



INSTITUTO DE FÍSICA  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

GRAÇA REGINA MATA DE ALMEIDA

**Correlações do tipo dímero aleatório em  
caminhadas quânticas em tempo discreto  
desordenadas**

Maceió, 2022



GRAÇA REGINA MATA DE ALMEIDA

Correlações do tipo dímero aleatório em caminhadas  
quânticas em tempo discreto desordenadas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física, da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestra em Física.

Orientador: Wandearley da Silva Dias

Maio de 2022

**Catálogo na Fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

A447c Almeida, Graça Regina Mata de.

Correlações do tipo dímero aleatório em caminhadas quânticas em tempo discreto desordenadas / Graça Regina Mata de Almeida. – 2022.  
48 f. : il. color.

Orientador: Wanderley da Silva Dias.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Física. Maceió, 2022.

Bibliografia: f. 44-48.

1. Caminhadas quânticas. 2. Desordem temporal. 3. Anderson, Modelo de. I. Título.

CDU: 530.145



**Universidade Federal de Alagoas**  
**Instituto de Física**  
Programa de Pós Graduação em Física

BR 104 km 14. Campus A.C. Simões  
Cidade Universitária  
Tabuleiro dos Martins  
57072-970 Maceió - AL, Brasil  
FONE : (82) 3214-1423

**PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE**  
**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

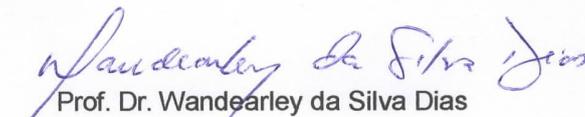
**“Correlações do tipo dímero aleatório em caminhadas quânticas em  
tempo discreto desordenadas”**

**por**

**Graça Regina Mata Almeida**

A Banca Examinadora composta pelos professores Wandearley da Silva Dias (orientador e presidente da banca), do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas; Marcelo Leite Lyra, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas; Guilherme Martins Alves de Almeida, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas e Bruno de Oliveira Chagas, da *National University of Ireland Galway*, consideram a candidata aprovada com grau “A”.

Maceió, 09 de março de 2022.

  
Prof. Dr. Wandearley da Silva Dias

  
Prof. Dr. Marcelo Leite Lyra

  
Prof. Dr. Guilherme Martins Alves de Almeida

  
Prof. Dr. Bruno de Oliveira Chagas

## RESUMO

As caminhadas quânticas têm sido investigadas devido a sua aplicabilidade na modelagem de computadores quânticos. Esses computadores utilizam qubits como unidades de informação e podem ser melhores que os computadores atuais para certas tarefas, como por exemplo a simulação de sistemas físicos. Devido a sua escala e necessidade de precisão, é importante saber como a presença de ruídos nesses dispositivos interfere na velocidade de transporte da informação. Assim, investigamos caminhadas quânticas com a presença de desordem. Essa desordem pode ser invariante no tempo, mas variar no espaço, como também o contrário: uma desordem invariante no espaço mas que varia no tempo. No primeiro caso a literatura relata a ocorrência da localização de Anderson, enquanto que no segundo o regime da caminhada se torna difusivo. Investigamos numericamente esses dois casos com o acréscimo de uma correlação do tipo dímero aleatório. Os resultados obtidos mostram que a presença da correlação leva a caminhada a um regime superdifusivo em ambos os tipos de desordem.

**Palavras-chave:** <Caminhadas quânticas>, <desordem>, <correlações>, <localização de Anderson>.

## ABSTRACT

Quantum walks have been investigated due to their applicability in modeling quantum computers. These computers use qubits as units of information and may be better than current computers for certain tasks, such as simulating physical systems. Due to its scale and need for precision, it is important to know how the presence of noise in these devices interferes with the speed of information transport. Thus, we investigated quantum walks with the presence of disorder. This disorder can be invariant in time, but vary in space, as well as the opposite: a disorder invariant in space but which varies in time. In the first case, the literature reports the occurrence of Anderson localization, while in the second, the walking regime becomes diffuse. We numerically investigate these two cases with the addition of a random dimer type correlation. The results obtained show that the presence of the correlation leads the walk to a superdiffusive regime in both types of disorder.

**Key-words:** <Quantum walks>, <disorder>, <correlations>, <Anderson localization>.

## LISTA DE FIGURAS

1	Probabilidade $P(n)$ de encontrar o caminhante na posição $n$ em uma caminhada clássica aleatória de 100 passos com $p = q = 0,5$ . A curva foi obtida pela média de 100.000 caminhantes. No gráfico pequeno incluído na figura temos a evolução temporal do desvio padrão. . . . .	13
2	Representação da diferença entre os caminhantes no caso clássico em (a), quando a partícula assume uma única posição a cada instante, e no caso quântico em (b), quando a função de onda do caminhante pode estar em várias posições a cada instante. . . . .	15
3	Representação da esfera de Bloch de raio 1. Os ângulos $\theta$ e $\varphi$ determinam um ponto nessa esfera que representa o estado $\psi$ do qubit. . . . .	16
4	Distribuição de probabilidade $ \psi_n ^2$ de encontrar o caminhante na posição $n$ em uma caminhada quântica de tempo discreto realizada com o operador moeda Hadamard para 100 passos e condição inicial $ \psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}( 0\rangle + i 1\rangle)$ . No gráfico pequeno inserido na figura temos a evolução temporal do desvio padrão. . . . .	17
5	Representação da diferença entre os caminhantes no caso clássico em (a), quando a partícula assume uma única posição a cada instante, e no caso quântico em (b), quando a função de onda do caminhante pode estar em várias posições a cada instante. . . . .	18
6	Representação de uma rede bidimensional com diferentes estruturas: uma rede cristalina periódica em (a), uma rede desordenada devido a presença de íons diferentes em (b) e uma rede desordenada devido a presença de lacunas e a diferentes distâncias entre os íons em (c). . . . .	21
7	Representação da função de onda do elétron para os casos com desordem utilizando o modelo de Bloch. (a) Para desordem suficientemente fraca, a função de onda permanece estendida, porém perde coerência de fase. (b) Para um grau de desordem forte, a função de onda fica localizada exponencialmente em torno da posição inicial. . . . .	22
8	Densidade de probabilidade de uma caminhada quântica espacialmente desordenada. Em (a) temos o resultados obtido experimentalmente em (SCHEREIBER et al, 2011) para uma caminhada de 11 passos, enquanto que em (b) temos o resultado obtido através de uma simulação numérica. Em (c) temos o desvio padrão para 10.000 passos. A curva preta é o desvio padrão obtido para o caso de uma caminhada ordenada com $\theta = 45^\circ$ . . . . .	24
9	Gráficos do expoente $\alpha$ para diferentes sequências de distribuição espacial do operador moeda. O ângulo $\theta_1$ foi fixado em $45^\circ$ . A linha preta tracejada representa o valor de $\alpha$ do caso clássico. . . . .	25

10	Densidade de probabilidade de uma caminhada quântica temporalmente desordenada. Em (a) temos o resultados obtido experimentalmente em (SCHEREIBER et al, 2011) para uma caminhada de 11 passos, enquanto que em (b) temos o resultado obtido através de uma simulação numérica. Em (c) temos o desvio padrão para 10.000 passos. A curva preta é o desvio padrão obtido para o caso de uma caminhada ordenada com $\theta = 45^\circ$ . . . . .	27
11	Gráfico do expoente $\alpha$ para diferentes combinações de operadores moeda distribuídos temporalmente utilizando uma sequência de Fibonacci. . . . .	28
12	Gráficos do expoente $\alpha$ para diferentes sequências de distribuição temporal do operador moeda. O ângulo $\theta_1$ foi fixado em $45^\circ$ . A linha preta tracejada representa o valor de $\alpha$ do caso clássico. . . . .	28
13	Representação dos tipos de caminhadas quânticas em tempo discreto investigadas: a) espacialmente desordenada, b) espacialmente correlacionada, c) temporalmente desordenada e d) temporalmente correlacionada. . . . .	31
14	Densidade de probabilidade para o caso desordenado espacial (em azul) e para o caso com correlação tipo dímero (em vermelho) quando $\theta_2 = 45^\circ$ . A linha preta representa a localização exponencial do caso desordenado. Os ângulos utilizados para $\theta_1$ foram: (a) $0^\circ$ ; (b) $30^\circ$ ; (c) $48^\circ$ ; (d) $60^\circ$ . . . . .	32
15	Densidade de probabilidade para o caso desordenado espacial (em azul) e para o caso com correlação tipo dímero (em vermelho) quando $\theta_2 = 60^\circ$ . A linha preta representa a localização exponencial do caso desordenado. Os ângulos utilizados para $\theta_1$ foram: (a) $0^\circ$ ; (b) $30^\circ$ ; (c) $48^\circ$ ; (d) $64^\circ$ . . . . .	34
16	Evolução do desvio padrão para o caso com desordem espacial (azul) e correlação (vermelho) quando $\theta_2 = 45^\circ$ . A linha tracejada preta é referente a CQO com $\theta = 45^\circ$ mostrada na figura 4. Os valores de $\theta_1$ utilizados foram: (a) $0^\circ$ , (b) $30^\circ$ , (c) $48^\circ$ e (d) $60^\circ$ . . . . .	35
17	Evolução do desvio padrão para o caso com desordem espacial (azul) e correlação (vermelho) quando $\theta_2 = 60^\circ$ . A linha tracejada preta é referente a CQO com $\theta = 45^\circ$ mostrada na figura 4. Os valores de $\theta_1$ utilizados foram: (a) $0^\circ$ , (b) $30^\circ$ , (c) $48^\circ$ e (d) $64^\circ$ . . . . .	36
18	Expoente $\alpha$ de $t$ proporcionais aos quais $\sigma(t)$ cresce para diferentes valores de $\theta_2$ : (a) $30^\circ$ , (b) $45^\circ$ , (c) $48^\circ$ e (d) $60^\circ$ . As curvas em azul são o caso desordenado espacialmente e as curvas em vermelho o caso correlacionado. A linha preta tracejada representa o valor de $\alpha$ no caso da caminhada clássica aleatória. . . . .	37
19	Densidade de probabilidade em $t = 10^4$ para o caso desordenado temporal (em azul) e para o caso com correlação tipo dímero (em vermelho) quando $\theta_2 = 45^\circ$ . Os valores de $\theta_1$ investigados foram: (a) $0^\circ$ , (b) $30^\circ$ , (c) $48^\circ$ e (d) $60^\circ$ . . . . .	38

20	Densidade de probabilidade em $t = 10^4$ para o caso desordenado temporal (em azul) e para o caso com correlação tipo dímero (em vermelho) quando $\theta_2 = 60^\circ$ . Os valores de $\theta_1$ investigados foram: (a) $0^\circ$ , (b) $30^\circ$ , (c) $48^\circ$ e (d) $64^\circ$ . . . . .	39
21	Evolução do desvio padrão para o caso com desordem espacial (azul) e correlação (vermelho) quando $\theta_2 = 45^\circ$ . A linha tracejada preta é referente a CQO com $\theta = 45^\circ$ . Os valores de $\theta_1$ utilizados foram: (a) $0^\circ$ , (b) $30^\circ$ , (c) $48^\circ$ e (d) $60^\circ$ . . . . .	40
22	Evolução do desvio padrão para o caso com desordem temporal (azul) e correlação (vermelho) quando $\theta_2 = 60^\circ$ . A linha tracejada preta é referente a CQO com $\theta = 45^\circ$ . Os valores de $\theta_1$ utilizados foram: (a) $0^\circ$ , (b) $30^\circ$ , (c) $48^\circ$ e (d) $64^\circ$ . . . . .	41
23	Expoente $\alpha$ de $t$ proporcionais aos quais $\sigma(t)$ cresce para diferentes valores de $\theta_2$ : (a) $45^\circ$ , (b) $48^\circ$ e (c) $60^\circ$ . As curvas em azul são o caso desordenado temporalmente e as curvas em vermelho o caso correlacionado. A linha preta tracejada representa o valor de $\alpha$ no caso da caminhada clássica aleatória. . . . .	42

## Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>Fundamentação Teórica</b>	<b>13</b>
2.1	Caminhada clássica aleatória . . . . .	13
2.2	Caminhada quântica em tempo discreto . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Caminhadas Quânticas Desordenadas</b>	<b>20</b>
3.1	Localização de Anderson . . . . .	21
3.2	Caminhadas quânticas com desordem espacial . . . . .	23
3.3	Caminhadas quânticas com desordem temporal . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Correlações tipo dímero aleatório em caminhadas quânticas desordenadas</b>	<b>30</b>
4.1	Modelo . . . . .	30
4.2	Desordem Espacial . . . . .	32
4.3	Desordem Temporal . . . . .	37
<b>5</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>43</b>
	<b>Referências</b>	<b>43</b>

# 1 Introdução

Sugeridos pela primeira vez em uma palestra dada por Feynmann na década de 80 (FEYMANN, 1985) os computadores quânticos já começaram a ser uma realidade, com computadores como os do google (GOOGLE), ibm (IBM) e dwave (D-WAVE) em funcionamento.

A proposta desses computadores é substituir a sequência de operações lógicas binárias dos computadores clássicos atuais por operações que respeitem as leis da mecânica quântica. Assim, diferente do que ocorre em um computador clássico, temos fenômenos quânticos como a superposição de estados, o emaranhamento e a interferência influenciando os resultados desses cálculos, podendo torná-los mais rápidos (DEUTSCH, 1992).

Assim como os computadores clássicos, que funcionam através do uso de algoritmos para a execução de uma tarefa, a busca pela elaboração e aperfeiçoamento do computador quântico faz surgir o interesse por algoritmos que explorem suas propriedades. Neste momento se faz presente o estudo das caminhadas quânticas, que são apontadas como ferramenta universal para a computação quântica (NIELSEN; CHUANG, 2010), (SENECAS-ANDRACA, 2012), (CHILDS, 2009).

Um dos primeiros artigos, senão o primeiro, envolvendo as caminhadas quânticas (um análogo quântico para as caminhadas clássicas) foi apresentado por Aharonov (AHARONOV; DAVIDOVICH; ZAGURY, 1993). Nesse artigo, os autores mostraram que devido a interferência quântica, o desvio padrão da caminhada quântica aumenta quadraticamente mais rápido quando comparado com o desvio padrão da caminhada clássica. Essa possibilidade de aumento de velocidade na caminhada quântica é um dos fatores que gerou o surgimento de propostas de algoritmos quânticos. Podemos citar como exemplo o algoritmo de fatoração de Shor que, utilizando uma transformada de Fourier quântica, pode fatorar um número  $N$  em seus primos utilizando menos operações do que o melhor algoritmo clássico (NIELSEN; CHUANG, 2010), (SHOR, 1994). Outro exemplo é o algoritmo de busca de Grover (GROVER, 1997). Dada uma lista com  $N$  itens e da qual se quer um item específico, esse algoritmo necessita da ordem de  $\sqrt{N}$  operações para encontrar esse item. Já para um algoritmo clássico são necessárias na ordem de  $N$  operações.

Existem duas modelagens para as caminhadas quânticas: o modelo de tempo discreto e o modelo de tempo contínuo. No primeiro, a passagem de tempo ocorre de forma discreta em conjunto com a aplicação dos operadores da caminhada. Assim, uma aplicação desses operadores no estado do caminhante corresponde a passagem de uma unidade de tempo. Além disso, o sentido do movimento do caminhante é determinado com base no seu grau de liberdade interno, que é modificado pela aplicação de um operador moeda. Já no caso contínuo, não temos essa discretização do tempo, ele passa de forma contínua. Nesse caso, a evolução da caminhada é gerada pelo operador hamiltoniano do sistema.

Restringindo-nos às caminhadas quânticas em tempo discreto, foco desta dissertação, observamos diferentes temáticas sendo estudadas, entre elas a influência de ruídos, imperfeições ou desordem (BANERJEE, 2008), (KONNO, 2010), (JOYE, 2011), (VIEIRA; AMORIM; RIGOLIN, 2013), (ASBÓTH; MALLICK, 2020), (GERALDI, 2021). Cenários como localização de Anderson (CRESPI, 2013), (GHOSH, 2014), (VAKULCHYK, 2017) e transporte quadraticamente mais lento (difusivo) (SHAPIRA, 2003), (BRUN; CARTERET; AMBAINIS, 2003), (BAÑULS, 2006) têm sido apontados como consequências, tanto no contexto de investigações teóricas quanto experimentais. Neste contexto, decidimos explorar um aspecto ainda carente na literatura da área: a influência de correlações nestas caminhadas quânticas desordenadas. Alguns estudos têm reportado situações onde a desordem segue estruturas aperiódicas (RIBEIRO; MILMAN; MOSSELI, 2004), (LO GULLO, 2017), (BUARQUE; DIAS, 2019) ou com correlações de longo alcance (PENG; WANG; YI, 2021), (MENDES et al, 2021). Aqui consideraremos um cenário de correlações de curto alcance, tanto no contexto espacial quanto temporal.

Para melhor compreensão dos nossos resultados, apresentamos a dissertação com a seguinte estruturação. Na seção 2 explicamos os fundamentos necessários a compreensão das próximas seções. Em 2.1 falamos da caminhada clássica aleatória, um modelo fundamental na teoria de probabilidades, e em 2.2 falamos das caminhadas quânticas em tempo discreto, mostrando as principais diferenças desse modelo comparado ao caso clássico e introduzindo o formalismo matemático utilizado.

Na seção 3 as caminhadas quânticas em tempo discreto desordenadas, que são o foco dessa dissertação. Em 3.1 comentamos sobre a localização de Anderson, fenômeno da matéria condensada causado pela desordem também observado em outros sistemas, inclusive nas caminhadas quânticas. Em 3.2 e 3.3 comentamos alguns resultados da literatura para caminhadas quânticas em dois cenários diferentes de desordem.

Na seção 4 apresentamos os resultados obtidos nas nossas investigações. Em 4.1 explicamos o modelo utilizado nas análises, e em 4.2 e 4.3 os resultados obtidos nos dois contextos de desordem. Por fim, em 5 apresentamos as conclusões obtidas com base nos nossos resultados.

