UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

Victor Lohan dos Santos Araujo

Métodos em equações diferenciais parciais:

Uma análise via espaços de Sobolev

Maceió
2021

Victor Lohan dos Santos Araujo

Métodos em equações diferenciais parciais:

Uma análise via espaços de Sobolev

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Colegiado do Curso de Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática
Orientador: Prof. Dr. Alan Anderson da Silva Pereira

Maceió
2021

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária: Lívia Silva dos Santos – CRB-4 – 1670

A663a Araújo,Victor Lohan dos Santos.
Métodos em equações diferenciais parciais: uma análise via espaços do Sobolev / Victor Lohan dos Santos Araújo. – 2021.
80 f.:il.

Orientador: Alan Anderson da Silva Pereira.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2021.

Bibliografia: f. 80

1. Espaços de Sobolev – Resoluções. 2. Teorema de traço. 3. Resoluções de EDPs. 4. Equações diferenciais parciais. I. Título.

CDU: 517.98

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
COORDENAÇÃO DO CURSO DEMATEMÁTICA BACHARELADO
Fone: 3214-1405 / E-mail: coordmatimufal@gmail.com

DECLARAÇÃO DE NOTA DE TCC

Informamos à Coordenação do Curso de Graduação em Matemática Bacharelado que o Trabalho de Conclusão de Curso do aluno **VICTOR LOHAN DOS SANTOS ARAÚJO**, matrícula nº**16111548**, intitulado **"MÉTODOS EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS: UMA ANÁLISE VIA ESPAÇOS DE SOBOLEV"**, cuja defesa realizou-se nesta data, foi avaliado e recebeu da Banca Examinadora a seguinte nota: **_9,5_** , média obtida a partir das seguintes notas atribuídas pelos componentes da Banca Examinadora:

Prof. Dr. Alan Anderson da Silva Pereira _9,5_
Prof. Dr. Eduardo Perdigão de Lemos _9,5_
Prof. Dr. Isnaldo Isaac Barbosa (UFAL): _9,5_

Maceió, 08 de julho de 2021.

Alan Anderson da Silva Pra

Prof. Dr. Alan Anderson da Silva Pereira

Prof. Dr. Eduardo Perdigão de Lemos

Prof. Dr. Isnaldo Isaac Barbosa

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a minha mãe, Elenice Rosa dos Santos, por sempre estar presente e me incentivar e por trabalhar arduamente para me dar condições e estrutura. Agradeço ao professor Sinvaldo Gama por ter me encantado com a matemática e, involuntariamente, me fez querer ficar no curso de Matematica-bacharladao. Agradeço ao professor Isnaldo Isaac Barbosa por ter me concedido meus projetos de pesquisa que, são bases do meu conhecimento matemático e desse texto, além de sua generosidade em conceder livros, impressões, folhas A4 e pelo incentivo a pesquisa e suas orientações que me concederam a maiorias das oportunidades acadêmicas que eu conquistei ao longo da graduação. Farei um agradecimento conjunto aos professores Eduardo Perdigão e Marcio Cavalcante pelo incentivo extra ao estudo da área de análise e pela sugestão de livros para leitura, que em particular, uma dessas sugestões foi a referência principal para esse texto. E por fim agradeço ao professor Alan Anderson, não só como professor, mas também como amigo, pelos incentivos ao estudo de outras áreas e pela contribuição especial no desenvolvimento deste texto.

Gostaria de agradecer aos que mais discutiram matemática comigo ao longo da minha vida, que são meus cães Lobito e Bodinho, que apesar de nunca responderem estavam sempre atentos e pareciam compreender o que eu falava.

Gostaria de agradecer aos meus amigos: Joyce Monteiro, Milena Farias e Marcos Andre por me alegrarem e me ajudarem a manter a minha sanidade em momentos difíceis da jornada, me lembraram que eu tenho companhia em momentos que eu acreditei que estava completamente sozinho.

Agradeço a Vinicius Guardiano por ter digitado o teorema de Baire para mim e pelo auxilio com o latex.

Também faço um agradecimento aos amigos e colegas: Rebeca alves, Maria Clara, Jonatahn Bruno, Cicero calheiros, Sandra Cavalcante, Ewellyn Amancio, Monique Melo, Viviane Alves e Dandara Medeiros que tiveram suas contribuições, mas as limitações dessas páginas não me permitem detalhar as de cada um.

Se a memória me sabotar, agradeço também a qualquer um que tenha tido contribuição e não teve seu nome citado aqui.

Por fim, um agradecimento especial a uma pessoa que já não está mais presente, mas foi uma das mais importantes ao longo da minha vida pessoal e acadêmica. Agradeço a maria Creuza de Melo Nougueira por tudo o que fez pela minha família, foi fundamental para eu ter condições de chegar aqui.

Se você quiser, se você se esforçar, se você treinar, se você entrar de cabeça, se você se concetrar, nada garante que você vai conseguir.

(Craque Daniel)

A minha mãe Elenice Rosa dos Santos
e em memória de Maria Creusa de Melo Nougueira

Resumo

Este trabalho tem como objetivo analisar soluções fracas da equação de Laplace não homogênea em espaços de Sobolev com índices fracionários com condição de bordo não regulares. A ferramenta central para essa análise são os teoremas do traço, que irão fornecer a continuídade da aplicação solução em função da restrição a condição de contorno.

Palavras-chave: Distribuições, Sobolev, Transformada de Fourier.

Abstract

This work aims to analyze weak solutions of the non-homogeneous Laplace equation in Sobolev spaces with fractional indices with non-regular edge condition. The central tool for this analysis are the trace theorems, which will provide the continuity of the solution application as a function of the restriction to the boundary condition.

Keywords: Distributions, Sobolev, Fourier Transform.

Sumário

1 Conceitos e resultados preliminares

Nesse capítulo iremos estabelecer conceitos preliminares e resultados que serão utilizados ao longo desse trabalho. Apenas as demonstrações que requisitarem muitos resultados auxiliares que não se enquadram no contexto que estamos trabalhando serão omitidas.

1.1 Análise funcional

Nesta seção estudaremos alguns resultados básicos da teoria de análise funcional que serão de suma importância para garantir existência de soluções de EDP e propriedades dos espaços onde iremos trabalhar. Faremos as seguintes convenções, $\mathbb{K}$ será utilizado para denotar $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ e 0 pertence aos naturais.

Definição 1. Uma métrica em um conjunto X é uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$ que atende as seguintes condições :

1. $d(x, y) \geqslant 0,\ \ d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$;
3. $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$; para quaisquer $x, y, z \in M$.

Definição 2. Uma norma num espaço vetorial X sobre $\mathbb{K}$ é uma aplicação $||.|| : X \to \mathbb{R}$ que satisfaz

1. $||\xi|| \geqslant 0$ para todo $\xi \in X$, $||\xi|| = 0$ se, e somente se, $\xi = 0$;
2. $||\alpha\xi|| = |\alpha|||\xi||$ para todo $\xi \in X$ e para todo $\alpha \in \mathbb{K}$;
3. $||\xi + \eta|| \leqslant ||\xi|| + ||\eta||$ para todos $\xi, \eta \in X$.

Um espaço normado que é completo com a métrica induzida pela norma é chamado *espaço de Banach*.

Exemplo 1. O espaço euclidiano $\mathbb{R}^k$ com a norma $||x||_1 = |x_1| + \cdots + |x_k|$ é um espaço de Banach.

Com efeito, seja (x_j) uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^k$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todos $m, n > n_0$ temos

$$||x_n - x_m||_1 = |x_{1n} - x_{1m}| + \cdots + |x_{kn} - x_{km}| < \varepsilon^2.$$

Note que (x_{in}) é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ para cada $i = 1, 2, \cdots, k$. Como $\mathbb{R}$ é completo temos que cada sequência (x_{in}) converge para algum y_i. Afirmamos que $\lim(x_j) = y = (y_1, \cdots, y_k)$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_{in} - y_i| < \frac{\varepsilon}{k} \Rightarrow |x_{1n} - y_1| + \cdots + |x_{kn} - y_k| = ||x_j - y||_1 < \varepsilon$$

logo $\mathbb{R}^k$ é completo com a norma $||.||_1$.

Vimos acima que dentre as métricas que são utilizadas em espaços vetoriais, a norma é um tipo de métrica com a propriedade de linearidade na multiplicação por escalar. Iremos definir um tipo especial de norma que que provém de uma função bilinear na soma de vetores.

Definição 3. Um *produto interno* no espaço vetorial X é um funcional $(\xi, \eta) \to \langle \xi, \eta \rangle$ de $X \times X \to \mathbb{K}$ tal que para quaisquer $\xi, \eta, \psi \in X$ e $\alpha \in \mathbb{K}$;

1. $\langle \alpha\xi + \eta, \psi \rangle = \overline{\alpha}\langle \xi, \psi \rangle + \langle \eta, \psi \rangle$;
2. $\langle \xi, \eta \rangle = \overline{\langle \eta, \xi \rangle}$;
3. $\langle \xi, \xi \rangle \geqslant 0$ e $\langle \xi, \xi \rangle = 0$ se, e somente se, $\xi = 0$.

Um fato útil dos espaços com produto interno é a chamada *lei do paralelogramo* que nos diz que

$$\left|\left|\frac{x+y}{2}\right|\right|^2 + \left|\left|\frac{x-y}{2}\right|\right|^2 = \frac{1}{2}(||x||^2 + ||y||^2).$$

Um espaço com produto interno cuja norma induzida pelo produto interno é completa é chamado de *espaço de Hilbert*.

Exemplo 2. O espaço euclidiano $\mathbb{R}^k$ com a norma $||x||_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ é um espaço de Hilbert.

Seja (x_j) uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^k$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todos $m, n > n_0$ temos

$$||x_n - x_m||^2 = \langle x_n - x_m, x_n - x_m \rangle < \varepsilon.$$

Note que (x_{in}) é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ para cada $i = 1, 2, \cdots, k$, pois

$$|x_{in} - x_{im}|^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow |x_{in} - x_{im}| < \varepsilon,$$

logo como $\mathbb{R}$ é completo temos que cada sequência (x_{in}) converge para $y_1 \in \mathbb{R}$, assim (x_j) converge para $y = (y_1, y_2, \cdots, y_k)$ pelo argumento análogo ao exemplo anterior.

Exemplo 3. O espaço vetorial $C([a,b], \mathbb{R})$ das funções contínuas definidas no intervalo $[a,b]$ com imagem na reta com a métrica

$$d(f,g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$$

é um espaço de Banach.

É facil ver que d define uma métrica. Seja (f_n) uma sequência de Cauchy em $C([a,b], \mathbb{R})$. Assim dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0$ implica

$$d(f,g) = \sup_{x \in [a,b]} |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Em particular para cada x_0 fixado temos que $(f_n(x_0))$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ logo converge. Defina a função $f(x_0) = \lim f_n(x_0)$ pontualmente para cada $x_0 \in [a, b]$. Afirmamos que f é uma função contínua em $[a, b]$. Note que

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|.$$

Para a primeira e a última parcela temos que pela definição de f, existe n_0 tal que ambas são menores que $\varepsilon/3$ e pela continuidade de cada f_n temos que a parcela do meio é majorada por $\varepsilon/3$ para $|x - x_0| < \delta$, logo f é contínua e $\lim f_n = f$.

Definição 4. Um espaço métrico é dito *separável* se admite subconjunto denso enumerável.

Dentro de cada ramo da matemática, nós temos distintas maneiras de quando um conjunto ou uma grandeza é "desprezível". Na física grandezas são desprezíveis quando seu módulo possui uma escala muito menor do que todas as outras envolvidas no sistema, já em teoria da medida seus conjuntos desprezíveis quando possuem medida nula. Em espaços métricos, conjuntos que são "irrelevantes" em relação ao espaço inteiro são conhecidos como *magros* e iremos apresentá-los a seguir.

Definição 5. Um subconjunto S de um espaço topológico $\mathbf{X}$ diz-se *magro* em $\mathbf{X}$ quando $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, onde $\operatorname{int}(\overline{A_n}) = \varnothing$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Lema 1. Sejam (x_n) uma sequência e $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \cdots\}$. A sequência (x_n) é de Cauchy se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} Diam(X_n) = 0$.

Demonstração. Basta notar que $d(x_n, x_m) < \ \varepsilon$ para quaisquer $m, n > \ n_0$ é equivalente a $\mathrm{Diam}(X_n) < \varepsilon$ para todo $n > \ n_0$. □

Teorema 1 (Teorema de Baire)**.** *Seja M um espaço métrico completo. Todo conjunto magro em M tem interior vazio. Equivalentemente: toda interseção enumerável de aberto densos é um subconjunto denso em M.*

Demonstração. Sejam M um espaço métrico completo e $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma família enumerável de abertos densos em M. Seja B_1 uma bola aberta arbitraria em M. Como A_1 é denso e aberto, logo $B_1 \cap A_1$ é aberto e não vazio, assim podemos tomar $B_2 \subset B_1 \cap A_1$ tal que $\overline{B_2} \subset B_1 \cap A_1$ e o raio de $\overline{B_2}$ não exceda $\frac{1}{2}$. Como A_2 é aberto e denso logo $A_2 \cap B_2$ é aberto e não vazio, assim podemos obter B_3 tal que $\overline{B_3} \subset B_2 \cap A_2$ e seu raio não exceda que $\frac{1}{3}$. Indutivamente temos que uma sequência (B_n) tal que $\overline{B_{n+1}} \subset \overline{B_n}$ para todo n $\in \mathbb{N}$, $\overline{B_{n+1}} \subset B_n \cap A_n$ e $\mathrm{Diam}(\overline{B_n}) \to 0$. Para cada n tome um $x_n \in \overline{B_n}$.A sequência (x_n) é de Cauchy pelo lema 1 e como M é completo logo (x_n) converge para um ponto x. Como cada $\overline{B_n}$ é fechado temos que x $\in \overline{B_n}$ para todo n $\in \mathbb{N}$. Devido a sequência formada acima atender a $\overline{B_{n+1}} \subset B_n \cap A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $x \in A_n$ e x $\in B_1$ logo $x \in B_1 \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$, como queríamos mostrar. □

Aqui iremos denotar por $B(\mathbf{B}, \mathbf{N})$ o conjunto de operadores lineares contínuos de $\mathbf{B}$ em $\mathbf{N}$ onde $\mathbf{B}$ é um espaço de Banach e $\mathbf{N}$ é um espaço vetorial normado.
Agora iremos provar um resultado muito útil na teoria de análise funcional. Em geral trabalhamos com sequências, no entanto, o próximo resultado garante uma limitação para uma família arbitraria de operadores.

Teorema 2 (Princípio da limitação uniforme)**.** *Toda coleção* $\{T_\alpha\}_{\alpha \in J}$ *de operadores no espaço* $B(\mathbf{B}, \mathbf{N})$ *que é pontualmente limitada, ou seja, para cada* $\xi \in \mathbf{B}$ *tem-se*

$$\sup_{\alpha \in J} ||T_\alpha \xi|| < \infty$$

é de fato uniformemente limitada, ou seja, $\sup_{\alpha \in J} ||T_\alpha|| < \infty$.

Demonstração. Seja

$$E_k = \{\xi \in \mathbf{B} : ||T_\alpha \xi|| \leqslant k, \forall\ \alpha \in J\},$$

o qual é um conjunto fechado pois, como T_α é contínuo temos que E_k é a interseção dos fechados ${T_\alpha}^{-1}(\overline{B_{\mathbf{N}}}(0,k))$ para todo $\alpha \in J$. Como $\mathbf{B} = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, pelo teorema de Baire existe um E_m com interior não-vazio. Seja $B_{\mathbf{B}}(\xi_0; r)$ um bola aberta contida em E_m; então, para qualquer $\alpha \in J$ tem se $||T_\alpha \xi|| \leqslant m$ para todo $\xi \in B_{\mathbf{B}}(\xi_0; r)$.

Se $\xi \in \mathbf{B}, ||\xi|| = 1$, temos que $\eta = \xi_0 + \frac{r\xi}{2}$ pertence a $B_{\mathbf{B}}(\xi_0; r)$ e além disso

$$||T_\alpha \xi|| = \frac{2}{r}||T_\alpha \eta - T_\alpha \xi_0|| \leqslant \frac{2}{r}(||T_\alpha \eta|| + ||T_\alpha \xi_0||) \leqslant \frac{4m}{r};$$

assim $||T_\alpha \xi|| \leqslant \frac{4m}{r}$ para todo $\alpha \in J$ e $||\xi|| = 1$; disto segue que $\sup\limits_{\alpha} ||T_\alpha|| \leqslant \dfrac{4m}{r} < \infty$ □

Antes de começarmos a trabalhar com espaços de Hilbert vamos fechar espaços vetoriais normados com grande estilo. O *teorema de Hahn-Banach* é um resultado que nos permite garantir a existência de funcionais lineares e tem corolários bem variados. A demonstração dele segue do *Lema de Zorn*, que é um dos axiomas fundamentais da lógica matemática.

Definição 6. Uma ordenação parcial de um conjunto X é uma relação $<$ tal que

- $\xi < \xi \quad \forall\ \xi \in X$;
- $\xi < \eta$ e $\eta < \tau \Rightarrow \xi < \tau$;
- $\xi < \eta$ e $\eta < \xi \Rightarrow \xi = \eta$.

Quando a relação acima pode ser aplicada para quaisquer dois elementos de X, o conjunto é dito *totalmente ordenado*. Um elemento $\xi \in X$ é dito *maximal* se para todo $\eta \in X$ tal que $\xi < \eta$ tem-se $\xi = \eta$.

Axioma 1 (Lema de Zorn)**.** Um conjunto não-vazio parcialmente ordenado, no qual todo subconjunto totalmente ordenado possui um limite superior, possui um elemento maximal.

Lema de Zorn é um axioma altamente não intuitivo. Isso se deve ao fato dele não ter sido criado como axioma, mas posteriormente foi provado que ele é equivalente ao Axioma da Escolha.

Teorema 3 (Hahn-Banach)**.** *Sejam X um espaço vetorial real e $p : X \to \mathbb{R}$ tal que para todos $x, y \in X$ tem -se*

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y);$$
$$p(\alpha x) = \alpha p(x),\ \alpha \geqslant 0.$$

Se $f : Z \to \mathbb{R}$ é um funcional linear definido no subespaço vetorial $Z \subset X$ tal que

$$f(t) \leqslant p(t), \quad \forall\ t \in Z,$$

então f possui uma extensão linear $F : X \to \mathbb{R}$ tal que

$$F(x) \leqslant p(x), \quad \forall\ x \in X.$$

Demonstração. Seja $G = \{g_\lambda\}$ a coleção de extensões lineares de f, com

$$g_\lambda : Z_\lambda \to \mathbb{R}$$

onde Z_λ é um subespaço com $Z \subset Z_\lambda \subset X$ e $g_\lambda(x) \leqslant p(x)\ \forall\ x \in Z_\lambda$. Como $f \in G$ segue que $G \neq \varnothing$. Defina a seguinte relação de ordem

$$g_t < g_\lambda \iff Z_t \subset Z_\lambda \text{ e } g_t(x) = g_\lambda(x)\ \forall\ x \in Z_t.$$

A relação acima claramente define uma ordem parcial. Se $\{g_t\}_{t\in J}$ é um subconjunto totalmente ordenado de G, então $\Phi = \cup_{t\in J} Z_t$ é tambem um subespaço vetorial e

$$g : \Phi \to \mathbb{R}, \quad g(x) = g_t(x) \text{ se } x \in Z_t,$$

está bem definida e $g(x) \leqslant p(x)$, para todo x em Φ. Como $g_t < g$ para todo t em J temos que todo conjunto totalmente ordenado possui um elemento maximal, logo pelo Lema de Zorn G admite um elemento maximal F definido em $X_0 \subset X$ satisfazendo $F(x) \leqslant p(x)$ para todo $x \in X_0$. Se $X_0 = X$ o teorema está provado, assim suponha que existe $\eta \in X - X_0$. Seja $Y = Lin(X_0 \cup \eta)$ e $k \in \mathbb{R}$. Cada $x \in Y$ pode ser escrito como $x = \xi + \alpha\eta$, onde $\xi \in X_0$. Defina a seguinte extensão de F

$$\overline{F}(\xi + \alpha\eta) = F(\xi) + \overline{F}(\alpha\eta) = F(\xi) + \alpha k.$$

Para quaisquer $x, y \in X_0$ tem-se

$$F(x+y) \leqslant p(x+y) \leqslant p(x-\eta) + p(y+\eta),$$

logo

$$F(x) - p(x-\eta) \leqslant p(y+\eta) - F(y).$$

Portanto, existe λ tal que

$$\sup_{x \in X_0}\{F(x) - p(x-\eta)\} \leqslant \inf_{y \in X_0}\{p(y+\eta) - F(y)\}.$$

Agora tome $k = \lambda$ na extensão de F e vamos provar que $\overline{F}(x) \leqslant p(x)$ para todo $x \in Y$. Usando o fato de que cada $x \in Y$ pode ser escrito como $x = \xi + \alpha\eta$,temos para $\alpha > 0$

$$\overline{F}(x) \leqslant F(\xi) + \alpha\left[p\left(\frac{\xi}{\alpha} + \eta\right) - F\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)\right] = p(\xi\alpha\eta),$$

para $\alpha < 0$

$$\begin{aligned}\overline{F}(\xi\alpha\eta) &= F(\xi) - |\alpha|\lambda \\ &= F(\xi) - |\alpha|\left[F\left(\frac{\xi}{|\alpha|}\right) - p\left(\frac{\xi}{|\alpha|} - \eta\right)\right] \\ &= p(\xi + \alpha\eta),\end{aligned}$$

para $\alpha = 0$ é trivial. Portanto $\overline{F}(x) \leqslant p(x)$ para todo $x \in Y$, o que contraria a maximalidade de F, logo $X_0 = X$ □

Definição 7. Seja $\mathbf{N}$ um espaço vetorial normado. O conjunto dos funcionais lineares contínuos definidos em $\mathbf{N}$ é chamado de *espaço dual* e será denotado por $\mathbf{N}^*$.

Corolário 1. Sejam $\mathbf{N}$ um espaço vetorial normado não trivial e $\mathbf{N}^*$ seu espaço dual. Então

i) Se $0 \neq \xi \in \mathbf{N}$, então existe $f \in \mathbf{N}^*$ com $f(\xi) = ||\xi||$ e $||f|| = 1$.

ii) Se η e ξ são elementos distintos de $\mathbf{N}$, então existe $f \in \mathbf{N}^*$ tal que $f(\eta) \neq f(\xi)$.

iii) Se $\xi \in \mathbf{N}$ satisfaz $f(\xi) = 0$, para todo $f \in \mathbf{N}$, então $\xi = 0$

iv) Se $\xi \in \mathbf{N}$, então
$$||\xi|| = \sup_{0 \neq f \in \mathbf{N}^*} \frac{|f(\xi)|}{||f||} = \max_{0 \neq f \in \mathbf{N}^*} \frac{|f(\xi)|}{||f||}$$

Demonstração. i) Basta aplicar Hanh-Banach sob as seguintes condições. O funcional $p : \mathbf{N} \to \mathbb{R}$ dado por $p(x) = ||x||$; o subespaço $Z = Lin(\{\xi\})$ e o funcional linear $g : Z \to \mathbb{R}$ como $g(\alpha\xi) = \alpha||\xi||$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

ii) Se $\xi \neq \eta$, então $\xi - \eta \neq 0$, e pelo item i) existe $f \in \mathbf{N}^*$ de modo que $0 \neq f(\xi - \eta) = f(\xi) - f(\eta)$.

iii) Se $\xi \neq 0$, pelo item i) haveria algum $f \in \mathbf{N}^*$ tal que $f(\xi) \neq 0$.

iv) Se $\xi = 0$ o resultado é óbivio. Se $\xi \neq 0$, então pelo item i) existe $g \in \mathbf{N}^*$ com $||g|| = 1$ e $g(\xi) = ||\xi||$. Assim

$$||\xi|| = \frac{g(\xi)}{||g||} \leqslant \sup_{0 \neq f \in \mathbf{N}^*} \frac{|f(\xi)|}{||f||} \leqslant \sup_{0 \neq f \in \mathbf{N}^*} \frac{||f||||\xi||}{||f||} = ||\xi||$$

□

Agora vamos iniciar a teoria específica sobre espaços de Hilbert. Todos os resultados anteriores são válidos em espaços de Hilbert, porém conseguimos resultados muito mais fortes quando temos uma estrutura de produto interno.

Teorema 4. *A norma de um espaço vetorial normado é induzida por um produto interno se, e somente se, ela satisfaz a lei do paralelogramo.*

A prova desse teorema não será feita, pois é uma demonstração longa e algébrica, porém ela pode ser encontrada em [4]. Uma vantagem de espaços com produto interno é que podemos resgatar a noção de ângulo, mesmo em espaços de dimensão infinita. Dizemos que que x é *ortogonal* a y se

$$\langle x, y \rangle = 0$$

e iremos denotar por $x \perp y$. Um conjunto $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ é dito *ortogonal* se

$$\langle x_\lambda, x_\eta \rangle = 0, \quad \text{se } \lambda \neq \eta$$

e é dito *ortonormal* se é ortogonal e

$$\langle x_\lambda, x_\eta \rangle = 1, \quad \text{se } \lambda = \eta.$$

Lema 2. Num espaço com produto interno, tem-se que $\xi \perp \eta$ se, e somente se,

$$||\xi + t\eta|| \geqslant ||\xi||, \quad \forall\ t \in \mathbb{K}.$$

Demonstração. Se $\eta = 0$ então não há o que provar. Suponha $\eta \neq 0$. Note que

$$0 \leqslant ||\xi + t\eta||^2 = ||\xi||^2 + 2Re(t\langle \xi, \eta \rangle) + |t|^2||\eta||^2.$$

Se $\xi \perp \eta$ então segue que para todo $t \in \mathbf{K}$, $||\xi + t\eta||^2 = ||\xi||^2 + |t|^2||\eta||^2 \geqslant ||\xi||^2$, ou seja, $||\xi + t\eta|| \geqslant ||\xi||$.

Se $||\xi + t\eta|| \geqslant ||\xi||, \quad \forall\ t \in \mathbf{K}$, elevando ambos os termos da expressão e tomando t $= -\frac{\langle \eta, \xi \rangle}{||\eta||^2}$, obtém-se $0 \leqslant -|\langle \xi, \eta \rangle|^2$, logo $\xi \perp \eta$. □

O próximo teorema é uma generalização dos teoremas de decomposição em soma direta de álgebra linear. A principal diferença é que todo subespaço vetorial de dimensão finita é fechado, já em dimensão infinita é necessário supor essa hipótese.

Teorema 5. *Se E é um subespaço vetorial fechado de um espaço de Hilbert $\mathbf{H}$, então*

$$\mathbf{H} = E \oplus E^{\perp}$$

onde $E^{\perp} = \{x \in \mathbf{H}; \langle x, y \rangle = 0 \ \forall \ y \in E\}$

Demonstração. Sejam $\xi \in \mathbf{H}$, $\delta := \inf_{\zeta \in E} ||\xi - \zeta||$ e $(\eta_n) \subset E$ com $||\xi - \eta_n|| \to \delta$. Pela lei do paralelogramo tem-se

$$2||\eta_n - \xi||^2 + 2||\eta_k - \xi||^2 = ||\eta_k - \eta_n||^2 + ||\eta_n + \eta_k - 2\xi||^2,$$

e como E é espaço vetorial temos que $(\eta_n + \eta_k)/2 \in E$, segue que

$$\begin{aligned} ||\eta_k - \eta_n|| &= 2||\eta_n - \xi||^2 + 2||\eta_k - \xi||^2 - 4\left|\left|\frac{\eta_n + \eta_k}{2} - \xi\right|\right|^2 \\ &\leqslant 2||\eta_n - \xi||^2 + 2||\eta_k - \xi||^2 - 4\delta^2, \end{aligned}$$

assim (η_n) é uma sequência de Cauchy em E, logo converge para algum $\eta \in E$. Pela continuidade da norma temos que $||\xi - \eta|| = \delta$. Como $(t\zeta - \eta) \in E$ para todos $\zeta \in E$ e $t \in \mathbb{K}$ temos

$$||(\xi - \eta) + t\zeta|| = ||\xi + (t\zeta - \zeta)|| \geqslant \delta = ||\xi - \eta||,$$

e pelo lema temos que $(\xi - \eta) \in E^{\perp}$. Assim temos a decomposição

$$\xi = \eta + (\xi - \eta) \quad \eta \in E, (\xi - \eta) \in E^{\perp}.$$

Resta apenas mostrar a unicidade da decomposição. Suponha que $\xi = \eta' + \zeta'$ com $\eta' \in E$ e $\zeta' \in E^{\perp}$, então

$$\eta' + \zeta' = \eta + (\xi - \eta) \Rightarrow \zeta' - (\xi - \eta) = \eta - \eta' \in E \cap E^{\perp}$$

assim ambos são nulos, logo a decomposição é única. □

Corolário 2. Seja $\mathbf{H}$ um espaço de Hilbert, são válidas as seguintes afirmações:

1. Se E é um subespaço fechado de $\mathbf{H}$, então E $= (E^{\perp})^{\perp}$.

2. Se M é um subconjunto de $\mathbf{H}$, então

$$\overline{Spam(M)} = \mathbf{H} \iff M^{\perp} = \{0\}$$

Demonstração. 1) Pelo teorema anterior temos

$$E \oplus E^{\perp} = \mathbf{H} = (E^{\perp})^{\perp} \oplus E^{\perp}$$

Segue da unicidade da decomposição que E $= (E^{\perp})^{\perp}$.

