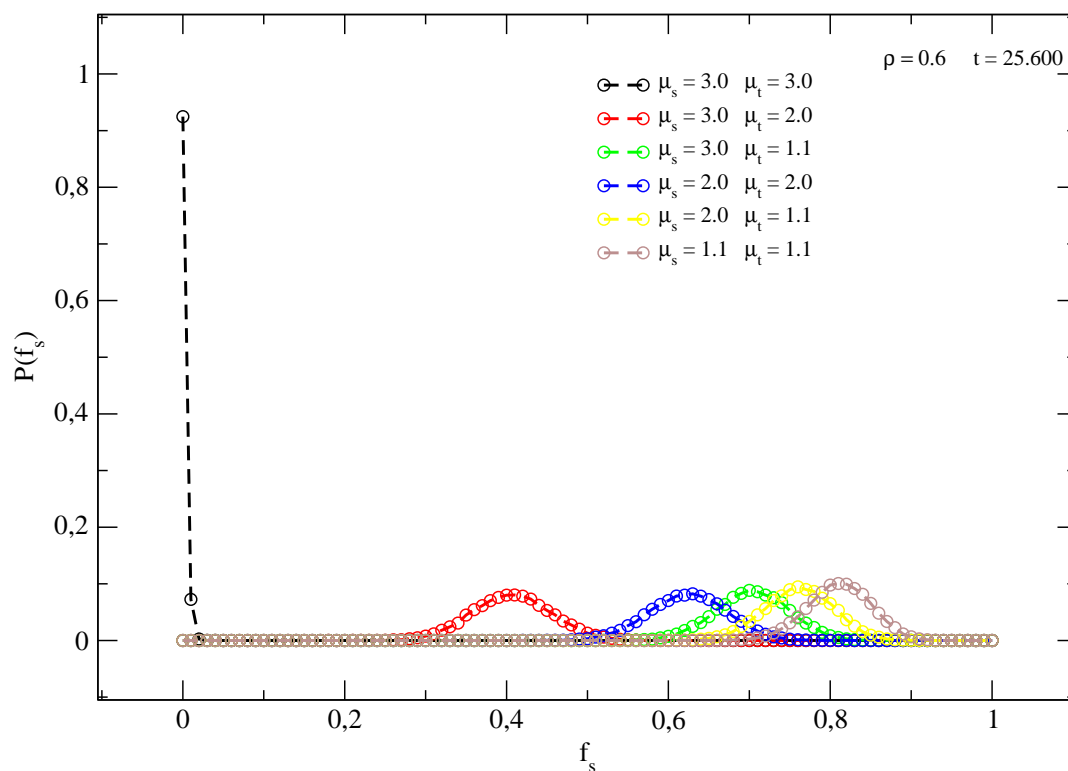


Figura 5.30: Distribuição para um valor ρ genérico. Notamos claramente diferentes distribuições do parâmetro de ordem.

Podemos perceber fortemente o efeito na distribuição da estratégia otimizada de busca (*Balístico-Balístico*). Notamos que esse valor $\rho = 0.6$, está acima da ρ_c para o caso *Browniano-Browniano* e é notável para esse caso que a distribuição está centrada em $\langle f_s \rangle = 0$ - extinção. Para os demais casos, $\rho = 0.6 < \rho_c$ e portanto as demais buscas ainda se encontram na fase de sobrevivência.

Capítulo 6

Conclusão

Nesse trabalho podemos perceber a influência na escolha da estratégia de busca como forma de garantir a sobrevivência do organismo buscador na busca por alvos, em diferentes tamanhos λ de redes unidimensionais. Nosso modelo trata de dois caminhantes aleatórios (buscador e alvo) que se difundem em vários tamanhos de redes 1D, onde o buscador obtém determinada energia g no encontro com o alvo. A estratégia na qual temos eficiência energética de busca e valores positivos da taxa de sobrevivência, é aquela na qual $\mu_{opt} \rightarrow 1$. Em altas densidades a escolha da estratégia é indiferente para o sistema. Podemos verificar que densidades críticas estão presentes no ponto em que a eficiência energética é nula. Essas densidades também foram reencontradas quando analisamos a evolução do sistema através de outras quantidades, tais como a flutuação relativa da energia e a taxa de sobrevivência de organismos buscadores. Essas densidades críticas (ρ_c) são detectadas no momento de forte crescimento das FR_ξ e no instante em que $\langle f_s \rangle \rightarrow 0$.

