UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

A Aritmética das Olimpíadas

Emerson Feliciano da Silva

Instituto de Matemática

Maceió, Novembro de 2021

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS-UFAL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

EMERSON FELICIANO DA SILVA

A ARITMÉTICA DAS OLIMPÍADAS

MACEIÓ
2021

EMERSON FELICIANO DA SILVA

A ARITMÉTICA DAS OLIMPÍADAS

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Alagoas - Ufal.

Orientador: Prof. Dr. Gregório Manuel da Silva Neto

MACEIÓ
2021

Catalogação na Fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

S586a Silva, Emerson Feliciano da.
A aritmética das Olimpíadas / Emerson Feliciano da Silva. - 2021.
139 f. : il.

Orientador: Gregório Manuel da Silva Neto.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Bibliografia: f. 98-102.
Apêndices: f. 103-139.

1. Sequências (Matemática). 2. Aritmética. 3. Resolução de problemas. 4. Ensino. 5. Metodologia. I. Título.

CDU: 511.1

Folha de Aprovação

EMERSON FELICIANO DA SILVA

A ARITIMÉTICA DAS OLIMPÍADAS

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 30 de novembro de 2021.

gov.br Documento assinado digitalmente
Gregorio Manoel da Silva Neto
Data: 30/11/2021 17:27:22-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. Dr. Gregório Manoel da Silva Neto – UFAL (Orientador)

Banca Examinadora:

gov.br Documento assinado digitalmente
Viviane de Oliveira Santos
Data: 10/12/2021 10:49:25-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Profa. Dra. Viviane de Oliveira Santos – UFAL (Examinadora Interna)

Marcio Silva Santos

Prof. Dr. Márcio Silva Santos – UFPB (Examinador Externo)

AGRADECIMENTOS

Inicialmente gostaria de agradeço a Deus que me sustentou e me conduziu ao final de mais uma fase de minha vida! Agradeço aos parceiros da minha turma de mestrado, representados por Ediclaudio, Caio, Luciano e Lindbergue pela parceria no decorrer do mestrado, suas contribuições e as horas de um bom bate-papo foram fundamentais para tornar o curso bem mais leve do que achava que seria. Agradeço aos minhas amigas de escola por sempre me ajudarem nos diversos dias que precisei estudar durante as horas de trabalho para alguma prova, muito obrigado! Agradeço aos meus professores do mestrado, suas contribuições foram essenciais para que pudesse chegar até aqui. Um agradecimento especial ao meu orientador, o Prof. Dr. Gregório Manuel da Silva Neto pela ajuda, parceria, paciência, sugestões e dicas que foram fundamentais para concluir esse trabalho. Agradeço aos meus pais, Quitéria e Edilson, por todo o suporte familiar e por sempre me incentivarem a estudar, mesmo que eu vivesse 100 vidas, jamais seria capaz de retribuir tudo o que fizeram por mim, mesmo sem terem instrução escolar, nunca deixaram de acreditar em mim, sou grato demais a vocês. Agradeço também aos meus irmãos Luiz e Edna, por sempre estarem comigo, seja presencial ou conectados via pensamento, obrigado meus irmãos! Agradeço a minha esposa Karina por toda ajuda e paciência durante o mestrado, muito obrigado!

"Até aqui nos ajudou o Senhor"

1 Samuel 7:12

RESUMO

O presente trabalho traz uma proposta de Sequência Didática (SD) que utiliza a resolução de problemas relacionados aos temas de Aritmética da Olimpíada Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas (Obmep), de seu banco de questões, do material de “Encontros de Aritmética” do Programa de Iniciação Científica (PIC), com o objetivo de verificar e desenvolver das habilidades EF06MA05, EF06MA06 e EF07MA01 da BNCC (Base Nacional Comum Curricular). Para analisar a efetividade da SD, a proposta foi aplicada em duas turmas de primeira série do Ensino Médio de uma escola estadual localizada na cidade de Arapiraca-AL. Na resolução desses problemas, procurou-se refletir sobre os procedimentos utilizados em cada questão, motivando o senso crítico dos estudantes, buscando motivar e instigar a participação deles nas aulas. Trabalhar os problemas da Obmep é trazer a matemática de uma forma diferente, a partir de uma aplicação, dando significado e desmistificando a imagem de uma disciplina engessada e puramente calculista.

Palavras-chave: Sequência Didática. Aritmética. Resolução de Problemas. Ensino. Metodologia.

ABSTRACT

The present work presents a proposal for a Didactic Sequence (SD) that uses the resolution of problems related to the Arithmetic themes of the Brazilian Public Schools Mathematics Olympiad (Obmep), from its bank of questions, from the material of "Encontros de Arithmetica"of the Scientific Initiation Program (PIC), with the objective of verifying and developing the skills EF06MA05, EF06MA06 and EF07MA01 of the BNCC (Base Nacional Comum Curricular). To analyze the effectiveness of SD, the proposal was applied in two classes of the first grade of High School of a state school located in the city of Arapiraca-AL. In solving these problems, we tried to reflect on the procedures used in each question, motivating the students' critical sense, seeking to motivate and instigate their participation in the classes. Working with Obmep's problems is to bring mathematics in a different way, from an application, giving meaning and demystifying the image of a rigid and purely calculating discipline.

Keywords: Following teaching. Arithmetic. Problem solving. Teaching. Methodology.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

a.E.C.	Antes da Era Comum
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
Capes	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CNPq	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
E.C	Era comum
Impa	Instituto de Matemática Pura e Aplicada
MCT	Ministério da Ciência e Tecnologia
MDC	Máximo Divisor Comum
MEC	Ministério da Educação
MMC	Mínimo Múltiplo Comum
Obmep	Olímpiada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
PBO	Princípio da Boa Ordenação
Peci	Preparação Especial para Competições Internacionais
PIC	Programa de Iniciação Científica
PIC jr	Programa de Iniciação Científica Júnior
Picme	Programa de Iniciação Científica e Mestrado
Poti	Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo
SD	Sequência Didática
X Enem	10ª edição do Encontro Nacional de Educação Matemática

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO **14**
2 AS OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS . . **17**
2.1 As olimpíadas de matemática no Brasil 17
2.2 As contribuições da resolução de problemas para a aprendizagem nas aulas matemática 19
2.3 Obmep: uma análise sobre a participação dos estudantes 22
2.3.1 Considerações Iniciais 22
2.3.2 Estrutura e execução da Obmep 24
2.4 Programas e incentivos 26
3 CONHECENDO A ARITMÉTICA **31**
3.1 Aritmética na história e seu significado 31
3.2 Conceitos preliminares 33
3.3 Divisibilidade 37
3.4 Algoritmos de Euclides 44
3.5 Números Primos 52
3.6 Mínimo Múltiplo Comum 58
3.7 Alguns Critérios de divisibilidade 60
4 PERCURSO METODOLÓGICO **65**
4.1 Elementos da caracterização da pesquisa 65
4.1.1 Tipo de Pesquisa 65
4.2 Sequência Didática e Resolução de Problemas 67
4.2.1 Etapas da Sequência Didática 68
4.3 Descrevendo as etapas da Sequência Didática 69
5 ANÁLISE DOS RESULTADOS **85**
5.1 Comparação dos dados dos questionário pré e pós-teste 85
5.2 O questionário investigativo 92
5.3 Análise final dos questionários 94
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS **95**
REFERÊNCIAS **98**
APÊNDICE A – CAPTURAS DE TELA **103**
APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO PRÉ-TESTE **105**
APÊNDICE C – RESPOSTAS DO QUESTIONÁRIO PRÉ-TESTE **108**

APÊNDICE D – QUESTIONÁRIO PÓS-TESTE **113**
APÊNDICE E – RESPOSTAS DO QUESTIONÁRIO PÓS-TESTE **116**
APÊNDICE F – QUESTIONÁRIO INVESTIGATIVO **121**
APÊNDICE G – RESPOSTAS DO QUESTIONÁRIO INVESTIGATIVO **122**
APÊNDICE H – RESPOSTA DO QUESTIONÁRIO INVESTIGATIVO **123**
APÊNDICE I – SLIDES USADOS NAS AULAS **126**

1 INTRODUÇÃO

É historicamente perceptível quão imenso é o universo de dificuldades enfrentadas pelos professores em seu exercício docente e, se tratando do ensino de matemática, tais dificuldades aumentam exponencialmente, sobretudo na realidade atual, desencadeada pela Pandemia da Covid-19 nos últimos 2 anos. Essa realidade recente impôs fortes desafios às escolas, professores e estudantes, os quais precisaram se reinventar frente à alternativa encontrada pelo Ministério da Educação (MEC) para o ensino remoto, acentuando ainda mais as dificuldades postas ao processo de ensino e aprendizagem, expandindo o já tão acentuado déficit no rendimento escolar. Nesse circuito adverso, certamente pode ter destaque a área da matemática, se considerarmos o fato de que os estudantes não a compreendem com a relevância necessária para a sua vida cotidiana e social e, assim sendo, sentem-se desestimulados.

Sobre tal déficit, Lima *et al.* (2007) analisam que são diversos os motivos que contribuem para o baixo rendimento no ensino de matemática e o primeiro passo para o sucesso no processo de ensino e aprendizagem de matemática é ter estudantes motivados, sendo deste modo fundamental buscar formas diversas para fazer com que isso venha acontecer, apesar de não ser uma tarefa fácil. Afinal, a palavra motivação é, atualmente, segundo Ribeiro (2011, p. 1), "uma das mais usadas pelos professores e outros responsáveis pela educação, em particular a educação formal, para justificar quer o insucesso quer o sucesso dos alunos, em particular no ensino e na aprendizagem da ciência escolar".

Observa-se nessa perspectiva, que o eixo da resolução de problemas no ensino da matemática é uma prática desafiadora e motivadora, considerando ser esta uma importante ferramenta pedagógica para facilitar na mediação, na assimilação e acomodação dos conteúdos abordados. Para tanto, se faz necessário realizar o planejamento adequado das estratégias escolhidas para obter êxito na aprendizagem e possibilitar com que os estudantes continuem aprendendo.

Nesse contexto, o momento é oportuno para refletirmos sobre as experiências educativas que apresentam relevância à Educação Básica no Brasil, podendo-se destacar a proposta da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (Obmep), por meio da qual os estudantes tornam-se sujeitos "ativos" em sua aprendizagem, além de aprenderem conceitos matemáticos que não se resumem às simples técnicas de fazer conta, uma vez que os problemas da Obmep se assemelham muito a situações de resolução de problemas reais, que podem ser comparados com o cotidiano dos estudantes. Assim sendo, a Obmep contribui significativamente para despertar nos estudantes o interesse em estudar matemática, significativamente.

Foi inspirado na necessidade de melhorar a transposição didática frente ao fascinante mundo da Obmep, bem como conhecer os mistérios que envolvem os números primos e a aritmética como um todo, que ocorreu a definição por este estudo, na forma de experimento, utilizando o instrumento de Sequência Didática (SD), em uma definição objetiva e direta, uma sequência didática é

> (...) um conjunto de atividades pensada e desenhada para estudantes, cujo objetivo é o de avaliar e desenvolver destrezas cognitivas e metacognitivas dos mesmos, em relação a um determinado conteúdo matemático, por meio da aprendizagem significativa de conceitos e do desenvolvimento da aprendizagem científica (GUSMÃO, 2014, p. 2).

A presente SD foi desenvolvida em 02 (duas) turmas de 1ª série do Ensino Médio de uma escola estadual localizada na cidade de Arapiraca-AL, no período compreendido entre 15 a 17 de junho de 2021. Devido os défícts existentes em matemática e as dificuldadas existentes, decidiu-se escolher as duas turmas do ensino médio para verificar se os estudantes desenvolveram as habilidades no tempo certo e desenvolvê-las, caso não tenha acontecido.

A referida proposição da SD foi realizada com o objetivo de auxiliar na aprendizagem dos estudantes por meio da resolução dos problemas olímpicos buscando possibilitar aos professores trabalharem as habilidades EF06MA05[1], EF06MA06[2] e EF07MA01[3] da BNCC, a partir da resolução de problemas da Obmep, de seu banco de questões e do material "Encontros de Aritmética" do Programa de Iniciação Científica (PIC). Essas habilidades foram escolhidas para verificar se os estudantes da primeira série do ensino médio desenvolveram-as ou não no tempo certo, caso não tenham desenvolvido, procurar contribuir para que eles possam deenvolvê-las. A escolha dos problemas se deu a partir de pesquisa em todas as edições da Obmep e seus materiais de apoio, escolhendo as que mais se enquadravam na proposta da SD. A maior parte dos problemas foram aplicados no Nível 1, Nível 2 e Nível 3 da Obmep, enquadrando assim esses problemas na proposta da SD e validando sua aplicação na primeira série do ensino médio.

A Relevância dessa SD reside em proporcionar aos estudantes a interação com problemas da Obmep, dos quais, em sua maioria, são problemas voltados ao cotidiano e que se tornam ferramentas efetivas para o ensino e aprendizagem de matemática. Tal relevância é corroborada em Shine (2009), ao versar que o papel das olimpíadas de matemática é de fundamental impor-

[1] EF06MA05: Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos "é múltiplo de", "é divisor de", "é fator de", e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000.

[2] EF06MA06: Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor.

[3] EF07MA01: Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum, por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos.

tância para modificar a concepção que as pessoas têm de matemática e mostrar uma matemática diferente.

Para que nosso objetivo pudesse ser atingido, dividimos o nosso trabalho em três partes inter-relacionadas. Na primeira parte, a discussão apresenta um breve histórico da Olímpiada Brasileira de Matemática nas Escolas Públicas (Seção 2), ressaltando sua contribuição para a melhoria do ensino de matemática e traz o embasamento teórico e histórico dos principais temas de aritmética necessários para o desenvolvimento da sequência didática (Seção 3). Na segunda parte (Seção 4) discorremos sobre o percurso metodológico, isto é, como será desenvolvida a sequência didática, quais os problemas utilizados e toda a descrição de sua aplicação. E por fim, a terceira parte (Seção 5) trata da análise dos resultados obtidos na aplicação da sequência didática de forma qualitativa, buscando refletir sobre os dados e analisar se a aplicação da proposta foi exitosa.

2 AS OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS

Segundo Obmep (2020), a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas é um valioso projeto que vem desde 2005 motivando e incentivando alunos e professores para o estudo da Matemática em todo o Brasil. A mobilização dos estudantes vai além do âmbito de sala de aula, pois visa os desafios e as possibilidades de transformação que lhes são oportunizadas, inclusive a dos estudantes do Ensino Fundamental e Ensino Médio terem a oportunidade de frequentar um curso sobre matemática em uma universidade e se desenvolver cognitivamente, obtendo uma formação integral na matemática e, consequentemente, em todas as outras áreas do conhecimento.

2.1 AS OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA NO BRASIL

Desde a sua primeira edição, no ano de 2005, a Obmep vem se destacando no cenário educacional pelo fomento em estimular o interesse pelo estudo da matemática nas escolas públicas do país, com o apoio e colaboração do Ministério da Educação (MEC), do Ministério da Ciência e Tecnologia (MCT), do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (Impa) e da Sociedade Brasileira de Matemática. Analisando os dados disponíveis em Obmep (2021) é possível concluir que a cada ano o número de inscritos vem aumentando, expandindo de 10,7 milhões em 2005 para 17,7 milhões em 2020, atingindo 51.940 escolas públicas em 99,84% dos municípios brasileiros, conseguindo acentuar a concepção de matemática dos estudantes das escolas participantes, tendo em vista o conjunto de seus objetivos:

> - Estimular e promover o estudo da Matemática entre estudantes das escolas públicas.
> - Contribuir para a melhoria da qualidade da Educação Básica.
> - Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso nas áreas científicas e tecnológicas.
> - Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional.
> - Contribuir para a integração das escolas públicas com as universidades públicas, os institutos de pesquisa e as sociedades científicas.
> - Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento (BRASIL, 2011, p. 16).

Para convergir aos objetivos acima, segundo Obmep (2020) a Coordenação Geral da Obmep e as escolas participantes trabalham em regime de colaboração, não somente na realização das provas da primeira e segunda fases, mas também na divulgação da iniciativa e no desenvolvimento de ações preparatórias para as fases da Obmep.

A coordenação geral da Obmep, que é designada pela diretoria do Impa, é responsável pelo:

> a) Planejamento e organização do projeto.
> b) Elaboração de material didático, das provas e dos gabaritos.
> c) Envio dos gabaritos das provas da Primeira Fase e de material didático às escolas.
> d) Processamento das informações enviadas pelas escolas com os resultados da Primeira Fase.
> e) Aplicação das provas da Segunda Fase.
> f) Correção das provas da Segunda Fase e indicação de todas as premiações.
> g) Conservação das provas da Segunda Fase por um período de 4 (quatro) meses a contar da data da divulgação dos resultados. Após esse período, a Coordenação Geral poderá autorizar a reciclagem do papel das provas.
> h) Manutenção da página atualizada com informações sobre a Obmep.
> i) Elaboração do Relatório Final dos resultados da Obmep (OBMEP, 2020, p. 33)

Por outro lado, as escolas participantes da Obmep, sob a supervisão da Coordenação Geral, são responsáveis pela organização e realização da Primeira Fase, na qual todos os estudantes do Ensino Fundamental e Médio são inscritos pelas escolas. Segundo Obmep (2020), na fase inicial não há limite no número de estudantes inscritos, ficando a cargo da escola inscrita a definição quanto ao quantitativo de estudantes que irão participar. Por outro lado, a Segunda Fase é executada somente pela Coordenação Geral, sendo responsável por determinar os locais de realização das provas, e desta participam apenas os estudantes que tiveram melhor desempenho na primeira fase. Os estudantes que serão premiados com medalhas de ouro, bronze e menções honrosas são conhecidos nessa segunda fase, e a quantidade de premiados é anualmente determinada pela Coordenação Geral da Obmep.

Segundo Obmep (2020), para participarem da Obmep os estudantes devem estar devidamente matriculados e são divididos em três níveis, de acordo com a sua escolaridade:

- Nível I - composto por estudantes de sexto e sétimo ano do Ensino Fundamental;
- Nível II - composto por estudantes de oitavo e nono ano do Ensino Fundamental;
- Nível III - composto por estudantes do primeiro, segundo e terceiro ano do Ensino Médio;

Para Landin (2014, p. 1-2), então Coordenador da Obmep, em 2014, e professor do Instituto de Matemática Pura e Aplicada, o Impa:

> os testes são concebidos de forma a detectar alunos que tenham potencial para Matemática. Queremos detectar alunos talentosos. As perguntas formuladas envolvem raciocínio, abstração e criatividade, não é necessário qualquer conhecimento formal sobre Matemática. Foram feitos dois estudos, há três anos atrás, que mostram que as escolas que participam da Obmep acabam tendo

> um desempenho melhor na Prova Brasil. Há também, um desempenho melhor no ENEM[1]. A Olimpíada cria um ambiente estimulante para que os alunos anualmente se esforcem para participar.

Dessa maneira, a Obmep caracteriza-se por ser uma política pública reconhecida por sua abrangência e mobilização, e como uma das maiores iniciativas do governo voltadas ao desenvolvimento da aprendizagem em matemática, como instrumento e estratégia possível, buscando melhorar a qualidade do ensino, por meio do estímulo ao interesse e o desempenho dos estudantes das escolas públicas brasileiras em matemática.

2.2 AS CONTRIBUIÇÕES DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS PARA A APRENDIZAGEM NAS AULAS MATEMÁTICA

Conforme pontuado por Romanatto (2012), o ensino de matemática por meio da resolução de problemas, tem se tornado uma proposta amplamente discutida no decorrer das últimas décadas por diversos pesquisadores, especialistas e professores da área.

Para König (2013), em uma análise realizada com os trabalhos apresentados na 10ª edição do Encontro Nacional de Educação Matemática (X Enem), realizado em 2010, observou-se que do total de trabalhos apresentados, 79 eram sobre a resolução de problemas e investigações matemáticas. O que mostra a preocupação existente com os processos de ensino e aprendizagem de matemática, uma vez que os métodos tradicionais nos quais os professores explanam os conteúdos com exemplos, definições, e posteriormente aplicando exercícios para fixação e avaliação para verificar a aprendizagem, são engessados e necessitam ser revistos.

> É importante que a presença do conhecimento matemático seja percebida, e claro, analisada e aplicada às inúmeras situações que circundam o mundo, visto que a matemática desenvolve o raciocínio, garante uma forma de pensamento, possibilita a criação e amadurecimento de ideias, o que traduz uma liberdade, fatores estes que estão intimamente ligados a sociedade. Por isso, ela favorece e facilita a interdisciplinaridade, bem como a sua relação com outras áreas do conhecimento (filosofia, sociologia, literatura, música, arte, política, etc. (RODRIGUES, 2005, p.5).

Sabe-se que a matemática é a ciência na qual os problemas são solucionados a partir da utilização de teoremas, postulados, definições e propriedades, além de contribuir para o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático utilizado na resolução de cada problema, dando assim condições para que haja o aprimoramento das habilidades adquiridas no decorrer da vida de cada indivíduo. Segundo Andrade (2015, p. 13), "as Olimpíadas de Matemática visam

[1] Exame Nacional do Ensino Médio

melhorar acima de tudo a qualidade do ensino, da educação matemática, visando encontrar aqueles talentosos em cálculos, que tenham um raciocínio ágil e preciso".

Um fato relevante presente na resolução de problemas, muitas vezes de forma indireta, é a necessidade que surge em rever cuidadosamente conteúdos matemáticos, muitas vezes passando-se despercebidos e gerando uma inapropriada compreensão de suas propriedades no momento da mediação. Com isso tem-se na interação e na discussão mútua desses conteúdos, uma forma dinâmica e interativa de aprendizagem coletiva.

> Estudar Matemática é resolver problemas. Portanto, a incumbência dos professores de Matemática, em todos os níveis, é ensinar a arte de resolver problemas. O primeiro passo nesse processo é colocar o problema adequadamente. (DANTE, 2003, p. 43)

Deste modo, os estudantes devem ser direcionados pelos professores a partirem do pressuposto de estudar matemática tendo como ponto principal a discussão e reflexão sobre conteúdos matemáticos necessários na resolução de problemas. Deve-se ainda, evidenciar e direcionar o conhecimento de tal forma que os estudantes possam compreender e assimilar o conteúdo mediado, "[...] não apenas para nos adaptarmos à realidade, mas, sobretudo, para transformar, para nela intervir, recriando-a" (FREIRE, 1996, p. 28). Nessa perspectiva, deve-se trabalhar a matemática de tal forma que os conteúdos sejam acessíveis, criando condições para que os estudantes possam se desenvolver cognitivamente e associar o conteúdo com a realidade.

Segundo os Parâmetros Nacionais da Educação (PCN):

> As necessidades cotidianas fazem com que os estudantes desenvolvam uma inteligência essencialmente prática, que permite reconhecer problemas, buscar e selecionar informações, tomar decisões e, portanto, desenvolver uma ampla capacidade para lidar com a atividade matemática. Quando essa capacidade é potencializada pela escola, a aprendizagem apresenta melhor resultado. (BRASIL, 1998, p. 29)

Portanto, os professores devem partir da premissa de que a matemática tem que ser prática, devem ser mostrados os caminhos para fazer com que a acomodação do conhecimento seja efetiva, possibilitando ao estudante tomar decisões e ter clareza de quais ferramentas e informações deve utilizar para resolver um dado problema.

Trabalhar a matemática evidenciando a resolução de problemas aplicados ao cotidiano, pode fazer com que os estudantes desenvolvam habilidades de aplicabilidade destes em situações reais vivenciadas, e a Obmep possibilita conhecer diversas situações reais, as quais dão sentido ao conteúdo. Nessa percepção, pode-se evitar que os estudantes desenvolvam sentimentos de pavor pela matemática, possam conhecer a resolução de problemas não somente como uma ferramenta teórica, mas como uma ferramenta de resolução de diversos problemas aplicados ao seu cotidiano. Com isso, a matemática se torna acessível e prática, quando se evidencia a aplicação de conteúdos em situações diversas, conforme sinaliza os PCN:

> A prática mais frequente na Resolução de Problemas, consiste em ensinar um conceito, um procedimento ou técnica e depois apresentar um problema para avaliar se os estudantes são capazes de empregar o que lhes foi ensinado. Para a maioria dos estudantes, resolver um problema significa fazer cálculos com números do enunciado ou aplicar algo que aprendam nas aulas. Desse modo o que o professor explora na atividade matemática não é mais a atividade, ela mesma, mas seus resultados, técnicas e demonstrações. (BRASIL, 1998, p.40)

Diante do exposto, os professores devem sair do campo da matemática mecânica, isto é, da matemática voltada apenas ao fazer contas por fazer contas, sem nenhuma significação prática e social, uma vez que para Moreira e Masini (2002) quando o indivíduo tem sua aprendizagem de maneira mecânica, poderá facilmente ignorar ou, pode até utilizá-la de maneira automática em algum momento, no entanto aquele conhecimento não apresentará significado algum ao aprendiz. Quando a matemática é mediada sem nenhum significado

> os alunos passam a acreditar que a aprendizagem da matemática se dá através de um acúmulo de fórmulas e algoritmos. Aliás, nossos alunos hoje acreditam que fazer matemática é seguir e aplicar regras. Regras essas que foram transmitidas pelo professor. Segundo, os alunos pensam que a matemática é um corpo de conceitos verdadeiros e estáticos, dos quais não se duvida ou questiona, e nem mesmo se preocupam em compreender porque funciona. Em geral, acreditam também, que esses conceitos foram descobertos ou criados por gênios. (D'AMBROSIO, 1989, p.16)

Embora avanços sejam observados, essa prática ainda é muito difundida, e o ensino da matemática não deveria ter como foco somente encontrar a solução dos problemas propostos. Segundo Onuchic (1999), o papel da resolução de problemas no currículo de matemática na contemporaneidade seria um caminho de aquisição para novos conhecimentos, ou seja, compreender a resolução de problemas deveria ser o principal objetivo do ensino.

Partindo do ponto de vista dos teóricos supracitados, é possível concluir que apesar dos esforços de muitos profissionais da área, o estudo da matemática em âmbito mecânico faz com que o indivíduo realize cálculos e memorize procedimentos nos quais ele não sabe sua importância, caracterizando uma forma de educar que prioriza a memorização.

Para que se possa compreender um dado fenômeno, se faz necessário questionar sobre sua constituição. Diante disso:

> O que o professor deveria ensinar – porque ele próprio deveria sabê-lo – seria, antes de tudo, ensinar a perguntar. Porque o início do conhecimento, repito, é perguntar. E somente a partir de perguntar é que se deve sair em busca de respostas e não o contrário (FREIRE & FAUNDEZ, 1998, p.46).

A indagação não se restringe à exposição do problema mas, sobretudo, a ação que permeia o processo de resolução. A partir do momento em que se tem a modelagem em contexto sócio crítico, a indagação extrapola a formalização ou entendimento de um problema, compartilhando os conhecimentos de matemática, a partir da reflexão. OS questionamentos possibilitam que os estudam possam ter uma visão abrangente do problema e da realidade a qual ele pertence.

Sobre essa necessidade de se trabalhar a matemática aplicada, Piaget (1967) relata que o conhecimento do indivíduo sobre o mundo está ligado à sua adaptação à realidade.

> Saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do cotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico (BRASIL, 2006, p. 69).

De fato, percebe-se que há realmente a necessidade de se trabalhar a matemáticos sempre buscando aplicações com a realidade concreta, fazendo com que os indivíduos que estudam matemática vejam que além de números, a matemática é raciocínio, criatividade e além de tudo, engenhosidade, para saber como sair de uma situação problema utilizando sempre artifícios matemáticos válidos, buscando compreender o mundo a sua volta, visando sempre o debate, a reflexão e a troca de saberes.

Segundo Breuckmann (1998, p. 85)

> Um conceito não se forma ao acaso, de maneira aleatória, existe sempre uma situação provocadora, que garante ao mesmo uma finalidade. Esta situação configura, portanto, uma crise. Não que precise ser, obrigatoriamente, uma situação desagradável: pode ser, quiçá, uma situação prazerosa e que, exatamente por isso, merece ser cuidada para que se perpetue e/ou seja aperfeiçoada.

Dessa forma, a dimensão histórica da matemática também deve ser lembrada, buscando-se evidenciar as contribuições dos grandes teóricos para o desenvolvimento da matemática e que seu conhecimento sistematizado não surgiu em passe de mágica.

2.3 OBMEP: UMA ANÁLISE SOBRE A PARTICIPAÇÃO DOS ESTUDANTES

2.3.1 Considerações Iniciais

Entender a participação dos estudantes na Obmep nos leva a refletir sobre como o ensino da matemática está inserido em praticamente todas as iniciativas e inovações humanas, e tendo em vista o déficit de aprendizagem em conhecimentos matemáticos por grande parte dos estudantes, no âmbito escolar ela não tem sido campo de estudo e nem se tornado a primeira opção para estes. Para Miguel (2005, p. 378) “A matemática se consolida como fundamental componente da cultura geral do cidadão que pode ser observada na linguagem corrente, na imprensa, nas leis, na propaganda, nos jogos, nas brincadeiras e em muitas outras situações do cotidiano”.

> (...) não é hora de buscarmos ressignificar a Matemática com a qual trabalhamos? (...) Não é hora de buscarmos uma Matemática que instrumentalize o cidadão para atuar e transformar a realidade em que vive? Uma Matemática crítica, que o ajude a refletir sobre as organizações e relações sociais? Uma Matemática próxima da vida, útil, compreensível, reflexiva? Uma Matemática que não se mostre perfeita, infalível, mas que seja capaz de ajudar a encontrar soluções viáveis? (MUZZI, 2004, p. 39).

Fazer uma reflexão acerca dessas questões equivale buscar um ensino de Matemática que não só cultive nos indivíduos a aptidão de compreender como a Matemática pode ressignificar nossa compreensão de mundo, mas também proporcionar aos estudantes compreender a Matemática presente no seu cotidiano, a forma como ela foi organizada, suas origens e sua relevância atualmente. Dessa maneira, é preciso buscar novos rumos para transformar a matemática em uma disciplina significativa e envolvente, onde os estudantes possam confiar na sua capacidade de moldar aquilo que já está criado e que também desenvolva novas habilidades para interpretar, opinar, debater e ter argumentos, e assim sendo, se constituir sujeito da sua própria aprendizagem.

Ao considerarmos quão importante é o papel da matemática e seus desafios para a superação dos déficit na Educação Básica, a descoberta de novos talentos e a abordagem da matemática, cotidianamente, tem sido muito comum na Obmep, contribuindo de forma positiva no desenvolvimento da educação no país.

> A presente avaliação é uma ótima oportunidade para os interessados no ensino público de refletir sobre a importância das Olimpíadas como projeto nacional, e os meios de aprimorá-lo como instrumento de avanço da educação escolar que conduza à abertura de oportunidades de ingresso nas carreiras científicas e tecnológicas dos estudantes da rede pública (DRUCK, 2011, p. 10).

Neste sentido, surgem inúmeras competições através das políticas públicas educacionais ou iniciativas da sociedade civil e de empresas privadas, voltadas para melhoria da qualidade da educação básica das escolas públicas nacionais. Neste contexto, a Obmep foi desenvolvida com o intuito de estimular os estudantes no estudo da matemática e incentivá-los na busca de novos conhecimentos, conforme pontuado em Obmep (2020).

Segundo Brasil (2011) é de extrema importância ampliar os campos de estudo e discussão e tornar notórias às políticas públicas educacionais e avaliações para que se possa desenvolver um sistema democrático para que todos sejam capazes de conjeturar e participar das decisões, buscando novas saídas para a conquista da autonomia.

2.3.2 Estrutura e execução da Obmep

A estrutura da Obmep envolve duas fases de provas. Segundo Obmep (2020), na primeira fase são aplicadas provas de múltipla escolha para todos os estudantes inscritos. A prova tem duração de 2h e 30 min e é realizada em cada escola inscrita e aplicada pelos professores da mesma escola, em cada turno de seu funcionamento. A correção das provas desta fase é realizada pelos docentes da própria escola inscrita, tendo como base as máscaras (gabaritos) enviadas pela Coordenação Geral da Olimpíada, obedecendo o calendário anual das datas importantes que são disponibilizadas no site da Obmep. Na segunda fase é realizada através de uma prova discursiva para 5% dos estudantes inscritos de cada nível, em cada escola inscrita. Esta etapa é realizada em uma escola polo e aplicada por estudantes e professores de Universidades contratadas, tendo duração de três horas.

