

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
CENTRO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATERIAIS

CÍCERO JULIÃO DA SILVA JUNIOR

**MATERIAIS INOVADORES EM FOTÔNICA**

Maceió-AL  
Agosto de 2021

CÍCERO JULIÃO DA SILVA JUNIOR

**MATERIAIS INOVADORES EM FOTÔNICA**

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Materiais do Centro de Tecnologia da Universidade Federal de Alagoas.

Orientador: Solange B. Cavalcanti

Maceió-AL

Agosto de 2021

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**

Bibliotecária: Taciana Sousa dos Santos – CRB-4 – 2062

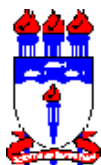
S586m Silva Junior, Cícero Julião da.  
Materiais inovadores em fotônica / Cícero Julião da Silva Junior. – 2022.  
96 f. : il. color.

Orientadora: Solange B. Cavalcanti.  
Tese (Doutorado em Materiais) – Universidade Federal de Alagoas.  
Centro de Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Materiais. Maceió,  
2021.

Bibliografia: f. 80-85.  
Apêndices: f. 86-96.

1. Materiais. 2. Fotônica. 3. Cristais fotônicos. 4. Simetria PT. I. Título.

CDU: 535



---

## ATA DA 30ª DEFESA DE TESE DE DOUTORADO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATERIAIS

No dia vinte e sete de agosto do ano de dois mil e vinte e um, às 15 horas, através de videoconferência online, foi realizada a **DEFESA DE TESE DE DOUTORADO** de **Cícero Julião da Silva Junior**, tendo como título: “**Materiais Inovadores em Fotônica**”, como requisito parcial obrigatório para obtenção do título de **DOUTOR EM CIÊNCIA DOS MATERIAIS**. A Banca Examinadora foi constituída pelos seguintes membros: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Solange Bessa Cavalcanti (Orientadora – PPGMateriais/UFAL), Prof. Dr. Paulo Cesar Aguiar Brandão Filho (IF/UFAL), Prof. Dr. Samuel Silva de Albuquerque (Campus Arapiraca/UFAL), Prof. Dr. Tiago Peixoto da Silva Lobo (LCCV/Fundepes), Prof. Dr. Gentil Luiz da Silva II (IFAL). A Defesa foi encerrada às 18 horas e 20 minutos. Após o encerramento da Defesa, em reunião fechada, a Banca Examinadora, com base no Regimento Interno, decidiu por aprovar condicionalmente a tese de Doutorado.

Em 27 de Agosto de 2021.

Obs: A tese será aprovada sob a condição de que o estudante apresente um texto revisado contemplando todas as correções que foram sugeridas pelos membros da banca, num prazo máximo de seis meses, ao final do qual informaremos ao Colegiado do Programa, acerca do cumprimento das mesmas.

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Solange Bessa Cavalcanti  
(Orientadora – PPGMateriais/UFAL)

Prof. Dr. Paulo Cesar Aguiar Brandão Filho  
(IF/UFAL)

Prof. Dr. Samuel Silva de Albuquerque  
(Campus Arapiraca/UFAL)

Prof. Dr. Tiago Peixoto da Silva Lobo  
(LCCV/Fundepes)

Prof. Dr. Gentil Luiz da Silva II  
(IFAL)

Cícero Julião da Silva Júnior  
(Discente)

*Aos meus pais.*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus.

Agradeço aos meus pais.

Agradeço à minha minha grande orientadora, Solange Bessa, por todos os conselhos, pela paciência e ajuda nesse período.

Aos meus amigos e aos meus professores.

*“Apenas os tolos desprezam  
a sabedoria e a disciplina.”  
(Provérbios 1:7)*

## RESUMO

A ciência percorre diversos caminhos, sendo um deles a descoberta de novas características em materiais. Dependendo dos caminhos trilhados, é possível alcançar novos materiais com características realmente inovadores. Dois tipos de materiais inovadores são abordados nesta tese. Ambos são materiais inovadores em fotônica. Após uma introdução sobre materiais com inovações advindas da manipulação de uma característica comum, o índice de refração, passamos a verificar o comportamento dos cristais fotônicos. A periodicidade das características ópticas nos materiais constituintes dos cristais fotônicos sempre foi vinculado a um fator espacial. Porém, se a variação periódica ocorrer temporalmente, fenômenos específicos surgem como consequência. Uma de tais características é o surgimento de uma onda refletida no espaço após uma mudança abrupta (temporal) no material fotônico. Mostramos que esse comportamento deve ser esperado quando uma onda eletromagnética propaga no interior de um material e, repentinamente, sua permissividade elétrica muda de valor. Também mostramos que, se tal mudança for periódica, formamos os chamados cristais fotônicos temporais. Tais cristais possuem uma característica similar ao caso espacial: há bandas de propagação proibidas no interior do material. Porém, diferente dos cristais fotônicos espaciais que possuem intervalos de frequência com propagação proibida, os cristais fotônicos temporais possuem intervalos de vetor de onda com propagação proibida. Um segundo material inovador em fotônica que tratamos nesta tese são aqueles cujo design incorpora a chamada simetria PT (simetria de inversão espacial e temporal). Nesta tese, utilizamos a simetria PT passiva, onde o material é cuidadosamente projetado apenas com perda de energia. Ainda assim, mostra características típicas da simetria PT. O material utilizado para as camadas que forma a simetria PT passiva são do tipo *epsilon-near-zero* (ENZ), onde o valor da permissividade elétrica é próxima a zero. As consequências dessa característica são interessantes para aumentar efeitos de fenômenos bem conhecidos em óptica, como o efeito Goos-Hänchen que exploramos aqui.

**Palavras-chaves:** Fotônica. Cristais Fotônicos Temporais. Simetria PT.



## ABSTRACT

Science follows several paths, one of them being the discovery of new characteristics in materials. Depending on the paths taken, it is possible to achieve new materials with truly innovative characteristics. We address two types of innovative materials in this thesis. Both are innovative materials in photonics. After an introduction to materials with innovations arising from the manipulation of a common characteristic, the refractive index, we started to verify the behavior of photonic crystals. In literature, the spatial factor is the principal point of the periodicity of optical characteristics in the constituent materials of photonic crystals. However, if the periodic variation occurs temporally, specific phenomena arise as a consequence. One such feature is the appearance of a wave reflected in space after an abrupt (temporal) change in a photonic material. We show that one can expect this behavior when an electromagnetic wave propagates inside material and, suddenly, its electrical permittivity changes value. We also show that if such a change is periodic, we form so-called temporal photonic crystals. Such crystals have a characteristic similar to the spatial case: bands of propagation prohibited inside the material. However, unlike space photonic crystals with propagation prohibited frequency ranges, temporal photonic crystals have propagation prohibited wave vector intervals. The second innovative material in photonics that we deal with in this thesis is one whose design incorporates the so-called PT-symmetry (spatial and temporal inversion symmetry). We use passive PT-symmetry, where the material is carefully designed with only energy loss. Still, it shows typical features of PT-symmetry. The material used for the layers forming the passive PT symmetry are epsilon-near-zero (ENZ), where the electrical permittivity value is near zero. The consequences of this feature are interesting to increase the intensity of the phenomena studied.

**Keywords:** Photonic. Photonic Time Crystals. PT-Symmetry.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	– Raízes de $x^6 + 1 = 0$ no plano complexo. Fonte: autor, 2021 . . . . .	14
Figura 2	– Curva da função $f(x) = 1/(1 + x^4)$ . Função suave e infinitamente diferenciável para todo valor de $x$ . Mesmo com essas características, a série de Taylor para a função converge apenas no intervalo $ x  < 1$ . Sem explicação aparente no conjunto dos reais. Mas com o auxílio no conjunto dos complexos fica claro a fonte de tal comportamento. Fonte: autor, 2021. . . . .	15
Figura 3	– Cristal fotônico unidimensional. Em uma direção, o índice de refração é constante. Na outra direção, o índice de refração é periódico. Fonte: autor, 2021. . . . .	17
Figura 4	– Cristal fotônico bidimensional. O índice de refração é periódicos nas duas direções. Fonte: autor, 2021. . . . .	18
Figura 5	– Um guia de onda formado pela retirada de alguns cilindros do cristal bidimensional. A inexistência dos cilindros forma um caminho para a propagação da onda eletromagnética. Uma onda com frequência dentro do band gap característico do material não consegue propagar no cristal, mas propaga pelo defeito provocado pela vacância de cilindros. Isto é o que permite a formação do guia de onda. Fonte: autor, 2021. . . . .	19
Figura 6	– Cristal fotônico com guia de onda visto a partir de outra direção. É nítido o circuito formado pela vacância de alguns cilindros. Fonte: autor, 2021. . . . .	20
Figura 7	– Representação da ressonância de plasma de superfície (SPR) com uma esfera metálica. A esfera representa a nanopartícula metálica. Os elétrons livres na superfície da nanopartícula, representados pela letra 'e-', oscilam coletivamente. Tal efeito depende de diversos fatores, entre eles do tamanho da nanopartícula e do meio onde estão inseridas. Fonte: autor, 2021. . . . .	21
Figura 8	– Uma possibilidade de classificação de materiais fotônicos pode ser baseada no sinal do seu índice de refração. Fonte: autor, 2021. . . . .	21
Figura 9	– Além da classificação do índice de refração como positivo ou negativo, podemos analisar o caso para o índice de refração conter valores imaginários. Isto nos leva a considerar valores complexos para o índice de refração. Fonte: autor, 2021. . . . .	22
Figura 10	– Em sistemas fotônicos, a perda de energia está vinculada ao sinal positivo da parte imaginária do índice de refração. O ganho de energia está vinculado à parte negativa da parte imaginária do índice de refração. Fonte: autor, 2021. . . . .	22

Figura 11 – Exemplos de estruturas cristalinas representadas pelo modelo de esfera rígida atômica. Em (a) temos a chamada <i>célula unitária</i> , representando a unidade que se repete na rede. Em (b), a mesma célula com as esferas reduzidas. Em (c), uma visão mais geral da rede cristalina. Fonte: adaptado de (CALLISTER et al., 2021) . . . . .	24
Figura 12 – Exemplos de estruturas periódicas. A partir da esquerda, temos materiais periódicos em uma duas e três dimensões. Cada cor representa um valor para a permissividade elétrica do material. Fonte: adaptação de (TURDUEV, 2016). . . . .	28
Figura 13 – Diagrama de bandas para o sistema formado por bicamadas com suas permissividades elétricas com valores $\epsilon_1 = 3$ e $\epsilon_2 = 10$ . Radiação eletromagnética com frequência dentro dos intervalos indicados não conseguem propagar dentro do cristal fotônico indicado. Fonte: autor, 2021. . . . .	31
Figura 14 – Diagrama de bandas para o sistema formado por bicamadas com suas permissividades elétricas com valores $\epsilon_1 = 3$ e $\epsilon_2 = 6$ . Com diferença menor entre as permissividades das camadas do cristal, temos menos intervalos com frequências proibidas do que no caso anterior. Fonte: autor, 2021. . . . .	32
Figura 15 – Simulação computacional da propagação em uma dimensão de onda eletromagnética em um material com características ópticas constantes, tanto no espaço como no tempo. No eixo horizontal, temos a posição em nosso espaço unidimensional. O eixo vertical indica a amplitude. A onda é excitada no ponto 50 do eixo X. Como esperado, a propagação ocorre suavemente, pois não há mudança para alterar as características dos campos envolvidos. Ou seja, a interação do material com a onda propagante não se altera durante a propagação da onda. Fonte: autor, 2021. . . . .	40
Figura 16 – Simulação computacional da propagação em uma dimensão de onda eletromagnética em um material com características ópticas com uma mudança abrupta em um instante $t$ . A onda é excitada Na extremidade esquerda do eixo X. Neste trecho inicial da simulação, não há alteração nas características ópticas do material. Fonte: autor, 2021. . . . .	42
Figura 17 – Após alguns passos da simulação, a onda continua sua propagação de forma suave. Não há alteração das características ópticas do meio. Fonte: autor, 2021. . . . .	42
Figura 18 – Instantes após a alteração repentina na constante dielétrica do material, passamos a ter uma onda refletida espacialmente a se propagar no interior do material. A onda propagante original, após a interação com o material ativo em sua mudança temporal, nos fornece duas outras ondas propagantes: uma transmitida na mesmo sentido da original e outra refletida no sentido oposto. Fonte: autor, 2021. . . . .	42
Figura 19 – Não havendo alteração nas características ópticas do material, as ondas continuam a propagar de maneira suave. Fonte: autor, 2021. . . . .	43

Figura 20 – Frequências proibidas na propagação de radiação eletromagnética para o material com variação periódica de sua permissividades elétricas com valores $\epsilon_1 = 6$ e $\epsilon_2 = 1$ . Radiação eletromagnética com frequência dentro dos intervalos indicados não conseguem propagar enquanto o cristal fotônico temporal estiver ativo. Fonte: autor, 2021. . . . .	46
Figura 21 – As permissividades elétricas com valores $\epsilon_1 = 2$ e $\epsilon_2 = 1$ . possuem um contraste menor. Em consequência, vemos um menor número de gaps nos vetores de onda. Fonte: autor, 2021. . . . .	46
Figura 22 – Aproximação paraxial, com as ondas eletromagnéticas propagando próximo à direção paralela ao eixo $Z$ . O material tem índice de refração variando predominantemente na direção $X$ . Fonte: autor, 2021. . . . .	55
Figura 23 – Exemplo de sistema fotônico unidimensional com simetria PT - 1DPT. As camadas com ganho e perda de energia se alternam. Cada camada tem um tamanho unidimensional $d$ , sendo cada bicamada com tamanho $2d$ . O sistema completo tem tamanho $L = 2Nd$ . Fonte: autor, 2021. . . . .	58
Figura 24 – Esquema do sistema unidimensional com simetria PT, indicando as amplitudes das ondas nas diversas direções de espalhamento. A figura representa uma bicamada, sendo formada pelas duas camadas com ganho e perda de energia balanceados como visto no capítulo anterior. Fonte: autor, 2021. . . . .	59
Figura 25 – Sendo $XZ$ o plano de incidência da radiação eletromagnética, para a configuração <i>transverso magnético</i> (TM) o campo magnético é perpendicular ao plano de incidência. Pára a configuração <i>transverso elétrico</i> (TE) o campo elétrico é perpendicular ao plano de incidência. Fonte: autor, 2021. . . . .	64
Figura 26 – Esquema da estrutura de bicamada com simetria PT passiva. Uma onda eletromagnética incide na bicamada no lado sem perda ('inc'). Na indicação da óptica geométrica, a onda refletida não sobre nenhum deslocamento em relação ao ponto de incidência ('R'). Porém, em virtude do efeito Goos-Hänchen, há um deslocamento lateral na reflexão ('r'). Fonte: autor, 2021. . . . .	70
Figura 27 – Efeito Goos-Hänchen em uma bicamada com simetria PT passiva. Uma camada tem $\epsilon = 0.001 + \gamma i$ e outra camada tem $\epsilon = 0.001 + 0.2\gamma i$ . Foram escolhidos diferentes valores para $\gamma$ , conforme indica a legenda. Fonte: autor, 2021. . . . .	71
Figura 28 – Transmissão para diferentes valores de $\gamma$ . Próximo ao ângulo crítico ( $\theta_{in} \approx 0$ ) a transmissão tem altos valores como consequência da sensibilidade de materiais ENZ ao ângulo de incidência. Fonte: autor, 2021. . . . .	72
Figura 29 – O efeito GH é bastante sensível ao tamanho da camada do material ENZ. Para um mesmo valor de $\gamma$ , o efeito GH é intensificado com a diminuição da espessura da camada. Fonte: autor, 2021. . . . .	73

Figura 30 – A transmissão para os mesmos parâmetros da figura 29. Independente da dimensão da camada, o efeito assintótico do aumento do ângulo de incidência é a diminuição da transmissão. Fonte: autor, 2021. . . . .	73
Figura 31 – A intensidade do efeito GH aumenta sensivelmente com o aumento da espessura das camadas. Os valores da permissividade elétrica ( $\epsilon = 0.001 + i\gamma_i$ ), do fator de perda de energia ( $\gamma$ ) permanecem constantes para todas as curvas. O fator determinante é a variação da espessura das camadas. Fonte: autor, 2021.	74
Figura 32 – Variação do efeito GH em função do ângulo de incidência ( $\theta_{in}$ ) e da espessura da camada ( $d$ ). O valor de $d$ afeta consideravelmente a intensidade do fenômeno. Fonte: autor, 2021. . . . .	75
Figura 33 – Para os mesmos parâmetros utilizados na seção anterior, apenas aumentamos o número de bicamadas para 5 (cinco). O efeito GH é intensificado a ponto do patamar de estabilidade com o aumento do ângulo de incidência ser cerca de 6 (seis) vezes maior do que o caso de uma única camada. Fonte: autor, 2021.	76
Figura 34 – Com 5 (cinco) camadas, o efeito GH chega perto de $90\lambda$ . Q quantidade de camadas afeta intensamente o fenômeno. Fonte: autor, 2021. . . . .	76
Figura 35 – Com $d = 5.8\lambda$ , a variação no número de camadas afeta sensivelmente o efeito GH. Com poucas camadas é possível alcançar um efeito GH gigante. Fonte: autor, 2021. . . . .	77
Figura 36 – Figura com um triângulo equilátero tem diversas operações que preservam sua aparência original. A operação indicada é uma rotação de 120 graus com eixo no centro do triângulo. Fonte: autor, 2021. . . . .	88
Figura 37 – Nesta operação, temos uma espécie de espelhamento tomando o eixo indicado como centro da operação. Novamente a figura fica inalterada, indicando mais uma operação de simetria. Fonte: autor, 2021. . . . .	89
Figura 38 – Campos elétrico e magnético intercalados no espaço na discretização proposta por Yee. Para calcular $H(x + 1/2)$ é preciso levar em conta os valores de $E(x)$ e $E(x + 1)$ . Fonte: autor, 2021. . . . .	92

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>13</b>
<b>1.1</b>	<b>Novos materiais fotônicos</b>	<b>17</b>
<b>2</b>	<b>CRISTAIS FOTÔNICOS ESPACIAIS</b>	<b>24</b>
<b>2.1</b>	<b>Introdução</b>	<b>24</b>
<b>2.1.1</b>	<b>Transmissão e reflexão</b>	<b>26</b>
<b>2.1.2</b>	<b>Índice de refração</b>	<b>27</b>
<b>2.2</b>	<b>Periodicidade no espaço</b>	<b>28</b>
<b>3</b>	<b>CRISTAIS FOTÔNICOS (TEMPORAIS)</b>	<b>33</b>
<b>3.1</b>	<b>Introdução</b>	<b>33</b>
<b>3.1.1</b>	<b>Reflexão temporal</b>	<b>35</b>
<b>3.1.2</b>	<b>Refração temporal</b>	<b>37</b>
<b>3.1.3</b>	<b>Simulação no domínio do tempo</b>	<b>38</b>
<b>3.2</b>	<b>Periodicidade no tempo</b>	<b>43</b>
<b>4</b>	<b>ÓPTICA E SIMETRIA PT</b>	<b>48</b>
<b>4.1</b>	<b>Contexto histórico</b>	<b>48</b>
<b>4.2</b>	<b>Sistemas ópticos com simetria PT</b>	<b>53</b>
<b>4.2.1</b>	<b>Aproximação paraxial</b>	<b>53</b>
<b>5</b>	<b>MATERIAIS ESTRATIFICADOS E SIMETRIA PT</b>	<b>58</b>
<b>5.1</b>	<b>Matriz transferência para bicamadas</b>	<b>59</b>
<b>5.2</b>	<b>Matriz transferência em camadas individuais</b>	<b>63</b>
<b>6</b>	<b>EFEITO GOOS-HÄNCHEN EM SIMETRIA PT PASSIVA</b>	<b>68</b>
<b>6.1</b>	<b>Metamateriais 'epsilon-near-zero'</b>	<b>68</b>
<b>6.2</b>	<b>Bicamada com simetria PT passiva</b>	<b>69</b>
<b>6.3</b>	<b>Efeito da quantidade de camadas</b>	<b>74</b>
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>78</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>80</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Alterar o ambiente ao seu redor para satisfazer suas necessidades tem sido uma atividade constante para a humanidade. Ao afiar a ponta de um tronco de madeira para adquirir maior poder de penetração na terra, os humanos estão moldando algo encontrado naturalmente para cumprir uma determinada função desejada por ele. Esse exemplo simples mostra uma atividade comum quando buscamos novos materiais: moldar o que encontramos para adquirir novas (e desejadas) características (CALLISTER et al., 2021).

Atualmente, é claro que a busca de novos materiais está em um patamar muito mais alto do que o simples exemplo do parágrafo anterior. Mas a ideia central persiste. E quanto mais avançada é essa busca, mais rigor e mais tempo e energia são dedicados. Em determinado momento dessa busca, vamos chegar ao ponto de modelar matematicamente os fenômenos. Tal modelagem traz muitas vantagens. Por exemplo, a capacidade de prever comportamentos de um material antes mesmo de utilizar recursos físicos em sua construção. Para isso, muitas abordagens podem ser utilizadas (CALLISTER et al., 2021; JR, 2002).

Uma das abordagens mais bem sucedidas é a modelagem matemática dos fenômenos naturais. Nos últimos séculos, a humanidade teve a capacidade de analisar antecipadamente muitas de suas desejadas conquistas. A matemática nos trouxe a capacidade de não apenas analisar fenômenos, mas também adquirimos a capacidade de prever a ocorrência de fenômenos. Pensando de forma mais geral, podemos notar que a matemática não tem a necessidade de fenômenos naturais para existir. Algumas ferramentas matemáticas sofisticadas tem desenvolvimento de forma independente à necessidade de pensar e analisar um fenômeno ou efeito natural. Muitas anos depois, alguns desses desenvolvimentos podem vir a ser muito úteis para diversas áreas do conhecimento humano, como Física, Biologia, Medicina, Engenharia e Ciências de Materiais.

Vejam o exemplo dos números complexos. Durante milênios, apenas a ideia de um número ser negativo era algo averso à maioria dos matemáticos (NAHIN, 2010). Se a possibilidade de existência de números negativos era estranha, mais ainda operações envolvendo números negativos. Por exemplo, alcançar o termo *imaginário* para raízes de números negativos, não foi uma tarefa das mais simples, algo que fosse fácil ou rápido. Apenas em 1637 o termo 'imaginário' aparece em escritos do grande filósofo René Descartes (DESCARTES, 1886). Com uma longa espera até o ano de 1777, chegamos ao termo  $i$  para  $\sqrt{-1}$  com o grande matemático Euler (BOYER, 1991).

Toda a introdução ao estudo do Cálculo pode ser encontrada sem nem sequer uma citação a números complexos. Isto nos leva a um engano curioso e talvez complicado: variáveis complexas passam a ter um caráter de algo incomum, sendo entidades matemáticas que não encontramos facilmente. Porém, isso é um grande engano pois encontramos os números complexos repetidamente em áreas básicas da ciência. Por exemplo, muitos fenômenos tem seu comportamento

descrito por funções quadráticas. O percurso natural para encontrar as soluções de funções quadráticas é por meio da utilização da milenar fórmula de *Bhaskara* (EMCH; SRIDHARAN; SRINIVAS, 2005):  $x = (-b \pm \sqrt{\Delta})/2a$ . Como o valor de  $\Delta$  é encontrado como  $\Delta = b^2 - 4ac$ , qualquer combinação destes coeficientes que nos entregue um  $\Delta$  com valor negativo leva a um problema sem solução no conjunto dos números reais.

Suponha a inclusão dos números complexos em análise de um fenômeno qualquer. Podem surgir novas soluções, é verdade. Mas as consequências vão além disso. Comportamentos totalmente novos e detalhes aparentemente inexplicáveis podem se tornar claros (CAON et al., 2013). Note a equação abaixo.

$$x^6 + 1 = 0. \quad (1.1)$$

Essa equação não possui soluções no conjunto dos reais. Se estendermos para o conjunto dos números complexos, haverá seis soluções:  $x = \pm e^{(i\pi/2)}$ ,  $x = \pm e^{(i\pi/6)}$  e  $x = \pm e^{(i\pi 5/6)}$ . Abaixo vemos as raízes no plano complexo.

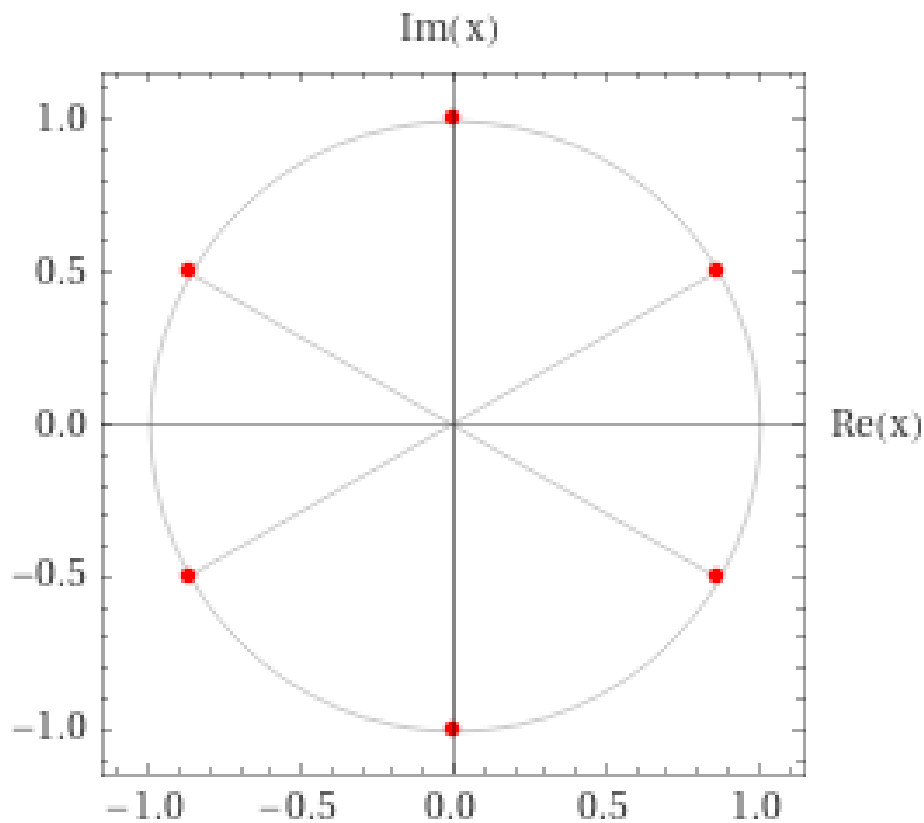


Figura 1 – Raízes de  $x^6 + 1 = 0$  no plano complexo. Fonte: autor, 2021



Note um caso ainda mais intrigante na equação abaixo:

$$x^4 + 1 = 0 \quad (1.2)$$

Esta equação não possui soluções no conjunto dos reais. Se estendermos para o conjunto dos números complexos, haverá quatro soluções:  $x = \exp\{\pm i\pi/4\}$  e  $x = \exp\{\pm 3i\pi/4\}$ . Mas a existência de soluções não é o único ganho com a extensão para os complexos. O próprio comportamento de funções no campo dos reais também é melhor compreendido. Por exemplo, a figura abaixo mostra o gráfico da função  $f(x) = 1/(1 + x^4)$ .

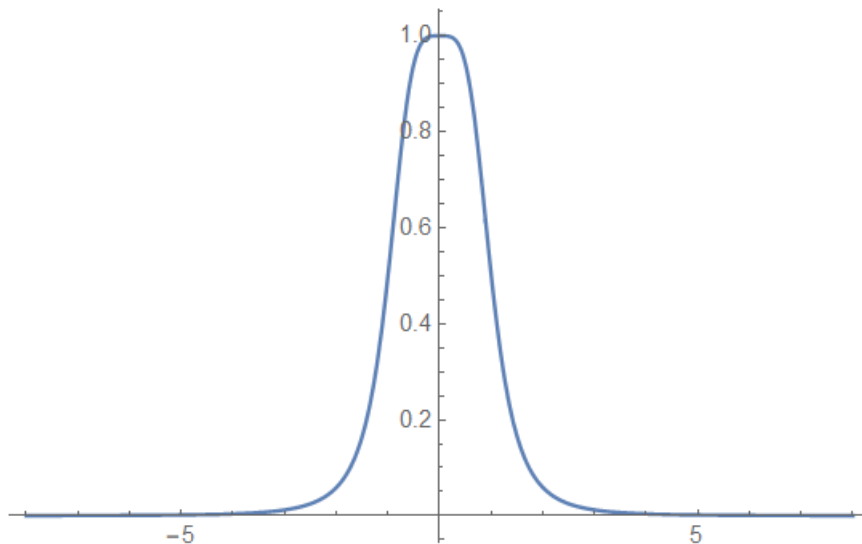


Figura 2 – Curva da função  $f(x) = 1/(1 + x^4)$ . Função suave e infinitamente diferenciável para todo valor de  $x$ . Mesmo com essas características, a série de Taylor para a função converge apenas no intervalo  $|x| < 1$ . Sem explicação aparente no conjunto dos reais. Mas com o auxílio no conjunto dos complexos fica claro a fonte de tal comportamento. Fonte: autor, 2021.

