Universidade Federal de Alagoas

Instituto de Matemática

Curso de Licenciatura em Matemática

Trabalho de Conclusão de Curso

Estudo dos espaços métricos e aplicação: o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer

Aluno: Luiz Henrique da Conceição dos Santos

Orientadora: Profa. Dra. Juliana Roberta Theodoro de Lima

Maceió 2020.

Luiz Henrique da Conceição dos Santos

Estudo dos espaços métricos e aplicação: o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao corpo docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Juliana Roberta Theodoro de Lima.

Maceió, abril de 2020.

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

S237e Santos, Luiz Henrique da Conceição dos.
Estudo dos espaços métricos e aplicação : o teorema do ponto fixo de Brouwer / Luiz Henrique da Conceição dos Santos. - 2020.
45 f. : il. color.

Orientadora: Juliana Roberta Theodoro de Lima.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática : Licenciatura) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2020.

Bibliografia: f. 45.

1. Brouwer, Luitzen Egbertus Jan. 2. Teoria do ponto fixo. 3. Aplicações contínuas. I. Título.

CDU: 515.12

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS – UFAL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
COLEGIADO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Luiz Henrique da Conceição dos Santos

Estudo de espaços métricos e aplicação: o teorema do Ponto Fixo de Brouwer

Trabalho apresentado ao colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas como requisito parcial para obtenção da nota final do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC).

Orientador(a): Profa. Dra. Juliana Roberta Theodoro de Lima.

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado em 19/10/2020.

Comissão Examinadora

Profª. Drª Juliana R. Theodoro de Lima
Instituto de Matemática - UFAL
SIAPE: 2347015

Profa. Dra. Juliana Roberta Theodoro de Lima (IM/UFAL)

Dione A. Lara

Prof. Dr. Dione Andrade Lara (IM/UFAL)

Prof. Dr. Márcio Cavalcante de Melo (IM/UFAL)

Maceió
2020

"Ser livre não é apenas quebrar as próprias correntes, mas viver de uma maneira que respeite e aumente a liberdade dos outros."

Nelson Mandela

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por estar sempre iluminando meus caminhos e ter dado as condições de realizar este trabalho.

Aos meus pais, Lúcia e Luiz, pelo apoio durante toda a minha trajetória de vida.

A minha irmã Amanda, pelos momentos de apoio e motivação no decorrer da escrita desta monografia e da minha vida acadêmica.

A todos professores do curso, sobretudo a profa. Dra. Juliana Roberta Theodoro de Lima, que com dedicação me orientou ao longo deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho, faremos um estudo da teoria de espaços métricos, apresentando os conteúdos que serão base para o objetivo desta monografia. Dentre os conteúdos, temos as aplicações contínuas, sequências e compacidade em espaços métricos com a relação que eles possuem com os espaços métricos completos, a definição de espaço métrico completo e como podemos determinar se um espaço é completo através das sequências de Cauchy. Com isto, mostraremos que o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$) é completo, assim como o $\mathbb{R}^n$, e saberemos determinar quando um subconjunto do $\mathbb{R}^n$ é compacto e sua relação com espaços métricos completos. No último capítulo, trataremos dos pontos fixos e do teorema do ponto fixo de Brouwer para o caso de funções na reta real e do caso geral no $\mathbb{R}^n$, estendendo por aplicações este caso com base em (MARTINS; VASCONCELLOS, 2014). Além disso, faremos algumas observações sobre estas extensões com o caso na reta real e com compacidade.

Palavras chave: Brouwer, Pontos fixos, Aplicações.

Abstract

In this work, we study metric spaces. We approach some themes like continuous applications, sequences, compact spaces and its relations to complete metric spaces, the definition of complete metric spaces using Cauchy sequences. By this way, we show that the real space, namely $\mathbb{R}$, is complete, and, also $\mathbb{R}^n$. We know conditions for a subset of $\mathbb{R}^n$ to be compact and his relation with complete metric spaces. In the last chapter, we study fixed points theory and Brouwer's fixed point Theorem, for real functions and the general case of $\mathbb{R}^n$, extending by applications, based on (MARTINS; VASCONCELLOS, 2014). Furthermore, we make some observations about these extensions on the real line equipped to compactness.

Sumário

Introdução

No decorrer do curso de Licenciatura de Matemática, nós lidamos com vários conjuntos. O conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$) é um dos mais intrigantes por ser um corpo, ordenado e completo. O motivo por ele ser chamado de corpo não será apresentado, porém discutiremos sobre os elementos que o levaram a ser chamado de completo, em outras palavras, estudaremos os espaços métricos para este fim, com base nos livros (DOMINGUES, 1982) e (LIMA, 2017b). Depois, vamos estender esta noção para o seu produto cartesiano, obtido por n-vezes, $\mathbb{R}^n$. É importante mencionar que o nosso principal objeto de estudo aqui será aplicações de um teorema que faz uso de alguns de seus subconjuntos.

Como dito acima, estudaremos as aplicações de um teorema que envolve subconjuntos do $\mathbb{R}^n$, sendo este um "teorema de existência" sobre pontos fixos, ou seja, dadas certas condições podemos afirmar a existência de ao menos um ponto fixo que não se altera pela aplicação dada. Um exemplo de "teorema de existência" é o teorema do valor intermediário, famoso na Análise. Mas, trataremos sobre um desses "teoremas de existência" sobre pontos fixos que possui grande importância em diversas áreas científicas, seja na matemática, engenharia, economia ou física. Tomando como base o artigo Teorema do Ponto Fixo de Brouwer em (MARTINS; VASCONCELLOS, 2014), será visto o teorema na sua forma mais simples (o caso real $n = 1$), o caso geral e as aplicações do teorema. O teorema proposto por Brouwer em 1910 nos garante a existência de pontos fixos em aplicações contínuas que têm como domínio e contra domínio os mesmos subconjuntos compactos do $\mathbb{R}^n$. Em suas aplicações, iremos generalizar a ideia dada por Brouwer ampliando as condições em que podemos usar do teorema para garantir a existência de pelo menos um ponto fixo, e este teorema foi chamado de o *Teorema do Ponto Fixo de Brower.*

Capítulo

1

Espaços Métricos: Noções básicas

1.1 Métricas

Definição 1.1.1. *Uma métrica num conjunto* $M \neq \emptyset$ *é uma função* $d : M \times M \mapsto \mathbb{R}_+$*, que associa a cada par ordenado de elementos* $x, y \in M$ *um número real* $d(x, y)$*, chamado a distância de* x *a* y*, de modo que são satisfeitas as seguintes condições para quaisquer* x*,* y *e* $z \in M$*.*

(M.1) $d(x, y) \geq 0$*, onde* $d(x, y) = 0$ *se, e somente se,* $x = y$*;*

(M.2) $d(x, y) = d(y, x)$*;*

(M.3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$*.*

Um espaço métrico é o par ordenado (M, d) *onde* M *é um conjunto não vazio e* d *a métrica sobre* M*. Chamaremos por "o espaço métrico* M*", quando não gerar dúvida deixando subentendida a métrica* d *a ser considerada.*

Observação 1.1.2. *O postulado* $(M.2)$ *se refere a propriedade de simetria dos elementos. O postulado* $(M.3)$ *é conhecido como desigualdade triangular, que na geometria básica a soma de dois lados é sempre maior que o terceiro.*

Portanto, tendo um conjunto M com uma métrica sobre ele, satisfazendo as condições acima, temos um espaço métrico. No decorrer desta monografia, nos referiremos os elementos de um espaço métrico como pontos.

Exemplo 1.1.3. *A métrica "zero-um". Podemos tornar qualquer conjunto $M \neq \emptyset$ em um espaço métrico de maneira simples. Definindo da maneira a seguir:*

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & se\ x = y \\ 1, & se\ x \neq y \end{cases} \tag{1.1.1}$$

Exemplo 1.1.4. *O exemplo mais importante de espaços métricos, é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. A distância entre dois pontos $x, y \in \mathbb{R}$ definida por $d(x,y) = |x-y|$. Esta métrica é conhecida como métrica usual da reta.*

Exemplo 1.1.5. *O espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$. Neste exemplo vamos generalizar o exemplo anterior. Os pontos de $\mathbb{R}^n$ são as n-uplas ordenadas $x = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, onde cada x_i é um número real. Podemos definir três métricas de maneira natural.*

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2} = [\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2]^{\frac{1}{2}} \\ d'(x,y) &= |x_1-y_1| + \cdots + |x_n-y_n| = \sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i| \\ d''(x,y) &= max|x_1-y_1|, \ldots, |x_n-y_n| = max|x_i-y_i| \end{aligned}$$

As métricas d' e d'' são de verificação imediata, visto que d' é o somatório das distâncias em suas respectivas retas e d'' é a maior das distâncias somadas em d', porém, mostraremos que d realmente é uma métrica sobre o espaço $\mathbb{R}^n$.

Vamos verificar que $d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}$ é uma métrica. De fato:

- $$d(x,x) = \sqrt{(x_1-x_1)^2 + \cdots + (x_n-x_n)^2} = \sqrt{(0)^2 + \cdots + (0)^2} = 0.$$

- *Se $x \neq y$ então, $x_i \neq y_i$ para algum $1 \leq i \leq n$. Assim, $x_i - y_i \neq 0$, daí $(x_i-y_i)^2 > 0$,* *e portanto,*

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \geq \sqrt{(x_i - y_i)^2} > 0$$

- *Para qualquer $1 \leq i \leq n$, temos que:*

$$(x_i - y_i)^2 = (y_i - x_i)^2.$$

Assim,

$$(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2 = (y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2.$$

Tirando a raiz quadrada na equação acima, obtemos:

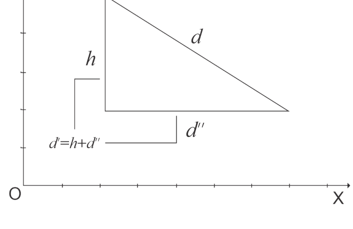
$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}.$$

Agora, para provar a desigualdade triangular, seria necessário a desigualdade de Cauchy-Schwarz em $\mathbb{R}^n$, o que será mostrado no exemplo sobre espaços vetoriais com produto interno, assim como a desigualdade triangular.

Proposição 1.1.6. *Sejam d, d' e d'' as métricas utilizadas acima, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$ vale a desigualdade;*

$$d''(x,y) \leq d(x,y) \leq d'(x,y) \leq n \cdot d''(x,y)$$

Demonstração. Antes de demonstrar este fato, vamos observar o caso em $\mathbb{R}^2$:



Para melhor organizar as ideias, vamos separar por partes:

(i) $d''(x,y) \leq d(x,y)$.