Considerando a sua aceitação e credibilidade pelas escolas participantes, a tabela abaixo mostra a evolução da Obmep desde a sua primeira edição, em 2005.

Tabela 1 – Inscritos na primeira fase da Obmep (2005 - 2019)

Ano	Escolas	Estudantes	Municípios
2005	31.031	10.520.831	93,50%
2006	32.655	14.181.705	94,50%
2007	38.450	17.341.732	98,10%
2008	40.397	18.326.029	98,70%
2009	43.854	19.198.710	99,10%
2010	44.717	19.665.928	99,16%
2011	44.691	18.720.068	98,90%
2012	46.728	19.166.371	99,42%
2013	47.144	18.762.859	99,35%
2014	46.711	18.192.526	99,41%
2015	47.582	17.972.333	99,48%
2016	47.474	17.839.424	99,59%
2017	53.231	18.240.497	99,57%
2018	54.498	18.237.996	99,44%
2019	54.831	18.158.775	99,71%

Fonte: Obmep em números

Os dados acima nos mostram a evolução, grandiosidade e abrangência da Obmep, mobilizando professores e estudantes das escolas participantes, compondo um cenário de participação de todo o país.

A participação das escolas proporciona um estudo mútuo entre os professores e estudantes, à medida que em contato com a matemática aplicada nos problemas propostos nos bancos de questões de edições anteriores, disponibilizados no site, auxiliam na mediação e preparação dos estudantes.

A “Avaliação do impacto da Obmep” feita em 2011, deixa claro que:

> (...) nos dois grupos, tanto estudantes quanto professores concordam sobre a importância desse material, não apenas para a preparação para a Olimpíada, mas principalmente para o seu uso em sala de aula, que é percebido como inovador, desafiador e que exige raciocínio lógico dos estudantes – apenas 3% dos gestores afirmaram que os professores não utilizam o material. Por outro lado, há unanimidade entre os consultados de que as provas apresentam alto nível de dificuldade em relação ao atual nível de ensino-aprendizagem nas escolas públicas. Fica clara a percepção desse público da baixa qualidade atual do ensino público, e a sua disposição de mudar essa situação apontada no uso do material didático da Obmep, que prima pela alta qualidade acadêmica. (BRASIL, 2011, p. 10)

A avaliação pontua que os materiais didáticos entregues às instituições de ensino pela Obmep (Bancos de Questões e avaliações anteriores) são elementos de concordância no meio das escolas que obteram sucesso e entre aquelas que não têm tido sucesso na Obmep. Os dados dispostos acima indicam que os materiais da Obmep são riquíssimos para a construção e desenvolvimento do conhecimento matemático, no entanto poucos professores os utilizam em sala de aula.

Na tabela 2, está explícito a quantidade de escolas, de estudantes e de municípios que participaram da segunda fase. Percebe-se que a quantidade de escolas que têm estudantes aprovados para a segunda fase vem aumentando e a quantidade de estudantes inscritos para a segunda fase com significativa expansão, analisando desde 2005, a quantidade de participantes aumentou por volta de 107% e a tendência é aumentar ainda mais esses índices.

Tabela 2 – Inscritos na 2ª fase (2005 – 2019)

Ano	Escolas	Estudantes	Municípios
2005	29.074	457.725	91,90%
2006	29.661	630.864	92,40%
2007	35.483	780.333	96,90%
2008	35.913	789.998	96,90%
2009	39.387	841.139	98,10%
2010	39.929	863.000	98,30%
2011	39.935	818.566	98,10%
2012	40.770	823.871	98,50%
2013	42.480	954.926	99,35%
2014	41.302	907.446	98,83%
2015	42.316	889.018	97,62%
2016	43.232	913.889	99,05%
2017	49.617	941.630	99,23%
2018	50.183	952.782	98,89%
2019	50.663	949.240	99.03%

Fonte: Obmep em números

A tabela mostra a crescente participação de estudantes participantes de segunda fase da Obmep, chegando a um total de 949.240 participantes na segunda fase em 2019, possibilitando aos estudantes colocarem à prova seus conhecimentos.

2.4 PROGRAMAS E INCENTIVOS

A Obmep é uma iniciativa que coroa os melhores estudantes como forma de incentivo. Esta premiação corresponde apenas ao resultado da segunda etapa, sendo feita a partir da distribuição de medalhas de ouro, prata e bronze e de menção honrosa. A tabela 3 apresenta a quantidade de estudantes que receberam as respectivas premiações em cada ano/edição da Obmep.

Tabela 3 – Premiados por edição (2005 – 2019)

Ano	Ouro	Prata	Bronze	Menção Honrosa
2005	300	405	405	29.999
2006	300	405	405	33.633
2007	301	600	2.101	30.001
2008	301	901	1.803	33.012
2009	300	900	1.800	33.011
2010	500	900	1.804	30.048
2011	500	900	1.802	29.999
2012	500	902	3.102	40.929
2013	499	900	4.599	38.836
2014	501	1.500	4.500	42.044
2015	500	1.500	4.501	42.283
2016	501	1.500	4.500	42.842
2017	576	1.727	5.188	44.386
2018	575	1.725	5.175	46.646
2019	579	1.746	5.183	48.163

Fonte: Obmep em números

Analisando os dados da tabela acima, percebe-se que a quantidade de estudantes premiados no percurso histórico de edições da Obmep teve um aumento significativo em relação à quantidade de estudantes premiados em sua primeira edição, todavia é fácil perceber que esse aumento se deu pela expansão de participantes, tanto na primeira fase, quanto na segunda fase. Por outro lado, vale observar que em 2005 a porcentagem de premiados com relação ao total de estudantes participantes na primeira fase é de aproximadamente 0,3%, enquanto em 2019 essa porcentagem foi de aproximadamente 0,307%, o que implica dizer que não houve um crescimento significativo.

Os dados referentes aos premiados em Alagoas podem ser vistos na tabela a seguir:

Tabela 4 – Premiados em Alagoas (2005 – 2019)

Ano	Ouro	Prata	Bronze	Menção Honrosa
2005	1	15	15	543
2006	0	15	15	159
2007	0	5	19	116
2008	2	4	22	153
2009	1	6	22	141
2010	1	5	21	86
2011	4	3	23	129
2012	1	3	17	249
2013	0	5	64	273
2014	0	4	63	345
2015	0	3	61	403
2016	2	8	63	462
2017	4	8	75	381
2018	1	12	77	456
2019	4	7	78	609

Fonte: Obmep em números

Os números dos premiados no Estado de Alagoas não estão entre os maiores do Brasil, no entanto como observado na tabela acima, o número de medalhistas de bronze aumentou significativamente entre as edições de 2005 a 2019, representando um aumento de 420% nesse período. Já a quantidade de estudantes premiados com menções honrosas também é um destaque positivo para o Estado, no entanto a quantidade de medalhistas de prata e ouro não obedecem um padrão de crescimento ou decréscimo, uma vez que os números são muito dinâmicos. O que pode justificar isso é a quantidade de inscritos no estado, comparado com estados maiores, a exemplo de São Paulo e Minas Gerais, acumulando atualmente os maiores quadros de medalhistas no país. Além da premiação para os estudantes, também há uma premiação aos docentes que tiverem o maior número de premiados, premiação para as escolas e para as Secretarias de Educação, cujas escolas, estudantes e docentes estejam vinculados.

Segundo Obmep (2020), para os estudantes contemplados com as medalhas, há também uma Bolsa de Iniciação Científica Jr (PIC Jr.). O PIC Jr é oferecido para os estudantes medalhistas com duração de 1 ano e proporciona aos participantes o estudo de tópicos interessantes de Matemática. Sobre o BIC Jr:

> A Iniciação Científica (em matemática) é um programa que visa transmitir aos estudantes cultura matemática básica e treina-los no rigor da leitura e da escrita de resultados, nas técnicas e métodos, na independência do raciocínio analítico, entre outros. O estudante participa em atividades de pesquisa científica ou tecnológica, orientados por professores qualificados, nas instituições de ensino superior e de pesquisa. Com isso, pretende-se despertar a vocação científica do estudante, além de estimular a criatividade por meio do confronto com problemas interessantes da Matemática (IMPA, 2021)

Segundo Obmep (2021), o medalhista tem a oportunidade de frequentar um curso sobre a Obmep em uma universidade, com encontros semanais para debater e estudar matemática. Além dos encontros presenciais, há um fórum virtual para os estudantes mostrarem suas tarefas e compartilhar seus conhecimentos com todos os outros estudantes do país inteiro, em seus respectivos estados. As bolsas são pagas com recursos do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológicos (CNPq) e da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes).

Os encontros presenciais são de responsabilidade de professores orientadores das universidades onde os cursos são realizados. De uma forma geral, a bolsa

> é um diferencial na visão de um estudante pela excelência que caracteriza essa bolsa. Com certeza, é uma valorização especial do currículo de qualquer estudante! Espera-se de um bolsista uma grande dedicação ao programa e que sua participação seja uma experiência enriquecedora que irá marcá-lo por toda a vida (OBMEP, 2021).

Em 2009, segundo Obmep (2019), foi criada uma outra premiação destinada a alguns medalhistas de ouro – a Preparação Especial para Competições Internacionais (Peci). Essa preparação acontece ao longo do ano e é regida por um professor com ampla bagagem em competições internacionais. Os encontros são presenciais e as discussões se estendem em um fórum no site da Obmep. Existe ainda, o Programa de Iniciação Científica e Mestrado (Picme), que segundo Obmpe(2017), disponibiliza aos discentes de graduação que foram medalhistas na Obmep, a chance de desenvolver estudos aprofundados em Matemática, com a orientação de um professor, concomitantemente com a graduação.

A bolsa é disponibilizada através da parceria com o CNPq e a Capes com durabilidade de dois anos, podendo ser renovada após 12 meses, de acordo com o desenvolvimento e a desenvoltura nas atividades propostas. Através do Picme, o graduando tem a possibilidade de ingressar no mestrado, sendo contemplado com uma bolsa da Capes.

Uma outra iniciativa da Obmep, segundo Impa (2021) é o programa Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo (Poti) que disponibiliza cursos de matemática para todos os estudantes que estejam no oitavo ou nono ano do Ensino Fundamental e em qualquer série do Ensino Médio. Os cursos são gratuitos e destinados aos estudantes que gostam e se interessam em estudar matemática. Os encontros presenciais e as inscrições para participar do Poti acontecem atualmente nos polos do Rio de Janeiro (RJ), São Paulo (SP), Campinas (SP), São Bernardo do Campo (SP), São José dos Campos (SP), Salvador (BA), Fortaleza (CE), Maceió (AL), João Pessoa (PB), Porto Alegre (RS), Campo Grande (MS), Maringá (PR), Ponta Grossa (PR) e

Lajeado (TO). Para os estudantes que não têm acesso às aulas presenciais, o POTI disponibiliza aulas em vídeo gravadas pelo Impa.

Segundo Obmep (2019), a Obmep também proporciona aos professores de matemática de escolas públicas um programa ao qual eles são submetidos a um exame, e quando aprovados, submetem e defendem seus projetos visando contribuir para a melhoria da educação, projeto denominado Obmep na Escola. O melhor projeto é desenvolvido pelo professor que o desenvolveu e esse recebe uma bolsa da Capes. Os professores são preparados para desenvolver seus projetos em suas escolas ou em escolas vizinhas. O programa visa estimular atividades extraclasse com o uso dos materiais da Obmep, tais como provas e bancos de questões.

3 CONHECENDO A ARITMÉTICA

Para Barreiros (2018, p. 1) a "aritmética é a parte da matemática que lida com as operações numéricas: soma, subtração, divisão e multiplicação". Segundo Hefez (2016) a parte mais elementar da teoria dos números. De uma forma geral, a aritmética se dedica ao estudo dos números inteiros e suas especificidades e generalizações operatórias, conforme visto em Hefez (2016). Já para Dantzig (1970, p. 44), “a aritmética é a base de toda a Matemática, pura ou aplicada. É a mais útil das ciências e provavelmente não existe nenhum outro ramo do conhecimento humano tão espalhado entre as massas.”

3.1 ARITMÉTICA NA HISTÓRIA E SEU SIGNIFICADO

Segundo o dicionário Michaelis (2021), a palavra aritmética é de origem grega, *arithmētikē*, que por sua vez deriva do grego *arithmos* que significa “número”. Para Hefez (2016) a origem da aritmética se confunde com a origem do estudo da matemática e alguns historiadores relatam que a o estudo da matemática surgiu na Grécia com Tales de Mileto (640- 546 a.E.C.). Hefez (2016) ainda acrescenta que Tales teve forte influência dos egípcios e mesopotâmicos, ao introduzir a estrutura inicial da geometria e da aritmética, dando início a um período de mais 500 anos de estudos dedicados à matemática.

Um outro nome a se considerar é Pitágoras de Samos (580-500 a.E.C.) e sua escola, os quais foram responsáveis por difundir a matemática pela Grécia e região. Segundo Vasconcellos (1925) os pitagóricos, nome dado às pessoas que faziam parte da escola, consideravam que o número era muito importante para descrever fenômenos da natureza, e como para eles os números tinham poderes místicos, a filosofia da escola era que “O número é tudo” ou que o “número era a substância de todas as coisas”, tornando assim a aritmética como a base filosófica da escola pitagórica da época.

Com todo esse retrospecto positivo de estudos e difusão da matemática na Grécia, uma obra fundamental da aritmética surge, denominada *Os Elementos*, de Euclides (aprox. 300 a.E.C.).

Segundo Roque (2012), *Os Elementos* foram construídos por Euclides a partir do método lógico dedutivo. Esse método faz uso de certos princípios, os axiomas, a partir dos quais os primeiros teoremas e proposições foram construídos. O método dedutivo utiliza da argumentação lógica para realizar a demonstração de uma certa proposição ou teorema, isso faz com que a demonstração não é o método da demonstração matemática para garantir que não cometem erros ao chegar aos seus resultados.

Na visão de Hefez (2016), a obra *Os Elementos* na verdade é um tratado constituído por 13 livros, dos quais 10 tratam sobre geometria e 3 sobre aritmética. Os livros que tratam sobre aritmética são os livros VII, VIII e IX, e nesses Euclides trata dos números como se eles fossem segmentos de reta, já um número ao quadrado é visto como uma área. Uma obra gigante de importância inestimável, *Os Elementos* podem ser vistos como uma verdadeira enciclopédia matemática. Diferente do que se pensa, os elementos não são um tratado sobre geometria, ao contrário, são um tratado sobre matemática.

Segundo Roque (2002), no livro VII Euclides dá a definição de divisibilidade, argumenta e define os números primos, trata sobre as particularidades de máximo divisor comum e de mínimo múltiplo comum. É nesse livro que Euclides mostra o eficaz algoritmo, que é utilizado até os dias atuais, utilizado para determinar o máximo divisor comum de dois inteiros, esse fantástico algoritmo é denominado de Algoritmo de Euclides, que apresentaremos na Seção 3.4.

Já no Livro VIII, para Hefez (2016), Euclides trata das propriedades das sequências de números em progressão contínuas ou em linguagem atual progressões geométricas.

Euclides no livro IX, apresenta um dos grandes resultados da matemática, ele mostra que dado um número qualquer, é possível determinar uma quantidade de números primos maior que esse número, isto é, segundo Hefez (2016), Euclides mostra a existência de infinitos números primos. Além disso, Euclides descreve o atualmente chamado Teorema Fundamental da Aritmética (3.4), propondo que todo número natural pode ser escrito, de forma única, como produto de números primos.

A aritmética, após Euclides, passa por um hiato científico de 500 anos, onde poucas foram as contribuições na área após a obra euclidiana. Segundo Hefez (2016), somente por volta de 250 (E.C) Diofanto, com suas equações diofantinas, traz uma nova forma de tratar a aritmética, mais algébrica, diferentemente da forma geométrica tratada por Euclides.

Após isso, a aritmética só se depara no século XVII com as contribuições de Pierre de Fermat (1601 - 1665) como um dos maiores de sua época e grande estudioso da aritmética Fermat, exercendo grande influência sobre os estudos da aritmética e contribuindo significativamente para o desenvolvimento da álgebra. Diversas foram suas contribuições, com destaque para o Princípio de Fermat, o Pequeno Teorema de Fermat, último teorema de Fermat, o teste de primalidade de Fermat, conforme versa Hefez (2016).

Um outro matemático que teve grande influência para a evolução da aritmética foi Lehonard Euler (1707 - 1783). Além disso, Euler refutou uma tese em que Pierre afirmava que todos os números da forma $2^{2^n} + 1$ são primos. Segundo D'Ambrosio (2009), salvo o "Último Teorema de Fermat", todos os outros teoremas enunciados por Fermat foram demonstrados por Euler.

A seguir trataremos sobre o embasamento teórico matemático utilizado no trabalho. Discorreremos sobre os principais aspectos teóricos relacionados à aritmética, a partir de teoremas, proposições e exemplos. Trataremos sobre os conceitos de divisibilidade, versaremos sobre os critérios de divisibilidade mais importantes, abordaremos sobre os números primos, o Algoritmo de Euclides, Mínimo Múltiplo Comum (mmc), Máximo Divisor Comum (mdc) e um pouco sobre congruências modular.

3.2 CONCEITOS PRELIMINARES

Nesta seção vamos tratar de alguns conceitos preliminares úteis no decorrer da fundamentação. O primeiro desses conceitos é o Princípio da Boa Ordenação (PBO), tido como uma das mais sólidas ferramentas utilizadas nas demonstrações matemáticas, e base para a construção de diversos resultados relacionados aos números inteiros.

As demonstrações, teoremas e proposições realizadas no decorrer dessa seção foram retiradas/embasadas nas obras de Hefez (2016) e De Oliveira Santos (1998).

Definição 3.1 *Seja X um subconjunto não vazio de* $\mathbf{Z}$*. Dizemos que X é limitado inferiormente quando existe um elemento $x_0 \in \mathbf{Z}$ tal que*

$$x_0 \leq x, \forall x \in X.$$

De modo análogo, podemos definir um conjunto limitado superiormente e seu elemento máximo (ou maior elemento).

Axioma 3.1 (PBO) *Todo subconjunto não vazio e limitado inferiormente X de* $\mathbf{Z}$ *possui menor elemento.*

Analisando o PBO e o conjunto dos números naturais, podemos inferir que *todo subconjunto X, não vazio, de $\mathbb{N}$ possui um menor elemento*, ou seja, isso significa dizer que todo subconjunto X de $\mathbb{N}$ é limitado inferiormente.

Proposição 3.1 *Dado um conjunto $X \in \mathbb{N}$, o seu elemento mínimo é único.*

Demonstração: Suponha que a e b sejam dois elementos mínimos de X. Como a é o mínimo, temos pelo PBO:

$$a \leqslant b. \tag{1}$$

Agora como b é o mínimo, temos também pelo PBO:

$$b \leqslant a. \tag{2}$$

Como a e b são naturais, das equações 1 e 2 podemos concluir que $a = b$. Assim resulta que o elemento mínimo é único. ■

Proposição 3.2 *Seja a um número inteiro. Se $a > 0$, então $a \geqslant 1$.*

Demonstração: Suponha por absurdo que exista $m \in \mathbb{Z}$ tal que $m0 < m < 1$. Deste modo, podemos construir

$$X = \{m \in \mathbb{Z} \mid 0 < m < 1\}.$$

Agora note que X é não vazio e limitado inferiormente e de acordo com o PBO, possui um menor elemento, x_0. Dessa forma

$$0 < x_0 < 1.$$

Desse fato, oberve que $0 < x_0^2 < 1$ e que $x_0^2 < x_0$ o que é absurdo, uma vez que x_0 é o mínimo de X. Daí, não existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $m0 < m < 1$.

Portanto, Se $a > 0$, então $a \geqslant 1$. ■

Corolário 3.1 *Sejam a e b inteiros quaisquer. Se $a > b$, então $a \geqslant b + 1$.*

Demonstração: Como $a > b$, segue que $a - b > 0$. Da proposição 3.2, temos que se $a - b > 0$, então $a - b \geqslant 1$ e consequentemente, $a \geqslant b + 1$. ■

Proposição 3.3 (Propriedade Arquemediana) *Se a e b são números naturais, então existe um número natural n tal que $na \geqslant b$.*

Demonstração: Suponha que a afirmação não seja verdadeira, tal que para todo natural n, temos $na < nb$. Consideremos um conjunto $S = \{b - na \mid n \in \mathbb{N}\}$ constituído apenas por números naturais. Pelo PBO, o conjunto S possui elemento mínimo, digamos que m seja esse elemento. Agora como $m \in S$, então vai existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m = b - n_0a$. Agora tomando um outro elemento m_1, tal que $m_1 = b - (n_0 + 1)a$, temos que $m_1 \in S$, uma vez que os elementos de S, são dessa forma. Daí, temos que:

$$m_1 = b - (n_0 + 1)a = b - n_0 a - a = m - a.$$

Deste modo, podemos inferir que $m_1 < m$, isto é, que m_1 é o mínimo de S. O que não pode acontecer, uma vez que foi dito no início que m é o mínimo de S, e este é único, conforme proposição 3.1 ele é único. Dessa forma segue que $na \geqslant b$. ■

Teorema 3.1 (Princípio de Indução Finita - Indução Fraca) *Seja $P(n)$ uma sentença tal que $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geqslant n_0\}$, em que $n_0 \in \mathbb{Z}$. Então, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geqslant n_0$, desde que $P(n)$ satisfaça as seguintes condições:*
(i) $P(n_0)$ é verdadeira;
(ii) Se $P(n)$ é verdadeira para $n \geqslant n_0$, então $P(n+1)$ também é verdadeira.

Demonstração: Considere um conjunto

$$X = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geqslant n_0 \; e \; P(n) \; falsa\}.$$

Queremos mostrar que $X = \emptyset$. Para isso, suponha por absurdo que $X \neq \emptyset$. Observe que X é limitado inferiormente, então pelo PBO, existe um $y \in X$ tal que y é o menor elemento de X, tal que

$$y \leqslant n, \forall n \in X.$$

Do fato de $y \in X$, temos que $y \geqslant n_0$, $P(y)$ é falsa e $y \neq n_0$, uma vez que $P(n_0)$ é verdadeira. Deste modo concluímos que $y > n_0$ e pelo corolário 3.1, temos que $y - 1 \geqslant n_0$. Como y é o mínimo de X, resulta que $y - 1 \notin X$. Dessa forma concluímos que $P(y-1)$ é verdadeira e desse fato decorre que $P(y)$ também é verdadeira pela condição (*ii*). Daí segue $y \notin X$, o que é absurdo, uma vez que tomamos $y \in X$. Logo $X = \emptyset$ e portanto P(n) é verdadeira para todo $n \geqslant n_0$. ■

Exemplo 3.1 *Mostre que* $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Solução: Vamos mostrar o fato acima por indução sobre n.

A proposição é verdadeira para $P(n_0 = 1)$, uma vez que temos

$$1 = \frac{1(1+1)(2.1+1)}{6}$$
$$1 = 1.$$

Agora considere que a proposição é verdadeira para $n = k$, com $k \geqslant 1$,isto é, que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Essa será a nossa hipótese de indução. Agora vamos mostrar que a proposição é verdadeira para $n = k + 1$. Somando $(k+1)^2$ em ambos os lados temos:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)(k+1)}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)[2k^2 + k + 6k + 6]}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)[2k^2 + 7k + 6]}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}.$$

Assim, a proposição é verdadeira para $n = k + 1$. Portanto a proposição é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Existe uma segunda forma de demonstração por indução, a qual chamaremos de Indução Forte que será mostrado a seguir.

Teorema 3.2 (Princípio de Indução Finita - Indução Forte) *Seja $P(n)$ uma sentença tal que $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geqslant n_0\}$, em que $n_0 \in \mathbb{Z}$. Então, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geqslant n_0$, desde que $P(n)$ satisfaça as seguintes condições:*
(i) $P(n_0)$ é verdadeira;
(ii) Se $P(k)$ é verdadeira para todo k, tal que $n_0 \leqslant k \leqslant n$, então $P(n+1)$ também é verdadeira.

Demonstração: A demonstração transcorre analogamente como fizemos na primeira forma, basta tomarmos o conjunto

$$S = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geqslant n_0 \ e \ P(n) \ falsa\}.$$

Queremos mostrar que $S = \emptyset$. Suponha por absurdo que $S \neq \varnothing$. Observe que S é limitado inferiormente, então pelo PBO, existe um $y \in S$ tal que y é o menor elemento de S, tal que

$$y \leqslant n, \forall n \in S.$$

Do fato de $y \in S$, temos que $y \geqslant n_0$, $P(y)$ é falsa e $y \neq n_0$, uma vez que $P(n_0)$ é verdadeira. Deste modo concluímos que $y > n_0$ e pelo corolário 3.1, temos que $y-1 \geqslant n_0$. Como y é o mínimo de S, então temos que $P(k)$ é verdadeira para todo $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n_0 < k < y-1$. Do item (*ii*) segue que $P(y)$ também é verdadeira, isto é, que $y \notin S$, o que é um absurdo, uma vez que tomamos $y \in S$. Logo $S = \emptyset$ e portanto $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geqslant n_0$. ■

O item (i) dos dois teoremas anteriores é chamado de base da indução, a qual usamos para analisar a validade de $P(n)$ quando $n = n_0$, o qual é denominado valor inicial. Por outro lado, o item (ii) é denominado passo indutivo ou passo de indução, onde a hipótese é denominada de hipótese de indução.

O passo indutivo é utilizado para verificar a validade de $P(n+1)$, sempre que $P(n)$ é verdadeira, com $n > n_0$. Verificado que $P(n+1)$ também é verdadeira, resulta que a proposição será verdadeira para todo n.

Exemplo 3.2 *Prove que: “Todo número natural maior ou igual a 2 pode ser decomposto num produto de números primos".*

Solução: Vamos mostrar o fato acima pelo princípio indução forte sobre n. Considere $n \geqslant 2$. Para $n = 2$ a decomposição em números primos é simples, uma vez que o próprio 2 é um número primo. Assim a proposição é verdadeira para $n = 2$.

Agora suponha que a proposição seja verdadeira para todo $n = 2, 3, 4, \cdots k$, isto é, que todo número natural $n = 2, 3, 4, \cdots k$ pode ser decomposto num produto de números primos. Essa será a nossa hipótese de indução.

Agora vamos mostrar que a proposição é verdadeira para $n = k+1$.

Temos duas situações, se $k+1$ for primo, não há o que mostrar, uma vez que ele mesmo será a decomposição buscada. Então vamos supor que $k+1$ não é primo, daí existirão x e $y \in \mathbb{N}$ tal que $k+1 = x \cdot y$ com $x < k+1$ e $y < k+1$. Deste modo, da hipótese de indução sabemos que x e y podem ser decompostos em um produto de números primos e como $k+1 = x \cdot y$, então $k+1$ pode ser decomposto num produto de números primos. Assim, todo número $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$ pode ser decomposto num produto de números primos.

3.3 DIVISIBILIDADE

A divisão de um número inteiro por outro é algo muito interessante pra se abordar, uma vez que nem sempre é possível realizar tal operação. Essa possibilidade é expressada a partir da relação de divisibilidade, caso não exista essa relação, mesmo assim será possível realizar uma “divisão com resto pequeno”, a qual é denominada de divisão euclidiana. Os resultados enunciados e demonstrados aqui foram retirados/embasados nas obras de Hefez (2016) e De Oliveira Santos (1998).

Definição 3.2 *Dados a e b números inteiros, com* $a \neq 0$*, diremos que a divide b e denotamos por* $a|b$*, se existir um inteiro c tal que* $b = c \cdot a$*.*

Por outro lado, se a não divide b, escreveremos $a \nmid b$.

Exemplo 3.3 *Veja que* $3|27$*, uma vez que existe um inteiro* $c = 9$*, tal que* $27 = 3 \cdot 9$

Exemplo 3.4 *Agora observe que* $8 \nmid 33$*, uma vez que não existe um inteiro* c*, tal que* $33 = 8 \cdot c$

Em linhas gerais dizer que $a|b$ significa dizer que a é um divisor de b e, consequentemente, podemos dizer ainda que b é um múltiplo de a.

Proposição 3.4 *Sejam a, b e c são inteiros, se* $a|b \quad e \quad b|c$*, então* $a|c$

Demonstração: Como $a|b \quad \text{e} \quad b|c$, então existem q_1 e q_2 inteiros tais que $b = q_1 \cdot a \quad \text{e} \quad c = q_2 \cdot b$. Substituindo agora b na igualdade $c = q_2 \cdot b$, resulta que $c = q_2 \cdot q_1 \cdot a = k_1 \cdot a$, o que implica dizer que $a|c$. ■

Exemplo 3.5 *Observe dados os números inteiros 3, 6 e 24, tal que* $3|6 \quad e \quad 6|24$*, então resulta que* $3|24$*.*

Proposição 3.5 *Sejam a, b, c, d* $\in \mathbb{Z}$*. Tem-se que*
i) $1|a$, $a|a \quad e \quad a|0$
ii) se $a|b \quad e \quad c|d$*, então* $a \cdot c|b \cdot d$*.*

Demonstração:
i) A prova deste item segue das seguintes igualdades $a = a \cdot 1, a = a \cdot 1 \quad \text{e} \quad 0 = 0 \cdot a$.
ii) Se $a|b \quad \text{e} \quad c|d$, então existem $q_1 \quad \text{e} \quad q_2$ inteiros tais que $b = q_1 \cdot a \quad \text{e} \quad d = q_2 \cdot c$. Multiplicando membro a membro os termos das duas equações temos que $b \cdot d = (q_1 \cdot q_2) \cdot (a \cdot c) = k \cdot (a \cdot c)$, daí concluímos que $a \cdot c|b \cdot d$. ■

Uma particularidade da proposição acima seria tomar $d = c$, neste caso se $a|b$ poderíamos reescrever afirmando que $a \cdot c|b \cdot c$ para todo $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Proposição 3.6 *Sejam* $a, b, c \in \mathbb{Z}$*, tais que* $a|(b \pm c)$*. Então* $a|b \Leftrightarrow a|c$*.*

Demonstração: $\Rightarrow$) Suponha que $a|(b+c)$. Queremos mostrar que $a|b \Rightarrow a|c$.

Como $a|(b+c)$, então existe $q_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $b+c = a \cdot q_1$. Por outro lado, se $a|b$, então $q_2 \in \mathbb{Z}$ tal que $b = a \cdot q_2$. Substituindo b na primeira igualdade temos:

$$b + c = a \cdot q_1$$
$$a \cdot q_2 + c = a \cdot q_1$$
$$c = a \cdot q_1 - a \cdot q_2$$
$$c = (q_1 - q_2) \cdot a.$$

Dessa forma, segue que $a|c$.

$\Leftarrow$) Suponha que $a|(b+c)$. Queremos mostrar que $a|c \Rightarrow a|b$.

Como $a|(b+c)$, então vai existir $q_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $b+c = a \cdot q_1$. Por outro lado, se $a|c$, então $q_2 \in \mathbb{Z}$ tal que $c = a \cdot q_2$. Substituindo c na primeira igualdade temos:

$$b + c = a \cdot q_1$$
$$b + a \cdot q_2 = a \cdot q_1$$
$$b = a \cdot q_1 - a \cdot q_2$$
$$b = (q_1 - q_2) \cdot a.$$

Dessa forma, segue que $a|b$.

