

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
INSTITUTO DE FÍSICA  
PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

JOÃO PAULO DE AMARAL

ESTUDO SOBRE GERAÇÃO E MANIPULAÇÃO DE FEIXES DE  
LUZ COM MOMENTO ANGULAR ORBITAL

Maceió

2020

JOÃO PAULO DE AMARAL

Estudo sobre Geração e Manipulação de Feixes de Luz com  
Momento Angular Orbital

Tese apresentada ao Instituto de Física da  
Universidade Federal de Alagoas, IF - UFAL,  
como parte dos requisitos para a obtenção do  
título de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Alcenísio José  
de Jesus Silva

Maceió

2020

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**

Bibliotecária: Taciana Sousa dos Santos – CRB-4 – 2062

A485e Amaral, João Paulo de.

Estudo sobre geração e manipulação de feixes de luz com momento angular orbital / João Paulo de Amaral. – 2020.

142 f. : il., figs. color.

Orientador: Alcenísio José de Jesus Silva.

Tese (Doutorado em Física) – Universidade Federal de Alagoas.  
Instituto de Física. Maceió, 2021.

Bibliografia: f. 131-142.

1. Momento angular orbital. 2. Feixes ópticos. 3. Feixes não difrativos.  
4. Cargas topológicas. I. Título.

CDU: 535



Universidade Federal de Alagoas

Instituto de Física

Programa de Pós Graduação em Física

BR 104 km 14. Campus A.C. Simões  
Cidade Universitária  
Tabuleiro dos Martins  
57072-970 Maceió - AL. Brasil  
FONE : (82) 3214-1423/FAX 3214-1645

**PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE  
TESE DE DOUTORADO**

“Estudo sobre geração e manipulação de feixes de luz  
com momento angular orbital”

por

João Paulo do Amaral \*

A Banca Examinadora composta pelos professores Alcenísio José de Jesus Silva (orientador e presidente da banca), do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Paulo Henrique Souto Ribeiro, da Universidade Federal de Santa Catarina, Willamys Cristiano Soares Silva, do Campus Arapiraca da Universidade Federal de Alagoas, Paulo Cesar Aguiar Brandão Filho, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas e Natália Rodrigues de Melo, da Universidade Federal Rural de Pernambuco, consideram o candidato **aprovado com grau** “A”.

Maceió, 6 de março de 2020

Prof. Dr. Alcenísio José de Jesus Silva

Prof. Dr. Paulo Henrique Souto Ribeiro

Prof. Dr. Willamys Cristiano Soares Silva

Prof. Dr. Paulo Cesar Aguiar Brandão Filho

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Natália Rodrigues de Melo

“Tenha em mente que tudo que você aprende na escola é trabalho de muitas gerações (...) Receba essa herança, honre-a, acrescente a ela e, um dia, fielmente, deposite-a nas mãos de seus filhos.”

Albert Einstein

# AGRADECIMENTOS

- Sair de onde sai e chegar onde cheguei me faz agradecer primeiramente a Deus por ter me abençoado e me protegido durante toda minha vida;
- Aos “meus pais” por toda a base familiar que me proporcionaram;
- À minha filha amada, Yara Rayanne, a quem dedico todo meu esforço e perseverança durante estes anos.
- À minha ex-esposa por ter dedicado parte de sua vida a mim;
- Ao meu orientador e amigo, professor Alcenísio, a quem serei eternamente grato pelo apoio, paciência e toda ajuda fornecida;
- Ao professor Eduardo pela disponibilidade em momentos difíceis de minha formação;
- Aos meus colegas de trabalho do GON: Daniel Bezerra, Danilo Gomes Pires, José Carlos, Jonathas Matias, Ana Rúbia, Elaine Cristina, Arthur Falqueto, Gilson Melo, e etc;
- Deixo aqui um agradecimento especial a meu amigo Job Saraiva por me ajudar na correção desta tese; ao meu amigo Givanildo, companheiro de batalha ao longo destes 6 anos; e a minha amiga Luana Regina pelo imensurável companheirismo;
- Registro também meu agradecimento a todos os colegas do Instituto de Física, aos que estão e aos que já saíram.

# RESUMO

Tendo em vista que a luz pode carregar momento angular orbital (MAO), nesta tese de doutorado investigamos, de maneira experimental e teórica, diversos aspectos de feixes ópticos com esta propriedade. Nossas investigações englobam geração de feixes com novas geometrias, conservação do MAO, separação e classificação de estados de MAO multiplexados tanto no cenário de luz coerente quanto incoerente e caracterização de vórtice incoerente via geometria da função de coerência. Em nosso primeiro trabalho mostramos, teórica e experimentalmente, um novo método de geração de feixes não difrativos que transportam MAO com formas geométricas arbitrárias através da parametrização de curvas simples. O comportamento não difrativo faz com que esses feixes sejam mais resistentes a turbulências atmosféricas, o que os torna bons canais para envio de informação em um sistema de comunicação óptica (CO), além de serem potencialmente aplicáveis na micromanipulação. Em seguida estudamos a conservação da carga topológica (CT) de modos Laguerre-Gauss (LG) difratados por aberturas arbitrárias. O caráter conservativo da CT implica na conservação do MAO. Desta maneira, sabendo que é possível codificar informação em estados de MAO, observa-se a importância deste estudo para COs, pois é esperado que os dados enviados em um sistema de COs sejam robustos na propagação. Em outra de nossas investigações, estados de MAO coerentes multiplexados foram separados e classificados por meio de um esquema de classificação de alta resolução. Esse mesmo esquema foi usado para classificar estados puros de MAO incoerentes. No cenário das COs, esta pesquisa contribui para a decodificação eficiente de informação, no aumento da capacidade de envio de dados e na segurança de um sistema óptico de comunicação. Por fim, exploramos aspectos geométricos da função de coerência da autocorrelação de vórtices ópticos incoerentes com o intuito de determinar a carga topológica de um dado estado de MAO espalhado. Este estudo também contribui para a decodificação eficiente de informação e na segurança de um sistema óptico de comunicação.