(ii) $d(x,y) \leq d'(x,y)$.

(iii) $d'(x,y) \leq n \cdot d''(x,y)$.

(i) para mostrar (i), elevemos $d(x,y)$ ao quadrado, então

$$d(x,y)^2 = (x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2$$

Pela definição, existe um índice i_0 tal que $d''(x,y) = \max|x_i - y_i| = |x_{i_0} - y_{i_0}|$. Deste modo

$$d''(x,y)^2 = |x_{i_0} - y_{i_0}|^2 \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 = d(x,y)^2$$

Consequentemente, ao extrair a raiz quadrada de ambos os lados, obtemos: $d''(x,y) \leq d(x,y)$, pois as distâncias são maiores ou igual a zero.

(ii) Temos por definição, que $d'(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$, ao elevarmos ao quadrado obtemos,

$$d'(x,y)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 + 2 \cdot \left[\sum_{i \neq j} |x_i - y_i||x_j - y_j|\right] \geq \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 = d(x,y)^2$$

Visto que no item anterior mostramos que:

$$d(x,y)^2 = (x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2$$

e por se tratar do somatório do produto de distâncias:

$$2 \cdot \left[\sum_{i \neq j} |x_i - y_i||x_j - y_j|\right] \geq 0$$

Novamente extraindo a raiz quadrada obtemos o desejado, $d(x,y) \leq d'(x,y)$.

(iii) Seja k o índice tal que, $d''(x,y) = \max|x_i - y_i| = |x_k - y_k|$. Assim ,vale a seguinte desigualdade:

$$d'(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n| \leq |x_k - y_k| + |x_k - y_k| + \cdots + |x_k - y_k| = n \cdot |x_k - y_k|$$

Como cada $|x_k - y_k| \geq |x_i - y_i|$, está provada a terceira afirmação. Com isso, mostramos a desigualdade.

$\square$

Agora, veremos um exemplo muito importante em espaços métricos, que são os espaços vetoriais normados, muito utilizado no curso de álgebra linear.

Exemplo 1.1.7. *(Espaços Vetoriais Normados) Com base em (ENDO et al., 2015), teremos que uma norma em um espaço vetorial real E é uma função real $||\cdot|| : E \to \mathbb{R}$, que associa cada vetor $x \in E$ ao número real não negativo $||x||$, chamado a norma de x, de modo a serem cumpridas as condições abaixo para quaisquer $x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.*

(N1) se $x \neq 0$, então $||x|| > 0$;

(N2) $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$;

(N3) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Um espaço vetorial normado é um par $(E, ||\cdot||)$ onde E é um espaço vetorial real e $||\cdot||$ é uma norma em E. Observemos que (N1) e (N2) garante que $||x|| > 0 \iff x \neq 0$, para isto basta tomar $\lambda = 0$ e $x = 0$ em (N2). Afirmamos que todo espaço vetorial normado $(E, ||\cdot||)$ torna-se um espaço métrico por meio da definição $d : E \times E \to \mathbb{R}$ dada por $d(x,y) = ||x - y||$.

Para mostrar que é uma métrica em E, devemos mostrar as três condições:

(M.1) Por (i) temos que $d(x,y) = ||x - y|| = 0$ então $x - y = 0$. Assim $x = y$. Portanto se $x \neq y \Rightarrow d(x,y) = ||x - y|| > 0$. E veja que $d(x,x) = ||x - x|| = ||0|| = ||0.0|| = |0| \cdot ||0|| = 0$.

(M.2) $d(x,y) = ||x-y|| = ||(-1)(-x+y)|| = |-1| \cdot ||-x+y|| = ||y-x|| = d(y,x)$

(M.3) $d(x,z) = ||x-z|| = ||x-z+y-y|| = ||(x-y)+(y-z)|| \leq ||x-y|| + ||y-z|| = d(x,y) + d(y,z)$, *com* $x, y, z \in E$.

Logo, E *se torna um espaço métrico.*

Exemplo 1.1.8. *(Espaços vetoriais com produto interno) Dado* E *um espaço vetorial real. Definimos como produto interno em* E *a função* $\langle\ ,\ \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ *que relaciona os vetores* $x, y \in E$ *a um número real* $\langle x, y\rangle$*, dizemos o produto interno de* x *por* y*. Cumprindo as seguintes propriedades, para dados quaisquer* $x, x', y \in E$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$*:*

(P1) $\langle x + x', y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle$;

(P2) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda \cdot \langle x, y\rangle$;

(P3) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$;

(P4) $x \neq 0 \Rightarrow \langle x, x\rangle > 0$.

Para definir a norma de um vetor neste espaço munido de produto interno tomemos que para $x \in E$ *temos que* $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$*, em outras palavras,* $|x|^2 = \langle x, x\rangle$*. Veja que pelas propriedades de espaço vetorial normado:*

(N1) Por (P4), tome:

$$x \neq 0 \Rightarrow \langle x, x\rangle > 0 \Rightarrow \sqrt{\langle x, x\rangle} > 0 \Rightarrow |x| > 0$$

O que nos dá (N1), assim fica satisfeita a primeira propriedade de espaço vetorial normado.

(N2) Fazendo uso da definição de norma com produto interno e de (P2), temos: $|\lambda \cdot x| = \sqrt{\langle \lambda \cdot x, \lambda \cdot x\rangle} = \sqrt{\lambda^2 \cdot \langle x, x\rangle} = \sqrt{(\lambda^2)} \cdot \sqrt{\langle x, x\rangle} = |\lambda| \cdot |x|$.

(N3) Para esta, faremos uso da desigualdade de Cauchy-Schwarz, que nos diz que dados $x, y \in \mathbb{R}$ *temos que* $|\langle x, y\rangle| \leq |x| \cdot |y|$ *cuja demonstração pode ser vista em (LIMA,*

2017b, pág. 7). Agora, tendo $x, y \in \mathbb{R}$ e usando a definição de norma neste espaço vetorial, temos:

$$|x+y|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = |x|^2 + |y|^2 + 2\langle x, y\rangle \leq |x|^2 + |y|^2 + 2\cdot|x|\cdot|y| = (|x|+|y|)^2$$

Daqui ao retirarmos a raiz quadrada terminamos a nossa demonstração e mostramos a desigualdade triangular no $\mathbb{R}^n$ do exemplo 1.1.5.

1.2 Bolas e Esferas

Nesta seção, faremos a introdução ao estudo das bolas e esferas, que na teoria de espaços métricos são de fundamental importância dada a sua utilização. De forma semi-automática, ao pensarmos em bolas nos vem a cabeça algo como a forma geométrica de um círculo ou uma "esfera". Mas nesta seção veremos que a definição de bola em espaços métricos é mais abrangente e pode possuir outras formas.

Seja a um ponto no espaço métrico M, dado um número real $r > 0$. Definimos:

Definição 1.2.1. *A bola aberta de centro a e raio r. É o conjunto $B(a; r)$ dos pontos de M tais que a distância ao ponto a é menor que r, ou seja:*

$$B(a; r) = \{x \in M;\ d(x, a) < r\}$$

Definição 1.2.2. *A bola Fechada de centro a e raio r. É o conjunto $B[a; r]$ dos pontos de M tais que a distância ao ponto a é menor ou igual que r, ou seja:*

$$B[a; r] = \{x \in M;\ d(x, a) \leq r\}$$

Definição 1.2.3. *A esfera de centro a e raio r. É o conjunto $S(a; r)$ dos pontos de M tais que a distância ao ponto a é igual a r, ou seja:*

$$S(a; r) = \{x \in M;\ d(x, a) = r\}$$

Observação 1.2.4. *Note que, a bola fechada de centro a e raio r, pode ser obtida pela* *união da bola aberta e a esfera de mesmo centro e raio.*

$$B[a;r] = B(a;r) \cup S(a;r)$$

Definição 1.2.5. *Seja M um espaço métrico. Dizemos que um ponto a em M é isolado se, existe uma bola de centro a que não contém nenhum ponto de M, ou seja, existe* $r > 0$ *tal que* $B(a;r) = \{a\}$.

Definição 1.2.6. *Se todos os pontos do espaço métrico M forem isolados, chamaremos o espaço métrico M de discreto.*

Exemplo 1.2.7. *Seja M um espaço métrico munido da métrica zero-um, então para todo* $a \in M$, *temos que:*

$$B(a;r) = B[a;r] = \begin{cases} M, & se\ r > 1 \\ \{a\}, & se\ r < 1 \end{cases} \tag{1.2.1}$$

Por outro lado, $B(a,1) = \{a\}$ *e* $B[a;1] = M$. *Porém,* $S(a;r) = \emptyset$ *quando* $r \neq 1$, *mas* $S(a;1) = M - \{a\}$.

Exemplo 1.2.8. *Uma bola no conjunto dos números reais com a métrica usual é um intervalo.*

De fato seja $a \in \mathbb{R}$ *e* $r > 0$, *a bola de centro a e raio r. Temos:*

$$B(a;r) = \{x \in \mathbb{R}; d(x,a) < r\} = \{x \in \mathbb{R}; a - r < x < a + r\}$$

e

$$B[a;r] = \{x \in \mathbb{R}; d(x,a) \leq r\} = \{x \in \mathbb{R}; a - r \leq x \leq a + r\}$$

1.3 Conjuntos Limitados

Na matemática, diversos conceitos de conjuntos limitados foram desenvolvidos, cada um adequado a sua necessidade.

Definição 1.3.1. *Dado* $X \neq \emptyset$, *um subconjunto de um espaço métrico M. X é dito limitado se existir uma constante real* $k > 0$ *de forma que* $d(x,y) \leq k$ *para quaisquer*

$x, y \in X$. O menor número real k será o diâmetro do conjunto X, denotamos ele por $diam(X)$. Isto é,

$$diam(X) = sup\{d(x,y);\ x, y \in X\}$$

Quando X não é limitado escrevemos $diam(X) = \infty$ isso significa que para qualquer $k \in \mathbb{R}_+$ existem $x_k, y_k \in X$ tais que $d(x_k, y_k) > k$.