Presenciamos a ocorrência de uma transição de fase de segunda ordem, entre fases caracterizadas por $\langle f_s \rangle > 0$ e por $\langle f_s \rangle = 0$. Verificamos que essas taxas se comportam adequadamente às características de um parâmetro de ordem, e com isso foi possível calcular os expoentes críticos α e β , para cada tipo de difusão adotada, utilizando técnicas de teoria de escala de tamanho finito e de uma renormalização fenomenológica aplicada ao nosso modelo. A presença de transições contínuas foi também confirmada com a análise da distribuição do parâmetro de ordem, nos dando simples picos para quaisquer valores de ρ . A principal descoberta foi verificar que cada expoente crítico é consideravelmente igual para qualquer tipo de difusão adotada, nos motivando a aceitar o surgimento

de uma nova classe de universalidade referentes a processos de busca.

Temos várias perspectivas e trabalhos em andamento, tais como:

- *Cálculo do cumulante de Binder de quarta ordem*

O estudo do Cumulante de Binder do parâmetro de ordem será muito importante, pois poderá ser uma ferramenta adicional para confirmar a presença de transições de fase de segunda ordem presente em nosso modelo. O cálculo desse cumulante está em andamento e tão logo já teremos resultados.

- *Análise em 2D e 3D*

O nosso modelo no contexto bi e tridimensional será importante, visto que a maioria dos organismos biológicos fazem buscas em ambientes 2D e 3D. Além disso, poderemos verificar se nossos expoentes críticos são ou não independentes da dimensão do sistema de busca.

- *Modelo Analítico*

A perspectiva de um modelo analítico para nosso modelo será importante para comparação com os resultados numéricos. Não sabemos da possibilidade de uma formulação analítica devido ao elevado número de parâmetros e variáveis, mas no mínimo poderemos apresentar alguns resultados com aproximações analíticas para esse modelo.

- *Entendimento das transições contínuas*

Entender quais as consequências para processos evolutivos e de extinção e o porquê de termos extinções como transição de fase de segunda ordem, também faz parte de nossas perspectivas desse trabalho.

- *Mudança de parâmetros*

Os resultados desse modelo foram apresentados para um determinado conjunto de parâmetros e condições iniciais. É importante verificar quais mudanças qualitativas e/ou quantitativas poderíamos observar caso mudássemos, por exemplo, o raio de visão do buscador, a energia ganha a cada encontro, a velocidade de caminhada e/ou o tamanho dos organismos durante o processo de busca. É importante e interessante saber se nossos expoentes críticos dependem desses parâmetros, visando estabelecer o grau de universalidade desses expoentes.

Referências

- [1] HASSELL, M. P; MAY, R. M. . *Journal Animal Ecology*, 43(567), 1974.
- [2] SALINAS, Sílvio R. A. *Introdução à Física Estatística*. edusp, 1998.
- [3] SALINAS, Sílvio R. A. Einstein, o Atomismo e a Teoria do Movimento Browniano. *Física na Escola*, 6(1):p. 23–26, 2005.
- [4] RUDNICK, Joseph; GASPARIL, George. *Elements of the Random Walk. An Introduction for Advanced Students and Researchers*. Cambridge University Press, 2004.
- [5] KAZMIER, Leonard J. *Schaum's Outline of Business Statistics*. Schaum, 2003.
- [6] JONES, David. *Pharmaceutical Statistics*. Pharmaceutical Press, 2001.
- [7] BEN-AVRHAM, Daniel. *Diffusion and Reactions in Fractals and Disordered*. Cambridge - USA, 2000.
- [8] VISWANATHAN, G. M.; AFANASYEV, V.; BULDYREV, S.; MURPHY, E. J.; PRINCE, P. A.; STANLEY, H. E. Lévy Flight Search Patterns of Wandering Albatrosses . *Nature*, 381:p. 413–415, 1996.
- [9] RAPOSO, E. P.; BULDYREV, Sergey V.; DA LUZ, M. G. E.; SANTOS, M. C.; STANLEY, H. Eugene; VISWANATHAN, Gandhi Mohan. Dynamical Robustness of Lévy Search Strategies. *Physical Review Letters*, 91(24):p. 1–4, Dezembro 2003.
- [10] BULDYREV, S. V.; GOLDBERGER, A. L.; HAVLIN, S.; PENG, C. k.; SIMONS, M.; STANLEY, H. E. Generalised Lévy-walk model for DNA nucleotide sequences. *Physics Review E*, 47(4514), 1993.