2) Seja N $= Lin(M)$. Note que $M^{\perp} = N^{\perp} = (\overline{N})^{\perp}$, onde a última igualdade decorre da continuidade do produto interno. Assim

$$\mathbf{H} = \overline{N} \oplus (\overline{N})^{\perp} = \overline{N} \oplus M^{\perp}$$

logo $\overline{N} = \mathbf{H}$ se, e somente se, $M^{\perp} = \{0\}$ □

Teorema 6. *Sejam* $\mathbf{H}$ *um espaço de Hilbert e* $\{e_\alpha\}_{\alpha\in J}$ *um conjunto ortonormal em* $\mathbf{H}$*. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) $\{e_\alpha\}_{\alpha\in J}$ *é uma base ortonormal de* $\mathbf{H}$*;*

ii)Se $\xi \in \mathbf{H}$ *satisfaz* $\xi \perp e_\alpha$ *para todo* $\alpha \in J$*, então* $\xi = 0$*.*

Demonstração. i) $\Rightarrow$ ii) Sejam $\{e_\alpha\}$ uma base ortonormal e $\xi \perp e_\alpha$, para todo $\alpha \in J$. Assim para todo $\varepsilon > 0$, existe uma combinação linear finita $\sum_{j=1}^{n} a_{\alpha_j} e_{\alpha_j}$ que satisfaz

$$||\xi - \sum_{j=1}^{n} a_{\alpha_j} e_{\alpha_j}||^2 < \varepsilon$$

assim

$$||\xi||^2 \leqslant ||\xi||^2 + \sum_{j=1}^{n} |a_{\alpha_j}|^2 < \ \varepsilon$$

logo $\xi = 0$

ii) $\Rightarrow$ i). Se $M = Spam(\{e_\alpha\}_{\alpha\in J})$, como $\overline{M}^{\perp} = (\{e_\alpha\}_{\alpha\in J})^{\perp}$, pelo Corolário 2 tem-se

$$\mathbf{H} = \overline{M} \oplus (\{e_\alpha\}_{\alpha\in J})^{\perp}$$

Por hipótese $(\{e_\alpha\}_{\alpha\in J})^{\perp} = \{0\}$,e assim $\overline{M} = \mathbf{H}$ □

Veremos agora um teorema que garante que em espaços de Hilbert o espaço dual pode ser identificado explicitamente com o produto interno.

Teorema 7 (Representação de Riez-Fréchet)**.** *Seja* $\mathbf{H}$ *um espaço de Hilbert. Dada qualquer* $\phi \in \mathbf{H}^*$ *existe um único* $f \in \mathbf{H}$ *tal que*

$$\phi(u) = \langle f, u \rangle \qquad \forall\ u \in \mathbf{H}.$$

Mais ainda,

$$||f|| = ||\phi||_{\mathbf{H}^*}$$

Demonstração. Seja $M = \phi^{-1}(\{0\})$, então M é um subespaço fechado de H. Se $M = H$ a prova do teorema é óbvia pois teríamos $f = 0$. Se M $\neq$ H afirmamos que existe g $\in H - M$ tal que

$$||g|| = 1 \ e \ \langle g, v \rangle = 0 \ \forall\ v \in M$$

Seja $g_0 \in H - M$. Defina $g_1 = P_M g_0$ onde P_M é a projeção ortogonal em M, então

$$g = \frac{g_0 - g_1}{||g_0 - g_1||}$$

satisfaz o requerido. Para qualquer $u \in \mathbf{H}$, defina

$$v = u - \lambda g \qquad \text{com } \lambda = \frac{\phi(u)}{\phi(g)}.$$

Note que v está bem definido pois $\phi(g) \neq 0$ e além disso $v \in M$, pois $\phi(v) = 0$. Segue que $\langle g, v \rangle = 0$, ou seja

$$\phi(u) = \phi(g)\langle g, u \rangle \qquad \forall\ u \in \mathbf{H}$$

assim $f = \phi(g)g$ $\square$

Como em espaços de Hilbert toda função $\phi \in \mathbf{H}^*$ é associada a uma função $f \in \mathbf{H}$ vamos denotar por

$$\phi(u) = \phi_f(u) = \langle f, u \rangle.$$

Agora vamos falar de um dos pontos mais surpreendentes sobre espaços de Hilbert que é a sua reflexibilidade.

Seja $\mathbf{N}$ um espaço vetorial normado e $\mathbf{N}^*$ seu espaço dual. Definimos o espaço bidual é dado por $(N^*)^*$ e iremos denotar por $\mathbf{N}^{**}$. Um operador natural do espaço $\mathbf{N}^{**}$ é a simples aplicação em um ponto de $\mathbf{N}$. Seja $x \in \mathbf{N}$ iremos denotar por $J : \mathbf{N} \to \mathbf{N}^{**}$ que associa para cada $x \in \mathbf{N}$ um elemento $J(x)$ de $\mathbf{N}^{**}$

$$J(x)[f] = f(x) \quad \forall \ \ f \in \mathbf{N}^*.$$

A função definida acima é chamada de *aplicação canônica.*

Teorema 8. *A aplicação canônica é uma isometria linear.*

Demonstração. A linearidade da aplicação $J(x)$ é imediata. Para provar a isometria iremos usar o Corolário 2, assim

$$||J(x)|| = \sup_{1 \geqslant ||f|| \in \mathbf{N}^*} \frac{|J(x)[f]|}{||f||} = \sup_{1 \geqslant ||f|| \in \mathbf{N}^*} \frac{|f(x)|}{||f||} = ||x||$$

onde o Corolário 2 foi usado na última igualdade. $\square$

Um espaço é dito reflexivo se a aplicação canônica é sobrejetiva, ou seja $\mathbf{N}$ é isomorfo a $\mathbf{N}^{**}$ e o isomorfismo é dado dado pela aplicação canônica. Um exemplo basico de espaço reflexivo é o $\mathbb{R}^n$, pois $(\mathbb{R}^n)^* = \mathbb{R}^n$. Uma das aplicações mais famosas do teorema de representação de Riez é que todo espaço de Hilbert é reflexivo.

Lema 3. $\mathbf{H}^*$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$\langle f_\xi, f_\eta \rangle_{\mathbf{H}^*} := \langle \eta, \xi \rangle_{\mathbf{H}}, \quad f_\xi, f_\eta \in \mathbf{H}^*.$$

Demonstração. Pelo teorema de Riez a função $\gamma : \mathbf{H} \to \mathbf{H}^*$, $\gamma(x) = f_\xi$ é uma isometria. A lei do paralelogramo é satisfeita para $\mathbf{H}^* = \gamma(\mathbf{H})$, logo $\mathbf{H}^*$ é um espaço de Hilbert. $\square$

Teorema 9. *Todo espaço de Hilbert é reflexivo.*

Demonstração. Mostraremos que dado $g \in \mathbf{H}^{**}$ existe $\xi \in \mathbf{H}$ tal que $g = J(x)$. Como todo elemento de $\mathbf{H}^*$ é da forma f_η com $\eta \in \mathbf{H}$, então basta analizar $g(f_\eta)$. Pelo teorema de Representação de Riesz, aplicado a $g \in \mathbf{H}^{**}$, existe um único elemento $f_\xi \in \mathbf{H}^*$, para algum $\xi \in \mathbf{H}$, de modo que

$$g(f_\eta) = \langle f_\xi, f_\eta \rangle_{\mathbf{H}^*}, \quad \forall \eta \in \mathbf{H}.$$

Usando esta representação combinada com o lema anterior, então

$$g(f_\eta) = \langle \eta, \xi \rangle_{\mathbf{H}} = f_\eta(\xi) = J(\xi)[f_\eta]$$

para toda $\eta \in \mathbf{H}$, logo $g = J(\xi)$ □

1.2 Teoria da medida

Aqui iremos fazer uma diagonal para os teoremas mais classicos de teoria da medida omitindo a maioria das provas, mas dando exemplos para facilitar o entendimento das aplicações dos teoremas. Mas todas as demonstrações dos resultados citados abaixo podem ser encontradas em [6] .

Definição 8. Uma familia $\mathbf{X}$ de subconjuntos de X é uma $\sigma-$algebra se atende a:

1) $\emptyset, X \in \mathbf{X}$.

2) Se $A \in \mathbf{X}$, então $A^c \in \mathbf{X}$.

3) Se (A_n) é uma sequênica de conjuntos de $\mathbf{X}$, então $\bigcup A_n \in \mathbf{X}$.

Exemplo 4. Sejam A o conjunto dos intervalos da forma $[a, b], (a, b), [a, b)$ ou $(a, b]$. O conjunto

$$B = \{A \subset P(\mathbb{R}); A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n; A_n \subset A\}$$

é uma $\sigma-$algebra de $\mathbb{R}$.

Claramente $\emptyset, \mathbb{R}$ estão contidos em B. Pela lei de De Morgan temos que

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n)^c.$$

Como A_n^c é um conjunto de A, pois seu complementar ou é um intervalo ou é a união de dois intervalos, temos a propriedade 2. E a 3 é imediata, pois a união enumeravél de uniões enumeráveis é uma união enumerável.

Aplicando a lei de De Morgan no item 3 da definição, vemos que uma $\sigma-$algebra é tambem fechada para interseções enumeraveis. Uma propriedade muito útil sobre a definição acima é que se $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ é uma família de $\sigma-$algebras de A então

$$G = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$$

é uma $\sigma-$algebra de A. Claramente $\emptyset, X \in G$, pois cada A_λ é uma $\sigma-$algebra. E para as propriedades 2 e 3, veja que se A e (A_n) estão em G, então estão em A_λ para algum $\lambda \in \Lambda$, logo valem as propriedades 2 e 3. Isso induz a seguinte definição

Definição 9. Seja $\mathbf{X}$ uma coleção de subconjuntos de X. Dizemos que G é a $\sigma-$algebra gerada por $\mathbf{X}$ se

$$G = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda,$$

onde cada A_λ é uma $\sigma-$algebra contendo $\mathbf{X}$.

A $\sigma-$algebra gerada pelas bolas abertas de $\mathbb{R}^n$ será denotada por $\sigma-$algebra de Borel.

Definição 10. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita mensuravél com respeito a uma $\sigma-$algebra $\mathbf{X}$ se para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ o conjunto

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertence a $\mathbf{X}$.

Os exemplos mais classicos de funções mensuraveis são as funções continuas $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. A mensurabilidade segue da propriedade de imagem inversa de aberto ser um aberto. Além disso se g, f são mensuraveis então,

$$cg,\ g + f,\ gf,\ f^2 \text{ e } |f|$$

tambem são mensuraveis.

Definição 11. Seja $\mathbb{X}$ uma $\sigma-$algebra de X. Uma medida é uma função não negativa $\mu : \mathbb{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, tal que

- $\mu(\emptyset) = 0$.
- Se (E_n) é uma sequência de conjuntos disjuntos em $\mathbb{X}$, então

$$\mu\left(\bigcup E_n\right) = \sum \mu(E_n).$$

A medida mais relevante para esse texto é a medida de Lebesgue. Essa medida está definida na $\sigma-$algebra de Borel do $\mathbb{R}^n$ está atende a propriedade de

$$\mu(B(a, r)) = Vol(B(a, r)).$$

Uma noção muito importante em medida é a noção de um propriedade valer em quase todo ponto ou q.t.p. . Dizemos que uma propriedade vale q.t.p. se ela falha apenas em um conjunto de medida nula. As principais propriedades que esse conceito é usado é convergência em igualdade. Assim $f = g$ q.t.p. se o conjunto $A = \{x \in X; f \neq g\}$ tem medida nula . Para convergência temos que (f_n) converge para f q.t.p. se o conjunto

$$A = \{x \in X; \lim f_n(x) \neq f(x)\}$$

tem medida nula. Assim a noção de convergência q.t.p. é convergencia pontual em quase todo ponto.

Exemplo 5. A sequência $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_n(x) = e^{-n[sen(\pi x)]^2}$$

converge para a função nula q.t.p., pois os unicos pontos que

$$\lim f_n(x) \neq 0$$

é quando $x \in \mathbb{N}$, que tem medida nula na medida de Lebesgue.

Antes de definirmos integral precisaremos de um conceito fundamental de teoria da medida. A partir de agora X sempre será equipado com uma $\sigma-$álgebra. Seja $f : X \to \mathbb{R}$. Uma função é dita simples se

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{X}_{E_i}$$

com E_i mensuravéis.

Definição 12. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ não negativa e mensurável. A integral de f em relação a uma medida μ é dada por

1) Se f é simples, então

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i)$$

2) Se f não é simples, então

$$\int f d\mu = \sup \int \phi d\mu,$$

onde ϕ é simples e $0 \leqslant \phi \leqslant f$.

A integral acima é feita em relação ao conjunto X inteiro. A integral sobre um subconjunto A de X mensuravel é dada por

$$\int_A f d\mu = \int \mathcal{X}_A f d\mu.$$

Alem disso, se f, g são mensuráveis, $E \subset F$ e $c \geqslant 0$, então valem as porpriedades:

1) $\displaystyle\int cf d\mu = c \int f d\mu.$

2) $\displaystyle\int f + g d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$

3) $\displaystyle\int_E f d\mu \leqslant \int_F f d\mu.$

Note que por hora podemos integrar apenas funções positivas. Agora iremos extender para funções qualquer. Seja f uma função menurável, denotamos por

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) \text{ se } f(x) \geqslant 0 \\ 0 \text{ se } f(x) < 0 \end{cases} \qquad f^-(x) = \begin{cases} -f(x) \text{ se } f(x) \leqslant 0 \\ 0 \text{ se } f(x) > 0 \end{cases}$$

Agora iremos trabalhar com as funções mensuráveis $f : X \to \mathbb{R}$ tais que as integrais de f^+ e f^- são finitas e iremos denotar esse espaço por L. Assim definimos a integral de f por

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

e f é dita integrável, se a integral acima é finita.

Proposição 1. Sejam $f, g \in L$ e $c \in \mathbb{R}$. Valem a seguintes relações

1) $\displaystyle\int cf d\mu = c \int f d\mu.$

2) $\displaystyle\int f + g d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$

3) $\displaystyle\int |f| d\mu \leqslant \infty.$

4) $\displaystyle\left|\int f d\mu\right| \leqslant \int |f| d\mu.$

Agora temos um dos resultados mais importantes de teoria da medida. Ele carcteriza a principal vantagem da integral de Lebesgue em relação a integral de Riemman.

Teorema 10 (Teorema da convergência dominada de Lebesgue)**.** *Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis que converge q.t.p. para uma função f. Se existe um função integravél g tal que $|f_n| \leqslant g$ para todo n, então f é integrável e*

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

Exemplo 6. A sequência de funções (f_n) dada por

$$f_n(x) = \mathcal{X}_{[a,b]} e^{-x^2/n}$$

converge pontualemte para a função $f(x) = \mathcal{X}_{[a,b]}$ e $|f_n| \leqslant \mathcal{X}_{[a,b]}$. Pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue aplicado com a integral com respeito a medida de Lebesgue temos

$$\int \mathcal{X}_{[a,b]} e^{-x^2/n} dx = b - a.$$

Agora iremos definir os ultimos conceitos essenciais de teoria da medida que serão usados ao longo do texto, que são os espaços $L^p(X)$. Antes disso iremos definir uma classe de equivalência. Diremos que f é μ-equivalente a g se $f \neq g$ q.t.p..

Definição 13. O espaço $L^1(X)$ é o conjunto das relações classes de $\mu-$equivalência integráveis, ou seja,$f \in L^1(X)$ se qualquer função $\tilde{f}$ da classe de equivalencia de f atende a

$$\int |f| d\mu < \infty$$

e $f \in L^p(X)$ com $1 \leqslant p \leqslant \infty$ se $|f|^p \in L^1(X)$.

O espaço $L^p(X)$ é extremamente rico em propriedades topologicas e álgebricas para limitações. Vamos listar as que serão usadas com mais recorrência ao longo de texto.

Teorema 11. *O espaço $L^p(X)$ é um espaço de Banach com a norma*

$$||f||_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

e valem as seguintes propriedades

1) *(Desigualdade triangular)* $||f+g||_p \leqslant ||f||_p + ||g||_p$

2) *(Desigualdade de Holder) Se* $f \in L^p(X), g \in L^q(X)$ *com* $1/p + 1/q = 1$, *então* $fg \in L^1(X)$ *e*

$$||fg||_1 \leqslant ||f||_p ||g||_q$$

1.3 Transformada de Fourier e Espaço de Schwartz

Aqui iremos analisar o operador transformada de Fourier no espaço de Schwartz e suas propriedades para a resolução de EDPs.

A seguir iremos introduzir uma nova notação que irá simplificar o texto quando estivermos utilizando muitas derivadas parciais.

Definição 14. Dados $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$ e $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ definimos por

1. $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$
2. $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$
3. $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$

e α é chamado de *multi-índice.*

Agora iremos definir um dos operadores mais importantes da teoria de EDP. Ele surge naturalmente da teoria de séries de Fourier na tentativa de resolver a equação de calor para o problema de uma barra infinita. Apesar da simplicidade de sua definição, ele possui aplicações muito variadas, como veremos a seguir algumas delas.

Definição 15. Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. A *Transformada de Fourier* de f é dada por:

$$\mathbf{F}(f)(\xi) = (2\pi)^{(-\frac{n}{2})} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\xi \cdot x} dx$$

E de fato a definição acima faz sentido pois:

$$\left| (2\pi)^{(-\frac{n}{2})} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\xi x} dx \right| \leqslant (2\pi)^{(-\frac{n}{2})} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx = (2\pi)^{(-\frac{n}{2})} ||f||_{L^1}.$$

Veremos a frente que a transformada de Fourier possui várias propriedades para resolução de EDPs. No entanto para podermos utilizar esse operador linear mágico precisamos garantir que podemos aplicá-lo tantas vezes quanto necessário e invertê-lo. Infelizmente a condição de f pertencer a $L^1(\mathbb{R}^n)$ não é o suficiente para trabalharmos livremente. O exemplo a seguir ilustra esse fato.

$$u(x) = \begin{cases} 1 \ se & |x| \leqslant 1 \\ 0 \ se & |x| > 1 \end{cases}$$

Agora calcularemos $\mathbf{F}$(u), logo

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F}(u) &= (2\pi)^{(-\frac{1}{2})}\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}u(x)dx \\
&= (2\pi)^{(-\frac{1}{2})}\int_{-1}^{1} e^{-ix\xi}dx \\
&= (2\pi)^{(-\frac{1}{2})}\int_{-1}^{1} \cos(x\xi)dx + (2\pi)^{(-\frac{1}{2})}\int_{-1}^{1} \sin(-x\xi)dx \\
&= (2\pi)^{(-\frac{1}{2})}\frac{2\sin(\xi)}{\xi}
\end{aligned}
$$

que é uma função que não pertence a $L^1(\mathbb{R})$. Para contornar esse contratempo iremos definir um novo espaço para trabalhar a transformada de Fourier.

Definição 16. Diremos que uma função f pertence ao *espaço de Schwartz* se for infinitamente diferenciável e

$$
|x^\alpha f^\beta(x)| \leqslant C_{\alpha,\beta} \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}^n
$$

onde $\alpha \in N^n$ é um multi-índice. Iremos denotar o espaço de Schwartz por $\mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$.

Pela definição acima vemos que se $f \in \mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$ então $f^{(\alpha)}(x)$ e $f(x)x^\alpha$ também pertencem a $\mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, se $f \in \mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$ então $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leqslant p \leqslant \infty$, pois

$$
|f| \leqslant \frac{C}{(1+||x||^2)^n} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{C}{(1+||x||^2)^n}\right)^p dx,
$$

majorando a última integral, temos

$$
\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{C}{(1+||x||^2)^n}\right)^p dx \leqslant C^p \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+||x||^2)^n}dx = C^p\int_{B(0,1)} \frac{1}{(1+||x||^2)^n}dx + C^p\int_{\mathbb{R}^n - B(0,1)} \frac{1}{(1+||x||^2)^n}dx.
$$

Como a primeira integral é limitada, vamos apenas analisar a segunda, assim

$$
\int_{\mathbb{R}^n - B(0,1)} \frac{1}{(1+||x||^2)^n}dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n - B(0,1)} \frac{1}{||x||^{2n}}dx.
$$

Pela desigualdade entre as médias aritimética e geométrica, temos

$$
\int_{\mathbb{R}^n - B(0,1)} \frac{1}{||x||^{2n}}dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n - B(0,1)} \left(\prod_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{-1} dx = 2^n.
$$

Outra propriedade interessante é a continuidade uniforme das funções de $S(\mathbb{R}^n)$. Seja $f \in S(\mathbb{R}^n)$. Sabemos que existe uma constante C, tal que $(1+||x^2||)|f(x)| \leqslant C$, assim

$$
|f(x)-f(y)| \leqslant \left|\frac{C}{1+||x||^2} - \frac{C}{1+||y||^2}\right| = C\frac{||y||^2 - ||x||^2|}{(1+||x||^2)(1+||y||^2)} = C\frac{||x|| + ||y||}{(1+||x||^2)(1+||y||^2)}\,||y|| - ||x|||\,.
$$

Como a função
$$\frac{||x|| + ||y||}{(1+||x||^2)(1+||y||^2)}$$
é limitada, temos o resultado.

Temos aqui algumas propriedades algébricas da transformada de Fourier em $\mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 12. *Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ for uma função em $\mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$, então :*

i) $\mathbf{F}(f)$ é infinitamente derivável e
$$D^\alpha \mathbf{F}(f) = \mathbf{F}[(-i)^{|\alpha|} x^\alpha f];$$
ii) $\mathbf{F}[D^\alpha f] = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \mathbf{F}[f];$

iii) $\mathbf{F}(f) \in \mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. i) Como $f \in \mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$ então $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e a função $g = e^{-ix\xi}$ possui derivada parcial em relação a ξ limitada, logo atende as hipóteses do teorema de Leibnz (demonstração em [6]), assim para $\alpha = e_k$

$$\begin{aligned} D^\alpha \mathbf{F}[f] &= (2\pi)^{(-\frac{n}{2})} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f(x) e^{-i\xi x}}{\partial \xi_k} dx \\ &= (2\pi)^{(-\frac{n}{2})} \int_{\mathbb{R}^n} -ix_k f(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= \mathbf{F}(-ix_k f) \end{aligned}$$

e para o caso n basta compor as derivadas.

ii) Para $\alpha = e_k$, por integração por partes e pelo teorema de Fubini temos:
$$\begin{aligned} \mathbf{F}[D^\alpha f] &= (2\pi)^{(-\frac{n}{2})} \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha f(x) e^{-i\xi\cdot x} dx = (2\pi)^{(-\frac{n}{2})} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} e^{-i\xi\cdot x} dx_i dX \\ &= \int_{R^{n-1}} \left(e^{-ix\xi} f(x)|_{-\infty}^{+\infty} + i\xi \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi_k} f(x) dx_i \right) dX \end{aligned}$$

como $f \in \mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$ logo se anula no infinito, assim
$$\mathbf{F}[D^\alpha f] = \int_{R^{n-1}} \left(i\xi \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi_k} f(x) dx_i \right) dX = i\xi_k \mathbf{F}(f),$$
para os outros casos basta compor o caso anterior.

iii)Utilizaremos os itens anteriores, assim:

$$\xi^\alpha D^\beta \mathbf{F}(f) = \xi^\alpha \mathbf{F}[(-i)^{|\beta|} x^\beta f] = \mathbf{F}[i^{-|\alpha|} D^\alpha ((-i)^{|\beta|} x^\beta f)].$$

Como $g(x) = D^\alpha((-i)^{|\beta|} x^\beta f)$ nada mais é que um polinômio multiplicado por alguma derivada de f logo também pertence a $\mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$ logo $\mathbf{F}(g)$ é limitada. $\square$

Definição 17. Dadas duas funções f e g em $\mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$, definimos seu *produto de convolução* por

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy.$$

Note que a integral acima converge uniformemente, pois

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy \leqslant M \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|dy < \infty$$

onde $M = \max |f(x)|$. Aplicando a mudança de variável $x - y = u$ temos

$$(f * g)(x) = (g * f)(x),$$

logo a operação acima é associativa. Note que a menos da existência do elemento neutro, a operação acima define uma estrutura de grupo abeliano. Veremos mais adiante que esse elemento é a distribuição delta de Dirac.

Teorema 13. *Se f e g pertencem a $\mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$ então:*

1. *) $(f * g)(x) \in C^\infty$ e $D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g = f * (D^\alpha g)$;*

2. *) Se $m \geqslant 0$ inteiro então:*

$$x^m(f * g) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (x^k f) * (x^{m-k} g);$$

3. *) $(f * g) \in \mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. 1)Note que

$$|f^{(n)}(x-y)g(y)| \leqslant M|g(y)| \text{ e } |g^{(n)}(x-y)f(y)| \leqslant K|f(y)|$$

onde $M = \sup |f^{(n)}(x)|$ e $K = \sup |g^{(n)}(x)|$, logo a integral converge uniformemente e vale o teorema de Leibniz, assim

$$(D^\alpha f) * g = D^\alpha(f * g) = D^\alpha(g * f) = f * (D^\alpha g).$$

2)Como

$$x^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (x-y)^k y^{y-k}$$

temos

$$\begin{aligned}
x^m(f*g) &= \int_{\mathbb{R}} x^m f(x-y)g(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (x-y)^k f(x-y) y^{y-k} g(y)dy \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \int_{\mathbb{R}} (x-y)^k f(x-y) y^{y-k} g(y)dy \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (x^k f) * (x^{m-k} g)
\end{aligned}$$

3) Por 2) ja vimos que $(f*g) \in C^{\infty}$. Além disso

$$x^m D^n (f*g) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (x^k (D^n f) * (x^{m-k} g)$$

Que é limitada pois $x^k(D^n f)$ e $x^{m-k} g \in \mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$.

□

Agora iremos provar o teorema de inversão da transformada de Fourier, que tem como uma consequência que a transformada de Fourier define um automorfismo de $\mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$ em $\mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$.

Lema 4. A função $\psi(\xi) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} e^{-\frac{\xi^2}{4}}$ pode ser expressa atravéz do seguinte operador integral:

$$\psi(\xi) = \int_0^{\infty} e^{-x^2} cos(x\xi) dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} e^{-\frac{\xi^2}{4}}$$

Demonstração. Primeiramente note que a integral acima converge uniformemente para todo ξ, pois

$$|e^{-x^2} cos(x\xi)| \leqslant e^{-x^2}$$

e

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

assim pelo teste M de Weierstrass converge uniformemente.

além disso a integral de $-xe^{-x^2}\text{sen}(x\xi)$ também converge uniformemente pois:

$$|xe^{-x^2} sen(x\xi)| \leqslant |xe^{-x^2}|$$

e

$$\int_0^\infty xe^{-x^2} = \frac{1}{2}$$

Agora integrando por partes $-xe^{-x^2}\text{sen}(x\xi)$ temos

$$\psi'(\xi) = -\frac{\xi}{2}\int_0^\infty e^{-x^2}cos(x\xi)dx = -\frac{\xi}{2}\psi(\xi)$$

logo ψ satisfaz a equação diferencial

$$\psi' + \frac{\xi}{2}\psi = 0$$

com a condição inicial

$$\psi(0) = \int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

o que implica

$$\psi(\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\frac{-\xi^2}{4}}$$

$\square$

Lema 5. Dados $\varepsilon > 0$ e $\eta > 0$ existe n_0 tal que, para todo $n > n_0$ temos

$$\int_{||u||>\eta}(n\sqrt{\pi})^n e^{\frac{-||u||^2n^2}{4}}du < \varepsilon.$$

Demonstração. Como a integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-||u||^2}{4}}du$$

converge, temos que dado $\varepsilon > 0$ existe r tal que

$$\int_{||u||\geqslant r} e^{\frac{-||u||^2}{4}}du < \varepsilon.$$

Além disso, existe n_0 tal que $r < n_0\eta\sqrt{\pi}$. Assim, para todo $n \geqslant n_0$ temos

$$\int_{||u||\geqslant n\eta\sqrt{\pi}} e^{\frac{-||u||^2}{4}}du < \varepsilon,$$

fazendo a mudança de variável $u = n\sqrt{\pi}y$, temos

$$\begin{aligned}\int_{||u||\geqslant n\eta\sqrt{\pi}} e^{\frac{-||u||^2}{4}}du &= \int_{||y||\geqslant\eta}(n\sqrt{\pi})^n e^{\frac{-||u||^2n^2\pi}{4}}dy\\ &\geqslant \int_{||y||\geqslant\eta}(n\sqrt{\pi})^n e^{\frac{-||u||^2n^2}{4}}dy.\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 14. *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ uma função de $\mathbf{S}(\mathbb{R})$ e $\mathbf{F}(\xi)$ sua transformada de Fourier, então*

$$f(x) = (2\pi)^{(-\frac{n}{2})} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\mathbf{F}(\xi)d\xi$$

Demonstração. Defina a sequência $(f_n(x))$ por

$$f_n(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} e^{-\frac{||\xi||^2}{n^2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\xi} f(y)dyd\xi$$

Agora seja $g(y,\xi) = e^{i(x-y)\xi} e^{\frac{-||\xi||^2}{n^2}} f(y)$, assim

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(y,\xi)|dy = e^{-\frac{||\xi||^2}{n^2}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|dy$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(y,\xi)|d\xi = |f(y)| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{||\xi||^2}{n^2}} d\xi$$

logo

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |g(y,\xi)|dyd\xi < \infty$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |g(y,\xi)|d\xi dy < \infty.$$

Agora podemos utilizar o teorema de Fubini nas f_n para calculá-las.

$$\begin{aligned} f_n(x) &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\xi} e^{\frac{-||\xi||^2}{n^2}} d\xi dy \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \int_{\mathbb{R}^n} cos[(x-y)\xi] e^{\frac{-||\xi||^2}{n^2}} d\xi dy + (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \int_{\mathbb{R}^n} sen[(x-y)\xi] e^{\frac{-||\xi||^2}{n^2}} d\xi dy \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \int_{\mathbb{R}^n} cos[(x-y)\xi] e^{\frac{-||\xi||^2}{n^2}} d\xi dy. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} cos[(x-y)\xi] e^{\frac{-||\xi||^2}{n^2}} d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} cos\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)\xi_i\right] e^{\frac{-||\xi||^2}{n^2}} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[cos[(x_1-y_1)\xi_1] cos\left(\sum_{i=2}^{n}(x_i-y_i)\xi_i\right) - sen[(x_1-y_1)\xi_1] sen\left(\sum_{i=2}^{n}(x_i-y_i)\xi_i\right)\right. \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[cos[(x_1-y_1)\xi_1] cos\left(\sum_{i=2}^{n}(x_i-y_i)\xi_i\right)\right] e^{\frac{-||\xi||^2}{n^2}} d\xi \end{aligned}$$

Pelo lema 4 temos que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\xi_1^2}{n^2}} cos[(x_1-y_1)\xi]dx = n\sqrt{\pi} e^{\frac{-(x_1-y_1)^2 n^2}{4}},$$

logo

$$\int_{\mathbb{R}^n} cos[(x-y)\xi]e^{\frac{-||\xi||^2}{n^2}}d\xi = (n\sqrt{\pi})^n e^{\frac{-||x-y||^2 n^2}{4}}.$$

Assim

$$f_n(x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)(n\sqrt{\pi})^n e^{\frac{-||x-y||^2 n^2}{4}}dy.$$

Afirmamos que f_n converge uniformemente para f. Primeiro note que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(n\sqrt{\pi})^n}{(2\pi)^n} e^{\frac{-||x-y||^2 n^2}{4}}dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{n\sqrt{\pi}}{(2\pi)} e^{\frac{-||x_1-y_1||^2 n^2}{4}}dy_1 \int_{\mathbb{R}} \frac{(n\sqrt{\pi})^n}{(2\pi)} e^{\frac{-||x_2-y_2||^2 n^2}{4}}dy_2 \cdots \int_{\mathbb{R}} \frac{(n\sqrt{\pi})^n}{(2\pi)} e^{\frac{-||x_n-y_n||^2 n^2}{4}}dy_n.$$

Cada uma das integrais separadas é uma gaussiana normalizada, ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(n\sqrt{\pi})^n}{(2\pi)^n} e^{\frac{-||x-y||^2 n^2}{4}}dy = 1,$$

assim

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}[f(x-u) - f(x)](n\sqrt{\pi})^n e^{\frac{-||u||^2 n^2}{4}}du\right|.$$

Pelo lema 5, dados $\varepsilon > 0$ e $\eta > 0$ existe n_0 tal que

$$(2\pi)^{-n}\int_{||u||>\eta}(n\sqrt{\pi})^n e^{\frac{-||u||^2 n^2}{4}}du < \varepsilon.$$

Disto temos que

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &= \left|(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}[f(x-u) - f(x)](n\sqrt{\pi})^n e^{\frac{-||u||^2 n^2}{4}}du\right| \\
&\leqslant \left|(2\pi)^{-n}M\int_{||u||>\eta}(n\sqrt{\pi})^n e^{\frac{-||u||^2 n^2}{4}}du\right| + \left|(2\pi)^{-n}\int_{||u||\leqslant\eta}[f(x-u) - f(x)](n\sqrt{\pi})^n e^{\frac{-||u||^2 n^2}{4}}du\right| \\
&\leqslant \varepsilon M + \left|(2\pi)^{-n}\int_{||u||\leqslant\eta}[f(x-u) - f(x)](n\sqrt{\pi})^n e^{\frac{-||u||^2 n^2}{4}}du\right|
\end{aligned}$$

onde $M = \max\{f(x-u) - f(x)\}$. Como as funções de $S(\mathbb{R}^n)$ são uniformemente contínuas e $||x-u-x|| \leqslant \eta$, podemos tomar η suficientemente pequeno para que $f(x-u) - f(x) \leqslant \epsilon$, logo $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon(M+1)$. Resta provar que

$$(f_n) \to (2\pi)^{(-\frac{n}{2})}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}\mathbf{F}(\xi)d\xi$$

ou seja, provaremos que $\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}(1 - e^{\frac{-||\xi||^2}{n^2}})\mathbf{F}(\xi)d\xi$ converge para 0.