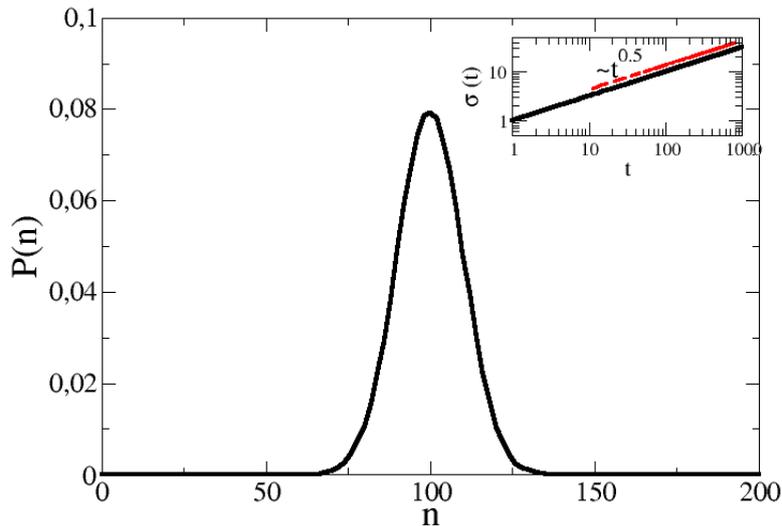
## 2 Fundamentação Teórica

### 2.1 Caminhada clássica aleatória

Muitos algoritmos clássicos são baseados na caminhada clássica aleatória (MOTWANI; RAGHAVAN, 1996), como algoritmos de sistemas de recomendação, de visão computacional e de aprendizado de máquina (XIA, 2020). Também chamado de passeio aleatório, o caminhante descreve o resultado produzido por uma partícula que realiza uma caminhada unidimensional na qual existe uma probabilidade  $p$  dela se deslocar para um lado e uma probabilidade  $q = 1 - p$  dela se deslocar para o outro lado.

Nessa caminhada clássica aleatória, a posição final  $n$  do caminhante pode ser descrita pelo gráfico de probabilidades  $P(n)$  mostrado na figura 1. Nesse gráfico, a probabilidade foi calculada a partir da média de 100.000 caminhantes realizando uma caminhada de 100 passos, na qual  $p = q = 0,5$ . Além disso, só foram consideradas as probabilidades para  $n$  par. Como a posição inicial era par e foram dados um número par de passos,  $P(n)$  é nulo para todos os  $n$  ímpares.

**Figura 1:** Probabilidade  $P(n)$  de encontrar o caminhante na posição  $n$  em uma caminhada clássica aleatória de 100 passos com  $p = q = 0,5$ . A curva foi obtida pela média de 100.000 caminhantes. No gráfico pequeno incluído na figura temos a evolução temporal do desvio padrão.



Fonte: Autora.

Como as chances do caminhante ir para qualquer um dos dois lados eram iguais temos uma distribuição de probabilidades simétrica centrada na posição inicial. Na figura 1 também temos o gráfico do desvio padrão  $\sigma(t)$  para essa caminhada. O desvio padrão é calculado utilizando a equação

$$\sigma(t) = \sqrt{\sum_{n=-N}^N n^2 P(n, t) - \left( \sum_{n=-N}^N n P(n, t) \right)^2}, \quad (1)$$

na qual  $P(n, t)$  é a probabilidade  $P(n)$  no tempo  $t$  e  $N$  é o número de passos dado pelo caminhante. O desvio padrão está relacionado com a distribuição da probabilidade em torno da posição média, que no caso simétrico coincide com a posição inicial. Assim, quanto maior  $\sigma(t)$ , maior a probabilidade de encontrar o caminhante longe da sua posição inicial (REIF, 1965).

Analisando o crescimento de  $\sigma$  e identificando qual o expoente  $\alpha$  na relação de proporcionalidade ( $\sigma \propto t^\alpha$ ), podemos caracterizar qual o regime de transporte da caminhada. Quando  $\alpha = 1$  temos um regime balístico, para  $\alpha = 0,5$  temos um regime difusivo e para  $\alpha = 0$  o regime é localizado. Se  $0 < \alpha < 0,5$  o regime é subdifusivo e se  $0,5 < \alpha < 1$  é superdifusivo. Na caminhada clássica aleatória temos  $\alpha = 0,5$  como pode ser visto na figura 1, ou seja o regime de transporte é difusivo.

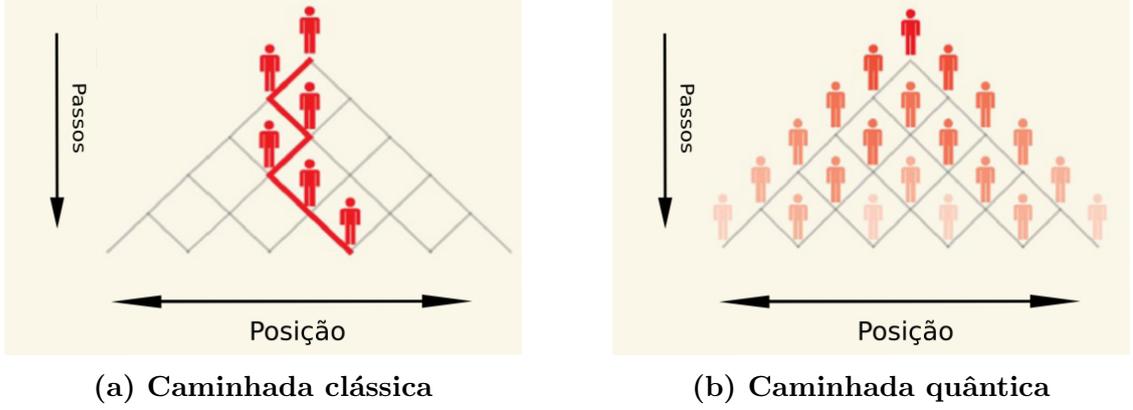
Baseados então no caso da caminhada clássica aleatória que serve de fundamento para algoritmos clássicos, a referência (AHARONOV; DAVIDOVICH; ZAGURY, 1993) sugere um modelo quântico análogo essa caminhada. Chamado inicialmente de caminhada quântica aleatória, o caminhante é uma partícula descrita pelo formalismo da mecânica quântica. No caso quântico temos  $\sigma \propto t^{1,0}$ , indicando um regime balístico. Isso chama a atenção para a possibilidade de que os algoritmos quânticos fundamentados nesse tipo de caminhada tenham uma velocidade maior que os análogos clássicos.

Seguindo então para o caso quântico, nos referiremos a ele como caminhada quântica ordenada (CQO). Além disso, estamos interessados nas caminhadas em tempo discreto nas quais aplicação do operadores unitários sobre o estado do caminhante corresponde a passagem de uma unidade de tempo.

## 2.2 Caminhada quântica em tempo discreto

Como dito anteriormente, a CQO considera uma partícula que deve ser tratada com o formalismo da mecânica quântica. Assim, o estado do caminhante é dado por um função  $|\Psi\rangle$ . Enquanto no caso clássico a partícula ocupa a cada momento apenas uma posição  $n$  da cadeia, como representado na figura 2a, na CQO a função de onda que representa o estado do caminhante pode ocupar diversas posições em um mesmo instante de tempo, como representado na figura 2b.

**Figura 2:** Representação da diferença entre os caminhantes no caso clássico em (a), quando a partícula assume uma única posição a cada instante, e no caso quântico em (b), quando a função de onda do caminhante pode estar em várias posições a cada instante.



Fonte: Adaptado de (VIEIRA, 2014).

Nessa caminhada o estado  $|\Psi\rangle$  é dado pelo produto tensorial de dois espaços de Hilbert:  $\mathcal{H}_p$  e  $\mathcal{H}_c$ . O espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_p$  descreve o estado externo do caminhante, são as posições que ele pode ocupar na cadeia. Como estamos tratando do caso unidimensional,  $\mathcal{H}_p$  é constituído por vetores  $|n_i\rangle_p$  com  $n_i \in \mathbb{Z}$ , bem como por qualquer combinação linear  $\sum_i \beta_i |n_i\rangle_p$  desde que  $\sum_i \beta_i \beta_i^* = 1$ . É um espaço vetorial infinito e contável.

Já  $\mathcal{H}_c$  é um espaço de Hilbert bidimensional que descreve o estado interno do caminhante. Como na computação clássica a informação é transmitida através de bits de estados que podem ser 0 ou 1, na caminhada quântica o caminhante é chamado de qubit e seu estado interno é dado pela combinação de vetores de base  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ , cuja representação matricial é dada por

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

O estado interno  $|\psi\rangle$  do qubit pode ser dado então por qualquer superposição dos vetores da base tal como

$$|\psi\rangle = a |0\rangle + b |1\rangle, \quad (3)$$

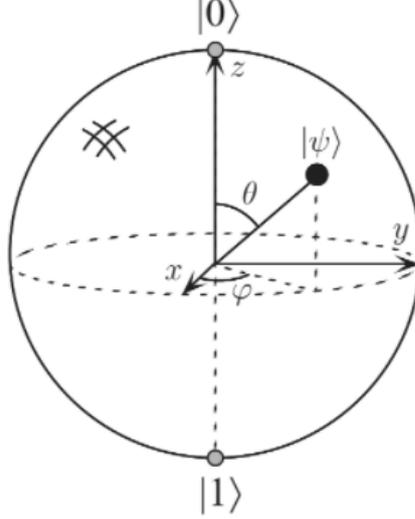
desde que os coeficientes  $a$  e  $b$  satisfaçam a condição  $aa^* + bb^* = 1$ . Assim, respeitando essa condição, o estado interno  $|\psi\rangle$  pode ser reescrito como

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle. \quad (4)$$

Os ângulos  $\theta$  e  $\varphi$  definem um ponto numa esfera de raio 1. Dessa forma, o qubit pode ser representado geometricamente como um ponto na esfera mostrada na figura 3, conhecida

como esfera de Bloch.

**Figura 3:** Representação da esfera de Bloch de raio 1. Os ângulos  $\theta$  e  $\varphi$  determinam um ponto nessa esfera que representa o estado  $|\psi\rangle$  do qubit.



Fonte: Retirado de (NIELSEN; CHUANG, 2010).

O estado total da caminhada é dado então por  $|\Psi\rangle = |\psi\rangle \otimes |n_i\rangle$ . A evolução da caminhada é então feita pela aplicação de operadores unitários. O primeiro é o operador quântico moeda  $\hat{C}$ , dado pela equação

$$\hat{C}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}, \quad (5)$$

pertencente a  $SU(2)$ . Considerando a representação geométrica do qubit feita anteriormente, esse operador age rotacionando o estado  $|\psi\rangle$  dentro da esfera de Bloch. Em seguida aplicamos o operador deslocamento condicional  $\hat{S}$ , dado por

$$\hat{S} = |0\rangle \langle 0| \otimes \sum_i |n_i\rangle \langle n_i + 1| + |1\rangle \langle 1| \otimes \sum_i |n_i\rangle \langle n_i - 1|. \quad (6)$$

Esse operador atua modificando a posição do caminhante de acordo com o seu estado interno, como mostrado nas expressões 7 e 8. Se o caminhante tem estado  $|0\rangle$ , ele é deslocado em uma posição para direita; e se tem estado  $|1\rangle$  ele é deslocado em uma posição para esquerda.

$$\hat{S} |0\rangle |n_i\rangle = |0\rangle |n_i + 1\rangle \quad (7)$$

$$\hat{S} |1\rangle |n_i\rangle = |1\rangle |n_i - 1\rangle \quad (8)$$

Assim, um passo na caminhada quântica corresponde a aplicação do operador

unitário  $\hat{U} = \hat{S}(\hat{C} \otimes \mathbb{1}_p)$  no qual  $\mathbb{1}_p$  é a matriz identidade do espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_p$ . Portanto, se o estado inicial do caminhante é  $|\psi(0)\rangle$ , após  $t$  passos, o estado do caminhante será dado por  $|\psi(t)\rangle = (\hat{U})^t |\psi(0)\rangle$ .

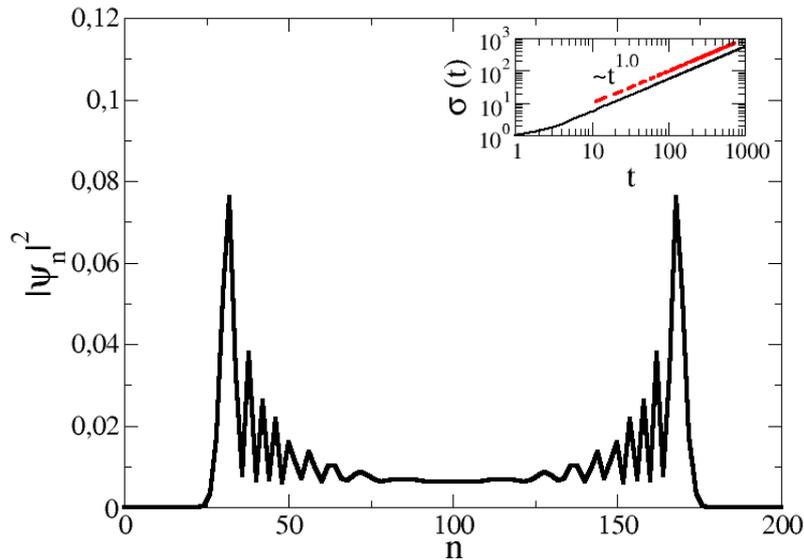
Para exemplificar algumas propriedades da CQO calculemos a distribuição de probabilidades para esse caso. A partir da equação 3, a probabilidade  $P(n) = |\psi_n|^2$  de encontrar o caminhante na posição  $n$  é dada pela equação 9.

$$|\psi_n|^2 = a_n a_n^* + b_n b_n^*. \quad (9)$$

Temos então na figura 4 a distribuição de probabilidades do caso quântico ordenado quando utilizamos o operador moeda hadamard  $\hat{C}(\theta = 45^\circ)$ . Assumiremos como condição inicial do qubit

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle). \quad (10)$$

**Figura 4:** Distribuição de probabilidade  $|\psi_n|^2$  de encontrar o caminhante na posição  $n$  em uma caminhada quântica de tempo discreto realizada com o operador moeda Hadamard para 100 passos e condição inicial  $|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$ . No gráfico pequeno inserido na figura temos a evolução temporal do desvio padrão.



Fonte: Autora.

Pela distribuição de probabilidades da CQO vemos que, enquanto na caminhada clássica a probabilidade de encontrar o caminhante era maior na posição inicial, na caminhada quântica a probabilidade maior é a de o encontrar afastado da posição inicial. Além disso, no gráfico do desvio padrão inserido na figura observa-se que  $\sigma \propto t^1$ , temos uma

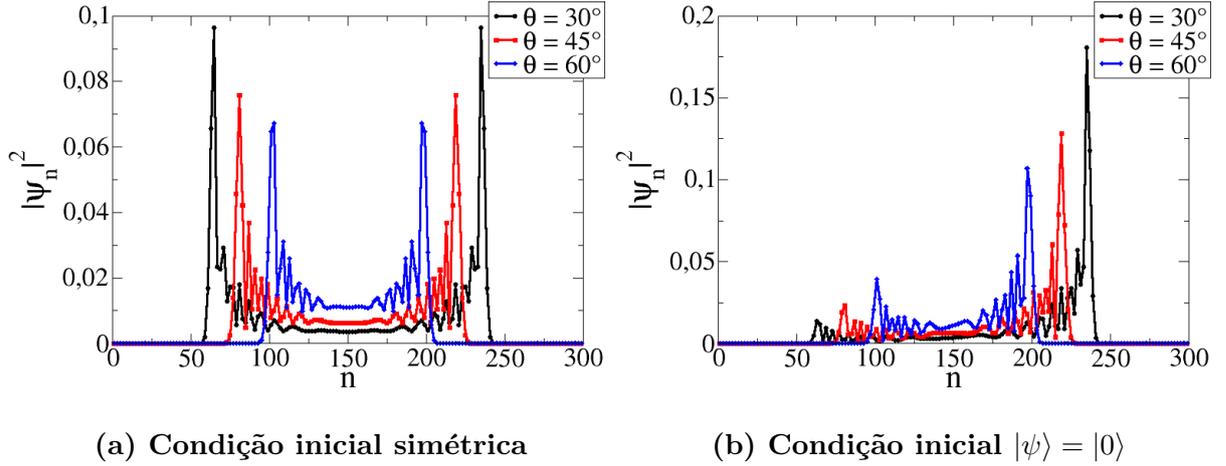
caminhada de regime balístico (SENECAS-ANDRACA, 2012), (PORTUGAL, 2018).

O resultado da caminhada depende de dois fatores: o operador moeda utilizado e o estado inicial do caminhante. O estado inicial dado pela equação 10 é chamado de simétrico devido a distribuição de probabilidades obtida com ele, que é simétrica, como mostrado na figura 5a. Se usarmos uma condição inicial diferente, como por exemplo a condição

$$|\psi\rangle = |0\rangle, \quad (11)$$

teremos um gráfico um pouco diferente, como o mostrado em 5b. Pela figura, vemos que essa condição leva a uma distribuição de probabilidades assimétrica, que ocorre devido a interferência causada pelo sinal negativo que teremos no operador moeda. Na figura 5 mostramos também que operadores moedas diferentes levam a probabilidades diferentes.

**Figura 5:** Representação da diferença entre os caminhantes no caso clássico em (a), quando a partícula assume uma única posição a cada instante, e no caso quântico em (b), quando a função de onda do caminhante pode estar em várias posições a cada instante.



Fonte: Autora.

A CQO pode ser implementada em diversos sistemas físicos. Para isso, é necessário termos um sistema de dois níveis, para que possamos simular o qubit, e uma forma de aplicar os operadores quânticos. Em (RYAN, 2005) a caminhada é realizada utilizando um aparelho de ressonância magnética nuclear no qual o estado interno do caminhante e a sua posição são simulados através do spin nuclear de três átomos de carbono, enquanto que os operadores moeda e deslocamento são aplicados por pulsos em radiofrequência. Uma outra realização considera íons (ZÄHRINGER, 2010) ou átomos neutros (KARSKI, 2009) armadilhados em uma rede óptica, com o estado interno do caminhante sendo dado por dois níveis diferentes de energia.

Existem também diversas implementações utilizando luz. Em (BROOME, 2010),

(SCHREIBER, 2010), (CRESPI, 2013), a partícula que realiza a caminhada é um fóton que tem como possibilidades de estado interno a sua polarização, horizontal ou vertical. Lentes são então utilizadas como os operadores necessários. Em (CARDANO, 2015) também temos fótons como caminhantes, porém o seu estado interno é dado pelo spin, enquanto que o estado externo é dado pelo momento angular orbital.

### 3 Caminhadas Quânticas Desordenadas

Na seção 2 falamos como ocorre uma caminhada quântica ordenada e exemplificamos utilizando o operador moeda Hadamard. O caso apresentado ocorre quando temos um sistema construído perfeitamente e sem interferência do ambiente externo. Essa necessidade de precisão é uma das maiores dificuldades na construção de dispositivos quânticos (NIELSEN; CHUANG, 2010). Assim, é necessário saber como ruídos, devido ao ambiente ou a montagem do experimento, afetam a caminhada.

