



Universidade Federal de Alagoas - UFAL
Instituto de Matemática - IM

Programa de Pós-Graduação em Matemática
em associação com a Universidade Federal da Bahia



MORENO PEREIRA BONUTTI

**ESTIMATIVA PARA O VOLUME DE CICLOS EM VARIEDADES HIPERBÓLICAS
COM BORDO**

Programa: PhD Program in Mathematics UFAL - UFBA

Orientador: Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva

Coorientador: Prof. Dr. André da Silva Graça Arroja Neves

MACEIÓ
MARÇO DE 2021

Moreno Pereira Bonutti

Estimativa para o volume de ciclos em variedades hiperbólicas com bordo

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas em Associação com a Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Henrique Batistada Silva
Coorientador: Prof. Dr. André da Silva Graça Arroja Neves

Maceió
Março de 2020

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

- B722e Bonutti, Moreno Pereira.
Estimativa para o volume de ciclos em variedades hiperbólicas com bordo /
Moreno Pereira Bonutti. – 2021.
59 f.
- Orientador: Márcio Henrique Batista da Silva.
Co-orientador: André da Silva Graça Arroja Neves.
Tese (Doutorado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto
de Matemática, Maceió : UFAL ; Salvador : Universidade Federal da Bahia, 2021.
- Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da
Universidade Federal de Alagoas em associação com a Universidade Federal da
Bahia.
- Bibliografia: f. 58-59.
1. Ciclos relativos. 2. Homologia das variedades. 3. Variedade hiperbólica com
bordo. I. Título.

CDU: 514.774:515.165

Estimativa para o Volume de Ciclos em Variedades Hiperbólicas com Bordo

Moreno Pereira Bonutti

Tese de doutorado na área de concentração Matemática com ênfase em Análise Geométrica apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas no dia 17 de Março de 2021, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de doutor em Matemática.



Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva

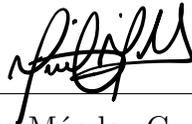
Orientador - UFAL

Banca Examinadora:



Prof. PhD. André da Silva Graça Arroja Neves

Co-orientador - The University of Chicago



Prof. Dr. Marco Aurelio Méndez Guaraco - Imperial College London



Prof. Dr. Marcos Petrucio de A. Cavalcante - UFAL



Prof. Dr. Abraão Mendes do Rêgo - UFAL

Aos meus queridos pais, Edney Tadeu Bonutti e
Lessir Pereira Bonutti, sem vocês eu não conse-
guiria.

AGRADECIMENTOS

Inicialmente, gostaria de agradecer ao meu orientador, Márcio Henrique Batista, por ter me aceitado como seu orientando. Agradeço também a todos os docentes do programa de pós-graduação do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, em especial ao professor Marcos Petrúcio e ao professor Abraão Mendes do Rego, dois amigos que sempre estiveram ao meu lado e ao longo desta jornada. Muito obrigado por todas as palavras de incentivo e apoio matemático que me deram.

Agradeço muito, ao professor André Neves por ter me recebido como estudante de doutorado sanduíche na Universidade de Chicago e por ter aceitado participar da banca avaliadora deste trabalho e ser o coorientador da tese. Gostaria muito de agradecer meu amigo, Marco Guaraco, por todo apoio que me foi dado no período que passei em Chicago, por ter aceitado avaliar meu trabalho compondo a banca examinadora e por participar do maior grupo de samba multinacional já criado, uma parceria entre Brasil, Venezuela e Coreia do Sul: o South Side Samba Club.

Agradeço também ao corpo docente do curso de matemática, Campus Arapiraca, por ter concedido-me o afastamento para esta tão sonhada qualificação. Ainda em Arapiraca, gostaria de deixar meus agradecimentos aos professores Askery Canabarro, André de Lima Moura, Emerson de Lima, José Arnaldo e Rafel Saraiva por toda amizade ao longo destes anos, em especial aos meus grandes amigos, José Henrique Lopes e Willamys Cristiano, que sempre me acolheram com palavras motivacionais, por exemplo ao me chamarem de "mememestre". Aos meus colegas de doutorado, Iury Domingos, Diego Alves, Ranilze e Gilberto, em especial aos meus grande amigos Anderson de Lima, Manuel Ceaca e Wagner Xavier, exemplos de pessoas boas. As conversas sobre matemática e os momentos de descanso foram importantíssimos. Agradeço muito aos meus amigos Celso Viana e Pedro Gaspar por sempre disponibilizar um pouco do seu tempo para discutir assuntos pertinentes ao meu trabalho.

Agradeço muito à minha companheira, Chirlene Lays, que ao longo dos últimos anos, ficou lado a lado comigo, aguentando e dividindo todo stress de um curso de doutorado. Lalá, meu amor, muito obrigado! Você não sabe o quanto você me ajudou com frases simples que sempre fizeram a diferença: "Você vai conseguir!", "Relaxe, amorzinho, via dar tudo certo!" e principalmente: "Amor, subi duas cervejinhas para relaxarmos". Agradeço muito minha irmã, Natalia Bonutti, por sempre me colocar pra cima e me apoiar em todas as situações. Por fim, e mais importante, agradeço imensamente aos meus pais, Edney Tadeu Bonutti (Dneyzão para os íntimos) e Lessir Pereira Bonutti (Dona Lessir) minha mãezinha. Vocês foram os principais responsáveis por este objetivo conquistado, pois para o mesmo, eu precisei apenas sentar e estudar. Graças aos dois, eu nunca precisei trabalhar, mesmo quando precisamos, vocês não deixaram, puxaram toda a responsabilidade e disseram que minha única obrigação era me esforçar ao máximo. Espero um dia poder retribuir o que vocês fizeram por mim Tudo o que tenho de honestidade, seriedade em desenvolver um trabalho e respeito por todas as pessoas,

eu aprendi com você, meu pai. A garra, a bondade e este jeito de acreditar sempre no melhor, aprendi contigo, minha mãe. Muito obrigado por tudo. Este trabalho não seria concluído sem a ajuda de vocês. A cada um de vocês, fica aqui meu muito obrigado. A minha tese de doutorado não seria concluída sem a ajuda de vocês. Amo cada um de vocês e como diria Mano Brown: "Não devo, não temo, dá meu copo, que já era".

Don't worry about a thing. 'Cause every little
thing. Gonna be all right.

Bob Marley

RESUMO

Neste trabalho será provado dois resultados para o modelo $(M, \partial M) = (\Sigma, \partial\Sigma) \times \mathbb{S}^1$, onde $(\Sigma, \partial\Sigma)$ é uma variedade hiperbólica com bordo totalmente geodésico. No primeiro resultado, usando as técnicas de Larry Guth, sob uma limitação das bolas unitárias no recobrimento universal, será mostrado que o volume de uma variedade hiperbólica com bordo totalmente geodésico possui uma relação com o seu volume simplicial. Além disso, sob essa mesma hipótese, será generalizado um resultado de Hannah Alpert e Kei Funano, mostrando que a área da classe de homologia relativa $[(\Sigma, \partial\Sigma)]$ em $(M, \partial M)$, com coeficientes em \mathbb{Z}_2 , é proporcional à área de $(\Sigma, \partial\Sigma)$.

Palavras-chave: Ciclos relativos. Homologia relativa. Variedade hiperbólica com bordo.

ABSTRACT

In this work, we prove two results for the model $(M, \partial M) = (\Sigma, \partial\Sigma) \times \mathbb{S}^1$, where $(\Sigma, \partial\Sigma)$ is a hyperbolic manifold with totally geodesic boundary. In the first result, using the Larry Guth's techniques and under an upper bound on the volumes of unit balls in the universal cover of $(M, \partial M)$, we show that the volume of a hyperbolic manifold with totally geodesic boundary has a relation to ship its simplicial volume. Moreover, under those hypothesis, we generalize a Hannah Alpert and Kei Funano result, showing that the area of \mathbb{Z}_2 -relative homology class $[(\Sigma, \partial\Sigma)]$ in $(M, \partial M)$ is proportional to the area of $(\Sigma, \partial\Sigma)$.

Keywords: Relative cycles. Relative homology group. Hyperbolic manifold with boundary.

SUMÁRIO

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 11 |
| 2 | CONCEITOS PRELIMINARES | 16 |
| 2.1 | Homologia | 16 |
| 2.1.1 | Homologia Singular | 16 |
| 2.1.2 | Homologia Relativa | 18 |
| 2.2 | Volume simplicial | 20 |
| 3 | O NERVO RETANGULAR E O TEOREMA DE VOLUME COM BORDO | 23 |
| 4 | O LEMA DE ESTABILIDADE COM BORDO E O TEOREMA DA ÁREA COM BORDO | 44 |
| 5 | CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS | 53 |
| | REFERÊNCIAS | 55 |

1 INTRODUÇÃO

Seja (Σ^n, g) uma variedade variedade hiperbólica n -dimensional e compacta podendo ou não ter bordo vazio. Entenda variedade hiperbólica por uma variedade riemanniana que admite uma métrica, g_Σ , com curvatura seccional constante igual a -1 . Ao longo de todo o trabalho, Σ é a notação usada para uma variedade hiperbólica, com ou sem bordo, e g_Σ é a métrica que tem curvatura constante igual a -1 .

Um dos problemas mais estudados da geometria diferencial é entender como a curvatura escalar e a topologia da variedade se relacionam. Um problema de rigidez muito interessante a ser estudado é como se comporta uma variedade hiperbólica quando munida de uma métrica diferente da métrica g_Σ . No ponto de vista de Gromov, a curvatura escalar de uma variedade descreve como o volume de bolas pequenas é comparado com o volume de bolas euclidianas de mesmo raio. A diferença entre esses volumes pode ser expressada em termos da curvatura escalar, pela seguinte expansão assintótica:

$$\text{Vol}(B(p, r)) = \omega_n r^n \left(1 - \frac{\text{scal}_g(p)}{6(n+2)} r^2 + O(r^3) \right), \quad (1)$$

quando $r \rightarrow 0$, onde ω_n é o volume da bola unitária em \mathbb{R}^n . Usando o ponto de vista de Gromov e denotando por $V_M(r) = \sup_{p \in M} \text{Vol}(B(p, r))$, Larry Guth provou o seguinte resultado:

Teorema 1.1 (Teorema de volume, (GUTH, 2011)). *Sejam (Σ, g_Σ) uma variedade hiperbólica n -dimensional fechada e g uma outra métrica em Σ . Suponha que*

$$V_{(\tilde{\Sigma}, \tilde{g})}(1) \leq V_{\mathbb{H}^n}(1), \quad (2)$$

onde \mathbb{H}^n é o espaço hiperbólico n -dimensional e $(\tilde{\Sigma}, \tilde{g})$ é o recobrimento universal de (Σ, g) .

Então

$$\text{Vol}(\Sigma, g) \geq \text{const}(n) \cdot \text{Vol}(\Sigma, g_\Sigma).$$

A limitação no volume das bolas na hipótese (2), no Teorema de volume, é uma limitação da curvatura escalar macroscópica que, baseada nas ideias de Gromov, foi definida por Guth em (GUTH, 2010a). As hipóteses sobre o volume de bolas unitárias no recobrimento universal podem ser vistas como limitantes inferiores da curvatura escalar macroscópica assim como limitantes inferiores da curvatura escalar fornecem limitantes superiores para volumes de bolas infinitesimais. Gromov sugeriu que teoremas sobre curvatura escalar devem ter um análogo envolvendo volumes de bolas unitárias. Em resumo, a curvatura escalar macroscópica é definida da seguinte maneira: considere (M^n, g) uma variedade riemanniana, um raio $r > 0$ e p um

ponto qualquer de M e denote por $\tilde{V}(p, r) \subset (\tilde{M}, \tilde{g})$ o volume da bola de raio r centrada em um levantamento de p e $\tilde{V}_S(r)$ da bola de raio r num espaço simplesmente conexo com curvatura escalar constante igual a S , ou seja, o espaço euclidiano, quando $S = 0$, a esfera quando $S > 0$ e o espaço hiperbólico se $S < 0$. A curvatura escalar macroscópica na escala r em p é o número S , tal que $\tilde{V}(p, r) = \tilde{V}_S(r)$.

Exemplo 1.1. *Qualquer toro flat, (T^n, g) tem curvatura escalar macroscópica zero, em qualquer escala r . De fato, pois o recobrimento universal do toro flat é o espaço euclidiano, ou seja, $\tilde{V}(p, r) = \omega \cdot r^n$, para cada $p \in (T^n, g)$. Note também que se não considerar o recobrimento universal, ou seja, considerar um recobrimento compacto, um toro flat pode ter curvatura escalar macroscópica positiva numa certa escala r , mais precisamente, sempre que r for maior que o diâmetro de (T^n, g) . Para mais informações, o leitor interessado, pode ler o trabalho (GUTH, 2010a) de Larry Guth.*

Ainda pensando na relação entre a curvatura escalar e a topologia, o matemático Richard Schoen, em (SCHOEN, 1989), conjecturou o seguinte:

Conjectura 1.1 ((SCHOEN, 1989)). *Sejam (Σ, g_Σ) uma variedade hiperbólica n -dimensional e fechada e g uma outra métrica em Σ tal que $\text{scal}_g \geq \text{scal}_{g_\Sigma} = -1$. Então a métrica de Σ que minimiza volume é a métrica de curvatura constante, ou seja, $\text{Vol}(\Sigma, g) \geq \text{Vol}(\Sigma, g_\Sigma)$.*

Note que do ponto de vista da curvatura escalar macroscópica, o Teorema 1.1, Teorema de Volume, a menos da constante dimensional multiplicativa, é equivalente à Conjectura de Schoen, uma vez que a hipótese (2) é equivalente a dizer que a curvatura escalar macroscópica de (Σ, g) é maior que a curvatura escalar macroscópica de (Σ, g_Σ) , que é equivalente a dizer que as curvaturas escalares, nas métricas g e g_Σ , satisfazem $\text{scal}_g \geq \text{scal}_{g_\Sigma}$. Esta conjectura ainda está em aberto para dimensões alta.

Baseados nestes resultados obtidos por Guth, Hannah Alpert e Kei Funano se perguntaram se o resultado continuava sendo válido para uma variedade do tipo $M^{n+1} = \Sigma^n \times X^m$, onde Σ^n é uma variedade hiperbólica n -dimensional fechada e X^m é uma variedade riemanniana m -dimensional fechada. Pensando nesse modelo, Alpert e Funano, em (ALPERT; FUNANO, 2017), mostraram que é possível construir exemplos com áreas suficientemente pequenas, quando $m \geq 2$. Porém, quando $m = 1$, obtiveram um resultado parecido com o Teorema de volume, de Larry Guth. Eles mostraram que no modelo $M = \Sigma^n \times \mathbb{S}^1$, a métrica que minimiza área na classe de homologia $H_n(\Sigma \times \{*\}, \mathbb{Z}_2)$ é a métrica $g_\Sigma \times g_{\mathbb{S}^1}$, onde $g_{\mathbb{S}^1}$ é a métrica canônica de \mathbb{S}^1 . Em (ALPERT; FUNANO, 2017), eles provaram os seguintes resultados:

Proposição 1.1. *Sejam Σ uma variedade hiperbólica fechada de dimensão n e X uma variedade riemanniana fechada de dimensão $m \geq 2$. Então para qualquer $\epsilon > 0$, existe uma métrica g em $M = \Sigma \times X$ de forma que o volume das bolas unitárias no recobrimento universal satisfazem*

$$V_{(\tilde{M}, \tilde{g})}(1) < V_0,$$

onde $V_0 = 2 \cdot V_{\mathbb{R}^{n+m}}(1)$, mas simultaneamente existe uma subvariedade isotópica a $\Sigma \times \{*\}$ com volume menor que ϵ .