**Palavras-chave:** Feixes não difrativos. ondas planas. abertura genérica, função de coerência, carga topológica, singularidade de fase, vórtices. multiplexação e separação de estados de momento angular orbital.

# ABSTRACT

Given that light can carry orbital angular momentum (OAM), in this doctoral dissertation we investigated, in an experimental and theoretical manner, several aspects of optical beams with this property that could somehow contribute to advances in optical communications (OCs). Our investigations include beam generation with new geometries, conservation of OAM, separation and classification of multiplexed OAM states in the coherent and incoherent light scenario and incoherent vortex characterization via coherence function geometry. In our first work we show, theoretically and experimentally, a new method of generating non-diffractive beams that carry OAM with arbitrary geometric shapes through the parameterization of simple curves. The non-diffractive behavior makes these beams more resistant to atmospheric turbulence, which makes them good channels for sending information in a communication system besides being potentially applicable in micromanipulation. We then study the conservation of topological charge (TC) in Laguerre-Gauss (LG) modes diffracted by arbitrary openings. The conservative character of TC implies the conservation of OAM. Thus, knowing that it is possible to encode information in OAM states, the importance of this study for OCs is observed, since the data sent in a OC system is expected to be robust in propagation. In another of our investigations, coherent multiplexed OAM states were separated and classified using a high-resolution classification scheme. This same scheme was used to classify incoherent pure OAM states. In the OC scenario, this research contributes to the efficient decoding of information, increased data sending capacity and security of an optical communication system. Finally, we explore geometric aspects of the coherence function of autocorrelation of incoherent optical vortices in order to determine the CT of a given scattered OAM state. This study also contributes to the efficient decoding of information and the security of an optical communication system.

**Keywords:** Nondiffractive beams, plane waves, Generic aperture, coherence function, topological charge, phase singularity, vortex. multiplexing and sorter of states of angular orbital momentum.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>Vórtices Ópticos</b>	<b>12</b>
2.1	Equações de Maxwell e os Feixes Ópticos . . . . .	12
2.2	Feixe Laguerre-Gauss . . . . .	15
2.3	Feixe Bessel . . . . .	19
2.4	Holografia . . . . .	24
2.5	Conceitos Fundamentais sobre Singularidade de Fase . . . . .	27
2.5.1	Singularidades de Fase de um Campo Paraxial . . . . .	30
2.5.2	Carga Topológica . . . . .	34
2.5.3	Vórtices Ópticos Genéricos e não Genéricos . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Método Alternativo para Obtenção de Feixes Ópticos Não-difrativos</b>	<b>41</b>
3.1	Introdução . . . . .	41
3.2	Modelo Teórico para Gerar Feixes Não Difrativos a partir da Parametrização de Curvas Simples . . . . .	45
3.3	Resultados: Simulação e Experimento . . . . .	50
3.3.1	Simulação Numérica . . . . .	50
3.3.2	Resultados Experimentais . . . . .	55
<b>4</b>	<b>Estudo da Conservação da Carga Topológica em Difração por Aberturas</b>	<b>58</b>
4.1	Introdução . . . . .	58
4.2	Representação Teórica da Pertubação de Modos Laguerre-Gauss por uma Abertura Arbitrária . . . . .	62
4.3	Cálculo Exato do Padrão de Difração de Fraunhofer para Aberturas Triangulares e Quadradas . . . . .	65

4.4	Resultados Experimentais . . . . .	70
4.4.1	Recuperação de Fase . . . . .	73
<b>5</b>	<b>Separação de Estados de Momento Angular Orbital com Luz Espacialmente Coerente</b>	<b>79</b>
5.1	Introdução . . . . .	79
5.2	Separação de Estados de MAO Coerentes . . . . .	87
5.3	Modelo da Propagação para os Feixes Coerentes . . . . .	89
5.4	Simulação Numérica e Resultados Experimentais para a Classificação de Estados de MAO Puros . . . . .	89
5.5	Simulação Numérica e Resultados Experimentais para a Separação de Estados de MAO Multiplexados . . . . .	94
<b>6</b>	<b>Separação de Estados de Momento Angular Orbital com Luz Espacialmente Incoerente</b>	<b>99</b>
6.1	Introdução . . . . .	99
6.2	Fundamentos Básicos da Teoria de Coerência Óptica . . . . .	100
6.2.1	Função de Correlação Cruzada . . . . .	101
6.2.2	Luz parcialmente coerente gerada em laboratório . . . . .	104
6.2.3	Função de Correlação de Intensidade . . . . .	106
6.3	Separação de Vórtices Ópticos Incoerentes . . . . .	108
6.4	Modelo Teórico da Propagação para os Feixes Incoerentes . . . . .	110
6.5	Simulação Numérica e Resultados Experimentais . . . . .	113
<b>7</b>	<b>Uso da Geometria da Função de Correlação Cruzada do Campo Distante para Caracterizar um Estado de Momento Angular Orbital</b>	<b>117</b>
7.1	Introdução . . . . .	117
7.2	Modelo Teórico . . . . .	118
7.3	Simulação Numérica . . . . .	121
7.4	Resultados Experimentais . . . . .	124
<b>8</b>	<b>Conclusões</b>	<b>127</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>131</b>

# 1. Introdução

O estudo dos fenômenos luminosos fornece informações valiosas sobre o mundo macroscópico e microscópico ao nosso redor e também permite gravar, armazenar e transmitir essas informações [1]. Atualmente, o nível de conhecimento e de técnicas para manipulação da luz nos permite usá-la como ferramenta em diversos campos da ciência. Entretanto, para se chegar neste ponto, a pesquisa sobre as propriedades mecânicas da luz teve papel fundamental. Porém, ainda há muito o que explorar a respeito dessas propriedades.