A função  $f(x) = 1/(1 + x^4)$  é suave e infinitamente diferenciável. Isto vale para *todos* os valores de  $x$ . Abaixo temos uma expansão em série de Taylor para a função.

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m x^{4m} \quad (1.3)$$

A expansão acima converge em um intervalo real *finito*, para  $|x| < 1$ . A função é suave e infinitamente diferenciável para  $x$  - como o intervalo de convergência é finito? Ultrapassando os limites do conjunto dos reais, lembramos que o denominador  $(1 + x^4)$  possui quatro zeros *complexos*. Os zeros (complexos) do denominador impactam o comportamento da função, mesmo quando analisamos o caso restrito ao conjunto dos reais (BENDER, 2018).

Outra característica surpreendente quando expandimos nosso estudo para os números complexos: operações que *parecem* ser verdadeiras em todos os casos, mas na verdade *talvez* não sejam verdadeiras. Para ilustrar, vamos lembrar das seguintes relações de álgebra fundamental.

$$e^{\ln z} = z \quad (1.4)$$

$$\ln e^z = z \quad (1.5)$$

Nas equações acima, se  $z$  for real temos o caso da álgebra estudada no nível básico. As relações estão corretas. Porém, se  $z$  for complexo, a equação 1.4 permanece correta enquanto 1.5 *pode* não ser. Se tomarmos a identidade de Euler  $e^{i\pi} = -1$  e elevarmos ambos os lados ao quadrado, chegamos a  $e^{2i\pi} = 1$ . Tomando o logaritmo de ambos os lados, ficamos com uma expressão do tipo 1.5:

$$\ln e^{2i\pi} = \ln 1 \quad (1.6)$$

Ou seja, estamos afirmando (já antes de tomar o logaritmo) que  $2i\pi = 0$ ! No caso dos reais, cairíamos em uma inconsistência. Porém, por estarmos lidando com o conjunto dos complexos, é necessário mais cuidado. Como foi dito antes, *parecer* verdadeiro não *garante* ser. Assim, reorganizando os fatores em  $2i\pi$  e lembrando as relações trigonométricas no conjunto dos complexos, podemos afirmar que não apenas  $e^{2\pi i}$  é igual a 1. um número infinito de valores da forma  $e^{2\pi im}$  é igual a 1, com  $m$  sendo qualquer número inteiro positivo ou negativo, inclusive 0 ou 1. Portanto, usando a equação 1.6 temos

$$\ln e^{i2\pi m} = \ln 1 = i2\pi m \quad (1.7)$$

O que acabamos de mostrar é que afirmar  $\ln(1) = 0$  não é de todo correto. Na verdade,  $\ln(1)$  é um número complexo *imaginário puro*. Ou seja,  $\ln(1)$  tem sua *parte real* igual a zero.

Estudar um sistema qualquer utilizando ferramentas matemáticas que não utilizem os números complexos pode ser bastante restritivo. Porém, é comum o interesse em parte de um sistema, e não em sua totalidade. Nesses casos, formular matematicamente um subespaço do sistema original pode ser feito lançando mão dos números complexos. Desde que o sistema original continue com suas energias representadas por variáveis reais (EL-GANAINY et al., 2018). Essa abordagem é utilizada já há décadas. Ainda em 1928, George Gamow estudou o transporte de partículas do núcleo atômico para o seu entorno utilizando energias descritas por números complexos (GAMOW, 1928). E alguns anos depois, H. Feshbach modelou interações entre nêutrons e núcleos atômicos utilizando energias complexas (FESHBACH; PORTER; WEISSKOPF, 1954).

### 1.1 Novos materiais fotônicos

Em fotônica, a busca por novos materiais também levou a caminhos antes não explorados - e, como quase sempre, inesperados. A manipulação de uma única característica fundamental, o índice de refração, trouxe à tona diversos tipos de materiais. Um caso de compreensão bem simples são os cristais fotônicos. O índice de refração é disposto de tal forma que há uma periodicidade em sua distribuição. A periodicidade pode ser em uma, duas ou até mesmo em três dimensões (LOPEZ, 2003; SOUKOULIS, 2002).

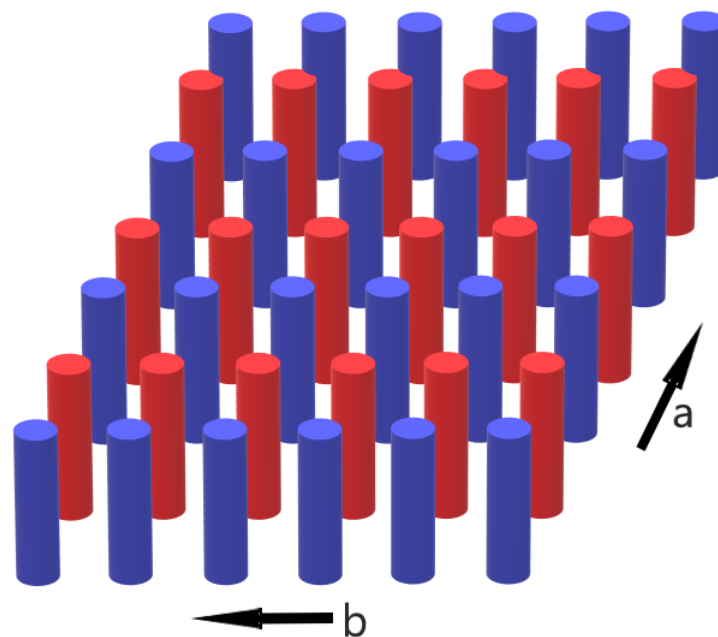


Figura 3 – Cristal fotônico unidimensional. Em uma direção, o índice de refração é constante. Na outra direção, o índice de refração é periódico. Fonte: autor, 2021.

Na Figura 3, vemos um exemplo de cristal fotônico. O material é formado por cilindros.

Na figura, cada cor representa um valor para o índice de refração. Na direção **b**, o índice de refração não muda, tem o mesmo valor para todos os cilindros. Mas na direção **a** o índice de refração varia periodicamente.

Já na Figura 4, temos um cristal fotônico bidimensional. O desenho do material é o mesmo, formado por cilindros. Porém, desta vez o índice de refração varia nas duas direções. Percorrendo o material, tanto na direção **a** como na direção **b**, ora temos cilindro com um primeiro valor para o índice de refração, ora temos um segundo valor.

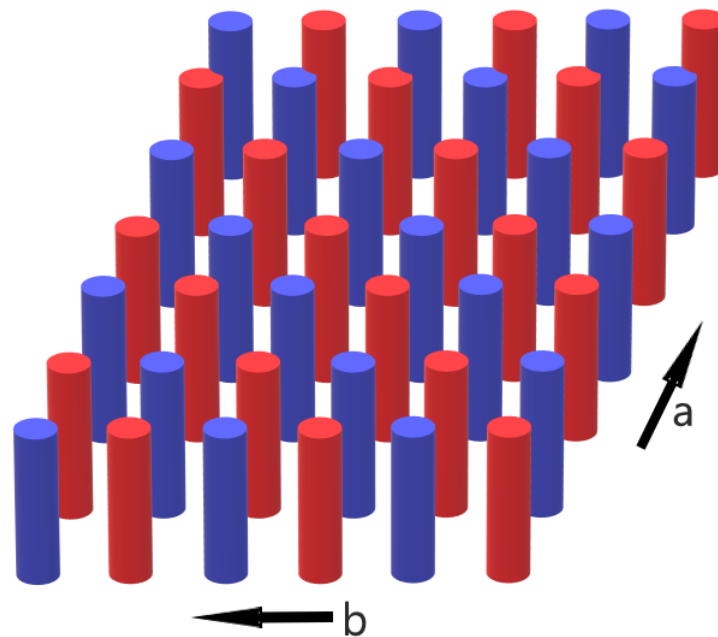


Figura 4 – Cristal fotônico bidimensional. O índice de refração é periódico nas duas direções.  
Fonte: autor, 2021.

Cristais fotônicos possuem a altamente relevante característica de possuir *band gaps*, intervalos de frequência da onda eletromagnética onde a propagação é proibida. Ou seja, uma determinada onda eletromagnética pode ou não conseguir propagar pelo cristal dependendo da sua frequência. As frequências que podem se propagar no cristal são chamadas de *modos permitidos*. Grupos de modos permitidos são chamados de *bandas*. Os intervalos de frequência que não conseguem se propagar no cristal formam lacunas. Daí vem o nome *band gap*, intervalos de frequência onde não há propagação. A existência de *band gaps* é fruto da interferência destrutiva de muitas reflexões que a onda sofre dentro do cristal (JOANNOPOULOS et al., 2008).

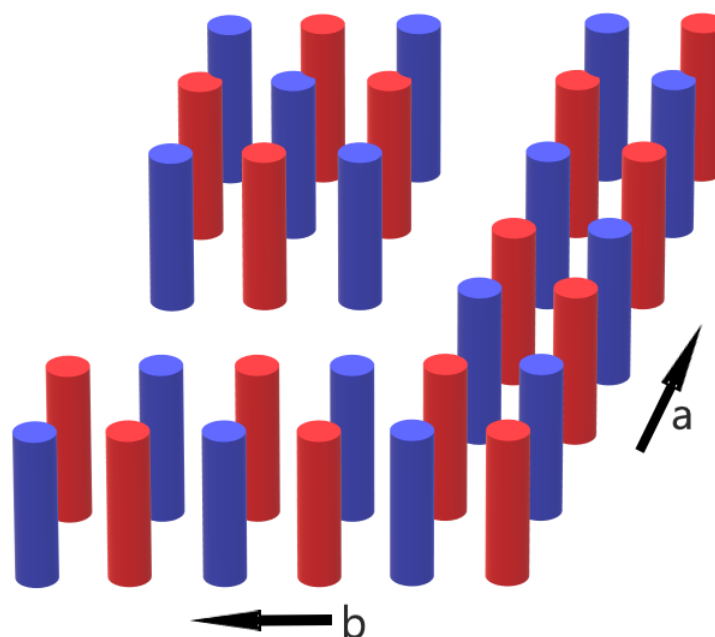


Figura 5 – Um guia de onda formado pela retirada de alguns cilindros do cristal bidimensional. A inexistência dos cilindros forma um caminho para a propagação da onda eletromagnética. Uma onda com frequência dentro do band gap característico do material não consegue propagar no cristal, mas propaga pelo defeito provocado pela vacância de cilindros. Isto é o que permite a formação do guia de onda. Fonte: autor, 2021.

Cristais fotônicos podem ser muito úteis. Na verdade, qualquer aplicação que necessite de um material que controle o fluxo de ondas eletromagnéticas, a formação de um circuito para a onda seguir, pode lançar mão de um cristal fotônico (NODA; BABA, 2003; GONG; HU, 2019). Por exemplo, a Figura 5 mostra a formação de um guia de onda pela retirada de alguns cilindros. Se uma onda tem sua frequência dentro do band gap característico do cristal, ela não consegue se propagar em seu interior. Porém, a vacância desses cilindros forma um circuito, um caminho, para a onda se propagar. A Figura 6 mostra o mesmo cristal de um outro ângulo, evidenciando o circuito formado pela vacância de cilindros.

Outro caminho levou à pesquisa da interação entre luz e metal - Chegamos à plasmônica. Aqui temos o aparecimento da índice de refração *negativo*. As consequências de ter um material com índice de refração negativo são, deveras, interessante. Um material fotônico construído com índice de refração negativo pode cancelar o efeito de materiais com índice de refração convencional, positivo (ZOUHDI; SIHVOLA; VINOGRADOV, 2008). Assim é possível guiar e manipular a transmissão de ondas eletromagnéticas, fortalecendo ou ampliando o alcance e a qualidade do sinal.

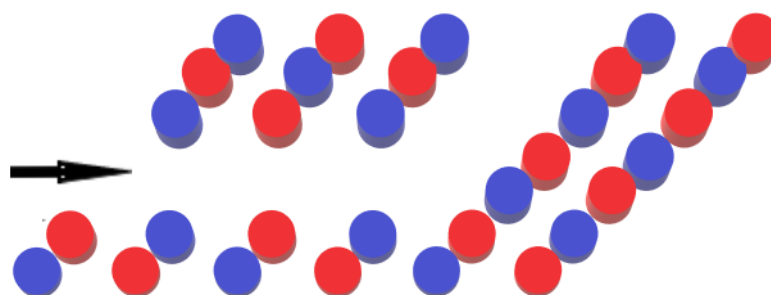


Figura 6 – Cristal fotônico com guia de onda visto a partir de outra direção. É nítido o circuito formado pela vacância de alguns cilindros. Fonte: autor, 2021.

Supondo que uma lente seja construída com um índice de refração negativo, seu projeto pode possibilitar o cancelamento da perda de informação durante a propagação em meios convencionais. Desta forma, a perda de informação seria contrabalanceada pela amplificação durante a propagação dentro da lente com índice de refração negativo, gerando uma imagem de alta resolução. Com este mesmo raciocínio, muitas aplicações são alcançadas, como regiões de invisibilidade, guias de onda usando plasmônica e o fenômeno conhecido como luz lenta, onde a velocidade da luz é drasticamente reduzida (WUESTNER et al., 2011).

Mas o campo de aplicação consequente da plasmônica é ainda mais amplo. A mera inclusão de partículas metálicas em determinados materiais já é o suficiente para alterar seu comportamento óptico. Nanopartículas plasmônicas absorvem muita energia e espalham muita radiação incidente. Consequentemente, são utilizadas em exames médicos diversos, aprimoramento de espectroscopia, sensores variados. Para alterar a faixa de frequência de atuação das nanopartículas não é preciso mudar a substância - basta alterar sua forma ou seu tamanho. Com tamanho ou forma diferente, é possível controlar com precisão a faixa de frequência de atuação. (KHLEBTSOV; DYKMAN, 2010; OLSON et al., 2015; URBAN et al., 2014; KHAN; SAEED; KHAN, 2019).

A causa dos fenômenos descritos acima é a ressonância entre os elétrons de condução na superfície das nanopartículas e a radiação eletromagnética incidente. Essa ressonância, conhecida como ressonância de plasma de superfície (SPR, seguindo a nomenclatura em inglês) produz, como dito anteriormente, alta absorção e alto espalhamento da luz. Quando essa ressonância é excitada, a absorção e o espalhamento causado pelas partículas plasmônicas podem chegar a ser várias vezes mais forte que as partículas ordinárias.

A Figura 7 ilustra a SPR no caso de uma esfera metálica. Uma onda eletromagnética acopla com a frequência de oscilação da nuvem de elétrons e ocorre o fenômeno da SPR.

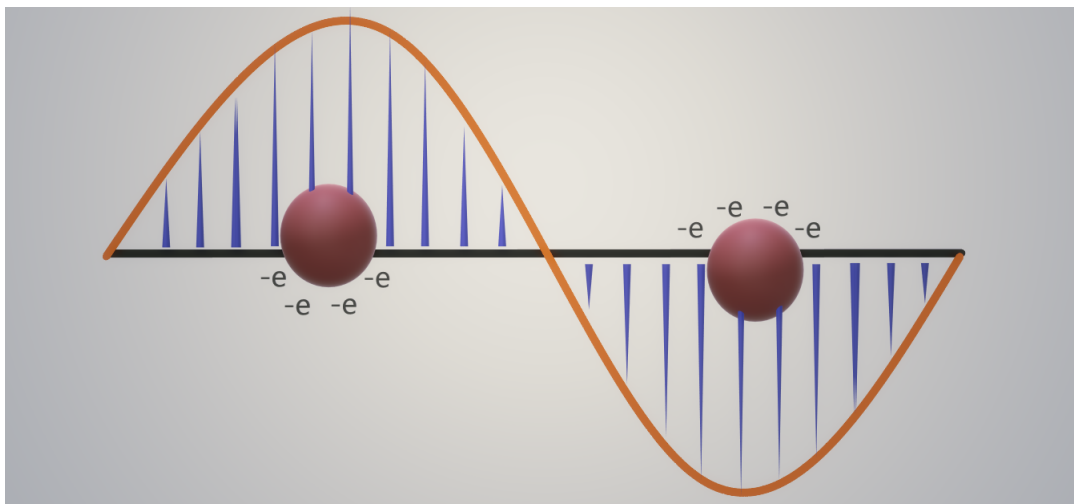


Figura 7 – Representação da ressonância de plasma de superfície (SPR) com uma esfera metálica. A esfera representa a nanopartícula metálica. Os elétrons livres na superfície da nanopartícula, representados pela letra 'e-', oscilam coletivamente. Tal efeito depende de diversos fatores, entre eles do tamanho da nanopartícula e do meio onde estão inseridas. Fonte: autor, 2021.

Note algo central no que foi exposto até agora. Muitas das características fotônicas de um material podem ser manipuladas de forma a controlar o índice de refração. Ou seja, um material pode ser construído de tal forma que seu índice de refração seja positivo (materiais convencionais) ou negativo. Mesmo em materiais ditos convencionais podemos manipular a distribuição do índice de refração no material a ponto de obtermos efeitos úteis, como no caso dos cristais fotônicos. Como mostra a Figura 8, podemos pensar nos materiais convencionais ou plasmônicos baseando no sinal do índice de refração, se positivo ou negativo.

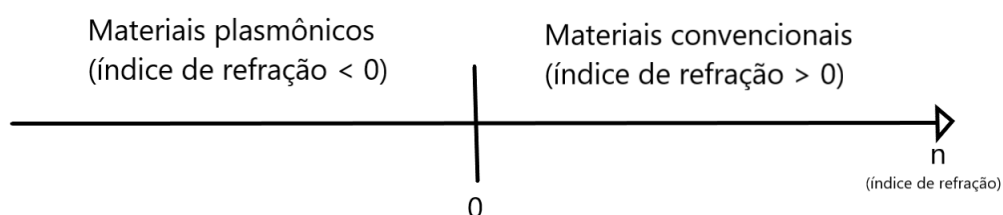


Figura 8 – Uma possibilidade de classificação de materiais fotônicos pode ser baseada no sinal do seu índice de refração. Fonte: autor, 2021.

Porém, falar em termos de negativo ou positivo para o índice de refração esconde uma característica relevante: deve o índice de refração ser real? Ou pode ser complexo? Seria possível termos uma classificação diferente da mostrada na Figura 8, talvez mais parecida com a vista na

Figura 9?

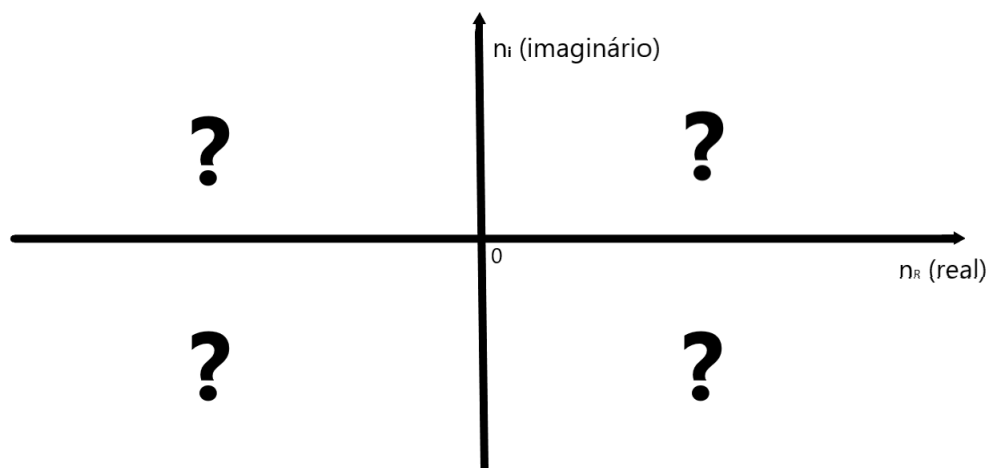


Figura 9 – Além da classificação do índice de refração como positivo ou negativo, podemos analisar o caso para o índice de refração conter valores imaginários. Isto nos leva a considerar valores complexos para o índice de refração. Fonte: autor, 2021.

A literatura é rica em exemplos de sistemas com o índice de refração complexo. Em sistemas fotônicos, a perda de energia está vinculada a índices de refração com componente imaginário positivo. Já o ganho de energia está vinculado a índices de refração negativos, como ilustrado na Figura 10 (BENDER, 2018; BENDER, 2007).

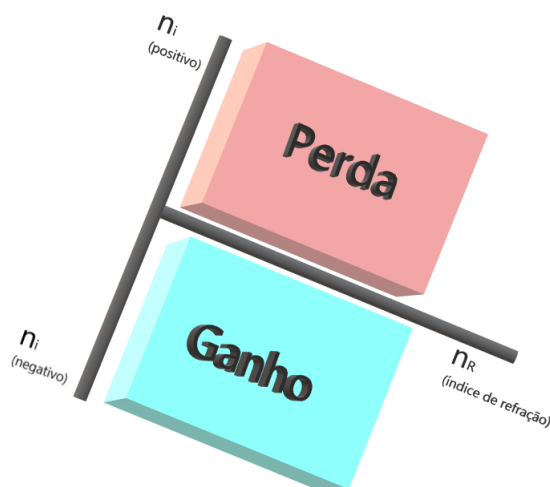
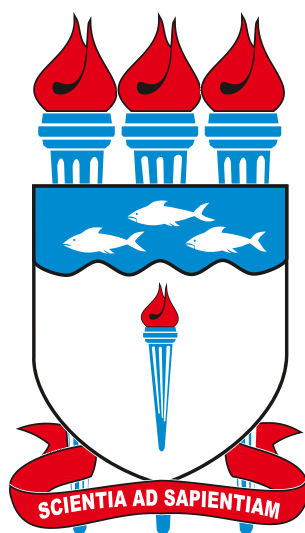


Figura 10 – Em sistemas fotônicos, a perda de energia está vinculada ao sinal positivo da parte imaginária do índice de refração. O ganho de energia está vinculado à parte negativa da parte imaginária do índice de refração. Fonte: autor, 2021.



Nesta tese, tratamos dois tipos de materiais inovadores em fotônica que modelam o índice de refração de forma não convencional. O primeiro está vinculado a uma classe de sistemas projetados para modular o índice de refração de forma periódica no espaço, utilizando ganho e/ou perda de energia para alcançar efeitos interessantes para a utilização em novos materiais. Esta classe de sistemas foi primeiramente exposta na literatura no contexto da mecânica quântica. O segundo também modela o índice de refração de forma periódica - porém, não no espaço, mas de forma temporal. Ou seja, é um material ativo, onde as propriedades ópticas não são fixas no tempo.

Esta tese está organizada da seguinte forma: neste capítulo fizemos uma introdução sobre novos materiais em fotônica utilizando índices de refração não convencionais. O capítulo 2 trata dos cristais fotônicos espaciais (*photonic crystals - PC*), dando a base para o capítulo seguinte, onde encontramos os cristais fotônicos temporais (*photonic time crystals - PTC*). No capítulo 4, introduzimos os materiais fotônicos com simetria espacial e de inversão temporal (simetria PT). No capítulo 5 vemos materiais estratificados com simetria PT. No capítulo 6 estudamos o efeito Goos-Hänchen em materiais estratificados com simetria PT passiva. Finalmente, no último capítulo fazemos as considerações finais.



## 2 CRISTAIS FOTÔNICOS ESPACIAIS

### 2.1 Introdução

Os materiais podem ser classificados de diversas formas, dependendo do interesse a ser abordado. Por exemplo, os sólidos podem ser classificados conforme a posição dos seus átomos ou íons. Dependendo da forma em que os elementos constituintes do material estão dispostos uns em relação aos outros, características interessantes podem surgir. Se um material tem seus elementos dispostos em forma repetitiva, ou periódica, sendo tal repetição num alcance de grandes distâncias atômicas (ou seja, a periodicidade é de longo alcance) dizemos que o material é cristalino (BLOCH, 1928; CALLISTER et al., 2021). Todos os metais, muitos materiais cerâmicos e certos polímeros formam estruturas cristalinas sob condições normais de solidificação.

Nesses sólidos cristalinos, algumas das suas propriedades dependem da estrutura cristalina do material. Suas propriedades mudam em função de como os átomos, íons ou moléculas estão organizados no espaço. O número de estruturas cristalinas diferentes é muito grande. Em metais, tais estruturas são relativamente simples. Em alguns materiais cerâmicos e poliméricos, são estruturas extremamente complexas.

Quando descrevemos estruturas cristalinas, seus elementos (átomos, íons ou moléculas) são representados por esferas sólidas. É o chamado modelo de esfera rígida atômica: as esferas representando átomos vizinhos mais próximos se tocam. Na Figura 11, vemos alguns exemplos desta representação. Neste contexto de estruturas cristalinas, usamos o termo *rede* para a matriz dos pontos indicando as posições aproximadas do centro dos seus elementos (átomos, íons ou moléculas).

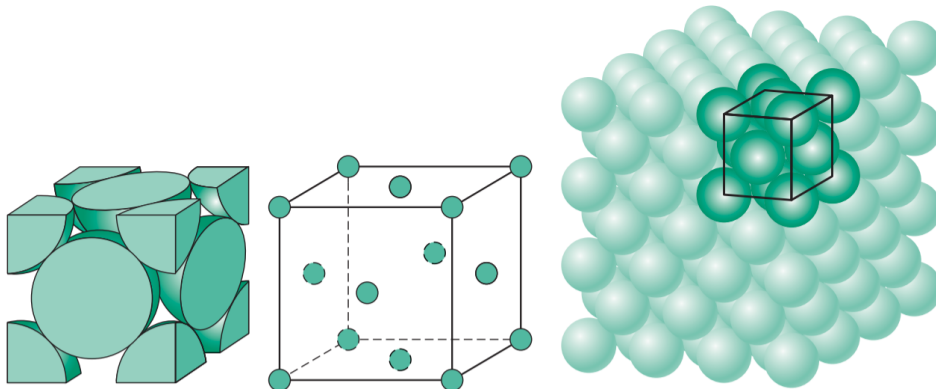


Figura 11 – Exemplos de estruturas cristalinas representadas pelo modelo de esfera rígida atômica. Em (a) temos a chamada *célula unitária*, representando a unidade que se repete na rede. Em (b), a mesma célula com as esferas reduzidas. Em (c), uma visão mais geral da rede cristalina. Fonte: adaptado de (CALLISTER et al., 2021)

Um aspecto importante nas últimas décadas é a interação de radiação eletromagnética com os materiais. No sentido clássico, a radiação eletromagnética é tratada como uma onda. Tem dois componentes, elétrico e magnético. Tais componentes são perpendiculares entre si e mutuamente perpendiculares à direção de propagação.

São diferentes formas de radiação eletromagnética que lidamos no design de materiais. O que caracteriza cada uma destas é principalmente uma faixa específica de comprimentos de onda, além da técnica pela qual é gerado cada um destes.

Qualquer radiação eletromagnética percorre o vácuo com a mesma velocidade, chamada de *velocidade da luz*: aproximadamente  $3 \times 10^8$  m/s. Esta velocidade tem uma relação com a permissividade elétrica do vácuo,  $\epsilon_0$ , e a permeabilidade magnética do vácuo  $\mu_0$ , conforme a relação abaixo:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}. \quad (2.1)$$

A relação acima nos mostra a associação entre a constante eletromagnética  $c$  (velocidade da luz) e as constantes dos campos elétricas e magnético (CALLISTER et al., 2021). Há também uma relação entre a frequência  $\nu$  da radiação eletromagnética e o seu comprimento de onda, que também nos fornece a velocidade:

$$c = \lambda \nu. \quad (2.2)$$

A frequência  $\nu$  medida em hertz (e seus múltiplos), com 1 Hz sendo um ciclo por segundo.

Às vezes, é mais conveniente estudar a radiação eletromagnética de uma ponto de vista não clássico, mas quântico. Nessa perspectiva, a radiação, em vez de consistir em ondas, é composta de grupos ou pacotes de energia chamados fótons (daí o termo *fotônica*). A energia  $E$  de um fóton é dita quantizada, ou seja, pode ter apenas determinados valores. Esses valores são definidos pela relação

$$E = h\nu = hc/\lambda \quad (2.3)$$

onde  $h$  é uma constante chamada de constante de Planck, O valor de  $h$  é  $6,63 \times 10^{-34}$  Js. Desta forma a energia do fóton é proporcional à frequência da radiação e inversamente proporcional ao comprimento de onda (LOPEZ, 2003).

Qual a melhor forma para tratar fenômenos ópticos/fotônicos? Depende. Às vezes é mais fácil tratar do ponto de vista clássico, com uma formulação ondulatória. Porém, por vezes é melhor tratar a radiação do ponto de vista quântico, com sua formação relacionada aos fótons. A escolha da abordagem dependerá dos materiais envolvidos, da escala temporal do fenômeno e do próprio fenômeno em si.

### 2.1.1 Transmissão e reflexão

Qual o comportamento de uma onda eletromagnética quando passa de um meio para outro? Na verdade várias coisas acontecem. Parte da radiação eletromagnética pode ser transmitida através do meio. Uma outra parte é absorvida e ainda uma outra parte é refletida na interface entre os dois meios.