Teorema 1.2 (Teorema de Área, (ALPERT; FUNANO, 2017)). *Sejam (Σ, g_Σ) uma variedade hiperbólica n -dimensional fechada, g uma métrica em $M = \Sigma \times \mathbb{S}^1$ tal que*

$$V_{(\tilde{M}, \tilde{g})}(1) \leq V_0$$

para algum valor V_0 . Considere $Z \subset M$ uma hipersuperfície suave mergulhada e homóloga a $\Sigma \times \{*\}$ sob coeficientes em \mathbb{Z}_2 . Então,

$$\text{Area}(Z, g) \geq \text{const}(n, V_0) \cdot \text{Area}(\Sigma, g_\Sigma).$$

Diante da conjectura de Schoen, Conjectura 1.1, do Teorema de Volume de Larry Guth, Teorema 1.1, e do Teorema da Área de Hannah Alperito e Kei Funano, Teorema 1.2, surgiram as seguintes perguntas: Será que a conjectura de Schoen também vale se a variedade hiperbólica for compacta e com bordo não-vazio? Os resultados de Guth, Alpert e Funano também funcionam para o caso compacto com bordo? Neste trabalho será respondida a segunda pergunta, cuja resposta é positiva quando o bordo é totalmente geodésico. Mais especificamente, o principal objetivo deste trabalho são os dois resultados a seguir:

Teorema 1.3 (Teorema de Área com Bordo). *Sejam $\Sigma = (\Sigma, \partial\Sigma; g_\Sigma)$ uma variedade hiperbólica n -dimensional compacta com bordo totalmente geodésico e g uma métrica definida em $M = (M, \partial M) = \Sigma \times \mathbb{S}^1$ tais que*

$$V_{(\tilde{M}, \tilde{g})}(1) \leq V_0, \tag{3}$$

para algum valor V_0 . Considere $Z = (Z, \partial Z) \subset M$ uma hipersuperfície mergulhada, homóloga a $\Sigma \times \{*\}$ sob coeficientes em \mathbb{Z}_2 . Então,

$$\text{Area}(Z; g) \geq C(n, V_0) \cdot \text{Area}(\Sigma; g_\Sigma). \tag{4}$$

Teorema 1.4 (Teorema de Volume com Bordo). *Sejam Σ uma variedade Riemanniana hiperbólica compacta com bordo totalmente geodésico e Z uma variedade Riemanniana compacta com*

bordo. Suponha que exista $f : Z \rightarrow \Sigma$ de grau 1, com $f(\partial Z) \subset \partial \Sigma$, tal que $f(\gamma)$ é contrátil para todo loop $\gamma \subset Z$ com $|\gamma| < 1$. Além disso, suponha também que

$$V_Z(1/2) \leq V_0.$$

Então,

$$\text{Vol}(Z) \geq C(n, V_0) \cdot \text{Vol}(\Sigma; \text{hyp}).$$

As demonstrações dos resultados desta tese seguem as técnicas apresentadas por Gromov, em (GROMOV, 1982) e (GROMOV, 1986), Larry Guth, em (GUTH, 2011), (GUTH, 2010b) e (GUTH, 2010a), e Hannah Alpert e Kei Funano, em (ALPERT; FUNANO, 2017). Para provar o Teorema de Área com Bordo, seguindo a mesma ideia que Jason Charles DeBlois em (DEBLOIS, 2007, Seção 2.3), inicialmente defina D_Σ , onde D_Σ é construída do seguinte modo: pegue a variedade Σ , uma cópia dela e faça uma colagem nos bordos de ambas as cópias. Por Σ ser uma variedade hiperbólica com bordo totalmente geodésico, a colagem é feita de maneira suave, está bem definida e a variedade D_Σ obtida neste processo é uma variedade hiperbólica fechada. Após essa construção, por obter uma variedade hiperbólica fechada, o seu grupo fundamental é residualmente finito, ou seja, para cada elemento diferente da identidade, $\alpha \in \pi_1(\Sigma)$, com $|\alpha| \leq 1$, existe um subgrupo normal de índice finito, $\mathbb{K}_\alpha \triangleleft \pi_1(\Sigma)$, tal que $\alpha \notin \mathbb{K}_\alpha$. Usando as aplicações naturais $r : D_\Sigma \rightarrow \Sigma$ e $i : \Sigma \rightarrow D_\Sigma$, segue que $r \circ i = \text{Id}_\Sigma$, ou seja, $i_* : \pi_1(\Sigma) \rightarrow \pi_1(D_\Sigma)$ é injetiva, implicando que $\pi_1(\Sigma)$ também é residualmente finito. Daí, é possível excluir os loops de comprimento no máximo 1 de $\pi_1(\Sigma)$. Além disso, a hipótese (3) garante que o Lema de Estabilidade, Lema 4.1, poderá ser aplicado, concluindo que $V_Z(1/2) \leq 2V_0 + \delta$. Finalmente, considerando \hat{Z} , $\hat{\Sigma}$ e \hat{M} recobrimentos compactos destas variedades, para construir a aplicação de grau 1 basta considerar $f = i \circ \hat{p}_1$, onde $i : \hat{Z} \rightarrow \hat{M}$ é a aplicação inclusão e $\hat{p}_1 : \hat{M} \rightarrow \hat{\Sigma}$ é a aplicação projeção e daí aplicar o Teorema de Volume com Bordo para completar a demonstração.

Vale ressaltar que o que ocorre em (ALPERT; FUNANO, 2017, Proposição 1.3) também ocorre para uma variedade hiperbólica compacta com bordo totalmente geodésico. Basta seguir a mesma construção que Alpert e Funano.

Este trabalho está dividido em três capítulos: o capítulo 1 é destacado para discutir os conceitos preliminares que serão utilizados ao longo de todo o trabalho, basicamente contém uma apresentação geral sobre teoria de homologia e volume simplicial, alguns conceitos sobre teoria de transversalidade e número de interseção; O capítulo 2 tem como objetivo demonstrar o Teorema de Volume com Bordo, onde será definido e construído uma cobertura boa, o nervo

retangular de uma variedade com bordo e todas as propriedades necessárias para demonstrar o teorema; Por fim, no capítulo 3 será demonstrado o principal resultado do trabalho, o Teorema de Área com Bordo, onde será necessário o Lema de Estabilidade.

2 CONCEITOS PRELIMINARES

Como já foi mencionado na introdução, o objetivo principal deste trabalho é mostrar que, sob algumas condições no recobrimento universal, a métrica que minimiza área, na classe de homologia de uma variedade hiperbólica compacta com bordo totalmente geodésico, é a métrica hiperbólica, como Teorema de Área com Bordo. Este teorema garante que sob certas condições, na classe de homologia de uma variedade hiperbólica n -dimensional compacta com bordo totalmente geodésico, a métrica hiperbólica é a que minimiza área, a menos de uma constante. Para demonstrar tal teorema é feita uma construção analítica, utiliza-se de ferramentas algébricas e topológicas e por fim obtém-se um resultado geométrico. Para que o trabalho seja autossuficiente, este capítulo tem como objetivo definir, enunciar e demonstrar alguns resultados chaves que são usados ao longo da tese.

Este capítulo será dividido em duas seções: a primeira seção irá tratar da teoria de homologia singular e a segunda introduzirá o volume simplicial de Gromov e sua relação com o grau de uma aplicação entre duas variedades. O leitor que se sentir confortável com esses conceitos, pode iniciar a leitura do Capítulo 3.

2.1 HOMOLOGIA

2.1.1 Homologia Singular

Esta seção tem como objetivo introduzir a teoria de homologia singular. Esta teoria é essencial para o estudo do volume simplicial ou, como também é conhecido, volume simplicial de Gromov, que será introduzido na próxima seção deste capítulo. Ele recebe este nome, pois o volume simplicial de uma variedade n -dimensional M é um invariante homotópico que foi definido por Gromov em (GROMOV, 1982). Como o foco deste trabalho não é estudar a teoria de homologia as demonstrações dos resultados apresentados nesta seção serão omitidos e o leitor interessado poderá encontrá-las em (LIMA, 2009) e (MELO, 2014).

Definição 2.1. *Seja e_0, e_1, \dots, e_k a base canônica de \mathbb{R}^{k+1} . Para cada k , o simplexo de dimensão k ou k -simplexo é o conjunto dado por*

$$\Delta_k = \left\{ (t_0, t_1, \dots, t_k) : t_i \geq 0 \text{ e } \sum_{i=0}^k t_i = 1 \right\}.$$

Em particular, Δ_0 se reduz ao vértice e_0 , Δ_1 é o segmento em \mathbb{R}^2 que liga os vértices e_0 e e_1 , Δ_2 é o triângulo em \mathbb{R}^3 ligando os vértices e_0, e_1 e e_2 e assim por diante.

Uma vez que estão definidos os n -simplexos, podemos relacionar esses conjuntos com o espaço topológico X da seguinte forma:

Definição 2.2. *Um k -simplexo singular num espaço topológico é uma aplicação contínua $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$, onde Δ_k é um k -simplexo.*

A homologia singular do espaço topológico X será definida em termos dos simplexos singulares neste espaço. Para tal objetivo, basta definir um complexo de cadeias, ou seja, uma sequência de A -módulos, e um operador de bordo, ∂ , satisfazendo $\partial^2 = 0$.

Definição 2.3. *Seja A um anel e considere o A -módulo livre $C_k(X, A)$ gerado pelos k -simplexos singulares. Um complexo de cadeias singular C é a família dos A -módulos livres $C_k(X, A)$ e uma família de homomorfismos $\partial_k : C_k(X, A) \rightarrow C_{k-1}(X, A)$, chamados operadores de bordo, tais que $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$, para todo k .*

$$\dots \xrightarrow{\partial_{k+2}} C_{k+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k(X, A) \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1}(X, A) \xrightarrow{\partial_{k-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_1(X, A) \xrightarrow{\partial_0} C_0(X, A).$$

Das definições acima, segue diretamente que uma k -cadeia, uma cadeia k dimensional, $c_k \in C_k(X, A)$, é uma soma formal definida por

$$c_k = \sum_{j=1}^n a_j \sigma_j,$$

onde $a_i \in A$ e $\sigma_i : \Delta_k \rightarrow X$ é um simplexo singular. Neste trabalho, os anéis usados para estudar homologia são \mathbb{Z}_2 e \mathbb{R} e por isso denotaremos os A -módulos livres, simplesmente por $C_k(X)$, para não gerar confusão quando for estudada a homologia relativa.

Definição 2.4. *A i -ésima face do k -simplexo singular σ é o $(k-1)$ -simplexo $\partial_i \sigma : \Delta_{k-1} \rightarrow M$ definido por*

$$\partial_i \sigma \left(\sum_{j=0}^{k-1} (t_j e_j) \right) = \sigma(t_0 e_0 + \dots + t_{i-1} e_{i-1} + t_i e_{i+1} + \dots + t_{k-1} e_k).$$

Além disso, o bordo do simplexo σ é a cadeia,

$$\partial \sigma = \sum_{i=0}^k (-1)^i \partial_i \sigma$$

e o operador de bordo é definido estendendo por linearidade

$$\partial \left(\sum_j a_j \sigma_j \right) = \sum_j a_j \partial \sigma_j.$$

O operador bordo e as faces de um simplexo terão um papel muito importante ao longo deste trabalho quando for definido e construído o nervo retangular da variedade. Além da propriedade, mencionada anteriormente, $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$, o operador de bordo satisfaz uma espécie de comutatividade.

Proposição 2.1. *Para quaisquer $j < i$ vale $\partial_j \circ \partial_i = \partial_{i-1} \circ \partial_j$.*

Demonstração: Basta aplicar a definição de operador de bordo e comparar.



Definição 2.5. *Considere $\partial_k : C_k(M) \rightarrow C_{k-1}(M)$. Os elementos do subanel $Z_k = \text{Ker } \partial_k$ são chamados de k -ciclos e os elementos do subanel $B_k(M) = \text{Im } \partial_k$ são chamados de k -cadeias. Dois ciclos, c_1, c_2 são ditos homólogos, se existe uma cadeia c tal que $c_1 - c_2 = \partial c$. Em particular, $\text{Im } \partial_{k+1} \subset \text{ker } \partial_k$ e por isso, para cada $k > 0$, faz sentido definir o anel quociente*

$$H_k(C) = \frac{\text{Ker } \partial_k}{\text{Im } \partial_{k+1}}, \quad (5)$$

chamado anel de homologia singular de M .

Agora, se $f : M \rightarrow N$ é uma aplicação contínua, então para cada simplexo singular σ em M , a composição $f \circ \sigma$ é um simplexo singular em N . Com isso, é possível relacionar os grupos de homologia entre duas variedades via função contínua, pois esta aplicação f induz um homomorfismo entre os A -módulos livres $C_k(M)$ e $C_k(N)$ que comuta com o operador de bordo, ou seja, a imagem de ciclos de M é um ciclo em N e a imagem de bordos de M são bordos em N .

Teorema 2.1 (Invariância homotópica). *Se $f, g : M \rightarrow N$ são aplicações contínuas homotópicas entre espaços topológicos, então as aplicações induzidas em homologia são iguais. Além disso, se dois espaços topológicos têm o mesmo tipo de homotopia, então seus grupos de homologia são isomorfos.*

A demonstração do teorema de invariância homotópica pode ser encontrado em (HATCHER, 2005, Teorema 2.10, pg. 111).

2.1.2 Homologia Relativa

Outro conceito muito importante, em particular quando trabalha-se com variedades com bordo, é o conceito de homologia relativa. Nesta subseção vamos definir e estudar algumas

propriedades da homologia relativa. Estes conceitos serão essenciais ao longo do trabalho, pois quando construído o nervo retangular de uma variedade com bordo, que, o tratando de forma resumida, é um subconjunto de um retângulo de dimensão muito alta, e realizada a análise simplicial no nervo retangular, utiliza-se a homologia relativa para obter as estimativas.

Uma seqüência exata curta de complexos de cadeias,

$$0 \rightarrow \mathcal{C}^0 \xrightarrow{\alpha} \mathcal{C}^1 \xrightarrow{\beta} \mathcal{C}^2 \rightarrow 0$$

é um diagrama de complexos de cadeias

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \downarrow \partial^0 & & \downarrow \partial^0 & & \downarrow \partial^0 \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{C}_{k+1}^0 & \xrightarrow{\alpha_{k+1}} & \mathcal{C}_{k+1}^1 & \xrightarrow{\beta_{k+1}} & \mathcal{C}_{k+1}^2 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \partial^0 & & \downarrow \partial^1 & & \downarrow \partial^2 \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{C}_k^0 & \xrightarrow{\alpha_k} & \mathcal{C}_k^1 & \xrightarrow{\beta_k} & \mathcal{C}_k^2 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \partial^0 & & \downarrow \partial^1 & & \downarrow \partial^2 \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{C}_{k-1}^0 & \xrightarrow{\alpha_{k-1}} & \mathcal{C}_{k-1}^1 & \xrightarrow{\beta_{k-1}} & \mathcal{C}_{k-1}^2 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \partial^0 & & \downarrow \partial^0 & & \downarrow \partial^0 \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

onde os morfismos $\partial^0, \partial^1, \partial^2, \alpha_k : \mathcal{C}_k^0 \rightarrow \mathcal{C}_k^1$ e $\beta_k : \mathcal{C}_k^1 \rightarrow \mathcal{C}_k^2$ satisfazem:

- (i) as seqüências $0 \rightarrow \mathcal{C}_k^0 \xrightarrow{\alpha_k} \mathcal{C}_k^1 \xrightarrow{\beta_k} \mathcal{C}_k^2 \rightarrow 0$ são exatas;
- (ii) $\partial^1 \circ \alpha_k = \alpha_{k-1} \circ \partial^0$;
- (iii) $\partial^2 \circ \beta_k = \beta_{k-1} \circ \partial^1$.

Diante dessa definição, segue o seguinte resultado:

Teorema 2.2. *Se*

$$0 \rightarrow \mathcal{C}^0 \xrightarrow{\alpha} \mathcal{C}^1 \xrightarrow{\beta} \mathcal{C}^2 \rightarrow 0$$

é uma seqüência exata curta de complexos de cadeias, então existem morfismos

$$\delta_k : H_k(\mathcal{C}^2) \rightarrow H_{k-1}(\mathcal{C}^0)$$

tais que a seqüência longa abaixo é exata:

$$\dots \xrightarrow{\delta_{k+1}} H_k(\mathcal{C}^0) \xrightarrow{\alpha_*} H_k(\mathcal{C}^1) \xrightarrow{\beta_*} H_k(\mathcal{C}^2) \xrightarrow{\delta_k} H_{k-1}(\mathcal{C}^0) \rightarrow \dots$$

Como já foi mencionado no início deste capítulo, as demonstrações serão omitidas por se tratarem de conceitos clássicos que podem ser encontrados em um bom livro de homologia, os interessados podem consultar (HATCHER, 2005, Teorema 2.16, pg. 117). Diante deste último resultado é possível definir o conceito de homologia relativa de um par (X, Y) , onde X é um espaço topológico e $Y \subset X$ é um subespaço com a topologia induzida e exibir a sequência longa de homologia do par.

Dado um espaço topológico X e um subespaço Y , defina $C_k(X, Y)$ como sendo o grupo quociente

$$C_k(X, Y) = C_k(X)/C_k(Y),$$

ou seja, as cadeias em Y são triviais em $C_k(X, Y)$. Desde que o operador de bordo $\partial_k : C_k(X) \rightarrow C_{k-1}(X)$ aplica $C_k(Y)$ em $C_{k-1}(Y)$, então ele induz um operador de bordo quociente, que denotaremos da mesma forma, $\partial_k : C_k(X, Y) \rightarrow C_{k-1}(X, Y)$. Fazendo k variar temos a seguinte sequência

$$\cdots \rightarrow C_k(X, Y) \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1}(X, Y) \rightarrow \cdots$$

cujas propriedades $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$ é mantida. Portanto foi definido um complexo de cadeias e o grupo de homologia

$$H_k(X, Y) = \frac{\text{Ker } \partial_k}{\text{Im } \partial_{k+1}}$$

deste complexo é definido por grupo de homologia relativo ou grupo de homologia relativo de X em relação à Y . Pelas definições acima, segue que os elementos de $H_k(X, Y)$ são representados por k -ciclos relativos, ou seja, k -cadeias $c \in C_k(X)$ tais que $\partial c \in C_{k-1}(Y)$ e estes k -ciclos são triviais em $H_k(X, Y)$, se e somente se, ele é um bordo relativo, isto é, $c_k = \partial b_{k+1} + d_k$, para algum $b_{k+1} \in C_{k+1}(X)$ e $d \in C_k(Y)$. Note que o grupo quociente $C_k(X)/C_k(Y)$ pode ser visto como um subgrupo de $C_k(X)$, o subgrupo com base no k -simplexo singular $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$ cuja imagem não está contida em Y .