Dado $\varepsilon > 0$, tome ξ_0 tal que

$$\int_{||\xi||>\xi_0} |\mathbf{F}(\xi)|d\xi < \frac{\varepsilon}{4}$$

Como ξ_0 é fixado então tome n_0 tal que $1 - e^{\frac{-||\xi||^2}{n^2}} < \frac{\varepsilon}{4MK}$, para $||\xi|| \leqslant \xi_0$ e $n \geqslant n_0$, onde $M = max|\mathbf{F}(\xi)|$ e K é a medida de $B(0, \xi_0)$.Logo

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}(1 - e^{\frac{-||\xi||^2}{n^2}})\mathbf{F}(\xi)d\xi\right| \leqslant \int_{||\xi||>\xi_0}(1 - e^{\frac{-||\xi||^2}{n^2}})|\mathbf{F}(\xi)|d\xi + \int_{||\xi||\leqslant\xi_0}(1 - e^{\frac{-||\xi||^2}{n^2}})|\mathbf{F}(\xi)|d\xi$$
$$\leqslant 2\int_{||\xi||>\xi_0}|\mathbf{F}(\xi)|d\xi + \frac{\varepsilon}{4MK}M.2K < \varepsilon$$

$\square$

Teorema 15. *Se f e g pertencem a $\mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$ então*

$$\mathbf{F}[f * g] = (2\pi)^n\mathbf{F}[f]\mathbf{F}[g]$$

e vale o resultado acima para a transformada inversa.

Demonstração. Como

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)g(y)e^{-ix\xi}|dxdy < \infty$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)g(y)e^{-ix\xi}|dydx < \infty$$

logo vale o teorema de Fubini, assim

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}[f * g] &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dydx \\
&= \int_{\mathbb{R}}\left[\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}f(x-y)g(y)e^{-i\xi(y-y)}dy\right]dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} g(y)e^{-iy\xi}\left[\int_{\mathbb{R}} e^{-i(x-y)\xi}f(x-y)dx\right]dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} g(y)e^{-iy\xi}[(\sqrt{2\pi})^n\mathbf{F}(f)]dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} g(y)e^{-iy\xi}dy(\sqrt{2\pi})^n\mathbf{F}(f) \\
&= (\sqrt{2\pi})^n\mathbf{F}(g)(\sqrt{2\pi})^n\mathbf{F}(f)
\end{aligned}$$

$\square$

Corolário 3. Se f e g pertencem a $\mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$ então

$$\mathbf{F}[fg] = (2\pi)^{-n}\mathbf{F}[f] * \mathbf{F}[g]$$

e o mesmo resultado vale para transformada inversa.

Demonstração. Sejam $\mathbf{F}[f] = F$ e $\mathbf{F}[g] = G$. Então $\mathbf{F}^{(-1)}[F] = f$ e $\mathbf{F}^{(-1)}[G] = g$. Pelo teorema anterior

$$fg = (2\pi)^{-n}\mathbf{F}^{(-1)}[F * G].$$

Aplicando a transformada de Fourier na igualdade acima temos

$$\mathbf{F}[fg] = (2\pi)^{-n} F * G.$$

$\square$

Teorema 16 (Plancherel). *Sejam $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$ então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{F}[f]\overline{\mathbf{F}[g]}d\xi.$$

Em particular

$$||f||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = ||\mathbf{F}(f)||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{F}[f]\overline{\mathbf{F}[g]}d\xi &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{F}[f]\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\overline{g(x)}dxd\xi \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{\mathbb{R}^n} \overline{g(x)}\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{F}[f]e^{ix\xi}d\xi dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{g(x)}f(x)dx\end{aligned}$$

$\square$

Agora que temos um espaço suficientemente regular para trabalhar a transformada de Fourier, iremos encontrar seus autovetores e autovalores.

Iremos provar a seguir que $L^2(\mathbb{R}^n)$ admite base ortonormal enumerável composta por funções de $S(\mathbb{R}^n)$ e, consequentemente, $S(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^2(\mathbb{R}^n)$. A demonstração deste é feita de maneira surpreendente, pois os candidatos serão exatamente as auto funções da Transformada de Fourier e para o caso de $S(\mathbb{R})$ estas serão encontradas através da resolução de uma EDO. Veremos no Capítulo 2 uma visão mais detalhada sobre a mecânica quântica, mas para um modelo quântico de oscilador harmônico. Um sistema quântico é chamado de oscilador harmônico quando a força que atua na micro partícula é dada por $F(x) = -x$, com $x \in \mathbb{R}^n$. Para o caso unidimensional, a equação de Schrodinger nos diz que a função de onda atende a

$$ih\frac{\partial\phi}{\partial t}(t,x) + \frac{h^2}{2m}\Delta\phi(t,x) = x^2\phi(t,x).$$

Como existe uma força atuando no sentido contrário do movimento, é natural esperar rápido decaimento a medida que $|x|$ cresce. A solução geral do problema acima é dada por

$$\phi(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) e^{-iE_n t/h}$$

onde E_n e ψ_n atendem a:

$$\begin{cases} -\frac{d^2\psi}{dx^2} + \alpha^2 x^2 \psi = \alpha^2 E \psi \quad x \in \mathbb{R} \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} \psi(x) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Iremos buscar soluções da forma $\psi(x) = y(x)e^{-(\beta x)^2}$, onde β é uma constante positiva. Substituindo na EDO temos

$$-y'' + 2\beta y + 4\beta x y' - 4\beta^2 x^2 y + \alpha^2 x^2 y = \alpha^2 E y.$$

Tomando $\beta = \frac{\alpha}{2}$ a EDO acima se torna

$$y'' - 2\alpha x y' + (\alpha^2 E - \alpha)y = 0.$$

Para simplificar os cálculos, considere a mudança de variável $\xi = \sqrt{\alpha}x$. Agora temos a seguinte EDO

$$\frac{d^2y}{d\xi^2} - 2\xi\frac{dy}{d\xi} + 2py = 0 \tag{2}$$

onde $p = \frac{(\alpha E - 1)}{2}$.

Como as funções $p(x) = 2x$ e $q(x) = 2p$ são analíticas com raio de convergência infinito, iremos buscar soluções em séries de potências

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

disto temos que

$$2x\frac{dy}{dx} = 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+2)(n+1)x^n. \end{aligned}$$

Substituindo $y(x)$ na EDO temos que

$$2pa_0 + 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n[(n+2)(n+1)a_{n+2} + 2(p-n)a_n] = 0$$

ou seja, os coeficientes devem satisfazer a seguinte equação de recorrência

$$\begin{cases} a_2 = -pa_0 \\ a_{n+2} = -\frac{2(p-n)}{(n+2)(n+)}a_n, \qquad n \leqslant 1 \end{cases}$$

onde para cada par de valores (a_0, a_1) obtemos duas séries, uma apenas com as potências pares e outra apenas com potências ímpares. Em particular para $a_0 = a_1 = 1$ temos as seguintes séries

$$\begin{cases} y_0(x) = 1 - 2p\frac{x^2}{2!} + 2^2p(p-2)\frac{x^4}{4!} - \cdots \\ y_1(x) = x - 2(p-1)\frac{x^3}{3!} + 2^2(p-1)(p-3)\frac{x^5}{5!}. \end{cases}$$

Temos a solução geral de EDO que foi trabalhada acima, resta encontrar as soluções que se anulam no infinito.

Teorema 17. *Sejam y_1 e y_0 as funções definidas acima. Então,*

1. $\lim_{|x|\to\infty} y_0(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$ *se, e somente se,* $p \in \mathbf{N}$ *e é par;*

2. $\lim_{|x|\to\infty} y_1(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$ *se, e somente se,* $p \in \mathbf{N}$ *e é ímpar.*

Demonstração. Iremos demonstrar apenas o item 1, pois o 2 é análogo. Se $p \in \mathbf{N}$ então y_0 é um polinômio logo

$$\lim_{|x|\to\infty} y_0(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = 0.$$

Se p não é um inteiro par então $y_0(x)$ é definida por uma série de potências pares, que iremos representar por

$$y_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}x^{2k}$$

onde os coeficientes são dados pela fórmula de recorrência

$$a_0 = 1 \quad , a_{2k+2} = \frac{2(2k-p)}{(2k+2)(2k+1)}a_{2k}, \quad k = 1, 2, \cdots \quad .$$

Escrevendo a função $e^{\frac{-x^2}{2}}$ em série de potência em torno de x = 0 temos que

$$e^{\frac{x^2}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k}x^{2k}$$

onde $b_{2k} = \frac{1}{2^k k!}$, logo

$$\lim_{|x|\to\infty} y_0(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \cdots}{b_0 + b_2x^2 + b_4x^4 + \cdots}. \tag{3}$$

Agora seja k_0 o número natural tal que $2k_0 < p < 2k_0 + 2$. Daí segue que

$$\text{sinal}(a_{2k}) = \begin{cases} (-1)k & \text{se } k \leqslant k_0 \\ (-1)^{k_0} & \text{se } k \ > k_0. \end{cases}$$

Sem perda de generalidade iremos supor k_0 par. Neste caso $a_{2k_0}, a_{2k_0+2}, \cdots$ são positivos. Como

$$\frac{a_{2k+2}}{b_{2k+2}} = \frac{2(2k-p)}{(2k+1)}\frac{a_{2k}}{b_{2k}}$$

e

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2(2k-p)}{(2k+1)} = 2$$

temos que existe $k \geqslant k_1 > k_0$ suficientemente grande tal que

$$\frac{a_{2k+2}}{b_{2k+2}} > \frac{a_{2k}}{b_{2k}}$$

de onde se concluiu que para $C = \frac{a_{2k_1}}{b_{2k_1}}$, vale

$$\begin{aligned} a_{2k_1+2} &> Cb_{2k_1+2} \\ a_{2k_1+4} &> Cb_{2k_1+4} \\ &\vdots \\ a_{2k_1+2n} &> Cb_{2k_1+2n}. \end{aligned}$$

Colocando em evidência a potência x^{2k_1} em (3) temos

$$\frac{(a_0x^{-2k_1} + \cdots + a_{2k_1-2}x^{-2}) + a_{2k_1} + a_{2k_1+2}x^2 + \cdots}{(b_0x^{-2k_1} + \cdots + b_{2k_1-2}x^{-2}) + b_{2k_1} + b_{2k_1+2}x^2 + \cdots} > \frac{(a_0x^{-2k_1} + \cdots + a_{2k_1-2}x^{-2}) + Cb_{2k_1} + Cb_{2k_1+2}x^2 + \cdots}{(b_0x^{-2k_1} + \cdots + b_{2k_1-2}x^{-2}) + b_{2k_1} + b_{2k_1+2}x^2 + \cdots}$$

Seja $g(x) = b_{2k_1} + b_{2k_1+2}x^2 + \cdots$ e tomando $b = \sup\limits_{i\leqslant 2k_1-2} b_i$ e $a = \inf\limits_{i\leqslant 2k_1-2} a_i$ e analisando $|x| \geqslant 1$ temos que

$$\frac{(a_0x^{-2k_1} + \cdots + a_{2k_1-2}x^{-2}) + Cb_{2k_1} + Cb_{2k_1+2}x^2 + \cdots}{(b_0x^{-2k_1} + \cdots + b_{2k_1-2}x^{-2}) + b_{2k_1} + b_{2k_1+2}x^2 + \cdots} \geqslant \frac{ax^{-2k_1} + Cg(x)}{b(k_1)x^{-2} + g(x)} = \frac{a\frac{x^{-2k_1}}{g(x)} + C}{b\frac{x^{-2}}{g(x)} + 1}.$$

Como $\lim\limits_{|x|\to\infty} g(x) = +\infty$ temos que

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{a\frac{x^{-2k_1}}{g(x)} + C}{b\frac{x^{-2}}{g(x)} + 1} = C$$

consequentemente, $\lim\limits_{|x|\to\infty} y_0(x)e^{-\frac{x^2}{2}} \geqslant C$.

$\square$

Chamaremos de *n-ésimo polinômio de Hermite* as soluções de (2) que se anulam no infinito com $p = n$ e iremos denotados por $P_n(x)$.

Agora nota-se claramente que as soluções do problema de Cauchy (1) pertencem a $\mathbf{S}(\mathbb{R})$. Assim tomando $\alpha = 1$ e para cada $E \in \mathbb{N}$ temos uma EDO

$$-\frac{d^2 f}{dx^2} + x^2 f = Ef$$

cuja a solução geral é da forma

$$f(x) = a_0 y_0 e^{\frac{-x^2}{2}} + a_1 y_1 e^{\frac{-x^2}{2}}.$$

Sabemos que para que as soluções se anulem no infinito não podemos ter, simultaneamente, a_0 e a_1 não nulos. Aplicando a transformada de Fourier na EDO acima temos

$$-\mathbf{F}\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right) + \mathbf{F}(x^2 f) = E\mathbf{F}(f)$$

pelas propriedades da Transformada de Fourier temos que

$$\mathbf{F}\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right) = -\xi^2 \mathbf{F}(f)$$
$$\mathbf{F}(x^2 f) = \frac{d^2}{d\xi^2}\mathbf{F}(f)$$

logo teremos a mesma EDO inicial, porém aplicada na Transformada de Fourier de f. Como provado acima as únicas soluções que se anulam no infinito são da forma

$$w_n(x) = P_n(x)e^{\frac{-x^2}{2}}$$

logo verifica-se que $\mathbf{F}(w_n(x)) = c_n w_n(x)$, pois o conjunto das soluções que se anulam no infinito tem dimensão 1 sobre R. Iremos denotar w_n por *n-ésima função de Hermite.* Para o caso de $\mathbb{R}^n$ basta aplicar o teorema de Fubini é imediata a verificação que funções da forma

$$w(x) = w_{k_1}(x_1)w_{k_2}(x_2)\cdots w_{k_n}(x_n)$$

são auto funções da transformada de Fourier em $\mathbb{R}^n$. Ainda podemos determinar todos os possíveis valores de c_n. Faremos isso provando o seguinte teorema.

Teorema 18. *Seja* $f \in \mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$ *então*

$$\mathbf{F}^{(4)}[f(x))] = f(x)$$

Demonstração. Note que é suficiente provar que

$$\mathbf{F}^{(2)}[f(x)] = -f(-x)$$

assim

$$\mathbf{F}^{(2)}[f(x)] = \mathbf{F}[(2\pi)^{(-\frac{n}{2})}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}f(x)dx].$$

Fazendo $x = -z$ na integral temos

$$\mathbf{F}^{(2)}[f(x)] = \mathbf{F}\left[(2\pi)^{(-\frac{1}{2})}\int_{\mathbb{R}^n} -e^{iz\xi}f(-z)dz\right] = -f(-z)$$

□

Pelo teorema anterior, temos que o polinômio anulador de $\mathbf{F}$ é $x^4 - 1$ logo suas raízes e, consequentemente, os autovalores de $\mathbf{F}$ são $1, -1, -i$ e i. Disto temos que todos os possíveis valores dos c_n estão determinados.

A seguir veremos que as autofunções da transformada de Fourier formam um sistema ortogonal completo de $L^2(\mathbb{R}^n)$, consequentemente, podemos extrair um sistema ortonormal completo. Provaremos a ortogonalidade das funções de Hermite. Faremos para a reta, mas o teorema de Fubini garante para $\mathbb{R}^n$.

Seja $w_k(x) = P_k(x)e^{\frac{-x^2}{2}}$ a k-ésima função de Hermite. Note que ela satisfaz a seguinte equação

$$(w_k)'' + (2k + 1 - x^2)w_k = 0 \tag{4}$$

pois esta é a EDO (2) com $\alpha = 1$ e E = 2k + 1.

Multiplicando (4) por $w_n(x)$ temos

$$(w_k)''w_n + (2k + 1 - x^2)w_k w_n = 0$$

analogamente

$$(w_n)''w_k + (2n + 1 - x^2)w_n w_k = 0.$$

Igualando as duas expressões temos

$$(w_k)''w_n - (w_n)''w_k + 2(k - n)w_n w_k = (w_k'w_n - w_n'w_k)' + 2(k - m)w_k w_n = 0$$

integrando em ambos os lados e utilizando o fato que $w_n \in \mathbf{S} \ \ \forall\ n \in \mathbb{N}$ temos

$$2(k - m)\int_{\mathbb{R}} w_k(x)w_n(x)dx = 0$$

como queríamos provar.

Devido ao fato de todas as $w_n \in \mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$ temos que elas também possuem norma $L^2(\mathbb{R})$ finita. Não iremos calcular explicitamente a norma de $w_n(x)$ nesse trabalho, mas pode-se consultar [5] para uma demonstração de

$$\int_{\mathbb{R}} |w_n(x)|^2 dx = 2^n n! \sqrt{\pi}$$

Seja

$$W_\alpha(x) = \frac{w_{k_1}(x)}{||w_{k_1}(x)||_{L^2}} \frac{w_{k_2}(x)}{||w_{k_2}(x)||_{L^2}} \cdots \frac{w_{k_n}(x)}{||w_{k_n}(x)||_{L^2}},$$

onde $\alpha = (k_1, k_2, \cdots, k_n)$. Utilizaremos o Teorema 6 para provar que $\{W_\alpha(x)\}$ com $\alpha \in \mathbb{N}^n$ são uma base ortonormal de $L^2(\mathbb{R}^n)$

Teorema 19. *Seja f tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) W_\alpha(x) dx = 0 \qquad \textit{para todo } \alpha \in \mathbb{N}^n$$

então $f(x) = 0$ q.t.p. .

Demonstração. Novamente, faremos o caso unidimensional e o caso $\mathbb{R}^n$ é garantido pelo teorema de Fubini. Defina $G : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ por

$$G(z) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{zx - \frac{x^2}{2}} dx.$$

Note que a integral converge para todo z fixado, assim temos uma função inteira que atende as hipóteses do teorema de Leibniz, donde

$$G^{(n)}(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x) W_n(x) dx = 0$$

Logo $G(z) = 0$, pois sua série de potências em torno do 0 é identicamente nula. Em particular para $z = iy$, logo

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{iyx - x^2} dx = \sqrt{2\pi} F\left(f(x) e^{\frac{-x^2}{2}} \right) = 0$$

Como já foi provado que a transformada de Fourier é um isomorfismo sobre $\mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$ temos que $f(x)e^{\frac{-x^2}{2}} = 0$, logo $f(x) = 0$ q.t.p. . $\square$

Assim pelo Teorema 7 temos que o conjunto $\{W_\alpha(x)\}$ é uma base ortonormal de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Como aplicação dos resultados anteriores iremos resolver a equação de Laplace via transformada de Fourier.
Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{em } y > 0 \\ u(x,0) = f(x). \end{cases} \tag{5}$$

Aplicando a transformada de Fourier em (5) em relação a variável x temos

$$U_{yy}(\xi, y) = \xi^2 U(\xi, y)$$

onde

$$U(\xi, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} u(x, y) dx$$

Assim para cada ξ fixado temos uma EDO de coeficientes constantes e sua solução geral é dada por:

$$U(\xi, y) = C_1 e^{|\xi| y} + C_2 e^{-|\xi| y}.$$

Como $U(\xi, y) \to 0$, quando $|\xi| \to \infty$, temos que $C_1 = 0$ logo

$$U(\xi, y) = C_2 e^{-|\xi| y}$$

onde $C_2 = U(\xi, 0) = F(\xi)$. Utilizando o Corolário 2 para calcular a Transformada de Fourier inversa temos que

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= (2\pi)^{-1} f * \mathbf{F}^{(-1)}[e^{-|\xi| y}] \\
&= (2\pi)^{-1} f * \left[\frac{2y}{(y^2 + x^2)}\right] \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{y f(t)}{(y^2 + (x - t)^2)}) dt
\end{aligned}$$

A função $P(x, y) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$ é chamada de *núcleo de Poisson*. Um cálculo rápido mostra que $P(x, y)$ satisfaz a equação de Laplace com $y > 0$ e

$$\int_{\mathbb{R}} P(x - s, y) ds = 1.$$

Resta concluir que a nossa candidata a solução atende a equação de Laplace e

$$\lim_{y \to 0^+} u(x, y) = f(x).$$

No entanto $f(x)$ precisa de algumas restrições para a solução fazer sentido. Isso será provado nos seguintes resultados.

Lema 6. Para toda $f \in C(\mathbb{R})$ limitada e $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, temos

$$\lim_{y \to 0^+} \int_{\mathbb{R}} P(x - s, y) f(s) ds = f(x) \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$$

e o limite é uniforme em I.

Demonstração. Tome $M > 0$ tal que I $\subset [-M, M]$. Provaremos que o limite é uniforme em [-M,M]. Seja $\varepsilon > 0$. Como f é uniformemente contínua em $[-2M, 2M]$, logo existe δ tal que

$$0 < \delta \leqslant M,\ |x-s| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - f(s)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

logo

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}} P(x-s,y)\left[f(s)-f(x)\right]ds\right| &\leqslant \int_{\mathbb{R}} P(x-s,y)|f(s)-f(x)|ds \\
&= \int_{|x-s|<\delta} P(x-s,y)|f(s)-f(x)|ds + \int_{|x-s|\geqslant\delta} P(x-s,y)|(f(s)-f(x))|ds \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\int_{\mathbb{R}} P(x-s,y)ds + \frac{1}{\pi}\int_{|x-s|\geqslant\delta} \frac{y}{y^2+(x-s)^2}|f(s)-f(x)|ds.
\end{aligned}$$

Como f é limitada temos

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}} P(x-s,y)\left[f(s)-f(x)\right]ds\right| &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2C}{\pi}\int_{|x-s|\geqslant\delta} \frac{y}{y^2+(x-s)^2}ds \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{4C}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\delta}{y}\right)\right),
\end{aligned}$$

além disso existe $\eta > 0$ tal que

$$0 < y < \eta \Rightarrow \left|\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\delta}{y}\right)\right| \leqslant \frac{\pi}{4C}\frac{\varepsilon}{2}$$

logo para todo x $\in [-M, M]$ temos que

$$\left|\int_{\mathbb{R}} P(x-s,y)\left[f(s)-f(x)\right]ds\right| \leqslant \varepsilon$$

com $0 < y < \eta$.

$\square$

Teorema 20. *Seja $f \in C(\mathbb{R})$ limitada. Então a função*

$$u(x,y) = \begin{cases} f * P(x,y) & se\ y > 0, x \in \mathbb{R} \\ f(x) & se\ y = 0, x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

é solução de (5).

Demonstração. Note que

$$\partial_x^n P(x,y) = \frac{1}{\pi}\frac{p_n(x,y)}{(x^2+y^2)^{n+1}}$$

e

$$\partial_y^n P(x,y) = \frac{1}{\pi}\frac{q_n(x,y)}{(x^2+y^2)^{n+1}}$$

onde p_n e q_n são polinômios nas variáveis x, y e seus graus na variável x é menor ou igual a $n+1$, logo

$$\int_{\mathbb{R}} |\partial_x^n P(x-s,y)| ds < \infty$$
$$\int_{\mathbb{R}} |\partial_y^n P(x-s,y)| ds < \infty.$$

Pelo teorema de Leibniz podemos derivar sobre o sinal de integração,

$$\Delta u(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \Delta P(x-s,y) f(s) ds = 0$$

assim $u(x,y) \in C^\infty(\omega)$ é solução da equação de Laplace em ω onde $\omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$ $\square$

Implicitamente fizemos algo muito interessante no exemplo acima. Note que em momento algum requisitamos f derivável e ainda assim a nossa solução é de classe C^∞. Intuitivamente ao integrarmos ganhamos o direito de derivar uma única vez, porém quando multiplicamos pelo fator $P(x,y)$ nós conseguimos "passar a derivação"para ele. Isso gera uma pergunta natural: Será que é possível derivar funções apenas contínuas se multiplicarmos por um fator não nulo adequado e integrarmos?

Na noção clássica de derivada infelizmente isso não é verdade, mas iremos introduzir uma nova noção de derivada que irá nos permitir derivar funções $L^p(\mathbb{R})$ assim introduzindo um novo conceito de solução para EDPs.

2 Espaços de Sobolev com índice natural

Nesse capítulo veremos um espaço onde podemos definir um novo conceito de soluções de EDP e suas propriedades fundamentais. As principais ferramentas para análise da regularidade dessas novas soluções são os teoremas de imersão, que nos permite falar de propriedades das soluções clássicas a partir dessas novas soluções.

2.1 Definição e topologia

Primeiramente iremos motivar a teoria com um exemplo. Considere o seguinte problema.

$$\begin{cases} u' = f(x) & \text{em } (-1,1); \\ u(0) = 0, \end{cases} \tag{6}$$

onde f é definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in (-1,0); \\ 0 & \text{se } x = 0; \\ 1 & \text{se } x \in (0,1). \end{cases}$$

Integrado (6) temos e substituindo a condição inicial temos

$$u(x) = |x|.$$

Usualmente teríamos um absurdo, pois u não seria derivável em 0. Assim o problema não admite solução no sentido clássico, porém se antes de integrarmos, tivéssemos multiplicado (6) por uma função $\psi \in C^1[-1,1]$ tal que $\psi(-1) = \psi(1) = 0$ e integrando por partes, teríamos:

$$\int_{-1}^{1} u\psi' dx = -\int_{-1}^{1} f\psi dx \quad \forall\ \psi \in C^1([-1,1]),\ \psi(-1) = \psi(1) = 0. \tag{7}$$

Note que se definirmos a solução de (6) como uma função $u(x)$ tal que satisfaz (7), teríamos que $|x|$ é solução de (6). Esse pensamento nos induz a definir um novo espaço onde as funções são fracamente deriváveis assim o problema acima tem solução se estivermos considerando essa nova derivada.

Iremos definir agora o principal foco desse trabalho. A derivada que estamos acostumados a ver, apesar de ser um operador linear, é em geral um operador linear descontínuo em espaços de funções, ou seja, a clássica frase "derivar é mais fácil do que integrar" não é válida nesse contexto. Para contornar a situação iremos transformar a derivada em um operador integral análogo ao que fizemos no exemplo acima.

Definição 18. Seja $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leqslant p \leqslant \infty$. O espaço de Sobolev $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ é definido por

$$W^{k,p}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L^p(\mathbb{R}^n); \exists\ g \in L^p(\mathbb{R}^n) \text{ tal que} \int_{\mathbb{R}^n} uD^\alpha\phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} g\phi dx \ \ \forall\ \phi \in S(\mathbb{R}^n), \forall\ |\alpha| \leqslant k \right\}$$

A definição acima induz uma derivada mais fraca. Vamos mostrar isso para funções de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que f e sua derivada pertencem a $L^1(\mathbb{R})$. Naturalmente induz o raciocínio para várias variáveis. Note que para toda $\phi \in S(\mathbb{R})$ temos

$$(f\phi)' = f'\phi + \phi' f,$$

integrando em ambos os lados sobre $\mathbb{R}$ temos

$$f\phi\big|_{-\infty}^{\infty} = \int_{\mathbb{R}} f'\phi dx + \int_{\mathbb{R}} \phi' f dx.$$

Como $\lim\limits_{|x|\to\infty} \phi = 0$ e f é limitada, temos

$$\int_{\mathbb{R}} \phi' f dx = -\int_{\mathbb{R}} f'\phi dx.$$

Logo temos que se f é derivável então $f \in W^{1,1}$. Assim dizemos que se $f \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ então f é *fracamente derivavel de ordem* α e sua derivada fraca é dada pela função g na definição de espaços de Sobolev.