A intensidade  $I_0$  da radiação incidente em um meio qualquer deve ser igual à soma das intensidades das radiações que são transmitidas, absorvidas e refletidas. Sendo  $I_T$  a intensidade da radiação transmitida,  $I_A$  a intensidade da radiação absorvida e  $I_R$  a intensidade da radiação refletida, temos

$$I_0 = I_A + I_R + I_T \quad (2.4)$$

Se estivermos considerando apenas o fenômeno entre dois meios, numa interface simples, podemos considerar apenas a transmissão e reflexão e a equação acima se reduz a

$$I_0 = I_R + I_T. \quad (2.5)$$

A intensidade é expressa em unidades de watts por metro quadrado. Ela indica a energia transmitida por unidade de tempo através de uma unidade de área perpendicular à direção de propagação.

Uma forma alternativa de escrever a relação 2.5 é

$$T + R = 1, \quad (2.6)$$

onde  $T$  é a transmissividade ( $I_T/I_0$ ) e  $R$  a reflexividade ( $I_R/I_0$ ) que indicam as frações da radiação incidente que são transmitidas e refletidas.

Os materiais que são capazes de transmitir a radiação com relativamente pouca absorção e reflexão são ditos transparentes. Ou seja, é possível perceber a radiação através deles de forma próxima da totalidade. Materiais translúcidos são aqueles através dos quais a radiação é transmitida de forma difusa. Ou seja, a radiação é espalhada no interior de tal forma que os detalhes de outros materiais não são claramente distinguíveis quando observados através de uma amostra do material. Os materiais impermeáveis à transmissão são ditos opacos. Se considerarmos a radiação eletromagnética no espectro da luz visível, os metais densos são todos opacos - a luz ou é absorvida ou refletida, sem haver transmissão. Os materiais isolantes, porém, podem ser projetados para ter transparência na luz visível.

### 2.1.2 Índice de refração

Quando uma onda eletromagnética é transmitida no interior de um material, um outro fenômeno é a redução de sua velocidade. Como consequência, há um desvio em relação à direção original de propagação. A este fenômeno na mudança da direção de propagação damos o nome de refração. O quociente entre a velocidade da radiação eletromagnética no vácuo e a velocidade no interior do material é conhecido como índice de refração:

$$n = \frac{c}{\nu}, \quad (2.7)$$

onde  $n$  é o índice de refração,  $c$  é a velocidade da radiação no vácuo e  $\nu$  é a velocidade da radiação no interior do material.

A relação 2.1 nos fornece a velocidade  $c$  no vácuo. Abaixo, vemos uma relação similar para a velocidade no interior de um material.

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}, \quad (2.8)$$

onde  $\epsilon$  é a permissividade elétrica do material e  $\mu$  é a permeabilidade magnética do material, Com as relações 2.1 e 2.8 podemos escrever

$$n = \frac{c}{\nu} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}} = \frac{\sqrt{\epsilon\mu}}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}. \quad (2.9)$$

Definindo a permissibilidade relativa do material (constante dielétrica) como  $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$  e a permeabilidade magnética relativa do material como  $\mu_r = \mu/\mu_0$ , temos

$$n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}. \quad (2.10)$$

Para materiais não-magnéticos, podemos utilizar  $\mu_r \approx 1$  temos

$$n = \sqrt{\epsilon_r}. \quad (2.11)$$

## 2.2 Periodicidade no espaço

Cristais fotônicos espaciais formam um tema extensamente estudado, tanto teórico como experimentalmente. Há uma literatura extensa explorando suas características e aplicações. Por muitos anos, esta foi a única abordagem na periodicidade das características eletromagnéticas de cristais fotônicos que encontramos atenção em pesquisas. A periodicidade característica dos cristais fotônicos podem ser em uma, duas e em três dimensões, como exemplificado na Figura 12. Em tempos recentes, a periodicidade no tempo surgiu como tema relevante de pesquisa. O objetivo deste capítulo é introduzir as ideias úteis para a compreensão desses materiais periódicos no espaço. A partir daí, construímos a base para compreensão das características dos materiais periódicos no tempo, abordado no próximo capítulo.

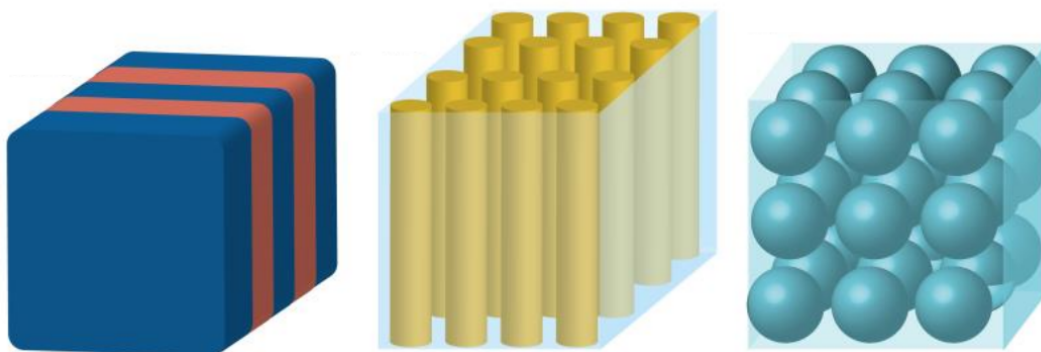


Figura 12 – Exemplos de estruturas periódicas. A partir da esquerda, temos materiais periódicos em uma duas e três dimensões. Cada cor representa um valor para a permissividade elétrica do material. Fonte: adaptação de (TURDUEV, 2016).

As ondas eletromagnéticas são descritas pelas bem conhecidas e exploradas equações de Maxwell. Dentre suas diversas formas, na ausência de cargas livres e corrente, tais equações podem ser escritas como

$$\nabla \cdot [\epsilon_0 \epsilon(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r})] = 0, \quad (2.12a)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0, \quad (2.12b)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (2.12c)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \epsilon_0 \epsilon(\vec{r}) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (2.12d)$$

Nas equações 2.12 acima,  $\vec{E}$  é o campo elétrico e  $\vec{H}$  é o campo magnético,  $\epsilon_0$  é a permissividade elétrica do vácuo e  $\mu_0$  é a permeabilidade magnética do vácuo. vamos assumir que o meio em questão é linear e não magnético. Desta forma, a indução magnética pode ser descrita como  $B = \mu(\vec{r})\vec{H}$ , enquanto o deslocamento elétrico como  $D = \epsilon(\vec{r})\vec{E}$ , onde a constante dielétrica  $\epsilon(\vec{r}) > 1$  (com valores que variam periodicamente no espaço). Devemos encontrar soluções das equações de Maxwell, ou seja, expressões para  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  que tornem as relações 2.12 verdadeiras. Buscamos soluções que estão mudando harmonicamente no tempo com uma frequência  $\omega$ . Ou seja, as soluções que buscamos são da forma  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t}$  e  $\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}(\vec{r})e^{-i\omega t}$ . Tomando o rotacional 2.12c e usando 2.12d, obtemos

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\vec{r}) \vec{E} = 0. \quad (2.13)$$

A equação 2.13 é a equação de onda descrevendo o campo elétrico, onde  $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ . Conhecendo uma solução para 2.13 (ou seja, encontrando uma forma para  $\vec{E}$ ), usando as equações de Maxwell nós também encontramos para  $\vec{H}$ .

Vamos assumir, sem perda de generalidade, que (1) a permissividade elétrica varia periodicamente ao longo do eixo  $z$ , ou seja, temos  $\epsilon(z+L) = \epsilon(z)$ ; (2) a onda eletromagnética se propaga ao longo da direção  $z$  e (3) a onda eletromagnética está polarizada ao longo da direção  $x$ . Desta forma, podemos escrever  $\vec{E}(\vec{r}) = E(z)e_x$ . portanto a equação 2.13 se reduz a

$$\frac{\partial^2 E(z)}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(z) E(z) = 0. \quad (2.14)$$

Finalmente, agora podemos lançar mão da principal característica do material que tratamos neste capítulo: a periodicidade espacial (em uma direção) da permissividade elétrica,  $\epsilon$ . Como o valor de  $\epsilon(z)$  é periódico, podemos utilizar o conhecido Teorema de Bloch que envolve funções periódicas. Tal teorema nos fornece a útil relação

$$E(z) = u_{n,K}(z)e^{iKz}. \quad (2.15)$$

Em 2.15,  $u_{n,K}(z+L) = u_{n,K}(z)$  (em outras palavras, a função  $u$  é periódica com período  $L$ );  $K$  é o chamado número de onda de Bloch. É interessante notar o índice  $n$ , que identifica as chamadas bandas de frequências ( $\omega = \omega_n(K)$ ), pois temos diversas funções  $u$  que nos servem para solucionar as equações periódicas que buscamos. Como os resultados são periódicos, nós podemos restringir a análise a um intervalo finito do número de onda à conhecida zona de Brillouin,  $-\pi/L \leq K \leq \pi/L$ .

Dentro de cada camada, as ondas eletromagnéticas tem as seguintes soluções:

$$E(z) = C_i e^{ik_i z} + D_i e^{-ik_i z}, \quad (2.16a)$$

$$E(z) = C_j e^{ik_j z} + D_j e^{-ik_j z}, \quad (2.16b)$$

onde  $k_i = \omega\sqrt{\epsilon_i}/c$  e  $k_j = \omega\sqrt{\epsilon_j}/c$ , respectivamente para as camadas  $i$  e  $j$ ,

O campo  $E(z)$  e sua derivada  $dE(z)/dz$  devem ser contínuos na interface entre as camadas e também a periodicidade de  $u_{n,K}$  e  $du_{n,K}/dz$ . Desta forma, obtemos a seguinte relação:

$$\cos(KL) = \cos(k_i d_i) \cos(k_j d_j) - (1/2) \left( \sqrt{\frac{\epsilon_j}{\epsilon_i}} + \sqrt{\frac{\epsilon_i}{\epsilon_j}} \right) \sin(k_i d_i) \sin(k_j d_j), \quad (2.17)$$

para o qual  $k_{i/j}$ ,  $d_{i/j}$  e  $\epsilon_{i/j}$  são, respectivamente, o vetor de onda camada, o tamanho de cada camada e a permissividade elétrica de cada camada.

Observando com cuidado a equação 2.17 é fácil perceber que não podemos ter valores quaisquer para os termos. Como  $\cos(KL)$  dever ter valor no intervalo  $[-1, +1]$ , o valor do lado direito da equação deve estar nesse intervalo. Se, após inserir os valores de  $k_{i/j}$ ,  $d_{i/j}$  e  $\epsilon_{i/j}$  o lado direito da equação for um valor menor que  $-1$  ou maior que  $+1$ ,  $\cos(KL)$  não está no conjunto



dos reais. Desta forma, não há valor para  $K$  permitido. Aqui temos uma origem dos chamados *band gaps*.

Para exemplificar, note a situação bem simples de um cristal fotônico unidimensional como explicado acima. Em nosso exemplo, a permissividade elétrica  $\epsilon$  varia periodicamente no espaço na direção  $z$ . O valor de  $\epsilon$  muda alternadamente entre duas camadas. As camadas  $i$  tem largura  $d_i = 0.3$  e  $\epsilon = \epsilon_i = 3$ . As camadas  $j$  tem largura  $d_j = 0.3$  e  $\epsilon = \epsilon_j = 10$ . Em cada camada o material não muda, é isotrópico.

A equação 2.17 nos fornece a dependência, em função do número de onda  $a$ , de uma frequência  $\omega$  de uma onda eletromagnética propagante no interior do cristal fotônico em questão. A figura 13 mostra a relação entre o vetor de onda  $K$  e as frequências com propagação permitida dentro do cristal. Para o caso presente, há alto contraste entre as permissividades elétricas de cada camada. É nítido a existência de um intervalo de frequências onde não temos um vetor de onda correspondente. Ou seja, há intervalos nos valores da frequência que não temos propagação permitida. Esses intervalos são conhecidos como *band gaps*. Se uma onda eletromagnética tiver uma frequência  $\omega$  que pertença a esse intervalo, o band gap, ela será totalmente refletida ao atingir o material (cristal fotônico). Na figura 14 temos o mesmo tipo de gráfico, porém com as camadas tendo uma diferença menor entre as permissividades - nesse caso, escolhemos  $\epsilon_1 = 3$  e  $\epsilon_2 = 6$ . Claramente, ainda existe band gap. Porém, como o contraste entre as permissividades é menor, o intervalo proibido de frequências também diminui (JOANNOPOULOS et al., 2008).

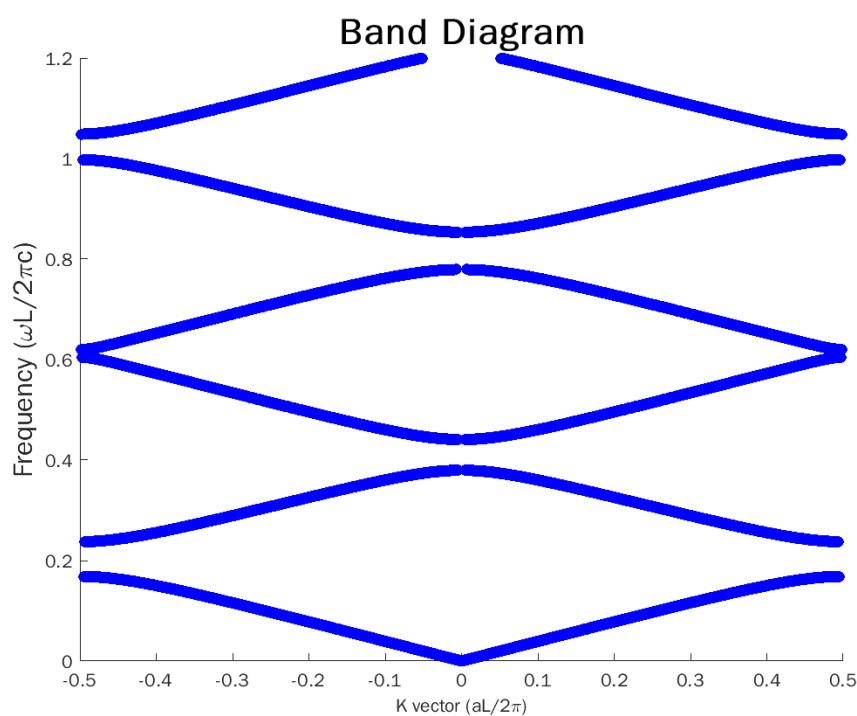


Figura 13 – Diagrama de bandas para o sistema formado por bicamadas com suas permissividades elétricas com valores  $\epsilon_1 = 3$  e  $\epsilon_2 = 10$ . Radiação eletromagnética com frequência dentro dos intervalos indicados não conseguem propagar dentro do cristal fotônico indicado. Fonte: autor, 2021.

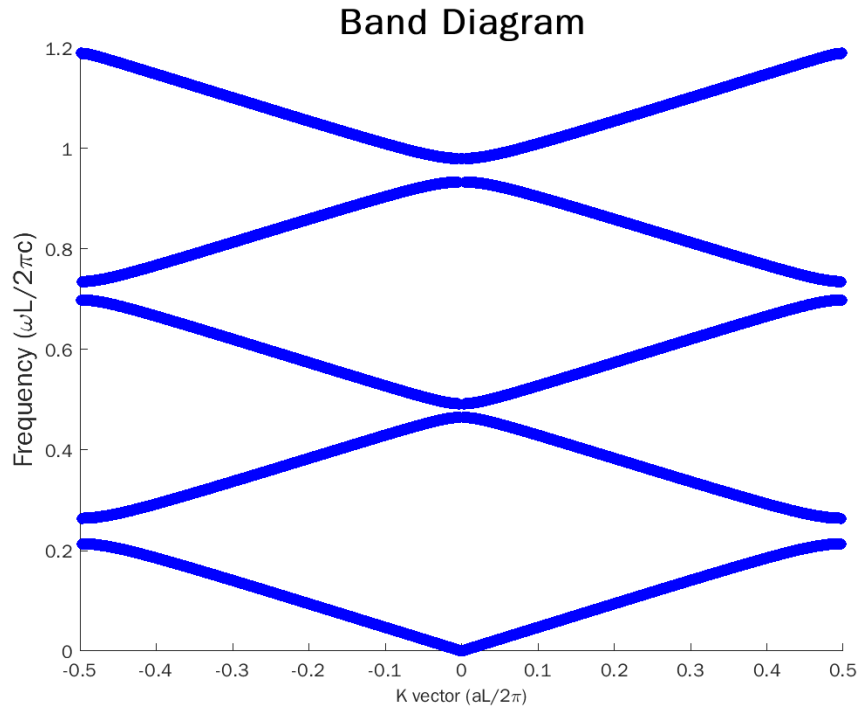
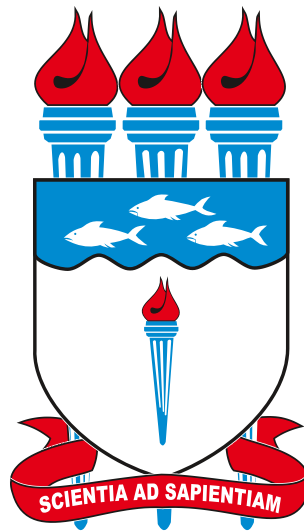


Figura 14 – Diagrama de bandas para o sistema formado por bicamadas com suas permissividades elétricas com valores  $\epsilon_1 = 3$  e  $\epsilon_2 = 6$ . Com diferença menor entre as permissividades das camadas do cristal, temos menos intervalos com frequências proibidas do que no caso anterior. Fonte: autor, 2021.



### 3 CRISTAIS FOTÔNICOS (TEMPORAIS)

No capítulo anterior, primeiro tratamos de características gerais de materiais utilizados em fotônica. Daí passamos para materiais com características periódicas no espaço. Neste capítulo, seguimos um percurso similar. Tratamos algumas características gerais de materiais utilizados em fotônica com mudanças temporais em suas características. Em seguida observamos materiais cujas propriedades variam periodicamente. Porém, dessemelhante ao capítulo anterior, as variações dos materiais aqui descritos são temporais - a periodicidade aparece no tempo.

#### 3.1 Introdução

Alguns fenômenos ópticos são elementares. Um deles é conhecido como Lei de Snell. A simplicidade de sua observação e a consequente simplicidade de compreensão de seus pontos essenciais é tão grande que podemos tratá-la nas aulas do ensino fundamental. Mesmo nessas aulas, podemos confiar que seu entendimento é possível. A Lei de Snell lida com a situação simples de um raio de luz atingindo a interface entre dois materiais com características ópticas diferentes. Ela descreve a mudança na direção de propagação. Nesse processo, a energia é conservada, mas a componente do momento perpendicular à fronteira não é (BOHREN, 1978). Isto é, a direção de propagação é alterada.

Neste ponto chamamos a atenção para algo, em geral, não digno de relevância. A mudança indicada no material ocorre no *espaço*. Há uma mudança na estrutura espacial do material. No entanto, o que acontece se a mudança não ocorrer no espaço, mas no tempo? Ou seja, e se o material sofrer uma mudança temporal? Este é um dos casos do chamado meio óptico ativo (BOHREN, 1978).

Um meio ativo (ou dinâmico) é aquele em que a constante dielétrica depende do tempo. Isto significa que em um material ativo, a permissividade elétrica não é a mesma todo o tempo - temos uma função do tipo  $\epsilon(t)$  (ZURITA-SÁNCHEZ; HALEVI; CERVANTES-GONZALEZ, 2009; ZURITA-SÁNCHEZ; HALEVI, 2010; ZURITA-SÁNCHEZ; ABUNDIS-PATIÑO; HALEVI, 2012; ZENG et al., 2017). Na literatura, é extremamente comum encontrar pesquisa lidando com funções do tipo  $\epsilon(r)$ , onde a quebra de homogeneidade ocorre espacialmente. No capítulo anterior, temos diversos exemplos. Mas sua contraparte temporal não é tão comumente encontrada. Porém, funções do tipo  $\epsilon(t)$  têm sido estudadas pelo menos, desde a década de 1950 [7]. Tentativas mais recentes de produzir materiais ativos incluem o uso de variação térmica, controle mecânico de materiais e cavidades ressonantes (BIANCALANA et al., 2007; REED; SOLJAČIĆ; JOANNOPOULOS, 2003; MORGENTHALER, 1958; JURŠĚNAS et al., 2003).

Nossa abordagem inicial é sobre um efeito de mudança temporal em um material fotônico: o aparecimento de ondas refletidas e refratadas decorrentes da variação temporal da constante

dielétrica. A consequência dessas ondas é a possibilidade de bandas permitidas e proibidas para vetores de ondas na propagação de ondas eletromagnéticas (SHARABI; LUSTIG; SEGEV, 2021). Vejamos os pilares para a consecução desses fenômenos e como desenvolver simulações computacionais (ZENG et al., 2017).

Desta forma, seja uma onda eletromagnética se propagando em qualquer material uniforme. Em determinado instante, esse material passa pela seguinte mudança: sua constante dielétrica é alterada drasticamente. Como resultado, algumas propriedades da propagação da onda também mudam por causa da mudança temporal. Se pensarmos no tempo como uma coordenada de propagação adicional, temos uma nítida analogia com o caso espacial. Existe um contorno na dimensão temporal da propagação. Assim, a radiação encontra esse contorno, produzindo uma refração (temporal) (ZENG et al., 2017).

Como veremos agora, tal mudança é acompanhada por outro fenômeno óptico: uma reflexão. Ainda assim, enquanto a refração aqui é vista no domínio temporal (com a mudança na frequência), a reflexão é vista do ponto de vista espacial. Uma onda refletida no espaço aparece assim que a radiação atinge a mudança temporal das características ópticas do material (LUSTIG; SHARABI; SEGEV, 2018).

Para entender melhor esse fenômeno, nosso ponto de partida será a equação que rege a propagação de uma onda em um meio homogêneo do formalismo de Maxwell, similar ao visto no caso espacial. isto é,

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (3.1)$$

Como sabemos a relação 3.1 é satisfeita por diferentes famílias de soluções. Nós usaremos ondas planas:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}r - \omega t)}, \quad (3.2)$$

lembrando que  $\omega$  é a frequência da onda propagante e o vetor de onda  $\vec{k}$  obedece à relação  $k = (\omega/c)n$ .

Havendo uma interface entre dois materiais com propriedades ópticas diferentes (por exemplo, um primeiro material com índice de refração  $n_1$  e um segundo material com índice de refração  $n_2$ ), esperamos ter a seguinte configuração após a onda propagante atingir a interface: no primeiro meio, a onda incidente e uma onda refletida; no segundo meio, uma onda transmitida (refratada).

### 3.1.1 Reflexão temporal

Para o caso temporal, entretanto, surge a primeira diferença significativa. Tomemos a fronteira entre os dois materiais no tempo  $t = t_0$ . Como estamos lidando com o caso temporal, podemos considerar que em um determinado instante  $t_0$ , o material muda. Desta forma, para  $t < t_0$  temos uma única onda, a incidente. Porém, no material 2 (ou seja,  $t > t_0$ ), temos duas ondas: uma transmitida e outra refletida - no espaço. O surgimento de uma onda refletida no espaço após uma mudança temporal, embora talvez surpreendente, é visto quando analisamos as condições de continuidade nas proximidades de  $t = t_0$ . As condições de continuidade para o caso de mudanças espaciais são bem tratadas na literatura. Portanto, vamos pensar no caso das mudanças temporais, o foco de nossa abordagem.

As equações de Maxwell têm derivadas temporais apenas em duas das quatro equações. Vamos utilizar as formas abaixo:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3.3a)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (3.3b)$$

No fenômeno que analisamos aqui, queremos assegurar a continuidade de tais equações próximas do limite  $t = t_0$ , pois é em  $t_0$  que temos a descontinuidade nas características ópticas do material.

Portanto, para o instante imediatamente anterior a  $t = t_0$ , devemos ter as seguintes relações:

$$B = \mu_1 H_1, \quad (3.4)$$

$$D = \epsilon_1 E_1. \quad (3.5)$$

Similarmente, para o instante imediatamente após  $t = t_0$  devemos ter

$$B = \mu_2 H_2, \quad (3.6)$$

$$D = \epsilon_2 E_2. \quad (3.7)$$

Se levarmos em conta soluções mais gerais para as ondas propagantes, devemos ter componentes em ambas as direções, ou seja

$$\vec{H}_2 = \vec{H}_2^{\rightarrow} + \vec{H}_2^{\leftarrow}, \quad (3.8)$$

$$\vec{E} = \vec{E}_2^{\rightarrow} + \vec{E}_2^{\leftarrow}. \quad (3.9)$$

Na interface temporal  $t = t_0$ , as equações 3.4 a 3.9 nos leva a

$$\vec{B} = \mu_1 \vec{H}_1 = \mu_2 (\vec{H}_2^{\rightarrow} + \vec{H}_2^{\leftarrow}), \quad (3.10)$$

$$\vec{D} = \epsilon_1 \vec{E}_1 = \epsilon_2 (\vec{E}_2^{\rightarrow} + \vec{E}_2^{\leftarrow}). \quad (3.11)$$

Resolvendo as equações 3.10 e 3.11 para  $\vec{E}$ , temos

$$\vec{E}_2^{\rightarrow} = \frac{1}{2} \left( \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} + \sqrt{\frac{\mu_1 \epsilon_1}{\mu_2 \epsilon_2}} \right) \vec{E}_1, \quad (3.12)$$

$$\vec{E}_2^{\leftarrow} = \frac{1}{2} \left( \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} - \sqrt{\frac{\mu_1 \epsilon_1}{\mu_2 \epsilon_2}} \right) \vec{E}_1. \quad (3.13)$$

Das equações acima, é fácil notar que não há onda refletida ( $\vec{E}_2^{\leftarrow} = 0$ ) se não houver mudança no material ( $\epsilon_1 = \epsilon_2$  e  $\mu_1 = \mu_2$ ) - mas este caso é esperado e não interessante. Para materiais não magnéticos, as equações 3.12 e 3.13 nos fornecem

$$\vec{E}_2^{\leftarrow} = \frac{1}{2} \left( \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} - \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \right) \vec{E}_1. \quad (3.14)$$

Portanto, para um material não magnético, a equação 3.14 nos fornece a relação entre a onda propagante original e a onda refletida, especialmente, após a mudança nas propriedades ópticas do material.

### 3.1.2 Refração temporal

No início deste capítulo, citamos a muito conhecida Lei de Snell. Ela nos fornece uma relação entre os índices de refração de dois materiais e os ângulos envolvidos no fenômeno da refração:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2. \quad (3.15)$$

Embora os materiais considerados neste capítulo sofram variações temporais de suas características ópticas, segue válida a relação já mencionada  $k = (\omega/c)n$ . Considerando o mesmo caso tratado na subseção anterior, uma mudança temporal do índice de refração em  $t = t_0$ , devemos ter

$$\omega_i = k \frac{c}{n_i}, \quad (3.16)$$

lembrando que  $n = \sqrt{\epsilon_i}$  ( $i = 1, 2$ , para explicitar a variação temporal). Como as ondas refletida e transmitida ocorrem no material já após a mudança do valor da permissividade elétrica, temos

$$\omega_R = \omega_T. \quad (3.17)$$

Para deixar explícito, a reflexão ocorre no espaço, mesmo a mudança no material se dando no domínio temporal. Afinal, uma onda refletida no tempo não faria sentido. Isto seria como uma informação viajando do futuro para o passado.

Tomando as relações 3.16 e 3.17, podemos chegar a

$$\omega_I n_1 = \omega_R n_2. \quad (3.18)$$

A relação 3.18 pode ser comparada à Lei de Snell, porém no domínio temporal. Ela relaciona a frequência  $\omega_I$  da onda propagante antes da mudança temporal com a frequência  $\omega_r$  da onda propagante refletida após a mudança temporal.

Na próxima subseção veremos esse fenômeno em simulações computacionais que demonstram a ocorrência da onda propagante refletida após a mudança do material.

### 3.1.3 Simulação no domínio do tempo

Para observar a ocorrência do fenômeno descrito na subseção anterior, realizamos simulações computacionais com as características previamente descritas. A abordagem escolhida foi o *Método de Diferenças finitas no Domínio do tempo* (FDTD).

O primeiro passo deve ser verificar como transferir as equações de propagação dos campos eletromagnéticos contínuos para o caso discreto, necessário para uso em computadores. Em seguida, é preciso implementar a mudança temporal descrita na última subseção para o código computacional. O uso do método FDTD é muito útil e prático para o estudo de fenômenos físicos como os descritos aqui. Por exemplo, no eletromagnetismo, podemos usar as equações de Maxwell e tratá-las diretamente, quase sem adaptação - exceto, é claro, sua discretização. O método FDTD implementa diretamente as equações que governam os fenômenos (ZENG et al., 2017; MA; WANG, 2019; HARFOUSH; TAFLOVE, 1991).

O método FDTD usa diferenças finitas para compor aproximações. Nas equações de Maxwell, tanto as derivadas espaciais quanto as temporais são reescritas na forma de diferenças e não com derivadas.