Esses ruídos podem ser representados na caminhada de várias formas. Pode ser um defeito na cadeia, no qual uma fase é adicionada ao caminhante através do operador deslocamento condicional toda vez que ele passa pela posição inicial  $n_0$  (WÓJCIK, 2012), (RONG, 2013), ou para todas as posições  $n$  com o valor da fase adicionada dependendo de  $n$  (BAÑULS, 2006), (RONG, 2013), (WÓJCIK, 2004). Pode ser por uma mudança na forma do operador deslocamento condicional como em (CHANDRASHEKAR; SRISKANTH; BANERJEE, 2007), no qual ele muda o estado do caminhante de  $|0\rangle$  para  $|1\rangle$  ou de  $|1\rangle$  para  $|0\rangle$ . Pode ser ainda pela forma de distribuição do operador moeda na caminhada, que pode passar a depender da posição do caminhante (BUARQUE; DIAS, 2019), (LO GULLO, 2017), (GERALDI et al, 2019), do passo temporal (BAÑULS, 2006), (SHAPIRA, 2003) ou dos dois (VIEIRA; AMORIM; RIGOLIN, 2014), (DE NICOLA et al, 2014). Além disso, essa dependência pode se dar de forma aperiódica, mas determinística (BAÑULS, 2006), (BUARQUE; DIAS; 2019), (LO GULLO et al, 2017), (MENDES, 2021) ou pode ser totalmente aleatória (SHAPIRA, 2003), (GERALDI et al, 2021).

Os modelos investigados em nosso estudo consideram a desordem temporal e a espacial. Na primeira o operador moeda depende unicamente do instante de tempo/ passo da caminhada. Na segunda o operador moeda depende unicamente da posição do caminhante. Resultados da literatura revelam um caráter localizado do caminhante quântico nesse último regime (KEATING et al, 2007), (YUE YIN; KATSANOS; EVANGELOU, 2008), (SCHREIBER et al, 2011). Tal aspecto é inerente ao fenômeno da localização de Anderson (ANDERSON, 1958), (ABRAHAMS et al, 1979), (LEE; RAMAKRISHNANN, 1985). Para melhor compreensão dos resultados obtidos, vejamos a seguir alguns aspectos.

Nesse último caso a presença da desordem dependente da posição leva a ocorrência de um fenômeno chamado localização de Anderson. Assim, para melhor entendimento dos resultados obtidos, na seção 3.1 nos aprofundamos nesse fenômeno, Em seguida, nas seções 3.2 e 3.3 falamos dos aspectos da caminhadas desordenadas estudadas.

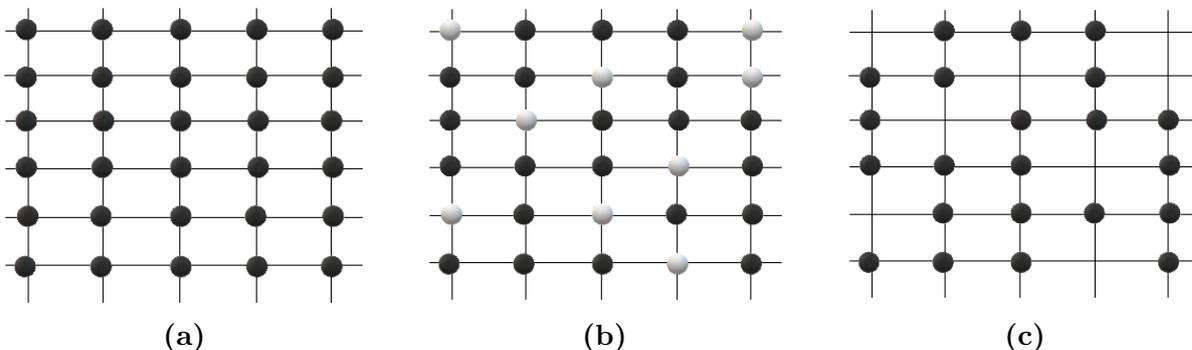
Os casos de desordem estudados nessa dissertação são os com desordem temporal, quando o operador moeda depende unicamente do instante de tempo/ passo da caminhada, e com desordem espacial, quando o operador moeda depende unicamente da posição do caminhante. Nesse último caso a presença da desordem dependente da posição leva

a ocorrência de um fenômeno chamado localização de Anderson. Assim, para melhor entendimento dos resultados obtidos, na seção 3.1 nos aprofundamos nesse fenômeno, Em seguida, nas seções 3.2 e 3.3 falamos dos aspectos da caminhadas desordenadas estudadas.

### 3.1 Localização de Anderson

No contexto eletrônico, a transição metal-isolante não podia ser bem explicada pelo modelo utilizado até então, o modelo de Bloch. Esse modelo considera uma estrutura cristalina periódica e bem ordenada, como a mostrada na figura 6a. Assim, devido a essa simetria translacional da rede, a função de onda do elétron se propaga por toda a estrutura cristalina (DIAS, 2011). Porém, esse modelo não se aplica quando existe algum defeito nessa estrutura, como por exemplo nos casos mostrados em 6b, no qual dois íons diferentes compõem a rede, e em 6c, no qual existem pontos da rede com lacunas e distâncias diferentes entre os íons. Para esses casos desordenados, devemos considerar o modelo de Anderson (ANDERSON, 1958). Nele a desordem é considerada através da introdução de um parâmetro  $W$  no Hamiltoniano do sistema. Assim, os valores de energia podem variar aleatoriamente dentro do intervalo  $[-W/2, W/2]$ .

**Figura 6:** Representação de uma rede bidimensional com diferentes estruturas: uma rede cristalina periódica em (a), uma rede desordenada devido a presença de íons diferentes em (b) e uma rede desordenada devido a presença de lacunas e a diferentes distâncias entre os íons em (c).

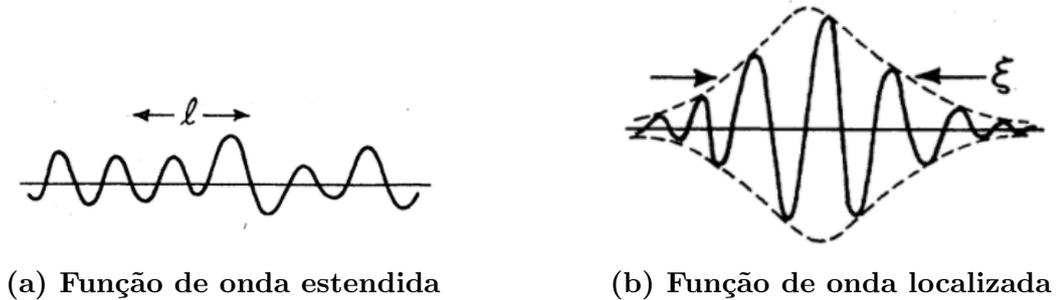


Fonte: Autora.

Em sua proposta inicial Anderson sugeriu que uma desordem fraca não impedia a propagação da função de onda, ela permanece estendida. Porém, devido ao espalhamento por causa da desordem, a função de onda perde a coerência de fase no livre caminho médio, como mostrado na figura 7a. Porém, para um grau de desordem suficientemente forte, o espalhamento causará inúmeras reflexões, gerando interferências destrutivas que resultarão na localização da função de onda em torno da posição inicial, como mostrado na figura 7b.

Além disso, uma característica da localização devido a presença da desordem é que a envoltória  $\psi$  da função de onda, representada pela linha tracejada na figura 7b, tem

**Figura 7:** Representação da função de onda do elétron para os casos com desordem utilizando o modelo de Bloch. (a) Para desordem suficientemente fraca, a função de onda permanece estendida, porém perde coerência de fase. (b) Para um grau de desordem forte, a função de onda fica localizada exponencialmente em torno da posição inicial.



Fonte: Retirado de (LEE; RAMAKRISHNANN, 1985).

um decaimento exponencial dado pela expressão 12 em torno da posição inicial  $n_0$ . Nessa expressão  $\xi$  é o comprimento de localização.

$$|\psi(n)| \propto \exp\{|n - n_0|/\xi\} \quad (12)$$

A localização de Anderson é um fenômeno ondulatório que ocorre quando a desordem do meio é estática no tempo (LEVI et al, 2012), (KRIVOLAPOV, 2012). Assim, embora inicialmente aplicada para o caso de um elétron em uma rede com desordem, essa localização já foi observado em vários outros sistemas, como por exemplo em ondas de matéria (ROATI, 2008), (BILLY, 2008), (KONDOV, 2011), ondas sonoras (HU, 2008) e ondas eletromagnéticas (SEGEV; SILBERBERG; CHRISTODOULIDES, 2013), (SCHWARTZ et al, 2007) , (WIERSMA, 1997).

Tentando então entender a localização de Anderson de acordo com o tamanho e as dimensões do sistema se chegou então à teoria de escala da localização (ABRAHAMS et al, 1979). Este trabalho mostra, analisando a mudança da condutividade com o tamanho do sistema, que para sistemas unidimensionais e bidimensionais qualquer grau de desordem é o bastante pra provocar o caráter isolante de Anderson, tornado o elétron localizado.

Porém, vários autores mostraram depois que a adição de correlações ou aperioidicidades ao sistema pode fazer com que um sistema unidimensional apresente o elétron delocalizado (DAS SARMA, 1988), (GRINIASTY; FISHMAN, 1988), (FLORES, 1989), (DE MOURA; LYRA, 1998). Em (GRINIASTY; FISHMAN, 1988) a desordem é dada pela expressão  $W_n = \lambda \cos \pi a |n|^\nu$ , em que quanto maior  $\nu$ , maior a similaridade com a desordem de Anderson. Para  $\nu \leq 2$  todos os estados são localizados, enquanto que para  $0 < \nu \leq 1$  estados estendidos são encontrados. Em (DAS SARMA, 1988), a desordem é dada por uma expressão similar a anterior:  $W_n = \lambda \cos \pi a n^\nu$ , em que para  $a$  um número irracional e  $\nu \geq 2$  temos o sistema localizado como no modelo de Anderson,

enquanto que para  $a$  racional e  $\nu$  inteiro temos o modelo de Bloch com a função de onda estendida. Variando os parâmetros  $\lambda$  e  $\nu$ , mantendo  $a$  irracional, temos que para  $\lambda < 2$  e  $0 < \nu < 1$  estados estendidos são encontrados. Já em (DE MOURA; LYRA, 1998), utilizando uma correlação de longo alcance cujo espectro de ruído  $S(k)$  segue uma lei de potência,  $S(k) \propto 1/k^a$ , diferente do caso desordenado de Anderson, em que  $S(k) \propto k^0$  pois não há correlações. Assim, para valores de  $a > 2,0$  estados estendidos são encontrados.

Uma das correlações que pode fazer o sistema apresentar delocalização é o modelo de dímero aleatório (DUNLAP; WU; PHILLIPS, 1990). Nele, ao invés do intervalo  $[-W/2, W/2]$  de valores aleatórios que a desordem pode assumir, os autores consideram apenas dois valores possíveis:  $W_a$  e  $W_b$ . Consideram ainda que um dos valores,  $W_a$  deve aparecer sempre aos pares:  $\dots W_a W_b W_a W_a W_b W_b W_b W_a W_a W_a W_a W_b W_a W_a \dots$ . Assim, dependendo dos valores de  $W_a$  e  $W_b$  utilizados, se a diferença  $W_a - W_b$  for pequena, é possível ter um sistema unidimensional com desordem em que o elétron esteja delocalizado. Realizações experimentais com super redes de GaAs-AlGaAs (BELLANI, 1999) e com guias de ondas ópticos (NAETHER et al, 1999) confirmam que esse modelo de correlação inibe a localização de Anderson para sistemas de baixa dimensionalidade.

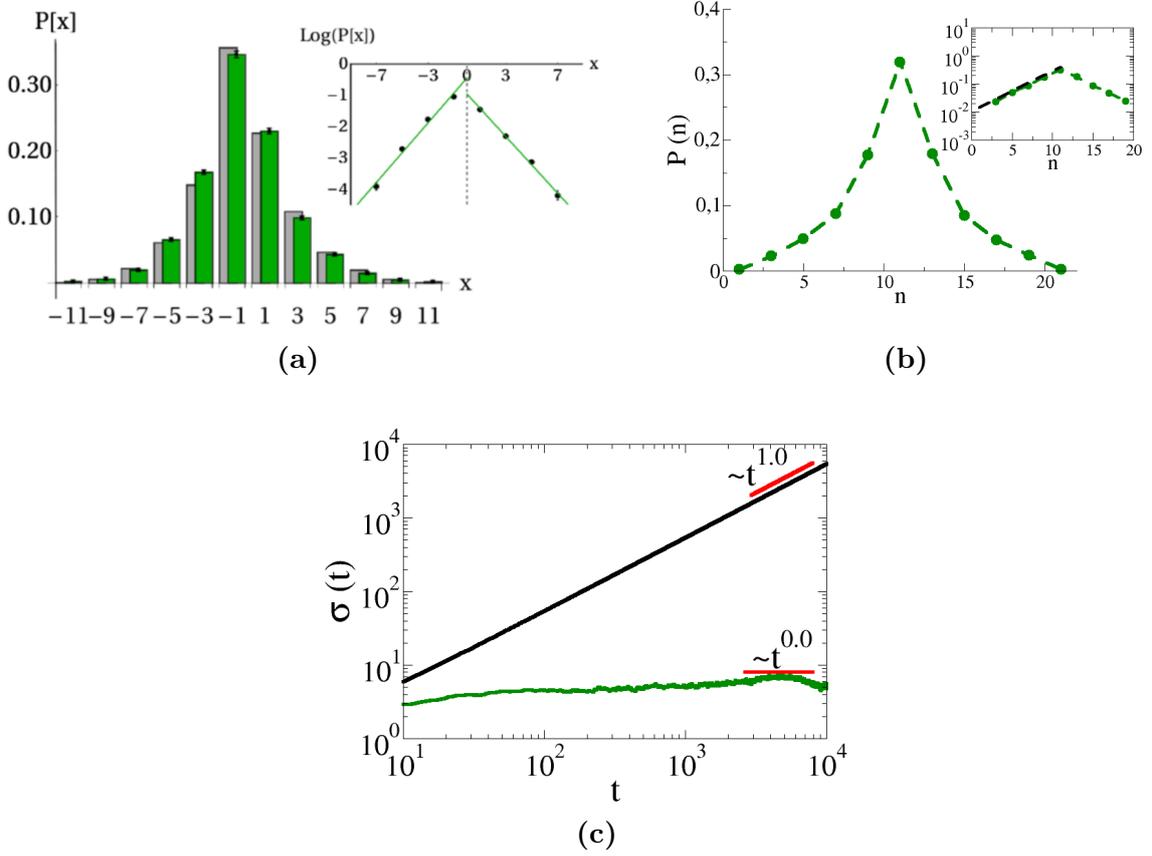
### 3.2 Caminhadas quânticas com desordem espacial

Como comentado no início dessa seção, a presença de desordem pode interferir no resultado da caminhada quântica. No caso da desordem espacial, se considera um ruído que depende da posição do caminhante, mas que permanece constante no tempo. Nessa seção apresentaremos alguns trabalhos que tratam desse tipo de desordem.

Na referência (SCHREIBER et al, 2011), a caminhada quântica foi implementada utilizando um experimento fotônico no qual o estado interno do caminhante era dado pela polarização da luz, podendo ser uma luz vertical ou horizontalmente polarizada. A dependência espacial do operador moeda foi implementada então adicionando uma fase na polarização da luz, com essa fase podendo variar aleatoriamente dentro de um intervalo  $[-\pi, \pi]$ , mas dependendo da posição. Assim, toda vez que o fóton passa pela mesma posição, ele adquire a mesma fase. Dessa forma, realizando uma caminhada com 11 passos, foi obtida a distribuição de probabilidades mostrada na figura 8a. Em 8b temos o resultado da densidade de probabilidade para uma simulação numérica de uma caminhada desordenada com dois operadores moedas e feita a partir da média de 100 caminhadas.

Pelos gráficos da probabilidade de encontrar o caminhante, vemos que o resultado difere bastante do caso da CQO mostrado na figura 4. Com a desordem espacial, temos que a probabilidade de encontrar o caminhante é maior próximo da posição inicial. Os gráficos menores nas figuras 8a e 8b mostram a mesma quantidade porém em escala

Figura 8: Densidade de probabilidade de uma caminhada quântica espacialmente desordenada. Em (a) temos o resultados obtido experimentalmente em (SCHEREIBER et al, 2011) para uma caminhada de 11 passos, enquanto que em (b) temos o resultado obtido através de uma simulação numérica. Em (c) temos o desvio padrão para 10.000 passos. A curva preta é o desvio padrão obtido para o caso de uma caminhada ordenada com  $\theta = 45^\circ$ .



Fonte: (a) retirado de (SCHEREIBER et al, 2011). (b) e (c) autora.

semilog. Com isso é possível verificar que a probabilidade tem um decaimento exponencial, o que é típico de um caso de localização de Anderson. Além disso, o desvio padrão tem um comportamento como o da curva verde na figura 8c, em que  $\sigma(t)$  permanece com um valor constante devido a localização. Outros trabalhos confirmam a presença desse fenômeno em caminhadas quânticas de tempo discreto (YUE YIN; KATSANOS; EVANGELOU, 2008), (CRESPI et al, 2013), (DE NICOLA et al, 2014), (DE NICOLA et al, 2017).

Em (BUARQUE; DIAS, 2019) temos uma caminhada quântica cujo ângulo do operador moeda tem uma dependência com a posição dada por  $n^\nu$ . Assim, avaliando a caminhada com o operador hadamard, temos que para pequenos valores de  $\nu$  o caminhante se comporta como no caso ordenado, com o desvio padrão crescendo proporcional a  $t$ . Conforme  $\nu$  cresce o comportamento da dispersão muda, até que para valores de  $\nu \geq 1.0$  o caminhante fica localizado, com  $\sigma(t)$  constante.