Analogamente mostramos que se $a|(b-c)$ e se $a|b$, então teremos que $a|-c$ o que consequentemente nos diz que $a|-c$. Também de acordo com o item anterior mostramos que se $a|c \Rightarrow a|b$. ■

Proposição 3.7 *Se $a, b, c \in \mathbb{Z}$, são tais que $a|b$ e $a|c$, então $a|(xb+yc)$ para todo x e $y \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração: Inicialmente veja que $a|b$ e $a|c$, logo existem q_1 e $q_2 \in \mathbb{Z}$ tal que $b = a \cdot q_1$ e $c = a \cdot q_2$. Deste modo,

$$xb + yc = x \cdot a \cdot q_1 + y \cdot a \cdot q_2$$
$$xb + yc = (x \cdot q_1 + y \cdot q_2)a.$$

Assim, temos que $a|(xb+yc)$. ■

Proposição 3.8 *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. Temos que $a-b$ divide $a^n - b^n$.*

Demonstração: Iremos demonstrar a proposição acima por indução sobre n.

Para $n = 1$ a proposição é verdadeira, pois $(a-b)|a^1 - b^1$.

Agora suponha que a proposição é verdadeira para $n = k$, com $k \in \mathbb{N}$, isto é que, $(a-b)|a^k - b^k$.

Agora vamos mostrar que a proposição é verdadeira para $n = k+1$. Para isso veja que:

$$a^{k+1} - b^{k+1} = a^k a - b^k b$$
$$a^{k+1} - b^{k+1} = a^k a - b^k b + ab^k - ab^k$$
$$a^{k+1} - b^{k+1} = a^k a - ab^k + ab^k - b^k b$$
$$a^{k+1} - b^{k+1} = a(a^k - b^k) + b^k(a-b).$$

Veja que da hipótese de indução temos $(a-b)|(a^k - b^k)$ e por outro lado, temos que $(a-b)|(a-b)$, da proposição 3.7 podemos concluir que $(a-b)|a^{k+1} - b^{k+1}$. Assim a proposição é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. $\blacksquare$

Uma observação importante da proposição acima é que todo número da forma $10^n - 1$ é divisível por 9, basta tomarmos $a = 10$, $b = 1$, com $n \in \mathbb{N}$, substituirmos na proposição acima e logo teremos $a - b = 9$, $a^n - b^n = 10^n - 1$, ou seja, resultará que $9|(10^n - 1)$.

Exemplo 3.6 *Mostre que* $5|(13^7 - 8^8)$.

Solução: Da proposição 3.8 temos que $a - b|a^n - b^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, decorre que $13 - 8|13^n - 8^n$ e como $5 = 13 - 8$ podemos concluir que $5|13^7 - 8^7$.

Proposição 3.9 *Sejam* $a, b \in \mathbb{Z}$ *e* $n \in \mathbb{N} \cup 0$. *Temos que* $a + b$ *divide* $a^{2n+1} + b^{2n+1}$.

Demonstração: Aqui também iremos demonstrar a proposição acima por indução sobre n.

Para $n = 0$ a proposição é verdadeira, uma vez que $(a+b)|a^1 + b^1$.

Agora vamos supor que a proposição é verdadeira para $n = k$, com $kn \in \mathbb{N} \cup 0$, isto é que, $(a+b)|a^{2k+1} - b^{2k+1}$.

Agora vamos mostrar que a proposição é verdadeira para $n = k+1$.

De fato, observe que:

$$a^{2(k+1)+1} + b^{2(k+1)+1} = a^{2k+1}a^2 + b^{2k+1}b^2$$
$$a^{2(k+1)+1} + b^{2(k+1)+1} = a^{2k+1}a^2 + b^{2k+1}b^2 + b^2a^{2k+1} - b^2a^{2k+1}$$
$$a^{2(k+1)+1} + b^{2(k+1)+1} = a^{2k+1}a^2 - b^2a^{2k+1} + b^{2k+1}b^2 + b^2a^{2k+1}$$
$$a^{2(k+1)+1} + b^{2(k+1)+1} = a^{2k+1}(a^2 - b^2) + b^2(a^{2k+1} + b^{2k+1}).$$

Observe agora que $(a+b)|(a^2 - b^2)$, uma vez que $(a^2 - b^2) = (a+b) \cdot (a-b)$ e que pela hipótese de indução, temos que $(a+b)|(a^{2k+1} + b^{2k+1})$. Daí da proposição 3.7 temos que $(a+b)|(a^{2(k+1)+1} + b^{2(k+1)+1})$. Assim temos que a proposição é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N} \cup 0$.

■

Exemplo 3.7 *Mostre que* $13|(2^{70}+3^{70})$.

Solução: Veja que .

$$2^{70}+3^{70}=4^{35}+9^{35}.$$

Como 35 é ímpar, da proposição 3.9 temos $a+b$ divide $a^{2n+1}+b^{2n+1}$. Dessa maneira temos que 4+9 divide $4^{35}+9^{35}$.Daí, concluímos que $13|(2^{70}+3^{70})$.

Proposição 3.10 *Sejam* $a,b\in\mathbb{Z}$ *e* $n\in\mathbb{N}$. *Temos que* $a+b$ *divide* $a^{2n}-b^{2n}$.

Demonstração: O método de demonstração utilizado aqui será também a indução sobre n.

Veja que para $n=1$ a proposição é verdade, pois $a+b$ divide a^2-b^2, porque $(a^2-b^2)=(a+b)\cdot(a-b)$.

Suponhamos que a proposição é verdadeira para $n=k$, isto é, que $(a+b)|(a^{2k}-b^{2k})$.

Agora vamos mostrar que a proposição é verdadeira para $n=k+1$.

$$a^{2(k+1)}-b^{2(k+1)}=a^2a^{2k}-b^2b^{2k}$$
$$a^{2(k+1)}-b^{2(k+1)}=a^2a^{2k}-b^2b^{2k}+b^2a^{2k}-b^2a^{2k}$$
$$a^{2(k+1)}-b^{2(k+1)}=a^2a^{2k}-b^2a^{2k}-b^2b^{2k}+b^2a^{2k}$$
$$a^{2(k+1)}-b^{2(k+1)}=a^{2k}(a^2-b^2)+b^2(a^{2k}-b^{2k}).$$

Observe agora que $(a+b)|(a^2-b^2)$ e da hipótese de indução, temos que $(a+b)|(a^{2k}-b^{2k})$. Desses fatos e da proposição 3.7 temos que $(a+b)|(a^{2(k+1)}-b^{2(k+1)})$. Assim temos que a proposição é verdadeira para todo $n\in\mathbb{N}$. ■

Exemplo 3.8 *Mostre que* 9 *e* 41 *dividem* $5^{24}-4^{24}$.

Solução: Inicialmente veja que:

$$5^{24}-4^{24}=5^{2\cdot12}-4^{2\cdot12}=(25)^{2\cdot6}-(16)^{2.6}.$$

Da proposição 3.10 temos que $a+b$ divide $a^{2n}-b^{2n}$, como $9=5+4$ e $41=25+16$, logo temos que:

$$(5+4)|(5^{2\cdot12}-4^{2\cdot12}).$$

e

$$(25+16)|(25^{2\cdot6}-16^{2\cdot6}).$$

Assim, resulta que 9 e 41 dividem $5^{24} - 4^{24}$.

Teorema 3.3 (Divisão Euclidiana) *Sejam a e b dois números inteiros com $b \neq 0$. Existem dois únicos números inteiros q e r tais que*

$$a = bq + r, \ \text{com}\ 0 \leqslant r < |b|.$$

Demonstração: Inicialmente vamos demonstrar a existência de tais números.

Inicialmente considere o seguinte conjunto:

$$S = \{x = a - by \mid y \in \mathbb{Z}\} \cap \{\mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

De acordo com a proposição 3.3, Propriedade Arquimediana, existe um número $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n(-b) \geqslant -a$, o que implica $a \cdot n(-b) \geqslant 0$. desse fato, temos que o conjunto S não é vazio. Daí, temos que S é limitado inferiormente por zero e o Princípio da Boa Ordenação, nos diz que S possui um menor elemento, que denotaremos por r.

Agora suponha que $r = a - bq$. Logo temos que $r \geqslant 0$. O que mostra a primeira parte da desigualdade.

Nos falta mostrar que $r < |b|$.

Para isso, Suponha por absurdo que $r \geqslant |b|$. Daí temos que existe um s em $\mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $r = |b| + s$, logo $0 \leqslant s < r$. No entanto, isso contradiz o fato de r ser o menor elemento de S, uma vez que $s = a - (q \pm 1)b$, com $s < r$. Assim segue que $r < |b|$.

Deste modo, existem q e r tais que

$$a = bq + r, \ \text{com}\ 0 \leqslant r < |b|.$$

Vamos mostrar agora a unicidade. Suponha que existam q, q' e r, r', tais que $a = bq + r$ e $a = bq' + r'$, tal que $q, q', r, r' \in \mathbb{Z}, \ \ 0 \leqslant r < |b|$ e $0 \leqslant r' < |b|$.

Veja que

$$r' - r \leqslant r' \ \Rightarrow r' - r \ \leqslant |b|.$$

Por outro lado, temos

$$-r \leqslant r' - r \ \Rightarrow |b| \ \leqslant r' - r.$$

Agora note que $r < |b|$, então $-r > -|b|$ o que implica $-|b| < -r$. Daí podemos concluir que

$$-|b| < -r \leqslant r' - r \leqslant r' < |b|$$
$$-|b| < r' - r < |b|$$

$$|r' - r| < |b|. \tag{3}$$

Como $a = bq + r$ e $a = bq' + r'$, subtraindo membro a membro, temos:

$$\begin{aligned} a - a &= bq - bq' + r - r' \\ 0 &= (q - q')b + r - r' \\ (q - q')b &= r' - r. \end{aligned}$$

Aplicando o módulo, membro a membro temos:

$$|q - q'|.|b| = |r' - r|. \tag{4}$$

De 3 e 4, temos:

$$|q - q'|.|b| = |r' - r| < |b|. \tag{5}$$

Dessa forma, para que a desigualdade 5 seja verdadeira, devemos ter $q - q' = 0$ e $r' - r = 0$, o que nos fornece que $q = q'$ e $r' = r$. Assim, temos que q e r são únicos. ■

Os termos q e r do teorema acima são chamados, respectivamente, de quociente e resto da de a por b. Na divisão euclidiana, se ao dividir a por b tivermos $r = 0$, significa que $a|b$.

Exemplo 3.9 *O quociente e o resto da divisão de* 13 *por* 3 *é* 4 *e* 1 *respectivamente, uma vez que 13 = 4.3 + 1.*

Exemplo 3.10 *Dado um número inteiro* $n \in \mathbb{Z}$ *qualquer, temos duas possibilidades:*
(i) o resto da divisão de n por 2 é 0, isto é, existe $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $n = 2k$; *ou*
(ii) o resto da divisão de n por 2 é 1, ou seja, existe $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $n = 2k + 1$.

Isso significa que os números inteiros podem ser divididos em dois grandes conjuntos, o dos que são da forma $2k$ para algum $k \in \mathbb{Z}$, que denominamos números pares, e a dos números da forma $2k + 1$, que denominamos números ímpares. De modo geral, os números pares são aqueles que deixam resto 0 ao dividi-los por 2 e ímpares são aqueles que deixam resto 1 ao dividi-los por 2. Desde os tempos de Pitágoras, por volta de 500 a.E.C. que já dividiam os números inteiros entre pares e ímpares.

Exemplo 3.11 *Seja n um número natural e a sequência* $n, n + 1, n + 2$. *Mostre que somente um dos termos da sequência é divisível por 3.*

Solução: Os números naturais podem admitir somente uma representação a seguir $3k, 3k + 1$ ou $3k + 2, k \in \mathbb{N}$. Dessa forma: Para $n = 3k$, temos

$$n, n+1, n+2$$
$$3k, 3k+1, 3k+2.$$

Logo, somente o primeiro será divisível por 3. Para $n = 3k+1$, temos

$$n, n+1, n+2$$
$$3k+1, 3k+1+1, 3k+1+2$$
$$3k+1, 3k+2, 3k+3$$
$$3k+1, 3k+2, 3(k+1)$$
$$3k+1, 3k+2, 3q.$$

Assim, somente o terceiro será divisível por 3, para algum $q \in \mathbb{N}$.

Por fim, para $n = 3k+2$, segue que:

Para $n = 3k$, temos

$$n, n+1, n+2$$
$$3k+2, 3k+2+1, 3k+2+2$$
$$3k+2, 3k+3, 3k+3+1$$
$$3k+2, 3(k+1), 3(k+1)+1$$
$$3k+2, 3q, 3q+1.$$

Portanto, somente o segundo termo será divisível por 3, para algum $q \in \mathbb{N}$.

3.4 ALGORITMOS DE EUCLIDES

Trataremos nessa seção do algoritmo de Euclides e suas implicações. Todos os resultados mostrados aqui podem ser vistos no Livro VII *Elementos de Euclides*, que trata inicialmente do algoritmo euclidiano, como determinar o mdc de dois ou mais números inteiros e além disso, usa esse resultado para verificar se dois inteiros são primos entre si. No livro VII também podemos ver um pouco de proporções numéricas ou pitagóricas. Isso mostra o quão a contemporaneidade dessa obra, que apesar dos tempos, tem uma importância relevante para a construção do conhecimento matemático. Os resultados enunciados e demonstrados aqui também foram extraídos/embasados nas obras de Hefez (2016) e De Oliveira Santos (1998).

Definição 3.3 *Sejam dados dois a, $b \in \mathbb{Z}$, não necessariamente diferentes. Um número $d \in \mathbb{Z}$ será dito um divisor comum de a e b se $d|a$ e $d|b$.*

Exemplo 3.12 *Os números $\pm 1, \pm 2 \pm 3, \pm 6$ são divisores comuns de 18 e 24.*

A seguir temos basicamente a definição dada por Euclides em *Os elementos*, essa definição é tida como peça fundamental da aritmética euclidiana.

Definição 3.4 (Máximo Divisor Comum - Euclides) *Diremos que um número inteiro $d \geqslant 0$ é um máximo divisor comum de a, $b \in \mathbb{Z}$,se possuir as seguintes propriedades:*
i) $d|a$ e $d|b$;
ii) d é divisível por todos os divisores de a e b;
iii) Se c é um divisor comum de a e b, então $c|d$.

Nessa última definição, o item (*iii*) nos permite afirmar que o mdc de a e b é único. De fato, suponha que existam dois, d e d', do item (*iii*) temos que qualquer divisor comum de a e b, divide o mdc. Como d é um divisor comum e d' é o mdc, então temos que $d|d'$. Por outro lado, como d' é um divisor comum e d é o mdc, então temos que $d'|d$. Assim, como $d|d'$ e $d'|d$, então $d = d'$. O que mostra a unicidade do mdc.

Denotaremos o mdc de a e b, por $mdc(a, b)$. Vale notar que mdc não depende da ordem, sendo assim, $mdc(a, b) = mdc(b, a)$.

Vamos mostrar a existência a partir da identidade de Bézout (1730 - 1783).

Teorema 3.4 (Identidade de Bézout) *Se a e b são dois inteiros, então existem inteiros "x_0" e "y_0" tais que $mdc(a, b) = ax_0 + by_0$.*

Demonstração: Considere P o conjunto formado por todos os números inteiros da forma $ax+by$ com $x, y \in \mathbb{Z}$, isto é,

$$P = \{ax + by \mid x, y \in \mathbb{Z}\}.$$

Agora, se considerarmos $y = 0$ e $x = 0$ podemos ver que $0 \in P$. Além disso, veja que P é formado por números positivos e negativos, para constatar o fato, basta tomar os números inteiros $a \neq 0$ e fazer da seguinte maneira $a = a \cdot 1 + b \cdot 0$ e $-a = a(-1) + b\cdot$. Como a e $-a$ são números simétricos, temos dois números, um positivo e outro negativo e ambos pertencem a P.

Pelo PBO temos que existe um menor inteiro positivo em P que denotaremos por de d. Agora perceba que pela construção de P, existem inteiros x_0 e y_0 tais que $d = ax_0 + by_0$. Deste modo, basta mostrarmos que $d = mdc(a, b)$.

Pelo Algoritmo da divisão, o Teorema 3.3, temos que existem u e r, tais que

$$a = du + r \text{ com } 0 \leqslant r < d$$
$$r = a - du$$
$$r = a - (ax_0 + by_0)u$$
$$r = a(1 - ux_0) + b(-uy_0)$$
$$r = a - (ax_0 + by_0)u$$
$$r = a(1 - ux_0) + b(-uy_0).$$

Daí, temos que r_1 é uma combinação linear de a e b, isto é, $r_1 \in P$. Agora note que $0 \leqslant r_1 < d$ e como $d > 0$ é o menor elemento positivo de P, resulta que $r_1 = 0$, $a = du_1$ e consequentemente $d|a$. Do mesmo modo se prova que $d|b$, basta utilizar o Algoritmo da divisão, que diz existir u_2 e r_2 e analogamente obteremos $b = du_2$. Dessa forma, temos que d é um divisor comum positivo de a e b, isto é, podemos dizer que $d \leqslant mdc(a, b)$ e $d|mdc(a, b)$ de acordo com o item *iii* da Definição 3.4.

Considere agora que c é um divisor inteiro comum positivo de a e b, podemos inferir que $c|ax_0$, $c|ay_0$ e consequentemente $c|(ax_0 + by_0)$, o que nos fornece que $c|d$. Logo $c \leqslant d$.

Agora se c é o $mdc(a, b)$, então temos que $mdc(a, b)|d$, isto é, $mdc(a, b) \leqslant d$, no entanto sabemos que $d \leqslant mdc(a, b)$, daí segue que $mdc(a, b) = d$, ou melhor, $mdc(a, b) = ax_0 + by_0$.

■

A seguir apresentaremos a demonstração do método prático do Algoritmo de Euclides e iremos determinar o mdc de dois números usando esse método, que é uma das principais ferramentas utilizada em diversos problemas aritméticos envolvendo esse conceito. Pela sua simplicidade e manipulação pode ser ensinado aos estudantes a partir do 6º ano do ensino fundamental, esse método está disposto no Livro VII de *Os Elementos de Euclides*.

Inicialmente vamos demonstrar o lema de Euclides, em seguida apresentaremos a prova construtiva da existência do mdc e como funcionam na prática.

Lema 3.1 (Lema de Euclides) *Sejam* a, $b, n \in \mathbb{Z}$. *Se existem* $mdc(a, b - na)$*, então,* $mdc(a, b)$ *existe e*

$$mdc(a, b) = mdc(a, b - na).$$

Demonstração: Inicialmente, considere que $d = mdc(a, b - na)$. Daí temos que $d|a$, consequentemente $d|na$, e $d|(b - na)$. Como $d|na$ e $d|(b - na)$, então $d|(b - na + na)$, o que nos fornece que $d|b$. Assim d é um divisor comum de a e b. Suponha agora que e seja um divisor comum de a e b, logo temos que $e|(b - na)$ e consequentemente, temos que $c|(b - na)$. Assim, segue que c é um divisor comum de a e $b - na$. Dessa forma, segue que $c|d$ e $d|c$, o que mostra que $c = d$ e daí $d = mdc(a, b)$. ■

Podemos reescrever o lema acima tomando $b = na + r \Rightarrow r = b - na$ e substituir o resto no lugar da combinação linear de a e b, ou seja, se o $mdc(a, b - an)$ existe, então $mdc(a, b) = mdc(a, r)$.

Teorema 3.5 (Algoritmo de Euclides) *Sejam a e b números inteiros não negativos com $a \neq 0$. Ao se aplicar o Algoritmo da divisão para se obter a sequência*

$$\begin{gathered} b = aq_1 + r_1 \ com \ 0 < r_1 < a \\ a = r_1q_2 + r_2 \ com \ 0 < r_2 < r_1 \\ r_1 = r_2q_3 + r_3 \ com \ 0 < r_3 < r_2 \\ \vdots \\ r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n \ com \ 0 < r_n < r_n - 1 \\ r_{n-2} = r_nq_n + 0. \end{gathered}$$

ou seja, até o número r_n dividir r_{n-1}, segue que o $mdc(a, b)$ é o último resto não nulo da sequência de divisões.

Demonstração: De fato, aplicando o lema de Euclides nas igualdades acima, temos que:

$$r_n = mdc(r_{n-1}, r_n) = mdc(r_{n-2}, r_{n-1}) = \ldots = mdc(r_1, r_2) = mdc(a, r_1) = mdc(a, b).$$

Assim, resulta que o mdc de a e b será equivalente ao último resto não nulo das divisões acima. ■

Nas tabelas abaixo podemos ver como utilizar o Algoritmo de Euclides na prática. Inicialmente efetuamos a divisão de $a = bq_1 + r_1$ e colocamos os números na tabela a seguir:

	q_1	
a	b	
r_1		

Tabela 5 – Início do algoritmo.

Em seguida continuamos a divisão, agora fazendo $b = r_1q_2 + r_2$:

	q_1	q_2	
a	b	r_1	
r_1	r_2		

Tabela 6 – Continuação do algoritmo.

Fazendo a divisão até quando for possível, temos:

	q_1	q_2	q_3	$\cdots$	q_{n-1}	q_n	q_{n+1}
a	b	r_1	r_2	$\cdots$	r_{n-2}	r_{n-1}	$r_n = mdc(a,b)$
r_1	r_2	r_3	r_4	$\cdots$	r_n		

Tabela 7 – Visão final do algoritmo.

A seguir mostraremos na prática a utilização do Algoritmo de Euclides.

Exemplo 3.13 *Calcule o mdc(92,72).*

Solução: Realizando a divisão de 92 por 72,temos:

	1	3	1	1	2	
92	72	20	12	8	4	
20	12	8	4	0		

Tabela 8 – mdc entre 92 e 72.

Agora observe que o algoritmo acima nos fornece as seguintes igualdade:

$4 = 12 - 8 \cdot 1$

$8 = 20 - 12 \cdot 1$

$12 = 72 - 20 \cdot 3$

$20 = 92 - 72 \cdot 1.$

Fazendo as devidas substituições na primeira igualdade, temos.

$4 = 12 - 8 \cdot 1$

$4 = 12 - (20 - 12 \cdot 1) \cdot 1$

$4 = 12 - 20 \cdot 1 + 12 \cdot 1$

$4 = 12 \cdot 2 - 20 \cdot 1$

$4 = (72 - 20 \cdot 3) \cdot 2 - 20 \cdot 1$

$4 = 72 \cdot 2 - 20 \cdot 6 - 20 \cdot 1$

$4 = 72 \cdot 2 - 20 \cdot 7$

$4 = 72 \cdot 2 - (92 - 72 \cdot 1) \cdot 7$

$4 = 72 \cdot 2 - 92 \cdot 7 + 72 \cdot 7$

$4 = 72 \cdot 9 - 92 \cdot 7.$

Daí temos que:

$$mdc(92, 72) = 4 = 72 \cdot 9 + (-7) \cdot 92.$$

Observe que o Algoritmo de Euclides nos forneceu o mdc procurado, isto é, fazendo de trás para frente, escrevemos 6 como uma combinação linear de 72 e 92. De um modo geral, o Algoritmo de Euclides nos possibilita expressar o mdc de dois números, a e b, como a combinação linear de a e b, ou seja, ao utilizar o algoritmo, podemos escrever o questão ponto essa é uma encontraremos com toda rigor na$mdc(a, b) = ax + by$, com x e $y \in \mathbb{Z}$. Esse método de expressar o $mdc(a, b) = ax + by$ é chamado de Algoritmo de Euclides Estendido.

Teorema 3.1 *Se $a|bc$ e $mdc(a, b) = 1$, então $a|c$.*

Demonstração: Inicialmente como $a|bc$, então, temos que $bc = a \cdot q_1$. Por outro lado, como o $mdc(a, b) = 1$, então existem x e y, tais que $n \cdot a + m \cdot b = 1$. Multiplicando-se os membro dessa igualdade por c, temos:

$$c.(x \cdot a + y \cdot b) = c \cdot 1$$
$$c.(x \cdot a + y \cdot b) = c$$
$$x(a \cdot c) + y(b \cdot c) = c.$$

Como $bc = a.q_1$, temos:

$$x(a \cdot c) + y(a \cdot q_1) = c$$
$$a(x \cdot c + y \cdot q_1) = c.$$

Daí, temos que $a|c$. ■

Exemplo 3.14 *Oberve que $4|(25.20)$, como $mdc(4, 25) = 1$, então $4|20$.*

Definição 3.5 *Dados dois números inteiros a e b, não necessariamente nulos, dizemos que eles são primos entre si, se o mdc(a,b) = 1.*

Teorema 3.2 *Seja b um inteiro, com b > 1: Então, todo inteiro positivo a pode ser escrito de modo único na forma*

$$a = r_n b^n + r_{n-1} b^{n-1} + ... + r_1 b + r_0.$$

em que $n \geqslant 0$, $r_n \neq 0$. e para cada i com $0 \leqslant i \leqslant n$, temos que $0 \leqslant r_i < b$.

Demonstração: Para realizar a demonstração, demos mostrar a existência e unicidade dos números $r_i's$, com $i = 0, 1, 2, \cdots, n$, o que será feito usando divisões sucessivas.

De fato, para mostrar a existência, vamos dividir o número a por b, daí obtemos, de acordo com o Algoritmo da divisão euclidiana:

$$a = bq_0 + r_0, \quad 0 \leqslant r_0 < b.$$

Dividindo agora q_0 por b, temos:

$$q_0 = bq_1 + r_1, \quad 0 \leqslant r_1 < b.$$

Agora, se $q_1 \geqslant b$, então dividindo q_1 por b, segue que:

$$q_1 = bq_2 + r_2, \quad 0 \leqslant r_2 < b.$$

Repetindo esse procedimento e tendo em vista que cada quociente q_i é não negativo e $q_{i+1} < q_i$ para $i \geqslant 1$, devemos obter necessariamente um quociente igual a zero, digamos $q_n = 0$. Desse maneira,

$$q_{n-2} = bq_{n-1} + r_{n-1},$$

com $0 \leqslant r_{n-1} < b$ e $q_{n-1} = bq_n + r_n = r_n$.

Substituindo os valores dos $q_i's$ sucessivamente a partir de q_0, resulta que:

$$\begin{aligned}
a = bq_0 + r_0 &= b(bq_1 + r_1) + r_0 \\
&= b^2 q_1 + br_1 + r_0 \\
&= b^2(bq_2 + r_2) + br_1 + r_0 \\
&= b^3 q_2 + b^2 r_2 + br_1 + r_0 \\
&\vdots \\
&= b^{n-1}(bq_{n-1} + r_{n-1} + b^{n-2} r_{n-2} + \cdots + b^2 r_2 + br_1 + r_0 \\
&= b^n q_{n-1} + b^{n-1} r_{n-1}) + b^{n-2} r_{n-2} + \cdots + b^2 r_2 + br_1 + r_0.
\end{aligned}$$

No entanto, como $q_{n-1} = r_n$, temos:

$$a = r_n b^n + r_{n-1} b^{n-1} + ... + r_1 b + r_0.$$

Isso mostra a existência de a de acordo com as hipóteses dadas.

Agora mostraremos a unicidade de a. Para isso, mostraremos que $b_n \leqslant a < b^{n+1}$. De fato, como $1 \leqslant r_n$, então $b^n \leqslant r_n b_n < a$. Além disso, como $r_i \leqslant b$, resulta que $r_i \leqslant b - 1$. Daí:

$$\begin{aligned}
a &= r_n b^n + r_{n-1} b^{n-1} + ... + r_1 b + r_0 \\
&\leqslant (b-1)b^n + (b-1)b^{n-1} + ... + (b-1)b + (b-1) \\
&= b^{n+1} - 1 \\
&< b^{n+1}.
\end{aligned}$$

Logo, $b^n \leqslant a < b_{n+1}$. Vamos supor agora que

$$a = s_m b^m + s_{m-1} b^{m-1} + ... + s_1 b + s_0.$$

em que $0 \leqslant s_i < b$ para $i = 0, 1, \cdots, m$. Nestas condições, $n = m$. De fato, se $m < n$, então $m + 1 \leqslant n$, de modo que, $b^{m+1} \leqslant b^n \leqslant a$, o que não é possível, uma vez que $a < b^{m+1}$. Da mesma forma, não podemos ter $n < m$. Portanto, $m = n$. Dessa forma,

$$r_n b^n + r_{n-1} b^{n-1} + ... + r_1 b + r_0 = s_n b^n + s_{n-1} b^{n-1} + ... + s_1 b + s_0.$$

Assim temos que:

$$b(r_n b^{n-1} + ... + r_2 b + r_1) + r_0 = b(s_n b^{n-1} + ... + s_2 b + s_1) + s_0.$$

Do fato de $0 < r_i < b$ e $0 < s_i < b$, então da unicidade garantida do quociente e do resto pelo Algoritmo da divisão, podemos concluir que a igualdade anterior só é verdadeira se $r_0 = s_0$. Logo:

$$r_n b^{n-1} + r_{n-1} b^{n-2} ... + r_2 b + r_1 = s_n b^{n-1} + s_{n-1} b^{n-2} + ... + s_2 b + s_1.$$

Fazendo da mesma forma que fizemos anteriormente, temos:

$$b(r_n b^{n-2} + r_{n-1} b^{n-3} + ... + r_2) + r_1 = b(s_n b^{n-2} + s_{n-1} b^{n-3} + ... + s_2 b + s_2) + s_1.$$

e pela mesma justificativa, temos que $r_1 = s_1$ e

$$r_n b^{n-2} + r_{n-1} b^{n-3} ... + r_2 = s_n b^{n-1} + s_{n-1} b^{n-3} + ... + s_2.$$

Continuando estes processo sucessivamente, concluímos que $r_i = s_i$ para $i = 1, ..., n$. Portanto, temos que a representação é única. ■

Teorema 3.3 *Dados dois números inteiros a e b não conjuntamente nulos, dizemos que eles são primos entre si, se o mdc(a,b) = 1.*

Demonstração:($\Rightarrow$) Ora, se a e b são primos entre si, então o $mdc(a, b) = 1$, por outro lado, como o $mdc(a, b) = 1$ então existem x e y inteiros tais que $ax + by = 1$.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, se existem inteiros x e y tais que $ax + by = 1$ e considerando que o $mdc(a, b) = d$, então $d|a$ e $d|b$. Logo, $d|(ax + by)$ e consequentemente $d|1$, o que implica $d = 1$, isto é, $mdc(a, b) = 1$, acarretando no fato de que a e b são primos entre si.

A seguir trataremos de um conceito de fundamental importância para a matemática, os números primos.

3.5 NÚMEROS PRIMOS

Nessa seção trataremos sobre os números primos que é um dos conceitos mais relevantes na matemática e para a sociedade. Os números primos estão presentes em diversos problemas que despertam a curiosidade de matemáticos de geração em geração. Os resultados relacionado aos números primos enunciados e demonstrados aqui também foram extraídos/embasados nas obras de Hefez (2016) e De Oliveira Santos (1998).

Definição 3.6 *Um número inteiro n, com n>1, que possui somente dois divisores positivos n e 1 é chamado de número primo. Se n > 1 não é primo, então dizemos que n é um número composto.*

Proposição 3.11 *Se $p|ab$, com p primo, então $p|a$ ou $p|b$.*

Demonstração: De fato, suponha que $p \nmid a$, então $mdc(a, p) = 1$, logo pelo Teorema 3.1, temos que $p|b$. De igual modo, supondo que $p \nmid b$, então $mdc(b, p) = 1$, logo pelo Teorema 3.1, temos que $p|a$. Portanto, se $p|ab$, com p primo, então $p|a$ ou $p|b$. ■

Teorema 3.4 (Teorema Fundamental da Aritmética) *Todo inteiro maior que 1 pode ser representado de maneira única (a menos da ordem) como um produto de fatores primos.*

Demonstração: Inicialmente vamos mostrar a existência de tal fatoração. Se n for um número primo, nada há o que mostrar, porque a fatoração terá somente o próprio n como fator primo. Então vamos supor que n é composto. Logo, existirá p_1 como o menor divisor primo de n, ou seja, não existe p primo, com $1 < p < p_1$ tal que $p|n$. Dessa forma, n pode ser escrito como $n = p_1 \cdot n_1$. Veja que se n_1 for primo, a demonstração acaba aqui. Agora se não for composto, de acordo com a argumentação anterior, existirá p_2 primo tal que $n_1 = p_2 \cdot n_2$. Logo $n = p_1 \cdot p_2 \cdot n_1$. Repetindo esse procedimento enquanto for possível, obteremos uma sequência decrescentes de inteiros positivos $n_1, n_2, \cdots, n_r$. Como todos esses números são inteiros positivos maiores que 1, em algum momento esse processo deve acabar. Agora, como os primos na sequência $p_1, p_2, \cdots, p_k$ não são necessariamente distintos, n terá, em geral a forma:

$$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot p_k^{a_k}.$$

Agora para mostrar a unicidade dessa fatoração, usaremos indução forte sobre n. Para $n = 2$ a afirmação é verdadeira, uma vez que 2 é primo e a representação é única, ele mesmo. Agora suponha que a proposição seja verdadeira para todos os números naturais maiores que 1 e menores que n, ou seja, que se houver duas representações para um número primo elas serão iguais, a menos da ordem. Agora vamos mostrar que a proposição é verdadeira para n.