Proposição 2 (Propriedades algébricas da derivada fraca)**.** Sejam $f, g \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$, então

1 $D^\alpha(f+g) = D^\alpha(f) + D^\alpha(g)$;

2 (Fórmula de Leibniz) Se $f \in S(\mathbb{R}^n)$ então

$$D^\alpha(fg) = fD^\alpha g + \sum_{\substack{\beta\neq 0\\ \beta\leqslant\alpha}} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}(D^\beta f)(D^{\alpha-\beta} g)$$

Demonstração. Sabemos que existem funções ϕ e ρ tais que

$$\int_{\mathbb{R}^n} fD^\alpha\psi dx = (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n} \phi\psi dx \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^n} gD^\alpha\psi dx = (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n} \rho\psi dx$$

para toda $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$. Somando as duas igualdades temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f+g)D^\alpha\psi dx = (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n} \phi\psi dx + (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n} \rho\psi dx,$$

assim (1) está provado. Para provar (2) usaremos indução em $|\alpha|$. Note que para $|\alpha| = 1$ e para cada função ψ temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} gfD^\alpha\psi dx = \int_{\mathbb{R}^n} g\left[D^\alpha(f\psi) - \psi D^\alpha f\right] dx.$$

Como $f\psi \in S(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (fg)D^\alpha \psi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \rho f \psi dx + (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} g\psi D^\alpha f dx,$$

ou seja, $D^\alpha(f.g) = fD^\alpha g + gD^\alpha f$. Suponhamos para $|\alpha| = n$ e provaremos para $|\alpha| = n+1$. Note que para aumentar o módulo do multi-índice, basta derivar em relação a alguma variável e denotando a composição DD^α por $D^{\alpha+1}$, assim

$$D(D^\alpha(f \cdot g)) = D\left(fD^\alpha g + \sum_{\substack{\beta\neq 0\\ \beta\leqslant\alpha}} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}(D^\beta f)(D^{\alpha-\beta} g) \right).$$

Pela linearidade, temos

$$\begin{aligned} D^{\alpha+1}(f\cdot g) &= fD^{\alpha+1}g + DfD^\alpha g + D\left(\sum_{\substack{\beta\neq 0\\ \beta\leqslant\alpha}} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}(D^\beta f)(D^{\alpha-\beta} g) \right) \\ &= fD^{\alpha+1}g + DfD^\alpha g + \sum_{\substack{\beta\neq 0\\ \beta\leqslant\alpha}} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}(D^{\beta+1} f)(D^{\alpha-\beta} g) + D^\beta f(D^{\alpha-\beta+1} g) \\ &= fD^{\alpha+1}g + \sum_{\substack{\beta\neq 0\\ \beta\leqslant\alpha+1}} \frac{(\alpha+1)!}{\beta!(\alpha-+1\beta)!}(D^\beta f)(D^{\alpha+1-\beta} g) \end{aligned}$$

□

Para definir espaço de Sobolev para outros conjuntos do $\mathbb{R}^n$ temos um complicador que é a perda das funções do espaço de Schwartz de se anular quando x tende ao bordo do conjunto. Para contornar esse problema vamos definir um subconjunto especial de $S(\mathbb{R}^n)$.

Definição 19. Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$, onde Ω é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Dizemos que f pertence ao espaço $S(\Omega)$ se é $C^\infty(\Omega)$ e atende a

1. Se Ω não for limitado então para todo polinômio $P(x)$ e para todo multi-índice α temos
$$\lim_{||x||\to\infty} D^\alpha[f(x)]P(x) = 0.$$

2. Para todo polinômio $P(x)$ tal que $P(z) = 0$ onde $z \in fr(\Omega)$ e para todo multi-índice α temos
$$\lim_{x\to z} \frac{D^\alpha[f(x)]}{P(x)} = 0.$$

Com a definição acima recuperamos todas as propriedades do espaço de Schwartz, agora iremos definir um outro espaço de Sobolev que usaremos para resolver problemas de Cauchy no Capítulo 5 desse trabalho.

Definição 20. Seja $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leqslant p \leqslant \infty$. O espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ é definido por

$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega); \exists\ g \in L^p(\Omega) \text{ tal que} \int_\Omega u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g \phi dx \ \ \forall\ \phi \in S(\Omega), \forall\ |\alpha| \leqslant k \right\}.$$

Um caso especial é quando temos $p = 2$, nessa situação utilizamos a seguinte notação:

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega) \quad \text{e} \quad H^m(\mathbb{R}^n) = W^{m,2}(\mathbb{R}^n).$$

Em ambas as definições acima temos uma estrutura de derivada fraca, porém a diferença crucial é o bordo, ou seja, se nossa análise será global ou será restrita a um subconjunto do R^n. Em outras referências o espaço de Sobolev é definido sobre as *funções teste* em um aberto qualquer de $\mathbb{R}^n$, porém em ambos os casos os resultados apresentados nesse capítulo são validos. A escolha de trabalhar a estrutura de derivada fraca sobre o espaço de Schwartz nesse texto foi apenas por familiaridade maior com o mesmo nos estudos sobre transformada de Fourier. Nesse trabalho quando especificar a dimensão não for relevante iremos denotar $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ simplesmente por $W^{m,p}$.

Teorema 21. *O espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, com $1 \leqslant p < \infty$, é um espaço de Banach com a seguinte norma*

$$||u||_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência de Cauchy em $W^{k,p}(\Omega)$. Como

$$||u_n||_{W^{k,p}(\Omega)} \geqslant ||D^\alpha u_n||_{L^p(\Omega)} \quad \forall\ \alpha; |\alpha| \leqslant k.$$

Assim $(D^\alpha u_n)$ são sequências de Cauchy em $L^p(\Omega)$ para todo α com $|\alpha| \leqslant k$, logo cada uma delas convergem para alguma u_α em $L^p(\Omega)$. Temos

$$\int_\Omega u_n D^\alpha \psi dx = - \int_\Omega u_n^\alpha \psi dx \ \ \forall\ \psi \in \mathbf{S}(\Omega),$$

onde u_n^α é a α-ésima derivada fraca de u_n. Tomando o limite em n (teorema da convergência dominada)

$$\int_\Omega u D^\alpha \psi dx = - \int_\Omega u_\alpha \psi dx \ \ \forall\ \psi \in \mathbf{S}(\Omega).$$

Logo u $\in W^{k,p}(\Omega)$, pois $D^\alpha u = u_\alpha$. Resta provar que u_n converge para u na norma de $W^{k,p}(\Omega)$. Dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 suficientemente grande tal que

$$||D^\alpha u_{n_0} - u||^p_{L^p(\Omega)} < \left(\frac{\varepsilon}{|\alpha|} \right)^p$$

logo, somando em todo os α e tirando a raiz de índice p temos

$$||u_{n_0} - u||_{W^{k,p}(\Omega)} < \varepsilon$$

$\square$

Note que $H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, pois admite naturalmente o produto interno

$$\langle f, g\rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leqslant k} \int_{(\Omega)} D^\alpha f D^\alpha \overline{g} dx = \sum_{|\alpha|\leqslant k} \langle D^\alpha f, D^\alpha g\rangle_{L_2}.$$

Mais à frente veremos que os espaços H^m estão intimamente ligados a transformada de Fourier.

Observação 1. Note que a convergência em $W^{m,p}(\Omega)$ implica convergência em $L^p(\Omega)$. Um fato não óbivio é que a convergência em $W^{m,p}(\Omega)$ implica a existência de uma subsequência que converge q.t.p. Iremos enunciar esse resultado e sua prova pode ser encontrada em [6] como caso particular da Proposição 13.17:

Seja $p \in [1, +\infty]$. Se f_n e $f \in L^p(\Omega)$ são tais que $||f_n - f||_{L^p(\Omega)} \to 0$ então existe uma subsequência (f_{n_i}) tal que $f_{n_i} \to f$ q.t.p..

Intuitivamente, o espaço de Sobolev tem uma topologia naturalmente semelhante a topologia de $L^p(\mathbb{R}^n)$. Uma propriedade das funções de $L^p(\mathbb{R}^n)$ é o decaimento no infinito. Como já vimos no capítulo anterior as funções da forma $x^n e^{-x^2/2}$ formam um conjunto denso em $L^2(\mathbb{R}^n)$. A partir dessa ideia vamos provar o seguinte teorema.

Teorema 22. $\mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$ *é denso em* $W^{k,p}$.

Demonstração. Defina $p_n(x) = e^{\frac{-x^2}{n}}$. Essa sequência tem as seguintes propriedades

1. $p_n(x) \leqslant 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$

2. Para todo multi índice $\alpha \neq (0, \ldots, 0)$ temos

$$D^\alpha p_n(x) \leqslant \frac{M_\alpha}{n^{|\alpha|}}$$

   para todo $x \in \mathbb{R}^n$

Note que para toda função $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ temos que $|u| \geqslant ue^{\frac{-x^2}{n}}$, logo pelo teorema da convergência dominada

$$p_n u \to u \text{ em } L^p(\mathbb{R}^n) \text{ e } (D^\alpha p_n)u \to 0 \text{ em } L^p(\mathbb{R}^n), \text{ se } \alpha \neq 0.$$

Se $u \in W^{k,p}$, pela fórmula de Leibniz, tem-se que a derivada fraca é dada por:

$$D^\alpha(p_n u) = p_n D^\alpha u + \sum_{\substack{\beta\neq 0\\ \beta\leqslant\alpha}} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}(D^\beta p_n)(D^{\alpha-\beta}u)$$

Logo ,segue que para todo $0 < |\alpha| \leqslant m$ a sequência $(D^\alpha(p_n.u))$ converge para $D^\alpha(u)$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$.Portanto,$(p_n.u)$ é uma sequência de elementos de $W^{k,p}$ que converge para u em $W^{k,p}$. Acabamos de provar que toda função em $W^{k,p}$ é limite de funções de $W^{k,p}$ com decaimento exponencial, assim resta porvar que toda função de $W^{k,p}$ com decaimento exponencial é limite de uma sequência em $\mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$. Seja u em $W^{k,p}$ com decaimento exponencial. Defina a seguinte sequência

$$q_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} p_n(x-y)u(y)dy = (p_n * u)(x)$$

Afirmamos que $q_n(x) \in \mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$. Claramente $q_n(x) \in C^\infty$, pois

$$D^\alpha(q_n(x)) = D^\alpha(p_n) * u$$

além disso

$$|x^n| D^\alpha(q_n(x)) = \int_{\mathbb{R}^n} |x|^n D^\alpha(p_n(x-y))u(y)dy.$$

Como $p_n \in \mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$, então $|x|^n D^\alpha(p_n) \leqslant C$ logo

$$|x^n| D^\alpha(q_n(x)) \leqslant C||u||_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

assim para todo $|\alpha| \leqslant m$ tem-se:

$$D^\alpha(p_n * u)(x) = p_n * D^\alpha u \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Como $D^\alpha u \in L^p(\mathbb{R}^n)$,pelo teorema da convergência dominada, temos que para cada α $p_n * D^\alpha u$ converge para $D^\alpha u$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$, o que implica a convergência em $W^{k.p}$.

□

Nem sempre $S(\Omega)$ é denso em $W^{m,p}(\Omega)$. À saber, $S(\Omega)$ é denso em $W^{m,p}(\Omega)$, apenas, quando Ω^c tem medida nula em $\mathbb{R}^n$. Dito isso, iremos denotar fecho de $S(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$ por $W_0^{m,p}(\Omega)$.

Agora veremos uma generalização da desigualdade de Holder, que iremos usar frequentemente ao longo do texto.

Lema 7. (Desigualdade de interpolação) Se $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ com $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ então $u \in L^r(\Omega)$ para todo $p \leqslant r \leqslant q$ e se a desigualdade

$$||u||_{L^r(\Omega)} \leqslant ||u||^\theta_{L^p(\Omega)} ||u||^{1-\theta}_{L^q(\Omega)} \tag{8}$$

onde $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ verifica $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$.

Demonstração. Se $p = q$ então $r = q$; se $r = p$ então $\theta = 1$ e se $r = q$ temos $\theta = 0$. Nestes três casos (8) é imediata. Considere o caso $1 \leqslant p < r < q < \infty$. Observe que nesse caso $0 < \theta < 1$. Tem-se,da desigualdade de Hölder:

$$\int_\Omega |u|^r dx = \int_\Omega |u|^{r\theta + r(1-\theta)} dx \leqslant \Big(\int_\Omega |u|^{r\theta\alpha}\Big)^{\frac{1}{\alpha}} \Big(\int_\Omega |u|^{r(1-\theta)\alpha'}\Big)^{\frac{1}{\alpha'}} \tag{9}$$

com $\alpha = \frac{p}{r\theta}$, $\alpha' = \frac{q}{r(1-\theta)}$.Obseve que $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = 1$. De (9) resulta

$$\int_{\Omega} |u|^r dx \leqslant ||u||_{L^p(\Omega)}^{\frac{p}{\alpha}} ||u||_{L^q(\Omega)}^{\frac{q}{\alpha'}}.$$

Daí, notando que $\frac{1}{r} = \frac{\theta\alpha}{p}$ e $\frac{1}{r} = \frac{(1-\theta)\alpha'}{q}$,logo:

$$\int_{\Omega} |u|^r dx \leqslant ||u||_{L^p(\Omega)}^{\alpha r} ||u||_{L^q(\Omega)}^{r(1-\theta)} \Rightarrow ||u||_{L^r(\Omega)} \leqslant ||u||_{L^p(\Omega)}^{\theta} ||u||_{L^q(\Omega)}^{1-\theta}$$

No caso $1 \leqslant p < r < \infty$, segue-se que p $= r\theta$ e $0 < \theta < 1$. Portanto

$$\int_{\Omega} |u|^r dx = \int_{\Omega} |u|^{r\theta + r(1-\theta)} dx \leqslant ||u||_{L^\infty(\Omega)}^{r(1-\theta)} ||u||_{L^p(\Omega)}^{p}$$

assim concluindo (8) $\square$

2.2 Motivações físicas para espaços de Sobolev

Aqui vamos apresentar dois modelos que naturalmente intuem a necessidade de soluções de equações diferenciais que não são deriváveis no sentido clássico. Esses serão mecânica quântica e fenômenos elétricos.

Os estudos iniciais da mecânica quântica foram baseados no comportamento de micropartículas (elétrons, prótons, nêutrons, etc). A diferença crucial entre o comportamento de micropartículas e os modelos da mecânica clássica é a incerteza. Na mecânica clássica sabendo a posição e velocidade iniciais de uma partícula de massa m, assim como as ações as quais ela está sujeita, podemos descrever com precisão o seu momento através da segunda lei de Newton. Os fenômenos quânticos somente nos permitem estimar valores médios das grandezas envolvidas, ou a probabilidade de qual grandeza podemos medir. O primeiro postulado da mecânica quântica formaliza esses conceitos

Axioma 2. O estado mecânico de uma micropartícula de massa m é determinado pela função de onda $\psi(t,x)$, $x \in \mathbb{R}^3$, que satisfaz a equação de Schrodinger

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t}(t,x) + \frac{h^2}{2m}\Delta\psi(t,x) = U(t,x)\psi(t,x),$$

onde h é uma constante universal, $U(t,x)$ é uma função real, onde a força que atua na micro particula é dada por $F(t,x) = -\nabla U(t,x)$ e $|\psi(t,x)|^2$ é uma função densidade de probabilidade.

O caráter probabilístico da função de onda nos intui a nos distanciar das derivadas e nos aproximar das integrais. Algumas propriedades podem ser adquiridas apenas usando a equação e supondo uma regularidade inferior à da requisitada na própria formulação original. Se supormos que $\psi \in C^1$ nas variáveis espaciais, multiplicando a equação de Schrodinger por $\phi \in S(\mathbb{R}^4)$ e supondo validez da primeira identidade de Green, temos

$$ih\int_{\mathbb{R}^3}\phi(x,t)\frac{\partial\psi}{\partial t}(t,x)dx - \frac{h^2}{2m}\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\phi\nabla\psi dx = \int_{\mathbb{R}^3}U(t,x)\psi(t,x)\phi(t,x)dx.$$

Isso é o que chamamos de *formulação variacional* da equação de Schrodinger e note que, se definirmos como solução uma função que satisfaz equação acima para toda $\psi \in S(\mathbb{R}^4)$, temos que $\psi \in C^1$ quando no problema original precisaríamos analisar segundas derivadas de ψ. A equação de Schrodinger nos dá prorpiedades sobre o modelo mesmo sem sabermos a solução. Tomando $\phi = -i\overline{\psi}$, temos

$$h\int_{\mathbb{R}^3}\overline{\psi}(x,t)\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,t)dx = -\frac{ih^2}{2m}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\psi(x,t)|^2dx - i\int_{\mathbb{R}^3}U(x,t)|\psi(x,t)|^2dx.$$

Como o lado direito da igualdade é um número imaginario puro, temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^3}|\psi(x,t)|^2dx = \int_{\mathbb{R}^3}Re\left(\overline{\psi}(x,t)\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,t)\right)dx = 0,$$

assim concluimos que $||\phi||_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ independe do tempo.

Outra maneira de enfraquecer a regularidade da solução é via transformada de Fourier. Para o caso em que a força aplicada na micro partícula é constante na direção do eixo x, temos que $U(t,x) = x_1$ e aplicando a transformada de Fourier em relação as variáveis espaciais temos

$$ih\frac{\partial \mathbf{F}(\psi)}{\partial t}(\xi,t) + \frac{h^2}{2m}||x||^2\mathbf{F}(\psi)(\xi,t) = \frac{\partial \mathbf{F}(\psi)}{\partial \xi_1}(\xi,t),$$

onde $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Se definirmos como solução da equação de Schrodinger uma solução da equação acima e usando o fato que a transformada de Fourier é uma bijeção em L^2, então aqui podemos ter soluções que são apenas deriváveis na direção da força e em relação ao tempo para um problema que originalmente requeria derivadas de ordem 2 em todo o espaço.

Agora veremos que alguns fenômenos elétricos podem ser modelados por uma equação de Laplace não homogênea. No capítulo 1 ela foi resolvida em dimensão dois sobre condições iniciais regulares. Agora iremos trabalhar um caso mais abstrato e, surpreendentemente, mais aplicável. A motivação de aplicação surge do eletromagnetismo, onde as leis que o regem são conhecidas como equações de Faraday-Maxwell

$$\begin{cases} Div(D) = \rho \qquad Div(B) = 0 \\ rot(H) - \dfrac{\partial D}{\partial t} = J \qquad rot(E) + \dfrac{\partial B}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

onde ρ é a densidade volumétrica da carga elétrica, D é o campo elétrico de deslocamento, J é a densidade superficial da corrente elétrica, H é a intensidade do campo magnético, E é a intensidade do campo elétrico e B é a indução magnética. Para o caso particular de meios isotrópicos, não dispersivos e homogêneos as equações de Maxwell toma a seguinte forma

$$\begin{cases} Div(E) = \dfrac{\rho}{\epsilon} \qquad Div(B) = 0 \\ rot(B) = \mu J \qquad rot(E) = 0. \end{cases}$$

Assim para calcular o campo E, considerando que $E = \nabla u$ temos a seguinte equação

$$-\Delta u = \frac{\rho}{\epsilon}$$

e para o campo B, como $Div(B) = 0$, então $B = rot(A)$, para algum A. Tomando o caso em que $Div(A) = 0$ temos a equação

$$\Delta A = -\mu J$$

logo saber o comportamento do campo eletromagnético nesses casos é equivalente a resolver uma equação de Laplace não homogênea. Note que em nenhum dos problemas acima foi citado o domínio das funções. Supomos implicitamente que é o $\mathbb{R}^3$ inteiro, mas existem situações que é necessário um domínio restrito como pontos de interferência ou de isolamento, logo é necessário saber as soluções para um domínio tão geral quanto possível. Além dessa complicação para a análise de uma única carga, podemos usar a função delta de Dirac para essa análise, ou seja, temos a equação

$$-\Delta u = \delta(x)$$

onde

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ +\infty & \text{se } x = 0 \end{cases} .$$

É notável que a formulação acima não parece fazer sentido de imediato, por outro lado atende perfeitamente ao modelo físico de análise cargas pontuais. Isso pode ser visto utilizando uma propriedade da Delta de Dirac que provaremos no próximo capítulo

$$\int_{\mathbb{R}^3} \psi \Delta u dx = \int_{\mathbb{R}^3} \psi \delta(x) dx = \psi(0)$$

Ou seja, podemos analisar médias da energia de um sistema com peso total em uma única partícula. Ainda assim a formulação matemática está deixando a desejar. Isso ocorre porque não estamos mais lidando com funções usuais, aqui já entramos no território das distribuições. Estas estão intimamente ligadas aos espaços de Sobolev de índices reais.

3 Espaços de Sobolev com índices reais

Nesse capítulo iremos trabalhar versões mais gerais de espaços de Sobolev. Vamos definir e analisar os espaços $H^s(\Omega)$, com $s \in \mathbb{R}$ e $\Omega = \mathbb{R}^n$ ou um aberto de $\mathbb{R}^n$.

3.1 Distribuições temperadas

Até esse momento só estávamos preocupados com a derivabilidade e o rápido decaimento no infinito das funções no espaço de Schwartz. Agora vamos começar a trabalhar um pouco da sua topologia.

Definição 21. Seja $\mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$ o espaço de Schwartz. Dizemos que uma sequência (u_n) converge para uma função u em $\mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$ se dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\max_{\alpha \leqslant k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ (1+x^2)^k |D^\alpha (u_{n_0} - u)| \right\} < \varepsilon \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Além disso $S(\mathbb{R}^n)$ admite uma familia de seminormas dadas por

$$||u||_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha u^\beta(x)|.$$

Note que convergir em $S(\mathbb{R}^n)$ é equivalente a convergir em cada uma das seminormas deinidas acima. Agora iremos trabalhar com o dual do espaço de Schwartz.

Definição 22. Dizemos que um operador linear definido em $S(\mathbb{R}^n)$ é uma *distribuição temperada* se ele for contínuo no sentido da convergência definida em $\mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$, ou seja, se uma sequência (f_n) converge para f em $S(\mathbb{R}^n)$ então

$$T(f_n - f) \to 0$$

e iremos denota-lo por $S'(\mathbb{R}^n)$.

A convergência nesse espaço será definida pontualmente da seguinte forma

$$\lim_{n\to\infty} T_n = T \iff \lim_{n\to\infty} T_n(\phi) = T(\phi) \ \forall \ \phi \in \mathbf{S}(\mathbb{R}^n).$$

Iremos denotar a ação de uma distribuição temperada em uma função por

$$T(\phi) = \langle T, \phi \rangle.$$

Para não haver confusão sempre que usarmos produto interno, iremos deixar claro o espaço, então

$$\langle T, \phi \rangle$$

denota a ação de uma distribuição e

$$\langle x, y \rangle_X$$

denota o produto interno definido em X.

Exemplo 7. Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leqslant p \leqslant \infty$ então a seguinte função é uma distribuição temperada

$$\langle T_f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)dx. \tag{10}$$

Note que o funcional acima é linear, resta provar a continuidade. Seja (ψ_n) uma sequência em $\mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$ que converge para ψ, logo pela desigualdade de Hölder temos

$$|\langle T_f, (\psi_n - \psi) \rangle| \leqslant ||f||_{L^p} ||\psi_n - \psi||_{L^q}$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Da convergência em $\mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$ temos que dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que

$$|\psi_n - \psi| < \frac{(\varepsilon)^{\frac{1}{q}}}{(||f||_{L^p}||)^{\frac{1}{q}}(1+x^2)} \frac{1}{(\pi)^{\frac{1}{q}}}$$

logo

$$|\langle T_f, (\psi_n - \phi) \rangle| \leqslant \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+x^2)^q} dx \leqslant \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+x^2)} dx = \varepsilon$$

Assim vemos que para cada função em $L^p(\mathbb{R}^n)$ nós conseguimos definir uma distribuição.

Diremos que uma distribuição provém de uma função se ela for da forma (10). Usando um abuso de notação podemos dizer que $L^p(\mathbb{R}^n) \subset S'(\mathbb{R}^n)$ no sentido que para cada função em $L^p(\mathbb{R}^n)$ podemos associar um distribuição. Uma pergunta natural é se toda distribuição provém de uma função. A resposta é não. Iremos elaborar um pouco essa resposta pois seu contra exemplo tem um sentido físico importante.

Exemplo 8 (Distribuição delta de Dirac)**.** Considere uma partícula P de massa m = 1 que, no instante t = 0, encontra-se em repouso na origem de um sistema inercial (a partícula não sairá do repouso a menos que uma força externa seja exercida sobre ela). Apliquemos uma força externa $F_\varepsilon(t)$ em P, constante de módulo 1,durante o intervalo de tempo$[t_0, t_0 + \varepsilon)$,onde $t_0, \varepsilon > 0$. Analiticamente temos

$$F_\varepsilon(t) = \begin{cases} (1,0,0) & \text{se } t_0 \leqslant t < t + \varepsilon \\ (0,0,0) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Da segunda lei de Newton temos que o módulo da velocidade é dado por

$$v_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leqslant t_0 \\ t - t_0 & \text{se } t_0 < t \leqslant t_0 + \varepsilon \\ \varepsilon & \text{se } t > t_0 + \varepsilon \end{cases}$$

Observa-se que para t fixado $v_\varepsilon(t) \to 0$ quando $\varepsilon \to 0^+$.

A intenção é modelar um único pulso em um único instante assim considere $|F_\varepsilon| = \frac{1}{\varepsilon}$, assim

$$v_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leqslant t_0 \\ \frac{t-t_0}{\varepsilon} & \text{se } t_0 < t \leqslant t_0 + \varepsilon \\ 1 & \text{se } t > t_0 + \varepsilon \end{cases}$$

e para t fixado, temos

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} v_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leqslant t_0 \leqslant t \\ 1 & \text{se} t > t_0 \end{cases}$$

A partir de agora iremos apenas analisar o caráter numérico do modelo, ou seja, não iremos mais trabalhar a força com caráter vetorial, assim $F_\varepsilon(t) = D_\varepsilon(t - t_0)$, onde

$$D_\varepsilon(\xi) = \frac{1}{\varepsilon}(H(\xi) - H(\xi - \varepsilon))$$

e H(ξ) denota a função Heaviside

$$H(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{se } \xi < 0 \\ 1 & \text{se } \xi \geqslant 0 \end{cases}$$

Duas propriedades importantes sobre a função $D_\varepsilon(t - t_0)$ são

$$\int_{\mathbb{R}} D_\varepsilon(t - t_0)dt = 1, \ \forall \ \varepsilon > 0$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^b D_\varepsilon(t - t_0)dt = 1, \ \forall \ a < t_0 < b$$

Além disso, é fácil ver que

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} D_\varepsilon(t - t_0) = \begin{cases} +\infty & \text{se } t = t_0 \\ 0 & \text{se } t \neq t_0 \end{cases}$$

No caso mais geral, podemos considerar $F_\varepsilon(t) = h(t)D_\varepsilon(t - t_0)$, onde $h(t)$ é uma função continua. Assim aplicando a segunda lei de Newton, temos

$$v_\varepsilon(t) = \int_0^t F_\varepsilon(\tau)d\tau = \int_0^t h(t)D_\varepsilon(\tau - t_0)d\tau = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon h(\xi + t_0)d\xi$$

Tomando o limite em ε temos

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^t D_\varepsilon(\tau - t_0)d\tau = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leqslant t_0 \\ h(t_0) & \text{se } t > t_0 \end{cases}$$

Relembrando que t $\in [t_0, t_0 + \varepsilon)$ temos a intuição de uma "função" que iremos denotar por $\delta(t - t_0)$ tal que

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} +\infty & \text{se } t = t_0 \\ 0 & \text{se } t \neq t_0 \end{cases}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(t-t_0)h(t)dt = h(t_0)$$

para toda função continua $h(t)$.

A "função" δ descrita acima define uma distribuição pois é claramente linear e dada uma sequência de funções $(u_n) \in \mathbf{S}$ convergindo para u temos

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x-x_0)|u_n - u|dx = |u_n(0) - u(0)| \leqslant \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_n - u|.$$

Logo o operador é continuo, assim temos uma distribuição temperada.

Veremos que as distribuições temperadas são um meio de estender as definições de espaços de Sobolev que vimos anteriormente. Para isso iremos antes definir a ação de operadores clássicos em distribuições, como derivada e transformada de Fourier.

Definição 23. Seja $T \in S'(\mathbb{R})$,então o operador linear $D^\alpha T : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ tal que

$$\langle D^\alpha T, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \phi \rangle \qquad \forall \phi \in S(\mathbb{R})$$

é chamado de derivada de ordem α de T.

No Exemplo 5 tivemos a seguinte igualdade

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} D_\varepsilon(t-t_0) = \begin{cases} +\infty & \text{se } t = t_0 \\ 0 & \text{se } t \neq t_0 \end{cases}$$

Afirmamos que $H'(x) = \delta_0$ no sentido de derivada fraca. Note que para toda $\phi \in \mathbf{S}(R)$ temos

$$\int_{\mathbb{R}} H(x)'\phi(x)dx = -\int_{\mathbb{R}} H(x)\phi'(x)dx = -\int_0^\infty \phi'(x)dx = \phi(0) = \delta_0(\phi)$$

Exemplo 9 (Solução fundamental)**.** Dizemos que uma função f é solução fundamental de um operador diferencial D se

$$D(f)(x) = \delta(x).$$

A solução fundamental do Laplaciano em $\mathbb{R}^2$ é dada por

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \ln(|x|).$$

Para provar isso vamos ultilizar o teorema de Green. Como $\psi(x,y) = f(|x-y|)$ é harmônica fora de $x = y$, vale o teorema de Green para qualquer conjunto Ω limitado com fronteira de classe C^1 que não contenha y, logo para toda $u \in S(\mathbb{R}^2)$ temos

$$\int_\Omega (u\Delta\psi - \psi\Delta u)\, dx = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial u}{\partial n} \right) ds \Rightarrow \int_\Omega (\psi\Delta u)\, dx + \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = 0.$$

Logo ψ atente a equação de Laplace no sentido das distribuições para todo Ω que não contenha y. Caso contenha y remova do domínio a bola fechada de centro y e raio ρ, assim vale o teorema de Grenn em $\Omega_\rho = \Omega - \overline{B(y,\rho)}$, logo

$$\int_{\Omega_\rho} (\psi \Delta u)\, dx = \int_{\partial \Omega_\rho} \left(-u \frac{\partial \psi}{\partial n} + \psi \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds.$$

Agora iremos analisar as duas partes da fronteira. Note que, se $x \in \partial B(y,\rho)$, então

$$\psi(x,y) = f(\rho) \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial n} = f'(\rho) = \frac{1}{2\pi\rho}.$$

Logo,

$$\left| \int_{\partial B(y,\rho)} \psi \frac{\partial u}{\partial n} ds \right| \leqslant 2\pi\rho |f(\rho)| \max_{x \in \Omega} |\nabla u|$$

e

$$\int_{\partial B(y,\rho)} u \frac{\partial \psi}{\partial n} ds = f'(\rho) \int_{\partial B(y,\rho)} u ds = \frac{1}{2\pi\rho} \int_{\partial B(y,\rho)} u ds.$$

Assim, da primeira desigualdade temos

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{\partial B(y,\rho)} \psi \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0.$$

Pelo teorema do valor médio para integrais temos

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{1}{2\pi\rho} \int_{\partial B(y,\rho)} u ds = u(y).$$

Ou seja, no sentido das distribuições, $\Delta f(x-y) = \delta(y)$.

O exemplo anterior é muito útil para determinar soluções do problema

$$u_{xx} + u_{yy} = g(x,y).$$

Se v é solução fundamental do laplaciano, então $v * g$ é claramente solução da equação não homogênea acima.