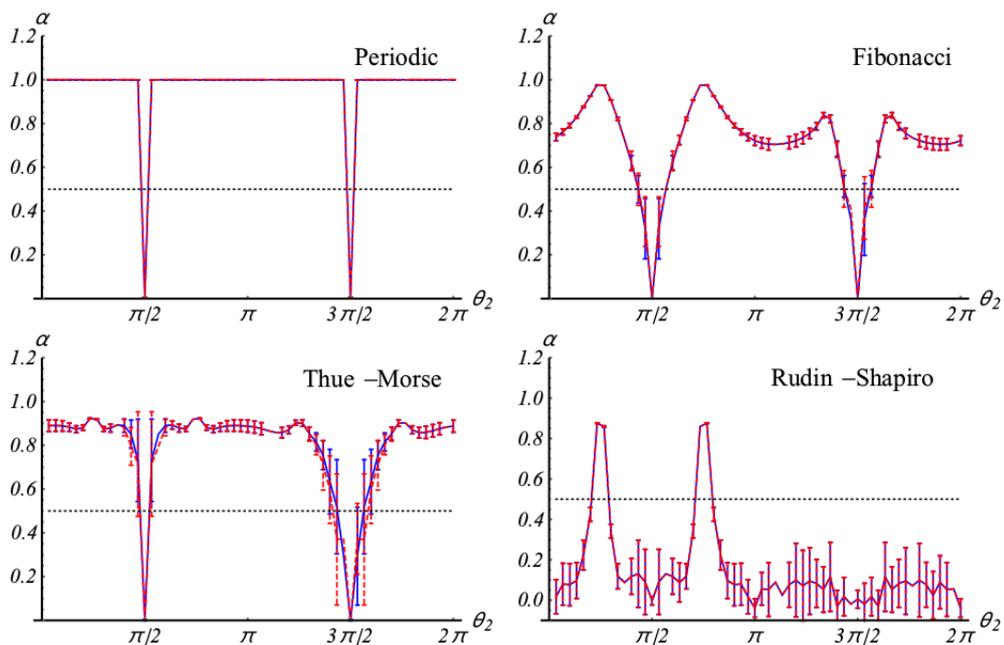
Em (ZHAO; HU; TONG, 2015) é realizada uma caminhada espacialmente desordenada com apenas dois operadores moedas. Esses operadores dependem dos parâmetros

$\rho, \theta$  e  $\phi$ . Variando o valor desses parâmetros, são obtidas caminhadas com diferentes regimes, inclusive superdifusivo, difusivo e subdifusivo. Uma condição necessária para que um desses três regimes seja encontrado é que os parâmetros dos operadores satisfaçam a condição  $e^{(\theta_1 - \phi_1)} = e^{(\theta_2 - \phi_2)}$ .

Em (LO GULLO et al, 2017), são realizadas caminhadas com dois operadores moedas, um deles sendo o operador Hadamard. São investigados o caso periódico e o casos aperiódicos dados por três sequências diferentes: Fibonacci, Rudin-Shapiro e Thue-Morse. No caso periódico, sendo os ângulos dos operadores moedas  $\theta_a$  e  $\theta_b$ , a distribuição é dada por  $\theta_a \theta_b \theta_a \theta_b \theta_a \theta_b \theta_a \theta_b \theta_a \dots$ , em que  $\theta_a$  e  $\theta_b$  aparecem sempre uma vez um após o outro. Já nos casos aperiódicos, a distribuição de  $\theta_a$  e  $\theta_b$  varia de acordo com a sequência utilizada. Na figura 9 temos o expoente do desvio padrão para o caso espacial, com as cores diferentes representando cadeias de tamanhos diferentes. Vemos, para o caso periódico e também em duas das três sequências, que o expoente  $\alpha$  é zero quando um dos operadores moeda é dado pelo ângulo  $\theta = 90^\circ$  ou  $\theta = 270^\circ$ . Isso ocorre pois essas moedas trocam o estado interno do caminhante de  $|0\rangle$  para  $|1\rangle$  e de  $|1\rangle$  para  $|0\rangle$ , fazendo com que a direção do caminhante seja mudada a todo momento.

Além disso, na distribuição periódica temos um comportamento balístico para todos os ângulos, exceto os dois anteriores. Na sequência de Fibonacci e Thue-Morse temos a maioria dos ângulos levando a um comportamento superdifusivo, enquanto que a sequência de Rudin-Shapiro tem a maioria dos ângulos levando a um comportamento subdifusivo.

**Figura 9:** Gráficos do expoente  $\alpha$  para diferentes sequências de distribuição espacial do operador moeda. O ângulo  $\theta_1$  foi fixado em  $45^\circ$ . A linha preta tracejada representa o valor de  $\alpha$  do caso clássico.



Fonte: Retirado de (LO GULLO et al, 2017).

Em (MENDES et al, 2021) a desordem é inserida na caminhada pela inserção de uma fase dependente da posição no operador deslocamento condicional. É adicionada a essa desordem uma correlação que, dependendo dos parâmetros, pode ser de longo ou curto alcance. Com isso, quando o comprimento de correlação é menor do que o tamanho da cadeia, em um caso de correlação de curto alcance, temos que o caminhante permanece localizado. Já quando o comprimento de correlação é maior que o tamanho da cadeia, de longo alcance, o caminhante exibe um comportamento balístico tal como no caso ordenado.

### 3.3 Caminhadas quânticas com desordem temporal

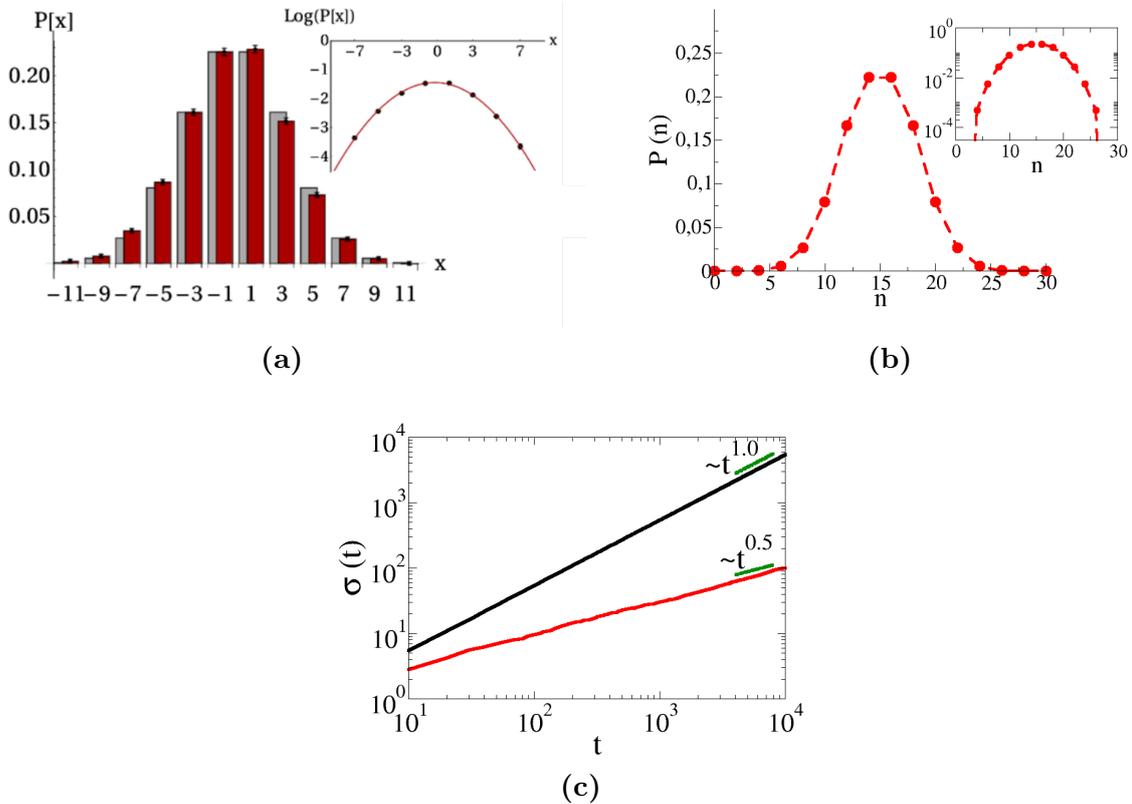
Um outro tipo de desordem que pode interferir na caminhada é a desordem temporal. Nesse caso, trata-se de um ruído que não depende da posição, mas sim do tempo. Nessa seção abordaremos alguns trabalhos que tratam desse tipo de desordem.

Em (SHAPIRA, 2003) é realizada uma caminhada utilizando a condição inicial dada pela equação 10 na qual a desordem temporal é adicionada por um operador  $\hat{c}(t) = c_1(t)\hat{\sigma}_1 + c_2(t)\hat{\sigma}_2 + c_3(t)\hat{\sigma}_3$  multiplicado pelo operador moeda Hadamard. Os coeficientes  $c_1(t)$ ,  $c_2(t)$  e  $c_3(t)$  são números aleatórios retirados de uma distribuição normal com desvio padrão  $c$  que caracteriza o ruído. Com isso, no tempo longo é observado que o desvio padrão da caminhada passa de balístico para difusivo, com o tempo de transição de regime  $T \propto c^{-2}$ .

No experimento feito pela referência (SCHREIBER, 2011), comentado no caso com desordem espacial, também foi realizado o caso com desordem temporal, no qual a fase adicionada ao operador moeda varia com o tempo e não mais com a posição. No gráfico mostrado na figura 10a temos a distribuição de probabilidades após 11 passos, obtida através do experimento. Em 10b temos o resultado para a probabilidade obtido através de uma simulação da caminhada. Em ambos vemos que a probabilidade é maior de encontrar o caminhante próximo a posição inicial. Além disso, pelos gráficos em semilog nas figuras 10a e 10b vemos que essa probabilidade tem o perfil de uma distribuição normal, tal como é o caso de uma caminhada aleatória clássica. Em 10c temos a evolução temporal do desvio padrão para o caso desordenado temporamente, em vermelho, e para o caso ordenado com operador  $\hat{C} = 45^\circ$ , em preto. Enquanto para o caso ordenado a evolução de  $\sigma$  é balística, no caso com desordem temporal temos  $\sigma \propto t^{0.5}$ . Assim, temos um regime difusivo como ocorre no caso da caminhada clássica aleatória.

Em (OBUSE; KAWAKAMI, 2011) utilizando um operador moeda que depende exclusivamente de  $\theta$ , similar ao da equação [5], também é obtido um regime difusivo para o caminhante e uma distribuição de probabilidade similar ao caso clássico. Além disso, é mostrado que quanto maior o intervalo  $\Delta\theta$  dentro do qual o ângulo de  $\hat{C}$  pode

**Figura 10:** Densidade de probabilidade de uma caminhada quântica temporalmente desordenada. Em (a) temos o resultados obtido experimentalmente em (SCHEREIBER et al, 2011) para uma caminhada de 11 passos, enquanto que em (b) temos o resultado obtido através de uma simulação numérica. Em (c) temos o desvio padrão para 10.000 passos. A curva preta é o desvio padrão obtido para o caso de uma caminhada ordenada com  $\theta = 45^\circ$ .



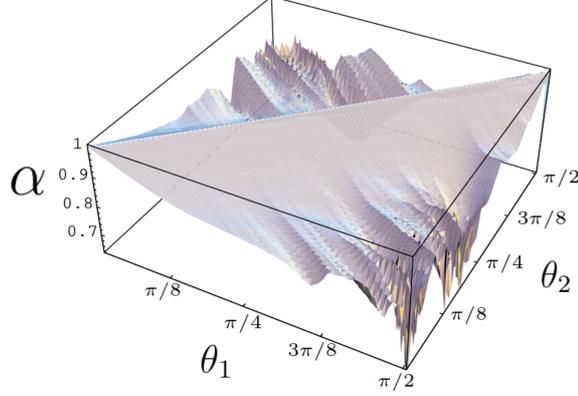
Fonte: (a) retirado de (SCHEREIBER et al, 2011) . (b) e (c) autora.

ser escolhido, mais estreita é essa distribuição. Em (DE NICOLAS et al, 2014) uma distribuição binomial devido a desordem temporal também é relatada.

Em (RIBEIRO; MILMAN; MOSSERI, 2004) a distribuição das moedas é mudada ao longo do tempo utilizando dois operadores moedas dados pela equação 5: um com  $\theta_1 = 30^\circ$  e outro com  $\theta_2 = 60^\circ$ . Primeiro a dependência temporal ocorre de forma periódica com períodos de 2, 3, 5 e 8 passos. Nesses casos o desvio padrão obtido é balístico. Em seguida é usada uma distribuição de moedas que segue a sequência de Fibonacci com os mesmos ângulos  $\theta$  anteriores. Essa sequência é conhecida como quase periódica. Com essa sequência a caminhada tem um comportamento superdifusivo. Então mantendo a distribuição aperiódica com a sequência de Fibonacci mas variando os valores das duas moedas no intervalo  $[0, \pi/2]$  os autores mostram que o comportamento é superdifusivo para qualquer combinação de ângulos, exceto para  $\theta_1 = \theta_2$ , quando é balístico, como pode ser visto na figura 11. Por fim, é considerado o caso aleatório temporal com dois tipos de distribuição aleatória: uma na qual metade dos operadores é  $\theta$  e a outra metade é  $\pi/2 - \theta$  e outra com infinitas moedas no intervalo  $[0, \pi/2]$  com diferentes desvios padrões

centrados em  $\pi/4$ . Em ambos os casos o regime encontrado é difusivo.

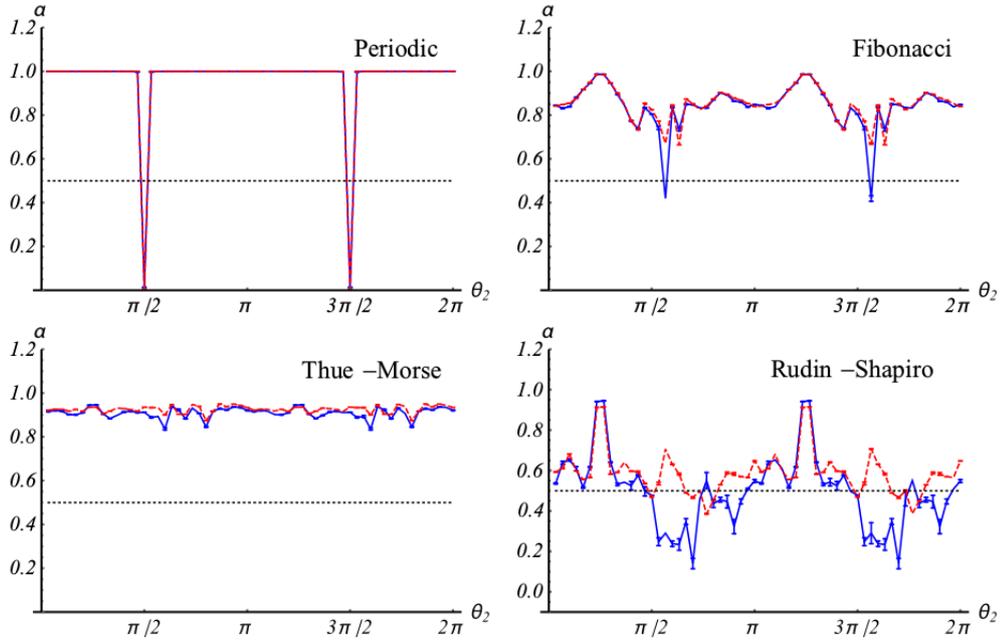
**Figura 11:** Gráfico do expoente  $\alpha$  para diferentes combinações de operadores moeda distribuídos temporalmente utilizando uma sequência de Fibonacci.



Fonte: Adaptado de (RIBEIRO; MILMAN; MOSSERI, 2004) .

Em (ZHAO; HU; TONG, 2015), comentado no caso com desordem espacial, também é realizada uma caminhada com dois operadores moedas em que a distribuição desses operadores varia no tempo. O regime superdifusivo é relatado para o caso em parâmetros desses operadores moedas satisfazem as condições  $e^{(\theta_1-\phi_1)} = e^{(\theta_2-\phi_2)}$  e  $e^{(\theta_1+\phi_1)} \neq e^{(\theta_2+\phi_2)}$  .

**Figura 12:** Gráficos do expoente  $\alpha$  para diferentes sequências de distribuição temporal do operador moeda. O ângulo  $\theta_1$  foi fixado em  $45^\circ$ . A linha preta tracejada representa o valor de  $\alpha$  do caso clássico.



Fonte: Retirado de (LO GULLO et al, 2017).

A referência (LO GULLO et al, 2017) também explorou a desordem temporal, considerando uma caminhada realizada com duas moedas, com a distribuição dessas moedas seguindo uma sequência periódica ou aperiódica. Na figura 12 temos o desvio padrão

para todas essas distribuições com uma das moedas fixas como a Hadamard. Nela, vemos que no caso em que a dependência do operador moeda é temporal, a maioria dos ângulos escolhidos para qualquer uma das distribuições levará o caminhante a um regime superdifusivo.

Os resultados anteriores mostram que a presença de desordem sem correlações altera profundamente o perfil de propagação do caminhante quântico. No cenário de desordem espacial, temos a emergência da localização de Anderson, enquanto que no cenário de desordem temporal há uma caminhada quântica difusiva, como a caminhada clássica. A presença de correlações permite que o caminhante acesse regimes antes inacessíveis, como superdifusivo, subdifusivo, ou mesmo difusivo para ruídos espaciais. Entretanto, observamos que os estudos presentes na literatura se concentram em distribuições aperiódicas, determinísticas ou que apresentam correlações de longo alcance.

Dentro deste contexto, decidimos investigar a influência de correlações de curto alcance, alguma correlação que tenha uma influência pontual, mínima. Desta forma, decidimos por implementar correlações do tipo dímero aleatório (DUNLAP; WU; PHILLIPS, 1990), sobre a dinâmica de caminhante quântico que está sujeito a desordem do tipo espacial ou temporal. Traçaremos ao longo dos nossos resultados uma análise comparativa entre o caso sem correlações, mostrando como uma correlação tão curta ou momentânea pode alterar significativamente as propriedades de transporte do sistema. Nosso modelo e resultados são apresentados no capítulo a seguir.