2.2 VOLUME SIMPLICIAL

O objetivo desta subseção é apresentar os conceitos sobre volume simplicial. Basicamente todos os resultados, definições e exemplo foram apresentados por Gromov em (GROMOV, 1982). Esta seção é muito importante, pois é através do volume simplicial da variedade que serão obtidas as duas principais estimativas de volume deste trabalho, nos Teoremas 1.4 e 1.3. Ao longo desta subseção, considere M uma variedade Riemanniana suave, n -dimensional completa e g uma métrica com curvatura seccional limitada por cima por 1. Denote por K_g a curvatura seccional

com respeito a métrica g . Lembre-se das notações: com respeito à métrica g , a curvatura escalar é scal_g e a curvatura seccional é K_g . Antes de definir o volume simplicial lembre-se que para uma variedade riemanniana n -dimensional fechada, M , a classe fundamental do seu grupo de homologia, $[M] \in H_n(M, \mathbb{R})$ é o elemento gerador deste grupo. A classe fundamental pode ser vista como o simplexo orientado de dimensão máxima de uma triangularização de M .

Definição 2.6. *Seja X um espaço topológico qualquer. Denote por $\mathcal{C} = C_*(X)$ um complexo de cadeia, com coeficientes em \mathbb{R} , onde $\mathcal{C} = C_*(X)$ representa um complexo de cadeias de ordem qualquer. Dado $c = \sum_{i=1}^k r_i \sigma_i \in C_k$, com $C_k \in \mathcal{C}$, defina a l^1 norma simplicial em \mathcal{C} por*

$$\|c\| = \sum_i |r_i|. \quad (6)$$

desta definição, surge uma pseudo norma no grupo de homologia $H_* = H_*(X, \mathbb{R})$, onde $H_*(X, \mathbb{R})$ representa o grupo de homologia em um nível qualquer definida por

$$\|\alpha\| = \inf_{z \in \alpha} \|z\|, \quad (7)$$

onde $\alpha \in H_*(X, \mathbb{R})$. Por fim, para uma variedade n -dimensional fechada (M, g) , o volume simplicial é definido por

$$\|(M, g)\| = \|[M]\|, \quad (8)$$

onde $[M]$ é a classe fundamental de $H_n(M, \mathbb{R})$.

Proposição 2.2. *Seja $f : M \rightarrow N$ uma função própria de grau d . Então $\|M\| \geq d \cdot \|N\|$ e a igualdade é atingida quando f for um d -recobrimento.*

Exemplo 2.1. *Todas as esferas e toros possuem volume simplicial nulo. Além disso, o espaço euclidiano \mathbb{R}^n também possui volume simplicial nulo.*

De fato, o grau de uma aplicação $f : M \rightarrow N$ é dado pela seguinte equação

$$f_*([M]) = \text{gr}(f)[N].$$

Além disso, se $f : M \rightarrow N$ é uma aplicação própria, então $\|M\| \geq d\|N\|$ e para qualquer k , tanto a esfera quanto o toro, possuem aplicações $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ e $g : \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^m$ com $\text{gr}(f) = \text{gr}(g) = k$. Assim, para um valor $k \geq 2$, obtém-se

$$\|\mathbb{S}^n\| \geq k\|\mathbb{S}^n\| \geq 2\|\mathbb{S}^n\|,$$

ou seja, $\|\mathbb{S}^n\| = 0$. Analogamente para o toro.

Teorema 2.3 (Teorema de Gromov-Thurston). *Seja (M^n, g) uma variedade riemanniana de dimensão n , completa com volume finito. Se $-\infty < -k \leq K_g \leq -1$, onde K_g é a curvatura seccional de (M, g) , então $\text{Vol}(M, g) \leq v_n \cdot ||M||$, onde v_n é o volume n -dimensional de um simplexo ideal. No caso em que M é uma variedade hiperbólica fechada, ou seja, $\text{scal}_g = -1$, vale a igualdade.*

Para mais detalhes sobre a constante v_n , o leitor interessado pode consultar (FRIGERIO; PAGLIANTINI, 2010).

Observação 2.1. *Toda essa construção do volume simplicial também vale para uma variedade com bordo, fazendo algumas pequenas alterações. Da mesma forma que foi definido o volume simplicial para uma variedade fechada, para uma variedade compacta com bordo, basta tomar a classe fundamental relativa, no grupo de homologia relativo e definir*

$$||(M, \partial M)|| = |[M, \partial M]|,$$

onde $[M, \partial M]$ é a classe fundamental relativa do grupo de homologia relativo $H_n(M, \partial M; \mathbb{R})$.

3 O nervo retangular e o Teorema de Volume com bordo

Nesta seção, o principal objetivo, é construir uma cobertura para uma variedade Riemanniana n -dimensional $M = (M, \partial M)$, com $\partial M \neq \emptyset$, por bolas que possuem certas propriedades. A partir desta cobertura, será possível construir o nervo retangular da variedade M . As ideias e o conteúdo deste capítulo foram apresentadas por Gromov e, posteriormente, por Larry Guth podendo ser encontrado nas seções 5 e 6 de (GROMOV, 1982) e na seção 1 de (GUTH, 2011). Uma vez construída tal cobertura e o nervo retangular associado, será possível fazer algumas estimativas do volume simplicial da imagem de M pela aplicação que associa a variedade M com o seu nervo retangular, que será denotado por N_M . Essas estimativas, serão a chave para provar o teorema principal deste trabalho.

Definição 3.1. *Seja $B(p, R) \subset M$ uma bola de centro p e raio R . Uma bola $B(p, R)$ diz-se boa se satisfaz:*

(B1) *Crescimento Razoável:* $|B(p, 100R)| \leq 10^{4(n+3)}|B(p, 100^{-1}R)|$;

(B2) *Volume limitado:* $|B(p, R)| \leq 10^{2n+6}V(1)R^{n+3}$;

(B3) *Raio pequeno:* $R \leq \frac{1}{100}$.

Note que no espaço Euclidiano tem-se

$$|(B(p, 100R))| = 10^{4n}|B(p, 100^{-1}R)| \text{ e } |B(p, R)| = V(1)R^n,$$

ou seja, para bolas boas, a condição de crescimento razoável é um pouco mais branda enquanto a condição de limitação de volume é mais forte. Por esta comparação, as bolas boas com raios pequenos possuem pequenos volumes. Uma outra observação é que as constantes envolvidas na Definição 3.1 não são necessariamente importantes, elas foram escolhidas para garantir que dado qualquer ponto de uma variedade sempre é possível encontrar um $R > 0$ tal que a bola centrada em p com raio R é uma bola boa. A demonstração de tal afirmação segue a mesma técnica elaborada por Guth em (GUTH, 2011), porém no caso apresentado neste trabalho, por tratar de uma variedade com bordo, será necessário uma maneira diferente para cobrir a variedade, em particular, uma maneira especial de cobrir o bordo. Para construir uma cobertura, nas condições necessárias para servir de ferramenta na demonstração do resultado principal deste trabalho, como mencionado acima, é necessário cobrir o bordo de uma maneira especial, para isso, serão consideradas semi bolas centradas em pontos pertencentes ao bordo. O que será demonstrado

no lema abaixo é que estas semi bolas, também são bolas boas. Ao longo deste trabalho, a notação para uma bola centrada num ponto $p \in \text{int}(M)$ de raio R será $B(p, R)$ e para a semi bola, centrada em $p \in \partial M$ com raio R será $b(p, R)$.

Lema 3.1. *Sejam M uma variedade Riemanniana compacta, n -dimensional, com bordo não vazio e $p \in M$ um ponto qualquer. Então, existe $R > 0$ tal que $B(p, R)$ é uma bola boa.*

Demonstração: Se p pertence ao interior de M , basta seguir a prova encontrada em (GUTH, 2011). Suponha então que $p \in \partial M$. Neste caso, é necessário mostrar que a semi bola, centrada neste ponto, é uma bola boa. Inicialmente suponha por absurdo que não existe $R > 0$ tal que a semi bola $b(p, R)$ é uma bola boa, em particular, suponha que $b(p, R)$ não satisfaz a condição de crescimento razoável. Daí, para todo $R > 0$ tem-se

$$\begin{aligned} |b(p, 100R)| &> 10^{4(n+3)}|b(p, 100^{-1}R) \\ \Leftrightarrow |b(p, 100^{-1}R)| &< 10^{-4(n+3)}|b(p, 100R)|. \end{aligned} \quad (9)$$

Lembre-se que densidade de uma bola é definida pela razão $\theta(B(p, R)) = |B(p, R)|/R^n$. Assim, da desigualdade (9) obtém-se

$$\begin{aligned} \theta(b(p, 100^{-1}R)) &= \frac{|b(p, 100^{-1}R)|}{(100^{-1}R)^n} \\ &< \frac{10^{-4n}10^{-12}|b(p, 100R)|}{10^{-4n}(100R)^n} = 10^{-12}\theta(b(p, 100R)) \end{aligned} \quad (10)$$

Considere agora uma sequência de bolas $\{b_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ centradas em p cujos raios r_i 's são dados por $r_i = 10^{-4i-2}$, $i \in \mathbb{N}$.

AFIRMAÇÃO 1: Existe pelo menos uma bola em b_i satisfazendo a condição de crescimento razoável. Novamente por absurdo, suponha que nenhuma destas bolas b_i 's sejam boas. Daí, aplicando a desigualdade (10) repetidas vezes, segue, por indução, que

$$\theta(b(p, 10^{-4s})) < 10^{-12s}V(1).$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\theta(b(p, 10^{-4s})) &= \theta(b(p, 10^{-2}10^{-4s+2})) < 10^{-12}\theta(b(p, 10^210^{-4s+2})) \\
&= \theta(b(p, 10^{-4s+4})) = \theta(b(p, 10^{-2}10^{-4s+6})) \\
&< 10^{-12}10^{-12}\theta(b(p, 10^210^{-4s+6})) \\
&= 10^{-24}\theta(b(p, 10^{-4s+8})) \\
&\vdots \quad (s-2)\text{vezes} \\
&< 10^{-12s}\theta(b(p, 10^{-4s+4s})) \\
&= 10^{-12s}\theta(b(p, 1)) < 10^{-12s}\frac{V(1)}{2}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Desde que M é uma variedade Riemanniana suave e o ponto p em questão foi tomado em ∂M , que localmente pode ser aproximado por um hiperplano, segue que $\theta(B(p, \epsilon))$ converge para a metade do volume da bola unitária quando ϵ vai para zero. Logo a desigualdade (11) contradiz este fato, isto é, pelo menos uma bola em $\{b_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ satisfaz a condição de crescimento razoável. Agora, considere s tal que a primeira bola boa da lista que satisfaz a condição de crescimento razoável seja $b(p, 10^{-4s-2})$, ou seja, é possível aplicar a desigualdade (10) nas bolas $b(p, 10^{-2})$, $b(p, 10^{-6})$, \dots , $b(p, 10^{-4s+2})$, uma vez que, pela construção, elas não satisfazem a condição (B1) da definição de bola boa. Logo, por (11) obtém-se

$$\theta(b(p, 10^{-4s})) < 10^{-12s}\frac{V(1)}{2},$$

implicando, pela definição de densidade, que

$$|b(p, 10^{-4s})| < 10^{-12s}\frac{V(1)}{2} [10^{-4s}]^n = 10^{-4s(n+3)}\frac{V(1)}{2}. \tag{12}$$

Além disso, $b(p, 10^{-4s-2}) \subset b(p, 10^{-4s})$, ou seja, $|b(p, 10^{-4s-2})| < |b(p, 10^{-4s})|$, isto é, por (12) conclui-se

$$|b(p, 10^{-4s-2})| < 10^{-4s(n+3)}\frac{V(1)}{2} = 10^{2n+6} [10^{-4s-2}]^{n+3} \frac{V(1)}{2}.$$

Logo, a bola $b(p, 10^{-4s-2})$ satisfaz a condição (B1) e, como seu raio satisfaz $10^{-4s-2} < 10^{-2}$, então a bola em questão também satisfaz a condição (B3) e portanto é uma bola boa.

■

O Lema 3.1 diz que todo ponto p de M admite uma bola boa centrada neste ponto, permitindo assim cobrir a variedade M com com esses abertos. Com o auxílio do Lema da Cobertura de Vitali é possível extrair uma subcobertura finita desta cobertura inicial com um certo controle nas sobreposições das bolas pertencentes à cobertura. Esta subcobertura é chamada cobertura boa.

Definição 3.2. *Um cobertura $\{B_i\}_{i \in I}$ de M recebe o nome de cobertura boa se satisfaz:*

- (C1) *Cada conjunto aberto B_i é uma bola boa;*
- (C2) *As bolas concêntricas $1/2B_i$ continuam cobrindo M ;*
- (C3) *As bolas concêntricas $1/6B_i$ são disjuntas.*

Antes de enunciar o próximo resultado, que garante a existência de uma cobertura boa para uma variedade Riemanniana compacta com bordo não vazio, é importante lembrar do Lema da Cobertura de Vitali. Este resultado será a ferramenta chave para a demonstração do próximo lema.

Lema 3.2 (Lema da Cobertura de Vitali). *Considere M um espaço métrico e B_1, B_2, \dots, B_n uma coleção finita de bolas contendo M . Então, existe uma subcoleção, $B_{j_1}, B_{j_2}, \dots, B_{j_m}$, destas bolas que são disjuntas tal que*

$$B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n \subset 3B_{j_1} \cup 3B_{j_2} \cup \dots \cup 3B_{j_m},$$

onde $3B_{j_k}$ denota a bola concêntrica a B_{j_k} com raio três vezes maior.

Lema 3.3. *Seja M uma variedade Riemanniana compacta com bordo não vazio. Então, M admite uma cobertura boa de modo que o bordo de M é coberto por semi-bolas boas e bolas boas que intersectam o bordo.*

Demonstração: A demonstração de que uma variedade compacta com bordo não vazio, admite uma cobertura boa é exatamente a prova apresentada por Larry Guth, a menos de uma adaptação. Considere $p \in M$ e observe que mesmo que o ponto p pertença ao bordo de M , o Lema 3.1 garante que existe uma semi-bola boa centrada neste ponto, ou seja, o interior da variedade é coberto por bolas boas e o bordo de é coberto por semi-bolas boas. Pela compacidade da variedade M , é possível extrair uma subcobertura finita. Agora, basta aplicar o Lema da Cobertura de Vitali para extrair desta cobertura finita, uma cobertura boa.

■

Destes dois lemas, Lema 3.1 e Lema 3.3, fica demonstrado a existência de uma cobertura boa para uma variedade compacta com bordo não vazio M . Daqui em diante fixe em M uma cobertura boa finita, $\mathcal{C} = \{B_i\}$, e lembre-se esta cobertura contém semi-bolas boas b_i 's centradas em pontos do bordo, bolas boas centradas em pontos do interior da variedade, onde algumas

delas podem interceptar o bordo de M . Logo, a cobertura boa fixada deve ser vista como $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\text{int}(M)} \cup \mathcal{C}_{\partial M}$, onde $\mathcal{C}_{\text{int}(M)}$ é formado por bolas e semi bolas boas e $\mathcal{C}_{\partial M}$ é formado apenas por semi bolas boas e pelas bolas boas que interceptam o bordo. O objetivo agora é controlar as sobreposições entre as diferentes bolas da cobertura fixada. Como limitar a multiplicidade da cobertura é muito complicado e, em alguns casos, não parece ser possível encontrar tal limitação, será feita uma estimativa mais fraca e, com isso, objetivo passa a ser limitar o volume dos subconjuntos de M com multiplicidade alta. Para obter um controle destes volumes, inicialmente estuda-se uma propriedade da cobertura boa, mais especificamente, controla-se o número de bolas, de raios aproximadamente iguais, que intersectam uma bola dada que não necessariamente esteja na cobertura.

Lema 3.4. *Sejam $s < 1$ e $B(s)$ uma bola qualquer de raio s , não necessariamente pertencente a \mathcal{C} . Então, o número de bolas $B_i \in \mathcal{C}$, cujo raio satisfaz $(1/2)s \leq r_i \leq 2s$, intersectando $B(s)$ é limitado por uma constante $C(n)$.*

Demonstração: Sejam $B(s) \subset M$ uma bola de raio s em M e $\{B_i\} \subset \mathcal{C}$ o conjunto de bolas na cobertura boa que intersectam $B(s)$. Como a cobertura é finita, é possível enumerar estas bolas de forma que B_1 tenha o menor raio dentre elas. Dado $q \in \{B_i\}$, existe pelo menos uma bola B_i tal que $q \in B_i$. Assuma que p_s é o centro da bola $B(s)$. Daí,

$$\text{dist}(q, p_s) \leq \text{dist}(q, p_i) + \text{dist}(p_i, p_s), \quad (13)$$

mas, por hipótese, $B_i \cap B(s) \neq \emptyset$, ou seja, a distância entre os centros destas bolas é menor que a soma de seus raios,

$$\text{dist}(p_i, p_s) < r_i + r_s = r_i + s. \quad (14)$$

Logo, substituindo (14) em (13) e usando a hipótese que $(1/2)s \leq r_i \leq 2s$ tem-se

$$\text{dist}(q, p_s) \leq r_i + r_i + s \leq 2s + 2s + s = 5s.$$

Portanto $q \in B(5s)$, implicando que $\{B_i\} \subset B(5s)$. Além disso, como p_1 pode estar arbitrariamente próximo de p_s e $(1/2)s \leq r_1 \leq 2s$ conclui-se que $B(5s) \subset 20B_1$. Por outro lado, da definição de cobertura boa, segue que $(1/6)B_i$ são disjuntas, portanto,

$$\sum_i |(1/6)B_i| < |20B_1|.$$

Segue do crescimento razoável, na definição de bola boa, que

$$\sum_i |B_i| < C(n)|B_1|.$$

Mas B_1 é a bola com menor volume no conjunto B_i , implicando que o número de bolas B_i 's é no máximo $C(n)$.