Exemplo 1.3.2. *Um caso de conjunto limitado em qualquer espaço métrico são as bolas abertas, uma vez que, seu diâmetro é menor que $2r$.*

De Fato,

$$d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,y) = d(x,a) + d(y,a) < r + r = 2r$$

Observação 1.3.3. *O mesmo vale para as bolas fechadas e esferas.*

Exemplo 1.3.4. *Dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é limitada quando existe uma constante real $k > 0$ tal que $d(x,y) \leq k$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.*

Exemplo 1.3.5. *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por, $f(x) = sen(x)$ é limitada pois $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.*

Exemplo 1.3.6. *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por, $f(x) = e^x$ não é limitada pois $f(\mathbb{R}) = (0, \infty)$.*

Exemplo 1.3.7. *Seja X e Y conjuntos limitados no espaço métrico M, então $X \cup Y$ também será um conjunto limitado.*

Para o caso em que $X = \emptyset$ ou $Y = \emptyset$ não temos nada para fazer. Então suponhamos que $X, Y \neq \emptyset$, seja $a \in X$ e $b \in Y$ pontos fixados. Dado que X e Y são conjuntos limitados, $\exists\ k_1 > 0,\ k_2 > 0$ tais que $d(x,a) \leq k_1,\ \forall x \in X$, e $d(y,b) \leq k_2,\ \forall y \in Y$. Agora, tome $k = k_1 + k_2 + d(a,b)$, assim, obtemos que para cada $x \in X$ e $y \in Y$

$$d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,b) + d(b,y) \leq k_1 + d(a,b) + k_2 = k$$

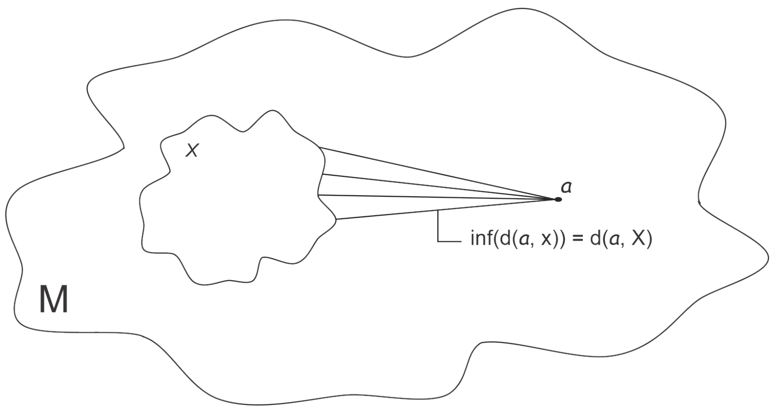
Portanto, $d(x,y) \leq k$, para todo $x, y \in X \cup Y$, o que comprova que $X \cup Y$ é limitado.

1.4 Distância entre Conjuntos

Faremos aqui, nesta seção uma breve introdução sobre distâncias entre conjuntos e distância de um ponto a um conjunto. Este conceito se torna essencial quando formos definir conjuntos fechados, entre outras coisas.

Definição 1.4.1. *Seja M um espaço métrico e $X \subset M$. Dado $a \in M$, definiremos a distância entre o ponto a e um conjunto X, como o número real:*

$$d(a, X) = \inf_{x \in X} d(a, x)$$



Agora, podemos concluir, algumas propriedades a partir desta definição.

- $d(a, X) \leq d(a, x), \ \forall x \in X$;
- *Se* $d(a, X) < c$, *então* $\exists\ x \in X$ *tal que* $d(a, x) < c$.

Exemplo 1.4.2. *Seja o conjunto $X \subset \mathbb{R}$ com $X = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$, temos que a distância $d(0, X) = 0$.*

Observação 1.4.3. *Conforme n cresce, os elementos do conjunto X se aproximam de 0 a ponto que a distância entre 0 e algum elemento $\frac{1}{n}$ de X seja quase nula. No capítulo sobre sequências isso será melhor apresentado, sendo dada a devida justificativa.*

Capítulo

2

Continuidade

Neste capítulo abordaremos um dos tópicos mais importantes de espaços métricos e também da topologia, que são das aplicações contínuas. Esta teoria é um dos pilares da topologia e aqui neste capítulo falaremos sobre algumas definições e propriedades básicas, que nos permitirá ver uma relação direta com a análise real e de certo modo um primeiro contato com as noções topológicas.

2.1 Aplicações contínuas

Definição 2.1.1. *Sejam M e N espaços métricos com métrica "d"e "d′", respectivamente. Dizemos que a aplicação $f : M \to N$ é contínua no ponto $a \in M$, se dado $\epsilon > 0$, pode-se obter $\delta > 0$ tal que, $d(x, a) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \epsilon$.*

Diz-se que a aplicação é contínua, quando ela for contínua em todos os pontos de M. Podemos dizer que, $f : M \to N$ é contínua no ponto a se, dada $B = B(f(a); \epsilon)$ podemos encontrar uma $B' = B(a; \delta)$ tal que $f(B') \subset B$.

No decorrer do trabalho trataremos as métricas de "M" e "N" apenas como "d", porém há espaços métricos em que estas métricas serão distintas.

Exemplo 2.1.2. *Uma imersão isométrica é uma aplicação $f : M \to N$ tal que $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ para quaisquer $x,y \in M$. Toda aplicação isométrica é uma aplicação contínua. De* *fato, tomando* $\delta = \epsilon$ *temos que*

$$d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) = d(x,a) < \delta = \epsilon,$$

para qualquer $a \in M$.

Observação 2.1.3. *As aplicações identidades,* $f : M \to M$ *dadas por* $f(x) = x$, $\forall x \in M$, *é uma isometria, e portanto, são contínuas.*

Exemplo 2.1.4. *As aplicações lipschitzianas são aplicações* $f : M \to N$*, onde existe uma constante* $c > 0$ *(chamada constante de lipschitz) tal que:*

$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x,y), \ \forall \ x, y \in M$$

Toda aplicação lipschitziana é contínua, pois:

Dado $\epsilon > 0$*, tomamos* $\delta = \dfrac{\epsilon}{c}$*, daí,*

$$d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) \leq c \cdot d(x,a) < c \cdot \frac{\epsilon}{c} = \epsilon$$

para qualquer $a \in M$.

Exemplo 2.1.5. *Dizemos que uma aplicação* $f : M \to N$ *é uma contração fraca, quando* $d(f(x), f(y)) \leq d(x,y)$*. Toda contração fraca é uma aplicação contínua. Para isto, basta observar que toda contração é uma aplicação lipschitziana, com* $c = 1$.

Exemplo 2.1.6. *Seja* $a \in M$ *um ponto isolado. Então toda aplicação* $f : M \to N$ *é contínua no ponto* a.

Como a *é isolado, dado* $\epsilon > 0$ *basta tomar* δ *tal que* $B(a;\delta) = \{a\}$*. Então* $d(x,a) < \delta \Rightarrow x = a \Rightarrow d(f(x), f(a)) = 0 < \delta$.

Observação 2.1.7. *Se* M *é um espaço métrico discreto, toda aplicação* $f : M \to N$ *é contínua.*

Exemplo 2.1.8. *Um exemplo desta observação são as aplicações do tipo* $f : \mathbb{N} \to M$.

Definição 2.1.9. *Sejam M, N espaços métricos. chamaremos a aplicação $f : M \to N$ de descontínua no ponto $a \in M$, no caso dela não ser contínua em a. Quer dizer, quando existir $\epsilon > 0$ tal que $\forall \delta > 0$, é possível ter um x_δ tal que $d(x_\delta, a) < \delta \Rightarrow d(f(x_\delta), f(a)) \geq \epsilon$.*

Exemplo 2.1.10. *Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por.*

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \in \mathbb{Q} \\ 0, & se\ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Deste modo, tomando $\epsilon = \frac{1}{2}$, então dado $\delta > 0$, tomamos x_δ tal que $|x_\delta - a| < \delta$, sendo $x_\delta \in \mathbb{Q}$ e $a \notin \mathbb{Q}$ então $|\phi(x_\delta) - \phi(a)| = |1 - 0| = 1 > \delta = \frac{1}{2}$.

Proposição 2.1.11. *Com base em (ENDO et al., 2015). Sejam f, g aplicações contínuas. Se $f : A \to B$ é contínua no ponto a e $g : B \to C$ é contínua no ponto f(a), então $g \circ f : A \to C$ é contínua no ponto a. Ou seja, a composição de aplicações contínuas é contínua.*

Demonstração. Como g é contínua no ponto $f(a)$, dado $\epsilon > 0$ podemos obter $\lambda > 0$ tal que $y \in B$,

$$d(y, f(a)) < \lambda \Rightarrow d(g(y), g(f(a))) < \epsilon. \ (*)$$

Agora para o mesmo λ, como f é contínua no ponto a, por hipótese, podemos obter $\delta > 0$ tal que

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \lambda$$

Daí, segue de $(*)$ que

$$d(g(f(x)), g(f(a))) < \epsilon.$$

□

Corolário 2.1.12. *Mantendo o raciocínio de (ENDO et al., 2015). Sejam M um espaço métrico e $X \subset M$. Se $f : M \to N$ é contínua no ponto $a \in X$ então $f_{|X} : X \to N$ é contínua no ponto a.*

Demonstração. A restrição $f_{|X}$ é uma composição do tipo $f \circ i$, onde $i : X \to M$ é uma aplicação de inclusão, ou seja, $i(x) = x$, com $x \in X$. Assim, $d(i(x), i(a)) = d(x, a)$, em particular, $d(i(x), i(a)) \leq d(x, a)$, logo i é uma contração fraca e portanto é uma aplicação contínua. Como por hipótese f é contínua, a Proposição 2.1.11 nos garante que a composição $f \circ i$ é contínua. Logo, $f_{|X}$ é contínua.

$\square$

Definição 2.1.13. *Se M, N são espaços métricos, uma aplicação $f : M \to N$ se diz uniformemente contínua, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tais que:*

Para $x, y \in M$ satisfazendo $d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon$.

Intuitivamente significa que dados dois valores próximos em M, existem dois correspondentes em N que estão próximos.

Observação 2.1.14. *Toda aplicação uniformemente contínua é uma aplicação contínua, mas a recíproca não é verdadeira.*

Exemplo 2.1.15. *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$. Embora seja contínua, não é uniformemente contínua.*

De fato, seja $\epsilon = 1$, para qualquer $\delta > 0$ existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $\frac{1}{n} < \delta$. Façamos, $x = n$ e $y = n + \frac{1}{n}$. Então, $|x - y| = |n - (n + \frac{1}{n})| = |-\frac{1}{n}| = \frac{1}{n} < \delta$, mas:

$$|y - x| = \frac{1}{n} < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| = |(n^2 + 2 + \frac{1}{n^2}) - n^2| = 2 + \frac{1}{n^2} > \epsilon.$$

Logo, f não é uniformemente contínua.

2.2 Espaços Homeomorfos

Definição 2.2.1. *Se M, N são espaços métricos, uma aplicação $f : M \to N$ chama-se um homeomorfismo, quando:*

i. f é bijetora;

ii. f e sua inversa f^{-1} são contínuas.