## 4 Correlações tipo dímero aleatório em caminhadas quânticas desordenadas

### 4.1 Modelo

Como vimos na seção 2.2, o estado total do caminhante é dado por  $|\Psi\rangle = |\psi\rangle \otimes |n_i\rangle$  e a evolução da caminhada é realizada pela aplicação recursiva de dois operadores unitários: o operador moeda  $\hat{C}(\theta)$  e o operador deslocamento condicional  $\hat{S}$ . O primeiro é dado por

$$\hat{C}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \quad (13)$$

e o segundo por

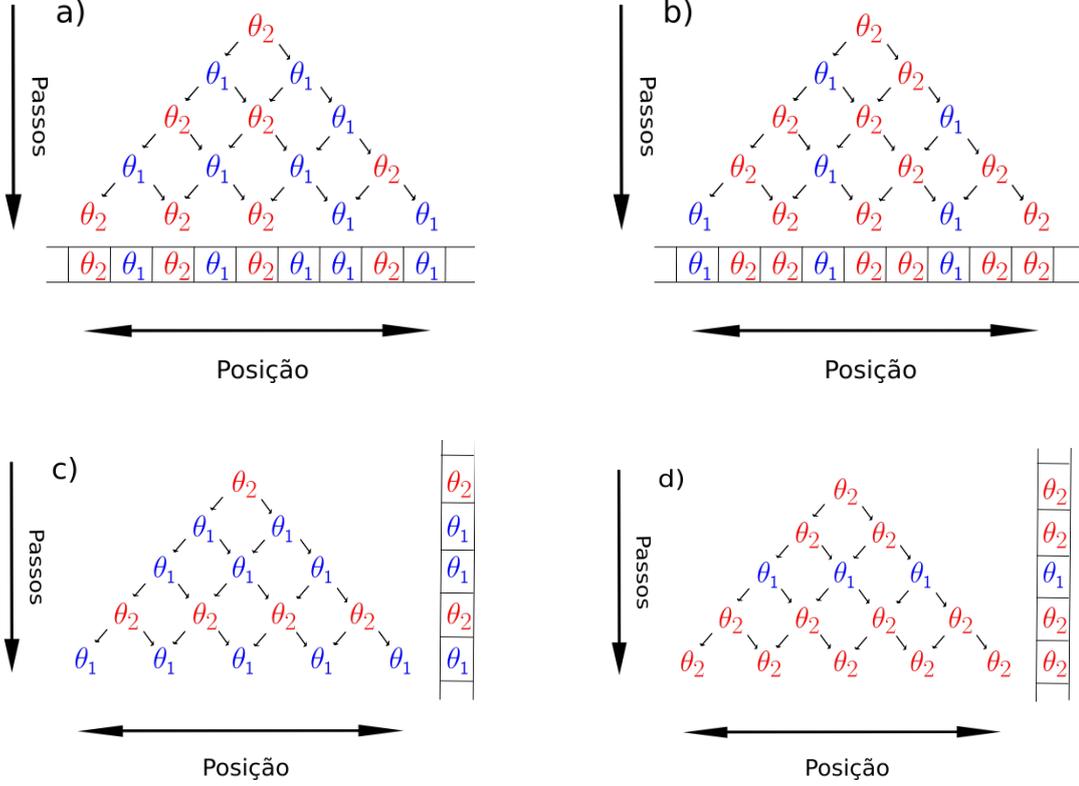
$$\hat{S} = |0\rangle \langle 0| \otimes \sum_i |n_i\rangle \langle n_i + 1| + |1\rangle \langle 1| \otimes \sum_i |n_i\rangle \langle n_i - 1|. \quad (14)$$

Assim, um passo da caminhada é dado por  $|\Psi(t+1)\rangle = \hat{U} |\Psi(t)\rangle$ , com o operador  $\hat{U} = \hat{S}(\hat{C} \otimes \mathbb{1}_p)$ , em que  $\mathbb{1}_p$  é a matriz densidade do espaço de Hilbert da posição  $\mathcal{H}_p$ . Assim como nas referências (LO GULLO et al, 2017), (RIBEIRO; MILMAN; MOSSERI, 2004), consideramos aqui uma desordem no operador moeda de forma que apenas dois tipos de operador participam da distribuição. Dentro de um circuito quântico é como se o sinal de ajuste das moedas quânticas para  $\theta_1$  sofresse alguma interferência de maneira que o sinal perturbado resultasse em um ajuste da moeda quântica para  $\theta_2$ . Uma representação gráfica do sinal com desordem randômica e independente é apresentada na figura 13.

Na figura 13a temos o caso de desordem espacial, ou seja, os operadores moedas não se alteram no tempo mas estão aleatoriamente e independentemente distribuídos ao longo das posições  $n$  da rede. Conforme visto, este cenário resulta em caminhadas quânticas localizadas (SCHREIBER et al, 2011), (YUE YIN; KATSANOS; EVANGELOU, 2008), (CRESPI et al, 2013) recuperando a fenomenologia da localização de Anderson. Na figura 13c, temos o caso com desordem temporal, ou seja, os operadores moedas estão homogeneamente distribuídos no sítio da rede em cada passo temporal, mas a sua configuração se altera de maneira independente e aleatória no tempo. Vimos também alguns estudos relatando que este regime (SHAPIRA et al, 2003), (SCHREIBER et al, 2011), (YUE YIN; KATSANOS; EVANGELOU, 2008) resulta em caminhadas quânticas difusivas.

O nosso modelo assume uma interferência mínima na abordagem da desordem, que é assumir correlações do tipo dímero aleatório. Tal correlação é representada nas figuras 13b e 13d, correspondendo respectivamente aos casos espacial e temporal. Vemos que a porta quântica formada a partir do ângulo  $\theta_2$  aparece sempre aos pares. Em 13b, como antes tínhamos uma desordem espacial, foi utilizada uma correlação espacial. Dessa

**Figura 13:** Representação dos tipos de caminhadas quânticas em tempo discreto investigadas: a) espacialmente desordenada, b) espacialmente correlacionada, c) temporalmente desordenada e d) temporalmente correlacionada.



Fonte: Autora.

forma, na distribuição espacial de portas ao longo da cadeia  $\theta_2$  aparece somente aos pares. Em 13d foi utilizada uma correlação temporal, então a distribuição da porta  $\theta_2$  ao longo do tempo (ou dos passos) acontece aos pares.

Para a investigação desses sistemas foi utilizado como condição inicial uma função de onda localizada em um sítio no centro da cadeia de tamanho  $N$ , com o estado do caminhante sendo dado por uma sobreposição dos estados  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ , como mostra a equação 15.

$$|\Psi(t = 0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + i |1\rangle) \otimes |N/2\rangle \quad (15)$$

A análise dos resultados foi feita usando a densidade de probabilidades e o desvio padrão. A densidade de probabilidade nos diz a probabilidade de encontrar o caminhante em uma posição  $n$  ao realizar uma medição no sistema. Ela foi calculada aplicando a equação 16, na qual  $a_n(t)$  é a amplitude de probabilidade associada ao estado  $|0\rangle$  e  $b_n(t)$  é a amplitude de probabilidade associada ao estado  $|1\rangle$ , ou seja:

$$|\psi_n(t)|^2 = a_n(t)a_n^*(t) + b_n(t)b_n^*(t). \quad (16)$$

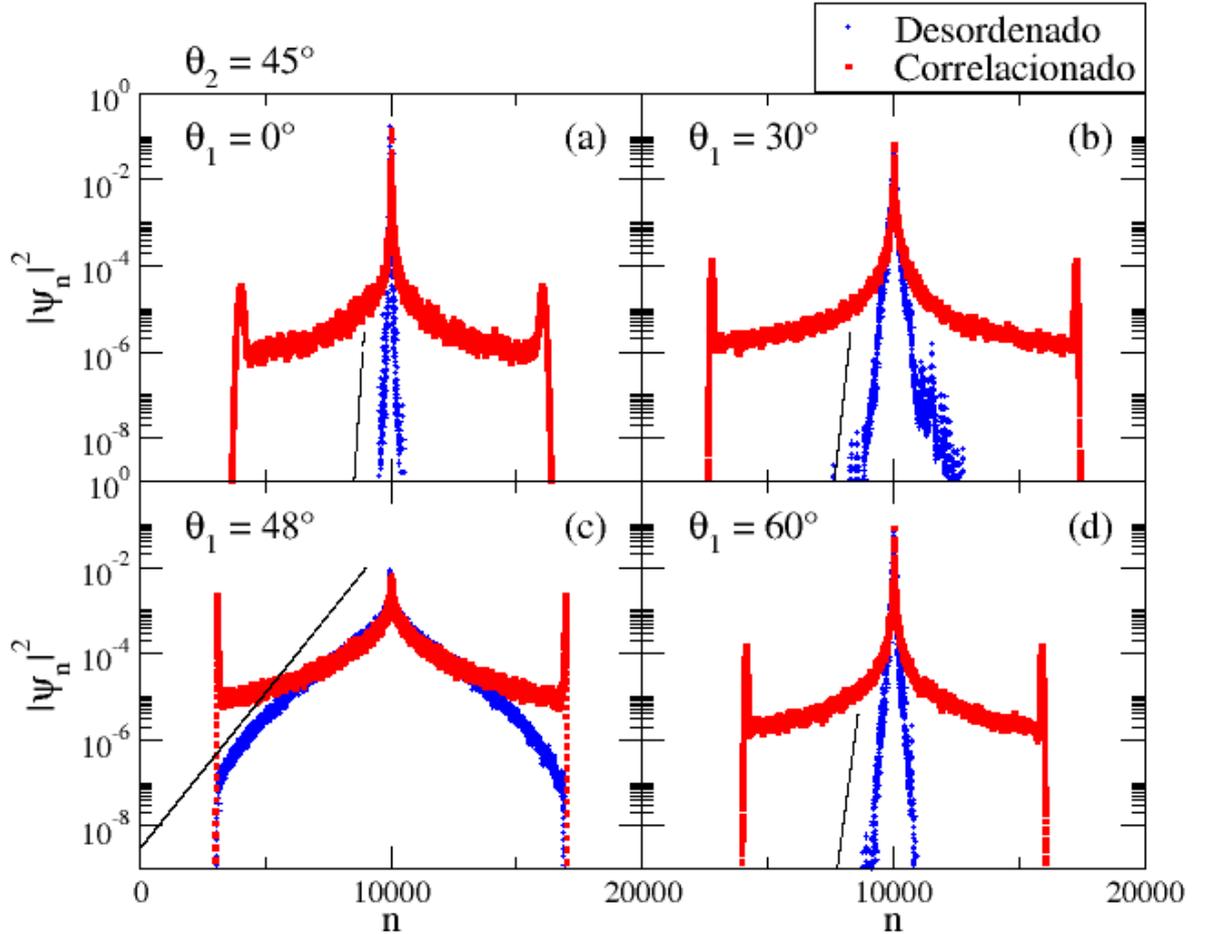
Para calcular o desvio padrão usamos a equação 17.

$$\sigma(t) = \sqrt{\sum_{n=1}^N (n - n_0)^2 |\psi(t)|^2 - \left( \sum_{n=1}^N (n - n_0) |\psi(t)|^2 \right)^2} \quad (17)$$

## 4.2 Desordem Espacial

Para facilitar a análise, apresentaremos os resultados para desordem espacial e temporal em seções distintas. Estabelecemos em ambos os casos uma comparação com o modelo com desordem aleatória e independente. Evoluindo as caminhadas quânticas desordenadas com e sem correlação durante  $10^4$  passos temporais obtemos a distribuição de probabilidade que está apresentada na figura 14.

**Figura 14:** Densidade de probabilidade para o caso desordenado espacial (em azul) e para o caso com correlação tipo dímero (em vermelho) quando  $\theta_2 = 45^\circ$ . A linha preta representa a localização exponencial do caso desordenado. Os ângulos utilizados para  $\theta_1$  foram: (a)  $0^\circ$ ; (b)  $30^\circ$ ; (c)  $48^\circ$ ; (d)  $60^\circ$ .



Fonte: Autora.

Na figura 14 consideramos a média a partir de 20 amostras. Nos gráficos apresentados nessa figura usamos como ângulo que forma o dímero  $\theta_2 = 45^\circ$ . Para maior clareza, investigamos diferentes configurações: a)  $\theta_1 = 0^\circ$ ; b)  $\theta_1 = 30^\circ$ ; c)  $\theta_1 = 48^\circ$ ; d)  $\theta_1 = 60^\circ$ . Os casos desordenados correspondem as curvas de cor azul, enquanto que os casos com a correlação do tipo dímero estão apresentados em vermelho.

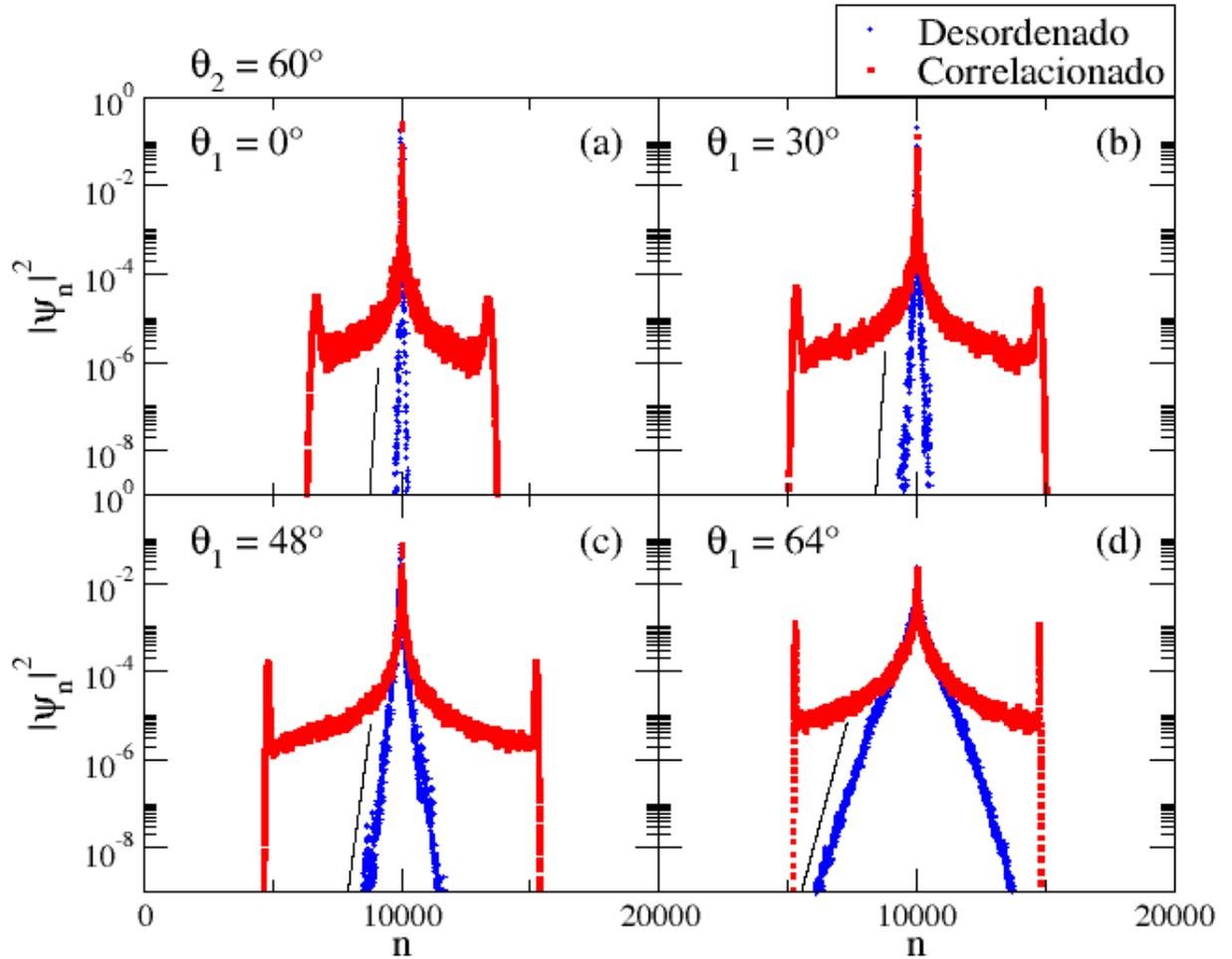
Para os casos desordenados, temos que a densidade de probabilidade diminui claramente conforme a curva se afasta da posição inicial. Para  $\theta_1 = 48^\circ$ , essa diminuição se dá principalmente na extremidades da distribuição. Já para  $\theta_1 = 0^\circ, 30^\circ$  ou  $60^\circ$ , como a diferença entre os ângulos das moedas é maior, a densidade diminui rapidamente já nas vizinhanças da posição inicial. A linha tracejada preta nos gráficos representa o decaimento exponencial, corroborando o regime localizado previsto na literatura (LEE; RAMAKRISHNANN, 1985), (SCHREIBER et al, 2011). Assim, nos casos desordenados sem correlação, o caminhante está localizado devido a desordem na distribuição do operador moeda.

Já no caso correlacionado, vemos que a densidade de probabilidade, apesar de continuar tendo o seu valor mais elevado na posição inicial, não diminui exponencialmente conforme a distância entre a posição  $n$  e a posição inicial aumenta. Inclusive, ela volta a ter um pico nas extremidades, remetendo ao caso ordenado. Assim, devido ao acréscimo da correlação tipo dímero, vemos a existência de uma grande probabilidade do caminhante ser encontrado longe da sua posição inicial. A diferença entre os dois cenários fica mais evidente quanto maior for a diferença entre  $\theta_2$  e  $\theta_1$ .

Na figura 15, consideramos novamente caminhadas quânticas após  $10^4$  passos temporais, utilizando a média a partir de 20 amostras. Entretanto, assumimos agora que  $\theta_2 = 60^\circ$ . Novamente a linha tracejada preta indica o decaimento exponencial do caso desordenado devido a localização de Anderson. Observamos que o comportamento permanece, ou seja, a presença de correlações que faz com que o caminhante tenha uma maior probabilidade de ser encontrado longe da posição inicial.

Para maior clareza, decidimos investigar a evolução temporal do desvio padrão. Na figura 16 apresentamos a evolução de  $\sigma(t)$ , calculado com o auxílio da equação 17, até o instante  $t = 10^5$  para  $\theta_2 = 45^\circ$  a partir da média de 10 amostras. Os valores de  $\theta_1$  analisados foram os mesmos utilizados na figura 14: (a)  $0^\circ$ ; (b)  $30^\circ$ ; (c)  $48^\circ$ ; (d)  $60^\circ$ . A reta tracejada preta é a evolução temporal de  $\sigma$  na CQO com o operador moeda  $\hat{C}(\theta = 45^\circ)$ .