As propriedades mecânicas da luz vêm sendo observadas há bastante tempo, pois já no século dezessete, em seus estudos de astronomia, Johannes Kepler sugeriu que as caudas dos cometas sempre apontam para longe do Sol devido a luz carrega um momento linear [2]. Contudo, o alicerce teórico, que tornou o estudo dessas propriedades mais palpável, foi sistematizado por James Clerk Maxwell, ao identificar a luz como uma onda eletromagnética. A teoria eletromagnética possibilitou que os cientistas passassem a saber que o momento carregado pela luz pode ser transferido para um objeto, empurrando-o.

Posteriormente a teoria eletromagnética de Maxwell, quem contribuiu significativamente para o entendimento das propriedades mecânicas da luz foi John Poynting. Pois, em 1905, foi ele quem desenvolveu a teoria da pressão de radiação e densidade de momento. Além de, em 1909, ter percebido que a luz polarizada tem momento angular - momento angular de spin de  $\pm\hbar$  por fóton, associado à polarização circular [3]. A primeira constatação experimental do efeito do momento angular de spin foi feita por Beth, em 1936 [4].

Outra contribuição relevante para o entendimento da luz com momento angular foi dada por Allen *et al*, em 1992. Eles propõem que as soluções da equação de Helmholtz (EH) que têm uma dependência de fase azimutal, da forma  $\exp(im\phi)$ , representam feixes de luz que carregam momento angular orbital de  $\pm m\hbar$  por fóton [5]. Por isso que atualmente é bem conhecido que o momento angular da luz é composto por uma componente intrínica (spin) e por uma componente orbital, o momento angular orbital (MAO). Para tal análise, foi utilizado os modos Laguerre-Gauss (LG), os quais constituem um conjunto completo de soluções da EH paraxial em coordenadas cilíndricas. Neste cenário,  $m$  é o índice azimutal do modo e  $\phi$  é o ângulo polar no referido sistema de coordenadas.

Entretanto, antes do trabalho de Allen, Durnin mostrou, em 1987, que a solução exata da EH representa feixes de luz que não mudam seu perfil de intensidade ao longo da propagação.

Para tal, ele analisou a solução exata da EH em coordenadas cilíndricas circulares, e obteve que a intensidade óptica do campo é proporcional a um modo Bessel [6]. Feixes com esta característica são referidos como não difrativos. Este trabalho teve grande importância devido ao fato de ser um evento bastante especial, uma vez que a difração é um fenômeno geralmente presente durante a propagação da luz.

O Trabalho de Allen *et al* juntamente com o fato de os modos Laguerre-Gauss serem espacialmente ortogonais faz surgir o interesse na utilização desses feixes para implementar sistemas de comunicação óptica com maior capacidade de transmissão de informação [7], pois esta classe de feixes permite a propagação de uma multiplexação espacial de diferentes estados azimutais, bem como a separação eficientemente dos mesmos.

Quando se pensa na utilização dos modos de luz espacialmente ortogonais para favorecer o desenvolvimento da comunicação óptica, em um aspecto amplo, a CT é o agente que representa a informação. Isso faz dos feixes ópticos que transportam MAO ferramenta interessantíssimas, pois já é conhecido que a CT de tais feixes se conserva durante a propagação da luz no espaço livre [8], através da atmosfera turbulenta [9], bem como quando um feixe é perturbado por uma abertura [10, 11].

Uma rápida revisão na literatura científica que trata do uso de feixes de luz com MAO, também conhecidos como vórtices ópticos (VO), na implementação de sistemas de comunicação óptica, percebemos que já há uma gama de trabalhos a respeito deste tema. Com base nisso, a seguir, citaremos algumas dessas produções para constatarmos a importância do estudo dos VO, tendo do ponto de vista do que já foi alcançado quanto do que ainda pode ser feito.

Por exemplo, Gibson *et al* [12] realizaram a transferência de informações codificadas como estados de MAO de um feixe de luz. Fickler *et al* [13] realizaram experimentalmente a transmissão de informações clássicas, codificadas em estados de MAO multiplexados como superposições de modos Laguerre-Gauss, através de 3 km de forte turbulência sobre a cidade de Viena. Em 2016, a técnica de Fickler foi significativamente melhorada por Krenn *et al* [14], pois eles reportaram uma realização experimental em que consta a transmissão de informações codificadas em estados de momento angular orbital a uma distância de 143 km. Outra contribuição relevante foi dada por Wang *et al* [7], eles reportaram um sistema de comunicação no espaço livre com uma capacidade de envio de dados da escala de terabit por segundo combinando a multiplexação de estados de MAO com a multiplexação de estados de polarização.