Observação 2.2.2. *Na teoria de grupos sabemos que, o inverso de homomorfismo bijetivo, ainda é um homomorfismo. Aqui em espaços métricos e também na topologia, pode-se ocorrer o fato de aplicações contínuas bijetivas, terem suas inversas f^{-1} descontínuas. Ou seja, pode ocorrer $f : M \to N$ contínua e bijetiva, e sua inversa $f^{-1} : N \to M$ descontínua. A seguir daremos um exemplo de tal fato.*

Exemplo 2.2.3. *Considere a aplicação $f : [0, 2\pi) \to S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ definido por $f(t) = (sen(t), cos(t))$ que é contínua, pois suas componentes, seno e cosseno são contínuas, mas sua inversa $g = f^{-1}$ não é contínua no ponto $p = (1, 0)$.*

Vamos mostrar que de fato a sua inversa é descontínua no ponto p. Considere a bola de centro $g(p) = 0$ e raio $r = 1$, esta bola em $[0, 2\pi)$ é o intervalo $[0, 1)$. Consideremos uma bola de centro $p = (0, 1)$ e raio igual a $\delta > 0$ em S^1. Esta bola é um arco aberto em S^1 de centro p. Tomamos agora $n \in \mathbb{N}$ de maneira que:

$$p_n = (cos(2\pi - \frac{1}{n}), sen(2\pi - \frac{1}{n})),$$

pertença a esta bola. Então, $g(p_n) = 2\pi - \dfrac{1}{n} > 1$.

Como $g(p_n) > 1$, então, não pertence a bola $[0, 1)$.

Proposição 2.2.4. *Se o espaço métrico N é discreto e $f : M \to N$ é um homeomorfismo, então M também será discreto.*

Demonstração. De fato, dado a um ponto arbitrário de M, existe uma bola $B(f(a); \epsilon) = \{f(a)\}$ reduzindo-se a um ponto. Sendo f contínua, $\exists \delta > 0$ tal que $f(B(a; \delta)) \subset B(f(a); \epsilon) = \{f(a)\}$. Como f é injetiva, a bola $B(a; \delta)$ possui apenas um ponto, o ponto a, e portanto, a é isolado. Assim, provamos que f sendo injetiva, e $f(a)$ um ponto isolado em N, então a é isolado em M, deste modo, M é discreto. □

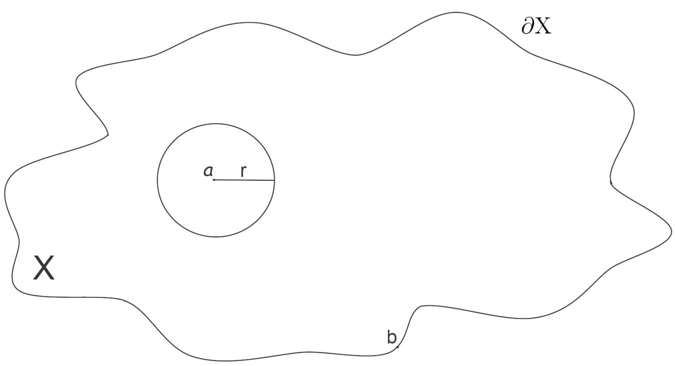
Capítulo

3

Topologia dos Espaços Métricos

3.1 Conjuntos Abertos

Seja $X \subset M$, onde M é um espaço métrico, temos à seus pontos determinadas definições dado um estudo das bolas abertas centradas em um ponto $a \in X$ e com um número real $r > 0$ como raio. Quando o ponto a for centro de uma bola aberta e está bola estiver completamente contida em X, chamaremos a de ponto interior, denotamos o conjunto dos pontos interiores de X por $int(X)$. Por outro lado, dado um ponto $b \in X$ que não seja ponto interior, isto é, dado um número real $r > 0$ a bola aberta centrada em b com raio $r > 0$ possuí pontos que não pertencem a X, assim, existe $x \in B(b; r)$ tal que $d(x, b) < r$ porém x não pertence ao subconjuto X de M. Neste caso, quando o ponto não for interior dizemos que ele pertence a fronteira, a qual, denotamos por ∂X.



Exemplo 3.1.1. *Com base em (ENDO et al., 2015). Na reta, o interior do intervalo* $[0,1)$ *é o intervalo aberto* $(0,1)$ *e sua fronteira possui apenas os pontos* $0,1$.

Evidente, se $a \in (0,1)$ *então* $0 < a < 1$ *e tomando* $r = min\{a, 1-a\}$, *então garantimos que* $(a-r, a+r) \subset [0,1)$. *Logo* a *é interior a* $[0,1)$. *Veja que* $0 \in [0,1)$, *mas como toda bola de centro* 0 *contém pontos negativos e positivos, então* $0 \in \partial[0,1)$. *Agora observe que toda bola de centro* 1, *contém pontos menores que* 1 *e maiores que* 1 *temos também que* $1 \in \partial[0,1)$.

Exemplo 3.1.2. *Tome* $\mathbb{Q}$ *o conjunto dos números racionais. Devido a fato de* $\mathbb{Q}$ *ser denso em* $\mathbb{R}$, *como pode ser visto em análise real, não temos bolas abertas que estejam inteiramente contidas nos racionais. Portanto,* $\partial\mathbb{Q}$ *é a reta real* $\mathbb{R}$.

Definição 3.1.3. *Dado* $X \subset M$, M *é um espaço métrico, teremos que* X *será um conjunto aberto em* M, *quando para cada* $a \in X$ *tivermos que* a *é ponto interior. Desta forma,* $X \subset M$ *é aberto é necessário e suficiente que* $X \bigcap \partial X = \emptyset$.

Proposição 3.1.4. *Em (ENDO et al., 2015), temos que dado qualquer espaço métrico M, uma bola aberta* $B(a;r)$ *é um conjunto aberto.*

Demonstração. Seja x $\in B(a;r)$ temos que $d(x,a) < r$, então $r - d(x,a) > 0$. Tome então $s = r - d(x,a)$. Afirmamos que $B(x;s) \subset B(a;r)$. Evidente, se $y \in B(x;s)$ então a $d(x,y) < s$ daí $d(a,y) \leq d(a,x) + d(x,y) < d(a,x) + s = r$. Portanto y $\in B(a;r)$. □

Exemplo 3.1.5. *Um caso interessante são os pontos isolados que podem ser um conjunto aberto. Observe que, dado* $\{a\}$ *aberto, então para cada* $x \in \{a\}$, *temos* $r > 0$ *tal que* $B(a;r) \subset \{a\}$. *Porém* $a \subset B(a;r)$ *assim* $a = B(a;r)$. *Logo,* a *é isolado.*

Reciprocamente, se a *é isolado em M, então existe* $r > 0$, *tal que* $B(a;r) = \{a\}$.

Proposição 3.1.6. *Tomando por base (ENDO et al., 2015). Sejam* M, N *espaços métricos. A função* $f : M \to N$ *é contínua se, e somente se, a imagem inversa* $f^{-1}(A')$ *de todo subconjunto aberto* $A' \subset N$ *é um subconjunto aberto de M.*

Demonstração. Suponhamos que f seja contínua, queremos mostrar que dado A' aberto em N, $f^{-1}(A')$ é aberto em M. De fato, para cada $a \in f^{-1}(A')$, temos que $f(a) \in A'$, daí, por definição, existe $r > 0$ tal que $B(f(a); r) \subset A'$. Sendo f contínua em a, segue que, por definição, existe $\delta > 0$ tal que $f(B(a; \delta)) \subset B(f(a); r) \subset A'$, ou seja, $B(a; \delta) \subset f^{-1}(A')$ Logo, $f^{-1}(A')$ é aberto.

Reciprocamente, ou seja, suponhamos que, $f^{-1}(A')$ de cada $A' \subset N$ aberto seja um aberto em M. Queremos mostrar que f é contínua. De fato, seja $a \in M$. Dado $r > 0$, a bola $B(f(a); r)$ é um aberto em N. Logo, tomando $A' = B(f(a); r)$ temos $f^{-1}(A')$ é aberto, em M, contendo a então, existe $\delta > 0$ tal que $B(a; \delta) \subset f^{-1}(A')$, ou seja, $f(B(a; \delta)) \subset B(f(a); r)$. E portanto, f é contínua em a. □

Exemplo 3.1.7. *A imagem direta de $f(A)$ de um conjunto aberto $A \subset M$ por uma aplicação contínua $f : M \to N$ pode não ser um conjunto aberto de N.*

- *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. Seja $A = (-1, 1)$ um intervalo aberto, temos que $f(A) = [0, 1)$ que não é um subconjunto aberto da reta.*

Observação 3.1.8. *Uma aplicação $f : M \to N$ chama-se aberta para cada aberto $A \subset M$, quando a sua imagem $f(A)$ é um subconjunto aberto de N.*

3.2 Conjuntos Fechados

Definição 3.2.1. *Seja M um espaço métrico e $X \subset M$. Um ponto a chama-se aderente a X, quando $d(a, X) = 0$. Isto é, existem pontos de X próximos de a, ou seja, para cada $\epsilon > 0$ podemos encontrar um $x \in X$ tal que $d(a, x) < \epsilon$.*

Podemos dizer de outras maneiras que, a é aderente a X:

(i) Toda vizinhança de a tem pontos de X;

(ii) para todo $\epsilon > 0$ tem-se $B(a; \epsilon) \bigcap X \neq \emptyset$;

(iii) para todo aberto A que contém a, tem-se $A \bigcap X \neq \emptyset$.

Definição 3.2.2. *O fecho de um conjunto X, no espaço métrico M, é o conjunto* $\overline{X}$ *dos pontos de M que são aderentes a X. Ou seja, afirmar que* $a \in \overline{X}$ *quer dizer que a é aderente a X em M.*

Observação 3.2.3. *Assim temos que,* $\overline{\emptyset} = \emptyset$, $\overline{M} = M$. $X \subset \overline{X}$, $\forall x \in X$. *Por último e não menos importante, se* $X \subset Y$, *então* $\overline{X} \subset \overline{Y}$.

Exemplo 3.2.4. *Todo ponto* $a \in X$ *é aderente a X. Além disso, os pontos da fronteira* ∂X *também são aderentes a X.*

- *Na reta real, se* $A = (a, b)$ *ou* $A = (a, b]$ *ou* $A = [a, b)$ *então o* $\overline{A} = [a, b]$

Definição 3.2.5. *Seja M um espaço métrico, um subconjunto* $X \subset M$ *diz-se denso em M, quando* $\overline{X} = M$, *isto é, quando toda bola aberta de M contém algum ponto de X.*

Exemplo 3.2.6. *O conjunto* $\mathbb{Q}$ *dos números racionais é denso em* $\mathbb{R}$ *do mesmo modo o conjunto* $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ *dos números irracionais. De fato, todo intervalo aberto contém números racionais e irracionais, e como vimos anteriormente, as bolas no conjunto dos números reais, são intervalos.*

Definição 3.2.7. *Seja M um espaço métrico, temos que* $F \subset M$ *é fechado em M, quando* $M - F$, *complemento de* F *em* M, *for aberto em* M.