De fato, se n é primo, não há o que mostrar. Então vamos supor que n seja composto e que tenha duas fatorações, isto é,

$$n = p_1.p_2 \cdot ... \cdot p_s = q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_r.$$

Queremos mostrar que $s = r$ e que cada p_i é igual a algum q_j. Veja que p_1 divide $q_1 \cdot q_2. \cdots .q_r$, logo ele divide pelo menos um dos fatores q_j. Agora podemos supor, sem perda de generalidade, que $p_1|q_1$. Como p_1 e q_1 são primos, segue que $p_1 = q_1$. Daí, podemos dizer que

$$n/p_1 = p_2. \cdots .p_s = q_2. \cdots .q_r.$$

Agora note que $1 < n/p_1 < n$, logo da hipótese de indução temos que n/p_1 possui representação única, logo $s = r$ e cada p_i é igual a algum q_j. Portanto a representação de n é única a menos da ordem de seus fatores. ■

Teorema 3.5 *Se $n' = p_1^{\alpha_1}. \cdots .p_r^{\alpha_r}$ é a fatoração canônica de $n > 1$, então um inteiro n' é um divisor positivo de n, então*

$$n' = p_1^{\beta_1}. \cdots .p_r^{\beta_r}.$$

onde $0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$ para algum i = 1, ... , r.

Demonstração: Considere que n' seja um divisor positivo de n, logo existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $n = n'.c$. Pelo teorema fundamental da álgebra podemos decompor c e n' da seguinte maneira:

$$c = p_1^{k_1}. \cdots .p_r^{k_r} \text{ e } n' = p_1^{\beta_1}. \cdots .p_r^{\beta_r}.$$

Daí, temos:

$$\begin{gathered} n = n'.c \\ p_1^{\alpha_1}. \cdots .p_r^{\alpha_r} = (p_1^{\beta_1}. \cdots .p_r^{\beta_r}).(p_1^{k_1}. \cdots .p_r^{k_r}) \\ p_1^{\alpha_1}. \cdots .p_r^{\alpha_r} = p_1^{\beta_1+k_1}. \cdots .p_r^{\beta_r+k_r}. \end{gathered}$$

Para que a igualdade seja satisfeita, devemos ter $\alpha_i = \beta_i + k_i$ para cada $i = 1, ..., r$. O que nos fornece $0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$ para algum $i = 1, \cdots, r$. ■

No estudo dos números, é muito comum questionar se um certo número natural é primo ou não, e além disso, como inferir a respeito dele. Mediante os métodos clássicos utilizados para dar a resposta a tal pergunta, podemos destacar o Teste da Primalidade que destacamos no teorema abaixo, que nos leva a descoberta de um algoritmo que trataremos logo em seguida.

Teorema 3.6 *Se $n > 1$ for composto, então n possui, necessariamente, um divisor primo p tal que $p \leqslant \sqrt{n}$. Ou seja, se n não possui divisores diferentes de 1, menores ou iguais a $\sqrt{n}$, então n é primo.*

Demonstração: De fato, se n é um número composto, então n

$$n = a.b \text{ com } 1 < a, b < n.$$

agora veja que se $a > \sqrt{n}$ e $b > \sqrt{n}$ teremos:

$$n = a.b > \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = n.$$

o que é absurdo. Daí, temos que $a \leqslant \sqrt{n}$ ou $b \leqslant \sqrt{n}$. Vamos supor que $a \leqslant \sqrt{n}$. Do fato de $a > 1$, temos que existirá um primo p, tal que $p|a$. Como $n = a \cdot b$, podemos dizer que $a|n$, por transitividade, temos que $p|a$, logo $p < a$. Tendo em vista que $a \leqslant \sqrt{n}$, resulta que $p < \sqrt{n}$. ■

O teste de primalidade acima, nos permite verificar se um certo número n é primo, basta verificar se ele não é divisível por nenhum primo p que não supere $\sqrt{n}$, em outras palavras, um número n só é primo se nenhum outro primo do intervalo $[1, \sqrt{n}]$ dividir n.

O teste acima também nos fornece um método chamado de Crivo de Eratóstenes (285-194 a.E.C.), que nos possibilita a determinar todos os números primos menores ou iguais a um dado número natural n. O crivo de Eratóstenes em si é simples, escreva todos os números de 2 até número que você quer determinar os primos, digamos n. Em seguida pegue todos os números primos conhecidos até $\sqrt{n}$. Pegue o primeiro número primo e marque todos os seus múltiplos, repita esse processo até o último número primo $\sqrt{n}$. Assim, os números marcados são todos compostos e os números que sobraram sem serem marcados são todos primos.

Exemplo 3.15 *Determine todos os números primos existentes de 2 até 100.*

Solução: Para determinar os primos, vamos utilizar o Crivo de Eratóstenes. Inicialmente vamos calcular a $\sqrt{100}$, que no caso é $\sqrt{100} = 10$. Os números primos que são menores ou iguais a 10 são 2, 3, 5 e 7. Vamos escrever na tabela a seguir todos os números de 2 até 100, feito isso iremos marcar todos os múltiplos de 2, depois de marcar todos os múltiplos de 2, iremos marcar todos múltiplos de 3, depois todos os múltiplos de 5 e por fim todos os múltiplos de 7. Veja que os números que não foram riscados são justamente os números primos.

Tabela 9 – Crivo de Eratóstenes.

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Fonte: Próprio autor.

Por outro lado, veja que da Proposição 3.6, podemos analisar se são 100 é um número primo, basta que ele não seja divisível por nenhum dos primos menores que $\sqrt{100} = 10$, isto é, que ele não seja divisível por 2, 3, 5 ou 7. No entanto 100 é par e é divisível por 2, logo 100 não é primo de acordo com o teste de primalidade.

Lema 3.2 *Seja p um número primo. Os números $\binom{p}{i}$, onde $0 < i < p$, são todos divisíveis por p.*

Demonstração: De fato, veja que o resultado vale trivialmente para $i = 1$, uma vez que $\binom{p}{1} = p$ e $p|p$. Podemos então supor que $1 < i < p$. Nesse caso, $i!|(p-1)\cdots(p-i+1)$, ou seja, que $i!$ divide i inteiros consecutivos. Como $mdc(i!, p) = 1$, decorre que $i!|p(p-1)\cdots(p-i+1)$, e logo temos que

$$\begin{pmatrix} p \\ i \end{pmatrix} = p\frac{(p-1)\cdots(p-i+1)}{i!}.$$

Assim, temos que os números $\binom{p}{i}$, onde $0 < i < p$, são todos divisíveis por p. ■

O lema acima servirá de base para a demonstração do Pequeno Teorema de Fermat. Esse teorema é um resultado significativo para a matemática, no entanto esse conhecimento já era difundido na China, por volta de 500 antes de Cristo, os chineses já sabiam que, se um número p é primo, então $p|(2^p - 2)$. Todavia, coube a Pierre de Fermat, no século XVII, generalizar esse resultado, enunciando um pequeno, mas notável teorema para a teoria dos números.

Teorema 3.7 *Pequeno Teorema de Fermat Dado um número primo p, tem-se que p divide o número $a^p - a$, para todo $a \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração: Se $p = 2$ o resultado é óbvio, já que $a^2 - a = a(a-1)$ representa um número par, uma vez que temos o produto de dois números consecutivos. Então suponha que p é ímpar.

Nesse caso, basta mostrar que o resultado é válido para $a \geqslant 0$. Vamos mostrar o resultado por indução sobre a.

O resultado é válido para $a = 0$, pois $0^p - 0 = 0$ e $p|0$. Agora vamos supor que proposição é verdadeira para $a = k$, com $k > 0$, ou seja, que $p|(k^p - k)$. Vamos mostrar que ela também é verdadeira para $a = k + 1$

De fato, observe que da fórmula do Binômio de Newton, temos:

$$(k+1)^p - (k+1) = k^p - k + \left(\begin{array}{c} p \\ 1 \end{array} \right) k^{p-1} + \cdots + \left(\begin{array}{c} p \\ p-1 \end{array} \right) a.$$

Agora veja que pelo Lema 3.2 temos que p divide todos os $\binom{p}{i}$ e por outro lado da hipótese de indução temos que $p|(k^p - k)$. Assim, segue que $p|[(k+1)^p - (k+1)]$. Logo a proposição é verdadeira para todo $a \in \mathbb{N}$. ■

Exemplo 3.16 *Mostre que* $42|(a^7 - a)$.

Resolução: Analisando a paridade de $a^7 - a = a(a^6 - 1)$, temos que $2|(a^7 - a)$, uma vez que a e a^7 tem a mesma paridade. Além disso:

$$a^7 - a = a(a^6 - 1) = a(a^2 - 1)(a^4 + a^2 + 1) = (a^3 - a)(a^4 + a^2 + 1).$$

De acordo com o Pequeno Teorema de Fermat, temos que $3|(a^3 - a)$ e consequentemente $3|(a^7 - a)$. Como $2|(a^7 - a)$ e $3|(a^7 - a)$, então $6|(a^7 - a)$. Agora veja que $6|(a^7 - a)$ e $7|(a^7 - a)$, assim temos que $42|(a^7 - a)$, como queríamos.

Corolário 3.2 *Se p é um número primo e se a é número natural não divisível por p, então p divide $a^{p-1} - 1$.*

Demonstração: Do Pequeno Teorema de Fermat, temos que $p|(a^p - a)$, que pode ser escrito como $p|a(a^{p-1} - 1)$. Veja que $p \nmid a$, logo só resta que $p|(a^{p-1} - 1)$. ■

O corolário acima também é conhecido como *Pequeno Teorema de Fermat*.

Exemplo 3.17 *Se* $5 \nmid n$, $5 \nmid (n-1)$, $5 \nmid (n+1)$, *então* $5|(n^2 + 1)$.

Solução: De acordo com o Pequeno Teorema de Fermat, temos que $5|(n^5 - n)$, ou melhor, $5|n(n^4 - 1)$, como por hipótese, $5 \nmid n$, então segue que $5|(n^4 - 1)$. Agora veja que:

$$(n^4 - 1) = (n^2 - 1)(n^2 + 1)$$
$$(n^4 - 1) = (n - 1)(n + 1)(n^2 + 1).$$

como $5 \nmid (n-1)$ e $5 \nmid (n+1)$, então temos que $5|(n^2+1)$, como queríamos.

Ao se falar em números primos é impossível não lembrar de alguns números que receberam uma atenção diferenciada, O primeiro resultado está relacionados com os números conhecidos como números de Fermat, em homenagem a Pierre de Fermat (1601-1665), jurista francês, que apesar de ter se dedicado à matemática como amador foi um dos grandes matemáticos de seu tempo. Pode-se dizer que foi o primeiro matemático a contribuir significativamente, do ponto de vista teórico, para a evolução da Teoria dos números, após Euclides e Eratóstenes. Muitos dos resultados e problemas deixados por Fermat motivaram o extraordinário avanço da Matemática.

Já um segundo resultado importante relacionado aos números primos, diz respeito aos chamados "Números de Mersenne", assim chamados em homenagem ao padre Marin Mersenne (1588 - 1648), que desempenhou papel importante na difusão da ciência, e em particular da matemática, de sua época através de sua extensa correspondência com os maiores cientistas de seu tempo.

Definição 3.7 *Os números de Fermat são os números da forma*

$$F_n = 2^{2^n} + 1, \textit{ com } 0, 1, 2, ...$$

Por volta de 1640, em uma de suas cartas a Mersenne, Fermat relatava que esses números eram todos primos. De fato, $F_1 = 5, F_2 = 17, F_3 = 257, F_4 = 65537$ são primos, não sabe até hoje o porquê Fermat achava que todos os números descritos pela definição acima eram primos. Em meados de 1732, Leonhard Euler mostrou que

$$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 4294967297 = 641.(6700417).$$

é um número composto, múltiplo de 641, refutando assim a afirmação de Fermat sobre seus números primos. No entanto, os cincos primeiros números de Fermat, que são realmente primos, $F_1 = 5, F_2 = 17, F_3 = 257, F_4 = 65537$ são chamados de *Primos de Fermat*.

Definição 3.8 *Os números de Mersenne são os números da forma*

$$M_p = 2^p - 1$$

onde p é um número primo.

No intervalo $2 \leqslant p \leqslant 5000$ foram encontrados alguns números de Mersenne primos, esses números são chamados de primos de Mersenne. Eles são obtidos tomando p igual aos seguintes números primos: 2, 3, 5, 7, 13, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1 279, 2 203, 2 281, 3 217, 4 253 e 4 423. Até o presente momento, o maior primo de Mersenne conhecido é $M_{43112609}$, descoberto em agosto de 2008 e que possui no sistema decimal 12978189 dígitos.

3.6 MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM

Os resultados enunciados e demonstrados aqui também foram extraídos/embasados nas obras de Hefez (2016) e De Oliveira Santos (1998).

Definição 3.9 *Diremos que um m é número inteiro é múltiplo comum de dois números inteiros a e b dados, se ele é simultaneamente múltiplo de ambos os números.*

Agora veja que em qualquer caso, os números ab e 0, são sempre os múltiplos comuns de a e b.

Definição 3.10 (Mínimo Múltiplo Comum) *Diremos que um número inteiro $m \geqslant 0$ é Mínimo Múltiplo Comum de dois números inteiros, se possuir as seguintes propriedades:*
i) m é um múltiplo comum de a e b;
ii) se c é um múltiplo comum de a e b, então $m|c$.

Em outras palavras, o mínimo múltiplo comum (mmc) de dois inteiros "a" e "b" não nulos ($a \neq 0$ e $b \neq 0$), que denotaremos por $mmc(a, b)$, é o menor inteiro positivo que é múltiplo de a e b simultaneamente.

Da definição 3.10 podemos tirar algumas conclusões, suponha que dois inteiros positivos m e m' são dois mínimos múltiplos comuns de a e b, então pelo item (ii) obtemos que $m|m'$ e também que $m'|m$. Como m e m' são inteiros, resulta que $m = m'$, o que nos mostra que se existir o mmc de dois números é único.

Além disso, se m é o mmc de a e b e $c \geqslant 0$ é múltiplo comum de a e b, então resulta que $m \leqslant c$, o que nos mostra que m é o menor múltiplo comum positivo de a e b.

Proposição 3.12 *Se $\alpha = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot p_n^{a_n}$ e $\beta = p_1^{b_1} \cdot p_2^{b_2} \cdot p_n^{b_n}$, onde $p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n$ são os primos que ocorrem nas fatorações de a e b, então*

$$mmc(\alpha, \beta) = p_1^{max\{a_1,b_1\}} \cdot p_2^{max\{a_2,b_2\}} \cdot p_n^{max\{a_n,b_n\}}.$$

Demonstração: Observe que da definição de mínimo múltiplo comum, nenhum fator primo p_i deste mínimo poderá ter um expoente que seja menor nem a a_i e nem a b_i. Se tomarmos, o maior destes dois expoentes de p_i, teremos não apenas um múltiplo comum, mas o menor possível dentre todos eles, o que conclui a demonstração. ■

Proposição 3.13 *Se a e b são números reais, então*

$$max\{a,b\} + min\{a,b\} = a + b.$$

Demonstração: De fato, temos duas situações a considerar, o caso em que $a = b$ e o caso em que $a \neq b$. Se $a = b$, então $max\{a,b\} = min\{a,b\} = a = b$ e assim o resultado é trivial. No caso de $a \neq b$, podemos supor sem perda de generalidade que $b < a$, deste modo, temos que $max\{a,b\} = a$ e $min\{a,b\} = b$

$$max\{a,b\} + min\{a,b\} = a + b.$$

■

Teorema 3.8 *Dados $a, b \in \mathbb{N}$, temos que $ab = mmc(a,b) \cdot mdc(a,b)$.*

Demonstração: Considere que $d = mdc(a,b)$. Deste fato temos que $d|a$, que $d|b$ e consequentemente $d|ab$, logo existirão inteiros x_0, y_0 e m, tais que:

$$a = d \cdot x_0, b = d \cdot y_0, a \cdot b = d \cdot m \Rightarrow x_0 = \frac{a}{d}, y_0 = \frac{b}{d} \text{ e } m = \frac{ab}{d}.$$

em outras palavras $x_0 = \dfrac{a}{d}$ $y_0 = \dfrac{b}{d}$ e $m = \dfrac{ab}{d}$ representam números inteiros. De posse dessas informação, vamos mostra que $m = mmc(a,b)$.

Inicialmente veja que podemos escrever m de duas maneiras:

$$m = \frac{a}{d}b \text{ e } m = \frac{b}{d}a.$$

daí, podemos concluir que $a|m$ e que $b|m$, ou seja, m é um múltiplo comum de a e de b.

Seja c um outro múltiplo comum de a e b, dessa forma segue que $a|c$ e que $b|c$, logo existem existirão inteiros q_1 e q_2 , tais que:

$$c = a \cdot q_1$$
$$c = b \cdot q_2.$$

Como $d = mdc(a,b)$, da Identidade de Bézout, o Teorema 3.4, e existirão inteiros x e y , tais que:

$$d = a \cdot x + b \cdot y.$$

Multiplicando por c, temos:

$$
\begin{aligned}
c \cdot d &= c \cdot (a \cdot x + b \cdot y) \\
c \cdot d &= c \cdot a \cdot x + c \cdot b \cdot y \\
c \cdot d &= b \cdot q_2 \cdot a \cdot x + a \cdot q_1 \cdot b \cdot y \\
c \cdot d &= ab(q_2 \cdot x + q_1 \cdot y) \\
c &= \frac{ab(q_2 \cdot x + q_1 \cdot y)}{d} \\
c &= \frac{ab}{d}(q_2 \cdot x + q_1 \cdot y).
\end{aligned}
$$

como $m = \dfrac{ab}{d}$, segue que

$$c = m \cdot (q_2 . x + q_1 \cdot y).$$

daí concluímos que $m|c$. Assim segue que

$$mmc(a, b) \cdot mdc(a, b) = \frac{ab}{d} \cdot d = a \cdot b.$$

■

3.7 ALGUNS CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE

Segundo Junqueira (2001, p. 38), “chama-se de critério de divisibilidade todo conjunto de condições que permitem reconhecer se um inteiro dado é divisível por outro”. Dessa forma, os critérios de divisibilidade nos possibilitam saber antecipadamente se um número natural é ou não divisível por outro, baseando-se em propriedades da sua representação decimal. Os resultados enunciados e demonstrados aqui também foram retirados embasados nas obras de Hefez (2016) e De Oliveira Santos (1998).

Definição 3.11 *Nas condições do Teorema 3.2, a expansão*

$$a = r_n b^n + r_{n-1} b^{n-1} + \cdots + r_1 b + r_0.$$

é chamada expansão de a na base b ou expansão b-ádica de a, a qual indicaremos por

$$[r_n r_{n-1} \cdots r_1 r_0]_b.$$

De acordo com o Teorema 3.2, e a definição acima, podemos escrever uma número inteiro a na base 10 de forma única como:

$$a = r_n 10^n + r_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + r_1 10 + r_0.$$

tal que $n \geqslant 0$, $r_n \neq 0$, e para cada i, com $0 \leqslant i \leqslant n$, $0 \leqslant r_i \leqslant 9$. A seguir estão os critérios de divisibilidade para os números inteiros 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 e 10.

(i) Critérios de divisibilidade de 2, 5 e 10.

Os critérios de divisibilidade por 2, 5 e 10 seguem o mesmo princípio, analisar o algarismo das unidade.

Para que o número natural

$$a = r_n 10^n + r_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + r_1 10 + r_0.$$

seja divisível por 2, isto é, para que $2|a$, é necessário que $2|r_0$, onde r_0 é o algarismo das unidades de a, uma vez que $2|(r_n 10^n + r_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + r_1 10)$. Desse modo, devemos ter que $r_0 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$, ou seja, r_0 tem que ser par. Assim, *um inteiro a será divisível por 2 se a for par, o melhor, um número será divisível por 2 quando ele terminar em 0, 2, 4, 6 8.*

Agora para que o $5|a$, devemos ter que $5|r_0$, pois $5|(r_n 10^n + r_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + r_1 10)$ e como r_0 representa o algarismo das unidades de a, logo $r_0 \in \{0, 5\}$. Assim, *um número inteiro a qualquer será divisível por 5 se, terminar em 0 ou 5.*

Por fim, para que um número inteiro a seja divisível por 10, isto é, para que $10|a$ devemos que $10|r_0$, pois veja que $10|(r_n 10^n + r_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + r_1 10)$. Como cada número $r_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e como r_0 representa o algarismo das unidades de a, então para que $10|a$, devemos ter que $r_0 = 0$. Assim *um número inteiro a qualquer é divisível por 10 quando ele terminar em 0.*

(ii) Critérios de divisibilidade de 3 de 9.

Já os critérios de divisibilidade de 3 e de 9 são semelhantes. Inicialmente, vamos mostrar por indução sobre n que

$$9|(10^n - 1), \ \forall n \geqslant 0. \tag{6}$$

De fato, para $n = 0$, temos que

$$9|(10^0 - 1) \Rightarrow 9|0.$$

Considere que a proposição é verdadeira para $n = k$, isto é, que $9|(10^k - 1)$, em outras palavras, como $9|(10^k - 1)$, logo existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $10^k - 1 = 9q \Rightarrow 10^k = 9q + 1$. Agora vamos mostrar que ela também é verdadeira para $n = k + 1$. Agora veja que:

$$\begin{aligned} 10^{k+1} - 1 &= 10^k.10 - 1 \\ &= (9q+1) \cdot 10 - 1 \\ &= 90q + 10 - 1 \\ &= 90q + 9 \\ &= 9(10q+1). \end{aligned}$$

ou seja, temos que $10^{k+1} - 1 = 9(10q+1)$, segue que $9|(10^{k+1} - 1)$.

Considere um número $a = r_n 10^n + r_{n-1} 10^{n-1} + ... + r_1 10 + r_0$ e , vamos subtrair em ambos os lados de a o inteiro $(r_n + r_{n-1} + \cdots + r_1 + r_0)$, que é a soma de todos os algarismos de a. Logo ficará da seguinte maneira:

$$a = r_n 10^n + r_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + r_1 10 + r_0$$
$$a - (r_n + r_{n-1} + \cdots + r_1 + r_0) = r_n 10^n + r_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + r_1 10 + r_0 - (r_n + r_{n-1} + \cdots + r_1 + r_0)$$
$$a = r_n 10^n + r_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + r_1 10 + r_0$$
$$a - (r_n + r_{n-1} + \cdots + r_1 + r_0) = r_n(10^n - 1) + r_{n-1}(10^{n-1} - 1) + \cdots + r_1(10 - 1).$$

Note agora que $9|[r_n(10^n - 1) + r_{n-1}(10^{n-1} - 1) + \cdots + r_1(10 - 1)]$ de acordo com a igualdade 6, isto é,

$$r_n(10^n - 1) + r_{n-1}(10^{n-1} - 1) + \cdots + r_1(10 - 1) = 9p\cdot$$

com $p \in \mathbb{Z}$. Dessa forma temos que

$$a - (r_n + r_{n-1} + \cdots + r_1 + r_0) = 9p.$$

o que nos diz que $9|a - (r_n + r_{n-1} + \cdots + r_1 + r_0)$.

Assim, se $9|a$, então $9|(r_n + r_{n-1} + \cdots + r_1 + r_0)$ e reciprocamente, se tivermos $9|(r_n + r_{n-1} + \cdots + r_1 + r_0)$, então $9|a$. Em outras palavras, *um números a será divisível por 9 se a soma dos seus algarismos for divisível por 9*. Por outro lado, como $3|9$ e $9|a$, então de maneira análoga, *um números a será divisível por 3 se a soma dos seus algarismos for divisível por 3*.

Exemplo 3.18 *O número 684 é divisível por 9, pois* $6 + 8 + 4 = 18$ *e* $9|18$. *Por outro lado, o número 217 não é divisível por 9, pois* $2 + 1 + 7 = 10$ *e* $9 \nmid 10$.

Já o números 537 é divisível por 3, pois $5 + 3 + 7 = 15$ *e* $3|15$. *No entanto o número 809 não é divisível por 3, pois* $8 + 0 + 9 = 17$ *e* $3 \nmid 17$.

(iii) Critérios de divisibilidade de 4 e de 8

Tomando um número inteiro

$$a = r_n 10^n + r_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + r_2 10^2 + r_1 10 + r_0.$$

Podemos reescrevê-lo da seguinte maneira:

$$a = 100(r_n 10^{n-2} + r_{n-1} 10^{n-3} + \cdots + r_2) + r_1 10 + r_0.$$

como $4|100$, então temos que $4|[100(r_n 10^{n-2} + r_{n-1} 10^{n-3} + \cdots + r_2)]$. logo, para que $4|a$, devemos ter que $4|(r_1 10 + r_0)$. Veja que $r_1 10 + r_0$ formam os algarismos das dezenas e unidades de a, ou seja, $r_1 10 + r_0$ é número inteiro no intervalo [00,99]. Assim, podemos concluir que *um número inteiro a será divisível por 4 quando o número formado pelos dígitos das dezenas e das unidades for divisível por 4.*

Exemplo 3.19 *O número 732 é divisível por 4, pois 32, o número formado pelos algarismos das dezenas e unidades é divisível por 4, isto é* $4|32$*. Por outro lado, o número 254 não é divisível por 4, uma vez que* $4 \nmid 54$*.*

Para que um número a seja divisível por 8, a ideia é semelhante, basta notar que

$$a = r_n 10^n + r_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + r_2 10^2 + r_1 10 + r_0$$
$$a = 1000(r_n 10^{n-3} + r_{n-1} 10^{n-4} + \cdots + r_3) + r_2 10^2 + r_1 10 + r_0.$$

como $8|1000$, seguindo o mesmo raciocínio, temos que a só será divisível por 8 se

$$8|(r_2 10^2 + r_1 10 + r_0).$$

Agora veja que $r_2 \cdot 10^2 + r_1 \cdot 10 + r_0$ formam os algarismos das centenas, dezenas e unidades. Deste modo, $r_2 \cdot 10^2 + r_1 \cdot 10 + r_0$ é um número n intervalo [000,999]. Assim, podemos conclui que *um número inteiro a será divisível por 8 quando o número formado pelos dígitos das centenas, dezenas e das unidades for divisível por 8.*

Exemplo 3.20 *O números 1528 é divisível por 8, pois 528, o número formado pelos algarismos das centenas, dezenas e unidades é divisível por 8, isto é* $8|528$*. Já o número 1253 não é divisível por 8, uma vez que* $8 \nmid 253$*.*

(iv) Critérios de divisibilidade de 6 Como $2|6$, $2|6$ e $mdc(2,3) = 1$, um número a será divisível por 6 quando ele for divisível por 2 e 3 simultaneamente.

Exemplo 3.21 *O números 348 é divisível por 6, pois* $2|348$*, uma vez que 348 é par e* $3|348$*, porque* $3+4+8=15$ *e* $3|15$*. Agora veja que o número 621 não é divisível por 6, uma vez que* $2 \nmid 621$*, pois 621 é ímpar. No entanto veja que 621 é divisível por 3, mas só isso não é suficiente para ser divisível por 6.*

Esse foi o embasamento teórico necessário para que o professor possa desenvolver com maestria a SD descrita a seguir.

4 PERCURSO METODOLÓGICO

O objetivo desta seção consiste em descrever o percurso metodológico desenvolvido na pesquisa, por meio da aplicação de uma SD no intuito de explorar conceitos aritméticos como: números primos, critérios de divisibilidade, o conceito de múltiplos, mmc, mdc através das questões das provas da Obmep, do Banco de questões da mesma e do Material "Encontros de Aritmética" do PIC jr.

4.1 ELEMENTOS DA CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA

4.1.1 Tipo de Pesquisa

O método de pesquisa utilizado foi o qualitativo, a partir da análise dos questionários pré-teste, pós-teste e questionário investigativo. Uma vez que os dados obtidos neles foram necessários para se ter um parâmetro de comparação. Nesse sentido, Strauss (2008), discorre que há três elementos indispensáveis na pesquisa qualitativa: a) os dados, colhidos por meio de várias fontes; b) os procedimentos usados para interpretar e organizar os dados e; c) os relatórios – escritos e verbais.

Para D'Ambrosio (2006, p. 14), "a investigação em Educação Matemática procurava se tornar sistemática e rigorosa e via o tratamento estatístico como capaz de conduzir o rigor desejado [...] só era considerada boa pesquisa aquela que tivesse um tratamento estatístico rigoroso".

A pesquisa qualitativa vem se figurando como método dinâmico e utilizado em diferentes áreas, principalmente nas exatas. Partindo deste ponto de vista, a pesquisa qualitativa pode ser compreendida como uma via efetiva que possibilita compreender melhor os significados e nuances das quais os pesquisadores tanto buscam entender em seus projetos.

Nesta perspectiva

> há muitas escolhas e decisões e elas são diferentes para os vários aspectos do processo geral de pesquisa. [...] a pesquisa pode ser concebida como um processo circular, que envolve muitas idas e vindas e caminhadas em círculo antes de finalmente atingir um objetivo (STRAUS, 2008, p.41).

Dessa forma, em uma pesquisa qualitativa, surgem aspectos subjetivos, que remetem a ideias não explícitas, mas que estão implícitas nas informações obtidas.

Segundo Bicudo (2006, p. 106)

> o qualitativo engloba a ideia do subjetivo, passível de expor sensações e opiniões.[...] entende-se que a noção de rigor não seria aplicável a dados quali-

> tativos, uma vez que a eles faltaria precisão e objetividade, dificultando ou impossibilitando a aplicação de quantificadores.

A análise feita aqui busca refletir sobre as nuances observadas no processo de execução da SD e compreender os resultados obtidos nos questionários. Considerando a opinião de Strauss (2008, p. 18), “os pesquisadores que usam essa metodologia tendem a ser flexíveis”.

As informações obtidas nos questionários foram importantes para compreender a realidade dos estudantes, compreender se os mesmos haviam desenvolvido as habilidades selecionadas, e caso contrário, ao trabalhar a resolução de problemas foi possível verificar se as mesmas foram desenvolvidas com a aplicação da SD. Além disso, a avalição da SD é necessária para que sejam alinhadas as ações e metodologias a serem aplicadas para tornar a sequência ainda mais efetiva.

A amostra utilizada para realizar a pesquisa foram duas turmas da primeira série do Ensino Médio[1] de uma escola estadual em Arapiraca, que devido às dificuldades impostas pelas aulas remotas, totalizaram um grupo de 23 estudantes. Todavia para Deslauriers (2008) o objetivo da amostra é de produzir informações aprofundadas e ilustrativas: seja ela pequena ou grande, o que importa é que ela seja capaz de produzir novas informações.

A presente SD pode ser aplicada em qualquer turma a partir do 6º ano do Ensino Fundamental. A mesma tanto servirá para fixar os conteúdos trabalhados nos 6º e 7º anos, buscando aprofundar e verificar o desenvolvimento das habilidades EF06MA05[2], EF06MA06[3] e EF07MA01[4], quanto para analisar o conhecimento aritmético dos estudantes nas séries a partir do 8º ano, analisando ainda, se as habilidades foram devidamente desenvolvidas.