■

Observe que no Lema 3.4 não é necessário diferenciar as bolas boas, das semi bolas boas, pois uma vez que caso exista alguma semi bola no conjunto $\{B_i\}$ intersectando $B(s)$, as estimativas serão as mesmas, pois pelo Lema 3.1, as semi bolas também são bolas boas.

Uma vez que a cobertura boa \mathcal{C} está fixada e satisfaz a propriedade dada pelo Lema 3.4 é possível, usando as técnica de Guth em (GUTH, 2011), controlar os volumes dos subconjuntos de multiplicidade alta pertencentes a M . Para isso, considere $m(x)$ a função multiplicidade da cobertura, ou seja,

$$m(x) = \#\{B_i \in \mathcal{C} : x \in B_i\}.$$

Considere também

$$M(\lambda) = \{x \in M : m(x) \geq \lambda\}.$$

Daí, para qualquer aberto $U \subset M$ defina

$$M_U(\lambda) = M_\lambda \cap U$$

e denote por $N_\omega(U)$ uma ω -vizinhança de U , isto é,

$$N_\omega(U) = \{x \in M : \text{dist}(x, U) < \omega\}.$$

Este controle é dado pelo seguinte lema:

Lema 3.5. *Existem constantes $\alpha(n)$, $\gamma(n)$, dependendo somente de n tais que a seguinte sentença é verdadeira. Para qualquer conjunto aberto $U \subset M$, qualquer $\lambda \geq 0$ e qualquer $\omega < 1/100$, tem-se*

$$|M_U(\gamma \log(1/\omega)) + \lambda| \leq e^{-\alpha\lambda} |N_\omega(U)|.$$

Tomando $U = M$ segue que $|M(\lambda)| < C e^{-\alpha\lambda} |M|$. Se B é uma bola boa em \mathcal{C} , então

$$|M_B(\gamma \log(1/\omega)) + \lambda| \leq e^{-\alpha\lambda} |N_\omega(B)|.$$

Observe que, deste lema, pode ocorrer que todos os pontos de B possuem multiplicidade igual a $\gamma(n) \log(1/r)$, porém o conjunto dos pontos de B com multiplicidade muito maior que $\gamma(n) \log(1/r)$ constitui somente uma fração pequena de B . A demonstração é extremamente técnica e será análoga à prova elaborada por L. Guth em (GUTH, 2011), pois apesar de estimar o

volume dos subconjuntos de M com multiplicidade alta, é necessário apenas fixar uma cobertura boa da variedade e garantir que a cobertura satisfaça algumas propriedades. Como isso já foi feito nos lemas iniciais deste trabalho, será apresentado aqui, apenas uma ideia de como demonstrar o lema. Para uma demonstração completa, os interessados podem ver o Lema 4 em (GUTH, 2011).

Ideia da demonstração: Considere $\{B_i\}$ o conjunto das boas de \mathcal{C} que cobrem o aberto U . Note que neste conjunto, podem ou não existir bolas geodésicas. Devido ao lema da Cobertura de Vitalli é possível separar as bolas de $\{B_i\}_{i \in I}$ em camadas, que serão denotadas por $C(d)$, onde $d \in \mathbb{N}$.

Para construir a primeira camada, $C(1)$, escolha, dentre as bolas que cobrem U , a bola de maior raio e, após ter feito esta escolha, tome a bola de maior raio que seja disjunta da primeira. Mantendo o mesmo raciocínio, considere a bola de maior raio que seja disjunta das duas primeiras que já foram escolhidas. Continue com este processo até não restarem mais bolas no conjunto $\{B_i\}$.

Para construir a $C(2)$, analise todas as bolas que não pertencem à $C(1)$ e escolha a de maior raio. Novamente, após ter feito esta escolha, tome a bola de maior raio que seja disjunta da primeira bola escolhida da $C(2)$ e que não está na $C(1)$. Continue com este raciocínio até acabarem as bolas.

Mantendo essa construção, para construir a $C(d)$, basta analisar as bolas que não estão nas outras $d - 1$ camadas e seguir o processo descrito anteriormente.

Note que nesta construção, não importa se a bola $B_j \in \{B_i\}$ é ou não uma bola geodésica, uma vez que os raios das bolas geodésicas são comparáveis com os raios das outras bolas da cobertura. Assim, as camadas construídas podem ou não conter bolas geodésicas. Feito a divisão de $\{B_i\}$ em camadas, defina o conjunto

$$\mathfrak{C}(d) = \cup_{B_i \in C(d)} B_i.$$

Em cada uma das Camadas, é possível construir uma relação de ordem parcial estrita relacionada com os raios das bolas contidas nas camadas. Aqui, mais uma vez, como a relação depende apenas dos raios das bolas e os raios das bolas geodésicas são comparáveis com os raios das outras bolas, esta relação continua valendo para a cobertura \mathcal{C} da variedade com bordo. Desta relação é possível garantir a existência de elementos maximais em cada uma das camadas, ou seja, em cada camada está contido o conjunto

$$Max(d) = \{B_i \in C(d) : B_i \text{ é maximal}\}.$$

Além disso, para qualquer bola $B_i \in \mathcal{C}$ defina o miolo de B_i por

$$\mathfrak{M}(B_i) = \frac{1}{10}B_i.$$

Desta definição, defina o miolo de cada uma das camadas por

$$\mathfrak{M}(d) = \cup_{B_i \in \text{Max}(d)} \mathfrak{M}(B_i) = \cup_{B_i \in \text{Max}(d)} \frac{1}{10}B_i.$$

Destas definições e da definição de cobertura boa, obtém-se que: se $B_i \in \mathcal{C}(d)$ é uma bola maximal, $x \in \frac{1}{10}B_i$ e $x \in B_k \in \mathcal{C}(j)$, para algum $j < d$, em outras palavras, x também pertence a uma bola B_k numa camada inferior, então o raio r_k da bola B_k satisfaz

$$1/15r_i \leq r_k \leq 2r_i,$$

onde a limitação superior depende apenas da maximalidade da bola B_i e a limitação inferior não depende. Esta estimativa permite que o Lema 3.4 pode ser usado para controlar o número sobreposições das bolas, mais precisamente, pelo Lema 3.4 segue que o número de bolas B_k contendo o ponto x com raio $1/15r_i \leq r_k \leq 2r_i$ é limitado por um constante dimensional $\eta(n)$. Logo, o número de B_i tais que $x \in B_i$ e $B_i \in \mathcal{C}(\lambda)$, com $\lambda \geq d$ é no máximo $\eta(n)$.

Agora, usando apenas os raios da bolas, a propriedade de ser maximal e a construção das camadas tem-se

$$\mathfrak{C}(d) \subset \cup_{B_j \in \text{Max}(d)} 10B_j,$$

além disso, pelo crescimento razoável obtém-se

$$|\mathfrak{C}(d)| \leq C(n)|\mathfrak{M}(d)|. \quad (15)$$

Novamente, vale ressaltar, que o fato da variedade possuir bordo não vazio não influencia no resultado obtido por L. Guth, uma vez que a técnica para demonstrar está diretamente ligado à cobertura boa fixada e, foi mostrado no início deste capítulo que é possível construir uma cobertura boa para uma variedade com bordo usando semi bolas para cobrir o bordo. Mais especificamente, a demonstração é baseada numa construção que compara apenas os raios das bola da cobertura boa fixada e usa as propriedades que a cobertura satisfaz e, por este motivo, continua não havendo a necessidade de diferenciar as semi bolas das outras bolas que pertencem à cobertura boa \mathcal{C} . Com a estimativa (15) é possível provar o decaimento exponencial de conjuntos com multiplicidade alta. Para isso, defina

$$C^\mu(\lambda) = \{x : x \in \mathfrak{C}(d) \text{ para pelo menos } \mu \text{ valores diferentes de } d \text{ onde } d \geq \lambda\}. \quad (16)$$

Note que da própria definição de C^μ vale

$$C^1(\lambda) \supset C^2(\lambda) \supset \dots \supset C^k(\lambda) \supset \dots$$

Além disso, segue da construção de cada camada que

$$\cup_{B_i \in C(\lambda)} 3B_i \supset \cup_{d \geq \lambda} \cup_{B_i \in C(d)} B_i = C^1(\lambda)$$

e, usando que as bolas em camadas diferentes são disjuntas e que em cada uma destas bolas vale que o crescimento é razoável, então

$$|C^1(\lambda)| \leq C(n)|C(\lambda)|.$$

Observe que os conjuntos C^μ basicamente descrevem quantas vezes um ponto x pertence a bolas em diferentes camadas. Por fim, defina a média

$$F(\lambda) = \frac{1}{\eta(n)} \sum_{\mu=1}^{\eta(n)} |C^\mu(\lambda)|$$

dos volumes de $C^\mu(\lambda)$. Do Lema 3.4 segue que se $x \in \mathfrak{M}(\lambda)$, então x pertence no máximo a $\eta(n)$ bolas de $C(d)$ com $d \geq \lambda$, também é fato que $\mathfrak{M}(\lambda) \subset C(\lambda)$, portanto

$$\sum_{\mu=1}^{\eta(n)} |C^\mu(\lambda)| - |C^\mu(\lambda + 1)|.$$

Usando a fórmula de $F(\lambda)$ conclui-se

$$F(\lambda + 1) \geq (1 - c')F(\lambda),$$

onde $c' > 0$ é uma constante pequena dependendo só de n . Para finalizar a demonstração, basta provar que se B_i pertence a $C(d)$, então $d \leq \gamma \log(1/r_i)$.

Até agora, foi construída uma cobertura boa \mathcal{C} de M satisfazendo algumas propriedades que limitam a sobreposição das bola pertencentes a \mathcal{C} . Além disso, o Lema 3.5 garante que os conjuntos com multiplicidade alta têm volume controlado, mais especificamente, na variedade M os conjuntos com multiplicidade alta representam apenas uma parte pequena da variedade.

Gromov, em seu artigo (GROMOV, 1982) e no livro (GROMOV, 2007), descreve uma técnica para provar estimativas numa variedade Riemanniana (M, g) através de uma cobertura por bolas e considerando a aplicação induzida de M no nervo associado à cobertura, que será

construído detalhadamente em seguida. No artigo (GUTH, 2011), L. Guth faz uma pequena modificação na técnica de Gromov e define o nervo retangular para uma variedade (M, g) que admite uma cobertura boa. Como a cobertura \mathcal{C} da variedade M é uma cobertura boa, será utilizada a técnica de L. Guth para construir o nervo retangular de M associado à cobertura boa \mathcal{C} . Como o bordo da variedade M é não vazio, uma pequena observação será feita na construção do nervo retangular.

Para construir o nervo retangular, inicialmente defina $d_{B_i} : M \rightarrow \mathbb{R}$ a função distância dada por $d_{B_i}(x) = \text{dist}_M(x, p_i)$, isto é, a distância de $x \in M$ ao centro de B_i . Além disso, considere $B_i \in \mathcal{C}$ uma bola da cobertura boa fixada e defina $\phi_i : M \rightarrow [0, r_i]$ por

$$\begin{cases} \phi_i = 0, & \text{para todo } x \notin B_i \\ \phi_i(x) = r_i, & \text{se } d_{B_i} \leq (1/2)r_i \\ \phi_i(x) = 2(r_i - d), & \text{se } (1/2)r_i \leq d_{B_i} \leq r_i \end{cases} .$$

Agora defina $\phi : M \rightarrow R$, dada por $\phi(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_D(x))$, onde R é um retângulo de dimensões $r_1 \times r_2 \times \dots \times r_D$. Como a cobertura \mathcal{C} é boa, da definição segue que $(1/2)B_i$ cobre a variedade M , ou seja, para qualquer $x \in M$, existe uma bola $B_i \in \mathcal{C}$ tal que $x \in (1/2)B_i$ e, portanto, $\phi_i(x) = r_i$. Logo, a imagem de M pela aplicação ϕ pertence à união de hiperfaces do retângulo R , mais precisamente, uma união de hiperfaces que não contém a origem. Observe que uma face aberta de R é determinada por igualdades e desigualdades do tipo

$$\begin{cases} \phi_i = 0 \\ \phi_i = r_i \\ 0 < \phi_i < r_i \end{cases} ,$$

ou seja, qualquer que seja a face aberta, F , do retângulo R , ela será obtida dividindo as dimensões $1, 2, \dots, D$ em três categorias: I_0, I_1 e $I_{(0,1)}$, onde cada uma destas é definida por

$$\begin{cases} \phi_i = 0, & \text{para todo } i \in I_0 \\ \phi_i = r_i, & \text{para todo } i \in I_1 \\ 0 < \phi_i < r_i, & \text{para todo } i \in I_{(0,1)} \end{cases} .$$

Agora, defina $I_+ = I_1 \cup I_{(0,1)}$ e, por fim, defina o nervo retangular $N \subset R$, do seguinte modo: uma face aberta $F \in R$ pertence a N se, e somente se,

$$\bigcap_{i \in I_+(F)} B_i \neq \emptyset \quad \text{e} \quad I_1(F) \neq \emptyset .$$

Note que da maneira que o nervo retangular de M , N_M foi construído, o mesmo pode ser visto da seguinte maneira:

$$N_M = N_{\text{int}(M)} \times N_{\partial M}, \tag{17}$$

onde $N_{\partial M}$, é composto pelas faces do retângulo que satisfazem

$$\bigcap_{\substack{i \in I_+(F) \\ B_i \in \mathcal{C}_{\partial M}}} B_i \neq \emptyset \quad \text{and} \quad I_1(F) \neq \emptyset.$$

Desta forma, todos os pontos do bordo de M são aplicados, pela aplicação ϕ , nas faces que pertencem ao subconjunto $N_{\partial M}$ de N_M . Observe que a construção do nervo retangular independe se as bolas da cobertura são as bolas usuais da variedade ou as semi-bolas cobrindo o bordo, ou seja, mesmo que a variedade tenha bordo, a construção do nervo retangular é possível e se dá de forma análoga à apresentada por Guth.

Como a cobertura boa está fixada, o nervo retangular associado à cobertura está construído e, pelo Lema 3.5, os subconjuntos de M com multiplicidade alta possuem volume limitado, então é possível fazer algumas estimativas de $|\phi(M)|$ e também, fazer estimativas do volume da imagem de M pela aplicação ϕ contida em certas regiões de N . Para realizar tais estimativas é preciso do conceito de estrela de uma face de um simplexo.

Definição 3.3. *Seja $F \subset R$ uma face aberta de N . A estrela de F , denotada por $\text{Est}(F)$ é definida como sendo a união de todas as faces que contém F em seus fechos, isto é,*

$$\text{Est}(F) = \bigcup_{\overline{F_j} \supset F} F_j. \quad (18)$$

Em outras palavras, a $\text{Est}(F)$ é a união de F com cada face aberta de dimensão mais alta contendo F em sua fronteira. Nenhuma face aberta F_j de dimensão menor que a dimensão de F está contido na $\text{Est}(F)$. Denote por $d(F)$ a dimensão da face aberta F e note que cada face F pode ser interpretada como um retângulo tal que $r_1(F) \leq r_2(F) \leq \dots \leq r_{d(F)}(F)$ são suas dimensões. Pela construção do nervo retangular e com os resultados obtidos nos lemas 3.4 e 3.5 é possível fazer a primeira estimativa de volume da imagem de M no nervo retangular N .

Lema 3.6. *Existem constantes positivas $C(n)$ e $\beta(n)$, dependendo somente de n , tal que*

$$|\phi(M) \cap \text{Est}(F)| < C(n)V(1)r_1(F)^{n+1}e^{-\beta(n)d(F)}.$$

Além disso, vale $|\phi(M)| < C(n)|M|$.

O principal objetivo deste capítulo é estabelecer uma relação entre o volume de M e o seu volume simplicial. Para obter tal relação o nervo retangular irá desempenhar um papel muito importante. Antes comparar o volume simplicial e o volume da variedade é preciso obter

algumas propriedades da aplicação ϕ que vai levar a variedade no nervo retangular, $\phi : M \rightarrow N$ e da aplicação que volta a variedade do nervo para seu ambiente original, ou seja, uma aplicação $\psi : N \rightarrow M$.

Lema 3.7. *Seja Z uma variedade Riemanniana com bordo não vazio e $\phi : Z \rightarrow (N_{\text{int}(Z)}, N_{\partial Z})$ a aplicação associada à cobertura boa \mathcal{C}_Z . Considere Σ uma variedade esférica com bordo não vazio e suponha que exista $f : Z \rightarrow \Sigma$ satisfazendo que para todo loop $\gamma \subset Z$, com $|\gamma| < 1$, $f(\gamma) \subset \Sigma$ é trivial e $f(\partial Z) \subset \partial \Sigma$. Então, existe uma aplicação $\psi : (N_{\text{int}(Z)}, N_{\partial Z}) \rightarrow \Sigma$ tal que, a composição $\psi \circ \phi : Z \rightarrow \Sigma$ é homotópica a f relativamente ao par $(Z, \partial Z)$.*

Demonstração: A demonstração segue a mesma técnica apresentada por Hannah Alpert and Kei Funano, como no (ALPERT; FUNANO, 2017, Lema 4.2), que é uma modificação do (GUTH, 2011, Lema 7) cuja prova segue as mesmas ideias de Gromov em seu trabalho (GROMOV, 1982), mas existe uma diferença: ao considerar um ponto do bordo da variedade, será utilizado a homotopia relativa, pois é necessário que a composição $\psi \circ \phi$ aplique o bordo de Z no bordo de Σ . A demonstração está dividida em duas partes: Inicialmente será construída a aplicação ψ , que funciona como uma espécie de levantamento, ou seja, aplica o nervo retangular em sua variedade e na segunda parte, será construído a homotopia relativa.