Proposição 3.2.8. *Vide (ENDO et al., 2015). Se* $F \subset M$, F *é fechado se, e somente se, contém todos os pontos aderentes de F, ou seja,* $\overline{F} = F$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Temos que F é fechado, ou seja, $M - F$ é aberto, o que significa que para todo $a \in M - F$ existe $r > 0$ tal que $B(a; r) \subset M - F$. Assim, para todo $a \in M - F$, existe $B(a; r)$ que não contém pontos de F. Logo, esses pontos que não pertencem a F também não são aderentes a ele, pois $B(a; r) \bigcap F = \emptyset$.

($\Leftarrow$) F contém todos os seus pontos aderentes de F. Assim, os pontos que não pertencem a F também não são aderentes a ele, ou seja, para todo a $\in M - F$, podemos encontrar $B(a; r) \bigcap F = \emptyset$. Então, para todo a $\in M - F$, existe $r > 0$ tal que $B(a; r) \subset M - F$, ou seja, $M - F$ é aberto, e portanto F é fechado.

$\square$

Proposição 3.2.9. *Em (ENDO et al., 2015), temos que sejam M, N espaços métricos. A função $f : M \to N$ é contínua se, e somente se, a imagem inversa $f^{-1}(\overline{F})$ de todo conjunto fechado $\overline{F} \subset N$ seja um subconjunto fechado de M.*

Demonstração. ($\Rightarrow$)Suponha, primeiramente, que f é contínua. Provemos que a imagem inversa de todo conjunto fechado $\overline{F} \subset N$ é fechado em M. Como $\overline{F} \subset N$ é fechado, então, por definição, o complementar de $\overline{F}$ (denotado por $\overline{F}^c$) é aberto, pela Proposição 3.1.7 $f^{-1}(\overline{F}^c) = f^{-1}(\overline{F})^c$ é aberto, logo, $f^{-1}(\overline{F})$ é fechado.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponha que a imagem inversa de todo conjunto fechado em N é fechado em M. Mostremos que f é contínua. Dado $\overline{A} \subset N$ aberto, então seu complementar é fechado. Daí $f^{-1}(\overline{A}^c) = f^{-1}(\overline{A})^c$ é fechado em M, e o complementar de $f^{-1}(\overline{A})^c$ é aberto, logo, $f^{-1}(\overline{A})$ é aberto. Portanto, pela Proposição 3.1.7, f é contínua.

□

Observação 3.2.10. *A noção de "Fechado" não é o contrário de "Aberto". Quando um conjunto não é fechado, não podemos afirmar que ele é aberto. Por exemplo, o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais, não é fechado e nem aberto, o mesmo ocorre com seu complementar em $\mathbb{R}$. Também existem conjuntos que são ao mesmo tempo abertos e fechados. Como o Espaço todo e o vazio.*

Definição 3.2.11. *Seja M um espaço métrico e $X \subset M$. Diz-se que a é um ponto de acumulação de X se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$ a interseção*

$$(B(a;\epsilon) - \{a\}) \bigcap X$$

é um conjunto infinito. Ou seja, toda bola de centro a, contém infinitos pontos distintos de a. o conjunto dos pontos de acumulação de X, denotaremos por X'.

Exemplo 3.2.12. *No conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, o número 0 é o único ponto de acumulação do conjunto $\{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$.*

Capítulo

4

Sequências

4.1 Limites de Sequências

Definição 4.1.1. *Dada uma aplicação $x : \mathbb{N} \to M$ dizemos que esta é uma sequência se ela associar para cada valor de $n \in \mathbb{N}$ um elemento de M, M é um espaço métrico, tal valor é chamado de valor da sequência em n, dito n-ésimo termo e denotado por x_n.*

$$x : \mathbb{N} \to M$$

$$n \mapsto x_n$$

Chamaremos o conjunto dos termos da sequência por $(x_n) = \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$.

Observação 4.1.2. *Quando a sequência for injetiva teremos que ela será uma sequência de termos distintos.*

Definição 4.1.3. *Uma subsequência de (x_n) é uma restrição da aplicação que associa a cada n um termo x_n a outro subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \dots\}$ de $\mathbb{N}$. A subsequência $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots)$ denotaremos esta subsequência por (x_{n_k}) sendo $k \in \mathbb{N}'$.*

Exemplo 4.1.4. *Seja (x_n) uma sequência $x : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $x(n) \to n$ temos a subsequência dos números pares $(x_{2k}) = \{2, 4, 6, 8, \dots, 2n, \dots\}$.*

Definição 4.1.5. *Chamaremos uma sequência em um espaço métrico de limitada quando existir um número real k de maneira que $d(x_m, x_n) \leq k$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$. Em outras palavras, se o conjunto de termos é limitado, temos que a sequência (x_n) é limitada.*

Observação 4.1.6. *Uma subsequência de uma sequência limitada ainda é limitada.*

Definição 4.1.7. *Com base em(ENDO et al., 2015). Dizemos que o ponto a de um espaço métrico M é limite de uma sequência (x_n), se para todo $\epsilon > 0$, pode-se obter um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \epsilon$. outra notação: $a = lim\ x_n$ ou $x_n \to a$.*

Quando dizemos que $a = lim\ x_n$ em um determinado espaço métrico M, equivale a dizer para toda bola $B(a; \epsilon)$ $\exists$ $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in B(a; \epsilon)$, não pertencendo a esta bola, apenas uma quantidade finita de termos, sendo eles $(x_1, x_2, \ldots, x_{n_0})$.

Observação 4.1.8. *No caso de não existir o limite da sequência (x_n), diremos que a sequência é divergente.*

Exemplo 4.1.9. *Seja a sequência $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por $x_n = \dfrac{1}{n}$, então $lim\ x_n = 0$.*

De fato, dado $\epsilon > 0$ arbitrário, $\exists$ $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \dfrac{1}{\epsilon}$, como $\mathbb{N}$ é ilimitado em $\mathbb{R}$ tal número existe, então $n_0 > \dfrac{1}{\epsilon} \Rightarrow \dfrac{1}{n_0} < \epsilon$. Deste modo, $n > n_0 > 0 \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{n_0} < \epsilon$. Portanto, para todo $\epsilon > 0$ $\exists$ $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $n > n_0 \Rightarrow |\dfrac{1}{n} - 0| = |\dfrac{1}{n}| = \dfrac{1}{n} < \epsilon$.

Proposição 4.1.10. *Se uma sequência for convergente, então ela é limitada.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência convergente em um espaço métrico M, e $lim\ x_n = a$. Como a sequência é convergente, então vale para todo ϵ, em particular para $\epsilon = 1$, assim obtemos, $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < 1$ ou $x_n \in B(a; 1)$. Tomemos $r = max\{1, d(a, x_1), ..., d(a, x_{n_0}\}$ daí $B(a, 1) \cup \{x_1, ..., x_{n_0}\} \in B(a; r)$, onde $B(a; r)$ é um conjunto limitado.

$\square$

Observação 4.1.11. *A recíproca da proposição acima é falsa. Em outras palavras, nem toda sequência limitada é convergente. A seguir daremos um exemplo.*

Exemplo 4.1.12. *A sequência de números reais $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, dada por $x_n = (-1)^n$ é limitada, mas não é convergente.*

A sequência é de fato limitada, pois os termos de sua sequência são apenas $\{-1, 1\}$ mas a sequência não possui limite, pois fica oscilando, quando n é impar a sequência é -1, e quando n é par, a sequência é 1.

Proposição 4.1.13. (Unicidade do limite) *O limite de uma sequência é único, ou seja, ela não pode convergir para dois valores distintos.*

Demonstração. Vamos supor que tal limite não seja único. Então $lim\ x_n = a$ e $lim\ x_n = b$ com $a \neq b$. tomamos $\epsilon = \dfrac{d(a,b)}{2} > 0$, assim existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $n > n_1 \Rightarrow d(x_n, a) < \epsilon$ e $n > n_2 \Rightarrow d(x_n, b) < \epsilon$. Seja $n_0 = max\{n_1, n_2\}$, desta forma,

$$n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \epsilon \ e \ d(x_n, b) < \epsilon,$$

Daí,

$$d(a,b) \leq d(a, x_n) + d(x_n, b) < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = d(a,b),$$

Logo $d(a,b) < d(a,b)$ é um Absurdo. Que ocorreu ao assumir que, a sequência poderia assumir dois limites distintos.

□

Proposição 4.1.14. *Seja (x_n) uma sequência em um espaço métrico M. Temos que no caso do $lim\ x_n = a$, então as suas subsequência também irão convergir para a.*

Demonstração. Seja (x_{n_k}) uma subsequência de (x_n). Como $lim\ x_n = a$, temos que $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, a) < \epsilon$. Sendo assim, seja k_0 tal que $n_{k_0} > n_0$, para todo $k > k_0 \Rightarrow n_k > n_{k_0} > n_0 \Rightarrow d(x_{n_k}, a) < \epsilon$. Assim, toda subsequência converge para a.

□

Corolário 4.1.15. *Seja $lim\ x_n = a$, tomemos um b tal que $a \neq b$, então teremos a existência de $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $n > n_0 \Rightarrow x_n \neq b$.*

Demonstração. Como por hipótese $a \neq b$ então $d(a,b) > 0$. Suponha que $b < a$, tomaremos $\epsilon = d(a,b) > 0$, como $a = lim\ x_n$, então, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $b \notin B(a, \epsilon)$ e $\forall n > n_0$ temos que $x_n \in B(a, \epsilon)$ e portanto $b \neq x_n$ para $n > n_0$.

□

Corolário 4.1.16. *Por (ENDO et al., 2015). Se lim $x_n = a$, então dado $m \in \mathbb{N}$, o lim $x_{m+n} = a$.*

Demonstração. Temos que $(x_{m+n}) = (x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_{m+n}, ...)$, note que esta é um subsequência de x_n, logo pela proposição acima, é convergente.