Considere as seguintes expansões da série de Taylor para a função  $f(x)$  em  $x_0$ :

$$f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) = f(x_0) + \left(\frac{\delta}{2}\right) f'(x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0) + \dots, \quad (3.19)$$

$$f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right) = f(x_0) - \left(\frac{\delta}{2}\right) f'(x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0) - \dots \quad (3.20)$$

Subtraindo 3.20 de 3.19, temos

$$\frac{f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right)}{\delta} = f'(x_0) + \frac{1}{3!} \frac{\delta^2}{2^2} f'''(x_0) + \dots \quad (3.21)$$

Tomando o valor de  $\delta$  suficientemente pequeno, podemos ignorar os termos que envolvem  $\delta^a$  para  $a > 1$ . Assim obtemos o resultado não surpreendentemente simples (já conhecido nas primeiras etapas do cálculo diferencial):

$$f'(x = x_0) \approx \frac{f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right)}{\delta} \quad (3.22)$$



Admitida tal aproximação, podemos implementar o algoritmo sugerido por Kane Yee em 1966. Em resumo, estas são as etapas (SADIKU, 2018; TAFLOVE; HAGNESS; PIKET-MAY, 2005):

1. Substituir as derivadas por diferenças finitas, discretizando espaço e tempo (desta forma, é possível esquematizar os campos elétrico e magnético intercalados no espaço e no tempo)
2. Reescrever as diferenças como atualização de equações (os campos anteriores são a base para os campos futuros)
3. Calcular o campo magnético apenas uma etapa em todo o espaço computacional, tornando o campo magnético conhecido uma etapa no futuro.
4. Calcular o campo elétrico apenas uma etapa em todo o espaço computacional, tornando o campo elétrico conhecido uma etapa no futuro.
5. Calcular os campos elétrico e magnético, de acordo com as duas etapas anteriores, até o final do tempo de simulação.

Para discretização do espaço, em nossas simulações, consideramos os pontos onde calculamos o campo elétrico à esquerda dos pontos onde calculamos o campo magnético. Com as duas primeiras etapas, podemos chegar às equações dos campos abaixo (NAGEL, 2014; HAO; MITTRA, 2008).

$$E_z^{n+1}[x] = E_z^n[x] + \frac{\Delta t}{\epsilon \Delta x} \left( H_y^{n+\frac{1}{2}} \left[ x + \frac{1}{2} \right] - H_y^{n+\frac{1}{2}} \left[ x - \frac{1}{2} \right] \right) \quad (3.23)$$

$$H_y^{n+\frac{1}{2}} \left[ x + \frac{1}{2} \right] = H_y^{n-\frac{1}{2}} \left[ x + \frac{1}{2} \right] + \frac{\Delta t}{\epsilon \Delta x} (E_z^n[x+1] - E_z^n[x]) \quad (3.24)$$

Podemos usar as relações acima para observar a propagação da onda eletromagnética no interior do material. Os índices utilizados em 3.23 e 3.24 se referem ao tempo discretizado (índice  $n$ ) e à posição espacial discretizada (índice  $x$ ).

Note que estamos lidando com um caso unidimensional, onde a propagação da radiação está na direção do eixo  $X$ . Seguindo o mesmo padrão mostrado na Figura ??, O campo elétrico está na direção do eixo  $Z$  e o campo magnético está na direção do eixo  $Y$ , ambos perpendiculares à direção de propagação, como já esperado. No Apêndice C, detalhamos o código utilizado nas simulações.

Como função de comparação, vamos considerar uma onda eletromagnética propagando em um meio isotrópico. As direções do campo magnético, do campo elétrico e da propagação

são as mesmas indicadas no parágrafo anterior, sem perda de generalidade (assim preservamos as relações indicadas em 3.23 e 3.24).

Como o material é isotrópico e constante no tempo, a onda deve se propaga de forma suave. A Figura 15 mostra alguns quadros de uma simulação da propagação que tratamos aqui. Cada quadro mostra a propagação no interior do material para um determinado instante, com as setas indicando a direção da propagação. As coordenadas horizontais nos fornecem a posição em nosso espaço unidimensional, enquanto as coordenadas verticais mostram a amplitude da onda. A fonte é colocada na posição horizontal 50, como vista em **a**. Nas demais imagens, a propagação ocorre como esperado, suavemente.

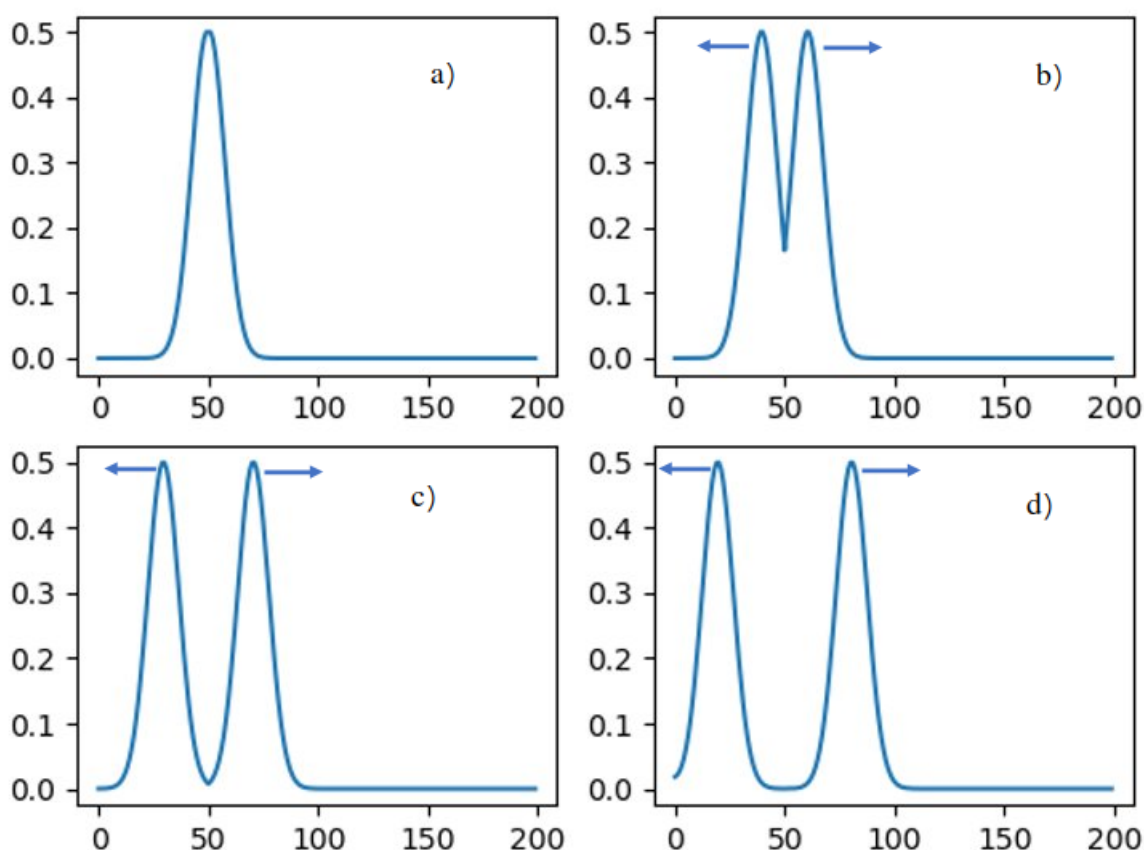


Figura 15 – Simulação computacional da propagação em uma dimensão de onda eletromagnética em um material com características ópticas constantes, tanto no espaço como no tempo. No eixo horizontal, temos a posição em nosso espaço unidimensional. O eixo vertical indica a amplitude. A onda é excitada no ponto 50 do eixo X. Como esperado, a propagação ocorre suavemente, pois não há mudança para alterar as características dos campos envolvidos. Ou seja, a interação do material com a onda propagante não se altera durante a propagação da onda. Fonte: autor, 2021.

As relações e as adaptações que vimos até este ponto são úteis para lidar apenas com mudanças espaciais. As mudanças temporais, onde os materiais alteram suas características em dado instante de tempo, requerem alguns ajustes. Vamos revisá-los brevemente. Nas equações de Maxwell, a mudança temporal com a qual lidamos está nas funções de permissividade e permeabilidade. Se tivermos uma simulação unidimensional, como acima, é preciso incluir ou alterar algum termo que possa refletir tal mudança. No caso presente, basta adicionar os termos da constante dielétrica (permissividade elétrica) à equação de atualização dos campos, as equações 3.23 e 3.24.

Por uma questão de simplicidade, vamos lidar com materiais não magnéticos. Portanto, nossa única preocupação é com a variação da constante dielétrica do meio. Portanto, a alteração será apenas na relação 3.23. A mudança tem o objetivo de acompanhar esse avanço no tempo, na linha de código que trata do campo elétrico. Seguindo os mesmos passos para alcançar a relação 3.23, porém considerando a dependência temporal da permissividade elétrica, chegamos a

$$E_z^{n+1}[x] = E_z^n[x] \frac{Eps_x^{n-1}}{Eps_x^n} + \frac{\Delta t}{\epsilon \Delta x} \left( H_y^{n+\frac{1}{2}} \left[ x + \frac{1}{2} \right] - H_y^{n+\frac{1}{2}} \left[ x - \frac{1}{2} \right] \right) Eps^n. \quad (3.25)$$

Em 3.25, a variável  $Eps$  é responsável por ditar o valor da permissividade elétrica em cada instante de tempo.

Nas Figuras 16 a 19, vemos algumas imagens de uma outra simulação computacional, porém com uma pequena alteração em relação à anterior. Neste caso, a constante dielétrica do meio sofre uma alteração abrupta em um instante de tempo da propagação. A excitação foi imposta no início de nosso espaço unidimensional, pois queremos que toda a energia propague em uma única direção para melhor visualização dos fenômenos. Segundo o exposto anteriormente, esperamos mudanças na propagação da onda eletromagnética como uma consequência dessa interface temporal na propagação da onda.

As figuras 16 e 17 mostram uma propagação suave do campo elétrico, similar ao que encontramos na simulação anterior. Isto ocorre porque não há variação no material onde a onda se propaga. Nos tempos iniciais da simulação, o material se mantém constante em suas características ópticas.

Mas o que acontece quando a constante dielétrica altera seu valor? No trecho inicial, tínhamos  $\epsilon = 1$ . Vejamos o que ocorre quando a constante dielétrica do material é alterada repentinamente para  $\epsilon = 9$ .

A figura 18 mostra o campo elétrico instantes após a interface temporal  $t = t_0$ . Após a mudança no valor da constante dielétrica do material, temos uma onda propagante na mesma direção da onda original (que chamamos de onda transmitida) e outra onda no sentido oposto (que chamamos de refletida)8,

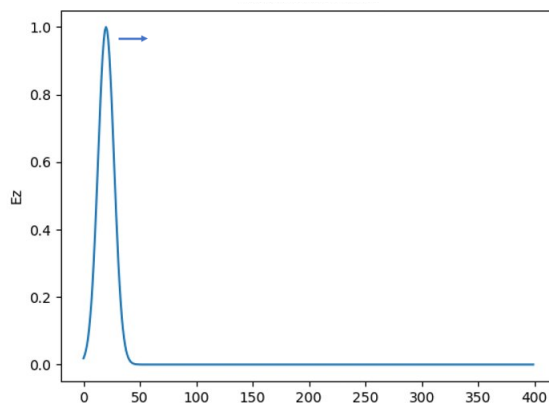


Figura 16 – Simulação computacional da propagação em uma dimensão de onda eletromagnética em um material com características ópticas com uma mudança abrupta em um instante  $t$ . A onda é excitada Na extremidade esquerda do eixo X. Neste trecho inicial da simulação, não há alteração nas características ópticas do material. Fonte: autor, 2021.

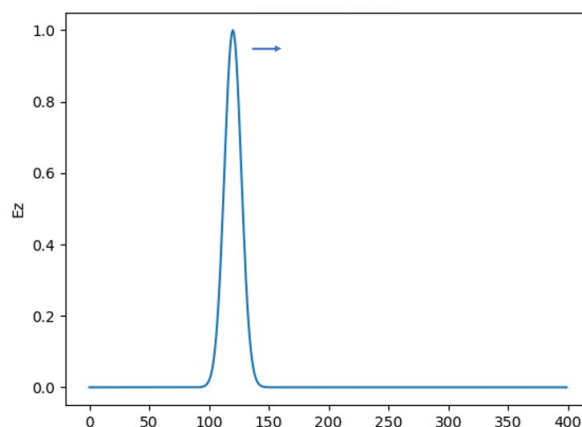


Figura 17 – Após alguns passos da simulação, a onda continua sua propagação de forma suave. Não há alteração das características ópticas do meio. Fonte: autor, 2021.

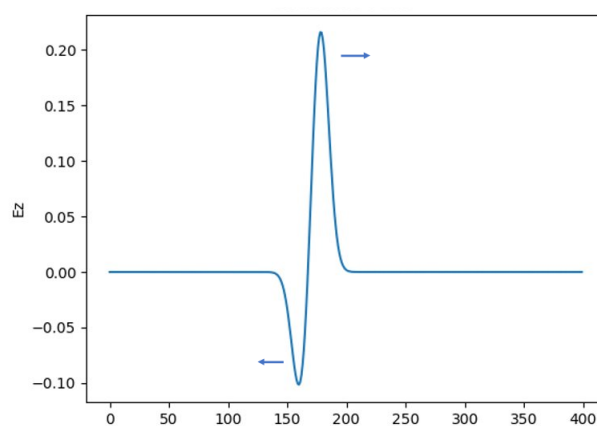


Figura 18 – Instantes após a alteração repentina na constante dielétrica do material, passamos a ter uma onda refletida espacialmente a se propagar no interior do material. A onda propagante original, após a interação com o material ativo em sua mudança temporal, nos fornece duas outras ondas propagantes: uma transmitida na mesmo sentido da original e outra refletida no sentido oposto. Fonte: autor, 2021.

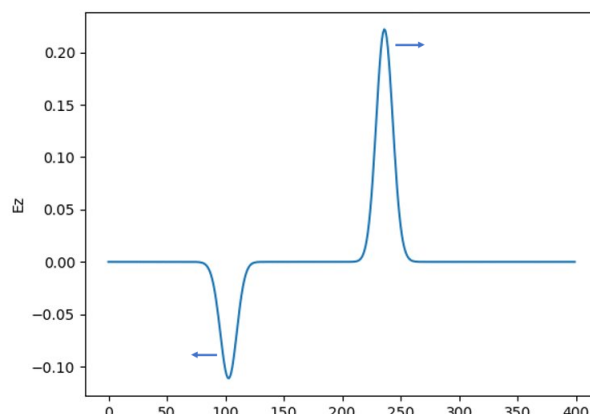


Figura 19 – Não havendo alteração nas características ópticas do material, as ondas continuam a propagar de maneira suave. Fonte: autor, 2021.

Diferente do caso espacial, a mudança na constante dielétrica não é espontânea e a energia geradora de tal mudança interfere nas ondas propagantes. Ou seja, há uma interação entre o material ativo e a onda propagante.

Se a propagação continua e o material não sofre alteração, as ondas transmitida e refletida não sofrem mais alteração. continuam a propagar suavemente. É o que vemos na figura 19. A figura mostra a mesma simulação, alguns instantes depois. Claramente não há alteração nas ondas propagantes, como já esperado.

Nesta seção, nós abordamos um importante fenômeno vinculado à mudança, no tempo, de uma característica de materiais: sua constante dielétrica, a permissividade elétrica. Uma onda eletromagnética propagando em um material que sofre mudança repentina no valor de sua permissividade dielétrica sofre, entre outras consequências, o surgimento de uma onda refletida espacialmente. Na verdade, se tomarmos o tempo como uma coordenada (similar ao que fazemos com o espaço) temos um contorno, uma interface, no tempo. Ao atingir tal interface, a onda original (incidente) dá origem a duas outras (a transmitida e a refletida).

Abordamos o caso de uma única variação temporal na permissividade elétrica de um material qualquer. Porém, e se tal mudança ocorrer diversas vezes? Na seção seguinte discutimos o caso para variações periódicas no valor da constante dielétrica, dando origem aos chamados cristais fotônicos temporais.

### 3.2 Periodicidade no tempo

No capítulo anterior, introduzimos a ideia de periodicidade no espaço das características ópticas de materiais e chegamos aos cristais fotônicos (espaciais). Na seção anterior deste capítulo, introduzimos na seção anterior o fenômeno de mudanças temporais nas propriedades ópticas. Nesta seção tratamos da propagação de radiação eletromagnética em meios onde a constante dielétrica do material, sua permissividade elétrica, sofre mudanças periódicas no tempo.

Como visto na seção anterior, uma mudança súbita no tempo na permissividade elétrica de um material tem como um dos resultados o surgimento de uma onda refletida. É algo similar ao que ocorre quando uma onda eletromagnética encontra uma mudança súbita no espaço. No capítulo anterior, vimos que mudanças espaciais periódicas no valor da permissividade elétrica impõe restrições na propagação de ondas eletromagnéticas nesse material. Chegamos então ao conceito de cristais fotônicos. Se a mudança na constante dielétrica do material ocorrer no tempo, ao invés do espaço, usamos o termos cristais fotônicos temporais.

Por simplificação, vamos assumir um material não linear e não magnético nesta seção. Assim, podemos utilizar as relações

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \quad (3.26)$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon(t) \vec{E}. \quad (3.27)$$

Lembrando que na relação acima, a constante dielétrica muda seu valor periodicamente no tempo, ou seja,  $\epsilon(t + T) = \epsilon(t)$ . Sem cargas livres e densidade de corrente, temos as equações de Maxwell

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 0, \quad (3.28a)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0, \quad (3.28b)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (3.28c)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial}{\partial t} [\epsilon_0 \epsilon(t) \vec{E}]. \quad (3.28d)$$

A partir de 3.28 é possível mostrar que o campo  $\vec{E}$  obedece à equação da onda

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\epsilon(t) \vec{E}] = 0, \quad (3.29)$$

onde  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ . Vamos usar soluções de onda plana, propagando na direção  $Z$  e polarizadas na direção  $X$ . Desta forma temos  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{e}_x E(t) e^{ikz}$ . Podemos reescrever a relação 3.29 como

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}[\epsilon(t)E(t)] + k^2 c^2 E(t) = 0. \quad (3.30)$$

O material que estamos considerando tem a característica  $\epsilon(t + T) = \epsilon(t)$ , o que nos permite utilizar o teorema de Floquet:

$$E(t) = u_{n,\Omega}(t)e^{-i\Omega t}, \quad (3.31)$$

onde  $u_{n,\Omega}(t + T) = u_{n,\Omega}(t)$ . Similar ao caso espacial descrito no capítulo sobre cristais fotônicos espaciais, a função  $u$  é periódica. Porém, no caso presente, sua periodicidade se dá no tempo. Também o índice  $n$  aqui serve para identificar bandas, enquanto a frequência  $\Omega$  pode ter seu estudo restrito ao intervalo  $-\pi/T \leq \Omega \leq \pi/T$ .

Se nós seguirmos os mesmos passos que tivemos anteriormente para o caso de cristais fotônicos espaciais, impondo condições de continuidade similares (neste caso, no domínio do tempo), alcançamos a seguinte relação de dispersão:

$$\cos(\Omega T) = \cos(\omega_1 t_1) \cos(\omega_2 t_2) - (1/2) \left( \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} + \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \right) \sin(\omega_1 t_1) \sin(\omega_2 t_2). \quad (3.32)$$

A equação 3.32 nos fornece a dependência, em função da frequência  $\Omega$ , de um número de onda  $k$  de um onda eletromagnética propagante no interior do cristal fotônico temporal.

Consideremos o exemplo de um material onde a constante dielétrica  $\epsilon$  varia no tempo periodicamente - o valor de  $\epsilon$  varia alternadamente entre dois intervalos de tempo, sendo  $\epsilon_1 = 6$  para  $t_1$  e  $\epsilon_2 = 1$  para  $t_2 = T - t_1$ . Em cada intervalo específico de tempo o valor de  $\epsilon$  permanece constante. A Figura 20 mostra a relação entre o número de onda  $k$  e a frequência vinculada com sua propagação no material ativo já indicado para o caso com  $t_1 = t_2$ .

É nítido que nem todos os valores de  $k$  possuem uma frequência. Isto é, há intervalos para os vetores de onda em que não há propagação permitida. Nesses *band gaps*, novamente se uma onda eletromagnética tiver um vetor de onda  $k$  que pertença a esse intervalo, ela não poderá propagar no interior do material. Na Figura 21 o contraste entre as permissividades elétricas é menor. Desta forma, vemos uma diminuição nos *band gaps*.

O que ocorre se, durante a propagação de uma onda eletromagnética, o material entra em uma variação periódica de  $\epsilon$ , como descrito aqui? similar ao caso de mudanças espaciais, diversos fenômenos podem ocorrer.

Por exemplo, suponha um pulso descrito por ondas planas, como visto nesta seção, com vetores de onda  $k$  que estejam dentro de um gap. As frequências fornecidas pela relação

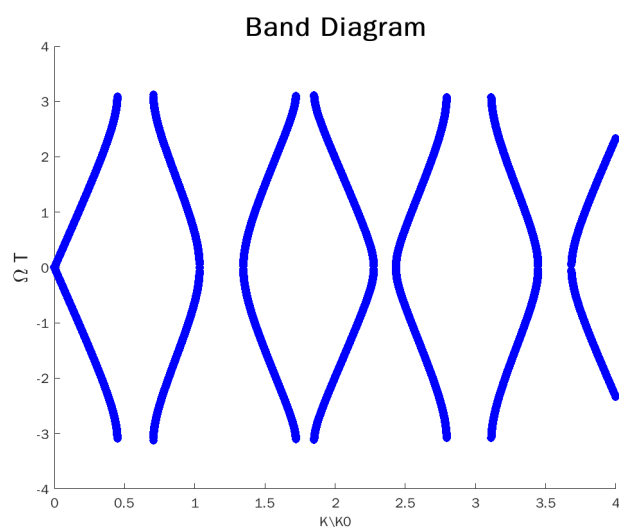


Figura 20 – Frequências proibidas na propagação de radiação eletromagnética para o material com variação periódica de sua permissividades elétricas com valores  $\epsilon_1 = 6$  e  $\epsilon_2 = 1$ . Radiação eletromagnética com frequência dentro dos intervalos indicados não conseguem propagar enquanto o cristal fotônico temporal estiver ativo. Fonte: autor, 2021.

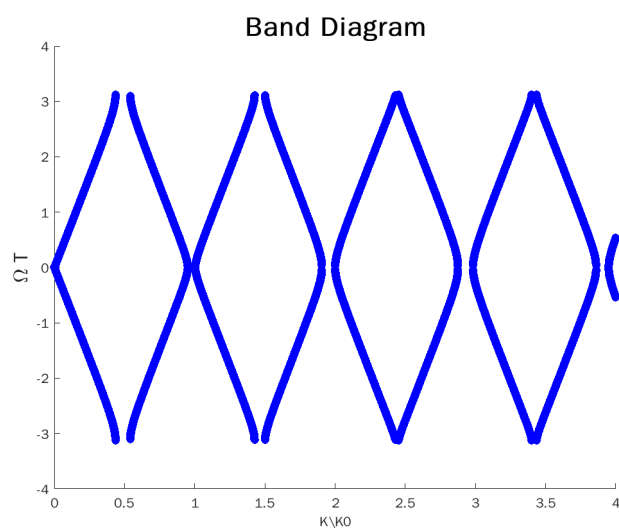
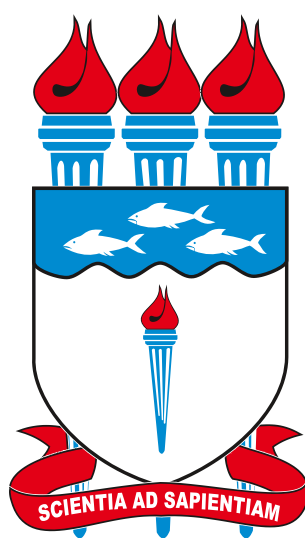


Figura 21 – As permissividades elétricas com valores  $\epsilon_1 = 2$  e  $\epsilon_2 = 1$ . possuem um contraste menor. Em consequência, vemos um menor número de gaps nos vetores de onda. Fonte: autor, 2021.



3.32 tem valores complexos - não são reais. Em outras palavras, isto gera um crescimento exponencial da radiação eletromagnética no interior do material. Neste caso, durante a variação do valor da constante dielétrica há transmissão e reflexão (visto na seção anterior) além de um crescimento exponencial em virtude do gap, Agora suponha também que, após determinado período, a variação temporal cessa. Ou seja, o material deixa de se comportar como um cristal fotônico temporal e volta a se comportar como um material ordinário. Quando o cristal fotônico temporal cessa, dois pulsos se propagam no material, em direções opostas e com intensidades muito maiores do que o pulso inicial.



## 4 ÓPTICA E SIMETRIA PT

### 4.1 Contexto histórico

Na passagem do século 19 para o século 20, havia uma sensação de sucesso em diversas áreas do conhecimento humano. Na física, os problemas mais fundamentais aparentavam já estar compreendidos. Nesse período, o problema do corpo negro estava em debate. Corpo negro é um objeto que absorve totalmente a radiação eletromagnética que incide sobre ele. Ou seja, não há reflexão. A energia que emite, em qualquer comprimento de onda, é dependente da temperatura (este capítulo supõe que o leitor possua um conhecimento elementar sobre sistemas lineares utilizados em mecânica quântica; se for necessário, o leitor pode consultar extensa literatura sobre o assunto - como exemplo, sugerimos as referências (BRONSON; SACCOMAN; COSTA, 2013; STRANG, 2019; LÖWDIN, 1998)).

Uma primeira tentativa largamente aceita para descrição da energia emitida pelo corpo negro foi feita por Wien em 1896 (incluir citação). Sua aceitação foi ampla porque estava de acordo com dados experimentais da época. Porém, Wien incluiu dois parâmetros livres. Sendo uma relação experimental e não teórica, foi modificada algum tempo depois por Max Planck. Essa nova adaptação não concordava com os dados experimentais e foi abandonada em seguida.

Planck continuou sua investigação para fenômenos com baixas frequências. Como resultado, em 1901 ele publicou um artigo contendo a função abaixo (PLANCK, 1901):

$$I(\nu, T) = \frac{1h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kt}} - 1}. \quad (4.1)$$

Embora esta relação não seja utilizada aqui por nós, decidimos incluí-la por este fato altamente relevante: é a primeira vez onde a energia é tratada como *discreta*, *quantizada*. Tal tratamento não tem paralelo na física clássica. Curiosamente, nesse artigo Planck trata este fato como meramente matemático = o objetivo seria corresponder aos valores experimentais conhecidos. Onde, de fato, teve grande sucesso.

Em 1905, Einstein sugere que a quantização não seria apenas uma ferramenta matemática útil. Em seu artigo sobre o efeito fotoelétrico, Einstein indica que a quantização pode ser aplicada à luz (RIGDEN, 2005). A luz existiria em pacotes os quanta de luz, chamados de fótons. Essa abordagem foi tão bem sucedida que rendeu a ele o prêmio Nobel no ano de 1921. É preciso notar que essa visão da luz quantizada ía de encontro a outra secularmente estabelecida: que a luz seria uma onda contínua, não localizada. A partir de então, a luz poderia ser tratada como uma partícula.

A partir daí, a utilização das ideias plantadas por Planck e Einstein foram cada vez

mais amplificadas. Em 1913, Neils Bohr publica um trabalho revolucionário sobre o átomo de hidrogênio. Bohr afirmou que o elétron tinha regiões discretas ao redor do núcleo atômico onde era possível encontrá-los, os orbitais (BOHR, 1913). Para levar o elétron de um orbital para outro de maior energia, era necessário uma quantidade específica de luz. Em 1924, Louis DeBroglie propõe que as partículas podem ser um tipo comprimento de onda, um tipo de onda de matéria. Isto ficou conhecido como dualidade onda-partícula.

O ano de 1935 testemunhou a publicação de duas formas diferentes para uma teoria quântica. Erwin Schrödinger publicou sua versão de uma mecânica quântica ondulatória (SCHRÖDINGER, 1935). Nessa versão, os estados dos sistemas estão relacionados com as chamadas *funções de onda*. Tais funções de onda obedecem a famosa Equação de Schrödinger (uma equação diferencial de segunda ordem). Por sua vez, Werner Heisenberg propôs uma mecânica matricial (HEISENBERG, 1935). Nessa versão, os sistemas quânticos são descritos por matrizes. Como os sistemas obedecem a álgebra linear das matrizes, surge a quantização entre os estados dos sistemas. Tais estados são descritos como autovalores e autovetores. Por fim, as duas versões são equivalentes.

Em 1959, Wu analisou um problema derivado do cálculo da energia do estado fundamental das 'esferas de Bose' (WU, 1959). O problema em questão: as energias eram 'divergentes'. O artigo indica que esse é um problema comum, mas também mostra a abordagem encontrada por Wu para lidar com ele. Wu usou um hamiltoniano não-diagonalizável. Mesmo usando esse tipo de hamiltoniano, as energias encontradas possuíam valores reais. Qual a justificativa para o uso do hamiltoniano específico? O artigo não indica. Apenas mostra que o resultado é dado por energias reais.

Em 1967, um artigo publicado por Wong argumenta que sistemas fechados possuem hamiltonianos hermitianos, mas ao interagir com o ambiente externo eles perdem a hermiticidade. É essa classe que o autor chama de "fisicamente razoáveis", embora não explique o porquê (WONG, 1967). Tais tipos de hamiltonianos seriam do tipo

$$H = H_0 + gH. \quad (4.2)$$

Na equação acima,  $H_0$  é hermitiano enquanto  $H$  não é. O termo  $g$  é um parâmetro para indicar a influência do hamiltoniano não-hermitiano.