Definição 24. Seja T $\in S'(\mathbb{R})$ então o operador linear $\mathbf{F}T : S'(\mathbb{R}) \to S'(\mathbb{R})$ tal que

$$\langle \mathbf{F}T, \phi \rangle = \langle T, \mathbf{F}\phi \rangle \qquad \forall \phi \in S(\mathbb{R})$$

é chamado de transformada de Fourier de T

Exemplo 10. Calcularemos a transformada de Fourier da distribuição δ_x, onde $x \in \mathbb{R}^n$. Pela definição temos

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{F}\delta_x, \phi \rangle &= \langle \delta_x, \mathbf{F}\phi \rangle \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} f(y) dy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \langle T_{e^{-ixy}}, f \rangle
\end{aligned}$$

Note que a transformada de Fourier de δ não provém de uma função em L^p, mas é uma função limitada.

Agora veremos a caracterização de espaços de Sobolev via distribuições temperadas. Isso nos permitirá estender o conceito de espaços de Sobolev para índices reais. Antes disso precisaremos de um lema algébrico para estimar fatores polinomiais da forma $(1 + ||x||^2)^m$ por soma de monômios.

Lema 8. Existem constantes C_1 e C_2 tais que

$$C_1 \sum_{|\alpha| \leqslant m} x^{2\alpha} \leqslant (1 + ||x||^2)^m \leqslant C_2 \sum_{|\alpha| \leqslant m} x^{2\alpha} \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}^n$$

Demonstração. Provaremos separadamente as duas desigualdades. Iremos começar por

$$(1 + ||x||^2)^m \leqslant C_2 \sum_{|\alpha| \leqslant m} x^{2\alpha}$$

que sera demonstrada por indução em m. Para $m = 1$ temos

$$\sum_{|\alpha| \leqslant 1} x^{2\alpha} = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 1 = (1 + ||x||^2)$$

Agora suponha que é valido para o caso m e provaremos o caso $m + 1$, assim

$$(1 + ||x||^2)^m \leqslant C_2 \sum_{|\alpha| \leqslant m} x^{2\alpha} \Rightarrow (1 + ||x||^2)^{m+1} \leqslant C_2 (1 + ||x||^2) \sum_{|\alpha| \leqslant m} x^{2\alpha}$$

donde

$$\begin{aligned}
C_2(1 + ||x||^2) \sum_{|\alpha| \leqslant m} x^{2\alpha} &= C_2 \sum_{|\alpha| \leqslant m} x^{2\alpha} (\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 1) \\
&= C_2 (\sum_{|\alpha| \leqslant m} x^{2\alpha} + \sum_{|\alpha| \leqslant m+1} x^{2\alpha}) \\
&\leqslant 2C_2 \sum_{|\alpha| \leqslant m+1} x^{2\alpha}
\end{aligned}$$

logo

$$(1+||x||^2)^{m+1} \leqslant 2C_2 \sum_{|\alpha|\leqslant m+1} x^{2\alpha}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Agora iremos provar por indução em m,

$$C_1 \sum_{|\alpha|\leqslant m} x^{2\alpha} \leqslant (1+||x||^2)^m.$$

Para $m = 1$, temos

$$\sum_{|\alpha|\leqslant 1} x^{2\alpha} = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 1 = (1+||x||^2)$$

Agora suponha que é valido para o caso m e provaremos o caso m + 1, assim

$$C_1 \sum_{|\alpha|\leqslant m} x^{2\alpha} \leqslant (1+||x||^2)^m \Rightarrow C_1(1+||x||^2) \sum_{|\alpha|\leqslant m} x^{2\alpha} \leqslant (1+||x||^2)^{m+1}$$

donde

$$\begin{aligned} C_1(1+||x||^2) \sum_{|\alpha|\leqslant m} x^{2\alpha} &= C_1(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 1) \sum_{|\alpha|\leqslant m} x^{2\alpha} \\ &= C_1(\sum_{|\alpha|\leqslant m} x^{2\alpha} + \sum_{|\alpha|\leqslant m+1} x^{2\alpha}) \\ &\geqslant C_1(\sum_{|\alpha|\leqslant m+1} x^{2\alpha}) \end{aligned}$$

logo

$$C_1 \sum_{|\alpha|\leqslant m+1} x^{2\alpha} \leqslant (1+||x||^2)^{m+1}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$

□

Teorema 23. $H^m(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathbf{S}'(R^n); (1+||x||^2)^{\frac{m}{2}}\mathbf{F}(u) \in L^2(R^n)\}$

Antes de provar esse teorema, existem alguns detalhes que precisam ser esclarecidos. Uma dúvida que deve ser natural é: qual o sentido da integral de uma distribuição? Visto que nos só sabemos calcular a transformada de Fourier de uma distribuição se for aplicada em uma $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$. Esse enunciado é um tanto quanto abusivo em sua notação, mas aqui estamos dando o seguinte sentido: existe uma constante C, tal que

$$|(1+|x|^2)^m \langle T, \mathbf{F}(\psi)\rangle| \leqslant C||\psi||_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

para toda $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$. Não vamos provar aqui, mas o ponto crucial das distribuições temperadas é o seguinte resultado:

Proposição 3 (Teorema de representação de Schwartz)**.** Seja $T \in S'(\mathbb{R}^n)$. Então existe uma função h de crescimento polinomialmente limitado e um multi-índice β tal que $T = D^\beta T_h$, ou seja

$$T(f) = (-1)^{|\beta|} \int_{\mathbb{R}^n} h(x)(D^\beta f)(x)dx$$

para toda $f \in S(\mathbb{R}^n)$.

Assim fica claro o motivo da aplicação da transformada de Fourier. Ela faz as derivadas se tornarem fatores polinomiais, assim influenciando no índice de crescimento do espaço $H^m(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração do teorema 21. Pelo lema anterior, existem constantes C_1 e C_2 tais que

$$C_1 \sum_{|\alpha| \leqslant m} x^{2\alpha} \leqslant (1 + ||x||^2)^m \leqslant C_2 \sum_{|\alpha| \leqslant m} x^{2\alpha}$$

Além disso sabemos que se $u \in H^m$, para todo $|\alpha| \leqslant m$ temos que

$$\mathbf{F}(D^\alpha u) = (ix)^\alpha \mathbf{F}(u)$$

Consequentemente $(1 + ||x||^2)^m \mathbf{F}(u) \in L^2(R^n)$ e

$$\begin{aligned}
|||u|||^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + ||x||^2)^m |\mathbf{F}(u)|^2 dx \\
&\leqslant C_2 \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha \mathbf{F}(u)|^2 dx \\
&= C_2 \sum_{|\alpha| \leqslant m} |\mathbf{F}(D^\alpha u(x))|^2 dx \\
&= C_2 \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha |D^\alpha u|^2 dx \\
&= C_2 ||u||^2
\end{aligned}$$

Reciprocamente se u $\in \mathbf{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $(1 + ||x||^2)^m \mathbf{F}(u) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ temos que $(ix)\alpha \mathbf{F}(u) \in L^2(R^n)$,consequentemente $\mathbf{F}(D^\alpha u) \in L^2$.Logo $D^\alpha u) \in L^2$ e

$$\begin{aligned}
||u||_m^2 &= \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{F}(D^\alpha) u(x)|^2 dx \\
&= \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_{\mathbb{R}^n} x^{2\alpha} |\mathbf{F}(u)|^2 dx \\
&\leqslant \frac{1}{C_1} |||u|||_m^2
\end{aligned}$$

$\square$

3.2 $H^s(\Omega)$ com $\Omega = \mathbb{R}^n$ e $s \in \mathbb{R}$

Para simplificar a notação iremos denotar $F(u)(x)$ por $\hat{u}(x)$. Agora iremos definir o espaço de Sobolev para índices reais não negativos.

Definição 25. Seja s um número real não negativo. Definimos

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in S'(\mathbb{R}^n); (1 + ||x||^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

com o produto interno dado por:

$$\langle u, v\rangle_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + ||x||^2\right)^s \hat{u}(x)\overline{\hat{v}(x)}dx,$$

que induz a norma:

$$||u||^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + ||x||^2\right)^s |\hat{u}(x)|^2 dx.$$

Note que $H^s(\mathbb{R}^n)$ está imerso continuamente em $L^2(\mathbb{R}^n)$, pois

$$\left(1 + ||x||^2\right)^s |\hat{u}(x)|^2 \geqslant |\hat{u}(x)|^2$$

logo, pelo Teorema de Parseval

$$||u||_{H^s(\mathbb{R}^n)} \geqslant ||u||_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Nosso próximo passo é verificar que os espaços $H^s(\mathbb{R}^n)$ são espaços de Hilbert além da densidade de $S(\mathbb{R}^n)$ no mesmo. Para isto, iremos precisar da finitude de uma integral específica. Essa finitude é expressa no seguinte lema.

Lema 9. Seja $s > n/2$, então

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + ||\xi||^2)^s} d\xi < \infty.$$

Demonstração. Introduzindo coordenadas polares, temos $\xi = ry$, com r > 0 e y $\in S^{n-1}(0)$. Assim,d$\xi = r^{n-1}drd\theta$ onde dθ é a medida de superfície em $S^{n-1}(0)$. Desta forma, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + ||\xi||^2)^s} d\xi = \int_{S^{n-1}(0)} \int_0^\infty \frac{1}{(1 + r^2)^s} r^{n-1} drd\theta = Vol(S^{n-1}(0)) \int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(1 + r^2)^s} dr.$$

Dividindo a integral do último membro nos intervalos $[0, 1]$ e $[1, \infty]$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + ||\xi||^2)^s} d\xi &\leqslant Vol(S^{n-1}(0)) \left[\int_0^1 \frac{r^{n-1}}{(1 + r^2)^s} dr + \int_1^\infty \frac{r^{n-1}}{(r^2)^s} dr\right] \\ &= Vol(S^{n-1}(0)) \left[\int_0^1 \frac{r^{n-1}}{(1 + r^2)^s} dr + \frac{1}{2s - n}\right].\end{aligned}$$

Como $\dfrac{r^{n-1}}{(1 + r^2)^s}$ é contínua em [0,1] logo é limitada, assim a integral é limitada para s $> \frac{n}{2}$. □

Ja sabemos como se comporta a topologia dos espaços $H^s(\mathbb{R}^n)$ com s inteiro e agora iremos discutir para o caso s real.

Teorema 24. *$S(\mathbb{R}^n)$ é denso em $H^s(\mathbb{R}^n)$. Além disso $H^s(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Hilbert e a convergência em $S(\mathbb{R}^n)$ implica convergência em $H^s(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Seja (u_μ) uma sequência de Cauchy em $H^s(\mathbb{R}^n)$. Então (u_μ) e $((1+||x||^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u_\mu})$ são sequencias de Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^n)$, logo existem u e v tais que

$$u_\mu \to u \quad \text{e} \quad (1+||x||^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u_\mu} \to v$$

em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Afirmamos que $v = (1+||x||^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}$. Para toda função $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\langle (1+||x||^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}, \phi\rangle &= \langle \hat{u}, (1+||x||^2)^{\frac{s}{2}}\phi\rangle \\
&= \lim \langle \hat{u_\mu}, (1+||x||^2)^{\frac{s}{2}}\phi\rangle \\
&= \lim \langle (1+||x||^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u_\mu}, \phi\rangle \\
&= \langle v, \phi\rangle,
\end{aligned}$$

logo $v = (1+||x||^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}$. Agora iremos provar a densidade. Dada um $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, considere (v_n) uma sequência de funções em $S(\mathbb{R}^n)$ que converge para $(1+||x||^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Note que a função

$$a_s(x) = \frac{1}{(1+||x||^2)^{\frac{s}{2}}}$$

é de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e limitada, logo

$$f_n(x) = \frac{v_n(x)}{(1+||x||^2)^{\frac{s}{2}}}$$

pertence a $S(\mathbb{R}^n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo existe uma função $\psi_n \in S(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\hat{\psi_n}(x) = \frac{v_n(x)}{(1+||x||^2)^{\frac{s}{2}}},$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Disto temos que

$$\begin{aligned}
||\hat{\psi_n} - u||^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+||x||^2\right)^s |\hat{\psi_n}(x) - \hat{u}|^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |v_n(x) - (1+||x||^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}(x)|^2 dx,
\end{aligned}$$

logo, (ψ_n) é uma sequência de $S(\mathbb{R}^n)$ que converge para u em $H^s(\mathbb{R}^n)$. Seja $m > s + n/2$ então, pelo Lema 9

$$C = \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+||x||^2\right)^{-(m-s)} dx < +\infty.$$

Para toda u em $S(\mathbb{R}^n)$ tem-se:

$$||u||_{H^s(\mathbb{R}^n)}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + ||x||^2\right)^m \left(1 + ||x||^2\right)^{-(m-s)} |\hat{u}(x)|^2 dx \leqslant C \max_{|\alpha| \leqslant m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(1 + ||x||^2\right)^m |D^\alpha \hat{u}(x)|.$$

Se (u_n) converge pra 0 em $S(\mathbb{R}^n)$ então sua transformada de Fourier também converge para 0. Da última desigualdade decorre que u_n converge para 0 em $H^s(\mathbb{R}^n)$.

□

Em derivadas clássicas temos que o operador derivação $D_i : C^k(\Omega) \to C^{k-1}(\Omega)$ só pode ser aplicados k vezes. Em derivadas fracas já vimos que é permitido derivar funções contínuas então faria sentido definir o espaço $W^{-1,p}(\Omega)$.

Definição 26. Sejam $s > 0$ um número real e $\Omega = \mathbb{R}^n$. Definimos por $H^{-s}(\Omega)$ o dual topologico de $H^s(\Omega)$, ou seja,

$$H^{-s}(\Omega) = \{f : H^s(\Omega) \to \mathbb{C}; f \text{ é linear e contínua}\}.$$

Agora vamos caracterizar os espaços $H^s(\mathbb{R}^n)$ para índice real negativo. A essa altura, a intuição já nos dá uma pista desta carcterização, pois é analoga a caracterização do Teorema 21 e da Definição 19.

Teorema 25. *São validas as seguintes afirmações:*

- $H^{-s}(\mathbb{R}^n) = \{f \in S'(\mathbb{R}^n); (1 + ||x||^2)^{\frac{-s}{2}} \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$,
- $||f||_{H^{-s}(\mathbb{R}^n)} = ||\,(1 + ||x||^2)^{\frac{-s}{2}} \hat{f}||_{L^2(\mathbb{R}^n)}$

Demonstração. Seja $f \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$, do teorema de Riesz temos que existe $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$||f||_{H^{-s}(\mathbb{R}^n)} = ||u_0||_{H^s(\mathbb{R}^n)}$$

e

$$\langle f, u \rangle = \langle u, u_0 \rangle_{H^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Para toda ρ em $S(\mathbb{R}^n)$ tem-se $\hat{\hat{\rho}}(x) = \rho(-x)$, logo

$$\begin{aligned}
\langle \hat{f}, \rho \rangle &= \langle \hat{\rho}, u_0 \rangle_{H^s(\mathbb{R}^n)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + ||x||^2\right)^s \rho(-x) \overline{\hat{u_0}(x)} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + ||x||^2\right)^s \rho(x) \overline{\hat{u_0}(-x)} dx,
\end{aligned}$$

logo, $\hat{f}$ é definida pela função $(1 + ||x||^2)^s \overline{\hat{u_0}(-x)}$, donde $(1 + ||x||^2)^{\frac{-s}{2}} \hat{f} = (1 + ||x||^2)^{\frac{s}{2}} \overline{\hat{u_0}(-x)} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e

$$||\left(1 + ||x||^2\right)^{\frac{-s}{2}} \hat{f}||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = ||\left(1 + ||x||^2\right)^{\frac{s}{2}} \hat{u_0}||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = ||u_0||_{H^s(\mathbb{R}^n)} = ||f||_{H^{-s}(\mathbb{R}^n)}.$$

□

Exemplo 11. A distribuição delta de Dirac pertence a $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ para todo $s > n/2$. Seja $f \in S(\mathbb{R}^n)$, logo

$$\begin{aligned}\langle F[\delta], f\rangle &= \langle \delta, F[f]\rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = C_f\end{aligned}$$

logo

$$||(1+||x||)^{\frac{-s}{2}} F[\delta](f)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = |C_f|\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+||x||)^s}dx$$

e pelo lema 9 a integral converge para $s > n/2$.

3.3 $H^s(\Omega)$ com $s \in \mathbb{R}$ e Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$

Até agora só trabalhamos espaços de Sobolev sobre um conjunto bem particular. Agora iremos definir espaço de Sobolev sobre um aberto qualquer do $\mathbb{R}^n$.

Definição 27. Sejam s um número real não negativo e Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$. O espaço $H^s(\Omega)$ é dado por

$$H^s(\Omega) = \{u = v|_\Omega; v \in H^s(\mathbb{R}^n)\}.$$

A topologia de $H^s(\Omega)$ é delicada de definir. Considere a seguinte aplicação linear sobrejetora

$$H^s(\mathbb{R}^n) \to H^s(\Omega), \qquad v \to rv = v|_\Omega.$$

Afirmamos que o núcleo de r é fechado. Com efeito, seja (v_μ) uma sequência em $H^s(\mathbb{R}^n)$ tal que $rv_\mu = 0$ e $v_\mu \to v$ em $H^s(\mathbb{R}^n)$. Tem se

$$\begin{aligned}||v_\mu - v||^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+||x||^2\right)^s |\hat{v_\mu}(x) - \hat{v}(x)|^2 dx \\ &\geqslant \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{v_\mu} - \hat{v}(x)|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |v_\mu(x) - v(x)|^2 dx \\ &\geqslant \int_\Omega |v(x)|^2 dx\end{aligned}$$

logo

$$\int_\Omega |v(x)|^2 dx \leqslant \lim ||v_\mu - v||^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} = 0,$$

assim $v|_\Omega = 0$ mostrando que o núcleo de r é fechado. Para definir a topologia de $H^s(\Omega)$ vamos precisar do teorema fundamental de homomorfismos de grupo

Teorema 26. *Sejam G e G' dois grupos e $\psi : G \to G'$ um homomorfismo. Então*

$$G/N(\psi) \simeq Im\psi$$

A prova do teorema acima pode ser encontrada em [Lang, Algebra]. Note que $H^s(\mathbb{R}^n)$ e $H^s(\Omega)$ são grupos aditivos com a operação de soma de funções e a aplicação r define um homomorfismo entre os mesmos. Além disso defina π o homomorfismo canônico ou seja

$$\begin{aligned} \pi : & H^s(\mathbb{R}^n) \to H^s(\mathbb{R}^n)/N(r) \\ & \pi(x) = \overline{x}, \end{aligned}$$

onde as classes de equivalencia acima são dados por

$$x \sim y \iff x - y \in N(r).$$

Pelo teorema fundamental de homomorfismos, $H^s(\mathbb{R}^n)/N(r)$ é isomorfo a $H^s(\Omega)$, assim ficamos com o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} H^s(\mathbb{R}^n) \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\pi"'] & H^s(\Omega) , \\ H^s(\mathbb{R}^n)/N(r) \arrow[ur, "\sigma"'] & \end{tikzcd} \tag{11}$$

onde σ é o isomorfismo garantido pelo teorema (25). Para simplificar a notação vamos adotar $H^s(\mathbb{R}^n)/N(r) = X$. Denota se por $[u]$ a classe de equivalência determinada por u,

$$[u] = \{v \in H^s(\mathbb{R}^n); v|_\Omega = u\}.$$

. Afirmamos que X é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$\langle [v], [w] \rangle_X = \langle [v], [w] \rangle_1 + i \langle [v], i[w] \rangle_1,$$

onde

$$\langle [v], [w] \rangle_1 = \frac{1}{4} \left(||[v + w]||_X^2 - ||[v - w]||_X^2 \right),$$

e

$$||[v]||_X = \inf\{||w||_{H^s(\mathbb{R}^n)}; w \in [v]\}.$$

Afirmamos que a norma acima respeita a lei do paralelogramo. Com efeito sejam $v_1 \in [v]$ e $w_1 = [w]$ então $v_1 + w_1 \pm [v \pm w]$. Assim

$$\begin{aligned} ||[v] + [w]||_X^2 + ||[v] - [w]||_X^2 &\leqslant ||v_1 + w_1||_{H^s(\mathbb{R}^n)}^2 + ||v_1 - w_1||_{H^s(\mathbb{R}^n)}^2 \\ &= 2||v_1||_{H^s(\mathbb{R}^n)}^2 + 2||w_1||_{H^s(\mathbb{R}^n)}^2, \end{aligned}$$

tomando o ínfimo em ambos os membros temos

$$||[v] + [w]||_X^2 + ||[v] - [w]||_X^2 \leqslant 2||[v_1]||_X^2 + 2||[w_1]||_X^2.$$

A outra desigualdade é obtida através da desigualdade triangular, logo $H^s(\mathbb{R}^n)/N(r)$ é um espaço de Hilbert. Equipa-se $H^s(\Omega)$ com a topologia dada por $H^s(\mathbb{R}^n)/N(r)$, via o isomorfismo σ. Assim

$$\langle u_1, u_2\rangle_{H^s(\Omega)} = \langle [u_1], [u_2]\rangle_X \text{ onde } v_1|_\Omega = u_1 \text{ e } v_2|_\Omega = u_2, \tag{12}$$
$$||u||_{H^s(\Omega)} = ||[v]||_X = \inf\{||v||_{H^s(\mathbb{R}^n)}; v|_\Omega = u\}. \tag{13}$$

Note que $[u]$ é fechado, pois $N(r)$ é fechado em $H^s(\mathbb{R}^n)$. Representaremos por u^* a projeção ortogonal do vetor nulo sobre $[\tilde{u}]$, mais precisamente $u^* \in N(r)^\perp$ e

$$||u^*||_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \min\{||v||_{H^s(\mathbb{R}^n)}; v \in [u]\}.$$

Temos assim a aplicação

$$T : H^s(\Omega) \to N(r)^\perp, \quad T(u) = u^*$$

Afirmamos que $H^s(\Omega)$ equipado com esse produto escalar é isométrico a $N(r)^\perp$.

Teorema 27. *A aplicação T é uma isometria linear de $H^s(\Omega)$ sobre $N(r)^\perp$.*

Demonstração. Seja σ o isomorfismo definido em (14) então temos que

$$\sigma^{-1} : H^s(\Omega) \to H^s(\mathbb{R}^n)/N(r), \quad \sigma^{-1}(u) = [\tilde{u}]$$

é uma aplicação linear. Seja $v^* \in N(r)^\perp$ a projeção ortogonal do vetor nulo sobre $[v]$. Defina a aplicação

$$P : H^s(\mathbb{R}^n)/N(r) \to N(r)^\perp, \quad P[v] = v^*.$$

Afirmamos que P é linear. Com efeito, pelo Teorema 5

$$\begin{aligned}
&P([v_1] + [v_2]) = P([v_1 + v_2]) = v^*, v_1 + v_2 = w + v^*, w \in N(r), v^* \in N(r)^\perp;\\
&P([v_1]) = v_1^*, v_1 = w_1 + v_1^*,\ w_1 \in N(r),\ v_1^* \in N(r)^\perp;\\
&P([v_2]) = v_2^*,\ v_2 = w_2 + v_2^*,\ w_2 \in N(r),\ v_2^* \in N(r)^\perp.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema 5 a representação de $v_1 + v_2$ é única como soma de um vetor $N(r)$ e de um vetor de $N(r)^\perp$ temos que $v^* = v_1^* + v_2^*$. Analogamente para a linearidade na multiplicação por escalar. Observe que

$$Tu = P(\sigma^{-1}(u))$$

logo T é linear. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\langle u_1, u_2\rangle_{H^s(\Omega)} &= \langle [v_1], [v_2]\rangle_X\\
&= \langle [u_1^*], [u_2^*]\rangle_X\\
&= \langle [u_1^*], [u_2^*]\rangle_1 + i\langle [u_1^*], i[u_2^*]\rangle_1.
\end{aligned}$$

Tem-se

$$\langle [u_1^*], [u_2^*] \rangle_1 = Re\langle u_1^*, u_2^* \rangle_{H^s(\mathbb{R}^n)}$$
$$i\langle [u_1^*], i[u_2^*] \rangle_1 = iIm\langle u_1^*, u_2^* \rangle_{H^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Combinando as três últimas expressões resulta

$$\langle u_1, u_2 \rangle_{H^s(\Omega)} = \langle u_1^*, u_2^* \rangle_{H^s(\mathbb{R}^n)},$$

que mostra a proposição. □

Da proposição acima vemos que a norma em $H^s(\Omega)$ atende a lei do paralelogramo, logo $H^s(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.

Apesar da topologia dos espaços $H^s(\Omega)$ ser um tanto quanto assustadora, ela não se perde totalmente da noção que temos no caso s inteiro. Iremos enunciar um resultado, que caracteriza essa relação. Não iremos prova-lo nesse texto, pois necessita dos teorema de prolongamento, que são um tanto quanto longos, mas o proximo resultado, os teoremas de prolongamento e suas demonstrações podem ser encontradas em [1].

Proposição 4. Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ de classe C^m. Então

$$H^m(\Omega) = \{u = v|_\Omega; v \in H^m(\mathbb{R}^n)\}$$

e a norma de $H^s(\Omega)$ dada em (13) é equivalente a norma de $H^m(\Omega)$ da na Definição 19 quando $s = m$.

Com esse resultado, para o caso de s inteiro, verificar que uma função u pertence a $H^s(\Omega)$ é equivalente a verificar a finitude de uma integral.

Agora iremos provar mais um resutado de densidade. Seja

$$S(\overline{\Omega}) = \{u = v|_\Omega; v \in S(\mathbb{R}^n)\},$$

assim, temos o seguinte resultado.

Proposição 5. $S(\overline{\Omega})$ é denso em $H^s(\Omega)$, onde s é real positivo.

Demonstração. Ja sabemos que a aplicação r é continua. Seja $u \in H^s(\Omega)$, então existe $v \in H^s(\mathbb{R}^n)$ tal que $rv = v|_\Omega = u$. Como $S(\mathbb{R}^n)$ é denso em $H^s(\mathbb{R}^n)$ vem que existe uma sequência de funções (ϕ_n) de $S(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi_n \to v$ em $H^s(\mathbb{R}^n)$. Assim pela continuidade de r a proposição está provada □

Denota-se por $C_b^m(\overline{\Omega})$ ao espaço de Banach

$$C_b^m(\overline{\Omega}) = \{u = v|_\Omega; v \in C^m(\mathbb{R}^n) \text{ e } D^\alpha v \text{ é limitado em } \overline{\Omega}, |\alpha| \leqslant m\}$$

equipado com a norma

$$||u||_{C_b^m(\overline{\Omega})} = \max_{|\alpha| \leqslant m} \left(\sum_{x \in \overline{\Omega}} |D^\alpha u(x)| \right).$$

Claramente se Ω é limitado, $C_b^m(\overline{\Omega}) = C^m(\overline{\Omega})$.

À seguir, vamos provar o teorema de imersão de Sobolev.

Teorema 28. *Se $s - \frac{n}{2} > m$, com m um inteiro não negativo. Então*

$$H^s(\Omega) \hookrightarrow C_b^m(\overline{\Omega}).$$

Demonstração. Faremos a prova por indução em m. Para o caso $m = 0$. Sejam $u \in H^s(\Omega)$ e $v \in H^s(\mathbb{R}^n)$ tal que $v|_\Omega = u$. Temos

$$\hat{v}(x) = \left(1 + ||x||^2\right)^{-s/2} \left(1 + ||x||^2\right)^{s/2} \hat{v}(x) \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$$

e

$$||\hat{v}||_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leqslant C^{1/2}||v||_{H^s(\mathbb{R}^n)}$$

com $C = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + ||x||^2)^{-s} dx \leqslant \infty$ pelo 9. Dados x e x_μ em $\mathbb{R}^n$, tem-se $v(x) = F[F^{-1}(v)](x)$, logo

$$v(x_\mu) - v(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} [e^{i\langle x_\mu, z\rangle_{\mathbb{R}^n}} - e^{i\langle x, z\rangle_{\mathbb{R}^n}}]\hat{v}(z)dz.$$

Se $x_\mu \to x$ em $\mathbb{R}^n$, decorre desta última igualdade e do teorema da convergência dominada aplicado nas funções $w_\mu = e^{i\langle x_\mu, z\rangle}\hat{v}(z)$, que $v(x_\mu) \to v(x)$, isto é, v é contínua em x. Como $x \in \mathbb{R}^n$ foi arbitrário segue que v é continua em $\mathbb{R}^n$. Portanto u é contínua em $\overline{\Omega}$. Além disso, note que

$$|F^{-1}[f](\xi)| \leqslant (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx,$$

tomando $f = \hat{v}(x)$, temos

$$|v(x)| \leqslant (2\pi)^{-n/2}||\hat{v}||_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leqslant (2\pi)^{-n/2}C^{\frac{1}{2}}||v||_{H^s(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^n$$

que implica

$$||u||_{C_b^0(\overline{\Omega})} \leqslant (2\pi)^{\frac{-n}{2}} C^{1/2}||v||_{H^s(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall\ v \in H^s(\mathbb{R}^n),\ v|_\Omega = u,$$

portanto

$$||u||_{C_b^0(\overline{\Omega})} \leqslant (2\pi)^{\frac{-n}{2}} C^{1/2}||v||_{H^s(\Omega)}$$

que mostra o teorema para $m = 0$. Suponha que seja válido para m e provaremos o resultado para $m + 1$, ou seja, para $s - n/2 > m + 1$. Primeiro note que se $v \in H^s(\mathbb{R}^n)$ então $\frac{\partial v}{\partial x_j} \in H^{s-1}(\mathbb{R}^n)$, pois

$$\begin{aligned}
\left|(1 + ||x||^2)^{(s-1)/2} F\left[\frac{\partial v}{\partial x_j}\right]\right| &\leqslant (1 + ||x||^2)^{(s-1)/2}|x_j|\hat{v} \\
&\leqslant (1 + ||x||^2)^{(s-1)/2}(1 + ||x||^2)\hat{v} \\
&= (1 + ||x||^2)^{s/2}\hat{v} \in L^2(\mathbb{R}^n).
\end{aligned}$$

E temos que

$$\left|\left|\frac{\partial v}{\partial x_j}\right|\right|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^n)} \leqslant ||v||_{H^s(\mathbb{R}^n)}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Sejam $u \in H^s(\Omega)$ e $v \in H^s(\mathbb{R}^n)$ tal que $v|_\Omega = u$. Pelo caso $m = 0$ temos que $v \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$ e pela hipótese de indução para $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\frac{\partial v}{\partial x_j} \in C_b^m(\mathbb{R}^n)$ e

$$\left| D^\alpha \frac{\partial v}{\partial x_j} \right| \leqslant C_1 \left|\left| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right|\right|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ e } |\alpha| \leqslant m.$$

Notando que $v \in C^1(\mathbb{R}^n)$ pois $\frac{\partial v}{\partial x_j} \in C^0(\mathbb{R}^n),\ j = 1, 2, \ldots, n$, temos

$$|D^\alpha v(x)| \leqslant C_1 ||v||_{H^s(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ e } |\alpha| \leqslant m + 1.$$

Assim

$$||u||_{C_b^{m+1}(\overline{\Omega})} \leqslant C_1 ||v||_{H^s(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall v \in H^s(\mathbb{R}^n),\ v|_\Omega = u$$

de onde se conclui

$$||u||_{C_b^{m+1}(\overline{\Omega})} \leqslant C_1 ||v||_{H^s(\Omega)}.$$

□

Agora que definimos espaços de Sobolev para conjuntos mais gerais e índices reais, vamos entrar no estudos de equações diferenciais parciais neles. Iremos iniciar o estudo de EDPs com o teorema do traço, que é o meio de definir o problema de bordo nas condições generalizadas que estamos definindo.