A escolha dessas turmas se deu pelo fato de estarmos no segundo ano de experiência com o ensino remoto, e apesar das habilidades propostas estarem relacionadas ao 6º e 7º ano do Ensino Fundamental, surgem algumas indagações como: os estudantes desenvolveram essas habilidades nos respectivos anos? Se não desenvolveram, podemos usar a sequência didática para desenvolvê-la? Diante desse contexto pandêmico, é possível aplicar uma SD e obter o desenvolvimento cognitivo matemático dos estudantes por meio das aulas remotas? Essas indagações foram interessantes e motivadoras para o desenvolvimento da proposta.

[1] As turmas foram a 1ª série A e 1ª série B.
[2] EF06MA05: Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos “é múltiplo de”, “é divisor de”, “é fator de”, e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000.
[3] EF06MA06: Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor.
[4] EF07MA01: Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum, por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos.

4.2 SEQUÊNCIA DIDÁTICA E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Uma SD pode ser vista como uma metodologia educacional que visa auxiliar os estudantes a superarem uma ou mais dificuldades reais acerca de uma temática específica. Segundo Zabala (1998), a partir do momento em que se pensa na forma das sequências didáticas esse é um dos rumos mais coerentes para aprimorar a prática educativa. Para ele uma sequência didática é

> Um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que tem um princípio e um fim conhecido tanto pelos professores como pelos alunos. A sequência didática dependerá da intervenção metodológica elaborada e do planejamento dos conteúdos a serem desenvolvidos. Toda intervenção metodológica é associada com "o que fazer" para obtermos melhores resultados de aprendizagem, ou seja, que tipo de atividade ou aula deve ser programada para a melhoria do ensino e, ainda, todo planejamento dos conteúdos é associado com o "como fazer" para que isto aconteça. O conteúdo é "tudo quanto se tem que aprender para alcançar determinados objetivos que não apenas abrangem as capacidades cognitivas, como também incluem as demais capacidades." (ZABALA, 1998, p. 18).

Deste modo, os conceitos trabalhados devem acrescentar efetivamente para que a sociedade tenha cidadãos conscientes, conhecedores do mundo ao seu redor e transformadores do local onde está inserido. Potencializando essa ideia, segundo a BNCC de Matemática traz que:

> A Matemática não se restringe apenas à quantificação de fenômenos determinísticos – contagem, medição de objetos, grandezas – e das técnicas de cálculo com os números e com as grandezas, pois também estuda a incerteza proveniente de fenômenos de caráter aleatório. A Matemática cria sistemas abstratos, que organizam e inter-relacionam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados ou não a fenômenos do mundo físico. Esses sistemas contêm ideias e objetos que são fundamentais para a compreensão de fenômenos, a construção de representações significativas e argumentações consistentes nos mais variados contextos. (BRASIL, 2018, p. 265)

Dito isso, faz-se necessário ainda propor investigações acerca dos resultados obtidos nos problemas e analisar as formas de chegar ao resultado, como poderiam desenvolver uma forma mais prática, desenvolvendo caminhos para uma melhor aprendizagem. Dessa maneira, por meio de uma SD que evidencie também as atividades investigativas, o desenvolvimento cognitivo pode ocorrer de modo a possibilitar a experimentação, generalização, abstração e formação de significados (LINS ; GIMENEZ, 2001).

Seguindo esse ponto de vista, podemos esquematizar, em linhas gerais, a composição de uma situação de aprendizagem que permita desenvolver os processos sociais de ensino aprendizagem. Segundo a BNCC:

> O conhecimento matemático é necessário para todos os alunos da Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais. (BRASIL, 2018, p. 265)

De posse dessa visão mostrada pela BNCC, desenvolver uma SD aliada à resolução de problemas, possibilita a reflexão que permitirá o desenvolvimento necessário para compreender problemas práticos do dia a dia dos estudantes.

Segundo Onuchic (1999), a Resolução de Problemas vem ganhando espaço no campo educativo desde no final da década de 70, alcançando seu auge internacionalmente na segunda metade dos anos 80, os quais começaram o desenvolvimento dos primeiros trabalhos nessa área e começam a aparecer no Brasil.

Dante (2003) discorre que é conveniente utilizar situações-problema pelos professores em suas aulas de matemática, especialmente aquelas que estejam relacionadas a eventos e casos do cotidiano dos estudantes, atribuindo a estas práticas uma criticidade e um poder de análise da fatos através do conhecimento matemático.

A presente SD buscou trabalhar a resolução de alguns problemas da Obmep, de seus bancos de questões e dos materiais do PIC jr. que tratam de alguns temas de Aritmética, para que sejam desenvolvidas as habilidades EF06MA06, EF06MA05 e EF07MA01 da BNCC.

4.2.1 Etapas da Sequência Didática

A SD foi aplicada em três etapas: aplicação de um questionário diagnóstico (pré-teste), aulas com resolução de problemas da Obmep, aplicação do questionário (pós-teste) e aplicação de um questionário investigativo, a fim de avaliar as atividades desenvolvidas ao longo da sequência didática.

A aplicação da SD foi realizada de forma remota, onde as aulas foram realizadas por meio do aplicativo de vídeo conferência *Google Meet*, enquanto os questionários foram realizados por meio do *Google Forms*. Além disso, foi utilizado um computador e um *tablet* para que fossem realizadas as devidas explanações e consequentemente as resoluções dos problemas com o auxílio dos estudantes. Como pode ser observado no Quadro 1, na primeira etapa foi apresentada a contextualização histórica da Aritmética, como iria ser o desenvolvimento do projeto de pesquisa e por último a aplicação do questionário diagnóstico (pré-teste) para avaliar os conhecimentos prévios dos estudantes.

Na segunda etapa foram ministradas três aulas com resolução de problemas das provas da Obmep e do banco de questões, explorando os conteúdos: números primos, critérios de divisibilidade, o conceito de múltiplos, mmc, mdc. A escolha dos problemas se deu apartir de um levantamento realizado com as provas anteriores, os bancos de questões e o material dos Encontros de Aritmética. A partir daí, foram escolhidos os problemas que possibilitavam a vericação e o desenvolvimento das habilidades da BNCC supracitadas. A abordagem foi realizada de maneira dialógica e a partir da resolução de problemas.

Na última etapa, foram aplicados dois questionários: o pós-teste para que seja realizado o levantamento de dados e posteriormente a comparação dos dados do antes (questionário do pós-teste) e depois da SD, e um questionário investigativo visando identificar a percepção dos estudantes sobre os conteúdos explorados na sequência didática. O objetivo dos questionários foi compreender qual era o conhecimento aritmético dos estudantes antes da sequência didática, compreendendo quais foram os avanços em aprendizagem obtidos pós-sequência didática e analisar assim o sucesso da proposta.

No quadro a seguir é possível verificar como se deu a aplicação da sequência didática.

Quadro 1- Instrumentos empregados na presente pesquisa

Atividades	Tempo	Nº de alunos participantes	Data
I Etapa Aula 1: - Contextualização histórica da Aritmética - Apresentação do Projeto de pesquisa aos estudantes - Aplicação do Pré-teste	1h	17	15/06/2021
II Etapa Aula 2: Resolução de questões da OBMEP com Números Primos	1h	17	15/06/2021
Aula 3: Resolução de questões da OBMEP explorando os Critérios de Divisibilidade	1h	23	16/06/2021
Aula 4: Resolução de questões da OBMEP com MMC e MDC	1h	23	16/06/2021
III Etapa Aula 5: Aplicação do Pós-teste e do questionário investigativo	1h	23	17/06/2021

Fonte: Criação do autor.

4.3 DESCREVENDO AS ETAPAS DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Aula 1 – Contextualização histórica da Aritmética

A Aritmética está presente em diversas situações problemas, nos mais variados exames que acontecem no país e principalmente nas olimpíadas de matemática. O desenvolvimento da Aritmética na história nos levou a matemática que temos hoje, e conhecer um pouco da contextualização histórica da Aritmética é pode nos fazer compreender um pouco mais do mundo a nossa volta.

Objetivo geral

Possibilitar o conhecimento dos principais temas de Aritmética na Educação Básica ao logo do tempo, bem como enfatizar a importância das Obmep para os estudantes.

Objetivos específicos

- Contextualizar aspectos históricos da Aritmética ao longo do tempo;
- Apresentar a importância da OBMEP e o projeto de pesquisa a ser desenvolvido;
- Contribuir para o desenvolvimento cognitivo dos temas de Aritmética;
- Mostrar o Portal da Obmep e os Clubes de Matemática;

Metodologia

Na aula inicial, foi realizada uma contextualização histórica sobre a Aritmética, seguindo-se da apresentação sobre a importância da Obmep na Educação Básica e a proposta do projeto de pesquisa. E por último, foi aplicado um pré-teste com questões relacionadas à Aritmética com a finalidade de diagnosticar os conhecimentos prévios dos estudantes em relação aos números primos, critérios de divisibilidade, múltiplos, mmc e mdc.

Recursos materiais necessários

A aula foi realizada de forma remota com um *notebook* por meio do aplicativo *Google Meet*, adicionando-se de um *tablet* para que fossem realizados os devidos cálculos e as devidas explanações, sendo o formulário aplicado a partir de *link* do *Google Forms* na aula com o *Google Meet*.

Desenvolvimento da proposta

- 1º momento - Com a utilização de uma apresentação em slides foi realizada uma abordagem histórica, desde os egípcios e seus métodos primitivos de contar, dispostos no Papiro de Rhind “escrito em hierático e datado de cerca de 1650 a.E.C. O nome se deve ao escocês Alexander Henry Rhind que o comprou, por volta de 1850, em Luxor, no Egito. Este documento também é chamado papiro de *Ahmes*, o escriba egípcio que o copiou” (ROQUE, 2012, p. 5).

  Roque (2012) ainda discorre que o papiro detalha a solução de 85 problemas aritméticos da época, que envolviam desde problemas relacionados às frações, até problemas que tratavam de trigonometria básica e geometria. O Papiro de Rhind é um dos mais antigos documentos que se tem conhecimento na matemática. O Papiro atualmente se encontra no *British Museum* na Inglaterra, passando pelos babilônios que impulsionaram os árabes a construção inicial do nosso sistema de numeração, chegando à Peano e seus axiomas matemáticos que possibilitaram a estruturação dos números naturais.

- 2º momento - Foi apresentado um documentário sobre a Obmep, disponível em Obmpe(2014) e como ela tem um poder de transformar a realidade a qual os estudantes estão inseridos.

- 3º momento - Foi aplicado o pré-teste sobre os conceitos aritméticos, visando diagnosticar os conhecimentos prévios dos estudantes.

Avaliação

A avaliação da Aula 1 foi realizada por meio da participação dos estudantes nas temáticas exploradas e com a correção e análise do questionário do pré-teste.

AULA 2 – Explorando o conceito de múltiplos e divisores com as questões da Obmep

Compreender o conceito de múltiplos e divisores de um número natural, estamos tratando de um conglomerado de números que satisfazem determinadas condições. Vale notar que os múltiplos são obtidos após a multiplicação de números inteiro por números inteiros, enquanto os divisores são aqueles números que podem dividir um determinado número inteiro.

Objetivo geral

Explorar o conceito de múltiplos e divisores de um números inteiro a partir da resolução de problemas da Obmep, de seu banco de questões e dos materiais do PIC jr.

Objetivos específicos

- Explicar o conceito de múltiplos e divisores de um número inteiro;
- Apresentar a importância da Obmep e o projeto de pesquisa a ser desenvolvido;
- Diferenciar divisor de múltiplo.
- Explicar simultaneamente esses conceitos inseridos nos problemas olímpicos;
- Resolver os problemas olímpicos com auxílio dos estudantes;

Habilidade da BNCC

(EF06MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor.

Metodologia

Nessa Aula 2 foi explicado de forma expositiva e dialógica, a partir da resolução de 3 problemas olímpicos, o conceito de múltiplos e divisores de um número inteiro. Os problemas foram resolvidos com a participação dos estudantes, visando compreender a temática tratada na aula. No quadro a seguir estão postas as questões selecionadas que foram resolvidas com os estudantes.

Quadro 2 – Ficha das questões da Aula 2

Problemas trabalhados	OBMEP 2005 - Problema 8 – Nível 2; OBMEP 2015 - Problema 2 – Nível 1; BANCO DE QUESTÕES 2006 - Problema 1 - lista 4 - Nível 1.
Conteúdos desenvolvidos/competências e habilidades	Com esses problemas foram abordados os conceitos de múltiplos e divisores de um número e com eles buscou-se desenvolver a habilidade EF06MA06 da BNCC.
Objetivo/elaboração da atividade	Nesse primeiro momento da sequência didática foi trabalho juntos com a realização de problemas os conceitos de múltiplos e divisores que estavam inseridos nos problemas e eram necessários para realizar a solução dos problemas

Fonte: Criação do autor.

Problemas utilizados na aula

(OBMEP, 2005, p. 2) Quantos números inteiros, múltiplos de 3, existem entre 1 e 2005?

Solução sugerida:

Os múltiplos de 3 maiores do que 1 e menores do que 2005 são os números

$$3 \cdot 1, 3 \cdot 2, 3 \cdot 3, ..., 3 \cdot n$$

onde $3 \cdot n$ é o maior múltiplo de 3 menor do que 2005. Usando o algoritmo da divisão, podemos escrever $2005 = 3.668 + 1$ daí, segue que $n = 668$.

Comentários sobre o problema:

O conceito de múltiplo de um número é bem explorado nesse problema, uma vez que para ter um desenvolvimento contínuo na resolução, se faz necessário o conhecimento do tema. Além disso, compreender que possamos construir a sequência dos múltiplos maiores que 0 de um número, a partir da multiplicação desse número por 1, 2, 3 e assim sucessivamente. Como no problema em questão:

$$m(3) = 3 \cdot 1, 3 \cdot 2, 3 \cdot 3, 3 \cdot 4, 3 \cdot 5, 3 \cdot 6, ...3 \cdot n$$

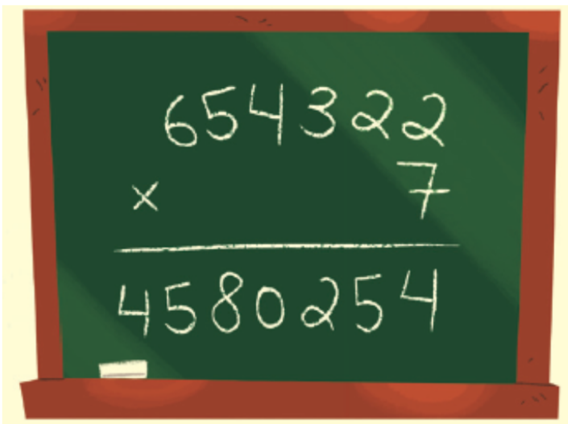
Veja que para encontrarmos o último múltiplo antes de 2005 devemos dividir $2005/3 = 668 \cdot 3 + 1$.

Logo o $668 \cdot 3$ é o último múltiplo de 3 antes de 2005. A escrita da sequência dos múltiplos dessa forma, faz com que os números $1, 2, 3, 4, 5, ..., 668$ sejam os marcadores da quantidade de múltiplos até um certo número. Essa visão é de grande valia na resolução de problemas desse tipo envolvendo múltiplos, possibilitando assim trabalhar para desenvolver a habilidade (EF06MA06).

(OBMEP, 2015, p. 1) O número 4580254 é múltiplo de 7. Qual dos números abaixo também é múltiplo de 7?

A) 4580249 B) 4580248; C) 4580247

D) 4580246 E) 4580245 E) 4580245



Solução sugerida:

Como $4580247 = 4580254 - 7$, concluímos que 4580247 é múltiplo de 7, uma vez que estamos tirando 7 de um múltiplo de 7. Este fato também pode ser verificado diretamente, efetuando-se a divisão e notando-se que o resto obtido é zero. Observe ainda quais são os restos das divisões por 7 para os números presentes nas demais alternativas:

$$4580249 = 7 \cdot 654321 + 2$$
$$4580248 = 7 \cdot 654321 + 1$$
$$4580246 = 7 \cdot 654320 + 6$$
$$4580245 = 7 \cdot 654320 + 5.$$

Comentários sobre o problema:

Um problema sutil e bem interessante, o conceito de múltiplo e divisor de um número é necessário para alcançar a resposta pretendida. Compreender ainda que ao somar ou subtrair um número n ao seu múltiplo, obteremos um outro múltiplo de n é de grande valia para resolver problemas como esse. Veja que uma outra alternativa seria dividir cada uma das alternativas por 7, o que demandaria um tempo bem maior do que simplesmente subtrair 7 do múltiplo dado.

Caso o caminho de testar fosse seguido, também demandaria de um outro conceito que é o de divisibilidade e notar que se um número a é divisível por um número b (deixa resto zero), podemos concluir que a é múltiplo de b, caso contrário não será. Um problema que pode ser explorado, se tornando um aliado no desenvolvimento da habilidade (EF06MA06).

(OBMEP, 2006, p. 22) Da igualdade 9174532 · 13 = 119268916 pode-se concluir que um dos números abaixo é divisível por 13. Qual é este número?

(A) 119268903

(B) 119268907

(C) 119268911

(D) 119268913

(E) 119268923

Solução sugerida:

Como 119268916 é divisível por 13, podemos concluir que os números divisíveis por 13 são aqueles obtidos somando-se ou subtraindo-se múltiplos de 13 ao número 119268916. Dentre os números apresentados, o número $119268916 - 13 = 119268903$ é o único divisível por 13.

Comentários sobre o problema:

Essa relação de divisor e múltiplo tem que estar clara na concepção operatória dos estudantes, uma vez que dizer que um número a é múltiplo de outro b é o mesmo que dizer que b divide a. Além disso, conhecer inicialmente o que são as sequências dos múltiplos de um número também é fundamental para resolver problemas desse tipo com mais clareza e sem maiores dificuldades. O problema ainda traz o número 13, com o qual podemos fazer um link e abordar o conceito de números primos.

De um modo geral, os conceitos de múltiplos e divisores também nos remetem à habilidade (EF06MA06) que pode muito bem ser explorada com esse problema.

Recursos materiais necessários

A aula foi realizada de forma remota com um notebook por meio do aplicativo *Google Meet*, adicionando-se de um *tablet* para que fossem realizados os devidos cálculos e as devidas explanações dos conteúdos.

Desenvolvimento da proposta

- 1º momento - Inicialmente retomaremos a discussão da aula anterior, visando ambientar novamente os estudante ao tema;
- 2º momento - Resolver os problemas que envolvam múltiplos e divisores de um número natural,
- Diferenciar divisor de múltiplo;
- 3º momento - Apresentar aos estudantes as sequências dos múltiplos de um número;
- 4º momento - Fazer uma breve revisão sobre a temática desenvolvida na aula, visando fixar o conteúdo explorado.

Avaliação

A avaliação da aprendizagem foi realizada qualitativamente de maneira contínua, através da participação e interesse dos estudantes, ou seja, a partir das ações e reações que demonstrarem na resolução das questões apresentadas.

Aula 3 – Explorando os Critérios de Divisibilidade com as questões da Obmep

Objetivo geral

Explorar os critérios de divisibilidades mais utilizados, classificar os números como primos e compostos a partir dos problemas da Obmep, de seu banco de questões e dos materiais do PIC.

Objetivos específicos

- Contextualizar aspectos históricos da Aritmética ao longo do tempo;
- Explorar o conceito de número primo;
- Diferenciar número primo de número composto;
- Mostrar o que é o crivo de Eratóstenes;
- Mostrar os critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000.
- Resolver os problemas olímpicos com ajuda dos estudantes.

Habilidades da BNCC

(EF06MA05) Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos “é múltiplo de”, “é divisor de”, “é fator de”, e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000.

Metodologia

Na terceira aula foi retomada a discussão sobre Aritmética, por meio da resolução de 3 questões olímpicas. A partir da resolução de cada problema foi tratado o conhecimento relacionado a ela, dando ênfase ao método de resolução e montagem da estratégia utilizada para chegar a resposta. A aula foi dialógica e participativa, buscando sempre o protagonismo dos estudantes, visando com que eles sugiram caminhos, tracem estratégias que contribuam para que

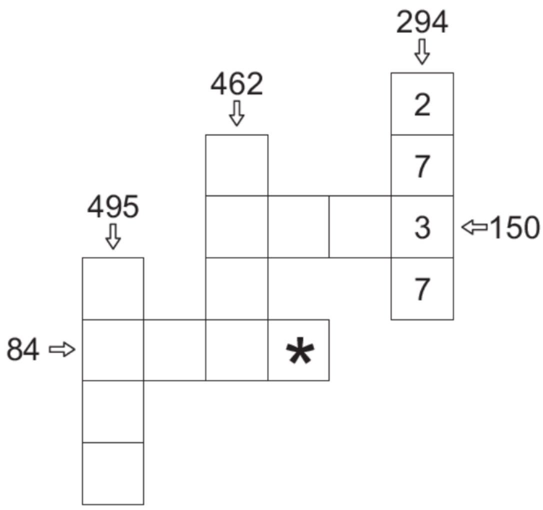
Quadro 3 – Ficha das questões da Aula 3

Problemas trabalhados	OBMEP 2019 - Problema 7 – Nível 1; BANCO DE QUESTÕES 2010 - Problema 136 - Nível 1; BANCO DE QUESTÕES 2010 - Problema 169 - Nível 1.
Conteúdos desenvolvidos/competências e habilidades	Nessa terceira aula, foi realizada a abordagem dos números primos, números compostos e na medida que os problemas foram sendo resolvidos com os estudantes foi sendo inserido os critérios de divisibilidade. O trabalho foi focado para desenvolver a habilidade EF06MA05 da BNCC.
Objetivo/elaboração da atividade	Nesse segundo momento da sequência didática foi feita uma breve revisão do que foi trabalhado na aula anterior e foi trabalhado os conteúdos a medida que os problemas estavam sendo resolvidos com os estudantes.

Fonte: Próprio autor.

haja a construção coletiva do conhecimento através da participação. As problemas que foram exploradas nesta aula podem ser visualizados no quadro 3.

(OBMEP, 2019, p. 2) As casas da figura abaixo devem ser preenchidas com números primos. Em cada linha ou coluna, o produto dos números deve ser igual ao número indicado pela seta. A coluna indicada por 294 já está preenchida. Qual é o número que deve ser escrito na casa marcada com *?



Solução sugerida:

Inicialmente, observamos que as decomposições em fatores primos dos números que aparecem no enunciado são:

$$462 = 2.3.7.11$$

$$150 = 2.3.5.5$$

$$495 = 3.3.5.11$$

$$84 = 2.2.3.7$$

Na interseção de 150 com 462, deve aparecer o 2, pois o 3 já está na interseção de 150 com 294.

A interseção de 495 com 84 deve ser preenchida com o 3, pois é o único fator primo comum entre esses dois números. Desta forma, sobra o 7 para a interseção de 462 com 84.

Então, como a fatoração do 84 é $3 \cdot 7 \cdot 2$, concluímos que $* = 2$.

Comentários sobre o problema:

Um problema bem elaborado, que chama atenção por sua construção e exige atenção de quem está resolvendo, principalmente aos pontos chaves que são aqueles das interseções (divisor primo comum) das formas fatoradas dos números dados. O conhecimento dos números primos, números compostos e da fatoração de um número composto são elementos fundamentais para chegar a resolução do problema. O problema em si é uma ótima opção para que possamos desenvolver a habilidade (EF06MA05).

(OBMEP, 2010, p. 20) No número $6a78b$, a denota o algarismo da unidade de milhar e b denota o algarismo da unidade. Se $x = 6a78b$ for divisível por 45, então quais são os possíveis valores de x?

Solução sugerida:

Como o número x é múltiplo de $45 = 5.9$, ele também é um múltiplo de 5 e de 9. Todos os múltiplos de 5 terminam em 0 ou em 5. Daí o número procurado tem a forma $x = 6a780$ ou a forma $x = 6a785$. Agora vamos achar o algarismo a, sabendo que para ser múltiplo de 9 a soma dos algarismos de x deve ser um múltiplo de 9.

- Se $x = 6a780$ então $6 + a + 7 + 8 + 0 = 21 + a$ deve ser um múltiplo de 9. A única possibilidade e $21 + a = 27$ donde $a = 6$ e $x = 66780$.

- Se $x = 6a785$ então $6 + a + 7 + 8 + 5 = 26 + a$ deve ser um múltiplo de 9.

A única possibilidade é $26 + a = 27$ donde $a = 1$ e $x = 61785$. Portanto o número procurado é $x = 66780$ ou $x = 61785$.

Comentários sobre o problema:

O problema é interessante, pois nas entrelinhas podemos observar que para resolvê-lo é necessário ter uma visão além dos critérios de divisibilidade de forma isolada, uma vez que não estudamos os critérios de divisibilidade de 45, entretanto ao analisar que $45 = 9 \cdot 5$, podemos concluir que um número que é divisível por 45 também será divisível por 9 e por 5. De posse desses critérios o problema é tranquilamente resolvido sem maiores complicações, o que nos possibilita desenvolver a habilidade (EF06MA05).

(OBMEP, 2010, p. 26) Qual é o menor número de cinco algarismos divisível por 4 que se pode formar com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 9?

Solução sugerida:

Um número é divisível por 4 se o número formado pelos seus dois últimos algarismos for divisível por 4. Assim, usando apenas os algarismos 1, 2, 3, 4 e 9, as únicas possibilidades para os dois últimos algarismos do número procurado são 12, 24, 32 ou 92. Como 9 é o maior algarismo, devemos colocá-lo “o mais a direita possível”, de modo que 9 deve ser o algarismo da casa das dezenas, ou seja, nosso número termina com 92.

Os outros algarismos 1, 3 e 4, devem aparecer em ordem crescente a esquerda de 92, ou seja, os três primeiros algarismos do número devem ser 134. Portanto, o número procurado e 13492.

Comentários sobre o problema:

O critério de divisibilidade por 4 é amplamente usado nesse problema de dois modos, inicialmente para identificar os números divisíveis por 4 na composição do número formado pelos dois últimos algarismos da direita que irá compor as opções de resposta e consequentemente a resposta final. Além disso, as escolhas realizadas quando se faz a comparação dos números também tem grande relevância na composição do resultado final. Um problema clássico que explora bem a habilidade (EF06MA05) no que se refere aos critérios de divisibilidade por 4.

Recursos materiais necessários

A aula foi realizada de forma remota com um notebook por meio do aplicativo *Google Meet*, foi utilizado ainda um *tablet* para que fossem realizados os devidos cálculos e as devidas explanações dos conteúdos.

Desenvolvimento da proposta

- 1^{o} momento - A princípio foi realizada uma revisão do que foi explicado na aula anterior, visando ambientar os estudantes na temática a ser estudada.

- 2º momento - Resolvemos os problemas que envolvem os números primos, tratando do que é um número primo e composto, sua definição, exemplos, como identificar, diferenciar e mostrar algumas fórmulas que geram alguns números primos;
- Diferenciar divisor de múltiplo;
- 3º momento - Exploramos o crivo de Eratóstenes como método de encontrar números primos;
- 4º momento - Em seguida foram trabalhados os problemas, buscando sempre a participação efetiva dos estudantes. Nesse momento foram tratados dos critérios de divisibilidades, à medida que os problemas foram sendo resolvidos com o auxílio dos estudantes, visando com que eles identificassem o tema tratado no problema que foi resolvido.
- 5º momento - No momento final foi realizada uma breve revisão dos conceitos vistos na aula, para que ocorresse uma melhor assimilação e compreensão.

Avaliação

A aprendizagem será avaliada qualitativamente de maneira contínua, por meio da participação e interesse dos estudantes, ou seja, a partir das ações e reações que demonstrarem diante dos conceitos apreendidos na aula.

Aula 4 – Explorando o mmc e mdc com as questões da Obmep

É sabido de todos que a Matemática está em toda parte, inclusive nos mais diversos problemas do nosso cotidiano. Os conceitos de mmc e de mdc podem ser aplicados em várias situações problemas. Nas olimpíadas podemos notar essa aplicação, vários são os problemas que temos com essa temática, isso faz deles temas que possibilitam um estudo mais amplo, desenvolve e potencializa as habilidades matemáticas relacionados a esses conceitos.

Objetivo geral

Explorar os conceitos de mmc e mdc, sem usar os algoritmos, a partir dos problemas da Obmep, seu banco de questões e materiais do PIC.

Objetivos específicos

- Explicar simultaneamente os conceitos de mmc e mdc inseridos nos problemas olímpicos;

- Diferenciar mmc de mdc.
- Mostrar como se calcula o mdc;
- Mostrar como se calcula o mmc;

Habilidades da BNCC

(EF07MA01) Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir mdc ou mmc, por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos.

Metodologia

Nessa Aula 4 foi dado continuidade aos conceitos aritméticos desenvolvidos na aula anterior, de forma expositiva e dialógica, enfatizando o método de resolução e montagem da estratégia utilizada para chegar a resposta. A partir da resolução de cada problema foi tratado o conhecimento relacionado a ela, buscando sempre o protagonismo dos estudantes, visando com que eles sugerissem caminhos, traçassem estratégias que contribuíssem para que houvesse a construção coletiva do conhecimento através da participação. No Quadro 4 pode-se visualizar as questões que foram exploradas nesta aula.

Quadro 4 – Ficha das questões da Aula 3

Problemas trabalhados	Banco de Questões 2010 - Problema 28 - Nível 1; Banco de Questões 2010 - Problema 158 - Nível 1; Livro Encontros de aritmética PIC, pág. 87, exercício 26.
Conteúdos desenvolvidos/competências e habilidades	Nessa última aula foi trabalho de forma implicita os conteitos de mdc e mmc a partir dos problemas da OBMEP visando desenvolver a
Objetivo/elaboração da atividade	Fechando a aplicação da sequência didática, após resolver os problemas com a turma e tratar sobre os conceitos citados acima, foi aplicado o pós-teste para comparar com o pré-teste e analisar os dados qualitativamente.

Fonte: Próprio autor

(OBMEP, 2010, p. 6) Uma bibliotecária recebe 130 livros de Matemática e 195 livros de Português. Ela quer arrumá-los em estantes, colocando igual quantidade de livros em cada estante, sem misturar livros de Matemática e de Português na mesma estante. Quantos livros ela deve colocar em cada estante para que o número de estantes utilizadas seja o menor possível?

Solução sugerida:

Denotando por n o número de livros que a bibliotecária vai colocar em cada estante, temos $130 \cdot n =$ número de estantes para os livros de Matemática e $195 \cdot n =$ número de estantes para os livros de Português. Isso mostra que n deve ser um divisor comum de 130 e de 195, pois o número de estantes utilizadas é inteiro. Sabemos que, quando aumentamos o denominador de uma fração, esta fração diminui, por exemplo, 27/10 e menor do que 27/8. Logo, quanto maior for o denominador n, menores serão as frações $130/n$ e $195/n$, o que significa que menor será o número de estantes utilizadas. Vemos, assim, que n deve ser o maior comum de 130 e 195.

Como as decomposições destes números em fatores primos são $130 = 2 \cdot 5 \cdot 13$ e $195 = 3 \cdot 5 \cdot 13$, segue que o mdc de 130 e 195 é $5.13 = 65$. Logo, a bibliotecária vai colocar 65 livros em cada estante, o número de estantes para os livros de Matemática e $130/65 = 2$ e o número de estantes para os de Português e $195/65 = 3$, o que dá um total de $2 + 3 = 5$ estantes.

Comentários sobre o problema:

Observe que resolvemos o problema indicado, sem a necessidade de utilizar o algoritmo para calcular o mdc, somente a partir da construção dos argumentos, pudemos sistematizar os dados, analisar a situação problema e encontrar a resposta. Para isso é necessário se ter em mente o conceito de divisor de um número e a clareza para concluir que ele é um divisor comum a outro número. Esses aspectos são justamente o que pretendemos desenvolver com a habilidade (EF07MA01), uma vez que estamos determinando o mdc sem propriamente utilizar o algoritmo.

(OBMEP, 2010, p. 24) No ponto de ônibus perto de sua casa, Quinzinho pode pegar os ônibus de duas linhas para ir á escola. Os ônibus de uma linha passam de 15 em 15 minutos e os da outra de 25 em 25 minutos, sendo que às 7h30m da manhã os ônibus das duas linhas passam juntos.
(a) A que horas passarão juntos novamente?
(b) Entre as 7h30min da manhã e a meia noite, quais são os horários em que os ônibus passam juntos neste ponto perto da casa de Quinzinho?