Inicialmente, considere duas triangularizações: uma em Z e outra no nervo retangular de Z , N_Z . Após essa consideração deforme homotopicamente a aplicação ϕ para uma aplicação ϕ' que seja simplicial com respeito as duas triangularizações em Z e em N_Z . Agora, defina a aplicação ψ' em um esqueleto de cada vez do seguinte modo: para cada vértice $v \in N_Z$, ou seja, um 0-simplexo, considere a menor face $F \subset N_Z$ contendo esse vértice v (como menor face, entenda a face que possui a menor dimensão).

Se esta face aberta for gerada apenas por bolas boas, escolha um índice $i \in I_+(F)$ e defina $\psi'(v) = p_i$, onde p_i é o centro de $B_i \in \mathcal{C}_{\text{int}(Z)}$. Se a face F for gerada apenas por bolas em $\mathcal{C}_{\partial Z}$, ou seja, semi-bolas boas e bolas boas que intersectam o bordo, e a bola referente à escolha do i é uma semi-bola defina $\psi'(v) = p_i$, onde p_i é o centro desta semi-bola boa. No caso da bola referente à escolha ser uma bola boa que intersecte o bordo de Z , considere $p_i^\partial \in \partial Z$ onde p_i^∂ é ponto do bordo de Z tal que $\text{dist}(p_i^\partial, \partial)Z$ seja a menor possível e defina $\psi'(v) = p_i^\partial$. No último caso, onde a face é formada por bolas boas que podem ou não intersectar o bordo e semi-bolas boas, basta escolher um índice $i \in I_+(F)$ e definir $\psi'(i) = v$. Para definir a aplicação ψ' nas arestas da triangularização de N_Z , ou seja, definir a aplicação nos 1-simplexos, considere uma aresta $E = \langle v_1, v_2 \rangle$. Como os vértices v_1 e v_2 pertencem à mesma face fechada, então

segue da definição de ψ' que existem índices $i_1, i_2 \in I_+(F)$ associados a $B_{i_1}, B_{i_2} \in \mathcal{C}_Z$, tais que $B_{i_1} \cap B_{i_2} \neq \emptyset$, isto é $\psi'(v_1)$ e $\psi'(v_2)$ são centros de duas bolas boas sobrepostas. Pela definição de bola boa, segue que $R < 1/100$, por isso a distância entre os centros destas bolas boas é no máximo $2/100$. Novamente, existem três casos: ou B_{i_1}, B_{i_2} são ambas bolas boas, ou seja, $B_{i_1}, B_{i_2} \in \mathcal{C}_{\text{int}(Z)}$, ou $B_{i_1} \in \mathcal{C}_{\text{int}(Z)}$ e $B_{i_2} \in \mathcal{C}_{\partial Z}$, ou ambas são semi-bolas boas ou bolas boas intersectando o bordo, isto é, $B_{i_1}, B_{i_2} \in \mathcal{C}_{\partial Z}$. Nos dois primeiros casos, basta aplicar a mesma técnica que Alpert e Funano aplicaram e definir $\psi'(E) = \alpha$, onde $\alpha : [0, 1] \rightarrow Z$ é uma curva satisfazendo $\alpha(0) = p_{i_1}$, $\alpha(1) = p_{i_2}^\partial$ e $|\alpha| < 3/100$. Note que no caso de $B_i \in \mathcal{C}_{\partial Z}$ ser uma semi-bola boa, $p_i^\partial = p_i$, onde p_i é o centro da semi-bola boa. No terceiro caso, no caso em que ambas as bolas são semi-bolas boas ou bolas boas intersectando o bordo, tome um ponto $p_{i_3} \in (B_{i_1} \cap B_{i_2} \cap \partial Z)$ e defina $\psi'(E) = p_3$. Deste modo, a aplicação ψ' está definida em cada um dos 1-simplexos da triangularização de N_Z . Continuando com a definição da ψ' , considere um 2-simplexo $\Delta_2 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ e lembre-se que ψ' está definida em $\partial\Delta_2$, pois $\partial\Delta_2 = E_1 \cup E_2 \cup E_3 = \langle v_1, v_2 \rangle \cup \langle v_2, v_3 \rangle \cup \langle v_1, v_3 \rangle$ e ψ' está definida para o 1-esqueleto da triangularização. Usando o mesmo raciocínio, existem três bolas $B_{i_1}, B_{i_2}, B_{i_3} \in \mathcal{C}_Z$ associadas a este 2-simplexo, tais que, $B_{i_1} \cap B_{i_2} \cap B_{i_3} \neq \emptyset$. Isso gera quatro casos a serem analisados:

- (a) ou $B_{i_1}, B_{i_2}, B_{i_3} \in \mathcal{C}_{\text{int}(Z)}$;
- (b) ou uma destas três bolas é uma semi-bola ou uma bola boa que intersecta o bordo, ou seja, $B_{i_j} \in \mathcal{C}_{\partial Z}$ para algum $j = 1, 2, 3$;
- (c) ou duas destas três bolas são semi-bolas boas ou bolas boas que intersectam o bordo, $B_{i_j}, B_{i_k} \in \mathcal{C}_{\partial Z}$ para algum $j, k = 1, 2, 3$, com $j \neq k$;
- (d) ou todas as três bolas $B_{i_1}, B_{i_2}, B_{i_3} \in \mathcal{C}_{\partial Z}$.

Nos dois primeiros casos, basta aplicar a técnica de Alpert e Funano e definir $\psi'(\partial\Delta_2) = \gamma$, onde $\gamma : [0, 1] \rightarrow Z$, com $\gamma(0) = \gamma(1) = p_1$ e $|\gamma| \leq 7/100$ é uma curva fechada com comprimento menor que 1. Por hipótese, $f(\gamma)$ é contrátil. Logo, o bordo de $f(\gamma)$ pode ser visto como o círculo que por sua vez, pode ser estendido a um disco. Além disso, um 2-simplex é homeomorfo a um disco, ou seja, a composição $f \circ \psi'$ pode ser estendida para cada 2-simplexo da triangularização de N_Z . No terceiro caso, onde duas das três bolas associadas ao 2-simplexo Δ_2 , são semi-bolas boas ou bola boas intersectando o bordo, sem perda de generalidade, suponha que a aresta E_3 é a aresta que está associada a estas bolas $B_{i_2}, B_{i_3} \in \mathcal{C}_{\partial Z}$. Assim, defina $\psi'(E_3) = p_4$, onde $p_4 \in B_{i_2} \cap B_{i_3} \cap \partial Z$, $\psi'(E_1) = \gamma_1$, com $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow Z$ tal que $\gamma_1(0) = p_1$, $\gamma_1(1) = p_4$ e

$|\gamma_1| \leq 2/100$ e $\psi'(E_2) = \gamma_2$ tal que $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow Z$ satisfazendo $\gamma_2(0) = p_1$, $\gamma_2(1) = p_4$ e $|\gamma_2| \leq 2/100$. Portanto, existe uma curva fechada $\gamma : [0, 1] \rightarrow Z$ dada por $\gamma = \gamma_1 \circ \gamma_2^{-1}$ onde $\gamma(0) = p_1 = \gamma(1) = e$ e $|\gamma| < 4/100$, tal que γ é a imagem do 2-simplex, Δ_2 , pela aplicação ψ' . Novamente, a curva γ é um loop com comprimento no máximo $4/100 < 1$, isto é, por hipótese, $f(\gamma)$ é trivial em Σ . Finalmente, no quarto caso, onde todas as bolas boas pertencem a $\mathcal{C}_{\partial Z}$, defina $\psi'(\Delta_2) = p_5$, onde $p_5 \in B_{i_1} \cap B_{i_2} \cap B_{i_3} \cap \partial Z$. Desta forma, em todos os casos, segue que $f(\psi'(\Delta_2))$ ou é um ponto isolado, ou é uma homotopicamente nula, em ambos os casos, $f(\psi'(\Delta_2))$ é trivial em Σ . O ponto importante é que uma curva homotopicamente nula, pode ser vista como uma 1-esfera que por sua vez pode ser estendida a um disco. Além disso, usando novamente o fato de que um 2-simplex é homeomorfo a um disco, a composição $f \circ \psi'$ pode ser estendida para todo 2-simplex da triangularização de N_Z . Analogamente, para cada 3-simplex Δ_3 , se $f(\partial\Delta_3)$ é contrátil, então, o bordo de Δ_3 pode ser visto com uma 2-esfera, que pode ser estendida para uma 3-bola que é homeomorfa a um 3-simplex Δ_3 e portanto, $f \circ \psi'$ pode ser estendida para todo o 3-simplex. Aqui, quando considerar um 3-simplexo em N_Z será utilizado o mesmo raciocínio que foi usado em para 1-simplexo e 2-simplexo. Agora, acontecem cinco casos: ou nenhum vértice, ou um vértice, ou uma aresta, ou três arestas ou todo o 3-simplexo pertence a uma face que é gerada apenas por semi-bolas boas ou bolas boas que intersectam o bordo. Os três primeiros casos, foram construídos anteriormente e os outros dois casos, usa-se o mesmo raciocínio. Observe que mesmo que os casos acima estejam misturados, a imagem $f(\gamma) \in \Sigma$ será trivial. Portanto, em outras palavras, o que foi mostrado é que se $\pi_2(\Sigma) = 0$, então a aplicação no 2-esqueleto pode ser estendida para uma aplicação no 3-esqueleto. Continuando deste modo, se o π_3 é trivial, então uma aplicação no 3-esqueleto pode ser estendida para uma aplicação no 4-esqueleto. Por hipótese, Σ é esférica, ou seja, $\pi_n(\Sigma) = 0$, para todo $n \geq 2$. Logo, a aplicação $f \circ \psi'$ pode ser estendida para todos os simplexo de dimensão alta da triangularização de N_Z . Para finalizar a primeira parte da demonstração, basta definir $\psi \equiv f \circ \psi'$.

Na segunda parte da demonstração o objetivo é construir uma homotopia relativa H entre f e $\psi \circ \phi$. A construção usa a mesma técnica da primeira parte, construir uma aplicação H' e definir $H = f \circ H'$. Inicialmente, deforme homotopicamente ϕ para ϕ' que é simplicial com respeito as triangularizações de Z e do seu nervo retangular N_Z . Uma vez fixada uma triangularização em Z , considere um vértice v e note que, devido à construção de ϕ' , $\phi'(v)$ é um vértice da triangularização de N_Z que está muito próximo do ponto $\phi(v)$. Por isso, se F é a menor face aberta de N_Z contendo $\phi'(v)$, então $\phi(v)$ pode ou não estar contido na face F , mas pelo menos $\phi(v)$ pertence a uma face que faz fronteira com a face F . Logo, $\psi' \circ \phi'(v) = p_i$,

para alguma bola $B_i \in \mathcal{C}_Z$ que tem interseção com outra bola $B_j \in \mathcal{C}_Z$ tal que B_j contém v . Novamente, $\psi' \circ \phi'(v)$ e v podem ser conectados por uma curva de comprimento no máximo $2/100$. Se $v \in \text{int}(Z)$ então defina $H' : Z \times [0, 1] \rightarrow Z$ por $H'(v, 0) = \psi' \circ \phi'(v)$, $H'(v, 1) = v$ e H' sob $v \times (0, 1)$ aplicando o intervalo a uma curva $\alpha : [0, 1] \rightarrow Z$ tal que, $\alpha(0) = \psi' \circ \phi'(v)$, $\alpha(1) = v$, $|\alpha| \leq 2/100$ e $H'(v \times (0, 1)) = \alpha$. Por outro lado, se $v \in \partial Z$, tome um ponto $w \in B_i \cap B_j$ e defina $H'(v \times [0, 1]) = w$. Agora considere uma aresta $E = \langle v_1, v_2 \rangle$ da triangularização de Z . Devido a possibilidade de refinar a triangularização tanto quanto for necessário, considere que a aresta E tenha comprimento no máximo $1/100$. Destas informações, três possibilidades surgem e devem ser analisadas: ou a aresta está contida no interior de Z , ou um vértice da aresta está no interior da variedade e o outro no bordo, ou E está totalmente contida no bordo de Z . No primeiro caso, basta aplicar a mesma técnica que Alpert e Funano aplicaram em (ALPERT; FUNANO, 2017), e defina H' no bordo de $(0, 1) \times E$ como sendo um loop β tal que $|\beta| \leq 7/100$. Já no segundo caso, suponha que $v_1 \in \partial Z$ e, usando a definição de H' em vértices, segue que H' está definida no bordo de $E \times (0, 1)$. A imagem deste bordo, sob a aplicação H' , é uma curva, β ligando os pontos v_2 , $\psi' \circ \phi'(v_2)$ e w , onde $v_2, \psi' \circ \phi'(v_2) \in \text{int}(Z)$ e $w = H'(v_1 \times [0, 1]) \in \partial Z$, com $|\beta| < 7/100$. Finalmente, no último caso, $E \subset \partial Z$, ou seja, $v_1, v_2, \psi' \circ \phi'(v_1), \psi' \circ \phi'(v_2) \in \partial Z$ e, pela construção do nervo retangular, existem semi-bolas boas $b_{i_1}, b_{i_2}, b_{i_3}, b_{i_4} \in \mathcal{C}_{\partial Z}$ tais que $b_{i_1} \cap b_{i_2} \cap b_{i_3} \cap b_{i_4} \cap \partial Z \neq \emptyset$. Agora considere $q \in b_{i_1} \cap b_{i_2} \cap b_{i_3} \cap b_{i_4} \cap \partial Z$ e defina $H'(E \times (0, 1)) = q$. Novamente, surgem alguns casos com essa definição: a imagem do bordo de $E \times (0, 1)$ ou é uma curva fechada com comprimento menor que 1 ou é simplesmente um ponto. Por hipótese, a imagem de loops com comprimento menor que 1, sob a aplicação f é contrátil em Σ , então é possível estender $f \circ H'$ para $E \times (0, 1)$. Para o processo ser entendido, basta analisar mais um passo: Considere um 2-simplexo $\Delta_2 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ e observe que quatro casos aparecem: ou nenhum vértice pertence ao ∂Z , ou apenas um dos três vértices pertence ao ∂Z , ou dois dos três vértices pertence ao ∂Z , ou todos os três vértices pertencem ao ∂Z . No primeiro caso, use o que já foi provado e o fato de Σ ser uma variedade esférica. Portanto é possível estender $f \circ H'$ para $\Delta_2 \times (0, 1)$. Nos outros três casos, existem semi-bolas boas sobrepostas que permite escolher um ponto w pertencente a interseção destas semi-bolas de forma que é possível contrair o bordo de $\Delta_2 \times (0, 1) \cap \partial Z$ para w . Como anteriormente, para 2-simplexos, a imagem pela H' será um ponto no caso em que os três vértices do 2-simplexo pertencem a ∂Z , ou será uma curva fechada de comprimento no máximo 1. Logo, usando a hipótese sobre f , $f \circ H'(\Delta_2)$ será contrátil em Σ e por isso, é possível estender $f \circ H'$ para todo o Δ_2 . Por fim, usando o fato de Σ ser esférica, continuando com este mesmo raciocínio pode-se

estender a aplicação $f \circ H'$ para todo o $\Delta_n \times (0, 1)$, para cada simplexo de dimensão alta, Δ_n . Defina $H = f \circ H'$. Esta aplicação H é uma homotopia relativa entre f e $\psi \circ \phi'$ relativa ao par $(Z, \partial Z)$, mas ϕ' é homotópica a ϕ , portanto $\psi \circ \phi$ é homotópica a f relativa ao par $(Z, \partial Z)$.



O Lema 3.7 garante uma propriedade muito importante da aplicação ϕ . Em particular, a aplicação ϕ permite aplicar a variedade em seu nervo retangular e, pela construção realizada no lema em questão, a aplicação ψ aplica a imagem da variedade $\phi(\Sigma) \subset N_\Sigma$, em Σ , ou seja, a aplicação ψ funciona como uma espécie de levantamento da função ϕ . Como já mencionado anteriormente, ao longo deste trabalho será utilizado o conceito de homologia relativa, inclusive no nervo retangular, isso é necessário para garantir que a classe de homologia $\phi_*([Z, \partial Z])$ esteja bem definida. Para definir tal homologia relativa no nervo, basta observar que as semi-bolas que cobrem o bordo de Z geram uma face especial no nervo retangular, como foi definido em (17). Logo, esta face especial $N_{\partial Z}$ está associada ao bordo de Z . Dito isso, os resultados que caracterizam os n -ciclos relativos triviais, os lemas abaixo, Lema 3.8 e Lema 3.9, que serão enunciados logo abaixo, possuem a mesma ideia de demonstração: dada uma variedade compacta Z , com bordo não vazio, existe uma cobertura boa para esta variedade e um nervo retangular associado a esta cobertura boa. Daí, no nervo retangular associado, constrói-se uma sequência de n -ciclos homólogos relativamente à face especial, $N_{\partial Z}$,

$$z_D \sim z_{D-1} \sim z_{D-2} \sim \dots \sim z_n,$$

onde cada um dos z_k pertence ao k -esqueleto de N_Z . Usando o fato que existe um ciclo relativo na classe de homologia relativa que minimiza área, é possível fazer estimativas para os volumes dos n -ciclos relativos da sequência acima. Assim, usando as ideias de Gromov em (GROMOV et al., 1983), existe uma aplicação, R_δ , que puxa uma vizinha do k -esqueleto para o $(k - 1)$ -esqueleto. Logo, usando esta aplicação, conclui-se que o n -ciclo relativo z_n que pertence ao n -esqueleto é relativamente homólogo a um n -ciclo, z_{n-1} que pertence ao $(k - 1)$ -esqueleto. Continuando com esse raciocínio, conclui-se que $[z_n] = 0$ in $H_n(N_Z; N_{\partial Z})$. A demonstração do Lema 3.8 será dada abaixo, pois será necessário uma adaptação da aplicação R_δ , pois o n -ciclo pode ter um volume muito grande na face especial $N_{\partial Z}$ e será necessário obter o controle deste volume. A prova do Lema 3.9, uma vez que a adaptação da aplicação R_δ for realizada, é a mesma que foi realizada por Guth, em (GUTH, 2011, Lemma 8).