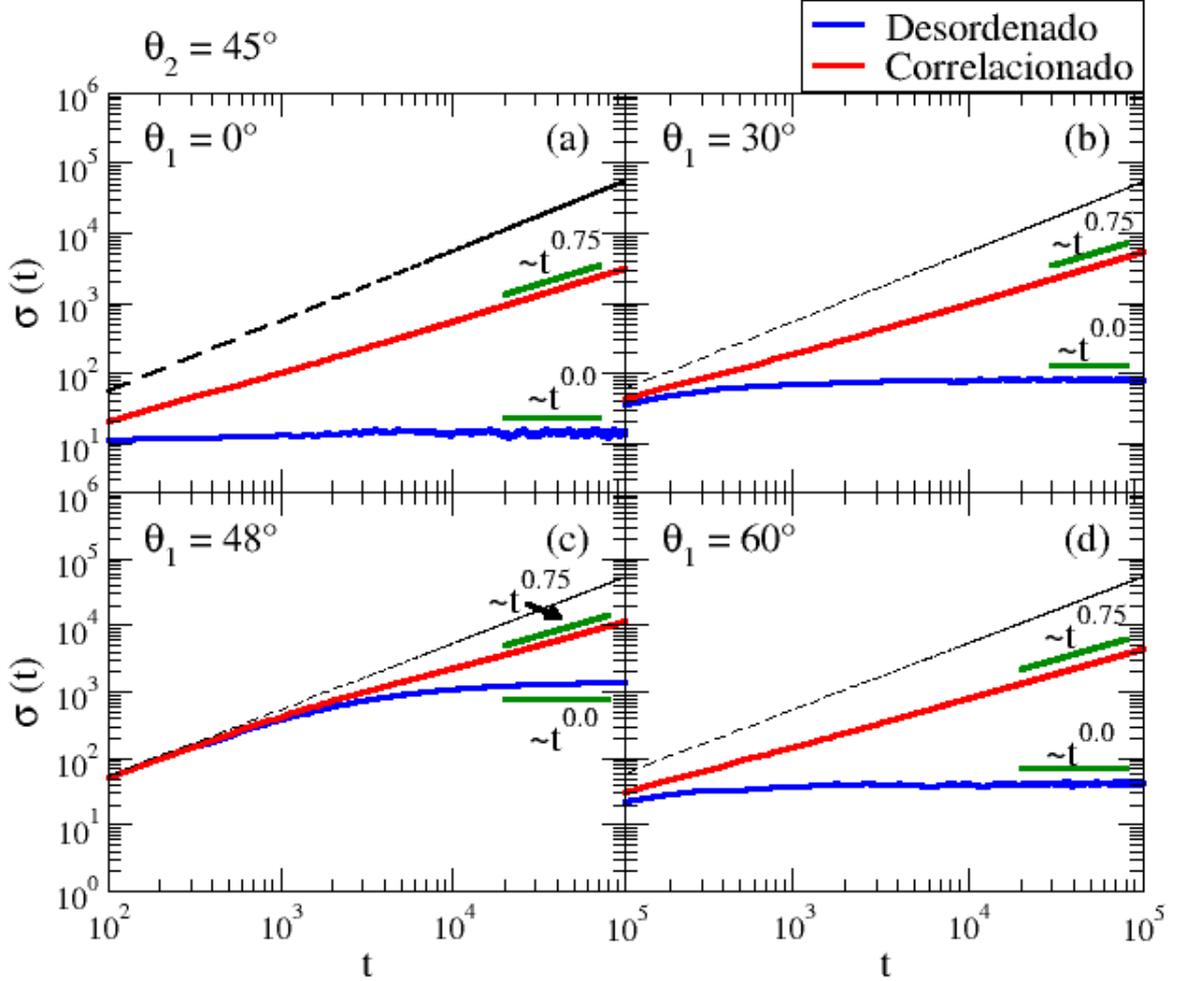
Figura 15: Densidade de probabilidade para o caso desordenado espacial (em azul) e para o caso com correlação tipo dímero (em vermelho) quando  $\theta_2 = 60^\circ$ . A linha preta representa a localização exponencial do caso desordenado. Os ângulos utilizados para  $\theta_1$  foram: (a)  $0^\circ$ ; (b)  $30^\circ$ ; (c)  $48^\circ$ ; (d)  $64^\circ$ .



Fonte: Autora.

Na figura 16, a curva preta corresponde ao caso da caminhada ordenada, que é balística com  $\sigma \propto t^{1,0}$ . Para o caso desordenado, vemos que, depois de um tempo transiente, as curvas levam a um valor constante. Nesse caso, temos então  $\sigma \propto t^{0,0}$ , o que é uma característica de um regime localizado. Isso confirma, em conjunto com o resultado encontrado anteriormente para a densidade de probabilidade, que temos uma localização de Anderson. Já para o caso com a correlação do tipo dímero, depois do regime transiente, temos que  $\sigma$  cresce proporcional a  $t^{0,75}$  para todos os valores de  $\theta_1$  analisados, sendo então um regime supedifusivo.

Figura 16: Evolução do desvio padrão para o caso com desordem espacial (azul) e correlação (vermelho) quando  $\theta_2 = 45^\circ$ . A linha tracejada preta é referente a CQO com  $\theta = 45^\circ$  mostrada na figura 4. Os valores de  $\theta_1$  utilizados foram: (a)  $0^\circ$ , (b)  $30^\circ$ , (c)  $48^\circ$  e (d)  $60^\circ$ .

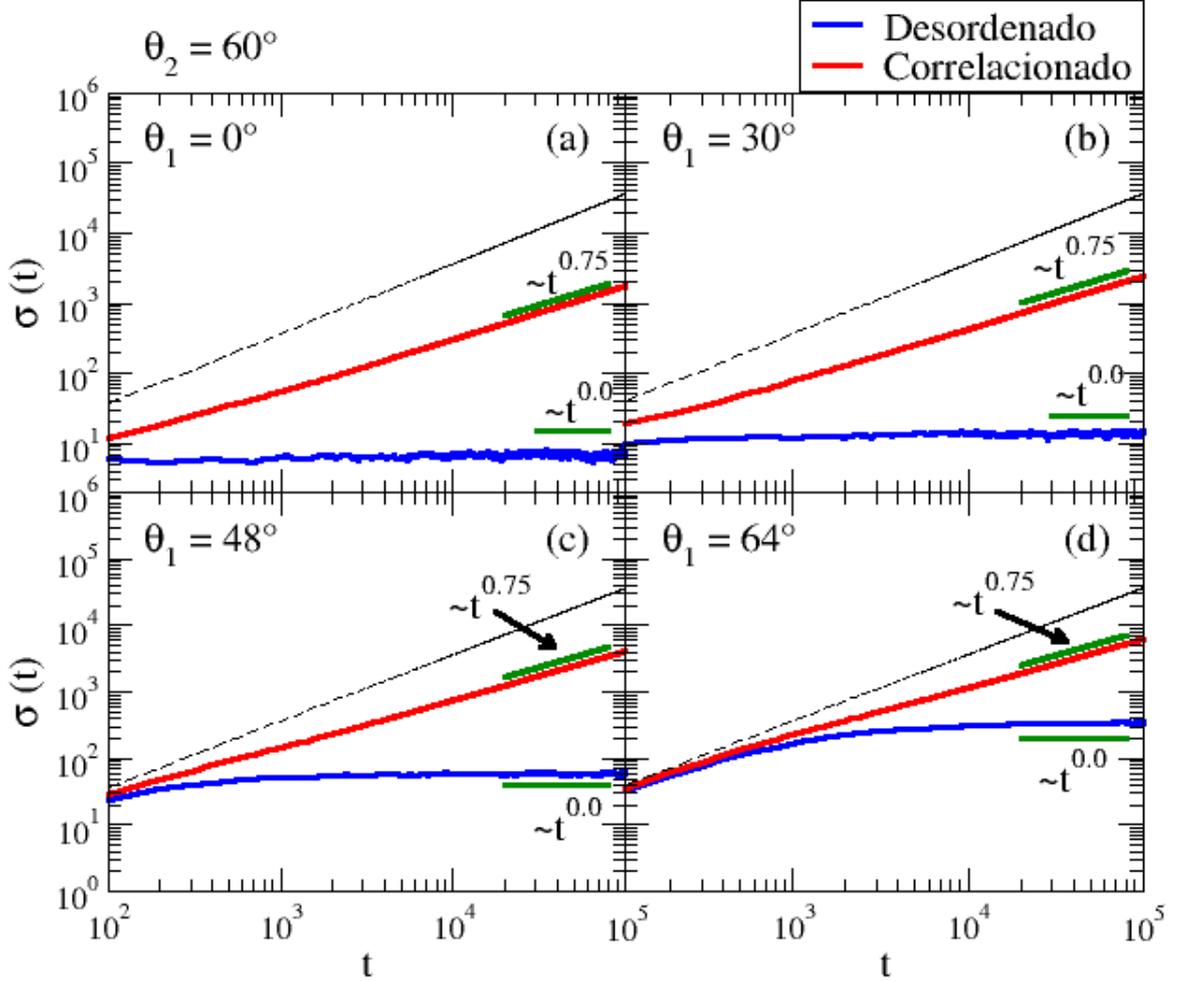


Fonte: Autora.

Para verificar se esse comportamento permanece para um valor diferente de  $\theta_2$ , na figura 17 analisamos a evolução do desvio padrão para  $\theta_2 = 60^\circ$ , também até o instante  $t = 10^5$  e a partir da média de 10 amostras. Novamente a reta tracejada preta corresponde a evolução temporal de  $\sigma$  na CQO com o operador moeda hadamard. Os valores de  $\theta_1$  investigados foram: (a)  $0^\circ$ , (b)  $30^\circ$ , (c)  $48^\circ$  e (d)  $64^\circ$ .

O comportamento encontrado é igual ao obtido quando  $\theta_2 = 45^\circ$ . Para o caso desordenado, temos o desvio padrão proporcional a  $t^{0,0}$ , indicando um regime localizado e para o caso com correlação temos  $\sigma \propto t^{0,75}$ , indicando um regime superdifusivo. Além disso, em ambas as figuras vemos que quanto maior a diferença  $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ , menos tempo leva para as curvas correspondentes a cada tipo de caminhada se diferenciarem. Ou seja, quanto maior a diferença entre os ângulos das moedas utilizadas, menor será o tempo de transição de regime.

Figura 17: Evolução do desvio padrão para o caso com desordem espacial (azul) e correlação (vermelho) quando  $\theta_2 = 60^\circ$ . A linha tracejada preta é referente a CQO com  $\theta = 45^\circ$  mostrada na figura 4. Os valores de  $\theta_1$  utilizados foram: (a)  $0^\circ$ , (b)  $30^\circ$ , (c)  $48^\circ$  e (d)  $64^\circ$ .

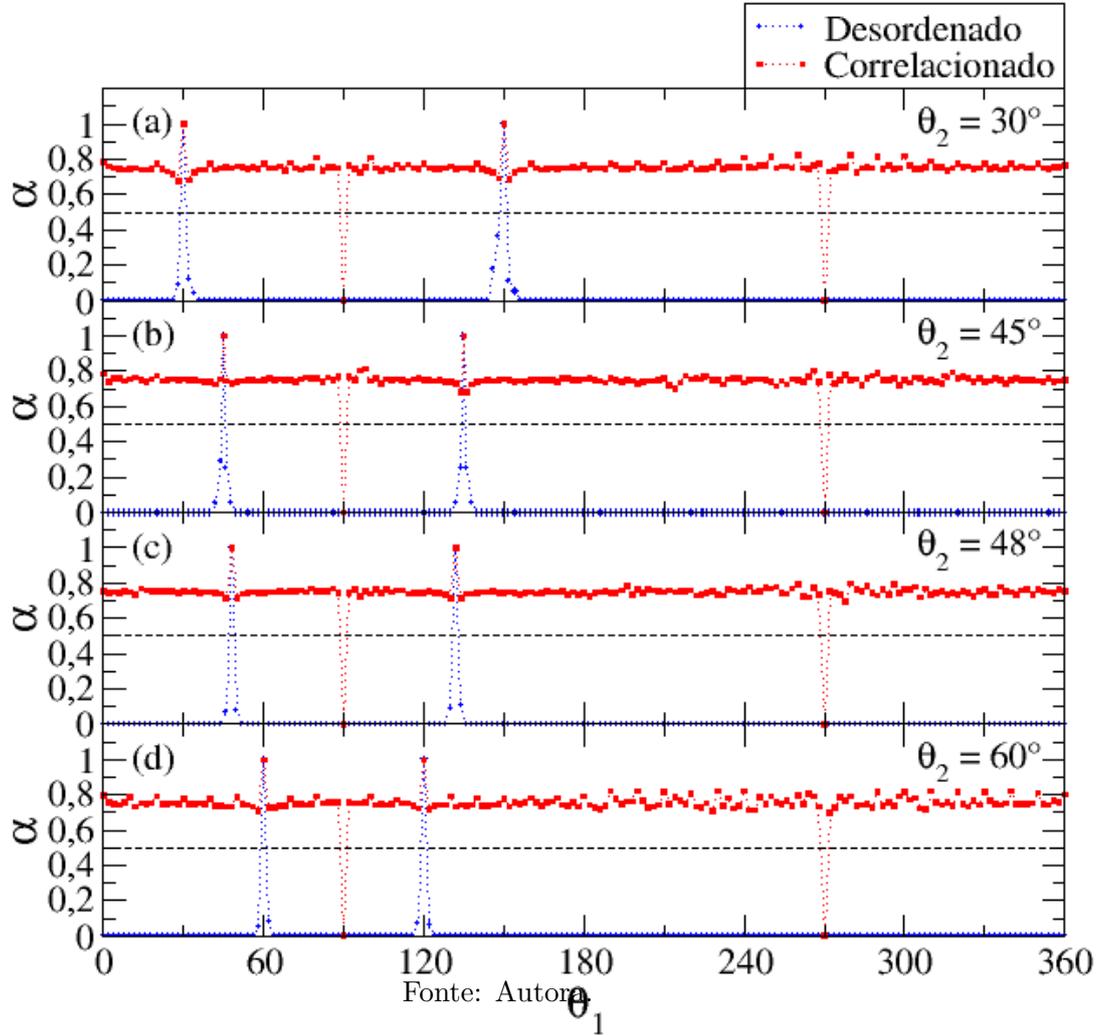


Fonte: Autora.

Para investigar, então, se esse comportamento permanece para todos os valores de  $\theta_1$  temos na figura 18 a análise do expoente  $\alpha$  do desvio padrão. Esse expoente foi obtido através da análise de lei de potência dos últimos  $2 \times 10^4$  passos de uma caminhada com  $10^5$  passos, a partir da média de 10 amostras. Foram analisados casos em que os ângulos de  $\theta_2$  são  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $48^\circ$  e  $60^\circ$ .

Em todos os gráficos temos que quando  $\theta_2 = \theta_1$  ou  $\theta_2 = 180^\circ - \theta_1$  o expoente  $\alpha$  é igual a 1, tanto no caso desordenado quanto com correlação, caracterizando um regime balístico. Isso ocorre pois temos  $\hat{C}(\theta_1) = \hat{C}(\theta_2)$ , então trata-se de uma caminhada ordenada, conhecida justamente por ter  $\sigma(t) \propto t^{1,0}$ . Além disso, quando  $\theta_1 = 90^\circ$  ou  $\theta_1 = 270^\circ$  temos  $\alpha = 0,0$  como aspecto dominante, visto que esses operadores moedas são responsáveis por sempre levar a caminhada ao regime localizado, independente de qual seja a outra porta quântica atuando no caminhante.

**Figura 18:** Expoente  $\alpha$  de  $t$  proporcionais aos quais  $\sigma(t)$  cresce para diferentes valores de  $\theta_2$ : (a)  $30^\circ$ , (b)  $45^\circ$ , (c)  $48^\circ$  e (d)  $60^\circ$ . As curvas em azul são o caso desordenado espacialmente e as curvas em vermelho o caso correlacionado. A linha preta tracejada representa o valor de  $\alpha$  no caso da caminhada clássica aleatória.

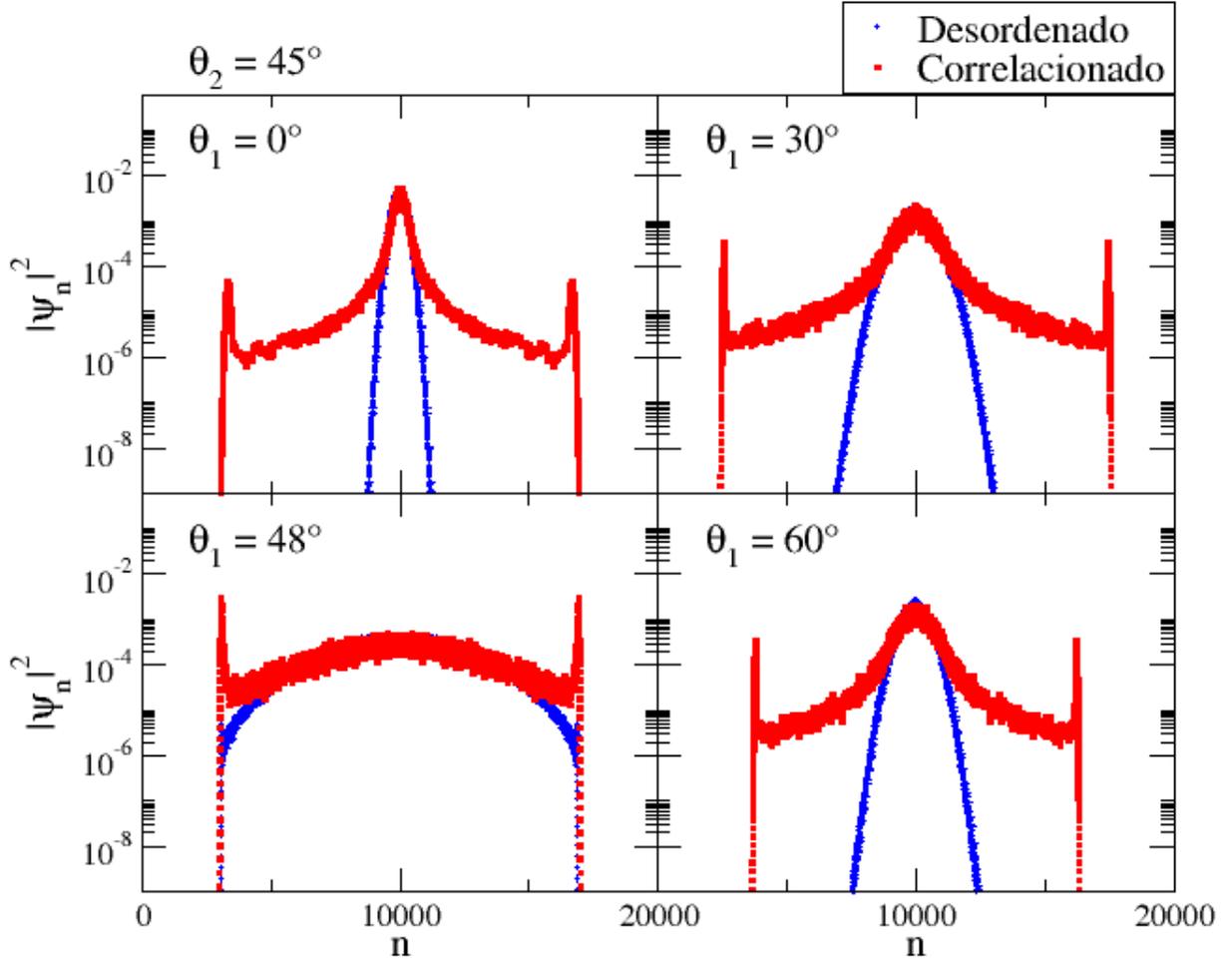


A linha preta pontilhada nos gráficos indica o valor de  $\alpha$  do caso difusivo. Sendo assim, enquanto que no caso desordenado temos um caminhante localizado, no caso correlacionado temos sempre  $\alpha \approx 0,7$ . Assim, a presença de correlações do tipo dímero na caminhada espacial torna o regime de transporte do sistema superdifusivo, favorecendo o alargamento da função de onda do caminhante independente de qual seja o valor de  $\theta_1$ .