Alguns anos depois, em 1975, Haydock e Kelly publicaram um artigo com título "Electronic structure from non-hermitian representations of the Hamiltonian" (HAYDOCK; KELLY, 1975). Os autores usaram um "método de recursão" e hamiltonianos não-hermitianos para encontrar a estrutura eletrônica do Arsênico cristalino. Este artigo diz explicitamente que a hermiticidade era condição suficiente para as energias serem reais, mas não era necessária.

Em 1980, o termo "operador reversão temporal" foi utilizado em um artigo intitulado "Time reversal symmetry in applications of point group theory" (STEDMAN; BUTLER, 1980). Os autores usaram o termo ligado à conjugação complexa.

Abordagens utilizando hamiltonianos não-hermitianos são encontrados na literatura nos exemplos citados e em mais alguns poucos até 1998. Podemos perceber que a utilização de tais hamiltonianos foi realizado com base na observação. Era preciso 'alinhar' a teoria com os dados que haviam disponíveis. Mas como justificar a utilização, por exemplo, de energias com valores complexos? Foi necessário esperar até 1998 para termos uma abordagem utilizando hamiltonianos não-hermitianos com uma base analítica aceitável.

Para uma utilização aceitável de hamiltonianos não-hermitianos, alguns pontos devem ser cumpridos, como: as energias serem reais, não complexas (uma medição experimental de energia sempre deve dar um valor real); e a evolução temporal deve ser unitária, evitando uma 'perda de probabilidade' (a probabilidade deve ser preservada no tempo, como indicado em (BENDER; BRODY; JONES, 2003)). Como já indicado, em 1998 Bender e Boettche publicaram um artigo onde introduzem a ideia de mecânica quântica utilizando hamiltonianos não-hermitianos. Nesse artigo, há o seguinte hamiltoniano não-hermitiano:

$$H = p^2 + x^2 + ix^3, \quad (4.3)$$

onde  $p$  é o momento e  $x$  a coordenada de posição. Este é um dos hamiltonianos não-hermitianos que teriam espectro real de energia. É não-hermitiano mas possui simetria  $PT$ .

O termo *simetria  $PT$*  vem da invariância que os hamiltonianos teriam sob as simultâneas transformações de paridade e de inversão temporal. A operação paridade,  $\mathcal{P}$ , gera reflexões espaciais:

$$x \rightarrow -x, \quad (4.4)$$

$$p \rightarrow -p. \quad (4.5)$$

Já a operação reversão temporal gera:

$$x \rightarrow x, \quad (4.6)$$

$$p \rightarrow -p. \quad (4.7)$$

$$i \rightarrow -i. \quad (4.8)$$

A partir das relações acima, é aparente que

$$\mathcal{P}^2 = I, \quad (4.9)$$

$$\mathcal{T}^2 = I. \quad (4.10)$$

Note que (4.3) não é invariante nem sob  $\mathcal{P}$  nem sob  $\mathcal{T}$ , de forma isolada. Mas sob essas duas operações combinadas, (4.3) é invariante.

Agora note o seguinte hamiltoniano, encontrado no artigo de 1998 de Bender e Boettcher ((BENDER; BOETTCHER, 1998)):

$$H = p^2 + m^2 x^2 - (ix)^N, \quad (4.11)$$

onde  $N$  é um número real e  $m$  é a massa. Temos uma classe de hamiltonianos onde, como visto em ((BENDER; BOETTCHER, 1998)), existem valores críticos para  $N$ . Nesses valores, a simetria PT pode 'quebrar'. Os valores das energias deixam de ser reais e passam a ser complexos. Usando métodos numéricos, é mostrado que o hamiltoniano  $H$  tem três comportamentos distintos, dependentes de  $N$ . Para  $N \geq 2$ , o espectro de energia é infinito, discreto, real e positivo. Para  $N = 2$ , temos o caso do oscilador harmônico. Para  $1 < N < 2$ , existe um número finito de valores positivos reais e um número infinito de pares complexos.

Que um hamiltoniano PT simétrico pode ter um espectro de energias reais segue do hamiltoniano comutar com o operador  $\mathcal{PT}$ . Pois, tomando um hamiltoniano  $H$ , se ele comuta com  $\mathcal{PT}$ , temos:

$$\mathcal{P}TH = H\mathcal{P}T. \quad (4.12)$$

Multiplicando à direita por  $\mathcal{TP}$ , temos:

$$\mathcal{P}\mathcal{T}H\mathcal{T}\mathcal{P} = H\mathcal{P}\mathcal{T}\mathcal{T}\mathcal{P} = H. \quad (4.13)$$

Agora tome a equação de Schrödinger independente do tempo:

$$H |\Psi\rangle_n = E_n |\Psi\rangle_n. \quad (4.14)$$

Aplicando PT:

$$\mathcal{P}\mathcal{T}H\mathcal{T}\mathcal{P} |\Psi\rangle_n = \mathcal{P}\mathcal{T}E_n\mathcal{T}\mathcal{P} |\Psi\rangle_n, \quad (4.15)$$

que nos fornece

$$\mathcal{P}\mathcal{T}H\mathcal{T}\mathcal{P} |\Psi\rangle_n = E_n^* |\Psi\rangle_n. \quad (4.16)$$

Usando (4.13),

$$H |\Psi\rangle_n = E_n^* |\Psi\rangle_n. \quad (4.17)$$

De (4.14) e (4.17), concluímos que

$$E_n = E_n^*. \quad (4.18)$$

Ou seja, os valores de  $E_n$  são reais.

Em 1999, no artigo "PT - Symmetric Quantum Mechanics", Bender explorou outras classes de hamiltonianos com simetria PT (BENDER; BOETTCHER; MEISINGER, 1999). Todas as classes exploradas possuíam um parâmetro real,  $\epsilon$ . Por variar esse parâmetro, Bender estudou transições de fase. A primeira configuração foi

$$H = p^2 + x^2(ix)^\epsilon \quad (4.19)$$

Este modelo tem uma importância histórica em simetria PT, pois foi com ele que a simetria PT foi introduzida por Bender (BENDER; BOETTCHER, 1998). Neste artigo, ele volta a explorar o modelo em detalhes. Neste caso, para  $\epsilon \geq 0$ , o sistema está na fase 'não quebrada' da simetria PT (unbroken PT symmetry), onde o espectro de energia é real, discreto e positivo. Para  $\epsilon < 0$ , surgem valores complexos para as energias. A quantidade de valores complexos cresce conforme o valor de  $\epsilon$  cresce. Assim, é dito que a simetria PT é 'quebrada' (broken PT-symmetry), onde alguns valores da energia são reais enquanto o restante são pares de complexos conjugados.

## 4.2 Sistemas ópticos com simetria PT

A busca por novos materiais ópticos artificiais, com características úteis para a indústria em seus abrangentes aspectos, é uma das incentivadoras à contínua pesquisa em fotônica. São muitos os exemplos encontrados nessa busca. Além dos já citados cristais fotônicos e materiais plasmônicos temos metamateriais de diversos tipos. A literatura também traz diversos exemplos de sistemas fotônicos utilizando os conceitos de simetria PT.

Em fotônica, sistemas utilizando simetria PT já mostraram seu potencial. Por exemplo, fenômenos como difração anômala e invisibilidade unidirecional podem ser alcançados em sistemas fotônicos PT simétricos (LONGHI; VALLE, 2017). Podemos ver a conexão explícita entre simetria PT e sistemas fotônicos de forma natural ao observar a conhecida *aproximação paraxial* (EL-GANAINY et al., 2007). Na aproximação paraxial, a onda eletromagnética obedece uma equação de propagação com fatores semelhantes à equação de Schrödinger. A diferença está no significado de cada termo quando observado o caso quântico e o caso eletromagnético. O índice de refração está na posição do potencial do caso quântico. É o índice de refração, complexo, com sua parte imaginária correspondendo ao ganho e perda de energia, que permite explorar a simetria PT. No caso óptico, o índice de refração pode ter valores imaginários e ainda assim ter propagação com valores reais. A perda de energia sempre está ligada a sistemas fotônicos, aparecendo com valores imaginários (como já mencionado no capítulo anterior). Mas quando combinado com ganho de energia, em um sistema PT simétrico, pode ser explorado um novo campo para a busca de materiais.

### 4.2.1 Aproximação paraxial

As equações de Maxwell descrevem com sucesso os fenômenos eletromagnéticos que conhecemos. A concordância entre a teoria e os dados experimentais são extremamente altos. Quando estudamos um material do ponto de vista clássico e macroscópico, as equações de Maxwell podem ser escritas como

$$\nabla \cdot D = \rho, \quad (4.20)$$

$$\nabla \cdot B = 0, \quad (4.21)$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad (4.22)$$

$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t}, \quad (4.23)$$

onde  $J$  é a densidade de corrente,  $\rho$  é a densidade volumétrica de carga,  $E$  é o campo elétrico,  $D$  é o deslocamento elétrico,  $H$  é o campo magnético e  $B$  é a indução magnética. No estudo dos mais diversos materiais, é rara a situação de possuímos uma solução analítica exata. Mas fazendo uma simplificação (ou aproximação) com o devido esmero, é possível analisar matematicamente uma grande gama de materiais. Como exemplos bem conhecidos, temos a teoria dos circuitos elétricos, a óptica geométrica e a óptica física escalar (GOODMAN, 2017).

É claro que o leitor mais atento e que busque tais aproximações na literatura pode questionar de forma relevante: qual a vantagem de utilizar aproximações? Afinal, as aproximações nos fornecem novas equações diferenciais que ainda possuem derivadas parciais. No caso específico da aproximação paraxial, objeto desta seção, alguns termos são removidos, pois há uma variação muito rápida em relação a determinado eixo - levando as derivadas de segunda ordem relativas a esse eixo a serem desprezíveis. A equação de onda original possui derivadas de segunda ordem em todas as direções (ou coordenadas), enquanto a aproximação paraxial no entrega derivadas de primeira ordem em algumas variáveis.

O termo *paraxial* vem do termo grego *axis* (eixo). No contexto tratado nesta tese, refere-se à propagação de ondas com direção de propagação formando um ângulo extremamente pequeno em relação a algum eixo; ou seja, a propagação é quase paralela a algum eixo de referência. A figura 22 ilustra o exposto.

Na figura 22, A onda  $\Phi$ , de frequência  $\omega$ , tem direção de propagação formando um ângulo  $\Theta$  com o eixo  $Z$ . A aproximação paraxial é realizada tomando  $\Theta$  próximo a zero. O índice de refração  $n$  varia predominantemente na direção  $X$ , e podemos escrever  $n(x)$ . Variações do índice  $n$  em outras direções são desprezíveis. O campo elétrico satisfaz a equação de Helmholtz,

$$\frac{\partial^2 E(x, z)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E(x, z)}{\partial x^2} + k^2 E(x, z) = 0, \quad (4.24)$$



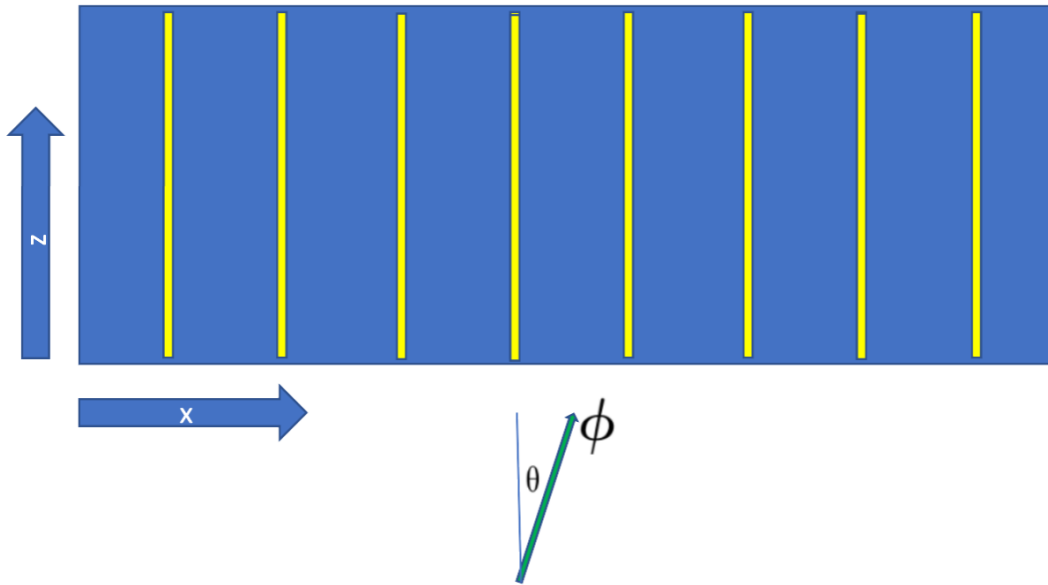


Figura 22 – Aproximação paraxial, com as ondas eletromagnéticas propagando próximo à direção paralela ao eixo  $Z$ . O material tem índice de refração variando predominantemente na direção  $X$ . Fonte: autor, 2021.

com  $k = n(x)\omega/c$ . Sendo pequena a variação de  $n(x)$  em relação a algum valor médio  $n_0$ , na forma  $n(x) = n_0[1 + \nu(x)]$ , com  $\nu \ll 1$ .

Desta forma, a onda se propaga basicamente com  $e^{ik_0z}$  ( $k_0 = n_0\omega/c$ ). Podemos escrever a componente como  $E = e^{ik_0z}\psi(x, z)$  e inserimos em (4.24), chegando a

$$\frac{\partial^2\psi(x, z)}{\partial z^2} + 2ik_0\frac{\partial\psi(x, z)}{\partial z} + \frac{\partial^2\psi(x, z)}{\partial x^2} + (k^2 - k_0^2)\psi = 0, \quad (4.25)$$

onde  $k^2 = k_0^2(n^2/n_0^2)$  e  $\psi$  é conhecida como função envelope. Aqui está o ponto central da aproximação. Negligenciamos o primeiro termo da equação, pois estamos lidando com a condição  $\partial^2\psi/\partial z^2 \ll \partial^2\psi/\partial x^2$ . Como  $\nu$  é muito pequeno, podemos fazer  $k^2 - k_0^2 = 2k_0^2\nu$ . Com essa aproximação, podemos reescrever 4.25 como

$$i\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{1}{2k}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + k\nu(x)\psi = 0. \quad (4.26)$$

A equação 4.26 tem a mesma forma da equação de Schrödinger dependente do tempo:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - V(x)\psi = 0. \quad (4.27)$$

Como já falado, seus termos tem significados diferentes. Em 4.26,  $\psi$  é a função envelope da onda eletromagnética. Ao invés do tempo, temos a coordenada longitudinal  $z$ . E o potencial  $V(x)$  da mecânica quântica é substituído pelo termo  $\nu$ , que recupera o índice de refração ( $\nu(x) = n(x)/n_0 - 1$ ). A relevância da analogia está no fato de poder utilizar, em óptica, os resultados conhecidos em mecânica quântica para sistemas PT simétricos - resguardadas as devidas interpretações. Como também já falamos anteriormente, é comum o índice de refração ter uma parte imaginária *positiva* representando a perda de energia. Lançando mão de índices de refração com parte imaginária *negativa*, é possível projetar sistemas ópticos que chamamos de sistemas ópticos PT simétricos, em analogia ao caso da mecânica quântica.

Deste modo, a simetria PT em 4.26 nos fornece a relação

$$n(x) = n^*(-x), \quad (4.28)$$

pois ao aplicarmos a reversão de espaço e a reversão temporal, combinadas, o índice de refração deve ser preservado. A partir de 4.28, também podemos confirmar que

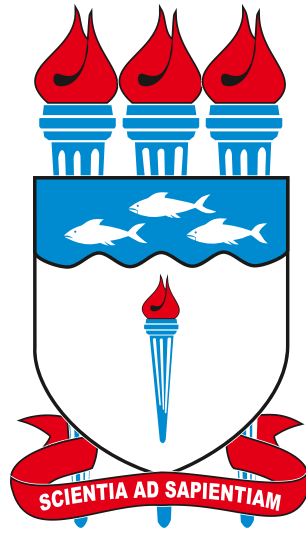
$$n(x) = n_R(x) + in_I(x), \quad (4.29)$$

onde  $n_R$  é a parte real do índice de refração e é uma função par, enquanto  $n_I$  é a parte imaginária do índice de refração sendo uma função ímpar. Um índice de refração obedecendo 4.29 preserva a relação 4.28.

Tomando um sistema fotônico cuja distribuição do índice de refração obedeça a relação 4.28 abem caminho para o que indicamos anteriormente: os fenômenos estudados em quântica podem ser estudados e projetados em fotônica. Uma consequência imediata é a utilização de índices de refração com valores imaginários tanto positivos como negativos. Em geral, o índice de refração com valor imaginário positivo está ligado à perda de energia. Isso é, obviamente, evitado de forma geral. Porém, com a configuração de simetria PT mostrada nessa seção, perda e ganho de energia podem ser como que balanceados.

Esse balanço, ou equilíbrio, entre perda e ganho de energia podem ser projetados para nos fornecer resultados interessantes e úteis no desenvolvimento de novos materiais. Por exemplo, materiais que aproveitam a simetria PT podem demonstrar a chamada refração assimétrica (SHUI et al., 2018; TIAN et al., 2018). O material mostra um padrão de refração que depende altamente do ângulo de incidência da radiação sobre o material.

São muitas as formatações possíveis para o design de materiais fotônicos com simetria PT. No próximo capítulo nos concentramos em uma dessas configurações - materiais estratificados com simetria PT.



## 5 MATERIAIS ESTRATIFICADOS E SIMETRIA PT

Sistemas fotônicos unidimensionais com simetria PT (1DPT) possuem um comportamento rico, indo além dos esperado por nossa intuição. Por exemplo, a verificação sobre qual é a transmissão/reflexão do sistema - muito comum em sistemas não ativos - já nos fornece resultados novos. Sistemas 1DPT podem ter reflexões/transmissões diferentes para cada direção considerada. Chegando, inclusive, a não ter reflexão em uma das direções (LIN et al., 2011; FENG et al., 2013).

Neste capítulo, mostramos que sistemas 1DPT obedecem certas relações de conservação. Tais relações são altamente relevantes, pois podem ser utilizadas para verificar resultados experimentais, confirmando se uma estrutura qualquer alcançou (ou não) a simetria PT.

Considere uma estrutura periódica finita formada por duas camadas que se alternam. Ambas possuem largura  $d$ . O índice de refração das camadas é  $n = n_r \pm in_i$ . Em cada camada separadamente, os valores de  $\epsilon$  e  $\mu$  são constantes - ou seja, são isotrópicos no plano  $x - y$ . A dimensão total do sistema é  $L = 2Nd$ , onde  $N$  é o número de bicamadas que se repetem na estrutura.

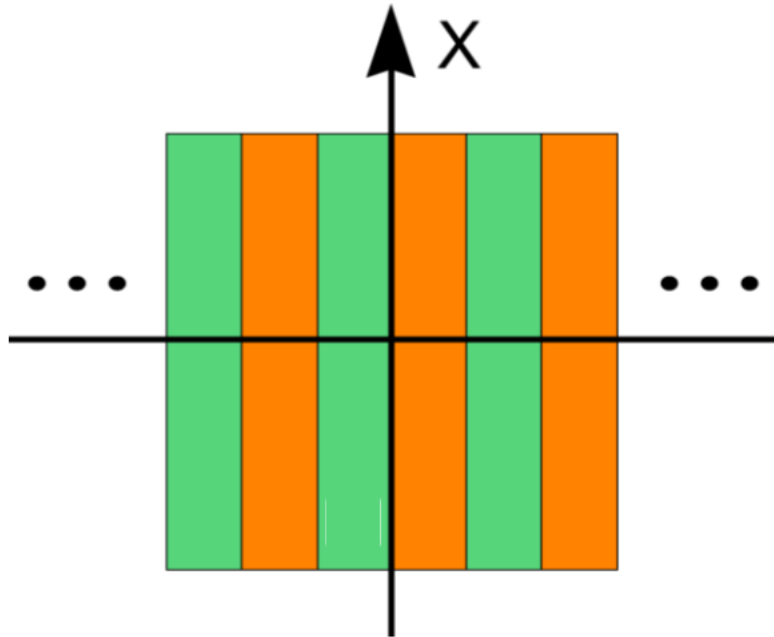


Figura 23 – Exemplo de sistema fotônico unidimensional com simetria PT - 1DPT. As camadas com ganho e perda de energia se alternam. Cada camada tem um tamanho unidimensional  $d$ , sendo cada bicamada com tamanho  $2d$ . O sistema completo tem tamanho  $L = 2Nd$ . Fonte: autor, 2021.

Da forma descrita, o sistema preserva simetria PT (por exemplo, com plano de simetria em  $z = 0$ ), sendo um tipo de sistema 1DPT (Figura 23). Como o material é isotrópico no plano  $x - y$ , a estrutura pode ser analisada utilizando ondas com polarização TE (transverso elétrico) e TM (transverso magnético). Para estudar tal estrutura, na literatura encontramos

duas abordagens usando matriz de transferência. Em uma delas, é construída uma matriz de transferência para uma bicamada, onde é construída uma matriz de transferência já levando em conta as características de balanceamento de ganho e perda de energia característico da simetria PT. A outra abordagem é mais genérica, construindo uma matriz de transferência para cada camada individual (MOSTAFAZADEH, 2013; SÁNCHEZ-SOTO; MONZÓN, 2014; ZHU; LÜ; CHEN, 2016; SHRAMKOVA; TSIRONIS, 2016). Abaixo, segue uma visão geral sobre cada uma dessas abordagens.

### 5.1 Matriz transferência para bicamadas

Conforme ilustrado na Figura 24, A, B, C e D são as amplitudes das ondas propagantes em ambas as direções e externas à estrutura. Nessas condições, uma matriz de transferência para propagação de ondas eletromagnéticas entre os dois planos nos limites externos de um sistema formado por N bicamadas pode ser definida por

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = M(\omega) \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

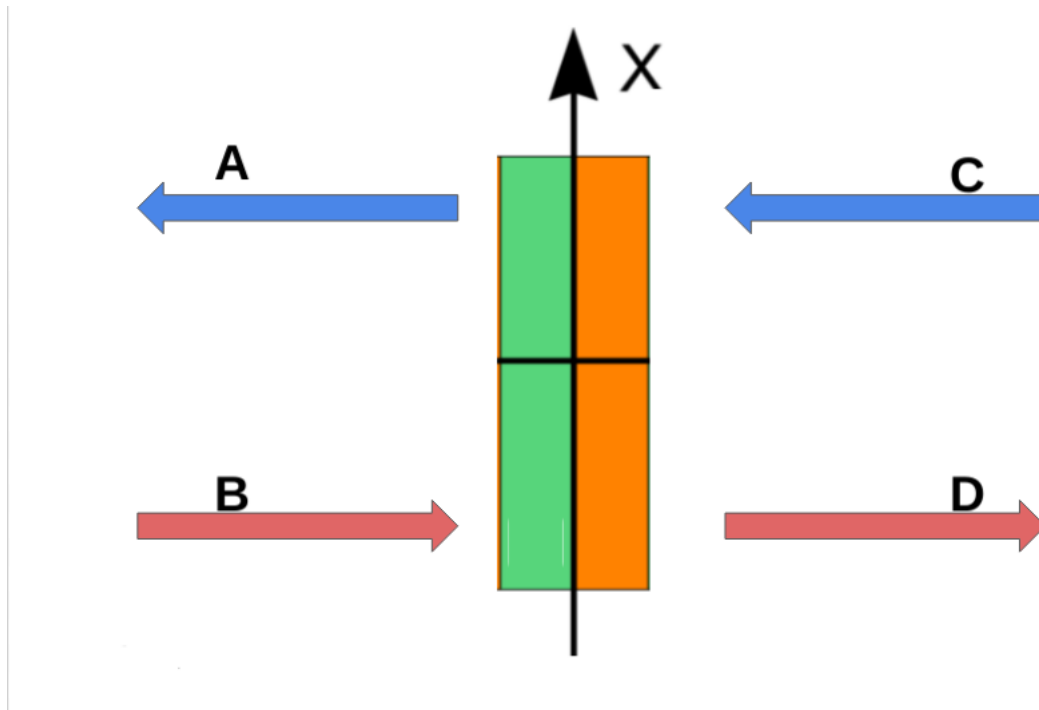


Figura 24 – Esquema do sistema unidimensional com simetria PT, indicando as amplitudes das ondas nas diversas direções de espalhamento. A figura representa uma bicamada, sendo formada pelas duas camadas com ganho e perda de energia balanceados como visto no capítulo anterior. Fonte: autor, 2021.

Na equação 5.1, a matriz  $M(\omega)$  é a matriz de transferência de todo o sistema 1DPT considerado. Para uma sistema com  $N$  bicamadas,  $M(\omega)$  pode ser expressa em termos da matriz de transferência para uma única bicamada:

$$m(\omega) = m_1(\omega)m_2(\omega). \quad (5.2)$$

Por usar o Teorema de Abeles (BENDICKSON; DOWLING; SCALORA, 1996), temos  $M(\omega) = m(\omega)^N$ , onde  $m(\omega)$  é a matriz de transferência para uma bicamada.

Para um sistema 1DPT, como temos nesta tese, os componentes da matriz  $M$  obedecem as relações

$$M_{22}(\omega) = M_{11}^*(\omega^*), M_{12(21)}(\omega) = -M_{12(21)}^*(\omega^*). \quad (5.3)$$

Tanto na equação 5.3 como nas anteriores, temos  $\omega$  representando a frequência da onda incidente. Os elementos da matriz  $M$  possuem propriedades relevantes para o estudo dos materiais. Por exemplo, estão relacionados aos coeficientes de transmissão e reflexão à direita e à esquerda do sistema estudado, como visto na referência (MOSTAFAZADEH, 2009):

$$M_{11} = t - r_L r_R / t, \quad (5.4)$$

$$M_{12} = r_R / t, \quad (5.5)$$

$$M_{21} = -r_L / t, \quad (5.6)$$

$$M_{22} = 1/t, \quad (5.7)$$

onde  $r_L$  é o coeficiente de reflexão para a onda incidente da esquerda para a direita,  $r_R$  é o coeficiente de reflexão para a onda incidente da direita para a esquerda, enquanto  $t$  é o coeficiente de transmissão (independente da direção de incidência).

Como trabalhamos com frequências reais ( $\omega \in \mathcal{R}$ ), de 5.3 implica  $M_{22} = M_{11}^*$  e  $Re[M_{12}] = Re[M_{21}] = 0$  (WU et al., 2019). Podemos então escrever a matriz  $M$  como

$$M = \begin{pmatrix} a^* & ib \\ -ic & a \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

Como devemos ter  $\det(M) = 1$  (MOSTAFAZADEH, 2014)), chegamos à relação

$$bc = |a^2| - 1, \quad (5.9)$$

evidenciando que a matriz  $M$  pode ser determinada por três parâmetros *reais*: fase e amplitude de  $a$  e o valor de  $b$ . Se  $M_{12} = 0$ , temos  $|a| = 1$  e podemos usar o valor de  $c$  como o terceiro parâmetro independente.

Para os valores de  $a$ ,  $b$  e  $c$ , podemos encontrá-los a partir das relações abaixo (GE; CHONG; STONE, 2012).

$$a = (\alpha + \alpha^*) + i(\beta + \gamma), \quad (5.10)$$

$$b = -i(\alpha - \alpha^*) + (\gamma - \beta), \quad (5.11)$$

$$c = i(\alpha - \alpha^*) + (\gamma + \beta), \quad (5.12)$$

onde temos

$$\alpha = \frac{|\cos\Delta|^2}{2} - \frac{n^*}{2n} |\sin\Delta|^2, \quad (5.13)$$

$$\beta = \frac{1}{2|n|^2} [n^2 \sin\Delta \cos\Delta^*], \quad (5.14)$$

$$\gamma = \frac{1}{2} [n \sin\Delta \cos\Delta^*], \quad (5.15)$$

para  $\Delta = nkL/2$  (caminho óptico complexo em uma camada). Perceba que  $\beta$  e  $\gamma$  são reais. Conseqüentemente,  $b$  e  $c$  também são.

Assumindo valores não nulos para  $M_{11}$  e  $M_{22}$ , a matriz espalhamento (matriz  $S$ ) é definida como

$$\begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} r_L & t \\ t & r_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

Na equação 5.16, como já estabelecido anteriormente,  $r_L$  e  $r_R$  são os coeficientes de reflexão e  $t$  é o coeficiente de transmissão (independente da direção de incidência). Com a parametrização utilizada em 5.8, a matriz  $S$  é

$$S = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} ib & 1 \\ 1 & ic \end{pmatrix}. \quad (5.17)$$

Comparando 5.17 e 5.8, temos  $r_L = \frac{ib}{a}$  e  $r_R = \frac{ic}{a}$  que não necessariamente possuem o mesmo módulo. O coeficiente de transmissão é  $t = \frac{1}{a}$ . Estas relações obedecem às relações conhecidas na literatura:

$$(PT)S(\omega^*)(PT) = S^{-1}(\omega), \quad (5.18)$$

$$TS(\omega^*) = S^{-1}(\omega), \quad (5.19)$$

onde  $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  e  $T$  é a operação de conjugação complexa.