□

Observação 4.1.17. *A proposição anterior nos garante que, se uma sequência converge para a, então qualquer subsequência de (x_n) converge para a. Mas o fato mais importante é que, se duas subsequências de (x_n) possuem limites distintos podemos afirmar que a sequência (x_n) é divergente.*

4.2 Convergência e Topologia

Proposição 4.2.1. *Dados M, N espaços métricos e uma sequência em M. Para que a aplicação $f : M \to N$ seja contínua no ponto a é necessário e suficiente que para qualquer sequência (x_n) que seja convergente para algum a em M aconteça que $f(x_n)$ converge para $f(a)$ em N.*

Demonstração. Esta demonstração pode ser lida em (LIMA, 2017b, pág. 139). □

Proposição 4.2.2. *Tomando (ENDO et al., 2015) por base. Seja M um espaço métrico, $X \subset M$, $a \in \overline{X}$ se, e somente se, a for limite de uma sequência $x_n \in X$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Por hipótese $a \in \overline{X}$, então tomando $\epsilon = \dfrac{1}{n} > 0$, para cada n, existe $x_n \in B(a; \dfrac{1}{n}) \cap X$. Portanto $x_n \in X$, ou seja, $d(x_n, a) \leq \dfrac{1}{n}$. Afirmamos que $lim\ x_n = a$. Como já temos acima que $d(x_n, a) \leq \dfrac{1}{n}$ está mostrada a afirmação.

($\Leftarrow$) temos por hipótese que $lim\ x_n = a$, com $x_n \in X$. Então dado $\epsilon > 0$ arbitrário, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \epsilon$, em outros termos, $x_n \in B(a; \epsilon) \cap X$. Portanto, $a \in \overline{X}$, pois dado qualquer $\epsilon > 0$, temos $x_n \in B(a; \epsilon) \cap X$. □

Proposição **4.2.3.** *Seja um espaço métrico M, dado $X \subset M$, a é ponto de acumulação de X se, e somente se, existe uma sequência $(x_n) \subset X$ de pontos distintos ($x_n \neq x_{n'}$ se $n \neq n'$) tal que lim $x_n = a$.*

Demonstração. Vide (LIMA, 2017b, pág. 141). □

Exemplo **4.2.4.** *Dadas $f, g : M \to N$ contínuas. o conjunto F dos pontos $x \in M$ tais que $f(x) = g(x)$ é fechado. De fato, dada uma sequência de pontos x_n em F, como lim $x_n = a \in M$, temos que $f(x_n) = g(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue daí que: $f(a) = f(lim\ x_n) = \ lim\ f(x_n) = \ lim\ g(x_n) = g(lim\ x_n) = g(a)$. Deste modo, $a \in F$, e portanto, F é fechado.*

Capítulo

5

Conjuntos Compactos

5.1 Compacidade

Nesta seção, para definir conjuntos compactos, temos duas definições que são equivalentes, para a praticidade das demonstrações e melhor compreensão utilizaremos as que envolvem sequências, uma vez que se trata bastante sobre elas durante o curso de análise. Embora não utilizaremos diretamente, mostraremos a definição de compacto por coberturas. Para definir a compacidade por coberturas, iremos antes definir uma cobertura e subcobertura.

Definição 5.1.1. *Seja M um espaço métrico e um conjunto $X \subset M$.*

i. Uma cobertura de X é uma família $C = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de M tal que $S = \bigcup\limits_{\lambda \in L} C_\lambda$. Ou seja, para cada $x \in X$, existe pelo menos um índice $\lambda \in L$ tal que $x \in C_\lambda$.

ii. Caso exista um subconjunto $L' \subset L$ tal que, para cada $x \in X$, ainda podemos obter $\lambda \in L'$ com $x \in C_\lambda$, ou seja, se $X \subset \bigcup\limits_{\lambda \in L'} C_\lambda$ então chamaremos a subfamília $C' = (C_\lambda)_{\lambda \in L'}$, de subcobertura de C. Se L' é um conjunto próprio de L, C' chama-se de subcobertura própria de C.

iii. Dizemos que uma cobertura $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ é aberta, quando cada conjunto A_λ é aberto em M. Uma cobertura $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ chama-se finita quando $L = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ é um *conjunto finito. Escreveremos* $X = A_{\lambda_1} \bigcup A_{\lambda_2} \bigcup \cdots \bigcup A_{\lambda_n}$

Definição 5.1.2. *Um espaço métrico M é chamado de compacto, quando qualquer cobertura aberta possui subcobertura finita. Ou seja, se M é compacto, então dada uma cobertura* $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ *existem* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in L$ *tais que* $M = A_{\lambda_1} \bigcup \cdots \bigcup A_{\lambda_n}$ *com cada* A_λ *aberto.*

Observação 5.1.3. *A definição acima é conhecida como condição de Heine-Borel que equivale a definição de compacidade que definiremos abaixo, vide (DOMINGUES, 1982). As proposições tem demonstrações na forma de cobertura, mas para simplicidade do entendimento, optamos por fazer as demonstrações por sequências.*

Definição 5.1.4. *Seja M um espaço métrico, um conjunto* $X \subset M$ *é dito compacto em M quando toda sequência de pontos em X possuir subsequência que converge para um ponto em X.*

Exemplo 5.1.5. *Todo conjunto finito é compacto. De fato, seja X é um conjunto finito e* $(x_1, x_2, ...)$ *é uma sequência de pontos em X, então existe um termo* x_p *tal que* $(x_p, x_p, x_p, ...)$ *é uma subsequência da sequência dada, como* $(x_p, x_p, x_p, ...) \to x_p$ *está provada a afirmação.*

Proposição 5.1.6. *Seja M um espaço métrico e* $F, K \subset M$ *tais que, F é fechado e K é compacto. Se* $F \subset K$, *então K é compacto.*

Demonstração. Seja $(x_n) = (x_1, x_2, \ldots)$ uma sequência de pontos em F, então também é uma sequência de pontos em K, pois $F \subset K$. Então como K é compacto existe uma subsequência $(x_{n_k}) = (x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots)$ convergindo para a, então $\lim x_{n_k} = a \in K$. Desta subsequência convergente temos duas possibilidades:

i. $X = \{x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots\}$ é finito.

   X sendo finito, existem subsequências de (x_{n_k}) que são constantes, sendo cada uma delas convergindo para a, então todos os seus termos são iguais, e portanto, $a \in F$.

ii. $X = \{x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots\}$ é infinito.

Como lim $x_{n_k} = a$, então para todo $\epsilon > 0$ a bola $B(a;\epsilon)$ contém infinitos termos de (x_{n_k}), assim a interseção $(B(a;\epsilon) - \{a\} \cap X)$ contém infinitos termos. Assim $a \in X'$ e $a \in F'$ pois $X \subset F$, porém $F' \subset F$ (por ser fechado), então $a \in F$.

□

Proposição 5.1.7. *Sejam M e N espaços métrico e seja $f : M \to N$ uma função contínua. se $X \subset M$ é compacto, então $f(X)$ também será.*

Demonstração. Seja $y_n = (y_1, y_2, \dots)$ uma sequência de pontos em $f(X)$. Deste modo para cada índice i, existe um termo x_i tal que $f(x_i) = y_i$. Como (x_i) é uma sequência de pontos em X, que é compacto, então existe uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) tal que $\lim x_{n_K} = a \in M$. Como f é contínua então $\lim f(x_{n_k}) = f(a)$ e portanto a subsequência $f(x_{n_k})$ de y_n converge para $f(a) \in f(X)$. □

Proposição 5.1.8. *Sejam M e N espaços métricos, se $K \subset M$ e $L \subset N$, então se $K \times L$ é compacto se, e somente se, K e L são compactos.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Sendo $K \times L$ compactos, como as projeções $p_1 : M \times N \to M$ e $p_2 : M \times N \to N$ são contínuas, então $p_1(K \times L) = K$ e $p_2(K \times L) = L$ também são compactos.

($\Leftarrow$) Seja $(z_n) = ((x_n, y_n))$ uma sequência de pontos em $K \times L$. Então (x_n) é uma sequência de pontos em K, que é compacto, então existe uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) tal que $\lim x_{n_k} = a \in K$. Do mesmo modo (y_n) uma sequência de pontos em L, que é compacto, então existe uma subsequência (y_{n_k}) de (y_n) tal que $\lim y_{n_k} = b \in L$. Claro que (x_{n_k}, y_{n_k}) é uma subsequência de (z_n). Assim,

$$\lim(x_{n_k}, y_{n_k}) = (a, b) \in K \times L$$

□

Exemplo 5.1.9. *Um subconjunto do espaço $\mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, é limitado e fechado.*

($\Rightarrow$) *De fato, vale para qualquer conjunto compacto, como mostramos.*

($\Leftarrow$) *X sendo limitado existe* $a > 0$ *tal que*

$$X \subset [-a, a] \times [-a, a] \times \cdots \times [-a, a] \ (n - vezes)$$

Como cada $[-a, a]$ *é compacto em* $\mathbb{R}$*, então o produto cartesiano*

$$[-a, a] \times \cdots \times [-a, a]$$

É compacto em $\mathbb{R}^n$*. Desse modo* X *é um subconjunto fechado em* $\mathbb{R}^n$ *que está contido num compacto deste* $\mathbb{R}^n$*. Como vimos um subconjunto fechado de um conjunto compacto, é compacto.*

5.2 Compacidade e Continuidade

Nesta seção, relacionaremos algumas propriedades e características importantes, com relação as aplicações contínuas nos conjuntos compactos, algumas delas generalizações sobre os estudos de analise na reta.