Solução sugerida:

a) Fatorando temos $15 = 3 \cdot 5$ e $25 = 5^2$. Portanto o menor múltiplo comum de 15 e 25 é $75 = 3 \cdot 5^2$. Assim, os dois ônibus passarão juntos novamente no ponto a cada 75 minutos, ou seja, a cada $1h15min$. Logo, os ônibus passarão juntos novamente no ponto perto da casa de Quinzinho, as $7h30min + 1h15min = 8h45min$.

b) Para obter os horários em que os ônibus passarão juntos no ponto de ônibus perto da casa de Quinzinho, devemos ir somando $1h15min$, obtendo $8h45min$, 10h, $11h15min$,

$12h30min$, $13h45min$, $15h$, $16h15min$, $17h30min$, $18h45min$, $20h$, $21h15min$, $22h30min$ e $23h45min$. O próximo ônibus só passa depois da meia noite.

Comentários sobre o problema:

Do mesmo modo que o problema anterior, pudemos determinar o mmc sem a necessidade de utilizar o algoritmo propriamente dito. No item a) uma outra alternativa seria fazer as sequências dos múltiplos não nulos de 15 e 25 e pegar a primeira interseção entre elas, ou seja, o primeiro número comum que aparecer.

Múltiplos de 15:$15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, ...$

Múltiplos de 25:$25, 50, 75, 100, 125, ...$

Veja que o 75 indica que os ônibus irão passar novamente depois e 75 minutos, ou seja, 1h15min depois das 07:30.

O fato de utilizar as horas e analisar a soma dos minutos as quais teremos sempre uma hora depois de cada 60 minutos, isso remete aos números de base 60 ou sistema sexagesimal utilizado por muito tempo pelos babilônios. Além disso, no item b) ao somar sempre 1h15min ao horário inicial, às 07:30, que é o horário que os dois ônibus passam simultaneamente, teremos uma P.A. cuja razão é $1h15min$, onde a cada soma da “razão”, a partir de 07:30, teremos o horário o qual os ônibus passarão simultaneamente e a partir daí podemos indicar os horários entre as 7h30min da manhã e a meia noite.

(CADAR, 2015, p. 87) Determine o menor número inteiro positivo de três algarismos que é divisível, ao mesmo tempo, por 4, 8 e 12.

Solução sugerida:

Dizer que um número é divisível por 4, 8 e 12 é o mesmo que dizer que este número é um múltiplo, ao mesmo tempo, de 4, 8 e 12. Como sabemos, todos os múltiplos de 4, 8 e 12 são múltiplos do mmc(4; 8; 12) = 24. Como $2.24 = 48$, $3.24 = 72$, $4.24 = 96$ e $5.24 = 120$, concluímos que o menor número inteiro positivo de três algarismos que é divisível, ao mesmo tempo, por 4, 8 e 12 é o número 120.

Comentários sobre o problema:

A ideia de múltiplo é fundamental para que o problema seja resolvido. Inicialmente para que seja determinado o mínimo múltiplo comum e em seguida para encontrar o menor múltiplo comum de três algarismos. Um ponto chave também é notar que o menor múltiplo comum de três algarismos que buscamos é um múltiplo do mmc. Como queremos o menor múltiplo de 24 com três algoritmos, basta fazer a sequências dos múltiplos de 24 e a resposta buscada será o primeiro número que possuir três algarismos.

Recursos materiais necessários

A aula foi realizada de forma remota com um notebook por meio do aplicativo *Google Meet*, foi utilizado ainda um *tablet* para que fossem realizados os devidos cálculos e as devidas explanações dos conteúdos.

Desenvolvimento da proposta

- 1º momento - No início será feito uma revisão do que foi visto nas aulas anteriores, relembrando os conceitos de Aritmética.
- 2º momento - Posteriormente serão trabalhados os problemas olímpicos que envolvem mmc e mdc, em paralelo a explicação desse temas, tratando de suas especificidades e diferenças entre eles.
- 3º momento - Por fim, será apresentado o algoritmo da divisão de Euclides, para que sirva de embasamento para resolução de outros problemas relacionados à temática.

Avaliação

A aprendizagem foi avaliada qualitativamente de maneira contínua, por meio da participação e interesse dos estudantes, ou seja, a partir das ações e reações que demonstraram atitudes de protagonismo e da utilização dos conceitos aprendidos na aula.

Aula 5 – Aplicação do Pós-teste e do questionário investigativo

Esta aula foi somente para aplicação dos questionários pós-teste e do questionário investigativo.

5 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Nesta seção iremos fazer a análise dos dados referentes aos questionários do pré-teste, aplicado na primeira aula, comparando seus resultados com os do questionário pós-teste, aplicado na quinta aula, e ao final, obter a opinião dos estudantes sobre a aplicação da sequência didática por meio do questionário investigativo.

Os três questionários referentes à sequência didática, foram aplicados em duas turmas de 1ª série do ensino médio. No pré-teste participaram 17 estudantes, enquanto no pós-teste participaram 23 e apenas 13 estudantes quiseram expressar suas opiniões sobre a proposta no questionário investigativo, isso se deve à dinâmica das aulas *on-line*, as quais não há um padrão na quantidade de estudantes participantes por aula.

Com relação a estrutura das análises a seguir, quando existirem duas perguntas, a primeira é referente ao pré-teste, enquanto a segunda ao pós-teste.

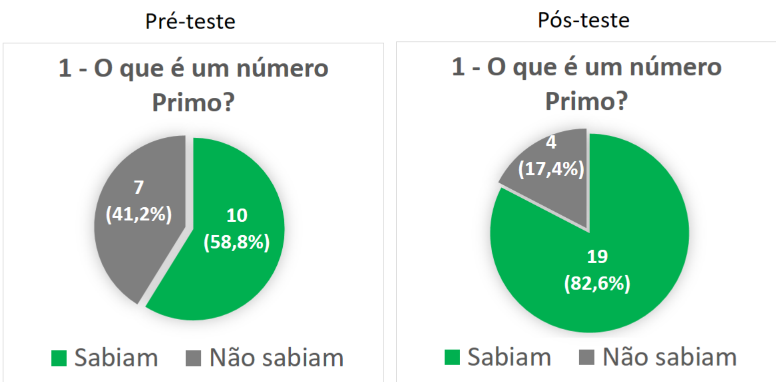
5.1 COMPARAÇÃO DOS DADOS DOS QUESTIONÁRIO PRÉ E PÓS-TESTE

Pergunta 1 - NOME COMPLETO: A pergunta 1 questionava o nome dos estudantes, sem contudo ser citado o nome de nenhum para preservação de suas identidades. Esse questionamento foi realizado apenas para obter os dados específicos para uma análise da evolução individual de cada estudante.

Pergunta 2 - TURMA: A turma também é um questionário que só será útil para que possamos verificar algumas especificidades analíticas de cada uma das turmas.

Problema 1.

Figura 1 – Problema 1

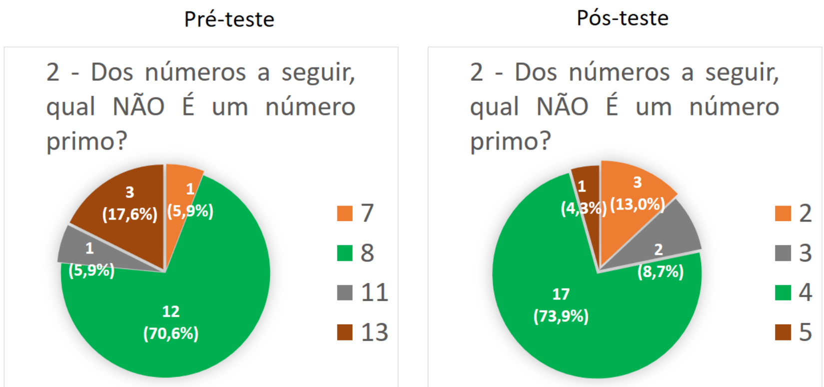


Fonte: Construído pelo próprio autor a partir da sistematização dos dados do Google Forms.

O Problema 1 foi aplicado na íntegra nos questionários pré e pós-teste. Muitos estudantes conhecem o conceito de números primos, no entanto é perceptível que ainda, mesmo estando na primeira série do Ensino Médio, temos estudantes que não sabem ou não lembram o que seria um número primo. Isso é um pouco preocupante, uma vez que, a priori, os estudantes deveriam ter propriedade sobre essa temática. Em uma das respostas, o Estudante 1, por exemplo, no pré-teste respondeu que “Número primo é qualquer número cujo conjunto dos divisores não invisíveis não é vazio.”, o que é confuso, uma vez que não foi trabalhado nada sobre isso na primeira aula e isso acende um alerta acerca do uso indevido da internet. Já no pós-teste o Estudante 2 respondeu a esse pergunta dizendo que “Um número que pode ser dividido por 1 e por ele mesmo”, o que nos leva a acreditar que quando o estudante tem conhecimento de uma certa temática ele não irá em busca de informações de terceiros.

Problema 2.

Figura 2 – Problema 2



Fonte: Construído pelo próprio autor a partir da sistematização dos dados do Google Forms.

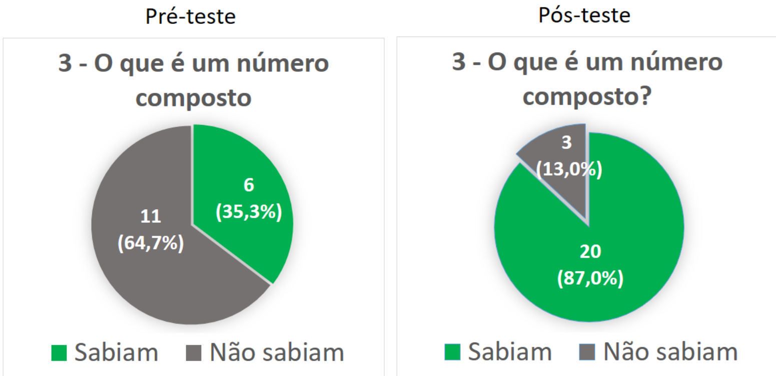
De forma sincrônica faremos a análise da segunda questão onde solicitamos para o estudante identificar os números que NÃO são primos. Essa questão torna-se mais complexa, pois para os estudantes identificarem os números que NÃO são primos eles precisam primeiro conhecer e reconhecer os que são, mostrando assim o nível de compreensão assimilado pelos estudantes nos dois momentos de aprendizagem.

Como resultados obtivemos que do mesmo total de 17 estudantes no primeiro momento (pré-teste) apenas 12 conseguiram fazer essa análise, representando um total de 70,6%, e já no segundo momento (pós-teste) esse percentual subiu para 73,9%, tendo em vista as 23 respostas, representando uma alteração positiva de 2,3%, ou seja, nesse segundo momento mais estudantes conseguiram fazer essa análise mais sistematicamente, indo além do fato de compreensão e partindo para a representação matemática.

Os estudantes compreenderam, e explicaram o que compreenderam, e essa análise fica ainda mais complexa, pois devemos considerar um fator importante que é a alteração das respostas do primeiro questionário para o segundo. Por isso o estudante teve que utilizar um raciocínio lógico mais aguçado em função de respostas complexas, não deixando o estudante alienado a uma única resposta, fazendo com que o estudante realmente mostre que foi aprendido e sistematizado por ele do que foi estudado.

Problema 3.

Figura 3 – Problema 3

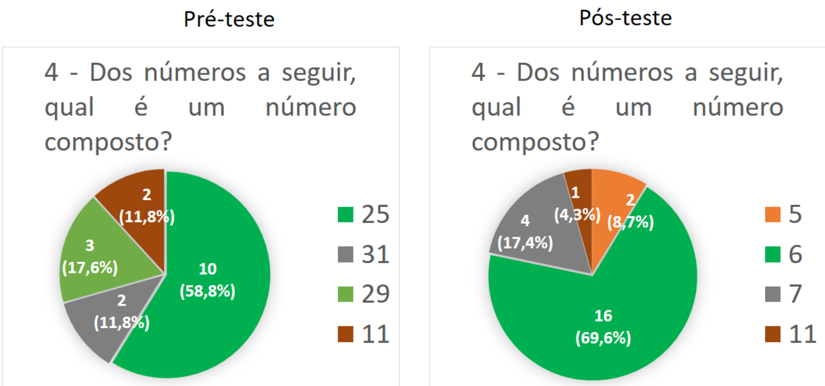


Fonte: Construído pelo próprio autor a partir da sistematização dos dados do Google Forms.

Assim como feito no Problema 1, o Problema 3 também foi colocado na íntegra no questionário pré e pós-teste. Podemos notar que na primeira aplicação poucos estudantes sabiam de fato o que era um número composto. Conhecer os números compostos é importante para resolver problemas de decomposição de um número em fatores primos, uma vez que ao diferenciar um número primo de um composto, é garantia de ganho de alguns minutos na resolução de problemas envolvendo esses números.

Problema 4.

Figura 4 – Problema 4



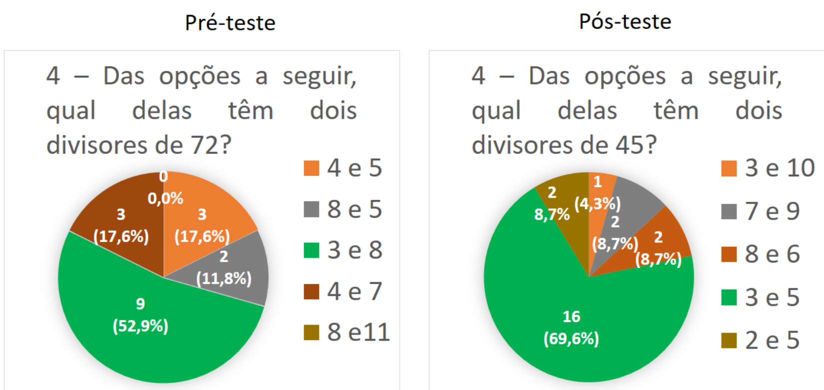
Fonte: Construído pelo próprio autor a partir da sistematização dos dados do Google Forms.

Conforme a compilação das informações, os dados mostram que no questionário 1 (questionário pré-teste) apenas 10 estudantes do total de 17 souberam identificar um número composto correspondendo um percentual de 58,8% e já no segundo momento, após a explanação/ explicação do conteúdo e com o subsídio das questões da OBMEP, esse percentual alterou de forma positiva e significativa, onde obtivemos os seguintes resultados - dos 23 que responderam, 16 souberam apontar corretamente o que fora solicitado na questão, que foi para apontar qual número era composto. O percentual neste segundo momento foi de 69,6%. Representando matematicamente uma alteração de 10,8% em respostas corretas obtidas.

Analisando esses dados, podemos perceber que o que esperávamos era que esses estudantes já dominassem o que era esperado em matemática como dominar números primos, números compostos e resolver problemas que envolvam tais temáticas. Ao final, analisamos uma significativa alteração em aprendizagem e compreensão do conteúdo, que nos faz concluir que após maior compreensão da temática os estudantes puderam assim dominar os conteúdos que tiveram um pouco de dificuldade no primeiro questionário. Terminaram por resolver até questões que ficaram sem respostas, e devemos ressaltar ainda, que o nível de proficiência considerado adequado envolve também escala de uma leitura matemática. Significa com os resultados finais obtidos que para se resolver uma questão de matemática os estudantes devem identificar o tema matemático abordado, localizar informações explícitas e implícitas, para assim estabelecer relações, sejam elas cognitivas ou relações de causa do efeito. Isso fica evidenciado no segundo questionário onde os estudantes conseguiram fazer essas relações com mais precisão do que no questionário 1, ainda sem a explanação do conceitos/conteúdos.

Problema 5.

Figura 5 – Problema 5

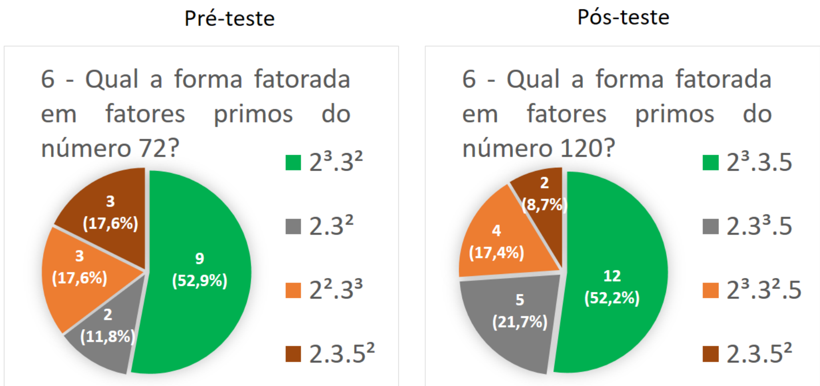


Fonte: Construído pelo próprio autor a partir da sistematização dos dados do Google Forms.

Os problemas em questão buscam analisar se os estudantes compreendem o conceito de divisores de um número. No primeiro questionário(pré-teste), de um total de 17 respostas 9 estudantes acertaram a resposta correta, o que equivale a 52,9% do total, revelando que pouco mais da metade compreendem o conceito de divisibilidade, no entanto muitos deles ainda sentem dúvida com relação ao tema, uma vez que eles estavam muito divididos nas outras alternativas. Já no questionário pós-teste, após aplicação da sequência didática esse percentual aumentou para 69,6%. Dos 23 que responderam, isso mostra um avanço significativo de 16,7% após a exposição e resolução dos problemas da OBMEP.

Problema 6.

Figura 6 – Problema 6



Fonte: Construído pelo próprio autor a partir da sistematização dos dados do Google Forms.

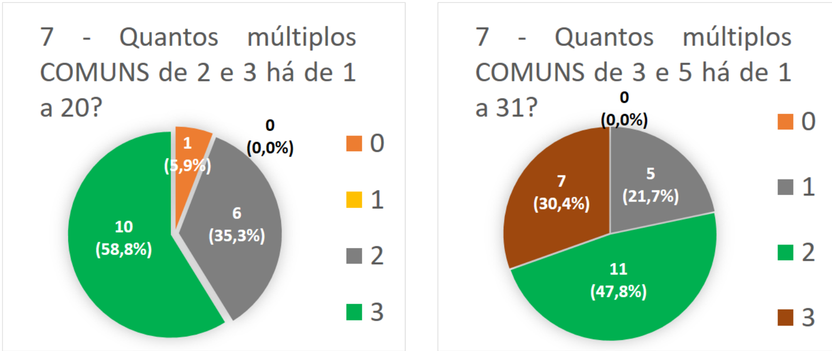
Neste problema 6, faremos uma análise mais aprofundada pois a questão solicitava dos estudantes a forma fatorada em fatores primos do número 72 e 120. Para tanto, os estudantes deveriam saber decompor um número composto, realizar divisões sucessivas por números primos, até que o quociente seja igual a um, e ao final representar os números primos utilizados em forma de multiplicação que seria o resultado final, ou seja, a forma fatorada.

Considerando o número 72 no primeiro questionário e um número maior no segundo questionário – de 120, e considerando a maior compreensão após o momento de interação com os estudantes, o resultado no primeiro momento apresentou que dos 17 estudantes apenas 9 conseguiram responder corretamente, representando uma porcentagem de 52,9%, já no segundo questionário, apesar do número ser maior e exigir um pouco mais no processo matemático, dos 23 estudantes 12 acertaram com uma representação percentual de 52,2% com uma alteração significativa de 0,7%. Observa-se que apesar de parecer pouco, ela representa muito em aprendizagem e considerando todo processo matemático que os estudantes fizeram para chegar na resposta correta.

Problema 7.

Figura 7 – Problema 7

Pré-teste Pós-teste



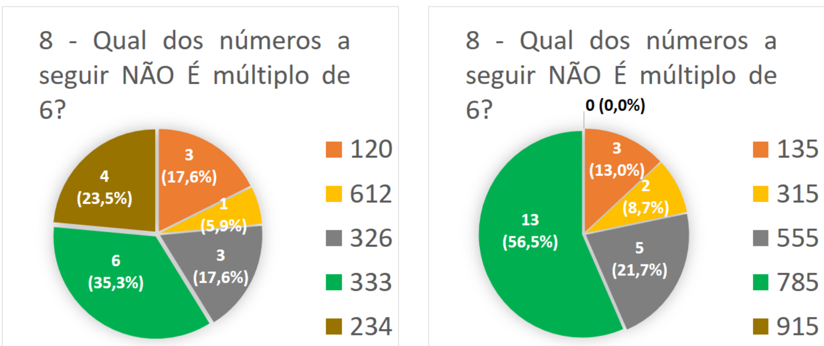
Fonte: Construído pelo próprio autor a partir da sistematização dos dados do Google Forms.

Continuando nossa análise dos dados, nesta 7 questão a qual pergunta sobre quais múltiplos comuns de 2 e 3 há de 1 a 20, obtivemos os seguintes valores. No primeiro momento de 17 estudantes, 10 conseguiram acertar a questão representando um percentual de 58.8%, já no segundo momento dos 23 estudantes 11 acertaram, representando um percentual de 47,8%. Fazendo um análise desses valores percebemos um pequeno decréscimo de -1.1% do segundo momento para o primeiro momento. No entanto, fazendo um paralelo com esses dados e com o que foi observado em sala é que os estudantes realmente tiveram dificuldades com relação a esses conceitos. Isso é importante porque possibilita a realização de um reforço quando esses temas forem tratados.

Problema 8.

Figura 8 – Problema 8

Pré-teste Pós-teste



Fonte: Construído pelo próprio autor a partir da sistematização dos dados do Google Forms.

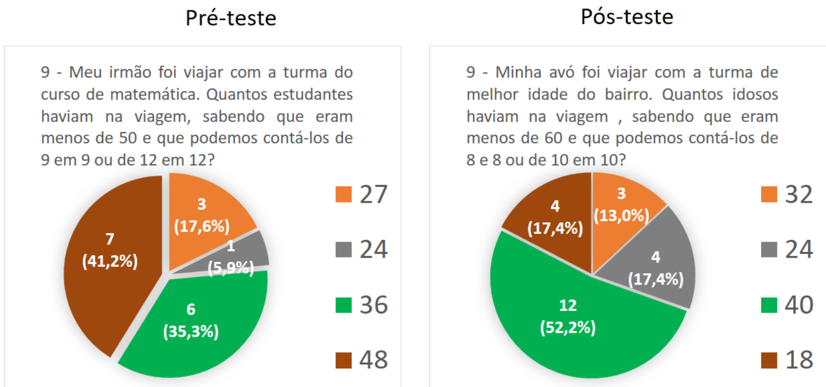
Novamente temos aqui uma questão que analisa o grau de compreensão e assimilação do que foi aprendido e apreendido pelos estudantes. Isso nos faz refletir sobre como os estudantes aprendem melhor ao serem estimulados, seja por questionamentos (como fizemos nos dois momentos), ou por outros estímulos como visuais ou de mídias.

Enquanto professor, devemos considerar diversas formas de ensino para que possamos alcançar a maior parte dos estudantes. Pensando dessa forma, os estudantes foram instigados nos dois momentos com questionamentos que iam de um nível simples a um nível de maior dificuldade.

Como resultados dos dados nesta questão, tivemos no primeiro momento que dos 17 estudantes 6 apenas acertaram representando percentualmente 35,3% e no segundo momento dos 23 estudantes, 13 acertaram representando 56,5% com um valor muito significativo de alteração de 21,2% do segundo momento para o primeiro. Os dados mostram que os estudantes conseguiram compreender e representar matematicamente o que foi assimilado.

Problema 9.

Figura 9 – Problema 9



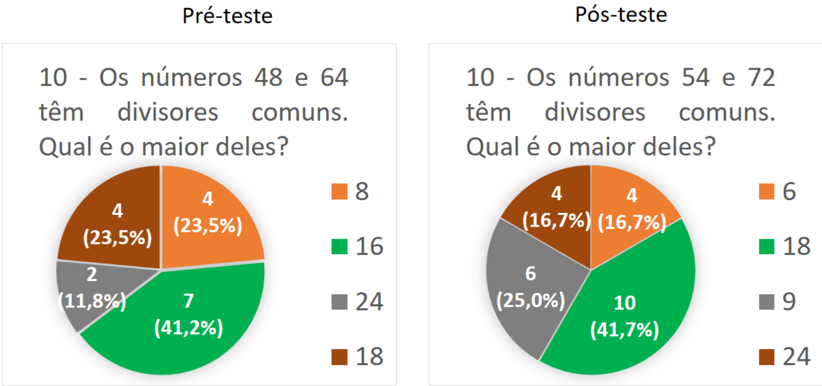
Fonte: Construído pelo próprio autor a partir da sistematização dos dados do Google Forms.

Analisando o problema 9, temos alguns elementos nela que a tornam mais difíceis que as demais, pois além de compreender a matemática propriamente dita, temos que levar em consideração que o estudante tem que fazer a análise interpretativa da questão para então organizar o raciocínio lógico e conseguir respondê-la, ou seja, além de considerar o rendimento do estudante, temos que considerar também o processo que o estudante fez para que ele possa representar o que lhe foi ensinado e o que ele aprendeu. Dessa forma, temos que considerar que houve uma aprendizagem significativa, pois no primeiro momento dos 17 estudantes apenas 6 acertaram a questão totalizando 35,3%, já no segundo momento dos 23 estudantes, 12 acertaram a questão representando em porcentagem 52,2%.

Como resultado geral, observa-se um aumento representativo de 16,9% e esse aumento se torna mais significativo quando avaliamos que eles conseguiram fazer a interpretação correta da questão e sua análise matemática também.

Problema 10.

Figura 10 – Problema 10



Fonte: Construído pelo próprio autor a partir da sistematização dos dados do Google Forms.

E por fim, chegamos a análise da última questão, a qual perguntava os divisores comuns de 48 e 64 e qual seria o maior deles. Aqui temos uma questão que necessitava dos estudantes um domínio cognitivo, envolvendo aspectos como conhecer quais são os divisores comuns dos números. Os estudantes deveriam analisar também que matematicamente dois números naturais sempre têm divisores comuns e, para tanto, os estudantes tinham que organizar e sistematizar os elementos citados para, a partir de então, atribuir sentido aos processos matemáticos que foram realizados para resolução da questão.

No primeiro momento dos 17 estudantes apenas 7 conseguiram acertar representando 41,2% e no segundo momento dos 23 estudantes 10 conseguiram êxito nas respostas totalizando 43,5% com uma alteração positiva de 2,3%, fazendo- nos compreender que no segundo momento, após a explanação dos conceitos e conteúdos com resolução da OBMEP, os estudantes conseguiram assimilar melhor o que foi abordado.

5.2 O QUESTIONÁRIO INVESTIGATIVO

O questionário investigativo foi importante para obter a impressão dos estudantes sobre a aplicação da SD. Foram realizadas apenas 5 perguntas:

1 - O que achou da sequência didática?

2 - O que mais gostou?

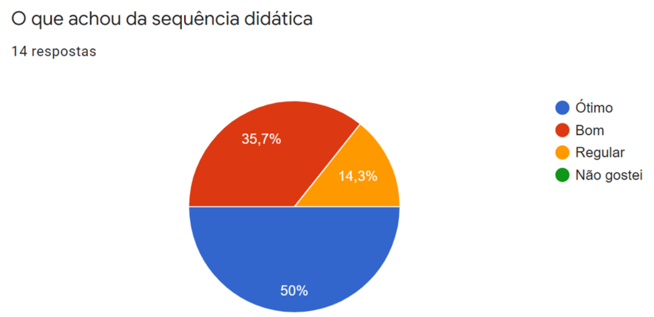
3 - O que menos gostou?

4 - Sugestões e críticas.

5 - Elogios.

Na primeira questão, os estudantes usaram sua sinceridade acerca da SD, uma vez que nesse questionário era anônimo e os resultados obtidos foram os seguintes:

Figura 11 – Pergunta 1



Fonte: Construído pelo próprio autor a partir da sistematização dos dados do Google Forms.

Na primeira questão, os estudantes usaram sua sinceridade acerca da SD, uma vez que nesse quetionário, era anônimo e os resultados obtidos foram os seguintes:

De acordo com o que está disposto acima, 50% acharam ótima, 35,7% boa e 14,3% regular a SD, mostrando que o trabalho desenvolvido foi bem aceito e os estudantes gostaram da dinâmica da proposta.

Analisando a pergunta 2, obtivemos algumas respostas como: “De como a gente relembrou o passado”, “Que revi assuntos e pude aprender até mais”, “Relembrar os assuntos que acabam caindo no esquecimento”, “Gostei de tudo praticamente”. Muitas dessas questões eu não acertaria se não tivesse essas explicações. De um modo geral isso mostra que muitos dos conceitos de fato acabaram caindo no esquecimento ou os estudantes não aprenderam realmente.

Na pergunta 3, não obtivemos respostas negativas, apenas a consciência dos estudantes ao fazer uma autoanálise, sendo algumas respostas obtidas: “Percebi que devo voltar a rever os assuntos básicos”, “Não teve o que menos gostei”, “Sem reclamações!”, “Para mim foi muito bom, gostei dessa aula."

Já na pergunta 4, poucas foram as respostas, uma vez que a maioria respondeu “Nenhuma”, mostrando que eles não tinham nada a sugerir ou a criticar.

Por fim, na pergunta 5, os estudantes elogiaram bastante a forma como os conceitos foram abordados e como foi providencial para que eles tirassem a dúvida sobre os conceitos estudados por eles anteriormente. Algumas respostas obtidas foram: “Parabéns por esse momento de aprendizagem", “Achei maravilhoso. Vou estudar bastante pra fazer essa prova”, “Só agradecer pela iniciativa e nos ajudar novamente", “Ajudou muito e tirou algumas dúvidas”, “Explicação perfeita, entendi muito bem e aprendi mais sobre os múltiplos”.

Foi um momento satisfatório, de muita aprendizagem e que possibilitou aos estudantes reverem os conteúdos, analisarem a matemática a partir da resolução de problemas e de conhecerem a OBMEP e seu poder transformador.

5.3 ANÁLISE FINAL DOS QUESTIONÁRIOS

Ao analisar as 10 questões nos dois momentos, percebemos que os estudantes tiveram que desenvolver nesse intervalo, não apenas aspectos quantitativos, mas também aspectos qualitativos. Os quantitativos estariam representando em números as respostas dos estudantes e os qualitativos que nos permitem compreender, após analisar os detalhes das informações explícitas, implícitas e a complexidade das informações que foram obtidas com os dados dentro desse processo de aprendizagem.

A partir da análise dos dados podemos afirmar que houve o desenvolvimento das habilidades de diversos estudantes após a aplicação da sequência didática. Além disso, diante desse contexto pandêmico, ao analisar os três questionários foi observado a real possibilidade de se aplicar uma sequência didática e obter o desenvolvimento cognitivo dos estudantes por meio das aulas remotas. Mesmo com os diversos entraves que esse momento impõe como dificuldades de acesso e falta de equipamentos, por exemplo, a aplicação foi proveitosa e positiva.

Os resultados obtidos foram positivos, se considerarmos que ao comparamos o pós com o pré-teste, em apenas uma das 10 questões tivemos um decréscimo. Concluímos com as análises que trabalhar matemática vai além de explicar um conteúdo ou revisá-lo, pois estamos tratando de como os estudantes irão compreender esse conteúdo, de como trazer essas questões de forma mais atrativa, e ao final investigar o que de fato foi aprendido e como consequência disso verificar os resultados positivos com relação a aprendizagem dos estudantes.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Inicialmente, ao desenvolver a proposta da SD, já tínhamos uma boa expectativa sobre ela, uma vez que o planejamento de uma proposta é o passo inicial para o sucesso. A partir da resolução dos problemas da OBMEP com as turmas, ao comparar os resultados obtidos, observamos que as respostas foram coerentes com a iniciativa e isso ficou demonstrado tanto com os resultados dos questionários quanto na participação e aceitação da proposta.

A pesquisa alcançou os objetivos traçados, foi notório que os estudantes puderam rever e reaprender os conceitos que possivelmente tenham ficado esquecido no decorrer dos anos. Tratar a OBMEP em sala de aula possibilita sempre a discussão e debates sobre aplições da matemática nos problemas da Obmep e isso é relevante para o desenvolvimento cognitivo dos estudantes.