4 Teoremas de Traço

Para resolver problemas envolvendo EDPs, em geral, é imposta uma condição sobre a fronteira do conjunto. Quando estamos trabalhando com soluções fracas temos um problema de definição de imediado. Vamos exemplificar isso com o problema de Neumman associado a equação do calor em meios homogeneos.

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \\ u(x,0) = f(x) \\ u(0,y) = g(x). \end{cases}$$

Como dar sentido a restrição a $t = 0$ de uma função no espaço $H^s(\mathbb{R}^2)$ visto que claramente essa restrição não é uma função de $H^s(\mathbb{R}^2)$? Essa resposta é não trivial. Essa análise é feita analisando um operador que restringe a função ao bordo e definindo um espaço de Sobolev que será sua imagem. Esse operador é chamado de traço da função. Apesar de parecer inocente esses resultados são extremamente técnicos, mas é com eles que garantimos a unicidade de soluções de várias EDPs.

4.1 Caso $s = 1$ e $\Omega = \mathbb{R}^n_+$

Definição 28. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e Γ sua fronteira. Para toda $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ definimos o *traço* de u por

$$u|_\Gamma = \gamma_0 u$$

e denotaremos $\gamma_0 u$ a função traço de u sobre Ω.

Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$. Iremos denotar por $S(\overline{\Omega})$ a restrição das funções de $S(\mathbb{R}^n)$ ao conjunto $\overline{\Omega}$. Vamos começar a diversão para o caso $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ e $\Gamma = \{(x', 0), x' \in \mathbb{R}^{n-1}\}$.

Teorema 29. *Seja* $u \in S(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ *então*

$$||\gamma_0 u||_{H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \leqslant ||u||_{H^1(\mathbb{R}^n_+)}$$

Demonstração. Representaremos $\mathbf{F}_1$ a transformada de Fourier sobre $\mathbb{R}^{n-1}$. Dado uma função $u \in S(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, para cada $t \geqslant 0$, defina a seguintes funções

$$u(t)(x') = u(x', t) \quad \text{para } x' \in \mathbb{R}^{n-1}$$

e

$$\begin{aligned} w(t) &= \mathbf{F}_1[u(t)] \\ w(x', t) = w(t)(x') &= (2\pi)^{\frac{-(n-1)}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-i\langle x', y' \rangle_{\mathbb{R}^{n-1}}} u(y', t) dy'. \end{aligned}$$

Observe que $(\gamma_0 u)(x') = u(x',0) = u(0)(x')$, logo:

$$\begin{aligned}
||\gamma_0 u||^2_{H^{1/2}(\Gamma)} &= ||u(0)||_{H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \\
&= \int_{\mathbb{R}^{(n-1)}} \left(1+||x'||^2\right)^{\frac{1}{2}} |\mathbf{F}_1 u(0)(x')|^2 dx' \\
&= \int_{\mathbb{R}^{(n-1)}} \left(1+||x'||^2\right)^{\frac{1}{2}} |w(x',0)| dx'.
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que

$$||u||_{H^1(\mathbb{R}^n_+)} = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{(n-1)}} \left\{ (1+||x'||)^2 |w(x',t)|^2 + \left|\frac{\partial w}{\partial t}(x',t)\right|^2 \right\} dx'dt. \tag{14}$$

Primeiro lembre que

$$||u||_{H^1(\mathbb{R}^n_+)} = \inf\{||v||_{H^1(\mathbb{R}^n)}; v|_{\mathbb{R}^n_+} = u\},$$

como u se anula no bordo de $\mathbb{R}^n_+$, então sua extensão por 0 em $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}^n_+$ pertence a $H^s(\mathbb{R}^n)$ e

$$\begin{aligned}
||u||_{H^1(\mathbb{R}^n_+)} &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n_+} (1+||x||^2)|\hat{u}|^2 dx \\
&= ||u||^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n_+} ||x||^2 |\hat{u}|^2 dx.
\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
||u||^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x',t)|^2 dx'dt \\
&= \int_0^\infty ||u(t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^{(n-1)})} dt \\
&= \int_0^\infty ||\mathbf{F}_1[u(t)]||^2_{L^2(\mathbb{R}^{(n-1)})} dt \\
&= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |w(x',t)|^2 dx'dt.
\end{aligned}$$

Sabemos que, para $j = 1, 2, \ldots, n-1$

$$\mathbf{F}_1[D_j u(t)](x') = (-ix'_j)\mathbf{F}_1[u(t)](x') = (ix'_j)w(x',t),$$

para $(x',t) \in \overline{\mathbb{R}^n_+}$ e

$$(D_j u(t))(x') = (D_j u)(x',t).$$

Disto obtemos

$$\begin{aligned}
||D_j u||^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} &= \int_0^\infty \left\{ \int_{\mathbb{R}^{(n-1)}} |(D_j u(t))(x')|^2 dx' \right\} dt \\
&= \int_0^\infty ||D_j u(t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^{(n-1)})} dt \\
&= \int_0^\infty ||\mathbf{F}_1[D_j u(t)]||^2_{L^2(\mathbb{R}^{(n-1)})} dt \\
&= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{(n-1)}} |x'_j|^2 |w(x',t)|^2 dx' dt.
\end{aligned}$$

Fazendo $v(x',t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x',t)$ resulta que

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x',t) = \mathbf{F}_1[v(t)](x'),$$

logo

$$\begin{aligned}
||D_n u||^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} &= \int_0^\infty ||v(t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^{(n-1)})} dt \\
&= \int_0^\infty ||\mathbf{F}_1 v(t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^{(n-1)})} dt \\
&= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{(n-1)}} \left| \frac{\partial w}{\partial t}(x',t) \right|^2 dx' dt.
\end{aligned}$$

Somando $||u||^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}$ com os termos $||D_j u||^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}$ com $j = 1, 2, \ldots, n$ temos (15). Fixando x' em $\mathbb{R}^{(n-1)}$, seja $\phi(t) = w(x',t),\ t \geqslant 0$, então $\phi \in S([0,\infty)$ e $\phi'(t) = \frac{\partial w}{\partial t}(x',t)$. Além disso

$$\begin{aligned}
|\phi(0)|^2 = -\int_0^\infty \frac{d}{dt} |\phi(t)|^2 dt \\
&= -2Re \int_0^\infty \phi(t)\phi'(t) dt \\
&\leqslant 2 \left(\int_0^\infty |\phi(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^\infty |\phi'(t)|^2 dt \right)^{1/2},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$|w(x',0)|^2 \leqslant 2 \left(\int_0^\infty |w(x',t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^\infty \left| \frac{\partial w}{\partial t}(x',t) \right|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Agora vamo estimar $(1 + ||x'||^2)^{1/2} |w(x',0)|^2$.

$$\begin{aligned}
(1 + ||x'||^2)^{1/2} |w(x',0)|^2 &\leqslant 2 \left(\int_0^\infty (1 + ||x'||^2) |w(x',t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^\infty \left| \frac{\partial w}{\partial t}(x',t) \right|^2 dt \right)^{1/2} \\
&\leqslant \int_0^\infty (1 + ||x'||^2) |w(x',t)|^2 dt + \int_0^\infty \left| \frac{\partial w}{\partial t}(x',t) \right|^2 dt
\end{aligned}$$

Integrando a última desigualdade sobre $\mathbb{R}^{(n-1)}$ e aplicando o teorema de Fubini concluímos a prova. $\square$

O teorema anterior afirma que se considerarmos $S(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ com a topologia induzida por $H^1(\mathbb{R}^n_+)$, aplicação

$$\gamma_0 : S(\overline{\mathbb{R}^n_+}) \to H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$$

é contínua. Como $S(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ é denso em $H^1(\mathbb{R}^n_+)$, a aplicação traço prolonga-se a uma aplicação linear continua definida em todo $H^1(\mathbb{R}^n_+)$. Agora iremos dar uma caracterização do núcleo e da imagem da aplicação traço. Antes disso precisamos de um resultado auxiliar.

Iremos provar que a aplicação linear de $H^s(\mathbb{R}^n) \to H^s(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$P(u) = \phi u,$$

onde $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$, é continua. Lembre que a integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+||y||^2)^{(r-s)}} dy,$$

com $r - s > n/2$, converge pelo Lema 9.

Teorema 30. *Sejam $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$ e $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ com $s \geqslant 0$ real, então*

- *$\phi u \in H^s(\mathbb{R}^n)$;*
- *A aplicação linear de $H^s(\mathbb{R}^n) \to H^s(\mathbb{R}^n)$ dada por*

  $$P(u) = \phi u,$$

  é continua e

  $$||\phi u||_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leqslant C||\phi||_{H^r(\mathbb{R}^n)}||u||_{H^s(\mathbb{R}^n)}$$

  onde $2(r-s) > n,\ C^2 = (2\pi)^{-n} C_0 2^{2s+1}$ e

  $$C_0 = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+||y||^2)^{(r-s)}} dy.$$

Demonstração. Primeiro vamos provar para o caso $u \in S(\mathbb{R}^n)$. Pelo Teorema 11 temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+||x||^2\right)^s |\hat{\phi u}(x)|^2 dx = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+||x||^2\right)^s |\hat{\phi} * \hat{u}(x)|^2 dx.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \left|\left(1+||x||^2\right)^{s/2} (\hat{\phi} * \hat{u}(x))\right| &= \left|\left(1+||x||^2\right)^{s/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}(y)\hat{u}(x-y)dy\right| \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1+||x||^2)^{s/2}}{(1+||y||^2)^{r/2}} |\hat{\phi}(y)| \left(1+||y||^2\right)^{r/2} |\hat{u}(x-y)| dy, \end{aligned}$$

que implica da desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\left|\left(1+||x||^2\right)^{s/2}(\hat{\phi}*\hat{u}(x))\right|^2 \leqslant ||\phi||^2_{H^r(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\left(1+||x||^2\right)^s}{\left(1+||y||^2\right)^r}|\hat{u}(x-y)|^2 dy.$$

Assim

$$||\phi u||^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+||x||^2\right)^s |\hat{\phi u}(x)|^2 dx \tag{15}$$

$$\leqslant (2\pi)^{(-n)}||\phi||^2_{H^r(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\left(1+||x||^2\right)^{s/2}}{\left(1+||y||^2\right)^{r/2}}|\hat{u}(x-y)|^2 dydx. \tag{16}$$

Observe que

$$\begin{aligned} ||x||^2 &\leqslant ||x-y||^2 + ||y||^2 + ||y|| ||x-y|| \\ &\leqslant ||x-y||^2 + ||y||^2 + ||y||^2 + ||x-y||^2 \end{aligned}$$

logo

$$1+||x||^2 < 2(1+||x-y||^2) + 2(1+||y||^2).$$

Disto temos que

$$\begin{aligned} (1+||x||^2)^s &< [2(1+||x-y||^2) + 2(1+||y||^2)]^s \\ &\leqslant 2^{2s}(1+||x-y||^2)^s + 2^{2s}(1+||y||^2)^s. \end{aligned}$$

Pelo teorema de Fubini,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\left(1+||x||^2\right)^s}{\left(1+||y||^2\right)^r}|\hat{u}(x-y)|^2 dxdy <& 2^{2s}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+||y||^2)^r}\left[\int_{\mathbb{R}^n}(1+||x-y||^2)^s|\hat{u}(x-y)|^2dx\right]dy \\ &+ 2^{2s}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+||y||^2)^{r-s}}\left[\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{u}(x-y)|^2dx\right]dy \\ \\ &< 2^{2s}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1+||y||^2)^s}{(1+||y||^2)^r}\left[\int_{\mathbb{R}^n}(1+||x-y||^2)^s|\hat{u}(x-y)|^2dx\right]dy \\ &+ 2^{2s}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+||y||^2)^{r-s}}\left[\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{u}(x-y)|^2dx\right]dy \\ \\ &= 2^{2s}C_0\left[||u||^2_{H_s(\mathbb{R}^n)} + ||u||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right] \\ &\leqslant 2^{2s+1}C_0||u||^2_{H_s(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Da última igualdade e de (12) resulta

$$||\phi u||_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leqslant C||\phi||_{H^r(\mathbb{R}^n)}||u||_{H^s(\mathbb{R}^n)}. \tag{17}$$

Seja $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ e (u_μ) uma sequencia de funções de $S(\mathbb{R}^n)$ que converge para u em $H^s(\mathbb{R}^n)$. Segue que

$$\phi u_\mu \to \phi u \quad \text{em} \;\; L^2(\mathbb{R}^n).$$

Por (13) vem que (ϕu_μ) é uma sequência de Cauchy em $H^s(\mathbb{R}^n)$, logo existe $v \in H^s(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi u_\mu \to v$ em $H^s(\mathbb{R}^n)$, consequentemente $\phi u_\mu \to v$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Pela unicidade dos limites temos que $v = \phi u$ e

$$\phi u_\mu \to \phi u \quad \text{em} \;\; H^s(\mathbb{R}^n).$$

Isso mostra o primeiro item. O segundo segue diretamente da última convergência e de (13). □

Agora iremos provar o primeiro caso do teorema do traço.

Teorema 31. *A função traço aplica $H^1(\mathbb{R}^n_+)$ sobre $H^{1/2}(\mathbb{R}^{(n-1)})$ e o núcleo de γ_0 é o espaço $H^1_0(\mathbb{R}^n_+)$.*

Essa demonstração é um tanto longa e tecnica então iremos separar a prova em dois resultados para a leitura não ser tão exaustiva e facilitar o entendimento do leitor.
Teorema 29 a) A função traço aplica $H^1(\mathbb{R}^n_+)$ sobre $H^{1/2}(\mathbb{R}^{(n-1)})$ isometricamente.

Demonstração. Afirmamos que γ_0 é sobrejetiva. De fato, seja $\phi \in S(\mathbb{R}^{n-1})$ e considere

$$v(x', x_n) = (\mathbf{F}_1\phi)(x') \exp\left[-\left(\sqrt{1 + ||x'||^2}\right) x_n\right]$$

e

$$u(x', x_n) = \mathbf{F}_1^{-1}[v(x_n)](x') = (2\pi)^{-(n-1)/2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i\langle x', y'\rangle_{\mathbb{R}^{n-1}}} v(y', x_n) dy'. \tag{18}$$

Sendo $v(0)(x') = v(x', 0) = (\mathbf{F}_1\phi)(x')$ tem-se

$$\gamma_0 u = \mathbf{F}_1^{-1}[v(0)] = \mathbf{F}_1^{-1}\mathbf{F}_1\phi = \phi.$$

Afirmamos que $u \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$ e $||u||_{H^1(\mathbb{R}^n_+)} = ||\phi||_{H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}$. Note que

$$\int_0^\infty \exp\left[-\left(\sqrt{1 + ||x'||^2}\right) x_n\right] dx_n = \frac{1}{2\sqrt{1 + ||x'||^2}},$$

disto obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n_+} (1 + ||x'||^2)|v(x', x_n)|^2 dx' dx_n &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(1 + ||x'||^2\right)^{1/2} |\mathbf{F}_1\phi(x')|^2 dx' \\ &= \frac{1}{2} ||\phi||_{H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}.\end{aligned}$$

Tambem é valido que

$$\frac{\partial v}{\partial x_n}(x', x_n) = -\sqrt{1 + ||x'||^2} v(x', x_n),$$

o que resulta

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n_+} \left|\frac{\partial v}{\partial x_n}(x', x_n)\right|^2 dx'dx_n &= \int_{\mathbb{R}^n_+} (1 + ||x'||^2)|v(x', x_n)|^2 dx'dx_n \\ &= \frac{1}{2}||\phi||^2_{H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}.\end{aligned}$$

Fazendo

$$\begin{aligned} w_j(x', x_n) &= ix'_k v(x', x_n), \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1; \\ w_n(x', x_n) &= \frac{\partial v}{\partial x_n}(x', x_n),\end{aligned}$$

tem-se

$$\begin{aligned} D_j u(x', x_n) &= \mathbf{F}_1^{-1}[w_k(x_n)](x'), \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1; \\ D_n u(x', x_n) &= \mathbf{F}_1^{-1}[w_n(x_n)](x').\end{aligned}$$

Do teorema de Plancherel segue

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n_+} \left(|u(x', x_n)|^2 + \sum_{j=1}^{n-1} |D_j u(x', x_n)|^2\right) dx'dx_n &= \int_0^\infty \left(||v(x_n)||^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} + \sum_{j=1}^{n-1} ||w_j(x_n)||^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}\right) dx_n \\ &= \int_0^\infty \left(||v(x_n)||^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} + \sum_{j=1}^{n-1} ||\mathbf{F}_1^{-1}[w_j(x_n)]||^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}\right) dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n_+} (1 + ||x'||^2)|v(x', x_n)|^2 dx'dx_n \\ &= \frac{1}{2}||\phi||^2_{H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}.\end{aligned}$$

Temos tambem

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n_+} |D_n u(x', x_n)|^2 dx'dx_n &= \int_{\mathbb{R}^n_+} \left|\frac{\partial v}{\partial x_n}(x', x_n)\right|^2 dx'dx_n \\ &= \frac{1}{2}||\phi||^2_{H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}.\end{aligned}$$

Somando as duas relações anteriores $u \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$ e $||u||_{H^1(\mathbb{R}^n)} = ||\phi||_{H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}$. Agora iremos utilizar a densidade de $S(\mathbb{R}^{n-1})$ em $H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ para concluir a sobrejetividade. Com efeito, sejam $w \in H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ e (ψ_μ) uma sequência em $S(\mathbb{R}^{n-1})$ tal que

$$\psi_\mu \to w \text{ em } H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1}).$$

Seja $u_\mu \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$ a função obtida em (16) com ψ_μ. Então $\gamma_0 u_\mu = \psi_\mu$ e

$$||u_\mu - u_\tau||_{H^1(\mathbb{R}^n_+)} = ||\psi_\mu - \psi_\tau||_{H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})},$$

logo (u_μ) é uma sequencia de Cauchy em $H^1(\mathbb{R}^n_+)$. Seja u o limite de (u_μ) em $H^1(\mathbb{R}^n_+)$, então pela continuidade de γ_0 resulta

$$\phi_\mu = \gamma_0 u_\mu \to \gamma_0 u.$$

As duas últimas convergências implicam $\gamma_0 u = w$ e também é valido que $||u||_{H^1(\mathbb{R}^n_+)} = ||w||_{H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}$ □

Para provar a segunda parte do Teorema 29 vamos precisar do seguinte lema.

Lema 10. Dados $u \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$ e $\phi \in S(\overline{\mathbb{R}^n})$, então $\gamma_0(\phi u) = (\gamma_0 \phi) \cdot (\gamma_0 u)$.

Demonstração. Note que as aplicações

$$\begin{array}{rcl} \sigma_1 : H^1(\mathbb{R}^n) & \to & H^1(\mathbb{R}^n) \\ u & \to & \phi u \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} \sigma_2 : H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1}) & \to & H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1}) \\ u & \to & (\gamma_0 \phi) u \end{array}$$

são lineares e contínuas pelo 30. Também, que o lema é valido se $u \in S(\overline{\mathbb{R}^n})$.
Seja (ϕ_μ) uma sequência de $S(\overline{\mathbb{R}^n})$ que converge u em $H^1(\mathbb{R}^n_+)$. Da continuidade das aplicações σ_1, σ_2 e γ_0, são verdadeiros os seguintes limites na topologia de $H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$:

$$(\gamma_0 \phi)(\gamma_0 u) = \lim_{\mu \to \infty} (\gamma_0 \phi)(\gamma_0 \phi_\mu) = \lim_{\mu \to \infty} \gamma_0(\phi \phi_\mu) = \gamma_0(\phi u)$$

□

Agora iremos retornar a prova da segunda parte do teorema 29.

Teorema 29 b) O espaço $H^1_0(\mathbb{R}^n_+)$ é o núcleo de γ_0.

Demonstração. Com efeito, sendo $\gamma_0 u = 0$ para todo $u \in S(\mathbb{R}^n_+)$, tem-se $\gamma_0 u = 0$ para todo $u \in H^1_0(\mathbb{R}^n_+)$, o que prova que $H^1_0(\mathbb{R}^n_+)$ está contido no núcleo de γ_0.
Considere $u \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$ tal que $\gamma_0 u = 0$. Provaremos que $u \in H^1_0(\mathbb{R}^n_+)$.

Caso 1: Se u tem decaimento exponencial quando x tende a infinito e ao bordo de $\mathbb{R}^n_+$.
Primeiro afirmamos que se $u \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$ com decaimento exponencial quando x tende a infinto e ao bordo de $\mathbb{R}^n_+$então $u \in H^1_0(\mathbb{R}^n_+)$. Claramente a extensão por 0 de u, que denotaremos por $\tilde{u}$ para todo $\mathbb{R}^n$ pertence a $H^1(\mathbb{R}^n)$. Seja $\rho_\mu * u$, onde

$$\rho_\mu = e^{-\frac{1}{n}\left(||x||^2 + \frac{1}{x_n}\right)},$$

logo $\rho_\mu * u$ é uma sucessão de $S(\mathbb{R}^n_+)$ que converge para u em $H^1(\mathbb{R}^n_+)$, logo $u \in H^1_0(\mathbb{R}^n_+)$. Defina as seguintes funções

$$\theta_\mu = \begin{cases} 0 \ \text{ se} & 0 \leqslant t < \dfrac{1}{\mu} \\ \mu t - 1 \ \text{ se} & \dfrac{1}{\mu} \leqslant t \leqslant \dfrac{2}{\mu} \\ 1 \ \text{ se} & t > \dfrac{2}{\mu} \end{cases}$$

e

$$u_\mu(x', x_n) = \theta_\mu(x_n) u(x', x_n), \quad (x', x_n) \in \mathbb{R}^n_+.$$

Disto temos que $u_\mu \in H^1_0(\mathbb{R}^n_+)$ e agora provaremos que (u_μ) converge na topologia de $H^1(\mathbb{R}^n_+)$. Note que é equivalente provar que (u_μ) e suas derivadas fracas de ordem um convergem em $L^2(\mathbb{R}^n_+)$. De fato,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n_+} |u_\mu(x) - u(x)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_0^\infty |\theta_\mu(x_n) u(x', x_n) - u(x', x_n)|^2 \right) dx' \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{1/\mu} |u(x', x_n)|^2 dx_n dx' + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{1/\mu}^{2/\mu} (\mu x_n - 2)^2 |u(x', x_n)|^2 dx_n dx' \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{1/\mu} |u(x', x_n)|^2 dx_n dx' + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{1/\mu}^{2/\mu} |u(x', x_n)|^2 dx_n dx' \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{2/\mu} |u(x', x_n)|^2 dx_n dx' \\
&= \int_0^{2/\mu} ||u(x_n)||^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} dx_n,
\end{aligned}$$

que implica (u_μ) converge para (u) em $L^2(\mathbb{R}^n_+)$. Dado $j = 1, 2, \ldots, n-1$ temos

$$D_j u_\mu(x', x_n) = \theta_\mu(x_n)(D_j u)(x', x_n).$$

Afirmamos que $D_n u_\mu$ converge para $D_n u$ em $L^2(\mathbb{R}^n_+)$. Pela continuidade do traço temos $u(0) = \gamma_0 u = 0$, assim

$$u(x', x_n) = u(x', x_n) - u(x', 0) = \int_0^{x_n} \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', t) dt.$$

Aplicando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}
|u(x', x_n)|^2 &\leqslant x_n \int_0^{x_n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', t) \right|^2 dt \\
&\leqslant \frac{2}{\mu} \left| \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', t) \right|^2 dt,
\end{aligned}$$

para $0 \leqslant x_n \leqslant 2/\mu$. Logo,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n_+} |\theta'_\mu(x_n)u(x',x_n)|^2 dx'dx_n &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{1/\mu}^{2/\mu} \mu^2 |u(x',x_n)|^2 dx'dx_n \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{1/\mu}^{2/\mu} 2\mu \int_0^{2/\mu} \left| \frac{\partial u}{\partial x_n}(x',t) \right|^2 dt dx_n dx' \\
&= 2 \int_{\mathbb{R}^n_+} \int_0^{2/\mu} \left| \frac{\partial u}{\partial x_n}(x',t) \right|^2 dt dx',
\end{aligned}$$

provando que $D_n u_\mu$ converge para $D_n u$ em $L^2(\mathbb{R}^n_+)$.

Caso 2: Seja $u \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$. Defina

$$\theta_\mu(x',x_n) = e^{-\frac{1}{\mu}[||x'||^2 + 1/x_n]}$$

e $u_\mu(x) = \theta_\mu(x)u(x)$ com $x \in \mathbb{R}^n_+$. Então u_μ converge para u na topologia de $H^1(\mathbb{R}^n_+)$. Do Lema 10 temos que $\gamma_0(u_\mu) = \gamma_0(\theta_n)\gamma_0(u) = 0$. Como u_μ tem decaimento exponencial, resulta que $u_\mu \in H^1_0(\mathbb{R}^n_+)$, logo $u \in H^1_0(\mathbb{R}^n_+)$. □

4.2 Caso $s = 1$ e Ω um aberto limitado regular do $\mathbb{R}^n$

A seguir estudaremos o traço de funções definidas num aberto limitado suficientemente regular do $\mathbb{R}^n$. Agora iremos definir os espaços $H^s(\Gamma)$ com $s \geqslant 0$ e Γ o bordo de um aberto Ω. Considere os seguintes conjuntos

$$\begin{aligned}
&Q = \{(y', y_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}; |y'_i| < 1,\ i = 1, 2, \ldots, n-1,\ |y_n| < 1\} \\
&Q^+ = Q \cap \{y_n > 0\} \\
&\Sigma = Q \cap \{y_n = 0\}.
\end{aligned}$$

Tome um sistema de cartas locais $\mathcal{U} = \{(U_1, \phi_1), \ldots, (U_N, \phi_N)\}$ para $\overline{\Omega}$ com as seguintes propriedades: Para cada $K = 1, 2, \ldots, N$

$$\begin{cases}
\phi_k(U_k) = Q,\ \phi_k(U_k \cap \Omega) = Q^+,\ \phi_k(U_k \cap \Gamma) = \Sigma. \\
\phi_k, \phi_k^{-1} \in\ C^\infty. \\
\text{As condições de compatibilidade são satisfeitas, isto é, se} \\
\qquad\qquad U_k \cap U_l \neq \varnothing \\
\text{então existe um homeomorfismo } J_{kl} \in C^\infty \text{com jacobiano positivo de} \\
\phi_k(U_k \cap U_l) \text{ sobre } \phi_l(U_k \cap U_l) \text{ tal que} \\
\qquad\qquad \phi_l(x) = J_{kl}(\phi_k(x)),\ \forall\ x \in U_k \cap U_l.
\end{cases} \tag{19}$$

Tome funções $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in S(\mathbb{R}^n)$ tais que

$$\sigma_k(x) = 0, \forall x \in U_k^c, k = 1, 2, \ldots, N \ \text{ e } \sum_{j=1}^{N} \sigma_j(x) = 1,\ x \in \Gamma.$$

Observação 2. Iremos apenas considerar abertos Ω que atendam as condições acima para garantir a regularidade da aplicação traço no bordo de Ω. A prova da existência das funções ϕ_k podem ser encontradas em [9]. No livro é garantida a existência de partições da unidade para espaços métricos separáveis quaisquer, mas a construção dele é feita via funções de suporte compacto, e nesse contexto nos dispomos de funções de suporte compacto de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n)$. Uma curiosidade interessante é que a existência de partições da unidade em espaços métricos separáveis é o último resultado do livro.

Dada uma função w definida em Γ, para todo $j = 1, 2, \ldots, N$ seja

$$w_j(y) = \begin{cases} (\sigma_j w)(\phi_j^{-1}(y', 0)) & \text{se } \; y' \in \Omega_0 = (0,1)^{n-1} \\ 0 & \text{se } \; y' \in \mathbb{R}^{n-1} - \Omega_0 \end{cases}$$

Define-se o espaço $S(\Gamma)$ como o espaço das funções $w \in C^\infty(\Gamma)$, tais que $w_k \in S(\mathbb{R}^{n-1})$ para todo $k = 1, 2, \cdots, N$. Assim definiremos o seguinte espaço $H^s(\Gamma)$ como o espaço vetorial das funções w definidas em Γ tais que $w_j \in H^s(\mathbb{R}^{n-1})$ para todo $j = 1, 2, \ldots, N$, com o produto interno

$$\langle w, v \rangle_{H^s(\Gamma)} = \sum_{j=1}^{N} \langle w_j, v_j \rangle_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

Assim $H^s(\Gamma)$ é um espaço de Hilbert e $D(\Gamma)$ é denso em $H^s(\Gamma)$.

Teorema 32. *Seja Ω uma aberto regular do $\mathbb{R}^n$ então existe uma constante positiva tal que*

$$||\gamma_0 u||_{H^{1/2}(\Gamma)} \leqslant C||u||_{H^1(\Omega)}$$

para toda $u \in S(\overline{\Omega})$.