### 4.3 Desordem Temporal

Analisamos então a densidade de probabilidade para o caso em que a desordem é temporal. Utilizamos a mesma condição inicial do caso com desordem espacial, dada pela equação 15, para o tempo  $10^4$ . Na figura 19 temos o resultado quando  $\theta_2 = 45^\circ$ , obtido a partir da média de 10 amostras. Os valores de  $\theta_1$  utilizados foram: (a)  $0^\circ$ , (b)  $30^\circ$ , (c)  $48^\circ$  e (d)  $60^\circ$ .

Figura 19: Densidade de probabilidade em  $t = 10^4$  para o caso desordenado temporal (em azul) e para o caso com correlação tipo dímero (em vermelho) quando  $\theta_2 = 45^\circ$ . Os valores de  $\theta_1$  investigados foram: (a)  $0^\circ$ , (b)  $30^\circ$ , (c)  $48^\circ$  e (d)  $60^\circ$ .

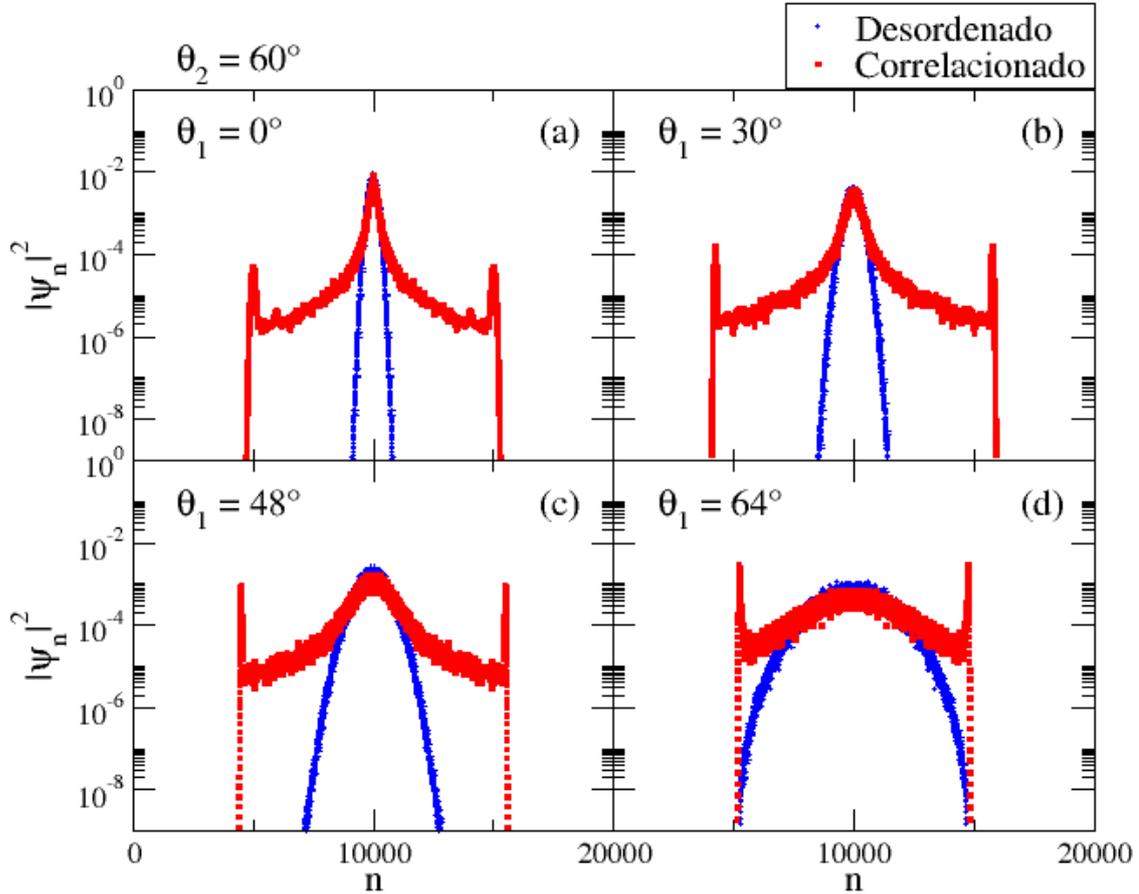


Fonte: Autora.

Nos casos desordenados, os gráficos da densidade de probabilidade têm um perfil igual ao gráfico da distribuição de probabilidade de uma caminhada clássica, como previsto na literatura (RIBEIRO; MILMAN; MOSSERI, 2004), (SCHREIBER, 2011) e mostrado na figura 1, variando apenas a largura da distribuição. Quando  $\theta_1 = 48^\circ$ , a largura da distribuição é igual a do caso correlacionado. Enquanto que para os outros ângulos,  $\theta_1 = 0^\circ, 30^\circ$  ou  $60^\circ$ , o caso com correlação tipo dímero tem mais posições com probabilidade não nula. Além disso, para os casos com correlação, as extremidades da densidade de probabilidade tem picos tais como no caso ordenado mostrado na figura 4.

Reproduzimos então a mesma caminhada, porém para  $\theta_2 = 60^\circ$ . Assim, obtemos os gráficos mostrados na figura 20. Neles percebemos o mesmo comportamento do caso anterior. As curvas com desordem apresentam uma distribuição binomial, semelhante a probabilidade da caminhada clássica aleatória. Já as curvas com correlação apresen-

Figura 20: Densidade de probabilidade em  $t = 10^4$  para o caso desordenado temporal (em azul) e para o caso com correlação tipo dímero (em vermelho) quando  $\theta_2 = 60^\circ$ . Os valores de  $\theta_1$  investigados foram: (a)  $0^\circ$ , (b)  $30^\circ$ , (c)  $48^\circ$  e (d)  $64^\circ$ .



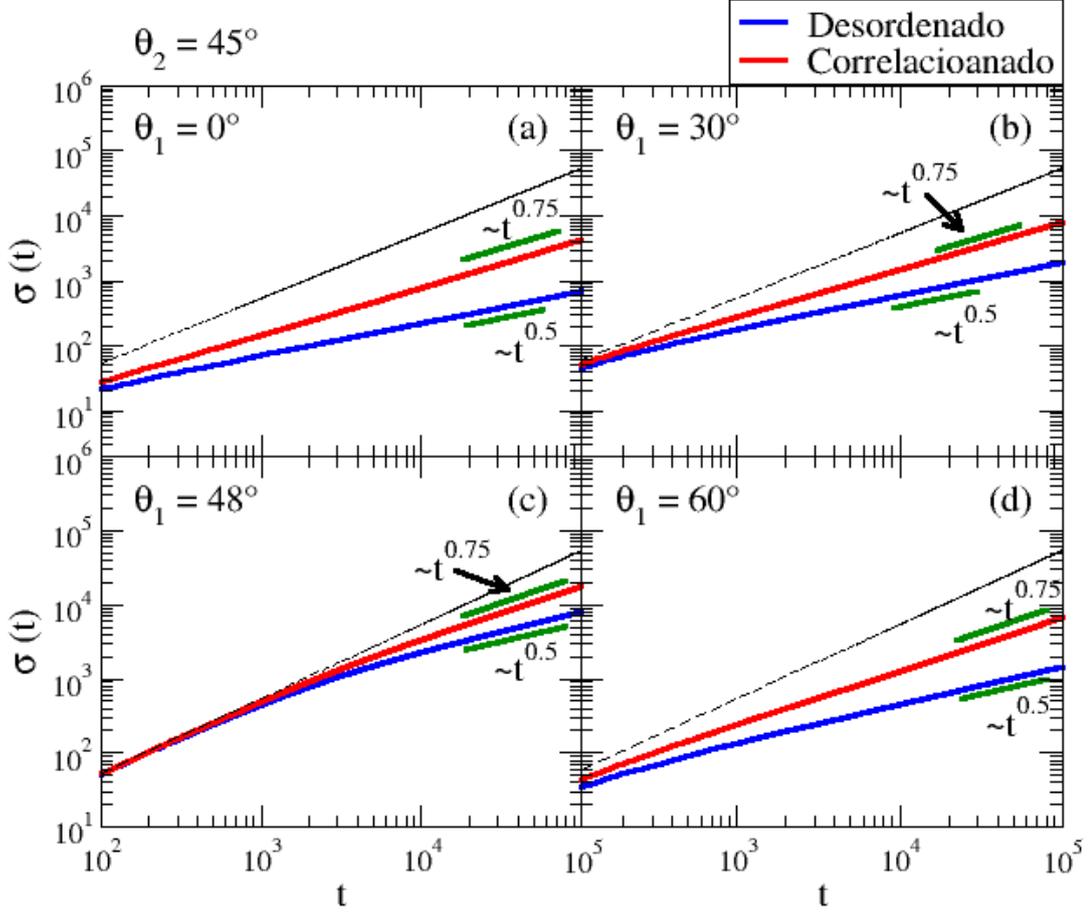
Fonte: Autora.

tam uma distribuição mais larga e com picos na extremidade. Assim, temos uma maior probabilidade de o caminhante ser encontrado distante da posição inicial.

Em seguida, tal como para o caso desordenado, calculamos a evolução temporal do desvio padrão até o tempo  $t = 10^5$ . Na figura 21, temos a evolução de  $\sigma(t)$  para  $\theta_2 = 45^\circ$ . A reta preta tracejada corresponde ao caso ordenado com  $\theta = 45^\circ$ . Foi realizada uma média de 10 amostras e os valores de  $\theta_1$  considerados foram: (a)  $0^\circ$ , (b)  $30^\circ$ , (c)  $48^\circ$  e (d)  $60^\circ$ .

Podemos ver que a reta referente ao caso ordenado tem um crescimento balístico. Enquanto isso, a curva de  $\sigma(t)$  para o caso desordenado cresce proporcional a  $t^{0,5}$ . Esse regime difusivo é uma característica da caminhada temporalmente desordenada. Para a caminhada com o modelo de dímero aleatório, temos que  $\sigma \propto t^{0,75}$ . Assim, tal como no caso espacial, no caso temporal também temos a correlação levando à caminhada a um regime superdifusivo. Além disso, quanto menor  $|\theta_1 - \theta_2|$ , mais tempo leva para se atingir o regime assintótico. Por isso que para  $\theta_1 = 48^\circ$  as curvas dos dois casos se diferenciarem

Figura 21: Evolução do desvio padrão para o caso com desordem espacial (azul) e correlação (vermelho) quando  $\theta_2 = 45^\circ$ . A linha tracejada preta é referente a CQO com  $\theta = 45^\circ$ . Os valores de  $\theta_1$  utilizados foram: (a)  $0^\circ$ , (b)  $30^\circ$ , (c)  $48^\circ$  e (d)  $60^\circ$ .



Fonte: Autora.

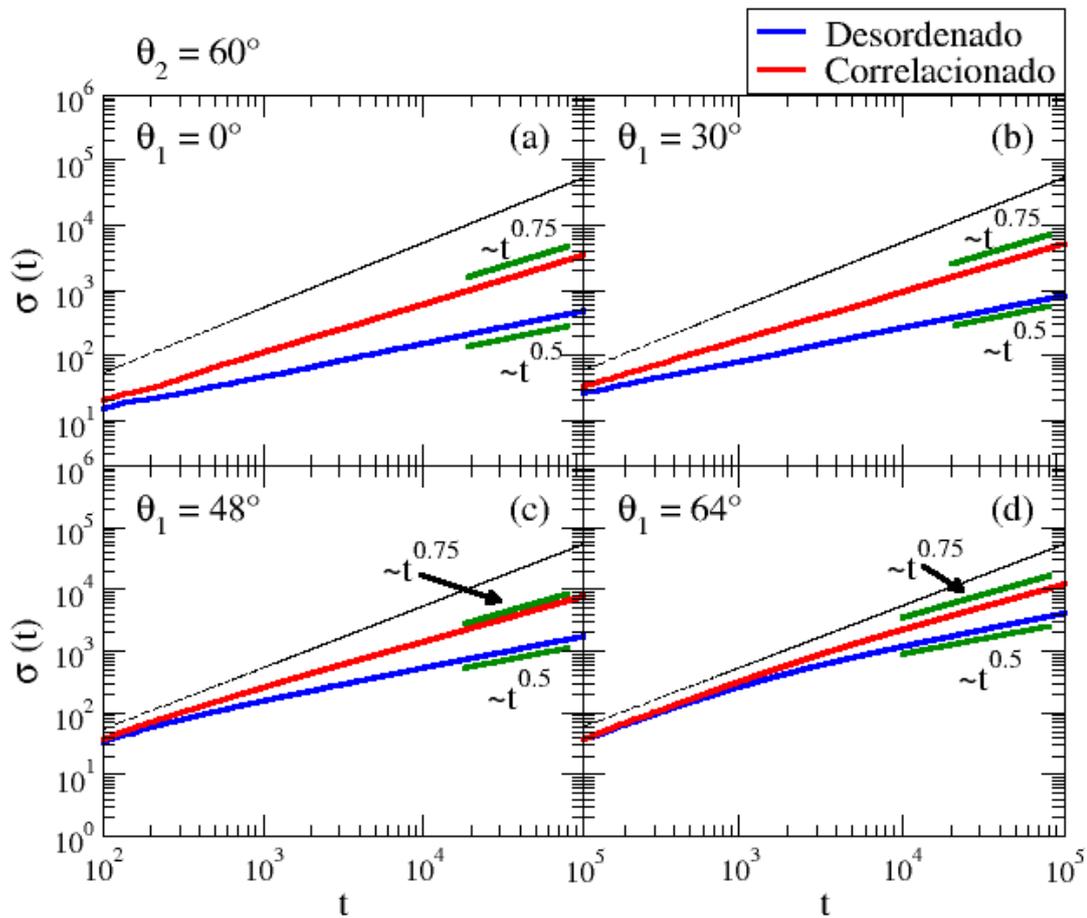
apenas próximo de  $t = 10^5$ , enquanto que para os outros valores de  $\theta_1$  elas se diferenciam antes  $t = 10^3$ . Observando então a figura 21c, vemos que para  $\theta_1 = 48^\circ$  em  $t = 10^4$  o regime assintótico em que  $\sigma \propto t^{0,75}$  ainda não foi alcançado. Por esse motivo que na figura 19c o perfil da densidade de probabilidade dos casos desordenados com e sem correlação é tão similar, tendo inclusive a mesma largura.

Em seguida, verificamos a evolução de  $\sigma(t)$  quando  $\theta_2 = 60^\circ$ , como mostrado na figura 22. A evolução foi realizada até o instante  $t = 10^5$ , com 10 amostras, e os ângulos de  $\theta_1$  analisados foram: (a)  $0^\circ$ , (b)  $30^\circ$ , (c)  $48^\circ$  e (d)  $64^\circ$ .

Para a caminhada desordenada, também para  $\theta_2 = 60^\circ$ , temos que  $\sigma(t) \propto t^{0,5}$  para todos os  $\theta_1$  analisados na figura 22. A inserção da correlação dímero fez então com que o expoente com o qual o desvio padrão aumenta mudasse para 0,75. Esse comportamento está presente em todos os valores de  $\theta_1$  observados. Assim, no caso em que  $\theta_2 = 60^\circ$  com correlação do tipo dímero aleatório no caso temporal, o regime da caminhada também é mudado de difusivo para balístico. Além disso, tal como no caso de  $\theta_2 = 45^\circ$ , o transiente

inicial, ou seja, o tempo que se leva para chegar ao regime assintótico, é maior quanto mais próximos forem os ângulos dos operadores moedas utilizados. Por isso que na figura 20d também observamos uma similaridade maior entre os casos sem e com correlação do que nos outros gráficos da figura 20, em que os valores de  $\theta_1$  e  $\theta_2$  estão mais distantes.

**Figura 22:** Evolução do desvio padrão para o caso com desordem temporal (azul) e correlação (vermelho) quando  $\theta_2 = 60^\circ$ . A linha tracejada preta é referente a CQO com  $\theta = 45^\circ$ . Os valores de  $\theta_1$  utilizados foram: (a)  $0^\circ$ , (b)  $30^\circ$ , (c)  $48^\circ$  e (d)  $64^\circ$ .



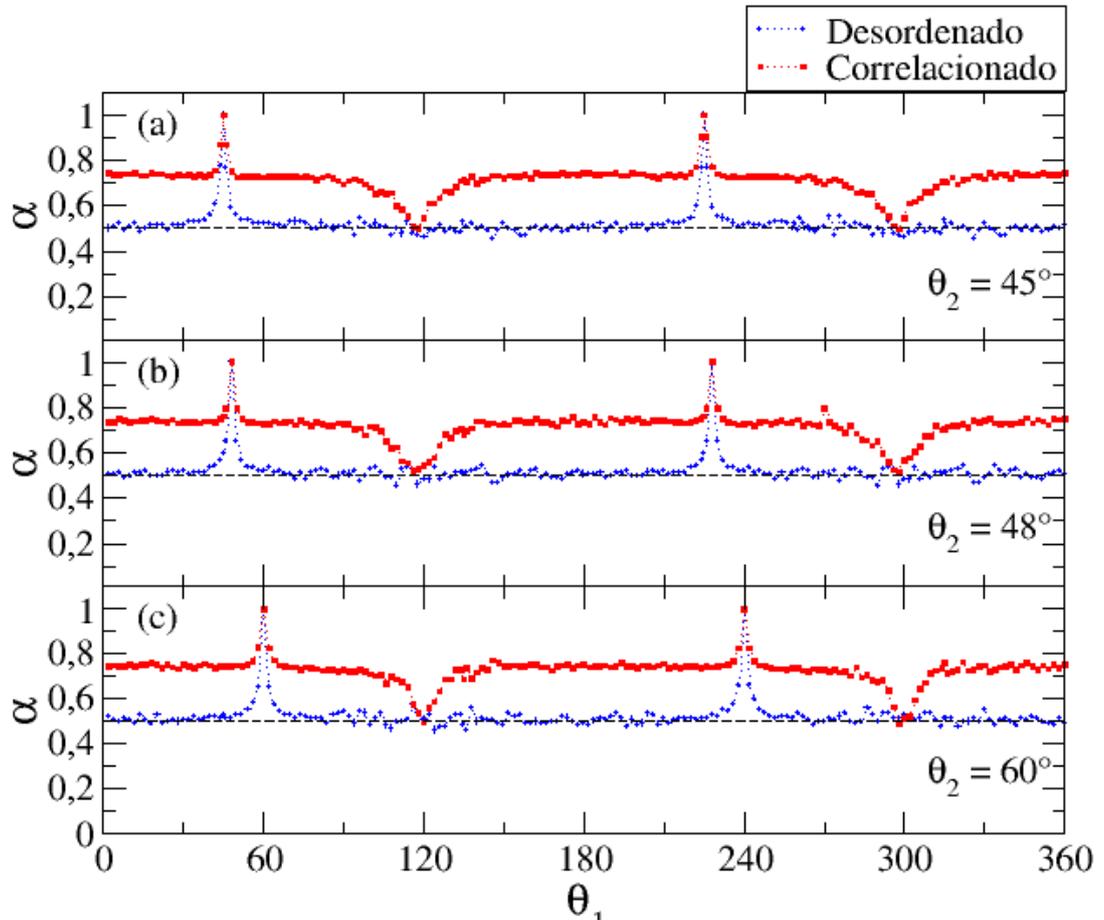
Fonte: Autora.