Uma vez que em um sistema de comunicação óptica a CT de um feixe óptico representa

a informação codificada, para um dado modo de entrada, necessita-se caracterizar o estado de MAO detectado. Neste sentido, a partir do trabalho seminal de Allen [5], passou-se a investigar formas de como classificar a CT de um feixe óptico de saída. Atualmente há uma grande quantidade de conhecimento para esse propósito, contudo, as investigações a esse respeito continuam.

Portanto, é notória a importância do estudo dos modos de luz que carregam MAO, desta maneira, no capítulo 2 desta tese, faremos uma breve revisão teórica dos feixes ópticos, onde exibiremos as formas de como obtê-los a partir da solução da EH. Além disso, mostraremos os conceitos básicos sobre singularidade de fase, fundamentos da teoria da coerência e sobre holografia.

No capítulo 3, propomos uma nova forma de obter feixes não difrativos que possuem MAO a partir da transferência da informação geométrica de uma curva simples para a distribuição de intensidade transversa dos feixes [15]. Uma vez que as propostas encontradas na literatura até então consistem na resolução de uma equação diferencial [16], EH, ou via procedimentos de otimização [17]. Nossa proposta oferece a possibilidade de obter modos de luz com novas geometrias transversas sem necessitar resolver explicitamente a EH.

Ao observarmos que na literatura ainda não constava uma abordagem teórica que generaliza a questão da conservação da CT de um feixe óptico passando por uma abertura arbitrária, no capítulo 4 apresentamos um modelo teórico que pretende sanar esta lacuna. A confirmação experimental da proposta foi obtida através das medidas de fase do campo difratado por uma abertura na zona de Fraunhofer. A partir dos padrões de fase, verifica-se se houve conservação da CT.

No capítulo 5, propomos separar estados de MAO da luz coerente componentes de um conjunto de estados multiplexados através da técnica de transformação espiral [18]. Tal estudo se mostra importante para comunicações ópticas, pois, comumente, consegue-se enviar um único estado de MAO em cada feixe óptico. Desta forma, mostramos que é possível aumentar a capacidade de informação a ser transmitida por um único canal.

No capítulo 6, também utilizando a transformação espiral [18], realizaremos a classificação de estados de MAO incoerentes puros representados pela função de correlação cruzada de intensidade de um feixe sinal e um referência. Para tal, lançamos mão do fato de que já é conhecido que um dado estado de MAO é preservado, ao longo da propagação, na correlação de intensidade dos campos eletromagnéticos parcialmente coerentes, mesmo quando estes são parcialmente bloqueados por um obstáculo [19]. Dizemos que uma informação enviada desta maneira

é mais robusta e isso faz de nossa proposta uma relevante contribuição para comunicações ópticas.

No capítulo 7, propomos a classificação de estados de MAO de luz parcialmente incoerente que emergem na função de correlação cruzada a partir da autocorrelação de intensidade. Para tal, exploraremos a geometria plana desta função. Nossa proposta consiste de um modelo teórico, bem como confirmação experimental. Para o presente caso, os feixe sinal e referência coincidem ser a mesma distribuição de intensidade. Por fim, no capítulo 8, apresentamos nossas conclusões.

# 2. Vórtices Ópticos

## 2.1 Equações de Maxwell e os Feixes Ópticos

Os fenômenos luminosos são observados e discutidos desde a Grécia Antiga [20]. No entanto, discussões mais sistematizadas a respeito da luz se intensificaram a partir dos estudos Huygens e Isaac Newton [20]. Enquanto Huygens defendia que a luz era uma onda, Newton acreditava que esta seria composta de partículas. Porém, em 1865, James Clerk Maxwell mostrou que a luz é uma onda eletromagnética propagante [21]. Tal fato surgiu como consequência da unificação dos fenômenos elétrico e magnético, realizada por Maxwell, os quais foram resumidos em quatro equações. Estas equações ficaram conhecidas como equações de Maxwell, que ao considerar a propagação da luz no espaço livre (vácuo), podem ser escritas da seguinte forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.1b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.1d)$$

com  $\epsilon_0$  e  $\mu_0$  sendo a permissividade e a permeabilidade do vácuo, respectivamente.

Tomando o rotacional da Eq.(2.1c) e utilizando as Eq(2.1a) e Eq(2.1d), é uma tarefa simples mostrar que o campo elétrico  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  satisfaz a equação de onda

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (2.2)$$

Deste modo, podemos inferir que o campo elétrico,  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ , é uma onda que se propaga com uma velocidade dada por

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 2,99792 \times 10^8 \text{ m/s.}$$

Uma manipulação das Eq(2.1b) e Eq(2.1d) levam a uma equação similar a Eq.(2.2), mas em termos do campo indução magnética  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ . No entanto, do ponto de vista das magnitudes, o campo elétrico é muito mais evidente que o magnético, uma vez que  $E = cB$ . Portanto, é comum representar um campo de luz apenas por  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ .

Uma maneira usual de estudar a luz é começar considerando campos de ondas com uma única frequência (campo monocromático) linearmente polarizados, de modo que o campo elétrico possa ser expresso na forma:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}\} = \frac{1}{2}[\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + \mathbf{E}^*(\mathbf{r})e^{i\omega t}], \quad (2.3)$$

onde  $\omega$  é a frequência de oscilação dada em Hertz (Hz). A substituição da Eq.(2.3) na Eq.(2.2) leva à equação que descreve a propagação de luz monocromática, a qual é chamada de equação vetorial de Helmholtz

$$\nabla^2\mathbf{E}(\mathbf{r}) + k^2\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.4)$$

em que  $k = \omega/c$  é o módulo do vetor de onda e  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  é um vetor complexo que só depende da posição. Porém, é de maior interesse campos altamente direcionais, semelhantes a feixes que se propagam ao longo de um único eixo.