Demonstração. Dado $u \in S(\overline{\Omega})$, defina para cada $j = 1, 2, \ldots, N$ defina

$$v_j(y', y_n) = \begin{cases} (\sigma_j u)(\phi_j^{-1}(y', y_n)) & \text{se } \; (y', y_n) \in Q^+ \\ 0 & \text{se } \; (y', y_n) \in \mathbb{R}^n_+ - Q^+. \end{cases} \tag{20}$$

Segue que $v_j \in S(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ e $\gamma_0 v_j = \gamma_0 u_j$, onde $u_j = \sigma_j u$, logo,

$$\begin{aligned} ||u_j||_{H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} &= ||\gamma_0 v_j||_{H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \\ &\leqslant C||v_j||_{H^1(\mathbb{R}^n_+)} \\ &= ||v_k||_{H^1(Q^+)} \\ &= C_1 C||\sigma_j u||^2_{H^1(\Omega)} \\ &\leqslant C_1 C||u||^2_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

logo

$$||\gamma_0 u||^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \leqslant C_1 C M||u||^2_{H^1(\Omega)}$$

□

Da proposição anterior e usando o fato de $S(\Omega)$ ser denso em $H^1(\Omega)$, podemos prolongar continuamente a função traço para uma aplicação linear e continua

$$\gamma_0; H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma).$$

Além disso, fixado o sistema de cartas em Γ, temos que γ_0 é a unica aplicação linear continua de $H^1(\Omega)$ em $H^{1/2}(\Gamma)$ tal que

$$\gamma_0 u = u|_\Gamma, \quad \forall u \in S(\overline{\Omega})$$

Agora iremos generalizar o Teorema 29 para Ω aberto regular limitado do $\mathbb{R}^n$.

Teorema 33. *A função traço é uma aplicação sobrejetora de $H^1(\Omega)$ em $H^{1/2}(\Gamma)$ e seu nucleo coincide com $H_0^1(\Omega)$.*

Assim como fizemos no Teorema 29, iremos dividir a prova em duas partes.

Teorema 31 a) O nucleo de γ_0 é $H_0^1(\Omega)$.

Demonstração. Note que $H_0^1(\Omega)$ está contido no núcleo de γ. Por outro lado, seja $u \in H^1(\Omega)$. Considere uma sequência (u_μ) de funções em $S(\overline{\Omega})$ tal que

$$u_\mu \to u \quad \text{em} \quad H^1(\Omega).$$

Então, para $k = 1, \ldots, N$,

$$\sigma_k u_\mu \to \sigma_k u \quad \text{em} \quad H^1(\Omega).$$

Disto temos que

$$\gamma_0(\sigma_k u_\mu) \to \gamma_0(\sigma_k u) = 0 \quad \text{em} \quad H^{1/2}(\Gamma).$$

Sejam $v_{k,\mu}$ e v_k as funções definidas em (18), segundo $\sigma_k v_\mu$ e $\sigma_k u$, respectivamente. Então

$$v_{k,\mu} \in S(\overline{\mathbb{R}^n_+}), \quad v_k \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$$

e pela última convergencia

$$\gamma_0(v_{k,\mu}) \to \gamma_0 v_k = 0.$$

Pelo teorema do traço para o caso $\mathbb{R}^n_+$, temos que $v_k \in H_0^1(\mathbb{R}^n_+)$, o que implica $v_k \in H_0^1(Q^+)$, portanto $\sigma_k u \in H_0^1(\Omega)$, para $k = 1, 2, \ldots, N$. Como

$$u = \sum_{k=1}^{N} \sigma_k u + \sigma_0 u$$

pertence a $H_0^1(\Omega)$, logo $u \in H_0^1(\Omega)$, o que prova o teorema. □

31b) γ_0 é sobrejetora.

Demonstração. Seja $w \in D(\Gamma)$. Tem-se

$$w(w) = \sum_{k=1}^{N} \sigma_k(x) w(x), \quad x \in \Gamma.$$

De (43) vem que

$$w_k(y') = v_k(y', 0) \in S(\mathbb{R}^{n-1}), \quad k = 1, 2, \dot{;} N.$$

Pelo teorema do traço para o caso $\mathbb{R}^n_+$ existe $z_k \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$ tal que

$$\gamma_0 z_k = w_k \quad \text{e} \quad ||z_k||_{H^1(\mathbb{R}^n_+)} = ||w_k||_{H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

Seja $\rho_k \in S(\mathbb{R}^n)$ tal que $\rho_k = 1$ no suporte de $\sigma_k(\phi_k^{-1})$ e $\phi_k(x) = 0$ para todo $x \in Q^c$. Logo

$$\rho_k z_k \in H^1(Q^+) \ \text{ e } \ \gamma_0(\rho_k z_k) = w_k.$$

Definimos $u_k(x) = (\rho_k z_k)(\phi_k(x))$. Disto temos que $u_k \in H^1(\Omega)$,

$$||u_k||_{H^1(\Omega)} \leqslant C||\rho_k z_k||_{H^1(Q^+)} \quad \text{e} \quad \gamma_0 u_k = (\gamma_0 \sigma_k) w.$$

Assim temos

$$\begin{aligned} ||p_k z_k||^2_{H^1(Q^+)} &\leqslant C||z_k||^2_{H^1(\mathbb{R}^n_+)} \\ &= C||w_k||^2_{H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \\ &= C||(\gamma_0 \sigma_k) w||^2_{H^{1/2}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

O que implica

$$||u_k||^2_{H^1(\Omega)} \leqslant C||(\gamma_0 \sigma_k) w||^2_{H^{1/2}(\Gamma)}.$$

Seja $u = \sum_{k=1}^{N} u_k$, então $u \in H^1(\Omega)$ e

$$\gamma_0 u = \sum_{k=1}^{N} \gamma_0 u_k = \sum_{k=1}^{N} (\gamma_0 \sigma_k) w = w. \tag{21}$$

Tambem temos

$$\begin{aligned} ||u||^2_{H^1(\Omega)} &= C \sum_{k=1}^{N} ||u_k||^2_{H^1(\Omega)} \\ &\leqslant C||w||^2_{H^{1/2}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Seja $w \in H^{1/2}(\Gamma)$, então existe uma sequência (w_μ) de funções de $D(\Gamma)$ tal que

$$w_\mu \to w \ \text{ em } \ H^{1/2}(\Gamma).$$

Seja $u_\mu \in H^1(\Omega)$ a função dada em (19) com w_μ, logo $\gamma_0 u_\mu = w_\mu$. Resulta disso que

$$||u_\mu - u_\tau|| \leqslant |||w_\mu - w_\tau||_{H^{1/2}(\Gamma)}$$

portanto (u_μ) é uma sequência de Cauchy em $H^1(\Omega)$. Seja $u \in H^1(\Omega)$ o limite da sequência, assim pela continuidade da função traço resulta

$$w_\mu = \gamma_0 u_\mu \to \gamma_0 u \;\text{ em }\; H^{1/2}(\Gamma).$$

Logo $\gamma_0 u = w$, que mostra a sobrejetividade do traço. $\square$

4.3 Caso $2 \leqslant s \in \mathbb{N}$

Agora iremos trabalhar os teoremas de traço para $H^m(\Omega)$, onde Ω é um aberto regular do R^n ou é R^n_+. Assim como no caso anterior começamos trabalhando com $\Omega = \mathbb{R}^n_+$. Seja $u \in S(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, definimos

$$(\gamma_j u)(x') = (D^j_n u)(x', 0) = \gamma(D^j_n)(x)$$

para $j = 0, 1, \ldots, m-1$ e $x' \in R^{n-1}$, sendo $D_n = \dfrac{\partial}{\partial x_n}$. Representaremos por X ao seguinte espaço

$$X = \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$$

e sua norma dada por

$$||w||^2_X = \sum_{j=0}^{m-1} ||w_j||^2_{H^{m-j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})}$$

onde $w \in (w_0, \ldots, w_{n-1})$. Claramente a norma acima é induzida por um produto interno, que é dado pela soma dos produtos internos em cada uma das coordenadas e é fechado pela propriedade da topologia produto, logo X é um espaço de Hilbert. Além disso

$$S(\mathbb{R}^{n-1})^m = S(\mathbb{R}^{n-1}) \times \cdots \times S(\mathbb{R}^{n-1}), \text{produto cartesiano } m \text{ vezes}$$

é denso em X.

Agora iremos fazer uma análise semelhante a que fizemos o teorema 29, mas agora em uma versão mais geral.

Teorema 34. *Seja $\Omega = \mathbb{R}^n_+$. A aplicação linear*

$$\gamma : S(\overline{\mathbb{R}^n_+}) \to X, \quad \gamma(u) = (\gamma_0 u, \cdots, \gamma_{m-1} u)$$

prolonga-se por continuidade a uma aplicação linear continua em $H^m(\Omega)$, $m \geqslant 1$, sobre X, cujo núcleo é o espaço $H^m_0(\Omega)$. Tem se ainda que γ possui inversa a direita linear e continua.

A aplicação γ é chamada de *traço de ordem* $m-1$. A prova do teorema 32 sera feita em 3 etapas. Na primeira iremos provar que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$||\gamma_j u||_{H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leqslant C||u||_{H^m(\Omega)}$$

para toda $u \in S(\overline{\Omega})$ e $j = 0, 1, \cdots, m-1$.

Na segunda etapa, prova-se que o nucleo de γ é o espaço $H_0^m(\Omega)$, sendo $S(\Omega)$ denso em $H_0^m(\Omega)$ e $\gamma u = 0$ para todo $u \in S(\Omega)$ temos que $H_0^m(\Omega) \subset N(\gamma)$, assim resta provar apenas uma inclusão. Na terceira etapa iremos construir a inversa a direita de γ.

4.4 Primeira etapa

Pelo Teorema 30, temos

$$||\gamma_0 u||^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \leqslant ||u||^2_{H^1(\Omega)},$$

para toda $u \in S(\overline{\Omega})$. Fixe j para $j = 0, 1, \cdots, m-1$ e considere o multi-índice $\alpha = (\alpha', j)$ com $\alpha' = (\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1})$. Seja $\mathcal{F}_1$ a transformada de Fourier no $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$. Para todo $u \in S(\overline{\Omega})$, tem-se

$$|(x')^{\alpha'}\mathcal{F}_1(\gamma_j u)(x')| = |\mathcal{F}_1(\gamma_0(D^\alpha))(x')|.$$

Observe que se $|\alpha'| \leqslant m-j-1$, então $|\alpha| \leqslant m-1$, portanto

$$||D^\alpha u||^2_{H^1(\Omega)} \leqslant ||u||^2_{H^m(\Omega)}.$$

Disso temos

$$\begin{aligned}
||\gamma_j u||^2_{H^{m-j\frac{1}{2}}(\Gamma)} &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(1 + ||x'||^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + ||x'||^2\right)^{m-j-1} |\mathcal{F}_1(\gamma_j u)(x')|^2 dx' \\
&\leqslant C \sum_{|\alpha'| \leqslant m-j-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(1 + ||x'||^2\right)^{\frac{1}{2}} |\mathcal{F}_1(\gamma_0(D^\alpha u))(x')|^2 dx' \\
&\leqslant C \sum_{|\alpha'| \leqslant m-j-1} ||D^\alpha u||^2_{H^1(\Omega)} \\
&\leqslant C||u||^2_{H^m(\Omega)}
\end{aligned}$$

4.5 Segunda etapa

Para provar que $\gamma^{-1}(0) = H_0^m(\Omega)$ serão usados alguns lemas.

Lema 11. Se $u \in H^m(\Omega)$ e $\gamma_0 u = \gamma_1 u = \cdots = \gamma_{m-1} u = 0$ então

$$|u(x', x_n)|^2 \leqslant \left(\frac{2}{\mu}\right)^{2m-1} \int_0^{\frac{2}{\mu}} |D_n^m u(x', t)| dt$$

para quase todo $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $0 \leqslant x_n \leqslant 2/\mu$ com μ inteiro positivo.

Demonstração. Faremos a prova por indução. O caso $m = 1$ já foi provado na demonstração do teorema 29. Suponha que o lema seja valido para $m \geqslant 1$. Seja $u \in H^{m+1}(\Omega)$ tal que $\gamma_0 u = \cdots = \gamma_m u = 0$. Sendo $\gamma_1(D_n u) = \gamma_{i+1} u = 0$ para $i = 1, 2, \cdots, m-1$ e $D_n u \in H^m(\Omega)$, da hipotese de indução vem que

$$|(D_n u)(x', t)|^2 \leqslant \left(\frac{2}{\mu}\right)^{2m-1} \int_0^{\frac{2}{\mu}} |D_n^{m+1} u(x', s)|^2 ds$$

para quase todo $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $0 \leqslant t \leqslant 2/\mu$. Resulta do caso $m = 1$ que

$$\begin{aligned} |u(x', x_n)|^2 &\leqslant \frac{2}{\mu} \int_0^{2/\mu} |D_n u(x', t)|^2 dt \\ &\leqslant \left(\frac{2}{\mu}\right)^{2m+1} \int_0^{2/\mu} |(D_n^{m+1} u)(x', s)|^2 ds, \end{aligned}$$

para quase todo $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $0 \leqslant x_n \leqslant 2/\mu$, o que prova o lema $\square$

Lema 12. Dado um inteiro positivo p, seja $\theta \in C^p(\mathbb{R})$ tal que $0 \leqslant \theta(t) \leqslant 1$ para todo $t \in \mathbb{R}, \theta(t) = 0$ se $t \leqslant 1$ e $\theta(t) = 1$ se $t \geqslant 2$. Para todo $k = 1, 2, \cdots$ seja $\theta_k(t) = \theta(kt)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Então:

a) Se $u \in L^2(\Omega)$, seja $u_k(x) = \theta_k(x_n) u(x)$ para $x \in \Omega$, resulta que (u_k) converge para u em $L^2(\Omega)$.

b) Se $u \in H^p(\Omega)$ e $\gamma_0 u = \gamma_1 u == \gamma_{p-1} = 0$, então a sequência (v_k) converge para zero em $L^2(\Omega)$, onde
$$v_k(x) = \theta_k^{(p)}(x_n) u(x).$$

Demonstração. A sequência θ_k converge pontualmete para 1, assim o item a) é consequência do teorema da convergênica domidada. Para o item b) considerere $|\theta^{(p)}(t)| \leqslant M$. Usando o Lema 11, temos que para k suficientemente grande

$$||v_k||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant M \int_0^{2/k} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |D_n^p u(x', t)|^2 dx' dt = M \int_0^{2/k} ||D_n^p u(t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} dt.$$

Notando que $||D_n^p u(t)||_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \in L^2(0, \infty)$ segue que (v_k) converge para 0 em $L^2(\Omega)$. $\square$

Agora iremos retornar a prova do teorema, iremos mostrar que $\gamma^{-1}(0) \subset H_0^m(\Omega)$. Seja $\theta \in C^{m(\mathbb{R})}$ como no lema anterior. Considere $u \in H^m(\Omega)$ tal que $\gamma_0 u = \cdots = \gamma_{m-1} u = 0$. Se $\theta_k(t) = \theta(kt)$ com $t \in \mathbb{R}$, seja

$$u_k(x', x_n) = \theta_k(x_n) u(x', x_n), \quad x \in \mathbb{R}^{n-1}, \ x_n > 0.$$

Considere o multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_3, \cdots, \alpha_{n-1}, i) = (\alpha', i)$ com $|\alpha'| + i \leqslant m$. No caso $i = 0$ temos:
$$(D^\alpha u_k)(x', x_n) = \theta_k(x_n)(D^\alpha u)(x', x_n),$$

portanto, pelo lema anterior resulta que $(D^\alpha u_k)$ converge para $D^\alpha u$ em $L^2(\Omega)$. No caso $0 < i \leqslant m$, tem-se:

$$(D^\alpha u_k)(x) = \theta_k(x_n)(D^\alpha u)(x) + \sum_{p=1}^{i} \frac{i!}{(i-p)!p!}\theta_k^{(p)}(x_n)(D_n^{i-p}D^{\alpha'}u)(x).$$

Note que o traço do somatório acima é nulo, pois ,ou $u \in S(\overline{\Omega})$ e possui traço nulo por hipotese ou é sequência de funções deste, em ambos os casos temos que o traço das derivadas serão nulos. Assim pelo Lema 11 decorre que $(D^\alpha u_k)$ converge para $D^\alpha u$ em $L^2(\Omega)$, logo (u_k) converge para u em $H^m(\Omega)$.

Seja $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$ tal que $\psi(x) = 1$ se $||x|| \leqslant 1$ e $\psi(x) = 0$ se $||x|| \geqslant 2$. Seja $v_k = \psi(x/k)u_k(x)$. Então $v_k \in H^m(\Omega)$ e possui suporte compacto em Ω e tambem converge para u, concluindo assim que $u \in H_0^m(\Omega)$.

4.6 Terceira Etapa

Provaremos um lema antes de contruir a inversa.

Lema 13. Para toda $u \in S(\mathbb{R}^n)$ e $j = 0, 1, 2, \cdots, m-1$ vale

$$\mathcal{F}_1(\gamma_j u)(x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}(it)^j\mathcal{F}(u)(x', t)dt,$$

para $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Demonstração. Como $u = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}u)$, temos:

$$u(x', x_n) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_{\mathbb{R}} e^{i[\langle x', y'\rangle] + x_n y_n}(\mathcal{F}(u))(y'y_n)dy_n dy'.$$

Fazendo

$$w(x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}(it)^j(\mathcal{F}u)(x', t)dt,$$

obtemos

$$\begin{aligned}
(\gamma_j u)(x') &= (D_n^j u)(x', 0) \\
&= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_{\mathbb{R}}(iy_n)^j e^{i\langle x', y'\rangle}(\mathcal{F}u)(y', y_n)dy_n dy' \\
&= (2\pi)^{-(n-1)/2}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i\langle x', y'\rangle}w(y')dy' \\
&= (\mathcal{F}_1^{-1}w)(x'),
\end{aligned}$$

aplicando F_1 no primeiro e no ultimo termo temos o resultado. $\square$

Provaremos que existe uma aplicação linear

$$\Lambda : (S(\Gamma))^m \to H^m(\Omega),$$

contínua relativamente á topologia de $\displaystyle\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma)$, tal que $\gamma\Lambda u = u$ para toda $u \in (S(\Gamma))^m$. Provada essa afirmativa, usamos a densidade de $(S(\Gamma))^m$ em $\displaystyle\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma)$ para estender Λ a este último espaço, sendo essa extensão, linear, contínua e um inversa a direita de γ. Dado $w = (w_0, w_1, \cdots, w_{m-1})$ em $(S(\Gamma))^m$ e para $j = 0, 1, \cdots, m-1$, defina

$$a_j = \int_{\mathbb{R}} t^{2j}(1+t^2)^{-(m+j)}dt$$

e

$$v_j(x) = \frac{1}{(2\pi)^{-1/2}a_j i^j} \frac{(1+||x'||^2)^{m-1/2}}{(1+||x||^2)^{m+j}} x_n^j (\mathcal{F}_i w_j)(x'),$$

sendo $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n$. Fixada a notação, vamos mostrar mais 2 lemas

Lema 14. Para v_j e a_j como definidos anteriormente, valem as segntes propriedades:

1
$$(2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} (it)^j v_j(x', t)dt = (\mathcal{F}_1 w_j)(x').$$

2 Para todo $j = 0, 1, \cdots, m-1$, existe uma constante C que independe de w e de $l = 1, 2, \cdots, m$, tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+||x||^2)^m \left| v_j\left(x', \frac{x_n}{l}\right)\right|^2 dx \leqslant C||w_j||_{H^{m-j-1/2}(\Gamma)}$$

Demonstração. Provaremos primeiro 1. Com efeito

$$\begin{aligned}(2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} (it)^j v_j(x', t)dt &= \frac{(\mathcal{F}_1 w_j)(x')}{a_j} \int_{\mathbb{R}} \frac{t^{2j}(1+||x'||^2)^{m-1/2}}{(1+||x'||^2+t^2)^{m+j}}dt \\ &= \frac{(\mathcal{F}_1 w_j)(x')}{a_j} \int_{\mathbb{R}} \frac{t^{2j}(1+||x'||^2)^{m-1/2}}{[1+t^2/(1+||x'||^2)]^{m+j}} \frac{1}{(1+||x'||^2)^{m+j}}dt.\end{aligned}$$

Fazendo $s = t/(1+||x'||^2)^{1/2}$, temos

$$(2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} (it)^j v_j(x', t)dt = \frac{(\mathcal{F}_1 w_j)(x')}{a_j} \int_{\mathbb{R}} s^{2j}(1+s^2)^{-(m+j)}ds = (\mathcal{F}_1 w_j)(x'),$$

o que conclui a prova de 1.

Agora provaremos 2. Denotando por

$$B_j = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + ||x||^2)^m \left| v_j\left(x', \frac{x_n}{l}\right)\right|^2 dx$$

temos

$$B_j = \frac{2\pi}{a_j^2} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}_1 w_j(x')|^2 (1 + ||x'||^2 + x_n^2)^m \frac{(1 + ||x'||^2)^{2m-1}}{(1 + ||x'||^2 + x_n^2/l^2)^{2(m+j)}} \left(\frac{x_n}{l}\right)^{2j} dx' dx_n.$$

Fazendo $x_n = lt(1 + ||x'||^2)^{1/2}$ temos

$$B_j = \frac{2\pi}{a_j^2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 + ||x'||^2)^{m-j-1/2} |(\mathcal{F}_1 w_j)(x')|^2 dx' \int_{\mathbb{R}} \frac{l(1 + (lt)^2)^m t^{2j}}{(1 + t^2)^{2(m+j)}} dt.$$

Notando que $1 \leqslant l \leqslant m$, resulta

$$\frac{l(1 + (lt)^2)^m}{(1 + t^2)^{m+j}} \leqslant \frac{l[l^2(1 + t^2)]^m}{(1 + t^2)^{m+1}} = \frac{l^{2m+1}}{1 + t^2} \leqslant m^{2m+1},$$

logo

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{l(1 + (lt)^2)^m t^{2j}}{(1 + t^2)^{2(m+j)}} dt \leqslant m^{2m+1} \int_{\mathbb{R}} \frac{t^{2j}}{(1 + t^2)^{m+j}} dt = m^{2m+1} a_j.$$

Com isso obtemos

$$\begin{aligned} B_j &\leqslant \frac{2\pi}{a_j} m^{2m+1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 + ||x'||^2)^{m-j-1/2} |(\mathcal{F}_1 w_j)(x')|^2 dx' \\ &= C ||w_j||^2_{H^{m-j-1/2}(\Gamma)} \end{aligned}$$

com $C = 2\pi m^{2m+1}/a_j$, o que mostra a afirmação. $\square$

Agora iremos definir a candidata a inversa a direita da aplicação traço. Sejam C_{lk} as soluções do sistema linear

$$\sum_{l=1}^{m} C_{lk} l^{j+1} = \delta_{jk},$$

onde

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = k \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Defina $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ dada por

$$\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=1}^{m} C_{lk} v_k(x', x_n/l).$$

Afirmamos que a função

$$\Lambda w = \mathcal{F}^{-1} u\big|_{\Omega}$$

atende a $\gamma\Lambda w = w$ para toda $w \in X$. Pela segunda afirmação do Lema 14, temos que $\mathcal{F}^{-1}u \in H^m(\mathbb{R}^n)$, logo $\Lambda w \in H^m(\Omega)$ e, alem disso,

$$||\Lambda w||_{H^m(\Omega)} \leqslant C||w||_X$$

onde $X = \prod_{j=1}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma)$. Claramente Λ é uma aplicação linear de $(S(\Gamma))^m$ em $H^m(\Omega)$ contínua com a topologia de X. Note que mostrar $\gamma\Lambda w = w$ é equivalente a mostrar $\mathcal{F}_1(\gamma_j\Lambda w) = \mathcal{F}_1 w_j$, para $j = 0, 1, 2, \cdots .m-1$. Assim, pelo Lema 13 temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1(\gamma_j\Lambda w)(x') &= (2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}}(it)^j u(x',t)dt \\
&= (2\pi)^{-1/2}\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=1}^{m} C_{lk}\int_{\mathbb{R}}(it)^j v_k\left(x', t/l\right)dt.
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $s = t/l$ e lembrando da definição dos C_{kl} temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1(\gamma_j\Lambda w)(x') &= (2\pi)^{-1/2}\sum_{k=0}^{m-1}\left\{\sum_{l=1}^{m} C_{lk}l^{j+1}\right\}\int_{\mathbb{R}}(is)^j v_k(x',s)ds \\
&= (2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}}(is)^j v_j(x',s)ds \\
&= (\mathcal{F}_1 w_j)(x').
\end{aligned}$$

Logo, é valido que $\gamma\Lambda w = w$ para todo $w \in (S(\Gamma))^m$, o resultado para funções de X segue diretamente da densidade de $(S(\Gamma))^m$ em X.

Para Ω um aberto regular limitado a topologia se complica consideravelmente em relação ao caso $H^1(\Omega)$. Ao longo da construção veremos que teremos de exigir mais regularidade sobre Ω. Seja Ω um aberto regular limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ e $\mathbf{v}(x)$ a normal unitária que aponta para fora de Γ. Para $1 \geqslant \epsilon > 0$ e $1 \geqslant \delta > 0$ introduzimos as seguintes notações

$$\begin{aligned}
&Q_{\delta\epsilon} = \{(y', y_n) \in \mathbb{R}^n; |y_i'| < \delta, i = 1, 2, \ldots, n-1, -\varepsilon < y_n < \varepsilon\}\\
&Q^+_{\delta\epsilon} = Q_{\delta\epsilon} \cap \{y_n > 0\},\\
&\Sigma_\delta = Q_{\delta\epsilon} \cap \{y_n = 0\}\\
&Q_{11} = Q \text{ e } \Sigma_1 = \Sigma.
\end{aligned}$$

Para podermos usar resultados obtidos no caso R^n_+ precisamos de um sistema de cartas locais $\{(U_1, \phi_1), \ldots, (U_N, \phi_n)\}$ que , Além das propriedades de (17) trocando Q por $Q_{\delta\epsilon}$, verifique que cada ϕ_k^{-1} aplica vetores ortogonais a Σ_δ e do mesmo sentido que o vetor $(0, 0, \ldots, 0, -1)$ do $\mathbb{R}^n$ em vetores ortogonais a $\Gamma \cap U_k$ e com direção externa a Ω. Veremos que um sistema de cartas locais verificando esses requerimentos, será valido que

$$\frac{\partial^m}{\partial y_n^m} v_k(y', 0) = (-1)^m \frac{\partial^m}{\partial \mathbf{v}^m} (\sigma_k u)(\phi_k^{-1}(y', 0))$$

para toda $u \in S(\overline{\Omega})$, $(y', 0) \in \Sigma$ e $m \in \mathbb{N}$ com σ_k e v_k como da construção da topologia do caso $H^1(\Omega)$ Seja $x^* \in \Gamma$, considere uma carta local $\{V, \psi\}$ que contem x^* verificando (42). Assim

$$\psi : V \to Q, \qquad \psi^{-1} : Q \to V$$

é um difeomorfismo de classe C^∞ e verfica

$$\psi(V \cap \Omega) = Q^+, \quad \psi(V \cap \Gamma) = \Sigma, \quad \psi(x^*) = 0.$$

Considere a aplicação $\xi : Q \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$\xi(y', y_n) = \psi^{-1}(y', 0) - y_n \mathbf{v}(\psi^{-1}(y', 0)).$$

Como ψ^{-1} e $\mathbf{v}$ são de classe C^∞ vem que ξ é de classe C^∞. Temos que

$$D\xi(0) = \left(\frac{\partial \xi_i(0)}{\partial y_j}\right)$$

. As $(n-1)$ primeiras colunas dessa matriz formam $(n-1)$ vetores tangentes a Γ em x^* e estes vetores são linearmente independentes pois $\psi^{-1} : \Sigma \to V \cap \Gamma$ é injetiva e de classe C^1. A última coluna da matriz é um vetor ortogonal ao plano tangente determinado em x^*. Portanto as colunas de $D\xi(0)$ formam uma base do $\mathbb{R}^n$ em x^*. Assim a matriz $D\xi(0)$ é ivertivel.Segue do teorema da função inversa que existe um paralelepípedo $Q_{\delta\epsilon}$ de $\mathbb{R}^n$ e uma vizinhança U de x^* tal que $\xi : Q_{\delta\epsilon} \to U$ é um difeomorfismo de classe C^∞. Então (U, ϕ) com $\phi = \xi^{-1}$ é uma carta local para x^* que satisfaz as condições requeridas e pela definição de ξ

temos que $\phi^{-1}(y',0) = \psi^{-1}(y',0)$. Como $x^* \in \Gamma$ é arbitrario e Γ é compacto segue que existe um sistema de cartas locais $\{(U_1,\phi_1),\cdots,(U_N,\phi_N)\}$ para Γ tal que

$$\phi_k : U_k \to Q_{\delta_j\epsilon_j} \quad \text{e} \quad \phi_k^{-1} : Q_{\delta_j\epsilon_j} \to U_k$$

são bijeções C^∞. Tomando $\delta = \min\{\delta_1,\cdots,\delta_N\}$ e $\epsilon = min\{\epsilon_1,\cdots,\epsilon_N\}$ e tomando as restrições em U_j obtemos um sistema de cartas locais $\{(U_1,\phi_1),\cdots,(U_N,\phi_N)\}$ de Γ tal que

$$\begin{cases} \phi_k : U_k \to Q_{\delta\epsilon}, \quad \text{e} \quad \phi_k^{-1} : Q_{\delta\epsilon} \to U_k \\ \text{são bijeções de classe } \ C^\infty. \\ \phi_k(U_k \cap \Omega) = Q^+_{\delta\epsilon}, \quad \phi_k(U_k \cap \Gamma) = \Sigma_\delta \\ \phi_k^{-1}(y',y_n) = \phi_k^{-1}(y',0) - y\mathbf{v}(\phi_k^{-1}(y',0)), \forall (y',y_n) \in Q_{\delta\epsilon}. \\ \text{As condições de compatibilidade são satisfeitas, isto é, se} \\ \qquad\qquad U_k \cap U_l \neq \varnothing \\ \text{então existe um homeomorfismo } J_{kl} \in C^\infty \text{com jacobiano positivo de} \\ \phi_k(U_k \cap U_l) \text{ sobre } \phi_l(U_k \cap U_l) \text{ tal que} \\ \qquad\qquad \phi_l(x) = J_{kl}(\phi_k(x)), \ \forall \ x \in U_k \cap U_l. \end{cases} \tag{22}$$

Agora iremos enunciar o teorema do traço para o caso Ω um aberto regular e limitado do $\mathbb{R}^n$, onde aberto regular atende as condições acima. Sua demonstração pode ser encontrada em [1].

Teorema 35. *Seja Ω um aberto limitado regular do $\mathbb{R}^n$ ou um aberto de classe C^{m+1} e m um inteiro, $m \geqslant 1$. A aplicação γ*

$$\gamma : S(\overline{\Omega}) \to Y$$
$$\gamma(u) = (\gamma_0 u, \cdots, \gamma_{m-1}u),$$

onde $\gamma_j u$ é a restrição da função $\dfrac{\partial^j u}{\partial v^j}$ ao conjunto Γ, prolonga-se por continuidade a uma aplicação linear e contínua, ainda denotada por γ, de $H^m(\Omega)$ sobre $Y = \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}$, cujo núcleo é o espaço $H_0^m(\Omega)$. Tem-se ainda que γ possui uma inversa à direita linear e continua.