A partir de 5.17 e 5.9, chegamos a

$$r_L r_R = t^2 \left( 1 - \frac{1}{T} \right). \quad (5.20)$$

Conseqüentemente, temos a relação de conservação

$$|T - 1| = \sqrt{R_L R_R}, \quad (5.21)$$



onde  $R_{L(R)} = |r_{L(R)}|^2$  nos dá as duas reflectâncias (à direita e à esquerda) e  $T = |t|^2$  é a transmitância.

Na próxima seção, veremos uma abordagem que nos dá mais liberdade para o design e simulação computacional para novos materiais. Porém, a abordagem vista nesta seção é bastante útil. Como já indicado, as relações aqui apresentadas podem ser utilizadas para a verificação da condição de simetria PT em um determinado material. Assim, ao usar a abordagem indicada na próxima seção, sempre é possível utilizar as relações vistas até aqui para garantir que o design do novo material alcança a simetria PT desejada. por exemplo, a relação 5.8 nos indica que os elementos da diagonal principal da matriz de transferência formada por uma bicamada com simetria PT devem formar um par conjugado; além disso, os elementos da diagonal secundária dessa mesma matriz devem ser dois números complexos imaginários puros, sem parte real.

## 5.2 Matriz transferência em camadas individuais

Nesta seção, vamos considerar uma configuração similar à seção anterior como explicitada na Figura 23. Relembrando, é uma estrutura periódica finita com duas camadas cujas características fotônicas se alternam. Ambas as camadas possuem largura  $d$  e possuem os valores de  $\epsilon$  e  $\mu$  constantes em seu interior - ou seja, no interior de cada camada o material é isotrópico.

A propagação de ondas eletromagnéticas em materiais estratificados, conforme estudamos em nosso contexto, é largamente analisada na literatura (BORN; WOLF, 2013; MACKAY; LAKHTAKIA, 2020; GERRARD; BURCH, 1994). Muitos artigos, teses e livros foram escritos descrevendo os fenômenos envolvidos. Desta forma, faremos uma revisão breve e mostraremos o vínculo com o exposto na seção anterior.

Para ondas polarizadas linearmente, é possível destacar duas disposições específicas: o modo *transverso elétrico* (TE) e o modo *transverso magnético* (TM). Para a configuração TE, temos o campo elétrico perpendicular ao plano de incidência. Para a configuração TM, temos o campo magnético perpendicular ao plano de incidência. Utilizar essas duas configurações é interessante não apenas porque podemos construir qualquer outro estado de polarização linear a partir delas. Em virtude de sua configuração, a construção das equações que relacionam as grandezas relevantes ficam bem simplificadas. Além disso, permutando simultaneamente os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$ , e também  $\epsilon$  por  $-\mu$ , as equações de Maxwell, que governam os fenômenos estudados, não são alteradas. Portanto, basta estudar um dos modos e efetuar as mudanças indicadas para alcançarmos os resultados vinculados ao outro modo, Supondo o plano de incidência sendo  $XZ$ , a Figura 25 mostra os componentes dos campos.

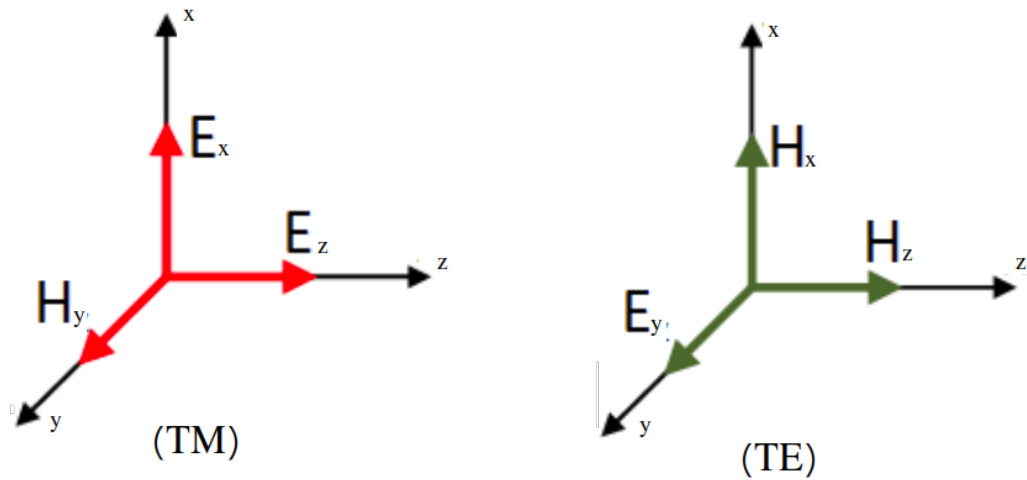


Figura 25 – Sendo  $XZ$  o plano de incidência da radiação eletromagnética, para a configuração *transverso magnético* (TM) o campo magnético é perpendicular ao plano de incidência. Para a configuração *transverso elétrico* (TE) o campo elétrico é perpendicular ao plano de incidência. Fonte: autor, 2021.

Com a configuração TE mostrada na Figura 25, as equações de Maxwell nos fornecem as seguintes relações:

$$\frac{\partial E_y(\vec{r})}{\partial x} = i\omega\mu_0\mu H_z(\vec{r}) \quad (5.22)$$

$$\frac{\partial E_y(\vec{r})}{\partial z} = -i\omega\mu_0\mu H_x(\vec{r}), \quad (5.23)$$

$$0 = i\omega\mu_0\mu H_y(\vec{r}), \quad (5.24)$$

$$\frac{\partial H_x(\vec{r})}{\partial z} - \frac{\partial H_z(\vec{r})}{\partial x} = -i\omega\epsilon_0\epsilon E_y(\vec{r}), \quad (5.25)$$

$$\frac{\partial H_x(\vec{r})}{\partial y} = 0, \quad (5.26)$$

$$\frac{\partial H_z(\vec{r})}{\partial y} = 0, \quad (5.27)$$

Para resolver o conjunto de equações acima, podemos utilizar o método da separação de variáveis. Ou seja, supomos que as funções que resolvem esse sistema são o produto de duas funções, cada uma delas referentes a uma das variáveis. Então podemos escrever

$$E_y(x, z) = E_y(z)E_y(x). \quad (5.28)$$

Para a função dependente de  $x$ , tomamos a forma  $e^{ik_x x}$  e a equação 5.28 pode ser reescrita como

$$E_y(x, z) = E_y(z)e^{ik_x x}, \quad (5.29)$$

e, como consequência, podemos escrever o campo magnético como

$$H_x(x, z) = H_x(z)e^{ik_x x}, \quad (5.30)$$

$$H_z(x, z) = H_z(z)e^{ik_x x}. \quad (5.31)$$

Com alguns passos algébricos utilizando as equações acima, desde 5.22 até 5.31 chegamos à relação

$$\frac{\partial^2 E_y(z)}{\partial z^2} + k_z^2 E_y(z) = 0, \quad (5.32)$$

$$\frac{\partial^2 H_x(z)}{\partial z^2} + k_z^2 H_x(z) = 0, \quad (5.33)$$

A solução geral da equação 5.32 e a consequente solução de 5.33 são

$$E_y(z) = Ae^{ik_z z} + Be^{-ik_z z}, \quad (5.34)$$

$$H_x(z) = -A \frac{k_z}{\omega \mu_0 \mu} e^{ik_z z} + B \frac{k_z}{\omega \mu_0 \mu} e^{-ik_z z}, \quad (5.35)$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes.

Tomando uma posição  $z' = z_0$  (relacionando a propagação na primeira camada entre  $z$  e  $z_0$ ), para as relações 5.34 e 5.35 podemos novamente executar algumas operações algébricas e eliminar as constantes  $A$  e  $B$ , chegando a

$$E_y(z) = \cos(k_z \Delta z) E_y(z_0) + iF^{-1} \text{sen}(k_z) (-c\mu_0 H_x(z_0)), \quad (5.36)$$

$$-c\mu_0 H_x(z) = iF \text{sen}(k_z \Delta z) E_y(z_0) + \cos(k_z \Delta z) (-c\mu_0 H_x(z_0)). \quad (5.37)$$

Neste ponto, podemos escrever as relações que encontramos em forma matricial. Assim fazendo, todo o ferramental já desenvolvido para análise matricial pode ser utilizada para estudar o fenômeno em questão. No caso presente, podemos escrever as seguintes matrizes:

$$\zeta(z) = \begin{pmatrix} E_y(z) \\ -c\mu_0 H_x(z) \end{pmatrix}, \quad (5.38)$$

$$M(z - z_0) = \begin{pmatrix} \cos(k_z \Delta z) & iF^{-1} \text{sen}(k_z \Delta z) \\ iF \text{sen}(k_z \Delta z) & \cos(k_z \Delta z) \end{pmatrix}. \quad (5.39)$$

a matriz  $M$  acima é o que chamamos de *matriz de transferência*, onde  $ki = k_0 \sqrt{\epsilon_i - \sin^2 \theta_{in}}$  e  $F = \sqrt{\epsilon_i - \sin^2 \theta_{in}} / \epsilon_i$  para o caso TM. O índice  $i$  indica a camada, com ou sem perda/ganho de energia. Com esta configuração matricial, as relações 5.36 e 5.37 podem ser concentradas em uma única relação com matrizes:

$$\zeta(z) = M(z - z_0) \zeta(z_0). \quad (5.40)$$

Na análise acima, é preciso perceber que a matriz  $M$  permite relacionar os campos componentes da radiação em um ponto  $z_0$  e outro ponto  $z$ . Ou seja, é possível encontrar os campos entre duas interfaces de uma determinada camada em nossa sistema, conforme explicado acima.

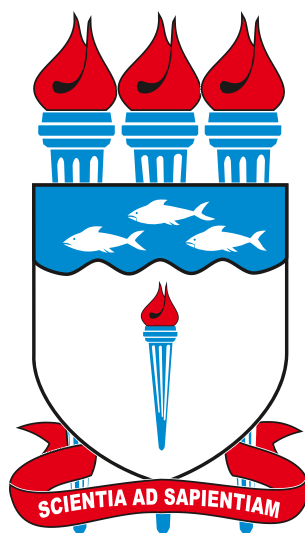
Como utilizar em um material estratificado a relação matricial vista nesta seção? Notamos que a  $i$ -ésima camada tem suas interfaces nas seguintes posições:  $z = z_{i-1}$  e  $z = z_i$ . Com o formalismo matricial anterior, temos  $\zeta(z_i) = M_i \zeta(z_{i-1})$  - onde  $M_i = M(z_i - z_{i-1})$ . Conhecendo os campos na primeira interface, podemos conhecer os campos na última interface por aplicar a matriz de transferência para todas as camadas sucessivamente. Ou seja, com os campos em ( $z = z_0$ ) podemos encontrar os campos em ( $z = z_N$ ) com

$$\zeta(z_N) = M_N M_{N-1} \dots M_2 M_1 \zeta(z_0), \quad (5.41)$$

onde a matriz de transferência total do sistema é o produto das matrizes  $M$  de cada camada:

$$M = M_N M_{N-1} \dots M_2 M_1. \quad (5.42)$$

Utilizando o método da matriz de transferência, se soubermos a amplitude da onda incidente, do ângulo de incidência e a matriz  $M$  do sistema, podemos encontrar as amplitudes da onda transmitida e da onda refletida. Como já pontuamos, a literatura é rica na análise de propagação de ondas em meios como os descritos nesta tese. Sugerimos ao leitor que, se desejar, recorra aos detalhes da técnica na literatura referenciada (BORN; WOLF, 2013; MACKAY; LAKHTAKIA, 2020; GERRARD; BURCH, 1994).



## 6 EFEITO GOOS-HÄNCHEN EM SIMETRIA PT PASSIVA

A óptica geométrica prediz que raios de luz incidindo em uma interface entre dois meios diferentes experimentam uma reflexão imediata. Porém, existe uma discrepância entre tal predição e o verificado em experimentos. Há um deslocamento lateral a partir da posição indicada pela óptica geométrica. Este fenômeno é bem conhecido e comprovado na óptica. É chamado de *efeito Goos-Hänchen* (GH) em homenagem a F. Goos e H. Hänchen que, em 1947, o observaram pela primeira vez (GOOS; HÄNCHEN, 1947).

O efeito GH já foi demonstrado em diversas configurações. Entre elas, materiais dielétricos convencionais, metais, metamateriais de diversos tipos, não linearidade, cristais fotônicos e efeitos de temperatura (ABBAS; QAMAR et al., 2013; WANG et al., 2013; WONG et al., 2018; MERANO et al., 2007; SHADRIVOV; ZHAROV; KIVSHAR, 2003; WANG; CHEN; ZHU, 2005).

Neste capítulo, vamos explorar uma estrutura com duas camadas com características eletromagnéticas diferentes. Exploramos um caso especial - a simetria PT passiva. Em sistemas com simetria PT as camadas são projetadas de modo a seguir a equação 4.28, mantendo um espécie de balanceamento entre ganho e perda de energia. No entanto, na configuração que utilizamos neste capítulo não há ganho de energia no sistema. As duas camadas possuem perda de energia, uma sendo mais intenso que a outra. A camada com menos perda faz o papel da camada com ganho de energia em sistemas PT simétricos (FAN et al., 2020; YAN; GIEBINK, 2014). Demonstramos que, mesmo nessa configuração com simetria PT passiva, temos o efeito GH de grande intensidade para os casos de metamaterial do tipo *epsilon-near-zero* ENZ. Na próxima seção, verificamos algumas características dos materiais do tipo ENZ.

### 6.1 Metamateriais 'epsilon-near-zero'

O termo *epsilon-near-zero* se refere a materiais onde a permissividade elétrica é próxima de zero. Das equações de Maxwell para regiões sem carga e sem corrente, temos

$$\nabla \times E = i\omega\mu H, \quad (6.1)$$

$$\nabla \times H = -i\omega\epsilon E. \quad (6.2)$$

Para um material ENZ, o termo  $-i\omega\epsilon$  é igual a zero, o que nos leva a  $\nabla \times H = 0$ . Inserindo na equação 6.3, temos  $\nabla \times \nabla \times E = i\omega\mu \nabla \times H = 0$ . Consequentemente,

$$\nabla^2 E = 0. \quad (6.3)$$

Referente ao índice de refração, tem relação direta com a permissividade elétrica por meio da relação  $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ . Um valor de  $\epsilon$  próximo a zero leva diretamente a um valor do índice de refração próxima de zero. Na interface entre dois meios, vale a Lei de Snell:  $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ . Se o meio com  $n_1$  é do tipo ENZ, temos  $n_2 \sin \theta_2 = 0$ . Isto nos indica que a transmissão através de um meio ENZ possui direção próxima à normal, independente do índice de refração do segundo meio.

No caso de incidência em um meio ENZ proveniente do ar, na Lei de Snell temos  $n_1 = 1$  e o ângulo crítico  $\theta_c$  é

$$\theta_c = \arcsen\left(\frac{n_2}{n_1} \sin \theta_2\right) \approx \arcsen\left(\frac{0}{1} \sin \theta_2\right) = 0. \quad (6.4)$$

O que a equação 6.4 no diz é que em um material do tipo ENZ o ângulo crítico tende a zero.

Este mesmo processo pode ser pensado referente ao comprimento de onda em materiais ENZ. A relação entre o comprimento de onda no vácuo e o comprimento de onda em um material qualquer é  $\lambda = \lambda_0 / \sqrt{\epsilon\mu}$ , onde  $\lambda_0$  é o comprimento de onda no vácuo. Porém, como em materiais ENZ temos  $\epsilon \approx 0$ , a relação passa a ser

$$\lambda = \lambda_0 / 0, \quad (6.5)$$

levando o comprimento de onda a ser infinito nesse meio.

Diante destas características peculiares dos metamateriais ENZ, passamos a estudar o design de um sistema bicamada com simetria PT com camadas formadas por material ENZ.

## 6.2 Bicamada com simetria PT passiva

A escolha em utilizar metamaterial ENZ nas camadas tem motivação na literatura. Para implementar simetria PT em um sistema qualquer, as regiões são cuidadosamente projetados para balancear o efeito de ganho e perda de energia, Porém, já sabemos que materiais ENZ com simetria PT requerem uma menor parte imaginária da permissividade elétrica (perda/ganho de energia) para observação de fenômenos ópticos relevantes. Além disso, o efeito GH já foi demonstrado em materiais ENZ sem simetria PT e com simetria PT ativa. Desta forma, verificar o efeito GH em materiais com simetria PT passiva se evidencia como uma boa extensão (MA; GAO, 2017; XU; CHAN; CHEN, 2015; CAO et al., 2019).

A Figura 26 mostra a estrutura estudada neste capítulo. O design consiste de duas camadas de dimensão idêntica,  $d$ . Em um sistema com simetria PT passiva, os materiais constituintes formam regiões com perda de energia com intensidades diferentes. Uma onda ao propagar pela região com menos perda experimenta um ganho de energia quando comparado com a região sem

perda (ZHU et al., 2016). No caso presente, ambas as camadas não tem propriedades magnéticas - ou seja,  $\mu = 1$ . As permissividades elétricas seguem a forma  $\epsilon = \epsilon_r \pm i\gamma$  para toda a camada,  $\gamma$  sendo o fator de perda da camada. Dessa forma, as camadas são homogêneas e isotrópicas. O valor de  $\epsilon$  foi escolhido próximo a zero, para termos um material do tipo ENZ.

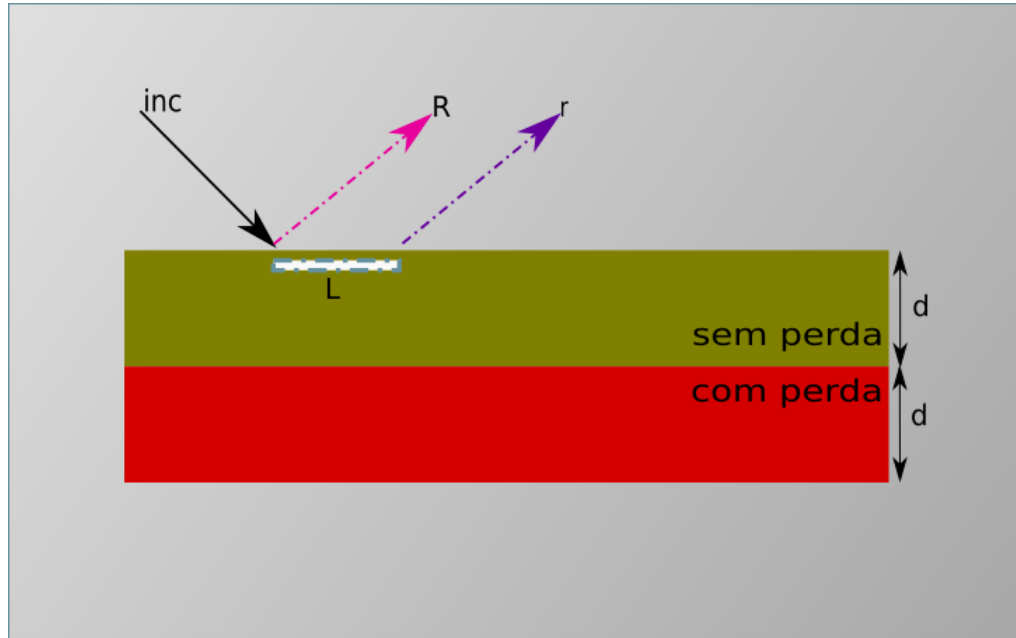


Figura 26 – Esquema da estrutura de bicamada com simetria PT passiva. Uma onda eletromagnética incide na bicamada no lado sem perda ('inc'). Na indicação da óptica geométrica, a onda refletida não sofre nenhum deslocamento em relação ao ponto de incidência ('R'). Porém, em virtude do efeito Goss-Hänchen, há um deslocamento lateral na reflexão ('r'). Fonte: autor, 2021.

O deslocamento lateral característico do efeito GH pode ser estudado baseado no método de fase estacionária, que nos fornece a relação (ARTMANN, 1948):

$$L = -\frac{\lambda}{2\pi} \frac{d\psi}{d\theta_{in}}. \quad (6.6)$$

Em 6.6,  $\psi$  é a fase do coeficiente de transmissão/reflexão,  $\theta$  é o ângulo de incidência e  $\lambda$  é o comprimento de onda da onda incidente. De forma geral, meios dielétricos convencionais possuem valores de  $L$  diferentes para a transmissão e para a reflexão. Porém, em casos de simetria PT, é estabelecido que os valores do efeito GH são todos iguais. Ou seja,  $L_{reflexao} = L_{transmissao}$  (CAO et al., 2019). Desta forma, sem perda de generalidade, reproduzimos apenas um cálculo para cada valor do ângulo incidente.

É interessante notar que as figuras estão todas normalizadas pelo comprimento de onda pelo fato do efeito GH, no design estudado neste capítulo, ser insensível ao comprimento de onda per se. Este fenômeno é de fácil compreensão se lembramos da relação 6.5. No interior de um material ENZ, o comprimento de onda se torna infinito, independente do comprimento de onda incidente.



A figura 27 mostra o cálculo analítico do efeito GH para o caso TM (todos os ângulos indicados estão em radianos). Dado um comprimento de onda, tomamos inicialmente a camada com dimensão  $d = 0.6\lambda$  e  $\epsilon = 0.001$ . As camadas tem perda indicadas por  $\gamma$  e  $0.2\gamma$ . Desta forma, uma camada tem uma fator de perda de energia de um quinto da outra. Para valores maiores de  $\gamma$ ,

Para valores maiores de  $\gamma$ , esperamos uma 'suavização' na curva, em virtude da maior perda de energia. É, de fato, o que se verifica na figura 27. Porém, como já exposto explicitamente na equação 6.4, o ângulo crítico em materiais ENZ é zero. Consequentemente, próximo do ângulo zero também esperamos ter efeitos GH intensos. Novamente, a figura 27 claramente mostra um efeito maior próximo ao ângulo de incidência normal. Com o afastamento do ângulo crítico, o efeito GH tende ao mesmo valor para todos os ângulos e todos os valores de  $\gamma$  estudados. Porém é ainda mais intenso para valores menores de  $\gamma$ , como é o caso mostrado na figura com  $\gamma = 0.01$ .

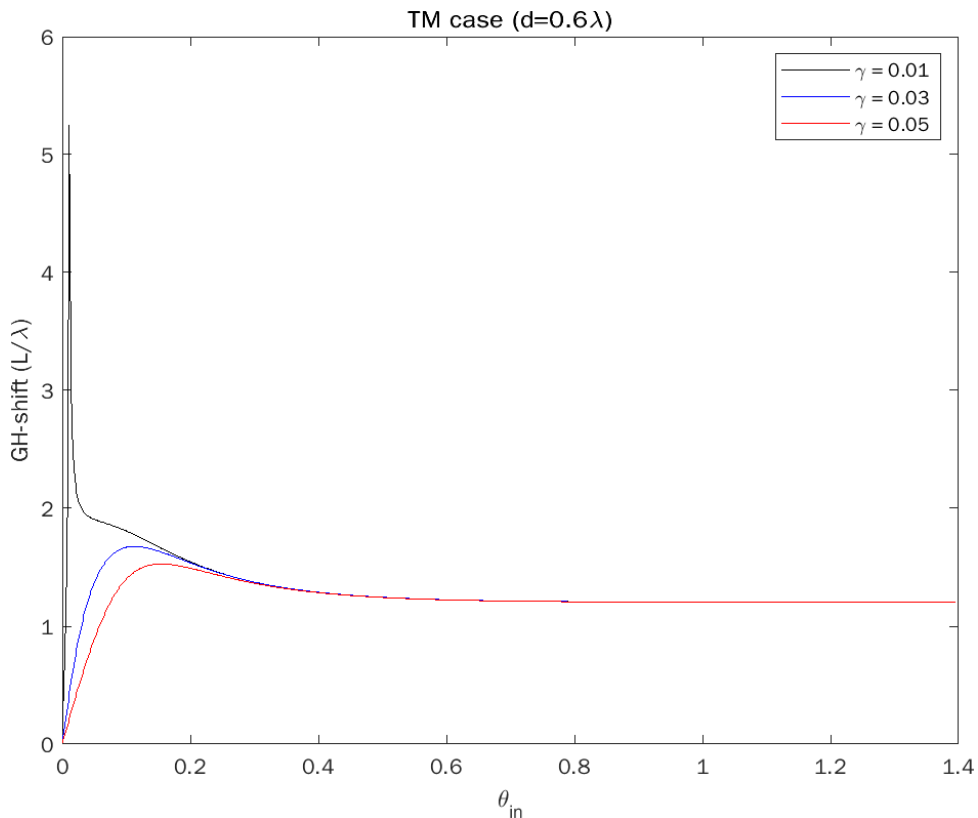


Figura 27 – Efeito Goos-Hänchen em uma bicamada com simetria PT passiva. Uma camada tem  $\epsilon = 0.001 + \gamma i$  e outra camada tem  $\epsilon = 0.001 + 0.2\gamma i$ . Foram escolhidos diferentes valores para  $\gamma$ , conforme indica a legenda. Fonte: autor, 2021.

Para os mesmos valores de  $\epsilon$ ,  $\gamma$  e  $d$ , a figura 28 nos mostra a transmissão da bicamada estudada. Com o aumento do ângulo de incidência e o aumento do fator de perda de energia ( $\gamma$ ), a figura mostra o comportamento esperado de queda na transmissão. O relevante na figura 28 é o fato de, mesmo com perda de energia nas duas camadas, há uma alta transmissão próxima do

ângulo crítico. É uma consequência do já mostrado pelas equações a e também por estarmos lidando com um material do tipo ENZ (onde  $\epsilon \approx 0$ , muito sensível ao ângulo crítico).

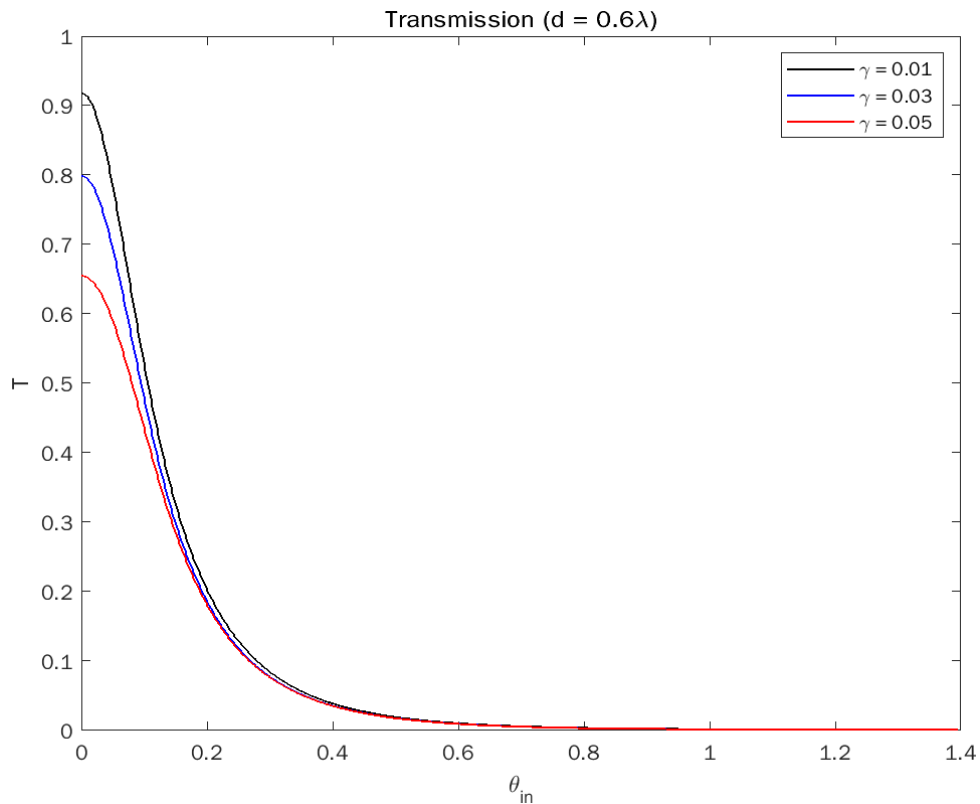


Figura 28 – Transmissão para diferentes valores de  $\gamma$ . Próximo ao ângulo crítico ( $\theta_{in} \approx 0$ ) a transmissão tem altos valores como consequência da sensibilidade de materiais ENZ ao ângulo de incidência. Fonte: autor, 2021.

A literatura mostra uma grande dependência na relação de materiais ENZ, simetria PT em sistemas de camadas e a dimensão de tais camadas. Portanto, calculamos o efeito GH e as transmissões relacionadas para verificar tal dependência no caso de simetria PT passiva.

O resultado é visto nas figuras 29 e 30. Para um mesmo valor de  $\gamma$ , a dimensão da camada foi determinante para a intensidade assintótica do efeito GH em relação ao ângulo de incidência. Após um alto valor próximo ao ângulo crítico ( $\approx 0$ ), o efeito GH alcança um valor que varia com a espessura da camada. Quanto maior a espessura da camada, maior o valor assintótico do efeito GH.

Para a transmissão, é mantido a dependência do ângulo de incidência e da espessura da camada. Porém, o efeito aqui se mostrou invertido em relação ao efeito GH. Quanto menor a espessura da camada, maior o valor da transmissão.

O aumento do efeito GH acompanhando o aumento da espessura da camada já é esperado. A literatura já nos fornece diversos exemplos que discorrem sobre este mesmo aspecto (MA; GAO, 2017; CAO et al., 2019). Teoricamente, o efeito GH pode ser infinito (basta fazer  $d \rightarrow \infty$ ). A figura 31 mostra esse efeito de forma bem clara. Um efeito GH muito intenso é visto para maiores espessuras das camadas.