Após ler a seção 4 é possível notar que algumas soluções sugeridas seguem uma linha bem conservadora, sendo que seria possível seguir por outros caminhos até chegar a solução. A partir das observações mencionadas durante a aplicação da SD, houve a troca de ideias e surgiram a partir daí, outras opções de raciocínio de resolução. Todavia as observações feitas e sugestões dadas foram relevantes para o estudo e melhoria do desempenho dos estudantes na resolução dos problemas.

A Obmep tem se mostrado uma grande ferramenta para ajuda a tornar a matemática mais prática, acessível aos estudantes, desde 2005 se constituiu como uma tradicional avaliação externa que acima de tudo, tem um poder transformador para aqueles que gostam de matemática. Diversos são os exemplos de estudantes que tiveram suas vidas transformadas pela OBMEP, através das bolsas do PIC jr. e dos incentivos das medalhas e menções honrosas dadas aos que tiveram melhor desempenho.

A aritmética tem grande importância para a sociedade, a partir do advento da contagem, antes mesmo do significado específico dos números e operações aritméticas relacionadas a eles. Vale notar que a aritmética desde o início figurou-se como uma ciência relacionada às necessidade prática, sendo utilizada para medir e calcular. No entanto hoje, seu estudo vai muito além disso, estendendo-se a teoria dos números, uma das áreas fabulosas da matemática.

Ao observarmos a seção 3 é notório que temos uma matemática avançada que não é trabalhada, tal como está alí, em sala de aula, todavia todas as operações e observações realizadas nos problemas trabalhados na SD, se justificam a partir dos resultados contidos na seção 3. Faz-se necessário ao docente compreender os conceitos da referida seção para que sejam sanadas todas as dificuldades e dúvidas ora existente dos estudantes.

Ao ler o capítulo referente aos resultados sistematizados, é possível observar que das 10 questões propostas nos questionários, obtivemos resultado positivo em 9 deles, o que foi muito interessante, mostrando o potencial da proposta, buscando desenvolver as habilidades da BNCC. Por meio das conclusões tiradas ao comparar os formulários, ficou evidente que os resultados obtidos com a SD foram os melhores possíveis, não só para estruturar o trabalho pedagógico, mas também para levar uma nova proposta para os estudantes.

Um fato que chama atenção na pesquisa, é que apesar das habilidades tratadas serem do ensino fundamental, fica evidente que nem todos os estudantes as desenvolveram em seus respectivos anos escolares, isso é de certa forma preocupante, uma vez que vai demandar de mais tempo, para o professor realizar a abordagem dos conceitos que elas estão inseridas, o qual ele poderia está ministrando aula para os estudantes desenvolverem outras habilidades.

A partir das conclusões obtidas da análise dos questionários, observou-se que a SD, não só é importante para o apoio ao professor durante sua prática pedagógica, mas também, se desenvolvida corretamente, é de suma importância para o desenvolvimento das habilidades em seus estudantes, possibilitando ainda desenvolver estratégias para a resolução de problemas.

Como dito, a SD foi realizada remotamente e isso foi um fator que dificultou um pouco a sua execução, uma vez que alguns estudantes não participaram da maneira que foi planejado. Caso a SD tivesse sido realizada presencialmente, possivelmente o resultado seria ainda mais efetivo. Todavia só teria como concluir isso se a mesma fosse aplicada novamente e os dados obtidos na segunda aplicação fossem ainda mais positivos.

Para expandir a ideia da SD, uma sugestão seria, por exemplo, desenvolver as habilidades de geometria plana com o auxílio dos problemas da OBMEP, isso seria interessando para que fosse possível testar o potencial dos problemas olímpicos. Essa complementação poderia ser até um trabalho complementar a ser realizado no doutorado, buscando soluções alternativas para desenvolver habilidades da BNCC nos estudantes a partir dos problemas da OBMEP.

As dificuldades encontradas no desenvolvimento da SD não foram muitas, as que existiram estavam de fato relacionadas ao momento pandêmico vivenciado durante sua execução. Nesse período havia uma ausência grande de estudantes, por conta da dificuldade de conectividade e afins, o que acarretou na inconstância do número de estudantes durante o desenvolvimento da SD.

Por fim, esperamos com esse trabalho inspirar mais professores a trabalharem a OBMEP em suas aulas, uma vez que os problemas proporcionam discussões e debates calorosos. Além disso, acreditamos que os docentes vão explorar todas as potencialidades da sequência didática aqui descrita e até buscar outros problemas que venham contribuir ainda mais para o desenvolvimento das habilidades selecionadas.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, F. P. de. **As Olimpíadas de Matemática Ampliando e Fortalecendo o Processo de Ensino-Aprendizagem**. Dissertação - Pró-reitoria de pesquisa e pós-graduação programa de pós-graduação em matemática. Mossoró, 2015.

ARITMÉTICA. In: **MICHAELIS moderno dicionário da língua portuguesa**. São Paulo: Melhoramentos. 2021. Disponível em: <https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/ARITM%C3%89TICA/>. Acesso em: 22 jun. 2021.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem Matemática: O que é? Por quê? Como?. **Veritati**, nº 4, p. 73-80, 2004.

BARREIRO, Amanda. **Aritmética**. 2018. Disponível em: <https://querobolsa.com.br/enem/matematica/aritm
Acesso em: 04 de jun. de 2021.

BELISÁRIO, A. O material didático na educação a distância e a constituição de propostas interativas. Silva, M. **Educação online**. São Paulo: Edições Loyola, p. 137–148, 2003.

Bicudo, M. A. V. **Pesquisa Qualitativa e Pesquisa Qualitativa segundo a abordagem fenomenológica**. Autêntica. Belo Horizonte, 2006.

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem Matemática no Ensino**. São Paulo: Contexto, 2005.

BIEMBENGUT, M.S. **Modelagem matemática & implicações no ensino e aprendizagem de matemática**. Blumenau, Ed. Da Furb.1999.

BIONDI, R.L.; VASCONCELOS, L.; MENEZES-FILHO, N.A. **Avaliando o impacto da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) no desempenho de matemática nas avaliações educacionais**. 2009

BOYER, Carl Benjamim. **História da matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Ed. Edgard, 1996.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática.** – Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. **Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. Orientações curriculares para o ensino médio: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília, 2006.

BRASIL, Ministério da Ciência e Tecnologia (MCT). **Avaliação do impacto da Olimpíada Brasileira de Matemática nas Escolas Públicas (OBMEP)**. Brasília: Centro de Gestão e Estudos Estratégicos, 2011.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

BREUCKMANN, Henrique João. **A solução de problemas a partir de alguns pressupostos Vygotskyanos**. 1998, 213f. Tese (Doutorado em Educação -Ensino de Ciências Naturais) - Programa de Pós-graduação em Educação, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1998.

CADAR, Luciana; DUTENHEFNER, Francisco. **Encontros de aritmética**. Apostila do PICOBMEP, 2015.

D'AMBROSIO, B. S. **Como ensinar matemática hoje? Temas e Debates**. SBEM. Ano II. N2. Brasília. 1989. P. 15-19

D'AMBROSIO, Ubiratan. (2002). **A Matemática nas escolas**. Educação Matemáticaem Revista, ano 9, n. 11, pp. 29-33.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Euler, um Matemático Multifacetado**. Revista Brasileira de História da Matemática. Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática, vol. 9, nº 17, p. 13-31, abril/setembro, 2009.

D'Ambrósio. U. In: BORBA, M. de C. **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. Autêntica, Belo Horizonte, 2006.

DANTE, Luiz Roberto. **Didatica da resolução de problemas de matematica, 1a. a 5a. series: para estudantes do curso de Magisterio e professores do 1o. grau.** Ática, 2003.

DANTZIG, T. **Número: a linguagem da ciência**. Traduzido por Sergio Goes de Paula Rio de Janeiro: Zahar, 1970.

DE OLIVEIRA SANTOS, José Plínio. **Introdução à teoria dos números**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1998.

DESLAURIERS, J. & KÉRISIT, M. O delineamento de pesquisa qualitativa. In: POUPART, Jean et al. **A pesquisa qualitativa: Enfoques epistemológicos e metodológicos**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2008.

DRUCK, Suely. Introdução. In: BRASIL. **Avaliação do impacto da Olimpíada Brasileira de Matemática nas escolas públicas (OBMEP)**. Brasília: Centro de Gestão e Estudos Estratégicos, 2011.

ESCOLA, Revista. **Sequência Didática**. Disponível em: <http://revistaescola.abril.com.br/fundamental1/rote didatico-sistema-numeracao-decimal-1-2-3-anos-634993.shtml?page=5.5>. Acesso em: 04 de jun. de 2021.

FIORENTINI, Dario. **Alguns Modos e ver e conceber o ensino da matemática no Brasil**. In: Zetetiké, ano 3, nº. 4, 1995, p.1-37.

FREIRE, P. FAUNDEZ, A. **Por uma pedagogia da pergunta**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1998.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa**. 27. ed.

São Paulo: Paz e Terra, 1996.

GUSMÃO, Tânia C.R.S. **Sequências didáticas para o aumento da cognição e metacognição matemática de estudantes dos anos iniciais do ensino fundamental**. Projeto de Pesquisa. UESB, 2014.

HEFEZ, Abramo. **Aritmética**. Coleção Profmat. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, 2016.

IMPA. **Programa Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo (Poti)**. 2021. Disponível em: <https://poti.impa.br/>. Acesso em: 04 de jun. de 2021.

JUNQUEIRA, Luiz Carlos de Souza *et al*. **Critérios de divisibilidades**. 2001.

KÖNIG, Rosilene Inês; DULLIUS, Maria Madalena; MARTINS, Silvana Neumann. **Resolução de problemas matemáticos na formação continuada de professores.** Anais da IV Mostra do Mestrado em Ensino em Ciências Exatas, 2013.

LANDIM, C. *apud* MARQUES, C. **Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas completa dez anos comemorando resultados**. 2014. Disponível em: <http://server22.obmep.org.br:8080/media/servicos/recursos/314911.o>. Acesso em: 04 de jun. de 2021.

LIMA, E.L. *et al.* **Matemática e ensino**. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matematica, 2007.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas da aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 2001.

MIGUEL, José Carlos. **O ensino de Matemática na perspectiva da formação de conceitos: implicações teórico-metodológicas.** Núcleos de Ensino-PROGRAD-UNESP. I ed. São Paulo-SP: Editora UNESP, v. 1, p. 375-394, 2005.

MUZZI, M. **Etnomatemática, Modelagem e Matemática Crítica: novos caminhos**. In: Presença Pedagógica, v. 10, n. 56, mar./abr.2004. p. 31-39.

OBMEP. **Primera fase - Nível 2**. 2005. Disponível em: < https://drive.google.com/file/d/1Ge7cP8lyMx7d-sJGO2uPRUsjyPXKF3Wy/view >. Acesso em: 04 de jun. de 2021.

OBMEP. **Banco de questões**. 2006. Disponível em: < https://drive.google.com/file/d/1GzURIN_Aes4NVPtQfMPDyUtQs2FMbZQC/view >. Acesso em: 04 de jun. de 2021.

OBMEP. **Banco de questões**. 2010. Disponível em: < https://drive.google.com/file/d/1mImxD9CS4QACwOohFMBIwvU4upoqCQD0/view >. Acesso em: 04 de jun. de 2021.

OBMEP. **Documentário OBMEP Completo**. 2014. Disponível em: < https://www.youtube.com/watch?v=sg >. Acesso em: 04 de mai. de 2021.

OBMEP. **Primera fase - Nível 1**. 2015. Disponível em: < https://drive.google.com/file/d/188rcPvCr4oKQOY4PSnBP5AUeT5ZU6myY/view >. Acesso em: 04 de jun. de 2021.

OBMEP. **Primera fase - Nível 1**. 2019. Disponível em: < https://drive.google.com/file/d/1SvsrV_ ZHxXb38oCnd6MZbd36PQnIEjob/view >. Acesso em: 04 de jun. de 2021.

OBMEP. **Página inicial**. Disponível em: < http://www.obmep.org.br/ >. Acesso em: 01 de maio de 2021.

OBMEP. **Regulamento**. 2020. Disponível em: <http://http://www.obmep.org.br/docs/16a_ OBMEP_ REGULAMENTO_ ESPECIAL.pdf>. Acesso em: 04 de jun. de 2021.

OBMEP. **OBMEP em números**. 2021. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/obmep_ em_ numeros.html>. Acesso em: 04 de jun. de 2021.

OBMEP. **OBMEP NA ESCOLA**. 2019. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/na-escola.htm>. Acesso em: 04 de jun. de 2021.

OBMEP. **Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC)**. 2021. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/pic.htm>. Acesso em: 04 de jun. de 2021.

OBMEP. **Programa de Iniciação Científica (PICME)**. 2017. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/picme.htm>. Acesso em: 04 de jun. de 2021.

OBMEP. **Preparação Especial para Competições Internacionais (PECI)**. 2009. Disponível em: <http://www.obmep. org.br/peci.htm>. Acesso em: 04 de jun. de 2021.

ONUCHIC, L. de L. R. **Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas**. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas. São Paulo: Unesp, 1999. p. 199-218.

PIAGET, Jean; FIÚZA, Rubens. **A representação do mundo na criança**. 1967.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: interciência, v. 2, 1978.

RIBEIRO, Filomena. **Motivação e aprendizagem em contexto escolar**. Profforma, v. 3, p. 1-5, 2011.

RODRIGUES, L. L. **A Matemática ensinada na escola e a sua relação com o cotidiano**. Brasília: UCB, 2005.

ROMANATTO, Mauro Carlos. **Resolução de problemas nas aulas de Matemática**. Revista Eletrônica de Educação, v. 6, n. 1, p. 299-311, 2012.

RODRIGUES, Adriano; MAGALHÃES, Shirlei Cristina.**A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NAS AULAS DE MATEMÁTICA: diagnosticando a prática pedagógica**. S.I. Disponível em http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/setembro2012/matematica_artigos/artigo_ rodrigues_magalhaes.pdf. Acesso em: 04 de jun. de 2021.

ROQUE, Tatiana; DE CARVALHO, João Bosco Pitombeira. **Tópicos de história da matemática**. 2012.

SHINE, C.Y. **Aulas de matemática olímpica**. Rio de Janeiro, SBM, 2009.

STRAUSS, A. (2008). **Pesquisa qualitativa: técnicas e procedimentos para o desenvolvimento de teoria fundamentada**. Artmed, Porto Alegre, 2008.

SUDBRACK, Edite Maria; COCCO, Eliane Maria. **Olimpíada de matemática das escolas públicas e avaliação em larga escala: contribuições à qualidade educativa**. Revista Pleiade, v. 12, n. 12, p. 55-72, 2012.

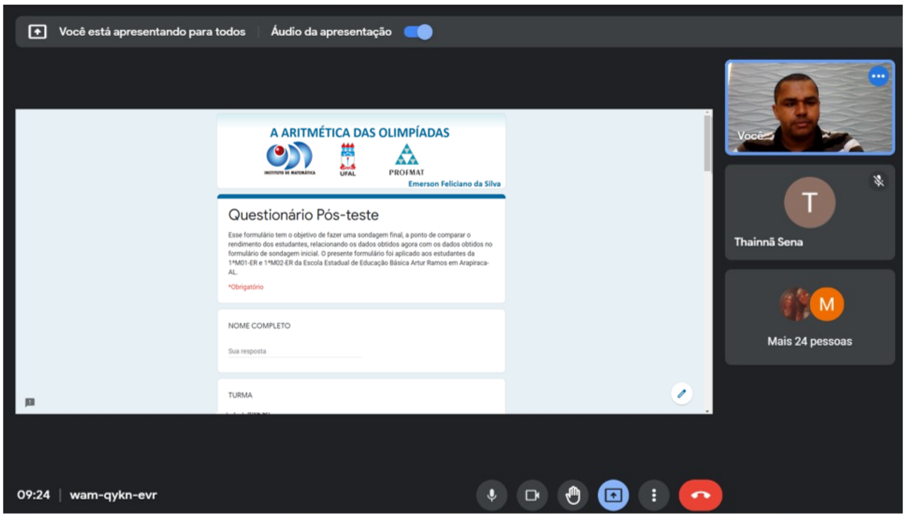
VASCONCELLOS, Celso dos S. **Planejamento: projeto de ensino-aprendizagem e projeto político-pedagógico**. São Paulo: Libertad, 2008.

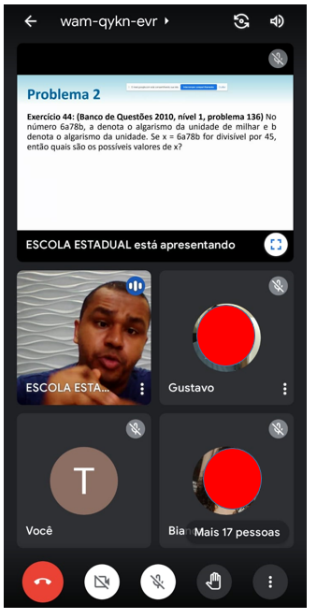
VASCONCELLOS, Fernando de Almeida e. **História das matemáticas na antiguidade**. Lisboa: Aillaud e Bertrand, 1925.

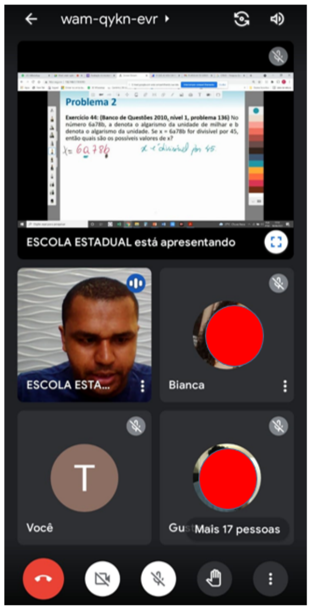
VYGOTSKY, Lev Semyonovich. **A formação social da mente**. 5. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1994.

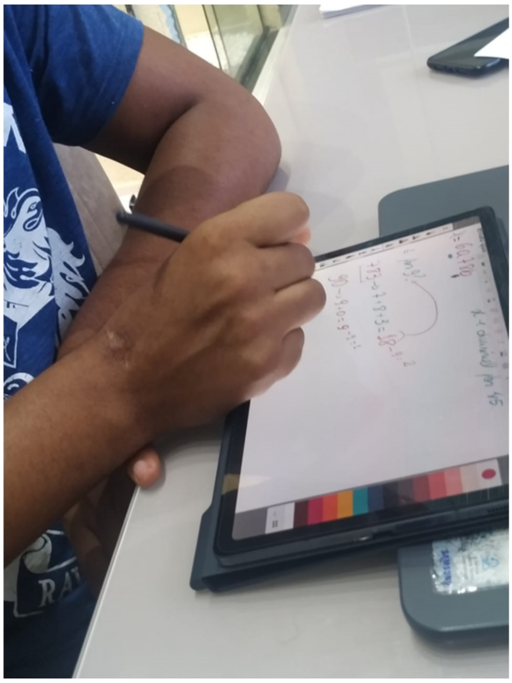
ZABALA, Antoni. **A prática educativa: como ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 1998.

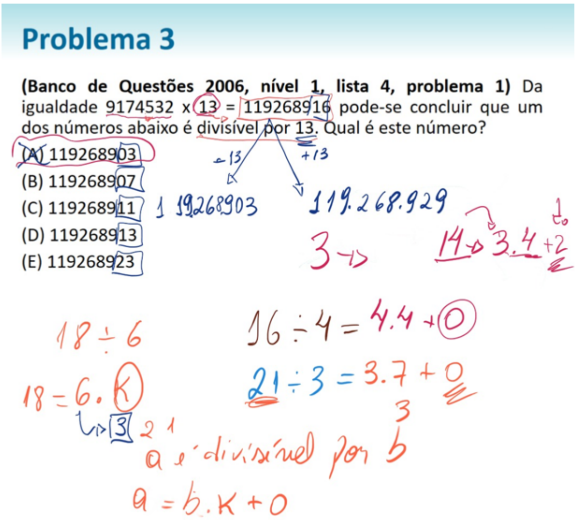
APÊNDICE A – CAPTURAS DE TELA

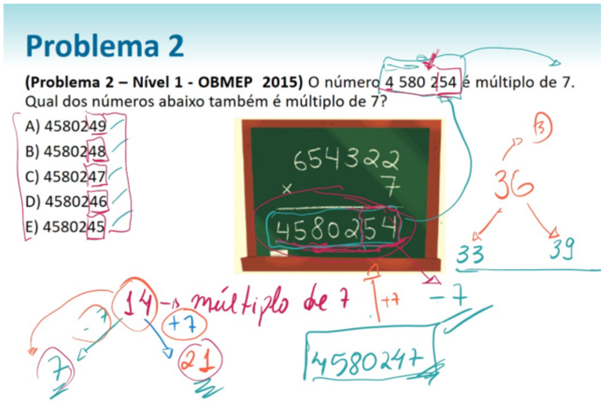









Problema 3
(Banco de Questões 2006, nível 1, lista 4, problema 1) Da igualdade 9174532 x 13 = 119268916 pode-se concluir que um dos números abaixo é divisível por 13. Qual é este número?
(A) 119268903
(B) 119268907
(C) 119268911
(D) 119268913
(E) 119268923
119.268.929
16 ÷ 4 = 4.4 + 0
21 ÷ 3 = 3.7 + 0
18 ÷ 6
18 = 6.K
a é divisível por b
a = b.K + 0


Problema 2
(Problema 2 – Nível 1 - OBMEP 2015) O número 4 580 254 é múltiplo de 7. Qual dos números abaixo também é múltiplo de 7?
A) 4580249
B) 4580248
C) 4580247
D) 4580246
E) 4580245
654322
x 7
4580254
14 múltiplo de 7
4580247

APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO PRÉ-TESTE

Questionário Pré-teste

Esse formulário tem o objetivo de fazer uma sondagem inicial sobre o conhecimento de aritmética dos estudantes da 1ªM01-ER e 1ªM02-ER da Escola Estadual de Educação Básica Artur Ramos em Arapiraca-AL.

*Obrigatório

NOME COMPLETO *

Sua resposta

TURMA *

- ○ 1ªM01-ER
- ○ 1ªM02-ER

1 – O que é um número primo? * 1 ponto

Sua resposta

2 – Dos números a seguir, qual NÃO É um número primo? * 1 ponto

- ○ 7
- ○ 8
- ○ 11
- ○ 13

3 – O que é um número composto? * 1 ponto

Sua resposta

4 – Dos números a seguir, qual é um número composto? * 1 ponto

- ○ 25
- ○ 31
- ○ 29
- ○ 11

5 – Das opções a seguir, qual delas têm dois divisores de 72? * 1 ponto

- ○ 4 e 5
- ○ 8 e 5
- ○ 3 e 8
- ○ 4 e 7
- ○ 8 e 11

6 – Qual a forma fatorada em fatores primos do número 72? * 1 ponto

- ○ $2^3.3^2$
- ○ $2^2.3^3$
- ○ 2.3^3
- ○ $2.3.5^2$

7 – Quantos múltiplos COMUNS de 2 e 3 há de 1 a 20? * 1 ponto

- ○ 3
- ○ 0
- ○ 1
- ○ 2

8 – Qual dos números a seguir NÃO É múltiplo de 6? * 1 ponto

- 333
- 120
- 234
- 326
- 612

9 – Meu irmão foi viajar com a turma do curso de matemática. Quantos estudantes haviam na viagem, sabendo que eram menos de 50 e que podemos contá-los de 9 em 9 ou de 12 em 12? * 1 ponto

- 36
- 27
- 24
- 48

10 – Os números 48 e 64 têm divisores comuns. Qual é o maior deles? * 1 ponto

- 16
- 18
- 24
- 8

Enviar

APÊNDICE C – RESPOSTAS DO QUESTIONÁRIO PRÉ-TESTE

Questionário Pré-teste

17 respostas

Publicar análise

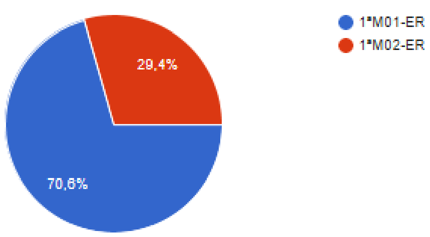
NOME COMPLETO

17 respostas

[redacted]

TURMA

17 respostas



1 – O que é um número primo?

17 respostas

Um que se divide por 1 e ele mesmo

E um número que so se divide por 2 número que são por 1 e por ele

mesmo Número que tem apenas dois divisores 1 e ele mesmo

Qualquer número cujo conjunto não inversiveis não é vazio

È o número que divide por um e por ele mesmo.

Os números primos são os números naturais que só são divididos por um fator.

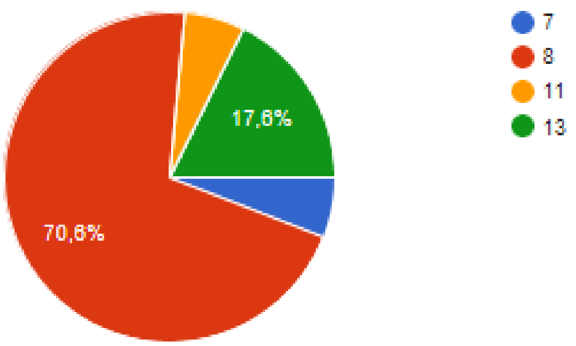
Números que são divisiveis apenas por 1 e por ele mesmo.

Número divisível por 1 e por ele mesmo.

Número primo e qualquer número cujo conjunto dos divisores não inversiveis não e vazio

2 – Dos números a seguir, qual NÃO É um número primo?

17 respostas



3 – O que é um número composto?

17 respostas

Números naturais que possuem mais de dois divisores.

E um número que se divide por mais que dois números

Número divisível por 2

Quando tem mais de dois divisores naturais

O número composto da pra de divide por dois ou por mais números.

Quando um número natural composto tem mais de dois divisores

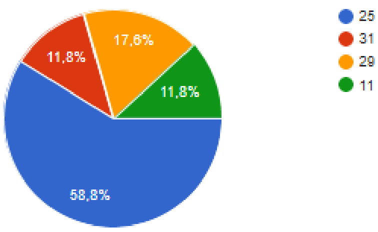
Números que são dividos além de dois números.

Número que divisível por mais de 2 números.

Número e quando tem mais de dois divisores naturais distintos

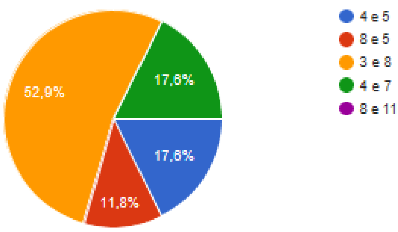
4 – Dos números a seguir, qual é um número composto?

17 respostas



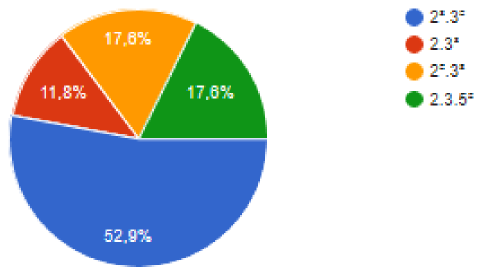
5 – Das opções a seguir, qual delas têm dois divisores de 72?

17 respostas



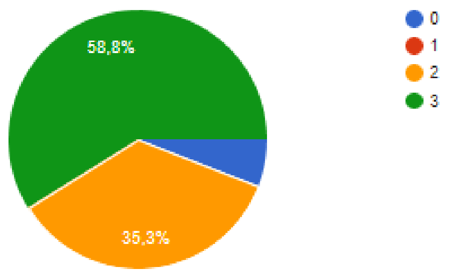
6 – Qual a forma fatorada em fatores primos do número 72?

17 respostas



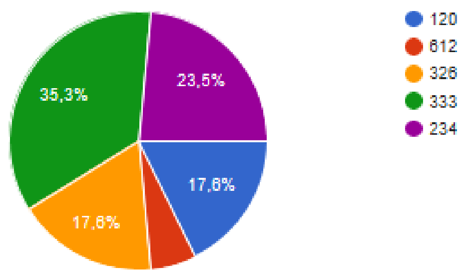
7 – Quantos múltiplos COMUNS de 2 e 3 há de 1 a 20?

17 respostas



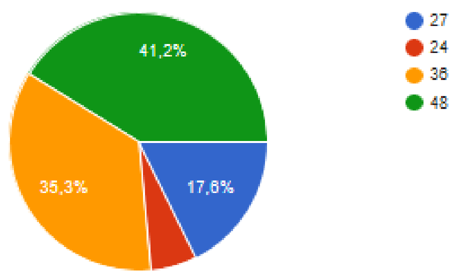
8 – Qual dos números a seguir NÃO É múltiplo de 6?

17 respostas



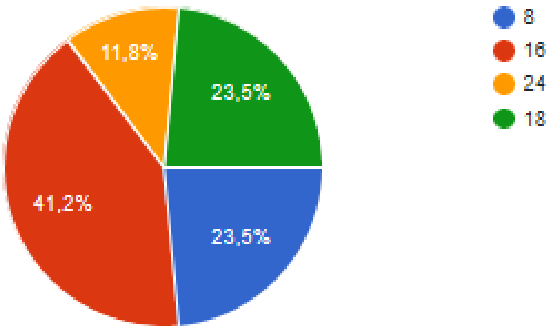
9 – Meu irmão foi viajar com a turma do curso de matemática. Quantos estudantes haviam na viagem, sabendo que eram menos de 50 e que podemos contá-los de 9 em 9 ou de 12 em 12?

17 respostas



10 – Os números 48 e 64 têm divisores comuns. Qual é o maior deles?

17 respostas



APÊNDICE D – QUESTIONÁRIO PÓS-TESTE

Questionário Pós-teste

Esse formulário tem o objetivo de fazer uma sondagem final, a ponto de comparar o rendimento dos estudantes, relacionando os dados obtidos agora com os dados obtidos no formulário de sondagem inicial. O presente formulário foi aplicado aos estudantes da 1ªM01-ER e 1ªM02-ER da Escola Estadual de Educação Básica Artur Ramos em Arapiraca-AL.

*Obrigatório

NOME COMPLETO

Sua resposta

TURMA

○ 1ªM01-ER

○ 1ªM02-ER

1 - O que é um número primo? * 1 ponto

Sua resposta

2 - Dos números a seguir, qual NÃO É um número primo? * 1 ponto

○ 2

○ 3

○ 4

○ 5

3 - O que é um número composto? * 1 ponto

Sua resposta

4 – Dos números a seguir, qual é um número composto? * 1 ponto

- ○ 5
- ○ 6
- ○ 7
- ○ 11

5 – Das opções a seguir, qual delas têm dois divisores de 45? * 1 ponto

- ○ 3 e 10
- ○ 7 e 9
- ○ 8 e 6
- ○ 3 e 5
- ○ 2 e 9

6 – Qual a forma fatorada em fatores primos do número 120? * 1 ponto

- ○ $2^3.3.5$
- ○ $2.3^3.5$
- ○ $2^3.3^2.5$
- ○ $2.3.5^2$

7 – Quantos múltiplos COMUNS de 3 e 5 há de 1 a 31? * 1 ponto

- ○ 0
- ○ 1
- ○ 2
- ○ 3

8 – Qual dos números a seguir NÃO É múltiplo de 15? * 1 ponto

- 135
- 315
- 555
- 785
- 915

9 – Minha avó foi viajar com a turma de melhor idade do bairro. Quantos idosos haviam na viagem , sabendo que eram menos de 60 e que podemos contá-los de 8 e 8 ou de 10 em 10? * 1 ponto

- 40
- 32
- 18
- 24

10 – Os números 54 e 72 têm divisores comuns. Qual é o maior deles? * 1 ponto

- 6
- 9
- 18
- 24

Enviar

APÊNDICE E – RESPOSTAS DO QUESTIONÁRIO PÓS-TESTE

Questionário Pós-teste

23 respostas

Publicar análise

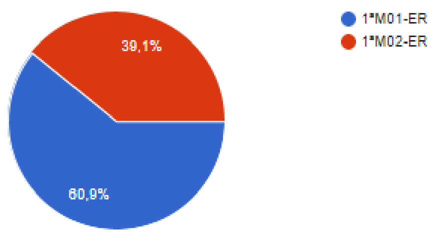
NOME COMPLETO

23 respostas

[redacted]

TURMA

23 respostas



1 – O que é um número primo?