Uma maneira habitual de representar o comportamento de feixe de  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  é tomar o eixo  $z$  para a direção de propagação. Deste modo, pode-se escrever  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  como

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0U(\mathbf{r}), \quad (2.5)$$

em que  $\mathbf{E}_0$  é um vetor constante que determina a polarização do campo, enquanto que a função escalar  $U(\mathbf{r})$  é o que chamamos de amplitude complexa do campo elétrico. Substituindo a Eq.(2.5) na Eq.(2.4), obtém-se a seguinte expressão

$$\nabla^2U(\mathbf{r}) + k^2U(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.6)$$

a qual é chamada de equação escalar de Helmholtz. Deste modo, nota-se que, mesmo sabendo que a luz possui natureza vetorial, pode-se fazer um tratamento escalar da mesma.

A amplitude complexa,  $U(\mathbf{r})$ , do campo pode ser escrita, genericamente, da seguinte forma [22]

$$U(\mathbf{r}) = a(\mathbf{r})e^{i\phi(\mathbf{r})}, \quad (2.7)$$

em que as funções reais  $a(\mathbf{r})$  e  $\phi(\mathbf{r})$  são a amplitude e o ângulo de fase de  $U(\mathbf{r})$ . Nota-se de imediato que  $a^2(\mathbf{r}) = |U(\mathbf{r})|^2$ . Sendo a intensidade óptica,  $I(\mathbf{r}, t)$ , definida como a potência óptica por unidade de área, a qual é proporcional à média temporal da função de onda ao quadrado [22]:

$$I(\mathbf{r}, t) = 2\langle\mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t)\rangle_t. \quad (2.8)$$

Tal média temporal é tomada para intervalo de tempo muito grande comparado com o período óptico, mas curto para qualquer outro tempo de interesse. Isso implica, a partir da Eq.(2.7), é fácil mostrar que a intensidade óptica também pode ser expressa como:

$$I(\mathbf{r}, t) = |U(\mathbf{r})|^2.$$

Portanto, nota-se que o módulo da amplitude complexa está diretamente relacionada à intensidade óptica, a qual é uma quantidade fisicamente mensurável, pois do ponto de vista experimental o que se detecta é intensidade.

A partir deste ponto, pode-se afirmar que a Equação de Helmholtz (EH) escalar, Eq.(2.6), descreve a propagação de ondas monocromáticas. Esta equação é o ponto de partida para a análise dos feixes de luz que carregam momento angular orbital [23]. A evolução espacial da amplitude complexa  $U(\mathbf{r})$  pode ser descrita pelas partes transversal  $(x, y)$  e longitudinal  $z$ . O primeiro termo da equação acima descreve o efeito da difração ao longo da propagação.

A partir do exposto logo acima, é sugestivo pensar que  $U(\mathbf{r})$  representa apenas feixes de luz difratantes ao longo da propagação. No entanto, é importante salientar que podemos resolver a Eq.(2.6) de maneira exata ou via aproximação paraxial. Qualquer solução obtida com a aproximação paraxial dará origem ao que chamamos de feixe paraxial o qual está sujeito aos efeitos da difração. Enquanto que sob condições especiais, as soluções exatas da EH originam feixes que não sentem os efeitos difrativos. Isto é, o perfil transversal da intensidade de tais feixes é invariante ao longo da propagação.

Embora a equação de Helmholtz possa ser separável em 11 sistemas de coordenadas, a separação nas partes transversal e longitudinal só é possível em coordenadas cartesianas, cilíndricas circulares, cilíndricas parabólicas e cilíndricas elípticas [24]. Tais sistemas de coordenadas nos levam aos feixes ópticos Gaussiano, Laguerre-Gauss, Bessel [25], Elípticos [16], parabólicos [26], e etc. Nas seções seguintes, faremos uma breve explanação dos feixes Laguerre-Gauss e Bessel. Uma vez que aquele surge da equação paraxial de Helmholtz e este da solução exata da EH.

A equação paraxial de Helmholtz surge quando é usado o conceito de onda paraxial, a qual é definida como sendo uma onda plana que se propaga ao longo do eixo  $z$  e que a amplitude da mesma varia lentamente com a posição  $\mathbf{r}$ . Esta onda pode ser expressa da seguinte maneira:

$$U(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r})e^{-ikz}. \quad (2.9)$$

A variação do envelope  $A(\mathbf{r})$  e sua derivada com a posição  $z$  deve ser lenta dentro da distância

de um comprimento de onda  $\lambda = 2\pi/k$ , de modo que a onda mantém sua natureza de onda plana [22]. Assumir que  $A(\mathbf{r})$  varia lentamente em relação a  $z$  significa que, dentro de uma distância  $\Delta z = \lambda$ , a mudança  $\Delta A(\mathbf{r})$  é muito pequena quando comparada ao próprio  $A(\mathbf{r})$ , isto é,  $\Delta A \ll A$  [22]. Deste modo, teremos:

$$\frac{\partial A(\mathbf{r})}{\partial z} \ll kA(\mathbf{r}), \quad (2.10)$$

e conseqüentemente

$$\frac{\partial^2 A(\mathbf{r})}{\partial z^2} \ll k^2 A(\mathbf{r}). \quad (2.11)$$

Com essas aproximações e substituindo a Eq.(2.9) na Eq.(2.6), obtemos

$$\nabla_t^2 A(\mathbf{r}) - 2ik \frac{\partial A(\mathbf{r})}{\partial z} = 0, \quad (2.12)$$

em que  $\nabla_t^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$  é o laplaciano transversal. A Eq.(2.12) é conhecida como equação paraxial de Helmholtz.