- [11] NOLAN, John P. *Stable Distribution: Models for Heavy Tailed Data*. American University, 2008.
- [12] DILÃO, Rui. A Ciência do Sistema Complexo. *Técnica*, (1):p. 5–18, 1995.
- [13] SOUZA, G. M.; BUCKERIDGE, M. S. Sistemas Complexos: novas formas de ver a botânica. *Revista Brasil Botânica*, 27(3):p. 407–419, julho-setembro 2004.
- [14] D. Sornette. *Critical Phenomena in Natural Sciences*. Springer, 2004.
- [15] GLÉRIA, Iram Marcelo; MATSUSHITA, Raus; DA SILVA, Sergio. Sistemas complexos, criticidade e leis de potência. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 26(2):p. 99–108, 2004.
- [16] BRANKOV, L.; DANCHEV, D. M.; TONCHEV, N. S.; BRANKOV, J. G. *Theory of Critical Phenomena in Finite-Size Systems: Scaling and Quantum Effects (Series in Modern Condensed Matter Physics)*. World Scientific Publishing Company, 2000.
- [17] AU YANG, Sunny Y. *Foundations of Complex-System Theories in Economics, Evolutionary Biology and Statistica*. Cambridge - USA, 1999.
- [18] MORTIMER, R. G. *Physical Chemistry*. Academic Press, 2008.
- [19] WIESER, Wolfgang. Simple Ising model magnetisation simulation. <http://www.triplespark.net/sim/isingmag/>, 2008.
- [20] DoITPoMS Teaching and Learning Packages - University of Cambridge. Variation of polarisation towards the Curie point in differently ordered systems. <http://www.doitpoms.ac.uk/tlplib/pyroelectricity/behaviourcuriepoint.php>.
- [21] MICHAEL, K. *The Casimir Effect in Critical Systems*. World Scientific Publishing Company, 1994.
- [22] FISHER, M. E. *Summer School Enrico Fermi*. M.S. Green - Academic Press - New York, 1971.
- [23] PLASCAK, J. A.; DA SILVA, J. K. L. On the Equivalence of Finite Size Scaling Renormalization Group and Phenomenological Renormalization. *Physica A*, 233:p. 551–559, November 1996.

- [24] Sims D. W., Witt M. J., Richardson A. J., Southall E. J. and Metcalfe J. D. *Proc. R. Soc. London. Ser. B*, 273(1195), 2006.
- [25] BOYER, D.; MIRAMONTES, O.; RAMOS-FERNADEZ, G.; MATEOS, J. L.; COCHO, G. *Behav. Ecol. Sociobiol. Physica A*, 342(329), 2004.
- [26] VISWANATHAN, G. M.; BULDYREV, S. V.; HAVLIN, S.; DA LUZ, M. G. E.; RAPOSO, E. P.; STANLEY, H. E. . *Nature*, 401(911), 1999.
- [27] FAUSTINO, C. L.; DA SILVA, L. R.; DA LUZ, M. G. E.; RAPOSO, E. P.; VISWANATHAN, G. M. Search Dynamics at the Edge of Extinction: Anomalous Diffusion as a Critical Survival State. *Europhysics Letters*, 77(30002), Fevereiro 2007.
- [28] ALBANO, E. V. . *Europhysics Letters*, 34(97), 1996.
- [29] ALBANO, E. V. . *Physical Review E*, 54(3436), 1996.
- [30] RAPOSO, E. P.; BULDYREV, S. V.; DA LUZ, M. G. E.; SANTOS, M. C.; STANLEY, H. E.; VISWANATHAN, G. M. . *Physics Review Letters*, 91(240601), 2003.
- [31] SANTOS, M. C.; RAPOSO, E. P.; VISWANATHAN, G. W.; DA LUZ, M. G. E. . *Europhysics Letters*, 67(734), 2004.
- [32] SHLESINGER, M. F.; KLAFTER, J. *On Growth and Form*. Martinus Nijhof Publishers, 1986.
- [33] BARTUMEUS, Frederic Ferré. *Lévy Processes in Animal Movement and Dispersal*. Universitat de Barcelona - UB, 2005.