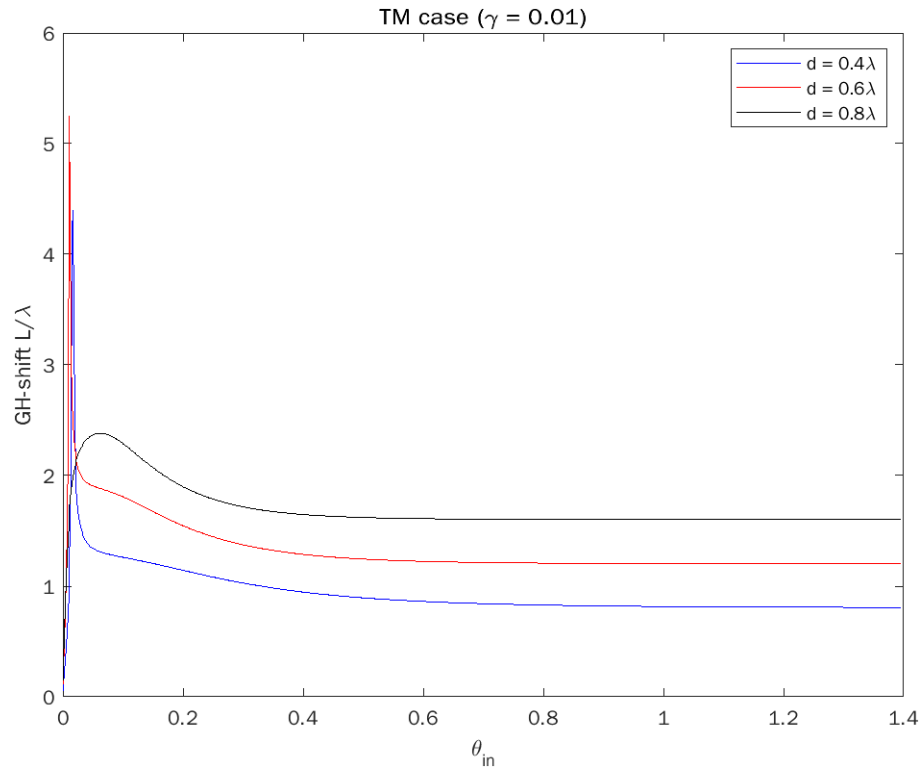


Figura 29 – O efeito GH é bastante sensível ao tamanho da camada do material ENZ. Para um mesmo valor de  $\gamma$ , o efeito GH é intensificado com a diminuição da espessura da camada. Fonte: autor, 2021.

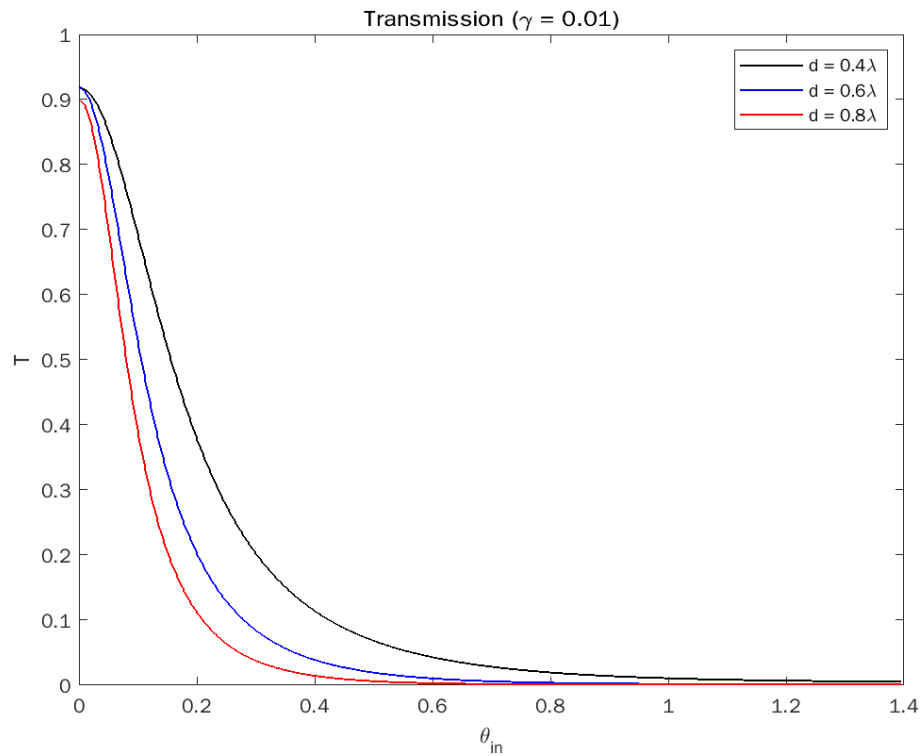


Figura 30 – A transmissão para os mesmos parâmetros da figura 29. Independente da dimensão da camada, o efeito assintótico do aumento do ângulo de incidência é a diminuição da transmissão. Fonte: autor, 2021.

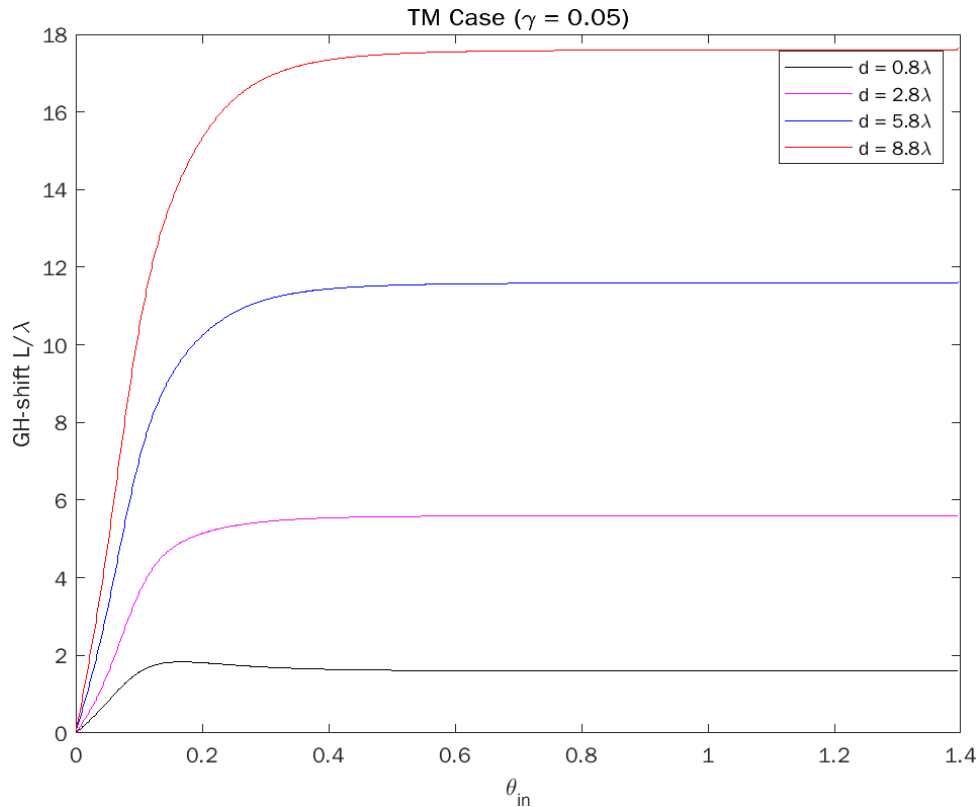


Figura 31 – A intensidade do efeito GH aumenta sensivelmente com o aumento da espessura das camadas. Os valores da permissividade elétrica ( $\epsilon = 0.001 + i\gamma_i$ ), do fator de perda de energia ( $\gamma$ ) permanecem constantes para todas as curvas. O fator determinante é a variação da espessura das camadas. Fonte: autor, 2021.

Para melhorar ainda mais a visualização do efeito da variação da espessura das camadas ( $d$ ) na intensidade do efeito GH, a figura 32 mostra a variação do efeito GH em função do ângulo de incidência e da espessura das camadas. Para o fator  $\gamma = 0.05$ , qualquer espessura tem basicamente o mesmo comportamento: um efeito GH muito pequeno para o ângulo de incidência normal, mas que rapidamente cresce e alcança um valor quase constante. Tal valor máximo cresce com o crescimento da espessura ( $d$ ).

### 6.3 Efeito da quantidade de camadas

Para os casos já tratados na literatura (dielétricos, simetria PT etc) o aumento do número de camadas afeta a intensidade do efeito GH: aumenta junto com o número de camadas. Vejamos se o design proposto nesta tese, envolvendo material ENZ e simetria PT passiva, também sofre esse mesmo efeito.

Na seção anterior tínhamos apenas uma bicamada, como visto na figura 26. Para fins de comparação, na figura 33 utilizamos os mesmos parâmetros da figura 27, porém para uma

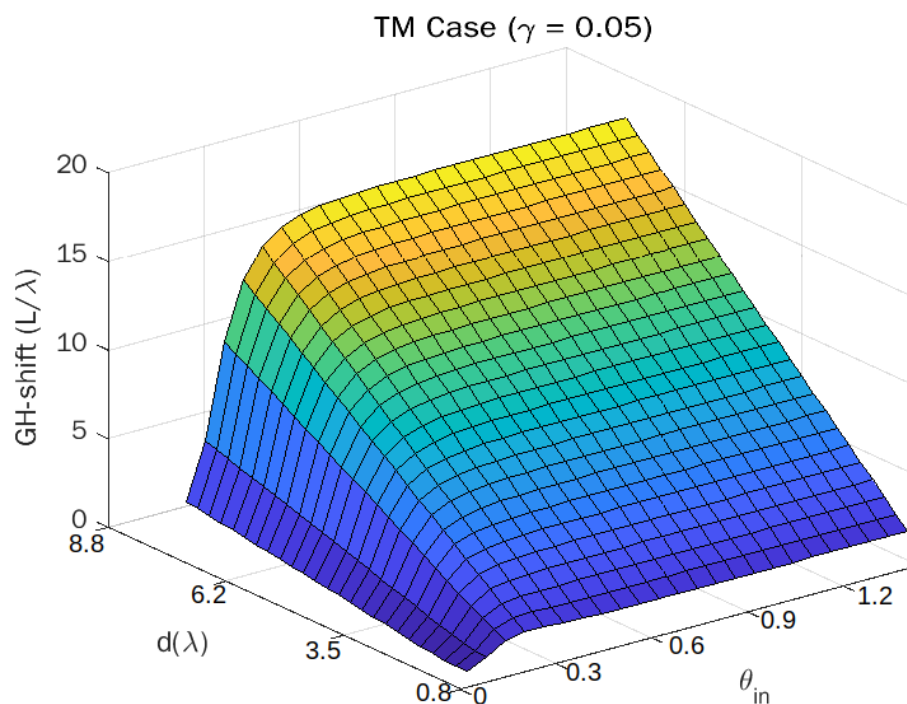


Figura 32 – Variação do efeito GH em função do ângulo de incidência ( $\theta_{in}$ ) e da espessura da camada ( $d$ ). O valor de  $d$  afeta consideravelmente a intensidade do fenômeno. Fonte: autor, 2021.

estrutura com 5 (cinco) bicamadas seguindo o mesmo design.

É fácil notar que o aumento do número de camadas afetou a intensidade do efeito GH. Com uma única camada, o efeito GH alcançou um valor máximo de  $3\lambda$  e um patamar de  $1\lambda$  com o aumento do ângulo de incidência (figura 26). Utilizando os mesmos parâmetros e aumentando o número de camadas, foi possível alcançar valores próximos de 8, enquanto o patamar com o aumento do ângulo de incidência é perto de  $6\lambda$ , várias vezes maior que o caso de uma única camada.

A relevância do número de camadas fica ainda mais claro quando consideramos a variação da espessura  $d$ . A figura 34 mostra o crescimento do efeito GH para diferentes valores de  $d$ . Para  $d = 8.8\lambda$  o efeito GH chega ao valor aproximado de 90. Este valor se torna ainda mais relevante quando comparado ao caso de uma única camada, onde esse valor é próximo a 18.

Novamente como já falamos antes, aumentando a espessura da camada temos aumento no efeito GH, a ponto de ter um GH infinito com  $d \rightarrow \infty$ . Para o aumento do número de camadas, as consequências são similares. A figura 35 mostra os valores de GH variando com o ângulo de incidência para os casos de 1 (uma), 5 (cinco) e 10 (dez) camadas, com  $d = 5.8\lambda$ . Para 10 (dez) camadas, o efeito GH chega próximo a  $120\lambda$ . Muito acima do que a literatura costuma a chamar de efeito GH 'gigante'.

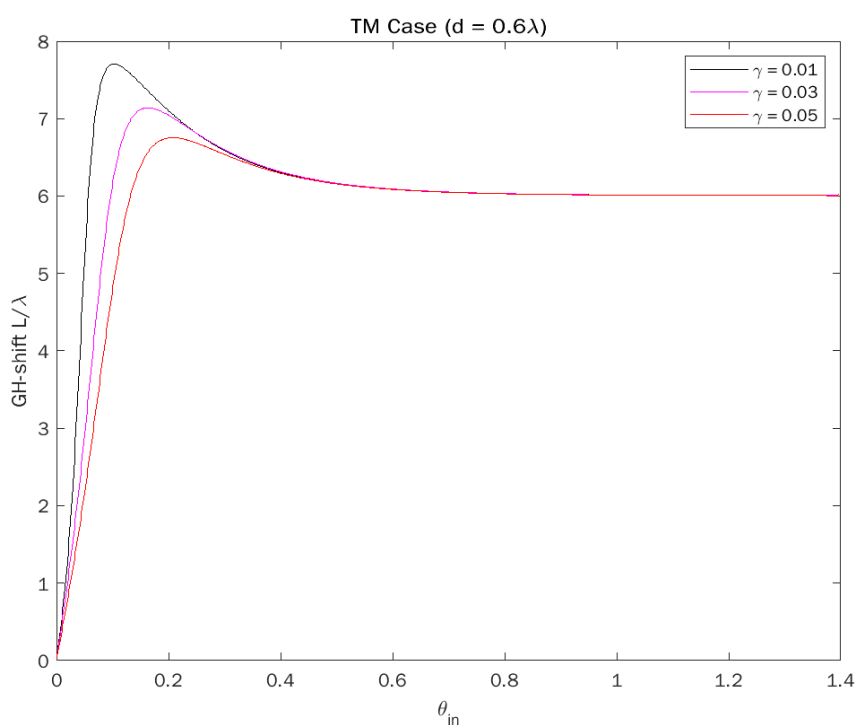


Figura 33 – Para os mesmos parâmetros utilizados na seção anterior, apenas aumentamos o número de bicamadas para 5 (cinco). O efeito GH é intensificado a ponto do patamar de estabilidade com o aumento do ângulo de incidência ser cerca de 6 (seis) vezes maior do que o caso de uma única camada. Fonte: autor, 2021.

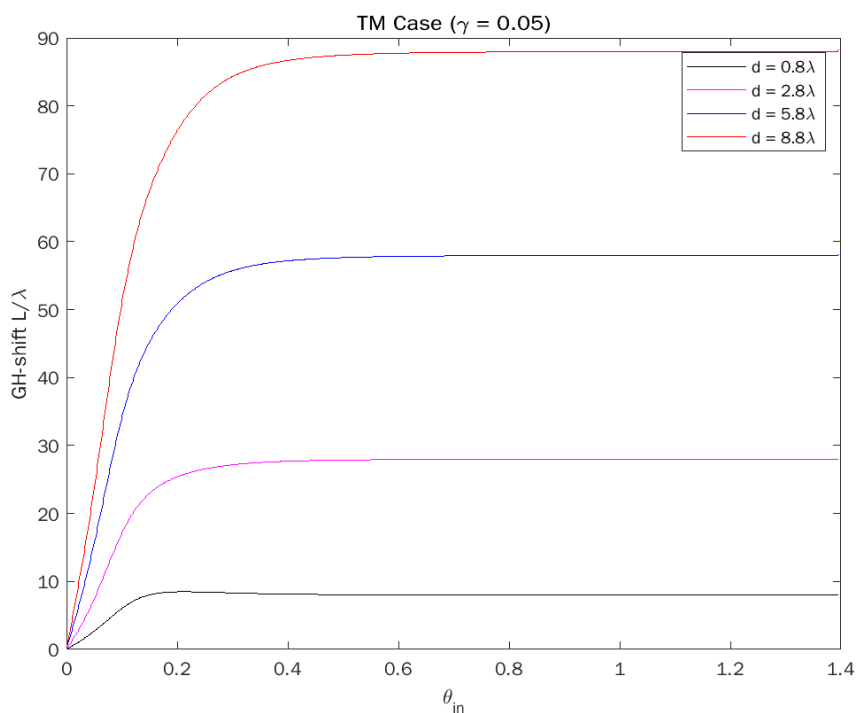


Figura 34 – Com 5 (cinco) camadas, o efeito GH chega perto de  $90\lambda$ . Q quantidade de camadas afeta intensamente o fenômeno. Fonte: autor, 2021.

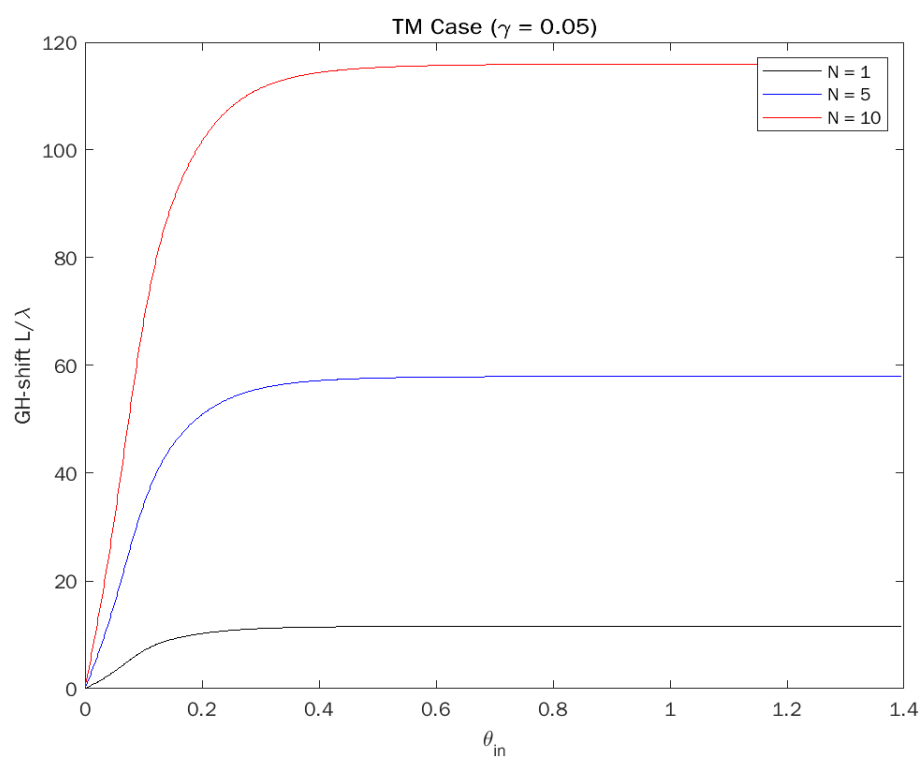
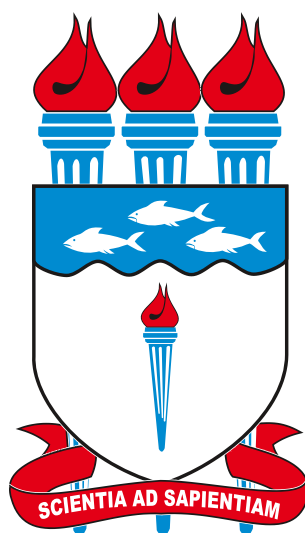


Figura 35 – Com  $d = 5.8\lambda$ , a variação no número de camadas afeta sensivelmente o efeito GH. Com poucas camadas é possível alcançar um efeito GH gigante. Fonte: autor, 2021.



## 7 CONCLUSÃO

A pesquisa de novos materiais é um campo rico da ciência. Diversas áreas do conhecimento humano são necessárias, não só para o estudo das características de materiais mas principalmente para o design de materiais com características inovadoras. O design de materiais em fotônica é, nos últimos anos, uma das áreas com extrema necessidade de pesquisa. Nas últimas décadas a humanidade deu um salto extremo em sua capacidade quanto visto em inúmeras frentes. Esse salto, em grande parte, se dá pela grande capacidade de lidar com dados e transformar em informação útil. O advento dos computadores alterou o dia a dia de todos quase que globalmente. Nos últimos anos, a computação móvel - pelo uso de notebooks, tablets e smartphones - impactou ainda mais nosso cotidiano.

Uma das consequências dos fatos apontados foi a corrida pela miniaturização e pelo aumento da velocidade de processamento de dados. Nisto reside o ponto chave da inovação dos materiais fotônicos. Os equipamentos eletrônicos utilizam circuitos elétricos para suas operações lógicas e para armazenamento de dados. Como tais circuitos usam os elétrons para suas atividades, a velocidade do processamento é limitada pela velocidade com que os elétrons conseguem percorrer tais circuitos. Com o avanço das últimas décadas, chegamos a um fator limitante para o posterior aumento na capacidade de tais equipamentos. É preciso novos materiais, como características inovadoras em relação aos equipamentos que utilizam circuitos elétricos.

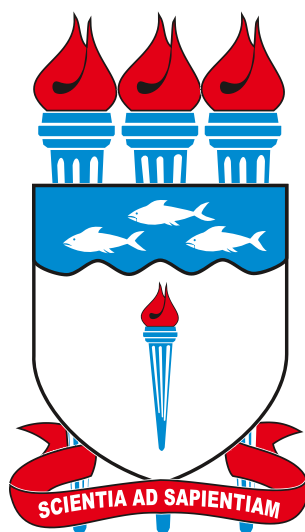
Os processadores atualmente utilizados em computadores pessoais possuem transistores de tamanho tão pequeno quanto alguns nanômetros. Para comparação, um fio de cabelo humano tem espessura média de 100 mil nanômetros. Ou seja, na largura equivalente de um fio de cabelo humano é possível enfileirar bem mais que 10 mil transistores. Desta forma, ultrapassamos os limites da chamada física clássica e alcançamos o campo característico da quântica. As leis da natureza dentro do limite quântico podem ser bem diferentes daqueles que experimentamos em nosso dia a dia. Novos desafios precisam ser enfrentados com soluções, e materiais, inovadoras.

Nesta tese nós vislumbramos dois materiais com a capacidade de serem incorporados em circuitos para manipular fótons, ultrapassando os limites do meio eletrônico. Os cristais fotônicos temporais podem ser utilizados para o controle do caminho óptico mas vão além disso. Com a manipulação das características fotônicas do cristal, podemos ter sistemas com criação de frequências além daquelas que incidem sobre o material. Tais frequências podem contribuir tanto para fornecer informações no sentido de sensores como no sentido de transmitir informação para mais de uma direção. Nossos resultados mostram que é simples observar os fenômenos esperados em cristais fotônicos temporais, desde que se tenha a tecnologia necessária para a variação das características fotônicas do material utilizado.

Materiais com design que incorporem simetria PT carregam todas as características peculiares já estudadas em quântica: difração assimétrica, transparência unidirecional, dentre



tantas. Obviamente, podem ser extremamente úteis no projeto de novos materiais e na incorporação destes em circuitos de manipulação de dados. Nesta tese, mostramos como o efeito Goos-Hänchen surge de forma intensa em materiais com simetria PT passiva construídos com material do tipo *epsilon-near-zero* (ENZ). Na teoria, o efeito GH pode chegar a ser infinito. Na literatura, já tínhamos essa afirmação com relação à espessura da camada constituinte do material nesta tese mostramos que a mesma afirmação é válida para o número de camadas do design aqui estudado.



## REFERÊNCIAS

- ABBAS, M.; QAMAR, S. et al. Amplitude control of the goos-hänchen shift via a kerr nonlinearity. *Laser Physics Letters*, IOP Publishing, v. 11, n. 1, p. 015201, 2013. Citado na página 68.
- ARTMANN, K. Berechnung der seitenversetzung des totalreflektierten strahles. *Annalen der Physik*, Wiley Online Library, v. 437, n. 1-2, p. 87–102, 1948. Citado na página 70.
- BENDER, C. *PT Symmetry: In Quantum and Classical Physics*. World Scientific Publishing, 2018. ISBN 9781786345974. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=5PF9DwAAQBAJ>>. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 22.
- BENDER, C. M. Making sense of non-hermitian hamiltonians. *Reports on Progress in Physics*, IOP Publishing, v. 70, n. 6, p. 947, 2007. Citado na página 22.
- BENDER, C. M.; BOETTCHER, S. Real spectra in non-hermitian hamiltonians having p t symmetry. *Physical Review Letters*, APS, v. 80, n. 24, p. 5243, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 51 e 53.
- BENDER, C. M.; BOETTCHER, S.; MEISINGER, P. N. Pt-symmetric quantum mechanics. *Journal of Mathematical Physics*, American Institute of Physics, v. 40, n. 5, p. 2201–2229, 1999. Citado na página 52.
- BENDER, C. M.; BRODY, D. C.; JONES, H. F. Must a hamiltonian be hermitian? *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers, v. 71, n. 11, p. 1095–1102, 2003. Citado na página 50.
- BENDICKSON, J. M.; DOWLING, J. P.; SCALORA, M. Analytic expressions for the electromagnetic mode density in finite, one-dimensional, photonic band-gap structures. *Physical Review E*, APS, v. 53, n. 4, p. 4107, 1996. Citado na página 60.
- BIANCALANA, F. et al. Dynamics of light propagation in spatiotemporal dielectric structures. *Physical Review E*, APS, v. 75, n. 4, p. 046607, 2007. Citado na página 33.
- BLOCH, F. ber die quantenmechanik der electron in kristallgittern. *Zeitschrift fr Physik*, v. 52, p. 550–600, 1928. Citado na página 24.
- BOHR, N. I. on the constitution of atoms and molecules. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Taylor & Francis, v. 26, n. 151, p. 1–25, 1913. Citado na página 49.
- BOHREN, C. F. Scattering of electromagnetic waves by an optically active cylinder. *Journal of Colloid and Interface Science*, Elsevier, v. 66, n. 1, p. 105–109, 1978. Citado na página 33.
- BORN, M.; WOLF, E. *Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*. [S.l.]: Elsevier, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 63 e 67.
- BOYER, C. B. A history of mathematics, rev. by uta c. Merzbach. NY: Wiley, 1991. Citado na página 13.
- BRONSON, R.; SACCOMAN, J. T.; COSTA, G. B. *Linear Algebra: Algorithms, Applications, and Techniques*. [S.l.]: Academic Press, 2013. Citado na página 48.

- CALLISTER, W. D. et al. *Materials science and engineering: an introduction*. [S.l.]: wiley, 2021. Citado 4 vezes nas páginas 9, 13, 24 e 25.
- CAO, Y. et al. Giant goos-hänchen shift induced by bounded states in optical pt-symmetric bilayer structures. *Optics express*, Optical Society of America, v. 27, n. 6, p. 7857–7867, 2019. Citado 3 vezes nas páginas 69, 70 e 72.
- CAON, F. et al. Números complexos: inter-relação entre conteúdos e aplicações. UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA, 2013. Citado na página 14.
- DESCARTES, R. *La géométrie*. [S.l.]: Hermann, 1886. Citado na página 13.
- EL-GANAINY, R. et al. Theory of coupled optical pt-symmetric structures. *Optics letters*, Optical Society of America, v. 32, n. 17, p. 2632–2634, 2007. Citado na página 53.
- EL-GANAINY, R. et al. Non-hermitian physics and pt symmetry. *Nature Physics*, Nature Publishing Group, v. 14, n. 1, p. 11, 2018. Citado na página 17.
- EMCH, G. G.; SRIDHARAN, R.; SRINIVAS, M. *Contributions to the history of Indian mathematics*. [S.l.]: Springer, 2005. v. 3. Citado na página 14.
- FAN, H. et al. Antiparity-time symmetry in passive nanophotonics. *ACS photonics*, ACS Publications, v. 7, n. 11, p. 3035–3041, 2020. Citado na página 68.
- FENG, L. et al. Experimental demonstration of a unidirectional reflectionless parity-time metamaterial at optical frequencies. *Nature materials*, Nature Publishing Group, v. 12, n. 2, p. 108, 2013. Citado na página 58.
- FESHBACH, H.; PORTER, C.; WEISSKOPF, V. Model for nuclear reactions with neutrons. *Physical review*, APS, v. 96, n. 2, p. 448, 1954. Citado na página 17.
- GAMOW, G. Zur quantentheorie des atomkernes. *Zeitschrift für Physik*, Springer, v. 51, n. 3-4, p. 204–212, 1928. Citado na página 17.
- GE, L.; CHONG, Y.; STONE, A. D. Conservation relations and anisotropic transmission resonances in one-dimensional pt-symmetric photonic heterostructures. *Physical Review A*, APS, v. 85, n. 2, p. 023802, 2012. Citado na página 61.
- GERRARD, A.; BURCH, J. M. *Introduction to matrix methods in optics*. [S.l.]: Courier Corporation, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 63 e 67.
- GONG, Q.; HU, X. *Photonic crystals: principles and applications*. [S.l.]: Pan Stanford, 2019. Citado na página 19.
- GOODMAN, J. *Introduction to Fourier Optics, 4W. H.* [S.l.]: Freeman, New York, 2017. Citado na página 54.
- GOOS, F.; HÄNCHEN, H. Ein neuer und fundamentaler versuch zur totalreflexion. *Annalen der Physik*, Wiley Online Library, v. 436, n. 7-8, p. 333–346, 1947. Citado na página 68.
- HAO, Y.; MITTRA, R. *FDTD modeling of metamaterials: Theory and applications*. [S.l.]: Artech house, 2008. Citado na página 39.