Lema 3.8. *Para qualquer $\beta > 0$ e qualquer inteiro $n > 0$, existe uma constante pequena $\epsilon(\beta, n) > 0$ tal que se z é um n -ciclo no nervo retangular N relativa à face $N_{\partial Z}$ satisfazendo*

$$|z \cap \text{Est}(F)| < \epsilon r_1(F)^n e^{-\beta d(F)}, \quad (19)$$

para toda face $F \subset N$, então $[z] = 0$ em $H_n(N, N_{\partial Z})$.

Demonstração: A demonstração deste lema é bem parecida com a prova dada por Larry Guth em (GUTH, 2011, Lemma 8), no entanto, para homologia relativa $H_n(N_Z, N_{\partial Z})$ existe uma diferença na construção da aplicação R_δ . Inicialmente, considere uma sequência de n -ciclos relativos à $N_{\partial Z}$

$$z_D \sim z_{D-1} \sim z_{D-2} \sim \dots \sim z_n,$$

onde cada z_k está contido no k -esqueleto de N_Z . Considere F uma k -dimensional face de N_Z e $z_k \cap F$, que define um ciclo relativo em F . Agora substitua este ciclo relativo, pelo ciclo relativo minimal que possui o mesmo bordo que $z_k \cap F$. Fazendo este processo para cada k -face de N_Z , o resultado será um novo n -ciclo relativo, z'_k , que é homólogo a z_k relativamente à face $N_{\partial Z}$ que possui o menor volume nesta classe de homologia relativa. Daí,

$$|z'_k \cap F| < |z_k \cap F| < \epsilon r_1(F)^n e^{-\beta d(F)} < 2\epsilon r_1(F)^n e^{-\beta d(F)}.$$

Agora, defina a distância de z'_k até ∂F por s e, usando a fórmula da monotonicidade, segue que

$$w_n s^n \leq |z'_k \cap F| \leq 2\epsilon r_1(F)^n e^{-\beta d(F)} \Rightarrow s/r_1(F) \leq [2w_n^{-1}\epsilon e^{-\beta k}]^{1/n}. \quad (20)$$

Para construir a aplicação R_δ considere inicialmente uma aplicação básica $f : [0, r] \rightarrow [0, r]$ tal que $f([0, \delta r]) = 0$, $f([r - \delta r, r]) = r$ e f aplica $[\delta r, r - \delta r]$ linearmente cobrindo $[0, r]$. Note que a constante de Lipschitz da aplicação f é igual a $L_f = (1 - 2\delta)^{-1}$. Agora aplique função f em cada uma das coordenadas ϕ no retângulo R , no entanto, nas coordenadas de ϕ que estiverem associadas às faces pertencentes à face especial, $N_{\partial Z}$, aplique a função identidade, ou seja, a aplicação R_δ mantém fixado a porção de z'_k que pertence à face especial, $N_{\partial Z}$. Claramente, a aplicação $R_\delta : N_Z \rightarrow N_Z$ satisfaz R_0 é a aplicação identidade, e cada R_δ é homotópica à identidade. Logo, as aplicações induzidas em nível de homologia relativa são iguais, ou seja, R_δ aplica qualquer ciclo relativo num ciclo relativo homólogo. Além disso, $R_\delta^{-1}(\text{Est}(F)) = \text{Est}(F)$ para qualquer face F e

$$|R_\delta \cap \text{Est}(F)| \leq (1 - 2\delta)^{-n} |y \cap \text{Est}(F)| \quad (21)$$

Novamente, seguindo as ideias de Guth, para um δ suficientemente grande, a função R_δ , aplica z'_k no $(k - 1)$ -esqueleto de N_Z . Assim, usando a estimativa (20), defina $z_{k-1} = R_{\delta(k)}(z'_k)$, onde $\delta(k) = [2w_n^{-1}\epsilon e^{-\beta k}]^{1/n}$. Para finalizar a demonstração, é necessário mostrar que z_{k-1} satisfaz a estimativa de volume $|z_{k-1}| \leq \epsilon r_1(F)^n e^{-\beta d(F)}$ e neste caso, basta seguir a demonstração de Guth em (GUTH, 2011, Lemma 8).

Finalmente, no lema a seguir, será possível uma relação inicial entre o volume simplicial de Z com o volume de Z .

Lema 3.9. *Pra cada número $V_0 > 0$ e cada dimensão n , existe uma constante $C(V_0, n)$ tal que se uma variedade Riemanniana compacta Z , com bordo não vazio satisfaz $V_Z(1/2) < V_0$, então*

$$|\phi_*([Z, \partial Z])| \leq C(V_0, n)|Z, \partial Z|.$$

Demonstração: A demonstração deste lema segue a mesma ideia da demonstração do Lema 3.8. Novamente, será construída uma sequência de n -ciclos relativamente homólogos em $H_n(Z, \partial Z)$ e, para finalizar e obter o resultado, será utilizado as estimativas de volumes obtidas ao longo da construção do nervo retangular. Inicialmente, seguindo as técnicas de Guth em (GUTH, 2011), divide as faces de N_Z em duas categorias: faces grossas e faces finas. Uma face $F \subset N_Z$ é considerada fina se $C_1 V_0 r_1(F) < \epsilon$, caso contrário, a face F é definida como uma face grossa. Segue da construção do nervo retangular dois fatos: Qualquer face de dimensão alta, que contenha uma face fina em sua fronteira, também é uma face fina. O segundo fato, seguindo o Lema 3.4 e a definição de face grossa, $r_1(F) \geq c\epsilon/V_0$, é que a dimensão de uma face grossa qualquer é limitada por uma constante, $d(V_0, n)$, que depende apenas de n e de V_0 . Como foi feito no Lema 3.8, é preciso usar a homologia relativa no nervo retangular N_Z para garantir que a classe $\phi_*([Z, \partial Z])$ esteja bem definida. Novamente, use a face especial $N_{\partial Z}$ e construa uma sequência de n -ciclos homólogos relativamente a esta face

$$z_D \sim z_{D-1} \sim z_{D-2} \sim \dots \sim z_n,$$

onde cada um dos z_k pertencem ao k -esqueleto de N_Z e $z_D = \phi(Z)$. Para faces finas, usando o Lema 3.8, obtém-se

$$|z_D \cap \text{Est}(F)| < 2\epsilon r_1(F)^n e^{-\beta d(F)}.$$

Seguindo a demonstração do Lema 3.8, tomando uma face fina F , defina $z'_k \cap F$ o ciclo que minimiza volume cujo bordo é dado por $\partial(z'_k \cap F) \subset \partial F$ e que pertence a uma $s(F)$ -vizinhança do $(k - 1)$ -esqueleto. Porém, se a face é grossa, a escolha do ciclo que minimiza área não é tão simples. No caso em que F é uma face grossa, defina z'_k substituindo $z_k \cap F$ por uma cadeia

relativa em ∂F que possui o mesmo bordo que $z_k \cap F$. Usando o Teorema de deformação de Federer-Fleming é possível obter uma n -cadeia cujo volume é limitado por $G(V_0, n)|z_k \cap F|$. Como L.Guth observou em seu trabalho, (GUTH, 2011), a construção de Federer-Fleming nos fornece uma constante quando aplicada a um cubo, porém, neste trabalho, se as dimensões dos retângulos são muito desiguais, a constante G pode explodir ao infinito. Mas, mesmo para variedades com bordo, a construção do nervo retangular nos permite ter um controle sob as dimensões das faces, ao qual são limitadas por uma constante dependo apenas de n e V_0 , além disso, segue da finição de face grossa que r_1 é limitado por baixo. Novamente, aplicando a mesma técnica do Lema 3.8, defina $\delta(k) = [2w_n^{-1}\epsilon e^{-\beta k}]^{1/n}$, $z_{k-1} = R_{\delta(k)}(z'_k)$ e note que o ciclo z_{k-1} é relativamente homólogo a z_k e pertence ao $(k-1)$ -esqueleto de N_Z . Fazendo os mesmo cálculo do Lema 3.8, obtém-se

$$|z_{k-1} \cap \text{Est}(F)| < 2\epsilon r_1(F)^n e^{-\beta d(F)}.$$

Finalmente, para obter a norma simplicial relativa, considere o n -ciclo relativo, z_n , pertencente ao n -esqueleto de N_Z . É um fato que este n -ciclo é relativamente homólogo a uma soma de n -faces de F que não pertencem à face especial, $N_{\partial Z}$, $\sum_i c_i F_i$ tal que $F_i \notin N_{\partial Z}$, onde para cada um destes índices i 's vale

$$|c_i| \leq |z_n \cap F_i| |F_i|.$$

Portanto, tomando uma triangularização baricêntrica de cada face, segue que o volume simplicial de z_n satisfaz $\|z_n\| \leq C \sum_i |c_i|$. Se F_i é uma face fina, então $|z_n \cap \text{Est}(F)| < 2\epsilon r_1(F_i)^n$, ou seja, $c_i = 0$. Por outro lado, se F_i é uma face grossa, então $|F_i|$ é limitado por baixo e portanto, $\sum_i |c_i| < C(V_0, n)|z_n|$. Para limitar o volume $|z_n|$, lembre-se que z_k foi construído z_{k+1} , fazendo uma cirurgia em cada $(k+1)$ -face que não pertencia à face especial, produzindo $z'_{k+1} = R_{\delta(k)}(z_{k+1})$. Observe que se $k > d(V_0, n)$, então todas as cirurgias ocorrem em faces finas portanto, cada cirurgia diminui o volume do ciclo. Como visto no Lema 3.8 a aplicação $R_{\delta(k)}$ aumenta o volume por no máximo um fator $[1 - 2\delta(k)]^{-n}$. Logo,

$$|z_{d(V_0, n)}| < \prod_{k=d(V_0, n)}^{\infty} [1 - 2\delta(k)]^{-n} |z_D|,$$

que, usando o mesmo cálculo do Lema 3.8, obtém-se

$$|z_{d(V_0, n)}| < \prod_{k=d(V_0, n)}^{\infty} [1 - 2\delta(k)]^{-n} |Z_D| < 2|z_D|.$$

Agora, se $k < d(V_0, n)$, então

$$|z_{k-1}| \leq G(n, V_0)[1 - 2\delta(k)]^{-n} |z_k|,$$

ou seja,

$$|z_n| < 4G(V_0, n)^{d(V_0, n)} |z_D|.$$

Finalmente, pelo Lema 3.5, $|z_D| \leq C(n)|(M, g)|$. Portanto,

$$\begin{aligned} \|\phi_*([Z])\| &\leq \|z_n\| < 4G(V_0, n)^{d(V_0, n)} |z_D| \\ &< 4G(V_0, n)^{d(V_0, n)} C(n)|(M, g)| \\ &= C(V_0, n)(M, g). \end{aligned}$$

O Teorema de Volume modificado de H. Alpert e K. Funano, (ALPERT; FUNANO, 2017, Lema 2.2) tem como hipótese uma variedade hiperbólica fechada. Neste caso, eles usam o Teorema de Gromov Thurston como principal ferramenta para relacionar o volume da variedade com o volume simplicial da variedade. Aqui neste trabalho, a variedade não é fechada, ela é compacta e com bordo não vazio e, sob estas condições não é possível usar o Teorema de Gromov Thurston, ao invés deste teorema, ao considerar que o bordo da variedade é totalmente geodésico, os trabalhos de Jungreis e Kuessner, (JUNGREIS, 1997) e (KUESSNER, 2003), garante que é possível estabelecer uma versão mais fraca do Teorema de Gromov Thurston, a saber:

Teorema 3.1. *Seja $(\Sigma, \partial\Sigma)$ uma variedade hiperbólica com bordo geodésico. Então,*

$$|(\Sigma, \partial\Sigma)| < v_n \|[(\Sigma, \partial\Sigma)]\|,$$

onde v_n é a mesma constante n -dimensional dada no Teorema 2.3.

Dito isso, e com o auxílio do Lema 3.8 e do Lema 3.9 é possível demonstrar o principal resultado deste capítulo.

Teorema 3.2 (Teorema de Volume com bordo). *Sejam $(\Sigma, \partial\Sigma)$ uma variedade Riemanniana hiperbólica, compacta com bordo totalmente geodésico e $(Z, \partial Z)$ uma variedade Riemanniana compacta com bordo. Suponha que exista $f : (Z, \partial Z) \rightarrow (\Sigma, \partial\Sigma)$ de grau 1, com $f(\partial Z) \subset \partial\Sigma$ tal que $f(\gamma)$ é contrátil para todo loop $\gamma \subset Z$ com $|\gamma| < 1$. Além disso, suponha também que*

$$V_{(Z, \partial Z)}(1/2) \leq V_0.$$

Então,

$$|(Z, \partial Z)| \geq C(n, V_0)|(\Sigma, \partial\Sigma; \text{hyp})|.$$

Demonstração: Para $(Z, \partial Z)$ considere uma cobertura boa \mathcal{C}_Z e, associado a essa cobertura, o nervo retangular N_Z . Considere também a aplicação $\phi : (Z, \partial Z) \rightarrow N_Z$ como foi construída

anteriormente. O Lema 3.9 nos garante que

$$\|\phi_*(Z, \partial Z)\| \leq C(n, V_0)|(Z, \partial Z)|. \quad (22)$$

Além disso, por hipótese, a aplicação $f : (Z, \partial Z) \rightarrow (\Sigma, \partial\Sigma)$ tem grau 1 e, por definição de grau de uma aplicação, segue que

$$f_*([(Z, \partial Z)]) = gr(f)[(\Sigma, \partial\Sigma)] \Rightarrow f_*([(Z, \partial Z)]) = [(\Sigma, \partial\Sigma)],$$

mas o grau é um invariante homotópico, ou seja, pelo Lema 3.7, obtém-se

$$\psi_*(\phi_*([(Z, \partial Z)])) = [(\Sigma, \partial\Sigma)].$$

Além disso, pela contratividade da norma simplicial sob aplicações contínuas,

$$\|[(\Sigma, \partial\Sigma)]\| = \|\psi_*(\phi_*([(Z, \partial Z)]))\| \leq \|\phi_*([(Z, \partial Z)])\|. \quad (23)$$

Pelo Teorema 3.1,

$$|(\Sigma, \partial\Sigma)| < v_n \|(\Sigma, \partial\Sigma)\|. \quad (24)$$

Portanto, usando as inequações 24, 23 e 22 obtém-se

$$|(\Sigma, \partial\Sigma)| \leq C(n, V_0)|(Z, \partial Z)|. \quad (25)$$

■

4 O Lema de Estabilidade com bordo e o Teorema da Área com bordo

Neste capítulo será demonstrado o resultado principal deste trabalho, ou seja, o interesse aqui é demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 4.1 (Teorema da Área com bordo). *Sejam $(\Sigma, \partial\Sigma; hyp)$ uma variedade hiperbólica n -dimensional compacta, com bordo totalmente geodésico e g uma métrica em $(M, \partial M) = (\Sigma, \partial\Sigma) \times \mathbb{S}^1$ tais que*

$$V_{((\tilde{M}, \partial\tilde{M}), \tilde{g})}(1) \leq V_0. \quad (26)$$

Considere $(Z, \partial Z) \subset (M, \partial M)$ uma hipersuperfície mergulhada, homóloga a $(\Sigma, \partial\Sigma) \times \{\}$ sob coeficientes em \mathbb{Z}_2 . Então*

$$|(Z, \partial Z; g)| \geq C(n, V_0)|(\Sigma, \partial\Sigma; hyp)| \quad (27)$$

Para demonstrar o Teorema 1.3 é necessário considerar uma cobertura boa da variedade $(\Sigma, \partial\Sigma)$ e o nervo retangular associado à esta cobertura, como foi feito no capítulo 2, para que seja possível aplicar o Teorema 1.4. Além disso, também é preciso mostrar que, devido a hipótese 3, as bolas de raio $(1/2)$ possuem área controlada em $(Z, \partial Z)$. Uma vez que estas áreas são controladas, é possível aplicar o Teorema 1.4 para comparar as áreas de $(\Sigma, \partial\Sigma)$ e $(Z, \partial Z)$. Para obter o controle dos volumes das bolas de raio $(1/2)$ em $(Z, \partial Z)$ é necessário uma generalização do (ALPERT; FUNANO, 2017, Lema 2.1), uma vez que a variedade Z agora não é mais fechada, é compacta e com bordo. As técnicas de Alpert e Funano foi uma adaptação das técnicas apresentadas por Guth no Lema de Estabilidade em (GUTH, 2010b). Segue a versão do Lema de Estabilidade com bordo:

Lema 4.1 (Lema de Estabilidade com bordo). *Sejam Σ uma variedade hiperbólica n -dimensional, compacta, com bordo não vazio, g uma métrica em $M = \Sigma \times \mathbb{S}^1$ e $Z \subset M$ uma hipersuperfície n -dimensional, mergulhada, com bordo não vazio, homóloga relativa a $\Sigma \times \{*\}$ com coeficientes em \mathbb{Z}_2 e δ -minimizante. Considere o espaço de recobrimento $\hat{\pi} : \hat{M} \rightarrow M$ difeomorfo a $\Sigma \times \mathbb{R}$. Dado um ponto qualquer $p \in M$ suponha que*

$$|\hat{B}(\hat{p}, 1)| \leq V_0, \quad (28)$$

onde \hat{p} é um levantamento de p . Então

$$\text{Area} \left(Z \cap B \left(p, \frac{1}{2} \right) \right) \leq 2V_0 + \delta. \quad (29)$$

Demonstração: Inicialmente, note que para $p \in M$ existem duas possibilidades:

(i) $p \in (\Sigma \times \mathbb{S}^1)$;

(ii) $p \in (\partial\Sigma \times \mathbb{S}^1)$;

No primeiro caso, quando $p \in (\Sigma \times \mathbb{S}^1)$, basta seguir a técnica feita por H. Alpert e K. Funano em (ALPERT; FUNANO, 2017). No outro caso é necessário uma estratégia um pouco diferente para demonstrar o resultado. A principal dificuldade nestes casos é encontrar uma maneira de tomar bolas na topologia de M , centradas em p , que satisfazem a hipótese e que seja possível fazer as estimativas de área da hipersuperfície Z nesta bola, levando em consideração que o bordo de Z é não vazio. Para tal objetivo, no espaço de recobrimento, basta considerar semi bolas centradas em $\hat{p} \in \partial\hat{M}$, uma vez que é conhecido que as pré-imagens dos pontos no bordo de M , são pontos de uma das componentes do bordo de \hat{M} . Diante disso, dado um ponto $p \in M$, para o caso (ii), tem-se $\hat{p} \subset \hat{\pi}^{-1}(p) \subset \partial\hat{M}$. Agora considere a semi bola, $\hat{b}(\hat{p}, 1)$, centrada neste ponto. Lembre-se que se M é uma variedade e $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função Lipschitz própria, então para toda função localmente integrável g em M e $t \in \mathbb{R}$, a fórmula da co-área é dada por,

$$\int_{h \leq R} g \|\nabla_M h\| dM = \int_{-\infty}^R \int_{h=r} g dM dr. \quad (30)$$

Note que uma das hipóteses do teorema fornece uma estimativa de volume para as bolas unitárias no espaço de recobrimento $\hat{\pi} : \hat{M} \rightarrow M$, diante disso, considere o caso particular, onde $g \equiv 1$ e $h = d$, onde d é a função distância dada pela métrica, em M . Daí

$$\int_{d \leq R} \|\nabla_{\hat{M}}(d)\| d\hat{M} = \int_0^R \int_{d=r} d\hat{M} dr, \quad (31)$$

mas

$$\int_{d=r} d\hat{M} = \int_{\hat{s}(\hat{p}, r)} d\hat{M} = |\hat{s}(\hat{p}, r)|$$

e

$$\int_{d \leq R} \|\nabla_{\hat{M}}(d)\| d\hat{M} = \int_{\hat{b}(\hat{p}, R)} \|\nabla_{\hat{M}}(d)\| d\hat{M}$$

onde $s(\hat{p}, r) = \partial\hat{b}(\hat{p}, R)$ é a semi esfera de raio r e $\hat{b}(\hat{p}, R)$ é a semi bola de raio R ambas em \hat{M} . Substituindo em (31),

$$\int_{d \leq R} \|\nabla_{\hat{M}}(d)\| d\hat{M} = \int_{\hat{b}(\hat{p}, R)} \|\nabla_M(d)\| d\hat{M} = \int_0^R |\hat{s}(\hat{p}, r)| dr.$$

Como a normal do gradiente da função distância é 1, segue que $\|\nabla_M(d)\| = 1$, ou seja,

$$\int_{\hat{b}(\hat{p}, R)} \|\nabla_{\hat{M}}(d)\| d\hat{M} = \int_{\hat{b}(\hat{p}, R)} d\hat{M} = \int_0^R |\hat{s}(\hat{p}, r)| dr,$$

isto é,

$$|\hat{b}(\hat{p}, R)| = \int_0^R |\hat{s}(\hat{p}, r)| dr.$$

Agora, suponha por absurdo que para todo $t \in (\frac{R}{2}, R)$ tem-se $|\hat{s}(\hat{p}, t)| > \frac{2}{R} |\hat{b}(\hat{p}, R)|$. Daí,

$$\begin{aligned} |\hat{b}(\hat{p}, R)| &= \int_0^R |\hat{s}(\hat{p}, r)| dr = \int_0^{\frac{R}{2}} |\hat{s}(\hat{p}, r)| dr + \int_{\frac{R}{2}}^R |\hat{s}(\hat{p}, r)| dr \\ &\geq \int_{\frac{R}{2}}^R |\hat{s}(\hat{p}, r)| dr > \int_{\frac{R}{2}}^R \frac{2}{R} |\hat{b}(\hat{p}, R)| dr \\ &= \frac{R}{2} |\hat{b}(\hat{p}, R)| \int_0^R dr = \frac{2}{R} |\hat{b}(\hat{p}, R)| R = 2 |\hat{b}(\hat{p}, R)| \end{aligned}$$

o que é um absurdo. Logo, existe $t_0 \in (\frac{R}{2}, R)$ tal que $|\hat{s}(\hat{p}, t_0)| \leq \frac{2}{R} |\hat{b}(\hat{p}, R)|$. Em particular, para o caso em questão, considere $R = 1$. Assim, usando a hipótese sobre a limitação das bolas unitárias, obtém-se que existe $t \in (\frac{1}{2}, 1)$ tal que

$$|\hat{s}(\hat{p}, t)| \leq 2 |\hat{b}(\hat{p}, 1)| \leq 2V_0.$$

Como a função distância é suave e o conjunto das funções de Morse é denso em $C^\infty(\hat{M}, \mathbb{R})$, então existe uma função de Morse $f : \hat{M} \rightarrow \mathbb{R}$ arbitrariamente próxima da função distância. Além disso, é possível dobrar a variedade hiperbólica Σ identificando os pontos do bordo, denota-se o dobro de Σ por D_Σ . Seguindo as ideias de (BUTTSWORTH, 2017), a extensão métrica hiperbólica para toda a variedade D_Σ é suave, ou seja, a variedade D_Σ é uma variedade hiperbólica fechada. Assim, seguindo o mesmo raciocínio de H. Alpert e K. Funano, usando o Teorema de Transversalidade de Multijatos, (ALPERT; FUNANO, 2017, Lema 3.2), esta função f é tal que $f^{-1}(t)$ é uma subvariedade de \hat{M} satisfazendo $f^{-1}(t) \pitchfork f^{-1}(t)$ e, para qualquer subvariedade $\hat{Z} \subset \hat{M}$ dada, $f^{-1}(t) \pitchfork \hat{Z}$, ou seja, $f^{-1}(t)$ possui auto interseção transversal e interseção transversal com qualquer subvariedade $\hat{Z} \subset \hat{M}$. Como a aplicação de recobrimento $\hat{\pi} : \hat{M} \rightarrow M$ é uma isometria local segue que a imagem por essa aplicação, $\hat{\pi}(f^{-1}(t)) \subset M$, mantém as propriedades de transversalidade, ou seja

$$\hat{\pi}(f^{-1}(t)) \pitchfork \hat{\pi}(f^{-1}(t)) \quad \text{e} \quad \hat{\pi}(f^{-1}(t)) \pitchfork \hat{\pi}(\hat{Z}) = Z.$$

Como f é arbitrariamente próxima da função distância, segue que para todo $\hat{q} \in \hat{b}(p, \frac{1}{2})$ tem-se

$$\begin{aligned} |f(\hat{q}) - d(\hat{q})| < \epsilon &\Rightarrow -\epsilon < f(\hat{q}) - d(\hat{q}) < \epsilon \\ &\Rightarrow -\epsilon < f(\hat{q}) < \epsilon + \frac{1}{2}, \end{aligned} \tag{32}$$

ou seja, $\hat{q} \in f^{-1}([-\epsilon, \frac{1}{2} + \epsilon])$. Logo, $\hat{b}(\hat{p}, \frac{1}{2}) \subset f^{-1}([-\epsilon, \frac{1}{2} + \epsilon])$. De forma análoga, se $\hat{q} \in f^{-1}([-\epsilon, 1 - \epsilon])$, tem-se $f(\hat{q}) \leq 1 - \epsilon$. Daí,

$$\begin{aligned} |d(\hat{q}) - f(\hat{q})| < \epsilon &\Rightarrow -\epsilon < d(\hat{q}) - f(\hat{q}) < \epsilon \\ &\Rightarrow d(\hat{q}) < \epsilon + f(\hat{q}) < \epsilon + 1 - \epsilon = 1, \end{aligned} \quad (33)$$

isto é, $\hat{q} \in \hat{b}(\hat{p}, 1)$. Portanto, $f^{-1}([-\epsilon, 1 - \epsilon]) \subset \hat{b}(\hat{p}, 1)$. Assim, da existência de f , descrita anteriormente, de (32) e de (33), conclui-se que existe $\epsilon > 0$, arbitrariamente pequeno, tal que

$$\begin{cases} \hat{b}(\hat{p}, \frac{1}{2}) \subset f^{-1}([-\epsilon, \frac{1}{2} + \epsilon]) \\ \text{e} \\ f^{-1}([-\epsilon, 1 - \epsilon]) \subset \hat{b}(\hat{p}, 1) \end{cases} \Rightarrow \hat{b}(\hat{p}, \frac{1}{2}) \subset f^{-1}([\frac{1}{2} + \epsilon, 1 - \epsilon]) \subset \hat{b}(\hat{p}, 1) \quad (34)$$

Agora, suponha por absurdo que

$$|f^{-1}(t)| > \frac{1}{(1 - \epsilon) - (\frac{1}{2} + \epsilon)} V_0,$$

para todo $t \in [\frac{1}{2} + \epsilon, 1 - \epsilon]$. Daí, novamente pela fórmula da co-área, 30, onde $h = f$, $g \equiv 1$ e $t = 1 - \epsilon$, segue que

$$\int_{h \leq t} f \|\nabla_M g\| dM = \int_{f \leq 1 - \epsilon} \|\nabla_{\hat{M}} f\| d\hat{M} = \int_{f^{-1}([-\epsilon, 1 - \epsilon])} \|\nabla_{\hat{M}} f\| d\hat{M},$$

mas, como f é próximo da função distância, tem-se $\|\nabla_{\hat{M}} f\| \leq 1$, além disso, por (34), $f^{-1}([-\epsilon, 1 - \epsilon]) \subset \hat{b}(\hat{p}, 1)$ e pela hipótese, $|\hat{B}(\hat{p}, 1)| \leq V_0$, ou seja,

$$\int_{f^{-1}([-\epsilon, 1 - \epsilon])} \|\nabla_{\hat{M}} f\| d\hat{M} \leq \int_{f^{-1}([-\epsilon, 1 - \epsilon])} d\hat{M} \leq \int_{\hat{B}^+(\hat{p}, 1)} d\hat{M} = |\hat{b}(\hat{p}, 1)| \leq V_0. \quad (35)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^R \int_{h=r} g dM dr &= \int_{-\epsilon}^{1-\epsilon} \int_{f^{-1}(r)} d\hat{M} dr = \int_{-\epsilon}^{1-\epsilon} |f^{-1}(r)| dr \\ &= \int_{-\epsilon}^{\frac{1}{2}+\epsilon} |f^{-1}(r)| dr + \int_{\frac{1}{2}+\epsilon}^{1-\epsilon} |f^{-1}(r)| dr \leq \int_{\frac{1}{2}+\epsilon}^{1-\epsilon} |f^{-1}(r)| dr \\ &> \int_{\frac{1}{2}+\epsilon}^{1-\epsilon} \frac{1}{(1 - \epsilon) - (\frac{1}{2} + \epsilon)} V_0 dr \\ &= \frac{1}{(1 - \epsilon) - (\frac{1}{2} + \epsilon)} V_0 \int_{\frac{1}{2}+\epsilon}^{1-\epsilon} dr = V_0. \end{aligned} \quad (36)$$

Comparando (35) e (36), conclui-se

$$V_0 < \int_{-\epsilon}^{1-\epsilon} \int_{f^{-1}(r)} d\hat{M} dr = \int_{f^{-1}([-\epsilon, 1 - \epsilon])} \|\nabla_{\hat{M}} f\| d\hat{M} \leq V_0,$$

o que é um absurdo. Portanto, existe $t \in (\frac{1}{2} + \epsilon, 1 - \epsilon)$ tal que $f^{-1}(t)$ possui as propriedades de transversalidade desejada e satisfaz

$$|f^{-1}(t)| \leq \frac{1}{(1 - \epsilon) - (\frac{1}{2} + \epsilon)} V_0. \quad (37)$$

Agora, denote por:

(i) $\hat{B} = \overline{f^{-1}([- \epsilon, t] \cap \partial \hat{M})} \subset \hat{M}$, cujo bordo é $\partial \hat{B} = f^{-1}(t)$;

(ii) $B = \hat{\pi}(\hat{B})$ e $S = \hat{\pi}(\partial \hat{B}) = \hat{\pi}(f^{-1}(t))$,

onde \bar{A} o fecho do conjunto A .

A demonstração do Lema de Estabilidade com Bordo segue a mesma estrutura da demonstração do Lema de Estabilidade, feita por L. Guth em (GUTH, 2011), e da demonstração do Lema de Estabilidade Modificado, feito por H. Alpert e K. Funano em (ALPERT; FUNANO, 2017). O objetivo é mostrar a existência de uma hipersuperfície mergulhada, suave e homóloga a Z , obtida substituindo $Z \cap B$ por algum subconjunto de S e usar um processo de suavização. Assim, para construir esta hipersuperfície considere $\{\hat{B} + i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ as translações de \hat{B} sob a ação do grupo \mathbb{Z} em \hat{M} e denote

$$N = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} (\hat{B} + i)$$

e

$$N_+ = \bigcup_{i \geq 0} (\hat{B} + i).$$

Agora defina $\hat{Z}_1 = \partial N_+$ e seja $Z_1 = \hat{\pi}(\hat{Z}_1) \subset S$, tomado com multiplicidade (mod 2) tal que um ponto q de B pertence a Z_1 se, e somente se, o número de pré-imagens de q que pertencem a \hat{Z}_1 é ímpar, isto é,

$$q \in Z_1 \Leftrightarrow \#\{\hat{\pi}^{-1}(q) \in \hat{Z}_1 : q \in B\} \equiv 1 \pmod{2}.$$

Por hipótese, \hat{M} é difeomorfo a $\Sigma \times \mathbb{R}$. Além disso, cada loop $\gamma \subset M$, em $p \in M$, é levantado a um caminho $\hat{\gamma} \subset \hat{M}$ que liga o ponto \hat{p} a um ponto $\hat{p} + k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$, onde \hat{p} e $\hat{p} + k$ são pré-imagens do ponto p . Ainda por hipótese, Z é relativamente homóloga a $\Sigma \times \{*\}$, implicando que o número de interseção do loop γ com a hipersuperfície Z é

$$\mathbb{I}(\gamma, Z) \equiv k \pmod{2}. \quad (38)$$

para algum $k \in \mathbb{Z}$.

Lembre-se que dado um loop $\gamma \subset B$ o número de interseção de γ com Z_1 , é igual a soma do número de interseções dos vários levantamentos de γ com \hat{Z}_1 , o qual será denotado por

$$\mathbb{I}(Z_1, \gamma) = \sum_{\hat{\gamma}} \mathbb{I}(\hat{Z}_1, \hat{\gamma}).$$

Para qualquer loop $\gamma : [0, 1] \rightarrow (M, \partial M)$ em B , com $\gamma(0) = \gamma(1) = p$, sabe-se que os levantamentos de γ em $(\hat{M}, \partial\hat{M})$ são caminhos suaves ligando duas pré-imagens de p . Assim, dado um loop γ em B , considere um levantamento de γ , $\hat{\gamma} : [0, 1] \rightarrow (\hat{M}, \partial\hat{M})$, onde $\hat{\gamma}(0) = \hat{p} + l$ e $\hat{\gamma}(1) = \hat{p} + l + k$, com $l, k \in \mathbb{Z}$, ou seja, $\hat{\gamma}$ é um caminho em \hat{B} ligando $\hat{p} + l$ e $\hat{p} + l + k$. Daí, pela construção de N_+ e pelo Teorema de Jordan segue que

$$\mathbb{I}(\hat{Z}_1, \hat{\gamma}) \equiv 1 \pmod{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ou } \hat{p} + l \in N_+ \text{ e } \hat{p} + l + k \notin N_+ \\ \text{ou } \hat{p} + l \notin N_+ \text{ e } \hat{p} + l + k \in N_+ \end{cases} \quad (39)$$

Afirmção 1: Para qualquer $k \in \mathbb{Z}$ tem-se

$$\#\{(l, l+k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \hat{p} + l \text{ e } \hat{p} + l + k \text{ satisfazem 39}\} \equiv k \pmod{2}. \quad (40)$$

Para verificar que a afirmação é verdadeira, note que para $k = 1$, pela própria definição de N_+ , o único par $l, l+k \in \mathbb{Z}$, ou seja, $l, l+1$, que satisfaz (39) é quando $l = -1$, pois para $l < -1$ segue que $\hat{p} + l \notin N_+$ e $\hat{p} + l + k = \hat{p} + l + 1 \notin N_+$ e para $l > -1$ obtém-se $\hat{p} + l \in N_+$ e $\hat{p} + l + 1 \in N_+$. Logo, para $k = 1$ tem-se

$$\#\{(l, l+1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \hat{p} + l \text{ e } \hat{p} + l + 1 \text{ satisfazem 39}\} \equiv 1 \pmod{2}.$$

Supondo $k > 1$, basta particionar os inteiros em k classes de congruência mod k e aplicar o raciocínio para $k = 1$ em cada classe de congruência, provando a afirmação. Isto significa que dado um loop $\gamma \subset B$ em p existem $k \pmod{2}$ levantamentos $\hat{\gamma}$ satisfazendo $\mathbb{I}(\hat{Z}_1, \hat{\gamma}) \equiv 1 \pmod{2}$. Portanto, segue deste fato e de (40) que

$$\mathbb{I}(Z_1, \gamma) = \sum_{\hat{\gamma}} \mathbb{I}(\hat{Z}_1, \hat{\gamma}) \equiv k \pmod{2}. \quad (41)$$

Logo, de (38) e de (41) segue que para todo loop $\gamma \subset B$, Z_1 é um subconjunto de S tal que

$$\mathbb{I}(\gamma, Z) = \mathbb{I}(\gamma, Z_1). \quad (42)$$

Agora, considere $F_1 : H_1(M, \partial M, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ e $F_2 : H_1(M, \partial M, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ morfismos dados por

$$F_1([c]) = \mathbb{I}_2(c, Z_1) \quad \text{e} \quad F_2([c]) = \mathbb{I}_2(c, Z).$$

Note que os morfismos F_1 e F_2 podem ser vistos como elementos de $H^1(M, \mathbb{Z}_2)$, de modo que essa correspondência $[Z_j, \partial Z_j] \rightarrow F_j$ de $H_{n-1}(M, \partial M; \mathbb{Z}_2)$ para $H^1(M, \mathbb{Z}_2)$ é um isomorfismo, que é justamente o dual de Lefschetz, (HATCHER, 2005, Teorema 3.43). Assim, de (42) segue que $F_1 = F_2$, ou seja, $[Z, \partial Z] = [Z_1, \partial Z_1]$ e portanto, Z e Z_1 são homólogas relativas ao ∂M .