Proposição 5.2.1. *Seja* M *um espaço métrico e* $X \subset M$ *compacto. Para toda função* $f : M \to \mathbb{R}$ *contínua, existem* $a, b \in M$ *tais que:*

$$f(a) = \inf f(X) \quad e \quad f(b) = \sup f(X).$$

Demonstração. Como X é compacto, então $f(X)$ também é compacto, pois a aplicação é contínua, então leva compacto em compacto. Desse modo como $f(X) \subset \mathbb{R}$ é limitado e fechado. Assim deste fato existem

$$u = \inf f(X) \quad e \quad v = \sup f(X)$$

Assim dado $\epsilon > 0$ arbitrário, existem $y_1, y_2 \in f(X)$ tais que:

$$u \leq y_1 < u + \epsilon \quad e \quad v - \epsilon < y_2 \leq v$$

que nos fornece que,

$$(u-\epsilon, u+\epsilon)\cap f(X) \neq \emptyset$$

e

$$(v-\epsilon, v+\epsilon)\cap f(X) \neq \emptyset$$

Acarretando que $u, v \in \overline{f(X)}$. Porém como $f(X)$ é compacto então $f(X) = \overline{f(X)}$, então $u, v \in f(X)$, e portanto existem $a, b \in M$ tais que $u = f(a) = \inf f(X) \;\; e \;\; v = f(b) = \sup f(X)$ □

Proposição 5.2.2. *Qualquer aplicação contínua de um espaço métrico compacto M em um espaço métrico N qualquer, é uniformemente contínua.*

Demonstração. Para provar esta proposição, vamos supor que a aplicação não seja uniformemente contínua, então para algum ϵ_0 e para qualquer $k \in \mathbb{N}$, existiriam $x_k, y_k \in M$ tais que:

$$d(x_k, y_k) < \frac{1}{k} \Rightarrow d(f(x_k), f(y_k)) \geq \epsilon_0$$

Como o conjunto M é compacto, então existe uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) de maneira que $x_{n_k} \to a \in M$. Vamos mostrar que $y_{n_k} \to a$. De fato dado $\epsilon > 0$ existe um $k_{i_0} \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_{n_k}, a) < \frac{\epsilon}{2}$$

e existe n_k tal que

$$\frac{1}{n_k} < \frac{\epsilon}{2}$$

seja n_{k_0} o maior desses índices, então para todo $n_k > n_{k_0}$ vale

$$d(y_{n_k}, a) \leq d(y_{n_k}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, a) < \frac{1}{n_k} + d(x_{n_k}, a) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Como a aplicação é contínua então,

$$\lim f(x_{n_k}) = f(a) = \lim f(y_{n_k})$$

desse modo para uma infinidade de $n_k > n_{k_0}$ vale

$$d(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \leq d((y_{n_k}), f(a)) + d(a, f(y_{n_k})) < \frac{\epsilon_0}{2} + \frac{\epsilon_0}{2} = \epsilon_0$$

contrariando nossa hipótese, chegamos assim a um absurdo. $\square$

Capítulo

6

Espaços Métricos Completos

6.1 Sequências de Cauchy

Esta seção receberá uma atenção especial, pois é de fundamental importância, as definições, proposições e demonstrações, nos lembrarão do curso de Análise Real, pois, a ideia central é a mesma, apenas iremos tratar de forma mais geral.

Definição 6.1.1. *Por (ENDO et al., 2015). Seja M um espaço métrico. Uma sequência* $(x_n) \in M$ *é dita sequência de Cauchy se, para todo* $\epsilon > 0$ *dado, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon$.

Para que a sequência $(x_n) \in M$ *seja de Cauchy, é necessário e suficiente que, para todo* $\epsilon > 0$ *exista um* $n_0 \in \mathbb{N}$, *tal que* $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, x_{n+p}) < \epsilon$ *para todo* $p \in \mathbb{N}$. *Deste modo, basta chamar de n o menor elemento entre m e n, na definição acima.*

Observação 6.1.2. *Observe que toda subsequência de uma sequência de Cauchy, também é de Cauchy. Pois, se* (x_n) *é de cauchy pela definição, para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$, *tal que,* $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \epsilon$, *Assim como os termos da subsequência também são termos da sequência de* (x_n), *temos que para,* $n_k, n_p > n_0 \Rightarrow d(x_{n_k}, x_{n_p}) < \epsilon$. *Portanto toda subsequência de uma sequência de Cauchy, também é de Cauchy.*

Intuitivamente quando a sequência é de Cauchy, estamos dizendo que, seus termos vão se aproximando uns dos outros a cada vez que o "n"cresce.

Proposição 6.1.3. *Com base em (ENDO et al., 2015). Toda sequência convergente em um espaço métrico M é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência que converge para a, então $\lim x_n = a$, por definição, temos que $\forall \epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \frac{\epsilon}{2}$. Do mesmo modo, $m > n_0 \Rightarrow d(x_m, a) < \frac{\epsilon}{2}$. Portanto, para $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) \leq d(x_n, a) + d(a, x_m) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Logo, a sequência é de Cauchy. □

A proposição acima nos garante que, toda sequência convergente é de Cauchy, mas veremos exemplos a seguir em que, nem toda sequência de Cauchy é convergente em determinado conjunto.

Exemplo 6.1.4. *Tome $X = (0, 1)$ e a sequência $x_n = \frac{1}{n}$, como visto anteriormente $x_n \to 0$, ou seja, ela é uma sequência de Cauchy, mas $0 \notin X$.*

Proposição 6.1.5. *Se (x_n) é uma sequência de Cauchy em um espaço métrico M possui uma subsequência convergente, então (x_n) é convergente, e converge para o mesmo limite.*

Demonstração. Vide (LIMA, 2017b, pág 180).

□

Observação 6.1.6. *Se uma sequência possui duas subsequências que convergem para limites diferentes, então ela não é de Cauchy.*

Exemplo 6.1.7. *Tome a sequência dada por:*

$$x_n = \begin{cases} -1, & se\ n\ é\ par \\ 1, & se\ n\ é\ impar \end{cases} \tag{6.1.1}$$

Note que $x_{2n} \to -1$ e $x_{2n-1} \to 1$. Logo (x_n) não é de Cauchy.

Observação 6.1.8. *Como vimos a pouco, toda sequência de Cauchy é limitada, mas a recíproca nem sempre vale, ou seja, nem toda sequência limitada é de Cauchy.*

Exemplo 6.1.9. *Um exemplo simples pode ser expresso pela sequência $(2, 0, 2, 0, ...)$ no conjunto $\mathbb{R}$. Observe que embora limitada, a sequência não é de Cauchy, pois $d(x_n, x_{n+1}) = 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$, dado qualquer $0 < \epsilon < 2$ qualquer $n \in \mathbb{N} \Rightarrow d(x_n, x_{n+1}) = 2 \geq \epsilon$.*

Proposição 6.1.10. *Seja (x_n) uma sequência de Cauchy num espaço vetorial normado E. Então existe uma bola aberta $B(0;r)$, $r > 0$, tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que $x_n \in B(0;r)$.*

Demonstração. tomemos $\epsilon = 1$, por definição, existe um índice i, de forma que:

$$m, n > i \Rightarrow d(x_m, x_n) = ||x_m - x_n|| < 1$$

Em particular $||x_m - x_i|| < 1, \forall m \geq i$. Porém

$$||x_m|| = ||x_m - x_i + x_i|| \geq ||x_m - x_i|| + ||x_i||,$$

e com isso, $\forall m \geq i$:

$$||x_m|| < 1 + ||x_i||$$

Agora, seja $r > \max\{||x_1||, \ldots, ||x_{i-1}||, 1 + ||x_i||\}$. Então, para todo índice n:

$$d(x_n, 0) = ||x_n|| < r$$

nos dando que $x_n \in B(0;r)$, $\forall n \geq 1$.

□

Proposição 6.1.11. *Aplicações uniformemente contínuas transformam sequências de Cauchy em sequências de Cauchy.*

Demonstração. Seja $f : M \to N$ uma aplicação uniformemente contínua, e (x_n) uma sequência de Cauchy em M. Queremos mostrar que a sequência $(f(x_n))$ é de Cauchy.

Como f é uniformemente contínua, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tais que $x, y \in M$, $d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon$. Agora, dado $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, $n, m > n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \delta \Rightarrow d(f(x_n), f(x_m)) < \epsilon$.

□

Observação 6.1.12. *Uma consequência desta proposição é que se duas métricas d e d' forem uniformente equivalentes sobre M, então as sequências de Cauchy de (M, d) e*

(M, d') são as mesmas. Uma forma de mostrar isso é utilizando a aplicação identidade de M.

6.2 Espaços Completos

Definição 6.2.1. *Um espaço métrico M é chamado completo quando toda sequência de Cauchy em M é convergente.*

Exemplo 6.2.2. *O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais não é completo com a métrica usual. Como mostramos, existem sequências nos racionais, que convergem para pontos que não pertencem aos racionais. Embora caso utilizemos a métrica zero um, ele se torna compacto.*

Exemplo 6.2.3. *Todo espaço métrico M com a métrica zero-um é completo. De fato, seja (x_n) uma sequência de cauchy em M. Dado $\epsilon = 1$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_{n+p}) < 1 = \epsilon$ para qualquer $p \in \mathbb{N}$, como estamos utilizando a métrica zero-um, $d(x_n, x_{n+p}) = 0$, e portanto, $x_n = x_{n+p}$. Ou seja, a partir de um certo índice n_0 a sequência (x_n) é constante. Assim, existe $a \in M$, tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n = a$. Dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, a) = 0 < \epsilon$. Portanto $\lim x_n = a$.*

Exemplo 6.2.4. *Toda sequência de Cauchy (x_n) em $\mathbb{R}$ converge para um ponto $p \in \mathbb{R}$.*

Pela proposição anterior, existe $k > 0$ de forma que $|x_n| < k$, $\forall n \geq 1$, nos permitindo a concluir a existência, para cada índice $m \geq 1$, de

$$y_m = inf\{x_m, x_{m+1}, \dots\}$$

Assim

$$y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n \leq \cdots \leq k$$

e portanto (y_n) converge para $p = sup\{y_n; n = 1, 2, \dots\}$ que é um ponto de $\mathbb{R}$. Mostremos que $lim\ x_n = p$:

Dado $\epsilon > 0$, existe um índice r, tal que:

$$n \geq r \Rightarrow |y_n - p| < \frac{\epsilon}{3}$$

e, como (x_n) *é de Cauchy, existe um índice* s *de forma que:*

$$m, n \geq s \Rightarrow |x_m - x_n| < \frac{\epsilon}{3}$$

Seja $t > \max\{r, s\}$. *Considerando*

$$y_t = inf\{x_t, x_{t+1}, \dots\}$$

existe $j \geq t$ *o qual se tem* $y_t \leq x_j \leq y_t + \frac{\epsilon}{3}$, *e portanto,*

$$|x_j - y_t| < \frac{\epsilon}{3}$$

Assim, $\forall n > t$, *tem-se*

$$|x_m - p| \leq |x_n - x_j| + |x_j - y_t| + |y_t - p| < \epsilon$$

e portanto

$$lim\ x_n = p.$$

Proposição 6.2.5. *Sejam* M *e* N *espaços métricos. Então o espaço* $M \times N$ *é completo se, e somente se,* M *e* N *são completos.*

Esta demonstração pode ser vista em (DOMINGUES, 1982, pág 150). A generalização desta proposição surge tomando $M = M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$. *O qual é um dos pontos de interesse nesta proposição, além dela por si e do colorário em que ela acarreta na referência dada.*

Corolário 6.2.6. *O espaço* $\mathbb{R}^n$ *é completo.*

Observação 6.2.7. *Como visto no exemplo 6.2.4, o conjunto dos reais é completo, daí, ao utilizarmos a generalização da proposição 6.2.5 obtemos este corolário que nos dá o espaço métrico completo que será usado no objetivo central desta monografia.*

Proposição 6.2.8. *Todo espaço métrico compacto é completo.*

Demonstração. Se (x_n) uma sequência de Cauchy num espaço métrico compacto M. Da compacidade de M obtemos a existência de uma subsequência $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots)$ que converge para um ponto $p \in M$. Mas dado que a subsequência de uma sequência de Cauchy converge para $p \in M$ então a sequência converge também para p. Logo, $x_n \to p$, e portanto, M é completo. $\square$

Observação 6.2.9. *De forma geral a recíproca não vale, pois, o espaço dos reais é completo, porém não é compacto. Observe que sequências de números reais como* $(2, 4, 6, \dots)$ *não admitem subsequências que convirjam em* $\mathbb{R}$.