HARFOUSH, F.; TAFLOVE, A. Scattering of electromagnetic waves by a material half-space with a time-varying conductivity. *IEEE transactions on antennas and propagation*, v. 39, n. 7, p. 898–906, 1991. Citado na página 38.

HAYDOCK, R.; KELLY, M. Electronic structure from non-hermitian representations of the hamiltonian. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, IOP Publishing, v. 8, n. 13, p. L290, 1975. Citado na página 49.

HEISENBERG, W. Die struktur der leichten atomkerne. *Zeitschrift für Physik*, Springer, v. 96, n. 7, p. 473–484, 1935. Citado na página 49.

JOANNOPOULOS, J. D. et al. Molding the flow of light. *Princeton Univ. Press, Princeton, NJ [ua]*, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 31.

JR, S. V. C. Ciência dos polímeros. *Artiber editora, São Paulo*, p. 110–115, 2002. Citado na página 13.

JURŠĚNAS, S. et al. Luminescence decay in highly excited gan grown by hydride vapor-phase epitaxy. *Applied physics letters*, American Institute of Physics, v. 83, n. 1, p. 66–68, 2003. Citado na página 33.

KHAN, I.; SAEED, K.; KHAN, I. Nanoparticles: Properties, applications and toxicities. *Arabian Journal of Chemistry*, Elsevier, v. 12, n. 7, p. 908–931, 2019. Citado na página 20.

KHLEBTSOV, N. G.; DYKMAN, L. A. Optical properties and biomedical applications of plasmonic nanoparticles. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, Elsevier, v. 111, n. 1, p. 1–35, 2010. Citado na página 20.

LIN, Z. et al. Unidirectional invisibility induced by p t-symmetric periodic structures. *Physical Review Letters*, APS, v. 106, n. 21, p. 213901, 2011. Citado na página 58.

LONGHI, S.; VALLE, G. D. Non-hermitian time-dependent perturbation theory: Asymmetric transitions and transitionless interactions. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 385, p. 744–756, 2017. Citado na página 53.

LOPEZ, C. Materials aspects of photonic crystals. *Advanced Materials*, Wiley Online Library, v. 15, n. 20, p. 1679–1704, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 25.

LÖWDIN, P.-O. *Linear algebra for quantum theory*. [S.l.]: John Wiley, 1998. Citado na página 48.

LUSTIG, E.; SHARABI, Y.; SEGEV, M. Topological aspects of photonic time crystals. *Optica*, Optical Society of America, v. 5, n. 11, p. 1390–1395, 2018. Citado na página 34.

MA, J.; WANG, Z.-G. Band structure and topological phase transition of photonic time crystals. *Optics express*, Optical Society of America, v. 27, n. 9, p. 12914–12922, 2019. Citado na página 38.

MA, P.; GAO, L. Large and tunable lateral shifts in one-dimensional pt-symmetric layered structures. *Optics Express*, Optical Society of America, v. 25, n. 9, p. 9676–9688, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 69 e 72.

MACKAY, T. G.; LAKHTAKIA, A. The transfer-matrix method in electromagnetics and optics. *Synthesis Lectures on Electromagnetics*, Morgan & Claypool Publishers, v. 1, n. 1, p. 1–126, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 63 e 67.

- MERANO, M. et al. Observation of goos-hänchen shifts in metallic reflection. *Optics express*, Optical Society of America, v. 15, n. 24, p. 15928–15934, 2007. Citado na página 68.
- MORGENTHALER, F. R. Velocity modulation of electromagnetic waves. *IRE Transactions on microwave theory and techniques*, IEEE, v. 6, n. 2, p. 167–172, 1958. Citado na página 33.
- MOSTAFAZADEH, A. Spectral singularities of complex scattering potentials and infinite reflection and transmission coefficients at real energies. *Physical review letters*, APS, v. 102, n. 22, p. 220402, 2009. Citado na página 60.
- MOSTAFAZADEH, A. Invisibility and pt symmetry. *Physical Review A*, APS, v. 87, n. 1, p. 012103, 2013. Citado na página 59.
- MOSTAFAZADEH, A. A dynamical formulation of one-dimensional scattering theory and its applications in optics. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 341, p. 77–85, 2014. Citado na página 61.
- NAGEL, J. *The One-Dimensional Finite-Difference Time-Domain (FDTD) Algorithm Applied to the Schrödinger Equation*. [S.l.]: February, 2014. Citado na página 39.
- NAHIN, P. J. *An imaginary tale: The story of-I*. [S.l.]: Princeton University Press, 2010. v. 42. Citado na página 13.
- NODA, S.; BABA, T. *Roadmap on photonic crystals*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2003. v. 1. Citado na página 19.
- OLSON, J. et al. Optical characterization of single plasmonic nanoparticles. *Chemical Society Reviews*, Royal Society of Chemistry, v. 44, n. 1, p. 40–57, 2015. Citado na página 20.
- PLANCK, M. On the law of distribution of energy in the normal spectrum. *Annalen der physik*, v. 4, n. 553, p. 1, 1901. Citado na página 48.
- REED, E. J.; SOLJAČIĆ, M.; JOANNOPOULOS, J. D. Reversed doppler effect in photonic crystals. *Physical review letters*, APS, v. 91, n. 13, p. 133901, 2003. Citado na página 33.
- RIGDEN, J. S. Einstein's revolutionary paper. *Physics World*, IOP Publishing, v. 18, n. 4, p. 18, 2005. Citado na página 48.
- ROSEN, J. *Symmetry rules: How science and nature are founded on symmetry*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2008. Citado na página 88.
- SADIKU, M. N. *Computational electromagnetics with MATLAB*. [S.l.]: CRC Press, 2018. Citado na página 39.
- SÁNCHEZ-SOTO, L. L.; MONZÓN, J. J. Invisibility and pt symmetry: a simple geometrical viewpoint. *Symmetry*, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 6, n. 2, p. 396–408, 2014. Citado na página 59.
- SCHRÖDINGER, E. Discussion of probability relations between separated systems. In: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. [S.l.], 1935. v. 31, n. 4, p. 555–563. Citado na página 49.
- SHADRIVOV, I. V.; ZHAROV, A. A.; KIVSHAR, Y. S. Giant goos-hänchen effect at the reflection from left-handed metamaterials. *Applied Physics Letters*, American Institute of Physics, v. 83, n. 13, p. 2713–2715, 2003. Citado na página 68.

SHARABI, Y.; LUSTIG, E.; SEGEV, M. Disordered photonic time crystals. *Physical Review Letters*, APS, v. 126, n. 16, p. 163902, 2021. Citado na página 34.

SHRAMKOVA, O.; TSIRONIS, G. Scattering properties of pt-symmetric layered periodic structures. *Journal of Optics*, IOP Publishing, v. 18, n. 10, p. 105101, 2016. Citado na página 59.

SHUI, T. et al. Asymmetric diffraction by atomic gratings with optical pt symmetry in the raman-nath regime. *Physical Review A*, APS, v. 97, n. 3, p. 033819, 2018. Citado na página 56.

SOUKOULIS, C. M. The history and a review of the modelling and fabrication of photonic crystals. *Nanotechnology*, IOP Publishing, v. 13, n. 3, p. 420, 2002. Citado na página 17.

STEDMAN, G.; BUTLER, P. Time reversal symmetry in applications of point group theory. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 13, n. 10, p. 3125, 1980. Citado na página 50.

STRANG, G. *Linear algebra and learning from data*. [S.l.]: Wellesley-Cambridge Press Cambridge, 2019. Citado na página 48.

TAFLOVE, A.; HAGNESS, S. C.; PIKET-MAY, M. Computational electromagnetics: the finite-difference time-domain method. *The Electrical Engineering Handbook*, Elsevier, v. 3, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 91.

TIAN, S.-C. et al. Asymmetric light diffraction of two-dimensional electromagnetically induced grating with pt symmetry in asymmetric double quantum wells. *Optics express*, Optical Society of America, v. 26, n. 25, p. 32918–32930, 2018. Citado na página 56.

TURDUEV, M. Photonic crystals engineering for light manipulation: Low symmetry, graded index and parity time symmetry. *arXiv preprint arXiv:1602.05886*, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 28.

URBAN, A. S. et al. Optical trapping and manipulation of plasmonic nanoparticles: fundamentals, applications, and perspectives. *Nanoscale*, Royal Society of Chemistry, v. 6, n. 9, p. 4458–4474, 2014. Citado na página 20.

WANG, L.-G.; CHEN, H.; ZHU, S.-Y. Large negative goos-hänchen shift from a weakly absorbing dielectric slab. *Optics letters*, Optical Society of America, v. 30, n. 21, p. 2936–2938, 2005. Citado na página 68.

WANG, X. et al. High-sensitivity temperature sensor using the ultrahigh order mode-enhanced goos-hänchen effect. *Optics express*, Optical Society of America, v. 21, n. 11, p. 13380–13385, 2013. Citado na página 68.

WONG, J. Results on certain non-hermitian hamiltonians. *Journal of Mathematical Physics*, American Institute of Physics, v. 8, n. 10, p. 2039–2042, 1967. Citado na página 49.

WONG, Y.-P. et al. Large negative and positive optical goos-hänchen shift in photonic crystals. *Optics Letters*, Optical Society of America, v. 43, n. 12, p. 2803–2806, 2018. Citado na página 68.

WU, H. et al. The scattering problem in pt-symmetric periodic structures of 1d two-material waveguide networks. *Annalen der Physik*, Wiley Online Library, v. 531, n. 9, p. 1900120, 2019. Citado na página 60.

WU, T. T. Ground state of a bose system of hard spheres. *Physical Review*, APS, v. 115, n. 6, p. 1390, 1959. Citado na página 49.

WUESTNER, S. et al. Gain and plasmon dynamics in active negative-index metamaterials. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, The Royal Society Publishing, v. 369, n. 1950, p. 3525–3550, 2011. Citado na página 20.

XU, Y.; CHAN, C. T.; CHEN, H. Goos-hänchen effect in epsilon-near-zero metamaterials. *Scientific Reports*, Nature Publishing Group, v. 5, n. 1, p. 1–5, 2015. Citado na página 69.

YAN, Y.; GIEBINK, N. C. Passive pt symmetry in organic composite films via complex refractive index modulation. *Advanced Optical Materials*, Wiley Online Library, v. 2, n. 5, p. 423–427, 2014. Citado na página 68.

ZENG, L. et al. Photonic time crystals. *Scientific reports*, Nature Publishing Group, v. 7, n. 1, p. 1–9, 2017. Citado 3 vezes nas páginas 33, 34 e 38.

ZHU, B.; LÜ, R.; CHEN, S. Pt-symmetry breaking for the scattering problem in a one-dimensional non-hermitian lattice model. *Physical Review A*, APS, v. 93, n. 3, p. 032129, 2016. Citado na página 59.

ZHU, X.-Y. et al. Asymmetric diffraction based on a passive parity-time grating. *Applied Physics Letters*, AIP Publishing LLC, v. 109, n. 11, p. 111101, 2016. Citado na página 70.

ZOUHDI, S.; SIHVOLA, A.; VINOGRADOV, A. P. *Metamaterials and plasmonics: fundamentals, modelling, applications*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2008. Citado na página 19.

ZURITA-SÁNCHEZ, J. R.; ABUNDIS-PATIÑO, J.; HALEVI, P. Pulse propagation through a slab with time-periodic dielectric function  $\varepsilon(t)$ . *Optics express*, Optical Society of America, v. 20, n. 5, p. 5586–5600, 2012. Citado na página 33.

ZURITA-SÁNCHEZ, J. R.; HALEVI, P. Resonances in the optical response of a slab with time-periodic dielectric function  $\varepsilon(t)$ . *Physical Review A*, APS, v. 81, n. 5, p. 053834, 2010. Citado na página 33.

ZURITA-SÁNCHEZ, J. R.; HALEVI, P.; CERVANTES-GONZALEZ, J. C. Reflection and transmission of a wave incident on a slab with a time-periodic dielectric function  $\varepsilon(t)$ . *Physical Review A*, APS, v. 79, n. 5, p. 053821, 2009. Citado na página 33.

## APÊNDICE A

Este apêndice traz a reprodução da primeira página de um artigo publicado durante o desenvolvimento desta tese. Ao analisarmos diversos tipos de materiais ativos (aqueles onde o meio tem uma resposta onde a variação temporal é um fator relevante, tais como simetria PT), deparamo-nos com modelos com fácil adaptação a partir do estudado em simetria PT.

Um dos resultados foi a aplicação dos métodos computacionais para analisar materiais onde o índice de refração era variável no tempo, e não apenas dependente da frequência da onda incidente. Assim, publicamos um artigo na revista *American Scientific Research Journal for Engineering, Technology, and Sciences (ASRJETS)*, que reproduzimos neste anexo. Também apresentamos este trabalho em um congresso da Optical Society of America (OSA), o *Advanced Photonics 2020*.



## Optical Phenomena in Time Dependent Medium

Cícero Julião <sup>a\*</sup>

<sup>a</sup> Instituto Federal de Alagoas, BR-104, 111, Murici-AL, 57820-000, Brazil

<sup>a</sup> Email: [cicero.junior@ifal.edu.br](mailto:cicero.junior@ifal.edu.br)

### Abstract

How to deal with optical phenomena if the physical quantities are time-dependent? When a light wave propagating in space meets an interface between two media, a transmitted and a reflected wave appears. However, if a medium abruptly changes the value of its dielectric constant, even without an interface dividing space, we also have the phenomenon of reflection and refraction. Thinking of time as a coordinate similar to the spatial coordinates, the interface found also provides a change in the medium. But a change in time. Thus, known relationships, such as Snell's Law, should be reviewed for such phenomena. This article deals with some situations where we have non-fixed dielectric constants, changing with time. From Maxwell's equations, we demonstrate how to simulate the propagation of an electromagnetic wave in a medium that varies its dielectric constant over time. We used the finite difference method in the time domain (FDTD). We show the interesting phenomenon of temporal refraction and reflection.

Keywords: Photonic Time Crystal; Periodic; Maxwell Equations; Dielectric Constant.

### 1. Introduction

Some optical phenomena are elementary. One of these is known as Snell's Law. The simplicity of its observation and the consequent simplicity in understanding its essential points is so great that we can deal with it in elementary school classes. Even in these classes, we can trust that their understanding is possible. Snell's Law deals with the simple situation of a light ray reaching the boundary between two optical media. Snell's Law describes the change in the direction of propagation. In this process, the energy is conserved, but the component of the moment perpendicular to the boundary is not [1].

We have an important statement here. The change in the optical medium occurs in space. There is a change in the spatial structure of the material. However, what happens if the change does not occur in space, but in time? That is, what if the optical medium undergoes temporal change? It is the case for so-called *active medium* [2].

---

\* Corresponding author.

## APÊNDICE B

### Simetrias

A ciência moderna, nas suas mais diversas subdivisões, tem sua confiança firmada em três pilares: reprodutibilidade, previsibilidade e redução. Com olhar atento, percebemos que os três conceitos são, na verdade, uma forma de simetria. Portanto, em certo sentido é correto afirmar que o trabalho científico se baseia na utilização correta de simetrias (ROSEN, 2008). Uma consequência desta abordagem é que o estudo explícito de simetrias é um campo relevante em diversas áreas do conhecimento. Vamos revisar brevemente alguns pontos sobre simetria neste apêndice.

Todos possuem um conceito natural de simetria. Por exemplo, a aparente simetria no corpo humano com seus lados esquerdo e direito bem simétricos é um conceito largamente conhecido para a beleza. Em ciência, porém, é preciso ser mais exato do que simplesmente 'sentir' algo. Em seu sentido mais genérico, simetria se refere possibilidade de uma determinada mudança deixar alguns aspectos do objeto estudado sem ter alterações após a dita mudança.

Por exemplo, observe a figura abaixo. A seta indica o sentido de rotação de 120 graus para o triângulo, tomando o centro do triângulo como o centro da rotação. Essa operação não altera a figura pois a versão rotacionada coincide com a figura original. Ou seja, temos uma simetria.



Figura 36 – Figura com um triângulo equilátero tem diversas operações que preservam sua aparência original. A operação indicada é uma rotação de 120 graus com eixo no centro do triângulo. Fonte: autor, 2021.

Com um pouco mais de atenção, é possível encontrar diversas operações que evidenciam simetria. Vamos observar a mesma figura anterior, porém vamos considerar uma outra mudança. Vamos supor que o triângulo é 'espelhado', tendo como eixo a linha tracejada indicada e o sentido indicado pela seta, conforme a Figura 37. Qual o resultado? Novamente não há alteração na figura, com a operação retornando à composição original.

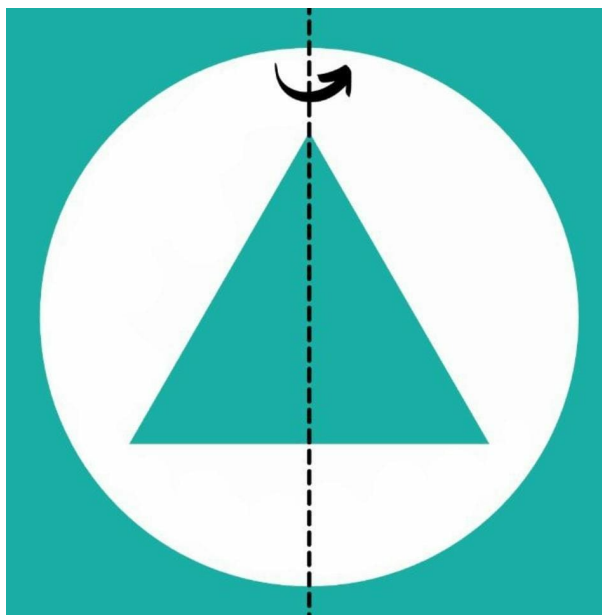


Figura 37 – Nesta operação, temos uma espécie de espelhamento tomando o eixo indicado como centro da operação. Novamente a figura fica inalterada, indicando mais uma operação de simetria. Fonte: autor, 2021.

Neste ponto é evidente dois aspectos de fenômenos envolvendo simetria: (1) a possibilidade de uma mudança (possibilidade, não obrigatoriedade) e (2) imutabilidade (algo não se altera se a mudança ocorrer).

Claro que a ciência usa os conceitos envolvendo simetria de forma muito mais profunda do que o que vimos até agora. E isso implica em diversas ferramentas utilizadas na ciência serem, em certa medida, padrões de simetria em última análise. Podemos citar, entre muitos outros exemplos: redução, conceito de observador, conceito de universo estudado, estado inicial e evolução, reprodutibilidade, previsibilidade e analogias.

Se desejarmos lançar mão de exemplos com ferramentas matemáticas, é igualmente fácil encontrar exemplos de simetria. Veja o caso da seguinte função:

$$f(x) = x^2 + 1.$$

Além da sua simplicidade, podemos notar que um fenômeno sendo descrito por tal função continua inalterado se efetuarmos a mudança  $x \rightarrow -x$ . Neste caso temos (1) a possibilidade de mudança e (2) imutabilidade sob tal mudança. Ou seja, temos uma simetria.

Estas simples ideias podem ser aplicadas em áreas avançadas da ciência. Muitos conceitos utilizados para pesquisa de novos materiais residem em conceitos de simetria (por exemplo, entre sistemas vivos e sua reprodutibilidade em materiais projetados)

## APÊNDICE C

Vejam os uma breve introdução a o *Métodos das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo* (FDTD). Neste apêndice, vemos como transpor as equações envolvendo derivadas, aproximadas por diferenças, vistas no texto principal da tese para uma linguagem computacional. Também discutimos como implementar essas relações no esquema proposto por Yee, que permite manter as relações entre os campos elétrico e magnético. Desta forma, é preservada as relações fenomenológicas bem conhecidas em radiação eletromagnética.

### A aproximação por diferenças

No capítulo 3, chegamos às seguintes relações com diferenças finitas para os campos elétrico e magnético:

$$E_z^{n+1}[x] = E_z^n[x] + \frac{\Delta t}{\epsilon \Delta x} \left( H_y^{n+\frac{1}{2}} \left[ x + \frac{1}{2} \right] - H_y^{n+\frac{1}{2}} \left[ x - \frac{1}{2} \right] \right)$$

$$H_y^{n+\frac{1}{2}} \left[ x + \frac{1}{2} \right] = H_y^{n-\frac{1}{2}} \left[ x + \frac{1}{2} \right] + \frac{\Delta t}{\epsilon \Delta x} (E_z^n[x+1] - E_z^n[x])$$

A ideia central de como escrever as equações envolvendo derivadas e transpor para diferenças já foi vista no texto principal. Mas foi possível transpor as diferenças para a linguagem utilizada acima, necessária para a utilização em sistemas computacionais?

Introduzido por Yee (TAFLOVE; HAGNESS; PIKET-MAY, 2005), o método FDTD consiste em discretizar as relações utilizadas para descrever a propagação de radiação eletromagnética para um sistema de coordenadas também discretizado. Assim, um ponto no espaço obrigatoriamente é discretizado da seguinte forma:

$$(x, y, z) \rightarrow (i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z).$$

Consequentemente, funções dependentes do tempo passam pela mudança

$$f(x, y, z) = f(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t).$$

Nas equações acima, os  $\Delta$ 's são os incrementos espaciais e temporais, e os índices  $i, j, k, n$  são números inteiros.

Das equações de Maxwell, podemos escrever as relações para os campos elétrico e magnético. Um fator importante a ser preservado é a interdependência entre esses campos.

Para preservar isso, além de escrever as equações como diferenças, Yee também propôs um posicionamento específico para os componentes dos campos eletromagnéticos Na célula espacial discretizada, Os campos elétricos ficam nas extremidades da célula enquanto os campos magnéticos ficam no meio das células. Para um sistema unidimensional, o arranjo é como mostrado na Figura 38.

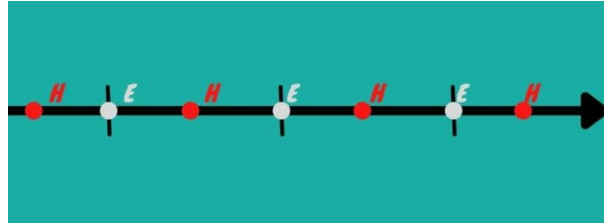


Figura 38 – Campos elétrico e magnético intercalados no espaço na discretização proposta por Yee. Para calcular  $H(x+1/2)$  é preciso levar em conta os valores de  $E(x)$  e  $E(x+1)$ .  
Fonte: autor, 2021.

O esquema espacial proposto garante a interrelação espacial. Por isso as relações para o campo elétrico são da forma  $E(x)$  enquanto as relações para o campo magnético sempre são da forma  $H(x+1)$ .

Mas, das equações de Maxwell, também temos uma relação temporal entre os campos que compõe a radiação eletromagnética. isto é preservado por manter o cálculo dos campos também de uma forma escalonada. Portanto, se temos o campo magnético sendo calculado no passo temporal  $n$ , com  $E(n)$ , devemos ter o campo magnético calculado no passo temporal  $n+1/2$ , com  $H(n+1/2)$ .

Fazendo tais adaptações propostas por Yee, conseguimos transportar as equações de Maxwell para as discretizadas adaptações, novamente vistas abaixo:

$$E_z^{n+1}[x] = E_z^n[x] + \frac{\Delta t}{\epsilon \Delta x} \left( H_y^{n+\frac{1}{2}} \left[ x + \frac{1}{2} \right] - H_y^{n+\frac{1}{2}} \left[ x - \frac{1}{2} \right] \right),$$

$$H_y^{n+\frac{1}{2}} \left[ x + \frac{1}{2} \right] = H_y^{n-\frac{1}{2}} \left[ x + \frac{1}{2} \right] + \frac{\Delta t}{\epsilon \Delta x} (E_z^n[x+1] - E_z^n[x]).$$

As equações acima são facilmente transpostas para uma linguagem computacional, como mostrado a seguir.

$$hy[x] = hy[x] + 0.5*(ez[x+1] - ez[x]),$$

$$ez[x] = ez[x] + 0.5*(hy[x] - hy[x-1]).$$

As linhas acima estão na linguagem de programação Python. Mas podem ser facilmente transcritas para outras linguagens em virtude da simplicidade das relações.

Abaixo, mostramos o código que pode ser adaptado para gerar os gráficos da simulação unidimensional de propagação de radiação eletromagnética. Com algumas adaptações, podem ser incluídos diversos tipos de fonte de radiação e diversos tipos de materiais.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# FUNCTION FOR GRAPHS
def plota_graf(ordem, figura):
    plt.clf()
    plt.xlabel('X')
    plt.ylabel('Ez')
    plt.title('Ez - FDTD')
    plt.plot(xBar, figura)
    plt.savefig('result.t' +
                str(ordem) + '.png')

# VARIABLES
SIZE = 200
ez = np.zeros(SIZE)
hy = np.zeros(SIZE)
imp0 = 377.0
maxTime = 350
mm = 0
fig = np.zeros(SIZE)
xBar = range(SIZE)

# SIMULATION
```

```

for i in range(maxTime):
    # MAGNETIC FIELDS
    for mm in range(SIZE-1):
        hy[mm] = hy[mm] + (ez[mm+1] -
            ez[mm]) / imp0
    # ELECTRIC FIELDS
    for mm in range(SIZE-1):
        ez[mm] = ez[mm] + (hy[mm] -
            hy[mm-1]) * imp0
    # SOURCE AT SITE 50
    ez[50] += np.exp(-(i-30.0) *
        (i-30.0) / 100.0)

    if (i % 3) == 0:
        for j in range(SIZE):
            fig[j] = ez[j]
        plota_graf(i, fig)

```

O código acima produz figuras a cada três passos temporais. Com as figuras produzidas, é possível utilizar diversos softwares livres e produzir vídeo onde observamos a propagação da radiação.

O leitor que aprofundar a utilização aqui exposta notará que o código acima produz uma simulação com material de características constantes no tempo. Ou seja, o código acima lida apenas com mudanças espaciais. Quanto a mudanças temporais, é preciso incluir pequenas adaptações que possibilitem tais variações no tempo.

As adaptações são apenas duas. Primeiro, precisamos incluir uma nova variável ao nosso código. O objetivo desta variável é controlar o valor da permissividade elétrica do material, já que o código lida apenas com mudanças no campo elétrico e não no campo magnético. Se for desejado também realizar mudanças temporais no campo magnético, mais uma variável precisa ser acrescentada com o mesmo objetivo. Por simplicidade na compreensão, vamos nos manter com mudanças apenas na permissividade elétrica.

No código, podemos acrescentar as linhas abaixo.

```

epsT[x] = np.ones(maxTime)
for i in maxTime:
    if (i > 100):
        epsT[i] = 3

```



Nas linhas acima, indicamos que a variável  $\epsilon T$  tem valor igual a 1 até o passo 110. A partir daí, ela passa a ter o valor 3. Isto será utilizado no código para alterar o valor da permissividade elétrica.

Mas não basta mudar o valor da permissividade elétrica. Como passamos a ter uma variável temporal, precisamos alterar o código para levar em conta tal mudança nas equações originais. Seguindo o indicado no capítulo 3, abaixo está o código simulação unidimensional da propagação de radiação eletromagnética com mudança temporal na permissividade elétrica do material.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# FUNCTION FOR GRAPHS
def plota_graf(ordem, figura):
    plt.clf()
    plt.xlabel('X')
    plt.ylabel('Ez')
    plt.title('Ez - FDTD')
    plt.plot(xBar, figura)
    plt.savefig('result.t' +
                str(ordem) + '.png')

# VARIABLES
SIZE = 200
ez = np.zeros(SIZE)
hy = np.zeros(SIZE)
imp0 = 377.0
maxTime = 350
mm = 0
fig = np.zeros(SIZE)
xBar = range(SIZE)
epsT[x] = np.ones(maxTime)
for i in maxTime:
    if (i > 100):
        epsT[i] = 3
```

```

# SIMULATION
for i in range(maxTime):
    # MAGNETIC FIELDS
    for mm in range(SIZE-1):
        hy[mm] = hy[mm] + (ez[mm + 1] -
            ez[mm]) / imp0
    # ELECTRIC FIELDS
    for mm in range(SIZE-1):
        ez[mm] = (epsT[i-1]/epsT[i])*ez[mm] +
            ((hy[mm] - hy[mm - 1]) * imp0)/epsT[i]
    # SOURCE AT SITE 50
    ez[50] += np.exp( -(i - 30.0) *
        (i - 30.0) / 100.0)

    if (i % 3 ) == 0:
        for j in range(SIZE):
            fig[j] = ez[j]
        plota_graf(i, fig)

```