Índice

- albert einstein, 13–15
- aleatório, 14–16, 18
- bernoît mandelbrot, 13
- busca destrutiva, 35, 36, 40, 42
- busca não destrutiva, 35
- buscas aleatórias, 11, 35, 39
- caminhada aleatória, 11, 13, 15, 18, 20, 34, 35
- caminhada balística, 11, 34, 38, 40, 41
- caminhada browniana, 11, 15, 16, 38, 41
- caminhada de lévy, 11, 13, 18, 20, 26, 34
- caminhadas superdifusivas, 11
- criticalidade, 25, 34
- cumulante de binder, 70
- densidade de alvos, 33–36, 38, 40, 41, 53, 58
- desvio padrão, 19, 20
- difusão de busca, 11
- dinâmica de busca, 11, 34, 39, 40
- distribuição binomial, 16, 18, 20
- distribuição de cauchy, 22
- distribuição de lévy, 13, 18, 20–22, 35
- distribuição gaussiana, 13, 16, 18, 19, 22, 35
- distribuição normal, 16, 18, 20
- distribuições estáveis, 21, 22
- eficiência de busca, 35
- energia acumulada, 33, 41, 43
- estratégia de busca, 11, 33–35, 38, 39, 47, 49, 50, 53, 55, 66, 69
- expoente α , 57, 58
- expoente β , 62
- expoente crítico, 26–28, 30–32, 39, 40, 57, 62–65
- extinção, 37, 38, 40, 47, 49, 58, 64, 67
- fenômeno crítico, 26–30
- fisher, 32, 56
- flutuação, 34, 37, 42, 43, 49, 62
- flutuação relativa, 39, 41, 42, 47, 49, 53, 69
- hipótese de escala, 32
- invariância de escala, 25, 26
- lei de escala, 25
- lei de potência, 25, 26, 31, 35, 57, 58, 62, 63
- magnetização, 28
- markoviano, 15, 16, 41
- modelo de busca, 12, 33, 39–41, 43, 50, 63, 65
- movimento browniano, 13–15
- número de avogrado, 14

- parâmetro de controle, 27, 28, 31, 50, 55
- parâmetro de ordem, 27–31, 49, 50, 53, 55, 57,
62, 65
- paul lévy, 13, 21
- ponto crítico, 26–31, 40, 57, 58
- processo de busca, 24, 25, 33, 34, 37, 64, 70
- processo de encontro, 43
- raio de visão, 35, 36, 42, 43
- random walk, 13, 15
- renormalização, 32, 39
- robert brown, 13, 15
- sistema para-ferromagnético, 28, 30, 47, 55
- sistemas biológicos, 20
- sistemas complexos, 24–26
- smoluchowski, 13
- sobrevivência, 15, 33, 35, 37–40, 49, 58, 64, 65
- taxa de encontros, 34, 39, 65
- taxa de sobrevivência, 39, 41, 49, 50, 69
- teoria de escala, 30, 40
- transição de fase, 26, 27, 30, 39, 40, 55, 56
- transição de fase de primeira ordem, 27
- transição de fase de segunda ordem, 27, 28, 57,
63, 69
- universalidade, 25, 26, 30, 40, 64, 65, 70
- variância, 19, 22
- voo de lévy, 20