## 2.2 Feixe Laguerre-Gauss

Ao resolver a EPH em coordenadas cilíndricas, obtém-se um conjunto completo de soluções conhecidas como modos ou feixes Laguerre-Gauss. A equação paraxial em questão toma a seguinte forma em coordenadas cilíndricas:

$$\left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right) U(\rho, \phi, z) = 0. \quad (2.13)$$

Enfatiza-se que o sistema de coordenadas cartesiano  $(x, y, z)$  é transformado no sistema cilíndrico  $(\rho, \phi, z)$  a partir de  $x = \rho \cos \phi$ ,  $y = \rho \sin \phi$ , em que  $\rho$  é a coordenada radial e  $\phi$  é o ângulo azimutal. A Eq.(2.13) tem como solução a expressão seguinte

$$\begin{aligned} U_{m,p}(\rho, \phi, z) = & A_{m,p} \left( \frac{w_0}{w(z)} \right) \left( \frac{\rho}{w(z)} \right)^{|m|} \mathbb{L}_p^{|m|} \left( \frac{2\rho^2}{w^2(z)} \right) \exp \left( -\frac{\rho^2}{w^2(z)} \right) \exp(-im\phi) \\ & \times \exp \left( -ikz - ik \frac{\rho^2}{2R(z)} + i(|m| + 2p + 1)\zeta(z) \right), \end{aligned} \quad (2.14)$$

em que  $\mathbb{L}_p^m(x)$  é o polinômio de Laguerre generalizado que é escrito como

$$\mathbb{L}_p^m(x) = \left( \frac{x^{-m} e^x}{p!} \right) \frac{\partial^p}{\partial x^p} (x^{m+p} e^{-x}),$$

deste modo, nota-se que  $\mathbb{L}_0^m(x) = 1$  para qualquer valor de  $l$ . O ângulo de fase

$$\zeta(z) = \tan^{-1}(z/z_R) \quad (2.15)$$

é conhecido como fase Gouy. A função  $w(z)$  é o que chamamos de cintura do feixe ao longo da propagação e é dada por

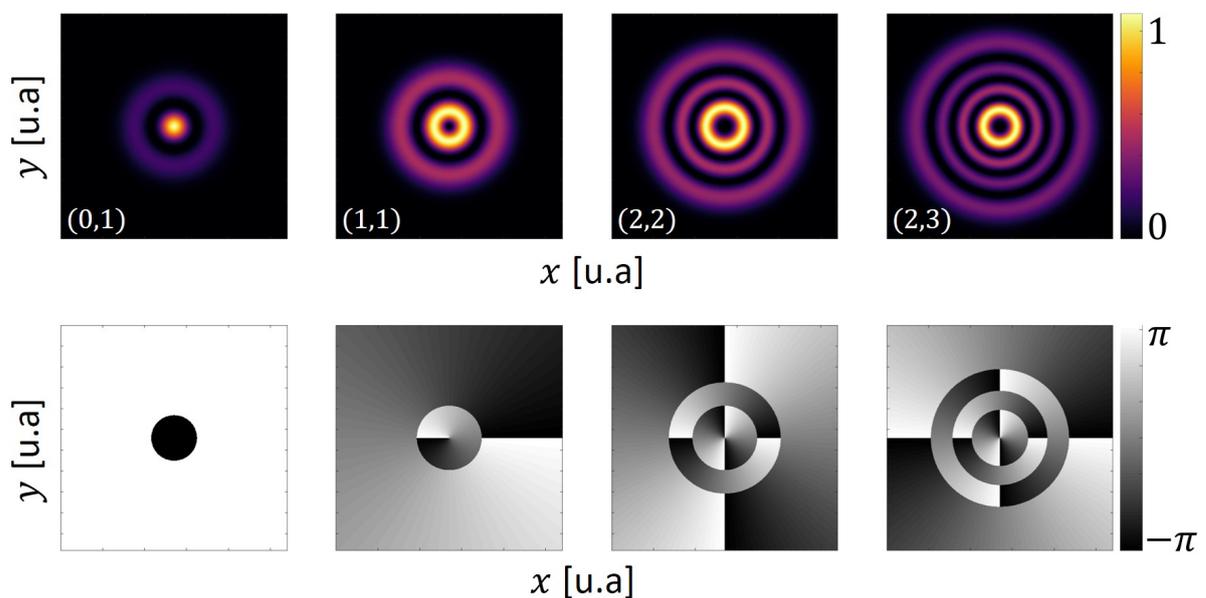
$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2}, \quad (2.16)$$

em que  $w_0$  é o menor tamanho da cintura do feixe. Por conveniência, costuma-se localizar  $w_0$  em  $z = 0$ . Desta maneira, define-se o comprimento Rayleigh  $z_R = w_0^2 k/2$ . Além disso,  $k = 2\pi/\lambda$  é o módulo do vetor de onda e  $\lambda$  é o comprimento de onda da luz. Outra definição importante é o raio de curvatura do feixe:

$$R(z) = z \left[ 1 + \left(\frac{z_R}{z}\right)^2 \right]. \quad (2.17)$$

Os sobre e sub escritos,  $m$  e  $p$ , são chamados de índices azimutal e radial, respectivamente. Enquanto que  $A_{m,p}$  é uma constante de normalização. Para maior compreensão, a Fig.(2.1) mostra os padrões de intensidade gerado a partir da Eq.(2.40).