Corolário 4. Sejam $u \in L^2(\Omega)$ e Ω um aberto limitado de classe C^{m+1}. Suponha que a extensão por 0 de u ao $\mathbb{R}^n$ $\tilde{u}$ esteja em $H^m(\mathbb{R}^n)$. Então u pertence a $H_0^m(\Omega)$.

Demonstração. Seja (ψ_μ) uma sequencia de funções em $S(\mathbb{R}^n)$ convergente para $\tilde{u}$ em $H^m(\mathbb{R}^n)$. Considere um aberto limitado U do $\mathbb{R}^n$, de classe C^{m+1}, tal que

$$U \subset \overline{\Omega}^c \quad \text{e} \quad \Gamma = \partial\Omega \subset \partial U = \Sigma.$$

Sem perda de generalidade iremos supor que $\psi_\mu(x) = 0$ se $x \in \Sigma - \Gamma$, $\mu = 1, 2, \cdots$. Sendo $(r_\Omega \psi_\mu)$ e $(r_U \psi_\mu)$ sequencias em $S(\overline{\Omega})$ e $S(\overline{U})$, respectivamente, e $r_\Omega \tilde{u} = u$ e $r_U \tilde{u} = 0$, temos as seguintes convergencias:

$$\begin{aligned} r_\Omega \psi_\mu &\to u \;\text{ em }\; H^m(\Omega) \\ r_U \psi_\mu &\to 0 \;\text{ em }\; H^m(U) \end{aligned}$$

portanto, o teorema do traço garante que

$$\begin{aligned} \gamma_j(r_\Omega \psi_\mu) &\to u \;\text{ em } H^{m-j-1/2}(\Gamma) \\ \gamma_j(r_U \psi_\mu) &\to 0 \;\text{ em } H^{m-j-1/2}(\Sigma). \end{aligned}$$

Sendo

$$\gamma_j(r_U \psi_\mu) = \begin{cases} \gamma_j(r_\Omega \psi_\mu) & \text{em } H^{m-j-1/2}(\Gamma) \\ 0 & \text{em } H^{m-j-1/2}(\Sigma) \end{cases}$$

conclui-se que $\gamma_j u = 0$ para $j = 0, 1, \cdots, m-1$, logo $u \in H_0^m(\Omega)$. $\square$

A aplicação traço que nos falamos acima é usada muito mais para provar um resultado de existencia e unicidade do que fornecer soluções explicitas. A principal dificuldade é exibir a aplicação traço em si. Para o caso extremamente simplificado de EDOs de primeira ordem, ou seja, o problema

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

é possivel exibir explicitamente a aplicação traço. Essa é precisamente a distribuição delta de Dirac, pois o problema de bordo se resume a aplicação em um ponto, assim

$$\gamma(u) = \int \delta(x) u(x) dx = u(0).$$

Quando o bordo for um conjunto bem simples tambem é possivel exibir a aplicação traço para o caso de EDPs. Por exemplo a equação de Laplace no semiplano

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \;\; y > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

Nesse caso, a aplicação traço é dada por

$$\gamma(u) = \int \delta(y) u(x, y) dy = u(x, 0).$$

Ambos os problemas tem soluções com requisitos bem mais humildes os que temos aqui, mas em ambos os casos, podemos ver explicitamente a continuidade da aplicação traço.

Observação 3 (Comentarios sobre a aplicação traço)**.** Em diversos modelos fisicos são impostas condições sobre o momento inical do fenomeno ou o bordo do dominio, por exemplo quando estamos trabalhando com fenomenos de difusão isolados, a condição é que a funçõa seja nula no bordo do dominio. Problemas de bordo são consideravelmente mais dificeis do que problemas de Cauchy, visto que o bordo pode ser qualquer curva fechada de classe C^∞. Em muitos casos o operador diferencial pode ser considerado a parte facil do problema em relaçõa a imposição de condições de bordo. Na teoria de séries de Fourier quando estudamos a equação de Laplace no plano com condições iniciais no retângulo, ou seja

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(x,0) = f(x) \quad u(x,b) = 0 \\ u(0,y) = 0 \quad u(a,y) = 0 \end{cases}$$

sabemos que pelo metodo de separação de variaveis, a solução desse problema é dada por

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n sen\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \frac{senh(\frac{n\pi(y-b)}{a})}{senh(\frac{-n\pi b}{a})}$$

onde f_n é o n-ésimo coeficiente de Fourier da função f. Não é bonita mas é uma solução explicita. Por outro lado se formos para problemas de bordo, o proprio metodo de separação de variaveis falha pois as restrições das EDOs que surgem desse passam a ser mais rebuscadas e requer toda uma outra teoria para analisar o comportamento apenas das EDOs que surgem, que é a teoria de Sturm-Liouville. Então é mais comodo modificar o operador. No caso da equação de Laplace com problema de bordo no disco unitario centrado na origem(melhor caso), fazemos a mudança para coodernadas polares e ficamos com

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 \\ u(r,0) = u(r,2\pi) \\ u(c,\theta) = f(\theta). \end{cases}$$

Note que o operador está modificado, mas as condições iniciais foram simplificadas a um problema similar ao anterioir. Então o grande complicador desse problema é a condição de contorno e não o operador diferencial em si.

5 Resolução de EDPs em espaços de Sobolev

Nessa seção iremos resolver o problema

$$(P1)\begin{cases}\Delta u = f \quad \text{em} \quad \Omega\\ u = g \quad \text{em} \quad \partial\Omega\end{cases}$$

Iremos definir o espaço de interesse para as nossas soluções. Seja

$$Y = \{u \in L^2(\Omega); \Delta u \in H^{-1}(\Omega)\},$$

com o produto interno

$$\langle u, v\rangle_Y = \langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \Delta u, \Delta v\rangle_{H^{-1}(\Omega)}$$

Para fixar a notação, quando escrevermos o símbolo

$$\langle K, y\rangle_{X\times Z}$$

estamos nos referindo a aplicação $K(y)$, onde X é igual ou contém o dual de Z. Pelos resultados provados ao longo do texto e do teorema de Riesz temos as seguintes relações

$$S(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \simeq \left(L^2(\Omega)\right)^* \hookrightarrow S^*(\Omega).$$

Nesse contexto, se $f \in L^2(\Omega)$ então $f \in H^{-1}(\Omega)$ e

$$\langle f, v\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} = \langle f, v\rangle_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Tambem, se $f \in H^{-1}(\Omega)$ então

$$\langle f, \phi\rangle_{(S^*(\Omega)\times S(\Omega))} = \langle f, \phi\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}, \quad \forall \phi \in S(\Omega).$$

Teorema 36. *O espaço $S(\overline{\Omega})$ é denso em Y.*

Demonstração. Usaremos o seguinte fato, que segue imediatamente dos corolários do teorema de Hahn-Banach. Se um funcional linear continuo $M : Y \to \mathbb{R}$ atender a $\langle M, \psi\rangle = 0$ para todo ψ em $S(\overline{\Omega})$, implique que ele seja identicamente nulo então $S(\overline{\Omega})$ é denso em Y. Seja $\tilde{M}$ a extensão por 0 de M ao espaço $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$. Pelo teorema da representação de Riesz temos que existem funções $\{f, h\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ tal que

$$\langle \tilde{M}, \xi\rangle = \langle f, \xi_1\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle h, \xi_2\rangle_{H_0^1(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)},$$

para todo $\{\xi_1, \xi_2\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$. Em particular se $u \in Y$ temos

$$\langle M, u\rangle = \langle f, u\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle h, u\rangle_{H_0^1(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}.$$

Sejam $\tilde{f}, \tilde{h}$ as extensões de f e g por 0 no complementar de Ω em $\mathbb{R}^n$. Temos que para $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$

$$\langle \tilde{f} + \Delta\tilde{h}, \psi\rangle = \langle f, \psi\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle h, \Delta\psi\rangle_{H_0^1(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}.$$

Assim, pela hipótese de $\langle M, \psi \rangle = 0$, temos

$$\tilde{f} + \Delta\tilde{h} = 0 \text{ em } S'(\mathbb{R}^n)$$

e como $\tilde{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ então $\Delta\tilde{h} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Pelo Corolário 4 temos que Ω de classe C^3 resulta que $h \in H_0^2(\Omega)$. Assim $\tilde{\Delta h} = \Delta\tilde{h}$. Logo

$$\widetilde{f + \Delta h} = 0,$$

portanto

$$f + \Delta h = 0.$$

Seja (ϕ_μ) uma sequência em $S(\Omega)$ que converge para h em $H_0^2(\Omega)$. Para $u \in Y$, resulta

$$\langle \phi_\mu, \Delta u \rangle_{H_0^1(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} = \langle \phi_\mu, \Delta u \rangle_{S(\mathbb{R}^n) \times S'(\mathbb{R}^n)} = \langle \Delta\phi_\mu, u \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Logo

$$\langle u, \Delta u \rangle_{H_0^1(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} = \langle \Delta h, u \rangle_{L^2}.$$

Assim

$$\langle M, u \rangle = \langle f + \Delta h, u \rangle = 0$$

para todo $u \in Y$, o que resulta em $M = 0$. □

Seja T a aplicação inversa do teorema do traço que associa

$$\{0, w\} \to v, \quad H^{3/2} \times H^{1/2} \to H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Pelo teorema do traço ela é continua. Para todo $u \in Y$ e $w \in H^{1/2}(\Gamma)$ considere a função Su dada por

$$\langle Su, w \rangle = \langle u, \Delta Tw \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle \Delta u, Tw \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)}.$$

Tem-se que Su é uma forma linear em $H^{1/2}$ para cada $u \in Y$. Afirmamos que Su é continua. Note que

$$\begin{aligned}
|\langle Su, w \rangle| &\leqslant |u||\Delta Tw| + ||\Delta u||_{H^{-1}(\Omega)}||Tw|| \\
&\leqslant \left(|u|^2 + ||\Delta u||^2_{H^{-1}(\Omega)}\right)^{1/2} \left(|\Delta Tw|^2 + ||Tw||^2\right)^{1/2} \\
&\leqslant ||u||_Y ||Tw||_{H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)} \\
&\leqslant ||T|| \cdot ||u||_Y \cdot ||w||_{H^{1/2}(\Gamma)}.
\end{aligned}$$

Logo $Su \in H^{-1/2}(\Gamma)$. Além disso

$$||Su||_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leqslant C||T|| \cdot ||u||_Y.$$

Agora tome $u \in S(\overline{\Omega})$ e $w \in H^{1/2}(\Gamma)$ sendo $v = Tw \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Pela formula de Green, temos

$$\langle \gamma_0 u, \gamma_1 v \rangle = \langle u, \Delta v \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle \Delta u, v \rangle_{L^2(\Omega)}$$

e γ_0 em $S(\overline{\Omega})$ é uma forma linear continua com a norma de Y. Sendo $S(\overline{\Omega})$ denso em Y, resulta que γ admite um única extensão continua definida em Y que iremos tambem denotar por γ_0. Essa extenxão é o traço de ordem 0 em Y. Sendo $v = Tw$ temos

$$\langle \gamma_0 u, w\rangle = \langle u, \Delta Tw\rangle_{L^2(\Omega)} - \langle \Delta u, Tw\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}$$

assim para todo $u \in Y$ tem-se $\gamma_0 u \in H^{-1/2}(\Gamma)$. Isso resulta no seguinte teorema.

Teorema 37. *A aplicação linear*

$$u \in Y \mapsto \gamma_0 u \in H^{-1/2}(\Gamma)$$

é continua e vale a formula de Green

$$\langle \gamma_0 u, \gamma_1 v\rangle = \langle u, \Delta v\rangle_{L^2(\Omega)} - \langle \Delta u, v\rangle$$

para toda v em $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Agora iremos resolver (P1). Uma dificuldade inicial é definir uma solução fraca para o problema. Para isso vamos aplicar inicalmente tome a equação

$$-\Delta uv = vf$$

agora aplique teorema de Green na equação (integrar por partes com integrais vetoriais)

$$\int_\Omega (-\Delta u)v = \int_\Omega u(-\Delta v)dx = -\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial y} v d\Gamma + \int_\Gamma u\frac{\partial v}{\partial y} d\Gamma.$$

Agora considerando (P1) temos

$$\int_\Omega u(-\Delta v)dx = \int_\Omega fvdx - \int_\Gamma g\frac{\partial v}{\partial y} d\Gamma + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial v} v d\Gamma.$$

Como não temos nenhuma informação sobre u_v restrita a Γ então iremos supor que $v \in S(\Omega)$, logo

$$\int_\Omega u(-\Delta v)dx = \int_\Omega fvdx - \int_\Gamma g\frac{\partial v}{\partial y} d\Gamma.$$

Para o primeiro termo da integral iremos considerar $u \in L^2(\Omega)$ e $\Delta v \in L^2(\Omega)$, assim temos que $v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Disto temos que $\gamma_1 v \in H^{1/2}(\Gamma)$. Portanto, no termo $\int_\Gamma g\frac{\partial v}{\partial y} d\Gamma$ pode-se escolher $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$. Do exposto acima vem

$$\langle u, -\Delta v\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f, v\rangle - \langle g, \gamma_1 v\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma)\times H^{1/2}(\Gamma)}, \quad \forall\ v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Falta especificar em que espaço f precisa estar. Como $v \in S(\Omega)$ resulta

$$\langle -\Delta u, v\rangle = \langle f, v\rangle.$$

Então (P1) com $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$ terá sentido, isto é, $\gamma_0 u \in H^{-1/2}(\Gamma)$, se por exemplo $f \in H^{-1}(\Omega)$. Assim somos motivados a seguinte definição. Sejam

$$f \in H^{-1}(\Omega) \ \text{ e } \ g \in H^{-1/2}(\Gamma).$$

Uma função $u \in L^2(\Omega)$ que verifica

$$\langle u, -\Delta v\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f, v\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} - \langle g, \gamma_0 v\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma)\times H^{1/2}(\Gamma)} \ \ \forall\, v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \tag{23}$$

é denominada uma *solução definida por transposição* de (P1). Iremos dividir a análise da existencia de soluções em três casos, segundo os espaços de Sobolev onde serão tomadas f e g.

Caso 1. Suponha que $f \in H^{-1}(\Omega)$ e $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$. Temos o seguinte resultado

Teorema 38. *Para cada par $\{f, g\}$ pertencente a $H^{-1}(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)$, existe um único $u \in L^2(\Omega)$, solução de (P1) definida por transposição. Tem-se, ainda mais, que a aplicação linear*

$$\{f, g\} \in H^{-1}(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma) \to u \in L^2(\Omega)$$

é contínua e injetora. Também, u é solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f \ \text{ em } H^{-1}(\Omega) \\ u = g \ \text{ em } H^{-1/2}(\Gamma). \end{cases}$$

Demonstração. A aplicação linear

$$-\Delta : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$$

é bijetora. Tambem ela é uma isometria, pois

$$||u||_{H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)} = ||\Delta u||_{L^2}$$

onde estamos considerando o espaço $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ com o produto escalar $\langle \Delta u, \Delta v\rangle_{L^2(\Omega)}$. Daí, o adjunto $(-\Delta)^*$ de $-\Delta$, definido por

$$(\Delta)^* : L^2(\Omega) \to (H^2 \cap H_0^1(\Omega))' \langle (-\Delta)^* u, v\rangle = \langle u, -\Delta v\rangle_{L^2(\Omega)}, \quad \forall\, v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

é, igualmente, uma isometria bijetora. Considere $L \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))'$, definido por

$$\langle L, v\rangle = \langle f, v\rangle - \langle g, \gamma_1 v\rangle, \ v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

sendo γ_1 o traço de ordem um em $H^2(\Omega)$. Assim temos que existe um único $u \in L^2(\Omega)$ tal que $(-\Delta)^* u = L$. Equivalentemente, temos que existe um único $u \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\langle L, v\rangle = \langle (-\Delta)^* u, v\rangle, \quad \text{para todo } v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Concluímos que

$$\langle u, -\Delta v\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f, v\rangle - \langle g, \gamma_1 v\rangle$$

para todo $v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, isto é, u é solução definida por transposição do (P1) e a unicidade segue da aplicação ser bijetora. Note que $-\Delta u = f$ em $H^{-1}(\Omega)$, pois basta tomar $v \in S(\Omega)$ na última igualdade. Afirmamos que $\gamma_0 u = g$ em $H^{-1/2}(\Gamma)$. Com efeito, como $u \in L^2(\Omega)$ e $\Delta u \in H^{-1}(\Omega)$, do Teorema 33 que $\gamma_0 u \in H^{-1/2}(\Gamma)$ e é válida a formula de Green

$$\langle \gamma_0 u, \gamma_1 v\rangle = \langle u, \Delta v\rangle_{L^2(\Omega)} - \langle \Delta u, v\rangle, \quad \forall\ v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Por outro lado, temos

$$\langle g, \gamma_1 v\rangle = \langle u, \Delta v\rangle_{L^2(\Omega)} - \langle \Delta u, v\rangle, \quad v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

As duas últimas igualdade provam o desejado. Agora irmos provar a continuidade da aplicação

$$\{f, g\} \in H^{-1}(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma) \to u \in L^2(\Omega)$$

u solução de (P1) definido em (21). Sejam $h \in L^2(\Omega)$ e v tais que

$$\begin{cases} -\Delta v = h \text{ em } \Omega \\ v|_\Gamma = 0. \end{cases}$$

Então $v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e

$$||v||_{H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)} \leqslant C||h||_{L^2}.$$

Além disso temos

$$\langle u, h\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f, v\rangle - \langle g, \gamma_1 v\rangle.$$

Logo

$$|\langle u, h\rangle| \leqslant ||f||_{H^{-1}(\Omega)}||v||_{H_0^1(\Omega)} + ||g||_{H^{-1/2}(\Gamma)}||\gamma_1 v||_{H^{1/2}(\Gamma)}.$$

isso nos da que

$$|\langle u, h\rangle| \leqslant C\left[||f||^2_{H^{-1}(\Omega)} + ||g||^2_{H^{-1/2}(\Gamma)}\right]^{1/2}|h|,$$

logo

$$|u|_{L^2(\Omega)} \leqslant C\left[||f||^2_{H^{-1}(\Omega)} + ||g||^2_{H^{-1/2}(\Gamma)}\right]^{1/2}$$

provando a continuidade da aplicação. □

Como consequência da prova acima, obtemos o seguinte resultado

Corolário 5. A aplicação linear

$$\{f, g\} \in H^{-1}(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma) \to u \in Y,$$

(u dado na proposição anterior) é contínua e bijetiva.

Da unicidade das soluções definidas por transposição, os problemas (P1) com $f \in H^{-1}(\Omega)$ e $g \in H^{-1/2}(\Omega)$ e encontrar uma função u que satisfaz (21) são equivalentes.

Caso 2 Considere $f \in H^{-1}(\Omega)$ e $g \in H^{1/2}(\Gamma)$. Nesse caso iremos definir uma solução de (P1) uma função $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$(P2)\begin{cases}\langle u, v\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \langle f, v\rangle \text{ para todo } v \in H_0^1\Omega \\ \gamma_0 u = g \text{ em } H^{1/2}(\Gamma)\end{cases}$$

Iremos provar a existência, unicidade e dependência contínua da condição inicial, como no caso 1. Considere a função

$$T : H^{1/2}(\Gamma) \to H^1(\Omega)$$

tal que $Tg = w$ sendo $\gamma_0 w = g$ com γ_0 o traço em $H^1(\Omega)$. Daí resulta que o problema

$$\begin{cases} z \in H_0^1(\Omega) \\ \langle z, v\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \langle f, v\rangle - \langle w, v\rangle_{H_0^1(\Omega)} \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega)\end{cases} \tag{24}$$

admite solução e é única. Tomando $u = z + w$ pertencente a $H^1(\Omega)$ é solução de (P2). Tambem

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ em } H^{-1}(\Omega) \\ \gamma_0 u = g \text{ em } H^{1/2}(\Gamma).\end{cases}$$

A unicidade segue análoga ao caso anterior. Resta provar a dependência continua. Considere duas sequencias de funções $f_\mu \in H^{-1}(\Omega)$ e $g_\mu \in H^{1/2}(\Gamma)$,respectivamente convergentes para f e g em seus espaços. Tem-se $Tg_\mu = w_\mu \to Tg$ em $H^1(\Omega)$. Seja z_μ solução de (22) correspondente ao par $\{f_\mu, g_\mu\}$. Então para $\mu, \tau \in \mathbb{N}$, obtemos

$$\langle z_\mu - z_\tau, v\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \langle f_\mu - f_\tau, v\rangle - \langle w_\mu - w_\tau, v\rangle_{H_0^1(\Omega)}, \quad \forall\ v \in H_0^1(\Omega).$$

Considerando $v = z_\mu - z_\tau$ em $H_0^1(\Omega)$, segue

$$||z_\mu - z_\tau||^2_{H_0^1(\Omega)} \leqslant ||f_\mu - f_\tau||_{H^{-1}(\Omega)}||z_\mu - z_\tau||_{H_0^1(\Omega)} + ||w_\mu - w_\tau||_{H^1(\Omega)}||z_\mu - z_\tau||_{H_0^1(\Omega)}.$$

Daí resulta que (z_μ) é de Cauchy em $H_0^1(\Omega)$. Logo converge para $z \in H_0^1(\Omega)$ e

$$\langle z, v\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \langle f, v\rangle - \langle w, v\rangle_{H_0^1(\Omega)}, \quad \text{para cada } v \in H_0^1.$$

Portanto, $u_\mu = z_\mu + w_\mu \to u = z + w$ em $H^1(\Omega)$, provando que a aplicação linear

$$\{f, g\} \in H^{-1}(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma) \to u \in H^1(\Omega),$$

sendo u solução de (P2), é continua. Do exposto no Caso 2, temos

Teorema 39. *A aplicação linear*

$$\{f, g\} \in H^{-1}(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma) \to u \in H^1(\Omega) \tag{25}$$

u solução de (P2), é continua e bijetora. Tambem u é solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & em\ H^{-1}(\Omega) \\ \gamma_0 u = g & em\ H^{1/2}(\Gamma) \end{cases}$$

Caso 3 Neste caso examina-se a solução de (P1) quando $f \in H^{-1}(\Omega)$ e $g \in H^{\alpha}(\Gamma)$, sendo $-1/2 < \alpha < 1/2$. O método consiste em aplicar resultados de interpolação de espaços de Sobolev aos espaços obtidos nos teoremas 35 e 36. Considere então as aplicações lineares bijetoras

$$\{f, g\} \in H^{-1}(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma) \to u \in L^2(\Omega)$$
$$\{f, g\} \in H^{-1}(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma) \to u \in H^1(\Omega)$$

onde u é solução de (P1). Iremos usar o método de interpolação de espaços de Sobolev. Ele é uma consequência imediata do teorema de Riez-thorin, iremos enuncia-lo abaixo, mas sua demonstração pode ser encontrada em [12]

Teorema 40. *Seja uma função linear T entre os espaços de medida (X, μ) e (Y, η). Considere $p_0, q_0, p_1, q_1 \in [0, \infty)$ tais que*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1} \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}$$

com $t \in (0, 1)$. Suponha que T leva $L^{p_0}(\mu) + L^{p_1}(\mu)$ em $L^{q_0}(\eta) + L^{q_1}(\eta)$ e $||Tf||_{L^{q_0}} \leqslant M_0 ||f||_{L^{p_0}}$ para $f \in L^{p_0}$ e $||Tf||_{L^{q_1}} \leqslant M_1 ||f||_{L^{p_1}}$ para $f \in L^{p_1}$. Então T é limitado em L^p e $||Tf||_q \leqslant M_0^{1-t} M_1^t ||f||_p$ para toda $f \in L^p$.

Teorema 41. *Suponha que $s_0 \leqslant s_1$, $0 < \theta < 1$ e o conjunto $s = s_0(1-\theta) + s_1\theta$. Então*

$$H^s(\Omega) \subset (H^{s_0}, H^{s_1})_\theta = \{f \in H^{s_0}(\Omega) + H^{s_1}(\Omega); f \in H^s(\Omega)\}.$$

Além disso, se existirem $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 1$ tais que o operador extensão $\varepsilon : H^{s_0}(\Omega) \to H^{s_0}(\mathbb{R}^n)$ atende a

$$||\varepsilon u||_{H^{s_i}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \lambda_i ||u||_{H^{s_i}(\Omega)}$$

para $u \in H^{s_1}(\Omega)$ e $j = 0, 1$, então $H^s(\Omega) = (H^{s_0}, H^{s_1})_\theta$.

Assim, pelo teorema anterior

$$[H^{1/2}(\Gamma), H^{-1/2}(\Gamma)]_\theta = H^{(1-\theta)1/2 - 1/2(\theta)(\Gamma)} = H^{(1/2)-\theta}(\Gamma),\ 0 \leqslant \theta \leqslant 1.$$

Fazendo $1/2 - \theta = \alpha$, obtemos $-1/2 \leqslant \alpha \leqslant 1/2$. De forma analoga

$$[H^1(\Omega), L^2(\Omega)]_\theta = H^{1-\theta}(\Omega) = H^{(1/2)+\alpha}(\Omega).$$

Note que $L^2(\Omega) = H^0(\Omega)$. Assim temos que a aplicação linear

$$\{f, g\} \in H^{-1}(\Omega) \times H^{\alpha}(\Gamma) \to u \in H^{(1/2)+\alpha}(\Omega), \quad -1/2 \leqslant \alpha \leqslant 1/2,$$

é continua e injetora, sendo u a unica solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega \\ u = g & \text{em } \Gamma \end{cases}$$

análise da Aplicação Traço γ_0
Por interpolação de espaços resulta:

$$[H^{-1}(\Omega) \times H^{1/2(\Gamma)}, H^{-1}(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)]_{(1/2)-\alpha} = H^{-1}(\Omega) \times H^{\alpha}(\Gamma), \ -1/2 \leqslant \alpha \leqslant 1/2$$

e

$$[H^1(\Omega), Y]_{(1/2)-\alpha} = Y_\alpha, \quad -1/2 \leqslant \alpha \leqslant 1/2$$

onde

$$Y_\alpha = \{u \in H^{(1/2)+\alpha}(\Omega); \Delta u \in H^{-1}(\Omega)\},$$

com produto interno

$$\langle u, v \rangle_{Y_\alpha} = \langle u, v \rangle_{H^{1/2+\alpha}(\Omega)} + \langle \Delta u, \Delta v \rangle_{H^{-1}(\Omega)}.$$

Destes dois resultados de interpolação e aplicando o Teorema do Gráfico Fechado a aplicação inversa de (23) com $u \in Y_\alpha$, vem que a aplicação traço γ_0:

$$u \in Y_\alpha \to \gamma_0 u \in H^{\alpha}(\Gamma), \qquad -1/2 \leqslant \alpha \leqslant 1/2$$

é continua. Do caso 3, obtemos

Teorema 42. *A aplicação linear*

$$\{f, g\} \in H^{-1}(\Omega) \times H^{\alpha}(\Gamma) \to u \in Y_\alpha, \quad -1/2 \leqslant \alpha \leqslant 1/2$$

onde u é solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & em\ \Omega \\ u = g & em\ \Gamma \end{cases}$$

é continua e bijetora. A aplicação linear, traço γ_0:

$$u \in Y_\alpha \to \gamma_0 u \in H^{\alpha}(\Gamma), \qquad -1/2 \leqslant \alpha \leqslant 1/2$$

é cotinua.

Corolário 6. Em $Y_\alpha, -1/2 \leqslant \alpha \leqslant 1/2$, os produtos escalares

$$\langle u, v \rangle_{Y_\alpha} = \langle u, v \rangle_{H^{1/2+\alpha}(\Omega)} + \langle \Delta u, \Delta v \rangle_{H^{-1}(\Omega)}$$

e

$$\langle\langle u, v \rangle\rangle_{Y_\alpha} = \langle \gamma_0 u, \gamma_0 v \rangle_{H^{\alpha}(\Gamma)} + \langle \Delta u, \Delta v \rangle_{H^{-1}(\Omega)}$$

proporcionam normas equivalentes.

Demonstração. Da continuidade da primeira aplicação do teorema 40, obtemos

$$||u||_{Y_\alpha}^2 \leqslant C\left[||\Delta u||_{H^{-1}(\Omega)}^2 + ||\gamma_0 u||_{H^\alpha(\Gamma)}^2\right] = C\langle\langle u, u\rangle\rangle_{Y_\alpha} = |||u|||_{Y_\alpha}^2.$$

Também, da continuidade do traço γ_0 dado no teorema 40, resulta

$$||\gamma_0 u||_{H^\alpha(\Gamma)}^2 \leqslant C\left[||u||_{H^{1/2+\alpha}(\Omega)}^2 + ||\Delta u||_{H^{-1}(\Omega)}^2\right] = ||u||_{Y_\alpha}^2$$

portanto

$$|||u|||_{Y_\alpha}^2 \leqslant (C+1)||u||_{Y_\alpha}^2.$$

Aqui $C > 0$ denota uma constante que independe de u. A primeira e a terceira desigualdade acarretam o corolário. $\square$

Referências

[1] Medeiros,L.A.; Mirando, M.Milla, Espaços de Sobolev: Iniciação aos Problemas Elíticos não Homogêneos, UFRJ, Rio de Janeiro, 2019.

[2] Araújo, E.L. ,O problema de Cauchy para a equação de Korteweg-de Vries em espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$, com $s > -3/4$, Dissertação(Mestrado em matemática),Unicamp, 2004

[3] Brezis, Haim, Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations, Springer, New York, 2011.

[4] Oliveira, César R. de, Introdução á análise funcional, IMPA, Rio de Janeiro, 2015.

[5] Gondar, J. López, R. Cipolatti, Iniciação à física Matemática: Modelagem de Processos e Métodos de Solução

[6] Isnard, Carlos, Introdução á medida e integração, IMPA, Rio de Janeiro, 2013.

[7] Figueiredo, Djairo Guedes de, Análise de Fourier e equações diferenciais parciais, IMPA, Rio de Janeiro, 1977.

[8] LIMA, Elon Lages, Curso de análise - Volume 2. Coleção Euclides, IMPA, 2015

[9] LIMA, Elon Lages, Espaços métrico. Coleção Euclides, IMPA, 2020

[10] Conway, John B., Functions of one complex variable, Springer, New York, 1978.

[11] MathMIT,Disponivel em :https://math.mit.edu/ rbm/18-155-F17/Chapter3.pdf, Acesso: 06 abril. 2021

[12] Bernard, Calista,Interpolation theorems and applications Disponivel em :http://math.uchicago.edu/ may/REU2013/REUPapers/Bernard.pdf, Acesso: 06 abril. 2021