Em seguida analisamos o expoente  $\alpha$  de  $\sigma(t)$  no tempo longo no caso da desordem temporal. Foi analisada a dependência de  $\alpha$  com  $\theta_1$  para alguns valores de  $\theta_2$ :  $45^\circ$ ,  $48^\circ$  e  $60^\circ$ . Os resultados são mostrados nos gráficos da figura 23. A linha preta tracejada representa o valor de  $\alpha$  para a caminhada clássica aleatória.

Para o caso desordenado, quase todos os ângulos  $\theta_1$  levam a um valor de  $\alpha$  igual ou próximo de 0,5, que corresponde a uma caminhada de regime difusivo. As exceções ocorrem quando  $\theta_2 = \theta_1$ , que corresponde ao caso de uma caminhada ordenada, quando  $\theta_2 = \theta_1 + 180^\circ$ , devido as propriedades de  $\sin \theta$  e  $\cos \theta$  ou quando temos valores de  $\theta_1$  próximos dessas duas condições, pois o transiente inicial é maior, como indicado pelas

figuras 21 e 22, de forma que o regime assintótico ainda não foi alcançado no tempo analisado.

**Figura 23:** Expoente  $\alpha$  de  $t$  proporcionais aos quais  $\sigma(t)$  cresce para diferentes valores de  $\theta_2$ : (a)  $45^\circ$ , (b)  $48^\circ$  e (c)  $60^\circ$ . As curvas em azul são o caso desordenado temporalmente e as curvas em vermelho o caso correlacionado. A linha preta tracejada representa o valor de  $\alpha$  no caso da caminhada clássica aleatória.



Fonte: N. Amaral e A. R. C. Buarque.

Já para o caso correlacionado, quase todos os valores de  $\theta_1$  têm como resultado um  $\alpha$  próximo de 0,7, que corresponde a um regime superdifusivo. A exceção ocorre somente para  $\theta_1 = 120^\circ$  e  $\theta_1 = 300^\circ$ , para os quais a caminhada retorna ao regime difusivo. Assim, tal como no caso em que adicionamos a correlação ao modelo com desordem espacial, quando essa correlação é adicionada à desordem temporal também teremos uma mudança de regime.

## 5 Conclusões e Perspectivas

Nessa dissertação foram abordadas as caminhadas quânticas em tempo discreto com desordem. A desordem, que representa a presença de algum ruído no sistema, foi considerada sob duas formas diferentes. Primeiro foi discutido o caso com desordem espacial, no qual temos uma caminhada em que o ruído não depende do tempo, sendo constante durante toda a caminhada, mas depende da posição. Já a desordem temporal representa um ruído que não depende da posição do caminhante, ele depende da passagem de tempo durante a evolução da caminhada.

Os casos totalmente desordenados já são conhecidos da literatura (KONDOV, 2011), (YUE YIN; KATSANOS; EVANGELOU, 2008), (ROATI, 2008), (RIBEIRO; MILMAN; MOSSERI, 2004), levando a uma localização tipo Anderson do caminhante no caso espacial e a uma caminhada difusa, tal como a caminhada clássica aleatória, no caso temporal. A presença de correlações ou aperiodicidades também já foi relatada como sendo capaz de melhorar o regime da caminhada desordenada, levando até mesmo ao retorno de um regime balístico (LO GULLO et al, 2017), (RIBEIRO; MILMAN; MOSSERI, 2004), (SHAPIRA et al, 2003), (MENDES, 2021). Assim, nosso objetivo foi analisar o papel de um tipo de correlação ainda não empregado nessas desordens: a correlação do tipo dímero aleatório.

Nossos resultados mostram que esse tipo de correlação torna o regime da caminhada, antes localizado ou difusivo, em superdifusivo para quase todos os valores de  $\theta_1$  analisados. Assim, essa correlação favorece a propagação do caminhante em ambos os tipos de desordem analisadas. As exceções a esse favorecimento ocorrem somente para  $\theta_1 = 90^\circ$  ou  $\theta_1 = 270^\circ$  no caso espacial, ou para  $\theta_1 = 120^\circ$  ou  $\theta_1 = 300^\circ$  no caso temporal.

Dessa forma, como o modelo de dímero aleatório apresenta uma influência relevante sobre o regime da caminhada em presença de desordem, pretendemos futuramente investigar o seu papel em outros tipos de caminhadas em tempo discreto desordenadas. Algumas possibilidades de implementação desse modelo são nas caminhadas desordenadas de maior dimensionalidade, nas quais o caminhante pode se locomover em uma rede 2D, ou nas caminhadas em que além da desordem existe a presença de outros fenômenos físicos, como a não linearidade ou a existência de dois qubits que interagem entre si.

## Referências

- ABRAHAMAS, E. et al. Scaling Theory of Localization: Absence of Quantum Diffusion in Two Dimensions. **Physical Review Letters**, vol. 42, no. 10, p. 673, 1979. Citado na página 20.
- AHARONOV, Y.; DAVIDOVICH, L.; ZAGURY, N. Quantum random walks. **Physical Review A**, vol. 48, no. 2, p. 1687, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 14.
- ANDERSON, P. W. Absence of Diffusion in Certain Random Lattices. **Physical Review**, vol. 109, no. 5, p. 1492, 1958. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 21.
- ASBÓTH, J. K.; MALLICK, A. Topological delocalization in the completely disordered two-dimensional quantum walk. **Physical Review B**, vol. 102, p. 224202-1, 2020. Citado na página 12.
- BANERJEE, S. Symmetry-noise interplay in a quantum walk on an n-cycle. **Physical Review A**, vol. 78, p. 052316-1, 2008. Citado na página 12.
- BAÑULS, M. C. et al. Quantum walk with a time-dependent coin. **Physical Review A**, vol. 73, p. 062304-1, 2006. Citado 4 vezes nas páginas 12 e 20.
- BELLANI, V. et al. Experimental Evidence of Delocalized States in Random Dimer Superlattices. **Physical Review Letters**, vol. 82, no. 10, p. 2159, 1999. Citado na página 23.
- BILLY, J. et al. Direct observation of Anderson localization of matter waves in a controlled disorder. **Nature**, vol. 453, p. 891, 2008. Citado na página 22.
- BROOME, M. A. et al. Discrete Single-Photon Quantum Walks with Tunable Decoherence. **Physical Review Letters**, vol. 104, p. 153602-1, 2010. Citado na página 19.
- BRUN, T. A.; CARTERET, H. A.; AMBAINIS, Quantum to Classical Transition for Random Walks. **Physical Review Letters**, vol. 91, p. 130602, 2003. Citado na página 12.
- BUARQUE, A.R.C.; DIAS, W. S. Aperiodic space-inhomogeneous quantum walks: Localization properties, energy spectra, and enhancement of entanglement. **Physical Review E**, vol. 100, p. 032106-1, 2019. Citado 3 vezes nas páginas 12, 20 e 24.
- CARDANO, F. et al. Quantum walks and wavepacket dynamics on a lattice with twisted photons. **Science Advances**, vol. 1, 2015. Citado na página 19.
- CHANDRASHEKAR, C.M.; SRIKANTH, R.; BANERJEE, S. Symmetries and noise in quantum walk. **Physical Review A**, vol. 76, p. 022316-1, 2007. Citado na página 20.
- CHILDS, A. M. Universal Computation by Quantum Walk. **Physical Review Letters**, vol. 102, p. 180501-1, 2009. Citado na página 11.
- CRESPI, A. et al. Anderson localization of entangled photons in an integrated

quantum walk. **Nature Photonics**, vol. 7, p. 322, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 12, 19, 24 e 30.

DAS SARMA, S.; HE, S.; XIE, X. C. Mobility Edge in a Model One-Dimensional Potential. **Physical Review Letters**, vol. 61, no. 18, p. 2144, 1988. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.

DEUTSCH, D.; JOZSA, R. Rapid Solution of Problems by Quantum Computation. **Proceedings of The Royal Society A**, vol. 439, p. 553, 1992. Citado na página 11.

DE NICOLA, F. et al. Discrete-Time Quantum Walk with Phase Disorder: Localization and Entanglement Entropy. **Scientific Reports**, vol. 7, 2017. Citado na página 24.

DE NICOLA, F. et al. Quantum simulation of bosonic-fermionic non-interacting particles in disordered systems via quantum walk. **Physical Review A**, vol. 89, p. 032322-1, 2014. Citado na página 20, 24.

DE MOURA, F. A. B. F.; LYRA, M. L. Delocalization in the 1D Anderson Model with Long-Range Correlated Disorder. **Physical Review Letters**, vol. 81, no. 17, p. 3735, 1998. Citado na página 23.

DIAS, W. S. **Propriedades de transporte em sistemas de baixa dimensionalidade na presença de interação**. Tese – Instituto de Física, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2011. Citado na página 21.

DUNLAP, D. H.; WU, H-L.; PHILLIPS, P. W. Absence of Localization in a Random-Dimer Model. **Physical Review Letters**, vol. 65, no. 1, p. 88, 1990. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 29.

D-Wave Systems Inc. Disponível em: <<https://www.dwavesys.com/learn/quantum-computing/>>. Acesso em: 31 de Janeiro de 2022. Citado na página 11.

FEYNMAN, R. P. Quantum Mechanical Computers. **Optics News**, vol. 11, p. 11, 1985. Citado na página 11.

FLORES, J. C. Transport in models with correlated diagonal and off-diagonal disorder. **Journal of Physics: Condensed Matter**, vol. 1, p. 8471, 1989. Citado na página 22.

Google. Disponível em: <<https://quantumai.google/quantum-computing-service>>. Acesso em: 31 de Janeiro de 2022. Citado na página 11.

GERALDI, A. et al. Experimental Investigation of Superdiffusion via Coherent Disordered Quantum Walks. **Physical Review Letters**, vol. 123, p. 140501-1, 2019. Citado na página 20.

GERALDI, A. et al. Transient subdiffusion via disordered quantum walks. **Physical Review Research**, vol. 3, p. 023052-1, 2021. Citado 3 vezes nas páginas 12 e 20.

GHOSH, J. Simulating Anderson localization via a quantum walk on a one-dimensional lattice of superconducting qubits. **Physical Review A**, vol. 89, p.

022309-1, 2014. Citado na página 12.

GRINIASTY, M.; FISHMAN, S. Localization by Pseudorandom Potentials in One Dimension. **Physical Review Letters**, vol. 60, no. 13, p. 1334, 1988. Citado 2 vezes na página 22.

GROVER, L. K. Quantum Mechanics Helps in Searching for a Needle in a Haystack. **Physical Review Letters**, vol. 79, no. 2, p. 325, 1997. Citado na página 11.

HU, H. et al. Localization of ultrasound in a three-dimensional elastic network. **Nature Physics**, vol. 4, p. 945, 2008. Citado na página 22.

IBM. Disponível em: <<https://www.ibm.com/quantum-computing/>>. Acesso em: 31 de Janeiro de 2022. Citado na página 11.

JOYE, A. Random Time-Dependent Quantum Walks. **Communications in Mathematical Physics**, vol. 307, p. 65, 2011. Citado na página 12.

KARSKI, M. et al. Quantum Walk in Position Space with Single Optically Trapped Atoms. **Science**, vol. 325, p. 174, 2009. Citado na página 19.

KEATING, J. P. et al. Localization and its consequences for quantum walk algorithms and quantum communication. **Physical Review A**, vol. 76, p. 012315-1, 2007. Citado na página 20.

KONDOV, S. S. et al. Three-Dimensional Anderson Localization of Ultracold Matter. **Science**, vol. 334, p. 66, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 43.

KONNO, N. Localization of an inhomogeneous discrete-time quantum walk on the line. **Quantum Information Processing volume**, vol. 9, p. 405, 2010. Citado na página 12.

KRIVOLAPOV, Y. et al. Super-diffusion in optical realizations of Anderson localization. **New Journal of Physics**, vol. 14, p. 043047, 2012. Citado na página 22.

LEE, P. A.; RAMAKRISHNANN, T. V. Disordered electronic systems. **Reviews of Modern Physics**, vol. 57, no. 2, p. 287, 1985. Citado 3 vezes nas páginas 20, 22 e 32.

LEVI, L. et al. Hyper-transport of light and stochastic acceleration by evolving disorder. **Nature Physics**, vol. 8, p. 912, 2012. Citado na página 22.

LO GULLO, N. et al. Dynamics and energy spectra of aperiodic discrete-time quantum walks. **Physical Review E**, vol. 96, p. 012111-1, 2017. Citado 9 vezes nas páginas 12, 20, 25, 26, 29, 30 e 43.

MENDES, C. V. C. et al. Localization properties of a discrete-time 1D quantum walk with generalized exponential correlated disorder. **Physical Letters A**, vol. 394, p. 127196, 2021. Citado 4 vezes nas páginas 12, 20, 26 e 43.

MOTWANI, R.; RAGHAVAN, P. Randomized algorithms. **ACM Computing Surveys**, vol. 28, p. 33, 1996. Citado na página 13.

NAETHER, U. et al. Experimental observation of superdiffusive transport in

random dimer lattices. **New Journal of Physics**, vol. 15, p. 013045, 1999. Citado na página 23.

NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. **Quantum computation and quantum information**. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 11, 16 e 20.

OBUSE, H.; KAWAKAMI, N. Topological phases and delocalization of quantum walks in random environments. **Physical Review B**, vol. 84, p. 195139, 2011. Citado na página 28.

PENG, Y. F.; WANG, W.; YI, X. X. Discrete-time quantum walk with time-correlated noise. **Physical Review A**, vol. 103, p. 032205-1, 2021. Citado na página 12.

PORTUGAL, R. **Quantum Walks and Search Algorithms**. Cham: Springer, 2018. Citado na página 18.

REIF, F. **Fundamentals of statistical and thermal physics**. New York: McGraw-Hill Inc, 1965. Citado na página 14.

RIBEIRO, P.; MILMAN, P.; MOSSERI, R. Aperiodic Quantum Random Walks. **Physical Review Letters**, vol. 93, no. 19, p. 190503-1, 2004. Citado 6 vezes nas páginas 12, 28, 30, 38 e 43.

ROATI, G. et al. Anderson localization of a non-interacting Bose–Einstein condensate. **Nature**, vol. 453, p. 895, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 43.

RONG, Z. et al. Disorder and decoherence in coined quantum walks. **Chinese Physics B**, vol. 22, no. 11, p. 110312-1, 2013. Citado 2 vezes na página 20.

RYAN, C. A. et al. Experimental implementation of a discrete-time quantum random walk on an NMR quantum-information processor. **Physical Review A**, vol. 72, p. 062317-1, 2005. Citado na página 19.

SCHREIBER, A. et al. Decoherence and Disorder in Quantum Walks: From Ballistic Spread to Localization. **Physical Review Letters**, vol. 106, p. 180403-1, 2011. Citado 10 vezes nas páginas 23, 24, 26, 30, 32 e 38.

SCHREIBER, A. et al. Photons Walking the Line: A Quantum Walk with Adjustable Coin Operations. **Physical Review Letters**, vol. 104, p. 050502-1, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 20.

SCHWARTZ, T. et al. Transport and Anderson localization in disordered two-dimensional photonic lattices. **Nature**, vol. 446, p. 52, 2007. Citado na página 22.

SEGEV, M.; SILBERBERG, Y.; CHRISTODOULIDES, D. N. Anderson localization of light. **Nature Photonics**, vol. 7, p. 197, 2013. Citado na página 22.

SENEGAS-ANDRACA, S. E. Quantum walks: a comprehensive review. **Quantum Information Processing**, vol. 11, p. 1015, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 18.

SHAPIRA, D. et al. One-dimensional quantum walk with unitary noise. **Physical Review A**, vol. 68, p. 062315-1, 2003. Citado 7 vezes nas páginas 12, 20, 26, 30 e

43.

SHOR, P. W. Algorithms for Quantum Computation: Discrete Logarithms and Factoring. **Proceedings 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science**, p. 124, 1994. Citado na página 11.

VAKULCHYK, I. et al. Anderson localization in generalized discrete-time quantum walks. **Physical Review B**, vol. 96, p. 144204-1, 2017. Citado na página 12.

VIEIRA, R. **Emaranhamento em caminhadas quânticas desordenadas**. Dissertação – Centro de Ciências Tecnológicas, Universidade Estadual de Santa Catarina, Joinville, 2014. Citado na página 15.

VIEIRA, R.; AMORIM, E. P. M.; RIGOLIN, G. Dynamically Disordered Quantum Walk as a Maximal Entanglement Generator. **Physical Review Letters**, vol. 111, p. 180503-1, 2013. Citado na página 12.

VIEIRA, R.; AMORIM, E. P. M.; RIGOLIN, G. Entangling power of disordered quantum walks. **Physical Review A**, vol. 89, p. 042307-1, 2014. Citado na página 20.

XIA, F. et al. Random Walks: A Review of Algorithms and Applications. **IEEE Transactions on Emerging Topics in Computational Intelligence**, vol. 4, p. 95, 2020. Citado na página 13.

WIERSMA, D. S. et al. Localization of light in a disordered medium. **Nature**, vol. 390, p. 671, 1997. Citado na página 22.

WÓJCIK, A. et al. Trapping a particle of a quantum walk on the line. **Physical Review A**, vol. 85, p. 012329-1, 2012. Citado na página 20.

WÓJCIK, A. et al. Quasiperiodic Dynamics of a Quantum Walk on the Line. **Physical Review Letters**, vol. 93, no. 18, p. 180601-1, 2004. Citado na página 20.

YUE YIN; KATSANOS, D. E.; EVANGELOU, S. N. Quantum walks on a random environment. **Physical Review A**, vol. 77, p. 022302-1, 2008. Citado 5 vezes nas páginas 20, 24, 30 e 43.

ZÄHRINGER, F. et al. Realization of a Quantum Walk with One and Two Trapped Ions. **Physical Review Letters**, vol. 104, p. 100503-1, 2010. Citado na página 19.

ZHAO, J.; HU, Y. Y.; TONG, P. Q. The Effect of Quantum Coins on the Spreading of Binary Disordered Quantum Walk. **Chinese Physics Letters**, vol. 32, no. 6, p. 060501, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 28.