Figura 2.1: Representação dos padrões de intensidade para modos Laguerre-Gauss de diferentes índices azimutal e radial. Cada modo é identificado pelo par  $(m, p)$ .



Fonte: Autor

Ao observar a figura acima, nota-se que o modo Laguerre-Gauss fundamental,  $U_{0,0}(\rho, \phi, z)$ , é o feixe Gaussiano. Por isso, algumas vezes, diz-se que os modos Laguerre-Gauss têm modulação gaussiana.

Diz-se que a família de modos Laguerre-Gauss é um conjunto completo de soluções da equação paraxial de Helmholtz devido estes obedecerem à relação de ortonormalidade em ambas a variáveis,  $\rho$  e  $\phi$ . Ou seja,

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty U_{m,p}(\rho, \phi, z) [U_{n,q}(\rho, \phi, z)]^* \rho d\rho = \delta_{m,n} \delta_{p,q} \quad (2.18)$$

Por isso que o número de anéis de um determinado modo está associado ao índice radial  $p$ . O índice  $m$  está contido no termo de fase azimutal  $\exp(-im\phi)$  que dá origem a  $|m|$  frentes de onda helicoidais entrelaçadas, as quais têm iguais superfícies de fase [23]. Nesta tese, nos atentaremos apenas aos modos Laguerre-Gauss  $U_{m,0}(\rho, \phi, z)$ , dessa maneira, a Eq.(2.15) é reduzida a

$$\begin{aligned} U_{m,0}(\rho, \phi, z) &= A_{m,0} \left( \frac{w_0}{w(z)} \right) \left( \frac{\rho}{w(z)} \right)^{|m|} \exp \left( -\frac{\rho^2}{w^2(z)} \right) \exp(-im\phi) \\ &\times \exp \left( -ikz - ik\frac{\rho^2}{2R(z)} + i(|m| + 1)\zeta(z) \right), \end{aligned} \quad (2.19)$$

de maneira que a expressão para a intensidade óptica desses modos é dada por

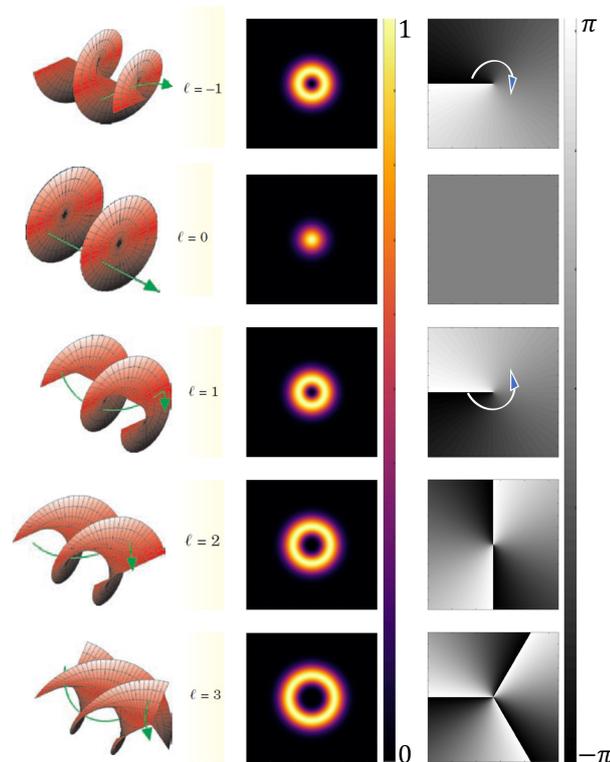
$$I_{m,0}(\rho, \phi, z) = A_{m,0}^2 \left( \frac{w_0}{w(z)} \right)^2 \left( \frac{\rho}{w(z)} \right)^{2|m|} \exp \left( -\frac{2\rho^2}{w^2(z)} \right). \quad (2.20)$$

A presença do termo de fase azimutal  $\exp(-im\phi)$  na Eq.(2.19) faz com que o estudo dos modos Laguerre-Gauss sejam de grande interesse científico, pois esses feixes possuem momento angular orbital bem definido de  $m\hbar$  por fóton e que este momento angular é independente dos estados de polarização da luz em questão [5]. Este tipo de campo luminoso pode transferir torque a um dado sistema iluminado. As frentes de onda desses feixes têm uma estrutura helicoidal ao longo do eixo de propagação.

Afim de deixar claro a influência do termo de fase azimutal, exibimos a Fig.(2.2) para ilustrar como o perfil de intensidade transversa e a distribuição fase de modos LG mudam para diferentes  $m$ , além disso, também é possível observar o comportamento do vetor de Poynting para tais modos.

Diferentemente das ondas com superfície de fase plana, como é caso do feixe Gaussiano, feixes com superfície de fase helicoidal implicam que, mesmo no espaço livre, as frentes de onda não são perpendiculares à direção de propagação do feixe e, portanto, o vetor de Poynting não é paralelo à direção de propagação [27]. Deste modo, é intuitivo pensar que o vetor de Poynting tem uma componente azimutal e outra radial à medida que se propaga, como de fato

Figura 2.2: Ilustração das frentes de ondas helicoidais, dos padrões de intensidade e de fase no plano transversal, bem como a direção do vetor de Poynting.