Capítulo 7

Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e Aplicações

A este capítulo daremos uma atenção especial, por tratar do teorema do ponto fixo de Brouwer. Uma vez que, dentre os teoremas que garantem a existência dos pontos fixos, este é considerado um dos resultados mais relevantes e de maior impacto em diversas áreas. Também sendo ele o objeto central desta monografia.

7.1 Teorema do Ponto Fixo de Brouwer

Antes de falar sobre o teorema do ponto fixo de Brouwer, veremos alguns conceitos preliminares.

Definição 7.1.1. *(Ponto Fixo) Seja $f : M \to M$ uma aplicação, dizemos que x é um ponto fixo de f, se $f(x) = x$.*

Exemplo 7.1.2. *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$. Todos os pontos em $\mathbb{R}$ são pontos fixos.*

Exemplo 7.1.3. *A função $f : (0, 1) \to (0, 1)$ dada por $f(x) = x^2$, não possui ponto fixo algum.*

Observação 7.1.4. *Note que se a função estivesse definida para o intervalo fechado* $[0, 1]$*, ela possuíria dois pontos fixos nas extremidades do intervalo. Veremos na sequência deste texto que a existência de pontos fixos em subconjuntos do* $\mathbb{R}^n$ *está ligado a compacidade.*

Vejamos um teorema de existência de ponto fixo que nos será útil e constitui ementas de Cálculo e Análise Real.

Teorema 7.1.5. *(Teorema do Valor Intermediário) Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. Se* $f(a) < d < f(b)$ *então existe* $c \in (a, b)$ *tal que* $f(c) = d$*.*

Demonstração. Para a demonstração, vide (LIMA, 2017a, pág.78).

Agora trataremos do teorema do ponto fixo de Brouwer. Como mencionado no início desde capítulo, este é um dos teoremas que nos garante a existência, dada certas condições, de raiz para a equação $f(x) - x = 0$, ou seja, um ponto fixo de f. Para introduzir a ideia, começaremos monstrando o seu caso mais simples:

Teorema 7.1.6. *(Ponto fixo na reta (caso n=1)). Seja* $f : [a, b] \to [a, b]$ *uma função contínua, nesta condições, existe pelo menos um ponto* $c \in [a, b]$ *tal que* $f(c) = c$*.*

Demonstração. Para tal, defina $\phi : [a, b] \subset \mathbb{R}$ com $\phi(x) = x - f(x)$, com efeito ϕ é contínua. Veja que para f ter um ponto fixo basta mostrar que ϕ possui raiz. Como a imagem de f está contida no intervalo $[a, b]$, temos que: $a \leq f(a) \leq b$ e $a \leq f(b) \leq b$, daí $\phi(a) \leq 0$ e $0 \leq \phi(b)$, isto é $\phi(a) \leq 0 \leq \phi(b)$. Pelo teorema do valor intermediário, existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\phi(c) = 0, \ como \ \phi(c) = c - f(c) \Rightarrow c - f(c) = 0 \Rightarrow f(c) = c.$$

□

Teorema 7.1.7. *(Teorema do ponto fixo de Brouwer) Seja* $B[0; 1] \subset \mathbb{R}^n$*,* $n > 1$*. Então, qualquer função contínua* $f : B[0; 1] \to B[0; 1]$ *possui ao menos um ponto fixo.*

Demonstração. A demonstração pode ser lida em (MARTINS; VASCONCELLOS, 2014).

7.2 Aplicações

Proposição 7.2.1. *Seja $r > 0$ um número real e $B[0;r] \subset \mathbb{R}^n$, se $\varphi : B[0;r] \to B[0;r]$ for uma aplicação contínua, então φ admite ao menos um ponto fixo.*

Demonstração. Seja $\alpha : B[0;r] \to B[0;1]$, com $r > 0$, uma aplicação contínua e sobrejetiva tal que

$$x \mapsto \frac{1}{r}x.$$

Considere a aplicação contínua $\varphi : B[0;r] \to B[0;r]$. Então, se definirmos

$$\gamma : B[0;1] \to B[0;1]$$

$$x \mapsto \alpha(x) \cdot \varphi(rx),$$

temos que γ é contínua e

$$||\gamma(x)|| = ||\alpha(x) \cdot \varphi(rx)|| = \frac{1}{r}||\varphi(rx)||.$$

Como

$$||\varphi(rx)|| \leq r \Rightarrow \frac{1}{r}||\varphi(rx)|| \leq 1$$

Desta forma, pelo Teorema 7.1.7, existe $x_0 \in B[0;1]$ tal que

$$\gamma(x_0) = x_0 \Rightarrow \frac{1}{r}\varphi(rx_0) = x_0 \Rightarrow \varphi(rx_0) = rx_0.$$

Logo, para toda aplicação contínua φ, que leva uma bola fechada de raio r nela mesma, existe um ponto fixo. □

Exemplo 7.2.2. *Foi comentado acima no exemplo que envolve a função $f(x) = x^2$, que se o intervalo fosse fechado, ela teria dois pontos pontos fixos. Pois, seja $f : [0,1] \to [0,1]$ com $f(x) = x^2$, pela proposição mostrada f possui ao menos um ponto fixo neste intervalo, de fato, já que 0 e 1 são pontos que não se alteram pela função.*

Proposição 7.2.3. *Seja* $x_0 \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ *qualquer e* $B[x_0; r] \subset \mathbb{R}^n$*. Se* $\phi : B[x_0; r] \to B[x_0; r]$ *for uma aplicação contínua, então* ϕ *admite ao menos um ponto fixo.*

Demonstração. Definimos agora, as funções α, β e γ da seguinte maneira:

$$\alpha : B[x_0; r] \to B[0; r]$$

$$x \mapsto x - x_0$$

$$\beta : B[0; r] \to B[x_0; r]$$

$$x \mapsto x + x_0$$

$$\gamma : B[0; r] \to B[0; r]$$

$$x \mapsto \phi(x + x_0) - x_0,$$

onde $\phi : B[x_0; r] \to B[x_0; r]$ é contínua.

Como γ é um função contínua, segue pela proposição anterior que existe $y \in B[0; r]$ tal que $\gamma(y) = y$, assim

$$\phi(y + x_0) - x_0 = y \Rightarrow \phi(y + x_0) = y + x_0.$$

Logo, toda função contínua $\phi : B[x_0; r] \to B[x_0; r]$ possui ao menos um ponto fixo.

$\square$

Exemplo 7.2.4. *Quando apresentamos o caso real do teorema do ponto fixo de Brouwer, podemos perceber que ao contrário do caso geral não tivemos restrições quanto o ponto central do intervalo ou ao comprimento deste. Porém, façamos uma revisão daquele teorema com um novo olhar, visto esta proposição. Para isto, vejamos que* $x_0 = \frac{b-a}{2}$ *e* $r = \frac{d(a,b)}{2}$*, com* $a, b \in \mathbb{R}$ *e* $d(a, b) = |b - a|$*, desta maneira podemos reescrever o teorema do caso real da seguinte forma:*

Seja $f : B[x_0; r] \to B[x_0; r]$ *é uma função contínua, então* f *admite pelo menos um ponto fixo.*

Uma vez que $B[\frac{b-a}{2}; \frac{d(a,b)}{2}] = [a, b]$.

Observação 7.2.5. *Em uma observação, foi comentado que existe uma relação entre o teorema do ponto fixo de Brouwer e compacidade, vejamos melhor isso:*

Seja no caso real ou no caso geral deste teorema lidamos com bolas fechadas que por sua vez são limitadas, visto que elas são subconjuntos do $\mathbb{R}^n$, *estudamos em um exemplo que um subconjunto do* $\mathbb{R}^n$ *é compacto se, e somente se, ele for fechado e limitado, daí, temos que o teorema do ponto fixo de Brouwer nos dá a existência de ponto fixo em aplicações que saem de um conjunto compacto nele mesmo. Por isso, na ocasião foi ressaltada essa relação que acarreta que o teorema lida também com subconjuntos métricos compactos completos do* $\mathbb{R}^n$, *já que todo conjunto compacto é completo.*

Capítulo 8

Considerações Finais

O desenvolvimento deste trabalho tornou possível estudar um conteúdo que não faz parte do curso de graduação de Licenciatura em Matemática, onde possibilita um estudo de conjuntos através das aplicações chamadas de métricas e assim vé-los de outra forma. O estudo de Espaços Métricos nos leva a ver sequências e aplicações entre espaços métricos com algumas propriedades, teoremas, proposições e definições semelhantes as que são estudadas em Análise Real, mas com uma visão geral uma vez que, por exemplo, espaços vetoriais possuem outras operações entre seus elementos, um caso a ser lembrado é o de espaços vetoriais munidos com produto interno. Além disso, como mencionado na introdução e apresentado no texto, foi visto o porquê do conjunto $\mathbb{R}$ ser dito completo. No avançar dos estudos surgiu esse intrigante e fascinante teorema, O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, que nos garante a existência de pontos fixos em subconjuntos compactos da reta ou $\mathbb{R}^n$ diante de suas aplicações garantindo a existência de pontos fixos em bolas fechadas da reta ou $\mathbb{R}^n$.

Referências Bibliográficas

DOMINGUES, H. H. *Espaços métricos e introdução à topologia.* [S.l.]: Atual, 1982.

ENDO, D. H. C. et al. *Espaços Métricos: uma introdução.* 2015. Monografia (Licenciatura em Matemática). Universidade Federal de São Carlos. São Carlos, Brasil.

LIMA, E. L. *Análise real.* 12. ed. [S.l.]: IMPA, 2017. v. 1.

LIMA, E. L. *Espaços métricos.* 5. ed. [S.l.]: IMPA, 2017.

MARTINS, P. R.; VASCONCELLOS, C. F. Teorema do ponto fixo de brouwer. *Cadernos do IME-Série Matemática*, v. 8, 2014.