23 respostas

Um números que pôde ser divididos por 1 e por ele mesmo

É qualquer número P dos conjuntos dos divisores inversiveis.

Número que não dá pra dividir por ele.

Os números primos são os números naturais que podem ser divididos por apenas dois fatores: o número um e ele mesmo.

Tive dificuldade nessa parte

0,2,4,6 é 8

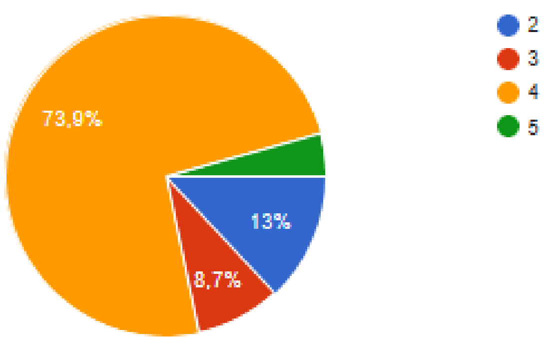
Números primos são os números naturais que têm apenas dois divisores diferentes

São aqueles que é dividido por um e por ele mesmo

Número primo é qualquer número p cujo conjunto dos divisores não inversíveis não é

2 – Dos números a seguir, qual NÃO É um número primo?

23 respostas



3 – O que é um número composto?

23 respostas

Um número composto que tem mais números naturais

Número que tem mais de dois divisores naturais.

Que da pra ser dividido por ele e por mais números.

Um número natural é composto quando tem mais de dois divisores naturais distintos.

Multiplicado por todos é por ele mesmo

2,3,5,11,13,17,19,23,29,31

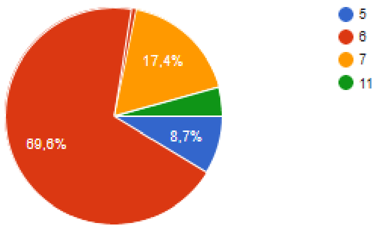
Um número composto é um número que é divisível por mais de dois números

São números naturais que possuem mais de dois divisores

Um número composto quando tem mais de dois divisores naturais distintos.

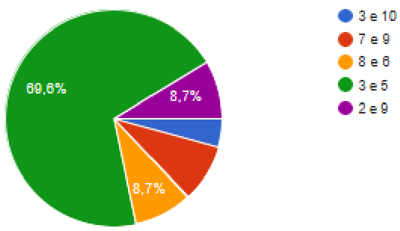
4 – Dos números a seguir, qual é um número composto?

23 respostas



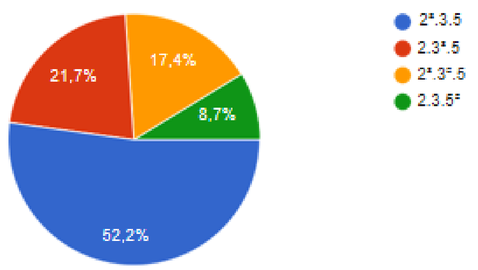
5 – Das opções a seguir, qual delas têm dois divisores de 45?

23 respostas



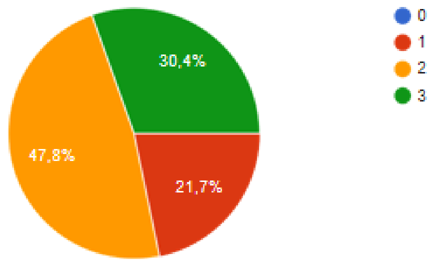
6 – Qual a forma fatorada em fatores primos do número 120?

23 respostas



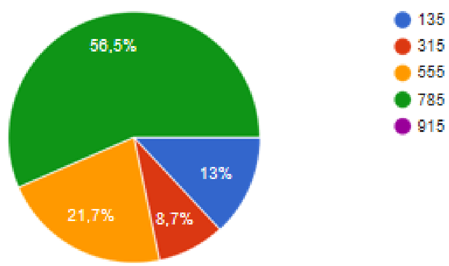
7 – Quantos múltiplos COMUNS de 3 e 5 há de 1 a 31?

23 respostas



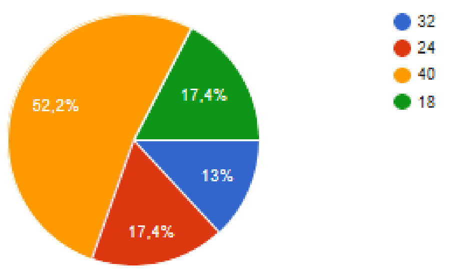
8 – Qual dos números a seguir NÃO É múltiplo de 15?

23 respostas



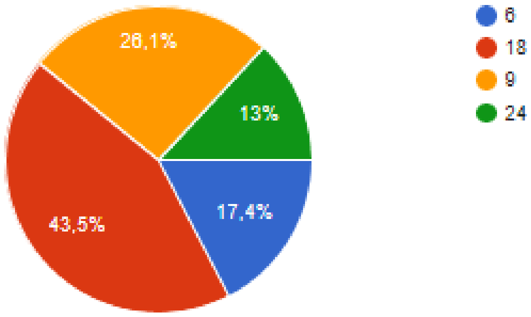
9 – Minha avó foi viajar com a turma de melhor idade do bairro. Quantos idosos haviam na viagem , sabendo que eram menos de 60 e que podemos contá-los de 8 e 8 ou de 10 em 10?

23 respostas



10 – Os números 54 e 72 têm divisores comuns. Qual é o maior deles?

23 respostas



APÊNDICE F – QUESTIONÁRIO INVESTIGATIVO

Questionário investigativo

Formulário de avaliação da atividade da sequência didática aplicada nas turmas do 1ªM01-ER e 1ªM02-ER da Escola Estadual de Educação Básica Artur Ramos em Arapiraca-AL.

O que achou da sequência didática

- Ótimo
- Bom
- Regular
- Não gostei

O mais gostou?

Sua resposta

O que menos gostou?

Sua resposta

Sugestões e críticas

Sua resposta

Elogios

Sua resposta

Enviar

Nunca envie senhas pelo Formulários Google.

APÊNDICE G – RESPOSTAS DO QUESTIONÁRIO INVESTIGATIVO

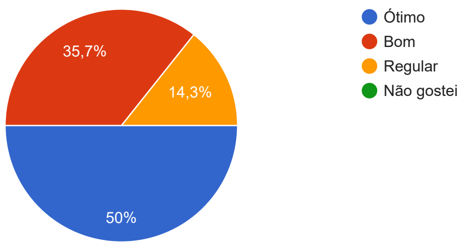
Questionário investigativo

14 respostas

Publicar análise

O que achou da sequência didática

14 respostas



O mais gostou?

13 respostas

Gostei de tudo praticamente. Muitas dessas questões eu não acertaria se não tivesse essas explicações.

De como a gente relembrou o passado

Relembrar os assuntos que acabam caindo no esquecimento.

Das explicações

Sei lá

Tudo, um pouco difícil mas compreendi

A explicação foi ótimo

Halloween.

Eu so n tive como assistir direito por conta que estou sem celular ...mas o pouco q

APÊNDICE H – RESPOSTA DO QUESTIONÁRIO INVESTIGATIVO

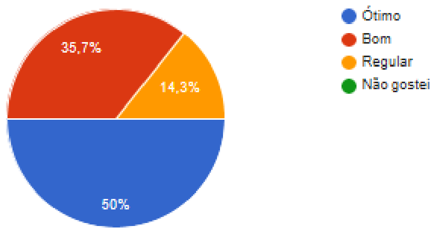
Questionário investigativo

14 respostas

Publicar análise

O que achou da sequência didática

14 respostas



O mais gostou?

13 respostas

Gostei de tudo praticamente. Muitas dessas questões eu não acertaria se não tivesse essas explicações.

De como a gente relembrou o passado

Relembrar os assuntos que acabam caindo no esquecimento.

Das explicações

Sei lá

Tudo, um pouco difícil mas compreendi

A explicação foi ótimo

Halloween.

Eu so n tive como assistir direito por conta que estou sem celular ...mas o pouco q

O que menos gostou?

12 respostas

Não teve oq eu menos gostei.

Para mim foi muito bom,gostei dessa aula.

.

Sei lá

Nada a declarar.

Não tem nada que eu não tenha gostado

Hmm, Halloween.

Sem reclamações!

Que algumas coisas não entendi

Sugestões e críticas

10 respostas

Eu só queria que toda semana nois tivéssemos essas aulas até a prova.

Não tenho críticas

Não fui ruim

Nenhuma.

.

An, halloween, halloween

Nenhuma

Teste bem feito

Nenhuma

Elogios

12 respostas

Achei maravilhoso. Vou estudar bastante pra fazer essa prova.

Parabéns por esse momento de aprendizagem

MUITO BOM

Tava até bom o assunto

Muito bom, parabéns.

Explicação perfeita, entendi muito bem e aprendi mais sobre os múltiplos

HALLOWEEN!

Não seii!

Foi ótimo

APÊNDICE I – SLIDES USADOS NAS AULAS

A ARITMÉTICA DAS OLIMPÍADAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA — UFAL — PROFMAT

Emerson Feliciano da Silva
1º Momento

O que veremos hoje

- Apresentação da proposta;
- Aritmética na história;
- O poder transformador da OBMEP;
- Questionário de sondagem;
- Considerações finais do encontro;

Apresentação da proposta

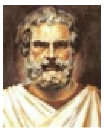
- O presente trabalho consiste na aplicação de uma sequência didática nas turmas da primeira sério do Ensino Médio da Escola Estadual de Educação Básica Artur Ramos.
- A sequência em questão é constituida em três etapas: na primeira etapa será apresentada a temática a ser trabalhada, a metodologia, trataremos sobre as olimpiadas de matemática e ao fim desse momento realizar uma avaliação diagnóstica visando mensurar o nivel de conhecimentos dos estudantes sobre aritmética.

Apresentação da proposta

- Na segunda etapa, o iremos abordar os conceitos de aritmética a partir de algumas questões de edições anteriores da OBMEP e de seu Banco de Questões. A abordagem será realizada de maneira dialógica e a partir da resolução de problemas.
- Na última etapa, será realizada uma discussão e reflexão sobre os conceitos envolvidos nos problemas tratados na etapa anterior, visando uma aprendizagem efetiva sobre os métodos e estratégias envolvidas na resolução de cada um. Nessa etapa final será aplicado um questionário para que seja realizado o levantamento de dados e posteriormente a comparação dos dados do antes e depois da sequência didática.

Aritmética na história;

A palavra aritmética é de origem grega, derivada da palavra arithmos que significa "número".



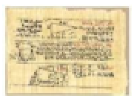
A origem da aritmética se confunde com a origem do estudo da matemática, alguns historiadores relatam que a o estudo da matemática surgiu na Grécia com Tales de Mileto (640-546 a.C.).

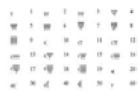
Aritmética na história;

Evidencias de relacionadas à contagem em Ishango, na África, e datado entre vinte mil e dez mil anos a.E.C.

Figura 1.1 O osso de Ishango

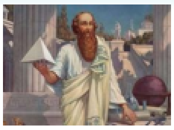
A matemática na Babilônia e no Antigo Egito





Aritmética na história;

Um outro nome a se considerar é Pitágoras de Samos (580-500 a.C.) e sua escola que também foram responsáveis por difundir a matemática pela Grécia e região



Com todo esse retrospecto positivo de estudos e difusão da matemática na Grécia, uma obra fundamental da aritmética surge: "O Elementos" de Euclides (aprox. 300 a.C.).

Aritmética na história;

No século XVII com as contribuições de Pierre de Fermat (1601 - 1665) um dos maiores de sua época, grande estudioso da aritmética Fermat exerce grande influência sobre os estudos da aritmética, contribuindo significativamente para o desenvolvimento da álgebra.

Um outro matemático que teve grande influência para a evolução da aritmética foi Lehonard Euler (1707 - 1783), que demonstrou quase todos os teoremas de Fermat, o único que ele não demonstrou foi o "Último Teorema de Fermat".

Aritmética na história;

Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) conhecido como "O príncipe da matemática" em livro "Disquisitiones Arithmeticaé' (Pesquisas Aritméticas) ele descreve a notações da Teoria dos Números, nele há a notação b≡c (mod a), para relação de congruência, que é uma relação de equivalência.

Uma das grandes contribuições para a matemática, e porque não para a aritmética, são os **axiomas de Peano**, são um conjunto de axiomas para os números naturais apresentado pelo matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932).

O poder transformador da OBMEP

- A OBMEP é realizada desde 2005;
- Como funciona;
- Os prêmios dados aos vencedores;
- Vídeo dos vencedores da OBMEP;

Questionário de sondagem

Vocês vão ter 10 minutos para responder o questionário de sondagem.

Considerações finais

Obrigado a todos pela presença!
Até a próxima

A ARITMÉTICA DAS OLIMPÍADAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA UFAL PROFMAT

Emerson Feliciano da Silva
2º Momento

O que veremos hoje

- E na aula anterior...
- Desenvolvendo as habilidades com a OBMEP;
- Múltiplos de um número;
- Sequência dos múltiplos de um número;
- Divisores de um número;

E na aula anterior...

- Aritmética na linha do tempo;
- Os caminhos olímpicos;
- Sobre o questionário de sondagem.

Habilidades de Hoje

Hoje iremos desenvolver as seguintes habilidades da Base Nacional Comum Curricular

(EF06MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor.

Problema 1

Problema 8 – Nível 2 - (Ano 2005) Quantos números inteiros, múltiplos de 3, existem entre 1 e 2005?

Problema 1

Solução Sugerida

Os múltiplos de 3 maiores do que 1 e menores do que 2005 são os números 3×1, 3×2, 3×3, ..., $3 \times n$ onde $3 \times n$ é o maior múltiplo de 3 menor do que 2005. Usando o algoritmo da divisão, podemos escrever $2005 = 3 \times 668 + 1$ e segue que $n = 668$.

Problema 1

Comentários sobre o problema

O conceito de múltiplo de um número é bem explorado nesse problema, uma vez que para ter um desenvolvimento contínuo na resolução, se faz necessário o conhecimento do tema. Além disso, compreender que possamos construir a sequência dos múltiplos maiores que 0 de um número, a partir da multiplicação desse número por 1, 2, 3 e assim sucessivamente. Como no problema em questão:

m(3) = 3x1, 3x2, 3x3, 3x4, 3x5, 3x6, ... 3xn

Problema 1

Comentários sobre o problema

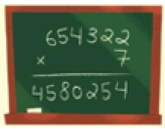
Veja que para encontrarmos o último múltiplo antes de 2005 devemos dividir 2005/3 = 668x3 +1.

Logo o 668x3 é o último múltiplo de 3 antes de 2005. A escrita da sequência dos múltiplos dessa forma, faz com que os números 1, 2, 3, 4, 5, ... , 668 sejam os marcadores da quantidade de múltiplos até um certo número. Essa visão é de grande valia na resolução de problemas desse tipo envolvendo múltiplos, possibilitando assim trabalhar para desenvolver a habilidade (EF06MA06) .

Problema 2

(Problema 2 – Nível 1 - OBMEP 2015) O número 4 580 254 é múltiplo de 7. Qual dos números abaixo também é múltiplo de 7?

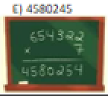
A) 4580249
B) 4580248
C) 4580247
D) 4580246
E) 4580245



Resolvendo com a turma

(Problema 2 – Nível 1 - OBMEP 2015) O número 4 580 254 é múltiplo de 7. Qual dos números abaixo também é múltiplo de 7?

A) 4580249
B) 4580248
C) 4580247
D) 4580246
E) 4580245



Problema 2

Solução Sugerida

Como 4580247 = 4580254 – 7, concluímos que 4580247 é múltiplo de 7. Este fato também pode ser verificado diretamente, efetuando-se a divisão e notando-se que o resto obtido é zero. Observe ainda quais são os restos das divisões por 7 para os números presentes nas demais alternativas:

4580249 = 7 x 654321 + 2, 4580248 = 7 x 654321 + 1,
4580246 = 7 x 654320 + 6 e 4580245 = 7 x 654320 + 5.

Problema 2

Comentários sobre o problema

Um problema sutil e bem interessante, o conceito de múltiplo e divisor de um número é necessário para alcançar a resposta pretendida. Compreender ainda que ao somar ou subtrair um número *n* ao seu múltiplo, obteremos um outro múltiplo de *n* é de grande valia para resolver problemas como esse. Veja que uma outra alternativa seria dividir cada uma das alternativas por 7, o que demandaria um tempo bem maior do que simplesmente subtrair 7 do múltiplo dado.

Problema 2

<u>Comentários sobre o problema</u>

Caso o caminho de testar fosse seguido, também demandaria de um outro conceito que é o de divisibilidade e notar que se um número a é divisível por um número b(deixa resto zero), podemos concluir que a é múltiplo de b, caso contrário não será.Um problema que pode ser explorado, se tornando um aliado no desenvolvimento da habilidade. (EF06MA06) .

Problema 3

(Banco de Questões 2006, nível 1, lista 4, problema 1) Da igualdade 9174532 x 13 = 119268916 pode-se concluir que um dos números abaixo é divisível por 13. Qual é este número?

(A) 119268903

(B) 119268907

(C) 119268911

(D) 119268913

(E) 119268923

Problema 3

<u>Solução Sugerida</u>

Como 119268916 é divisível por 13, podemos concluir que os números divisíveis por 13 são aqueles obtidos somando-se ou subtraindo-se múltiplos de 13 ao número 119268916. Dentre os números apresentados, o número 119268916 x 13 = 119268903 é o único divisível por 13.

Problema 3

<u>Comentários sobre o problema</u>

Essa relação de divisor e múltiplo tem que está clara na concepção operatória dos estudantes, uma vez que dizer que *um número a é múltiplo de outro b* é o mesmo que dizer que *b divide a*. Além disso, conhecer inicialmente o que são as sequências dos múltiplos de um número também é fundamental para resolver problemas desse tipo com mais clareza e sem maiores dificuldades. O problema ainda trás o número 13, o qual podemos fazer um link e abordar o conceito de números primos.

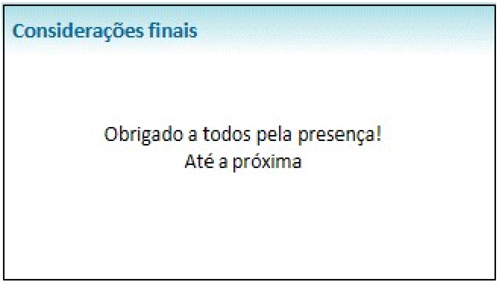
Problema 3

<u>Comentários sobre o problema</u>

De um modo geral, os conceitos de múltiplos e divisores também nos remetem a habilidade (EF06MA06) que pode muito bem ser explorada com esse problema.

Uma breve revisão

- Múltiplos de um número;
- Sequência dos múltiplos de um número;
- Divisores de um número;


Considerações finais
Obrigado a todos pela presença!
Até a próxima

A ARITMÉTICA DAS OLIMPÍADAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA UFAL PROFMAT

Emerson Feliciano da Silva
3º Momento

O que veremos hoje

- E na aula anterior...
- Desenvolvendo as habilidades com a OBMEP;
- Números primos e números compostos ;
- O Crivo de Eratóstenes;
- Critérios de divisibilidade de 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 e 10
- Uma breve revisão;

E na aula anterior...

- Múltiplos e divisores

Habilidade da BNCC

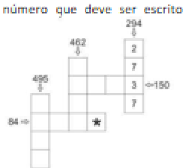
Hoje iremos desenvolver as seguintes habilidades da Base Nacional Comum Curricular

(EF06MA05) Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos "é múltiplo de", "é divisor de", "é fator de", e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000.

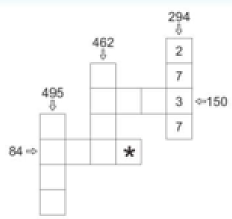
Problema 1

(Problema 7 – Nível 1 - OBMEP 2019) As casas da figura abaixo devem ser preenchidas com números primos. Em cada linha ou coluna, o produto dos números deve ser igual ao número indicado pela seta. A coluna indicada por 294 já está preenchida. Qual é o número que deve ser escrito na casa marcada com *?

A) 2
B) 3
C) 5
D) 7
E) 11



Resolvendo com a turma



Problema 1

Solução Sugerida

Inicialmente, observamos que as decomposições em fatores primos dos números que aparecem no enunciado são:

462 = 2.3.7.11

150 = 2.3.5.5

495 = 3.3.5.11

84 = 2.2.3.7

Na interseção de 150 com 462, deve aparecer o 2, pois o 3 já está na interseção de 150 com 294.

Problema 1

Solução Sugerida

A interseção de 495 com 84 deve ser preenchida com o 3, pois é o único fator primo comum entre esses dois números. Desta forma, sobra o 7 para a interseção de 462 com 84.

Então, como a fatoração do 84 é 3 . 2 . 7 . 2, concluímos que $*$ = 2.

Problema 1

Comentários sobre o problema

Um problema bem elaborado, que chama atenção por sua construção e exige atenção de quem está resolvendo, principalmente aos pontos chaves que são aqueles das interseções(divisor primo comum) das formas fatoradas dos números dados. O conhecimento dos números primos, números compostos e da fatoração de um número composto são elementos fundamentais para chegar a resolução do problema. O problema em si é uma ótima opção para que possamos desenvolver a habilidade (EF06MA05) .

Problema 2

(Banco de Questões 2010, nível 1, problema 136) No número 6a78b, a denota o algarismo da unidade de milhar e b denota o algarismo da unidade. Se x = 6a78b for divisível por 45, então quais são os possíveis valores de x?

Problema 2

Solução Sugerida

Como o número x é múltiplo de 45 = 5.9, ele também é um múltiplo de 5 e de 9. Todos os múltiplos de 5 terminam em 0 ou em 5. Daí o número procurado tem a forma x = 6a780 ou a forma x = 6a785. Agora vamos achar o algarismo a, sabendo que para ser múltiplo de 9 a soma dos algarismos de x deve ser um múltiplo de 9.

Problema 2

Solução Sugerida

- Se x = 6a780 então 6+a+7+8+0 = 21+a deve ser um múltiplo de 9. A única possibilidade e 21+a = 27 donde a = 6 e x = 66780.
- Se x = 6a785 então 6+a+7+8+5 = 26+a deve ser um múltiplo de 9.

A única possibilidade é 26+a = 27 donde a = 1 e x = 61785.
Portanto o número procurado é x = 66780 ou x = 61785.

Problema 2

Comentários sobre o problema

O problema é interessante, pois nas entrelinhas podemos observar que para resolvê-lo é necessário ter uma visão além dos critérios de divisibilidade de forma isolada, uma vez que não estudamos os critérios de divisibilidade de 45, entretanto ao analisar que 45=9.5, podemos concluir que um número que é divisível por 45 também será divisível por 9 e por 5. De posse desses critérios o problema é tranquilamente resolvido sem maiores complicações, o que nos possibilita desenvolver a habilidade (EF06MA05).

Problema 3

(Banco de Questões 2010, nível 1, problema 169) Qual é o menor número de cinco algarismos divisível por 4 que se pode formar com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 9?

Problema 3

Solução Sugerida

Um número é divisível por 4 se o número formado pelos seus dois últimos algarismos for divisível por 4. Assim, usando apenas os algarismos 1, 2, 3, 4 e 9, as únicas possibilidades para os dois últimos algarismos do número procurado são 12, 24, 32 ou 92. Como 9 é o maior algarismo, devemos coloca-lo "o mais a direita possível", de modo que 9 deve ser o algarismo da casa das dezenas, ou seja, nosso número termina com 92.

Problema 3

Solução Sugerida

Os outros algarismos 1, 3 e 4, devem aparecer em ordem crescente a esquerda de 92, ou seja, os três primeiros algarismos do numero devem ser 134. Portanto, o número procurado e 13492.

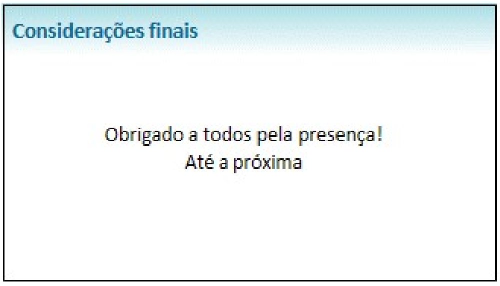
Problema 3

Comentários sobre o problema

O critério de divisibilidade por 4 é amplamente usando nesse problema de dois modos, inicialmente para identificar os números divisíveis por 4 na composição do número formado pelos dois últimos algarismos da direita que irá compor as opções de resposta e consequentemente a resposta final. Além disso, as tomadas decisões no que se refere a comparação dos números também tem grande relevância na composição do resultado final. Um problema clássico que explora bem a habilidade (EF06MA05) no que se refere aos critério de divisibilidade por 4.

Uma breve revisão

- O que são números Primos?
- O que são números compostos?
- Critérios de divisibilidade de 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 e 10


Considerações finais
Obrigado a todos pela presença!
Até a próxima

A ARITMÉTICA DAS OLIMPÍADAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA UFAL PROFMAT

Emerson Feliciano da Silva
4º Momento

O que veremos hoje

- E na aula anterior...
- Desenvolvendo as habilidades com a OBMEP;
- O que é o mdc e como se calcula;
- O que é o mmc e como se calcula;
- Uma breve revisão;

E na aula anterior...

- Relembrando os critérios de divisibilidade;

Habilidades de hoje

Hoje iremos desenvolver as seguintes habilidades da Base Nacional Comum Curricular

(EF07MA01) Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum, por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos.

Problema 1

(Banco de Questões 2010, nível 1, problema 28) Uma bibliotecária recebe 130 livros de Matemática e 195 livros de Português. Ela quer arrumá-los em estantes, colocando igual quantidade de livros em cada estante, sem misturar livros de Matemática e de Português na mesma estante. Quantos livros ela deve colocar em cada estante para que o número de estantes utilizadas seja o menor possível?

Problema 1

Solução sugerida

Denotando por *n* o número de livros que a bibliotecária vai colocar em cada estante, temos 130 *n* = número de estantes para os livros de Matemática e 195 *n* = número de estantes para os livros de Português. Isso mostra que *n* deve ser um divisor comum de 130 e de 195, pois o numero de estantes utilizadas e inteiro. Sabemos que, quando aumentamos o denominador de uma fração, esta fração diminui; por exemplo, 27=10 e menor do que 27=8. Logo, quanto maior for o denominador n, menores serão as frações 130=n e 195=n, o que significa que menor será o numero de estantes utilizadas. Vemos, assim, que n deve ser o maior comum de 130 e 195.

Problema 1

Como as decomposições destes números em fatores primos são $130 = 2.5.13$ e $195 = 3.5.13$, segue que o mdc de 130 e 195 é $5.13 = 65$. Logo, a bibliotecária vai colocar 65 livros em cada estante, o numero de estantes para os livros de Matemática e $130/65 = 2$ e o numero de estantes para os de Português e $195/65 = 3$, o que dá um total de $2 + 3 = 5$ estantes.

Problema 1

Comentários sobre o problema

Observe que resolvemos o problema indicado, sem a necessidade de utilizar o algoritmo para calcular o mdc, somente a partir da construção dos argumentos, pudemos sistematizar os dados, analisar a situação problema e encontrar a resposta. Para isso é necessário se ter em mente o conceito de divisor de um número e a clareza para concluir que ele é um divisor comum a outro número. Esses aspectos são justamente o que pretendemos desenvolver com a habilidade (EF07MA01), uma vez que estamos determinando o mdc sem propriamente utilizar o algoritmo.

Problema 2

(Banco de Questões 2010, nível 1, problema 158) No ponto de ônibus perto de sua casa, Quinzinho pode pegar os ônibus de duas linhas para ir á escola. Os ônibus de uma linha passam de 15 em 15 minutos e os da outra de 25 em 25 minutos, sendo que às 7h30m da manhã os ônibus das duas linhas passam juntos.

(a) A que horas passarão juntos novamente?

(b)Entre as 7h30min da manhã e a meia noite, quais são os horários em que os ônibus passam juntos neste ponto perto da casa de Quinzinho?

Problema 2

Solução sugerida

(a) Fatorando temos $15 = 3.5$ e $25 = 5^2$. Portanto o menor múltiplo comum de 15 e 25 é $75 = 3.5^2$. Assim, os dois ônibus passarão juntos novamente no ponto a cada 75 minutos, ou seja, a cada 1h15min. Logo, os ônibus passarão juntos novamente no ponto perto da casa de Quinzinho, as 7h30min + 1h15min = 8h45min.

Problema 2

Solução sugerida

(b) Para obter os horários em que os ônibus passarão juntos no ponto de ônibus perto da casa de Quinzinho, devemos ir somando 1h15min, obtendo 8h45min, 10h, 11h15min, 12h30min, 13h45min, 15h, 16h15min, 17h30min, 18h45min, 20h, 21h15min, 22h30min e 23h45min. O próximo ônibus só passa depois da meia noite.

Problema 2

Comentários sobre o problema

Do mesmo modo que o problema anterior, pudemos determinar o mmc sem a necessidade de utilizar o algoritmo propriamente dito.

No item a) uma outra alternativa seria fazer as sequências dos múltiplos não nulos de 15 e 25 e pegar a primeira interseção entre elas, ou seja, o primeiro número comum que aparecer.

15 – 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, ...

25 – 25, 50, 75, 100, 125, ...

Veja que o 75 indica que os ônibus irão passar novamente depois e 75 minutos, ou seja, 1h15min depois das 07:30.

Problema 2

Comentários sobre o problema

O fato de utilizar as horas e analisar a soma dos minutos as quais teremos sempre uma hora depois de cada 60 minutos, isso remete aos números de base 60 ou sistema sexagesimal utilizado por muito tempo pelos babilônios. Além disso, no item b) ao somar sempre 1h15min ao horário inicial, às 07:30, que é o horário que os dois ônibus passam simultaneamente, teremos uma P.A. cuja razão é 1h15min, onde a cada soma da "razão", a partir de 07:30, teremos o horário o qual os ônibus passarão simultaneamente e a partir daí podemos indicar os horários entre as 7h30min da manhã e a meia noite.

Problema 3

(Livro encontros de aritmética PIC, pág. 87, exercício 26)
Determine o menor número inteiro positivo de três algarismos que é divisível, ao mesmo tempo, por 4, 8 e 12.

Problema 3

Solução sugerida

Dizer que um número é divisível por 4, 8 e 12 é o mesmo que dizer que este número é um múltiplo, ao mesmo tempo, de 4, 8 e 12. Como sabemos, todos os múltiplos de 4, 8 e 12 são múltiplos do mmc(4; 8; 12) = 24. Como 2 x 24 = 48, 3 x 24 = 72, 4 x 24 = 96 e 5 x 24 = 120, concluímos que o menor número inteiro positivo de três algarismos que é divisível, ao mesmo tempo, por 4, 8 e 12 é o número 120.

Problema 3

Comentários sobre o problema

A ideia de múltiplo é fundamental para que o problema seja resolvido. Inicialmente para que seja determinado o mínimo múltiplo comum e em seguida para encontrar o menor múltiplo comum de três algarismos. Um ponto chave também é notar que o menor múltiplo comum de três algarismos que buscamos é um múltiplo do mmc. Como queremos o menor múltiplo de 24 com três algoritmos, basta fazer a sequências dos múltiplos de 24 e a resposta buscada será o primeiro número que possuir três algarismos.

Uma breve revisão

- O que é o MDC e como se calcula?
- O que é o MMC e como se calcula?

A ARITMÉTICA DAS OLIMPÍADAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA UFAL PROFMAT

Emerson Feliciano da Silva
5º Momento

Questionário de sondagem

Vocês vão ter 30 minutos para responder o questionário de sondagem e o questionário investigativo.

Considerações finais

Obrigado a todos pela presença!
Até a próxima