Note que da análise feita anteriormente, é possível encontrar um subconjunto $Z_1 \subset S$ tal que $[Z, \partial Z] = [Z_1, \partial Z_1]$ em B , ou seja, é possível substituir $Z \cap B$ por Z_1 . Aplicando o processo de suavização, obtém-se uma hipersuperfície suave, imersa contida em S e relativamente homóloga Z . Por hipótese, Z é δ -minimizante, daí

$$\text{Area}(Z \cap B) \leq \text{Area}(Z_1 \cap B) \leq \text{Area}(Z_1 \cap S) + \delta \leq \text{Area}(S) + \delta.$$

Além disso, como $Z \cap B(p, \frac{1}{2}) \subset B$ e vale (37), então

$$\text{Area}\left(Z \cap B\left(p, \frac{1}{2}\right)\right) \leq \text{Area}(Z \cap B) \leq \text{Area}(S) + \delta \leq \frac{1}{(1-\epsilon)} - \left(\frac{1}{2} - \epsilon\right)V_0.$$

Por fim, fazendo $\epsilon \rightarrow 0$ obtém-se

$$\text{Area}\left(Z \cap B\left(p, \frac{1}{2}\right)\right) \leq 2V_0 + \delta.$$

■

Uma vez que está provado

$$\text{Area}\left(Z \cap B\left(p, \frac{1}{2}\right)\right) \leq 2V_0 + \delta \tag{43}$$

e

$$\text{Area}(Z) \leq C(n, V_0) \text{Area}(\Sigma), \tag{44}$$

é possível demonstrar o teorema principal.

Teorema 4.2 (Teorema da Área com bordo). *Sejam Σ uma variedade hiperbólica n -dimensional compacta, com bordo totalmente geodésico e g uma métrica definida em $M = \Sigma \times \mathbb{S}^1$ tais que*

$$V_{(\tilde{M}, \tilde{g})}(1) \leq V_0. \tag{45}$$

Considere $Z \subset M$ uma hipersuperfície mergulhada, relativamente homóloga a $\Sigma \times \{\}$ sob coeficientes em \mathbb{Z}_2 . Então*

$$\text{Area}(Z) \geq C(n, V_0) \text{Area}(\Sigma) \tag{46}$$

Demonstração: Segue de (WEST, 1977) que toda variedade diferenciável, com ou sem bordo, é homotopicamente equivalente a um CW-complexo, uma vez que a variedade é compacta, obtém-se que a variedade é homotopicamente equivalente a um CW-complexo finito. Por hipótese, M é compacto, ou seja, é homotopicamente equivalente a um CW-complexo finito. Logo o seu grupo fundamental é finitamente apresentado e portanto,

$$\# \{[\alpha] \in \pi_1(M, \partial M) : |\alpha| \leq 1\} < \infty, \quad (47)$$

ou seja, $\pi_1(M) = \pi_1(\Sigma) \times \pi_1(\mathbb{S}^1)$ possui apenas uma quantidade finita de classes de equivalência $[\alpha]$ com $|\alpha| \leq 1$. Novamente, por (BUTTSWORTH, 2017) é possível dobrar a variedade hiperbólica Σ identificando os pontos do bordo, onde a nova variedade D_Σ é uma variedade hiperbólica fechada. Por ser uma variedade hiperbólica fechada segue que $\pi_1(D_\Sigma)$ é um subconjunto de $SL(n, \mathbb{C})$, para maiores detalhes ver (MALCEV, 1940). Por outro lado, existe uma aplicação projeção $r : D_\Sigma \rightarrow \Sigma$ tal que $r \circ i = Id_\Sigma$, onde $i : \Sigma \rightarrow D_\Sigma$ é a aplicação inclusão e Id_Σ é a aplicação identidade. Portanto, a aplicação induzida $i_* : \pi_1(\Sigma) \rightarrow \pi_1(D_\Sigma)$ é injetiva e, consequentemente, possui inversa à esquerda. Portanto, $\pi_1(\Sigma) \leq \pi_1(D_\Sigma)$, ou seja, $\pi_1(\Sigma) \subset SL(n, \mathbb{C})$. Novamente, seguindo (MALCEV, 1940) qualquer subgrupo finitamente gerado de $SL(n, \mathbb{C})$ é residualmente finito, então $\pi_1(\Sigma)$ é residualmente finito. Portanto, pela definição de grupo residualmente finito, para cada elemento diferente da identidade, $\alpha \in \pi_1(\Sigma)$, com $|\alpha| \leq 1$, existe um subgrupo normal de índice finito, $\mathbb{K}_\alpha \triangleleft \pi_1(\Sigma)$, tal que $\alpha \notin \mathbb{K}_\alpha$. Como foi mencionado anteriormente em 47, existe apenas uma quantidade finita de classes nesta situação, ou seja, existe uma quantidade finita destes \mathbb{K}_α 's. Consequentemente, existe

$$\mathbb{K} = \cup_{[\alpha]} \mathbb{K}_\alpha,$$

que é um subgrupo normal de $\pi_1(M)$, de índice finito, onde $[\alpha] \in \pi_1(M)$ e $|\alpha| \leq 1$ tal que $[\alpha] \notin \mathbb{K}$. Nestas condições,

$$\mathbb{K} \times \mathbb{S}^1 \triangleleft \pi_1(M)$$

é um subgrupo normal tal que em $\mathbb{K} \times \mathbb{S}^1$ os loops com comprimento pequeno são triviais.

Considere agora o espaço de recobrimento $\hat{p} : \hat{M} \rightarrow M$ que é difeomorfo ao espaço $\hat{\Sigma} \times \mathbb{S}^1$, onde $\hat{\Sigma}$ é o recobrimento de Σ com respeito ao subgrupo normal \mathbb{K} . Assim, supondo que o índice de \mathbb{K} em $\pi_1(\Sigma)$ é k , tem-se que o índice dos recobrimentos $\hat{\Sigma}$ do espaço Σ e \hat{M} de M também é k e assim, diante desta construção, considerando $\hat{p}_1 : \hat{M} \rightarrow \hat{\Sigma}$ segue que todo loop de comprimento no máximo 1 é projetado num loop homotopicamente nulo em $\hat{\Sigma}$. Por fim, note que a pré imagem de Z em \hat{M} pela aplicação \hat{p} é algum k -recobrimento \hat{Z} de Z e, pelo

fato da aplicação de recobrimento ser um invariante topológico, a relação nas homologia ainda é preservada, ou seja, \hat{Z} é relativamente homóloga a $\hat{\Sigma}$. Logo, de maneira análoga ao que foi feito em (ALPERT; FUNANO, 2017) é suficiente provar o teorema para os espaços \hat{Z} , $\hat{\Sigma}$ e \hat{M} , pois

$$\text{Area}(\hat{Z}) = k \text{Area}(Z) \quad \text{e} \quad \text{Area}(\hat{\Sigma}) = k \text{Area}(\Sigma). \quad (48)$$

Lembre-se que por hipótese, toda bola unitária em \tilde{M} tem volume limitado por V_0 em particular, as bolas unitárias em \hat{M} também possuem volumes limitadas por V_0 . Assim é possível aplicar o Lema 4.1. Note que na hipótese do Lema 4.1 pede que a hipersuperfície Z seja δ -minimizante e para provar o Teorema da Área com bordo pode-se considerar Z sendo δ -minimizante, pois as outras hipersuperfícies têm área ainda maior. Daí, pela aplicação do Lema de Estabilidade com bordo, obtém-se

$$V_Z(1/2) \leq 2V_0 + \delta. \quad (49)$$

A condição (49) é uma das hipóteses do Teorema de Volume com bordo. Além disso, definindo $f = \hat{p}_1 \circ i$, onde $i : \hat{Z} \rightarrow \hat{M}$ é a inclusão e \hat{p}_1 é a projeção entre os espaços de recobrimento dada por $\hat{p}_1 : \hat{M} \rightarrow \hat{\Sigma}$, segue que f tem grau 1, uma vez que a inclusão e a projeção também possuem grau 1, e dada uma curva $\alpha \subset \hat{M}$, com $|\alpha| \leq 1$, tem-se $f(\alpha)$ é homotópicamente nula. Portanto é possível aplicar o Teorema de Volume com bordo. Daí

$$\text{Area}(\hat{Z}) \geq C(n, V_0) \text{Area}(\hat{\Sigma}). \quad (50)$$

Por fim, substituindo (48) em (50) conclui-se a demonstração, pois

$$\text{Area}(Z) \geq C(n, V_0) \text{Area}(\Sigma).$$

■

5 Conclusão e trabalhos futuros

Desenvolver este trabalho, foi um desafio muito grande, principalmente por se tratar de uma área ao qual poucas pessoas aqui no Brasil trabalham. As técnicas utilizadas neste trabalho fazem uma mistura entre uma construção analítica, o uso de ferramentas topológicas, como a teoria de homologia, transversalidade multijatos e número de interseção até obter os resultados geométricos, concluindo que, no modelo, $M = \Sigma \times \mathbb{S}^1$, cujo o volume das bolas unitárias é limitado no espaço de recobrimento, sendo Σ uma n -dimensional variedade hiperbólica compacta com bordo totalmente geodésico, a métrica que minimiza área na classe de homologia de $\Sigma \times \{*\}$, com coeficientes em \mathbb{Z}_2 é a métrica hiperbólica.

Dito isso, a pergunta que surge naturalmente no Teorema 1.3 é sobre a constante $C(n, V_0)$ e o que ocorreria no caso da igualdade. No que diz respeito a explicitar a constante $C(n, V_0)$, não há resposta para este fato, uma vez que a constante vem de uma construção extremamente técnica, a construção do nervo retangular, e fica muito complicada encontrar o seu valor. No que diz respeito à igualdade, com as técnicas utilizadas aqui, não é possível estabelecer uma igualdade, pois em (FRIGERIO; PAGLIANTINI, 2010) foi construído um contra-exemplo garantindo que a não ocorre a igualdade no Teorema 3.1. Ainda pensando no Teorema de Área com bordo, ficou a dúvida se é possível generalizar ainda mais o resultado excluindo a hipótese de Σ ser uma variedade hiperbólica. O seguinte resultado está em progresso faltando apenas alguns detalhes para a conclusão do mesmo:

Teorema 5.1. *Seja (M, g) uma variedade compacta com bordo totalmente geodésico, onde as bolas unitárias no recobrimento universal são limitadas por uma constante V_0 e seu grupo fundamental é residualmente finito. Considere uma $\Sigma \subset M$ uma hipersuperfície mergulhada 2-sided com $\partial\Sigma \subset \partial M$ e, considere também a aplicação inclusão $i : \Sigma \rightarrow M$. Então*

$$\text{Area}(\Sigma) \geq C(n, V_0) \|i_*[\Sigma]\|_{\Delta},$$

onde $C(n, V_0)$ é positiva, $\|i_*[\Sigma]\|_{\Delta}$, denota a classe $i_*[\Sigma] \in H_{n-1}(M, \mathbb{R})$ correspondente a Σ .

Este resultado tem sua importância, pois ele é, do ponto de vista de curvatura escalar macroscópica, análogo a alguns teoremas sobre superfícies mínimas compactas com bordo.

Ainda seguindo esta linha, relacionando volumes de bolas com curvatura escalar e curvatura escalar macroscópica, Gromov em (GROMOV, 1986) faz uma série de conjecturas relacionando a função $V_g(R)$ com outros invariantes topológicos de (M, g) , onde $V_g(R)$ denota o maior volume de qualquer bola métrica em (M, g) . Basicamente, a essência destas relações

é que se a variedade é "grande", então $V_g(R)$ também deverá ser grande. Em (GUTH, 2011), Larry Guth prova uma destas conjecturas de Gromov, ele obtém que se $V_g(R)$ é grande desde que o filling radius de (M, g) seja grande. Guth obtém um resultado quando (M, g) é completa, surgindo naturalmente a seguinte pergunta: E o caso com bordo? Usando a construção do nervo retangular para variedades com bordo, é possível obter um resultado do tipo:

Teorema 5.2. *Seja (M, g) uma variedade n -dimensional, compacta e com bordo não vazio. Para cada dimensão n , existe um número $\delta(n) > 0$ tal que se o filling radius de (M, g) é pelo menos R , então $V_g(R) \geq \delta(n)R^n$.*

REFERÊNCIAS

- ALPERT, H.; FUNANO, K. Macroscopic scalar curvature and areas of cycles. **Geometric and Functional Analysis**, Springer, v. 27, n. 4, p. 727–743, 2017.
- BUTTSWORTH, T. Riemannian metrics on double manifolds. 2017.
- DEBLOIS, J. C. **Totally geodesic surfaces in hyperbolic 3-manifolds**. Tese (Doutorado) — The University of Texas at Austin, 2007.
- FRIGERIO, R.; PAGLIANTINI, C. The simplicial volume of hyperbolic manifolds with geodesic boundary. **Algebraic & Geometric Topology**, Mathematical Sciences Publishers, v. 10, n. 2, p. 979–1001, 2010.
- GROMOV, M. Volume and bounded cohomology. **Publications Mathématiques de l’IHÉS**, v. 56, p. 5–99, 1982.
- GROMOV, M. Large riemannian manifolds. In: **Curvature and topology of Riemannian manifolds**. [S.l.]: Springer, 1986. p. 108–121.
- GROMOV, M. **Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2007.
- GROMOV, M. et al. Filling riemannian manifolds. **Journal of Differential Geometry**, Lehigh University, v. 18, n. 1, p. 1–147, 1983.
- GUTH, L. Metaphors in systolic geometry. In: WORLD SCIENTIFIC. **Proceedings of the International Congress of Mathematicians 2010 (ICM 2010) (In 4 Volumes) Vol. I: Plenary Lectures and Ceremonies Vols. II–IV: Invited Lectures**. [S.l.], 2010. p. 745–768.
- GUTH, L. Systolic inequalities and minimal hypersurfaces. **Geometric and Functional Analysis**, Springer, v. 19, n. 6, p. 1688–1692, 2010.
- GUTH, L. Volumes of balls in large riemannian manifolds. **Annals of mathematics**, Princeton University and the Institute for Advanced Study, v. 173, n. 1, p. 51–76, 2011.
- HATCHER, A. **Algebraic topology**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2005.
- JUNGREIS, D. Chains that realize the gromov invariant of hyperbolic manifolds. **Ergodic Theory and Dynamical Systems**, Cambridge University Press, v. 17, n. 3, p. 643–648, 1997.
- KUESSNER, T. Efficient fundamental cycles of cusped hyperbolic manifolds. **Pacific journal of mathematics**, Mathematical Sciences Publishers, v. 211, n. 2, p. 283–313, 2003.
- LIMA, E. L. **Homologia básica**. [S.l.]: IMPA, 2009.
- MALCEV, A. On isomorphic matrix representations of infinite groups. **Matematicheskii Sbornik**, Russian Academy of Sciences, Steklov Mathematical Institute of Russian . . . , v. 50, n. 3, p. 405–422, 1940.
- MELO, W. de. Topologia das variedades. 2014.
- SCHOEN, R. M. Variational theory for the total scalar curvature functional for riemannian metrics and related topics. In: **Topics in calculus of variations**. [S.l.]: Springer, 1989. p. 120–154.

WEST, J. E. Mapping hilbert cube manifolds to $\text{anr}'s$: a solution of a conjecture of borsuk.
Annals of Mathematics, JSTOR, v. 106, n. 1, p. 1–18, 1977.