Fonte: Adaptado de Padgett [2], 2004, pg. 36.

acontece [27]. A componente azimutal é a responsável pelo surgimento do momento angular orbital, enquanto que a componente radial contribui para a divergência do feixe observada ao ser propagado [28]. Na Fig(2.2), a direção do vetor de Poynting está ilustrado pela seta verde.

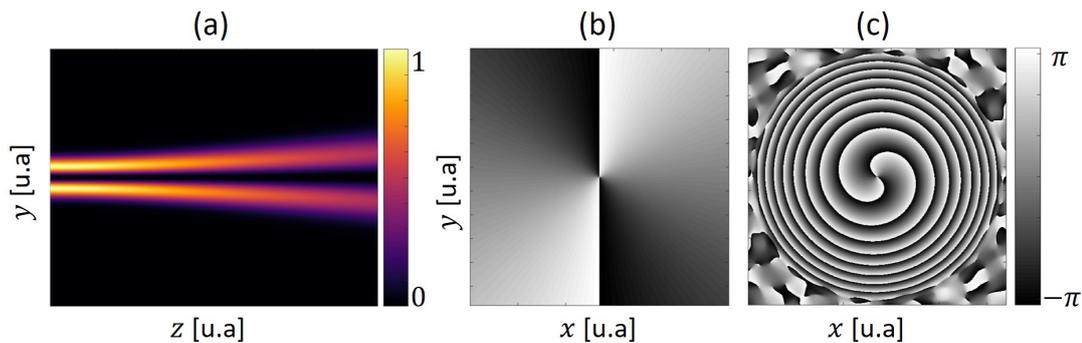
Como vimos anteriormente, para  $p = 0$ , um dado feixe Laguerre-Gauss consiste em uma distribuição de amplitude em forma de anel com um zero de intensidade em seu eixo, isso acarreta o surgimento de uma singularidade de fase ou defeito topológico em sua região central. Por isso, modos LG também são conhecidos como vórtices ópticos, pois, para  $m \neq 0$ , estes modos possuem uma singularidade de fase. Além disso, em óptica singular, passa-se a chamar  $m$  de carga topológica que representa o tamanho da singularidade, pois quanto maior o valor absoluto de  $m$ , maior será o tamanho do anel, como mostra a Fig.(2.2).

No entorno da singularidade, a fase do feixe Laguerre-Gauss aumenta ou diminui em múltiplos inteiros de  $2\pi$ . Ou seja, quando  $m = 1$ , a fase varia de 0 a  $2\pi$  uma vez. Para  $m = 2$ , a fase varia de 0 a  $2\pi$  duas vezes e assim sucessivamente, tal comportamento pode ser observado na Fig(2.2). Além disso, pode-se constatar que, ao propagar o feixe a uma determinada distância,

a singularidade de fase se mantém, e portanto, a carga topológica, que representa seu tamanho, se conserva. Veremos um estudo mais detalhado sobre os fundamentos da óptica singular posteriormente.

A partir da Fig.(2.3), fica evidente o efeito da difração da luz ao longo da propagação, pois, como já citado anteriormente, este efeito surge naturalmente na equação de Helmholtz. A Fig.2.3(a) mostra o perfil da propagação de um modo LG de CT  $m = 2$ , além disso, à medida que tal modo se propaga ocorre uma divergência. Como foi citado anteriormente, além dos efeitos naturais de difração, isso também se deve à contribuição radial do vetor de Poynting.

Figura 2.3: Ilustração do perfil de propagação de um modo LG com  $m = 2$ . (a) visão lateral da intensidade do feixe; (b) padrão de fase no plano da menor cintura do LG; e (c) padrão de fase após o feixe ter sido propagado de uma distância arbitrária  $z$ .



Fonte: Autor.

Já nas Fig.2.3(b) e (c), é mostrado os padrões de fase no plano onde o feixe tem menor cintura e depois deste ser propagado no espaço livre de uma distância  $z$  arbitrária. Comparando essas duas figuras, facilmente se constata que a singularidade correspondente a  $m = 2$  se mantém. Neste caso, diz-se que a CT se conserva.

## 2.3 Feixe Bessel

Na seção anterior, vimos que os modos Laguerre-Gauss (LG) surgiram a partir da solução da EPH em coordenadas cilíndricas. Viu-se que a difração é um fenômeno natural na propagação desses modos. Porém, a solução exata da EH, Eq.(2.6), dá origem a uma família de feixes que tem sua distribuição de intensidade inalterada ao longo da propagação. Tais soluções são conhecidas como não difrativas. Uma dessas famílias é nomeada de feixes ou modos Bessel, e foi a primeira a ser obtida com tal característica [6, 25].

Para encontrar a expressão analítica que representará a família de feixes Bessel, o ponto de partida é resolver a EH, Eq.(2.6), em coordenadas cilíndricas [29], a qual é dada por

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial U(\rho, \phi, z)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U(\rho, \phi, z)}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 U(\rho, \phi, z)}{\partial z^2} + k^2 U(\rho, \phi, z) = 0. \quad (2.21)$$

O fato de que a solução procurada deva ser não difrativa sugere que a distribuição de intensidade óptica do campo de luz ao longo da propagação seja constante, ou seja,  $I(\rho, \phi, 0) = I(\rho, \phi, z > 0)$ . Desse modo, uma solução para a Eq.(2.21) deve ter a seguinte forma

$$U(\rho, \phi, z) = A(\rho, \phi) \exp(i\beta z), \quad (2.22)$$

em que  $\beta$  é uma constante a ser especificada. Além disso, assumindo separação de variáveis, podemos escrever  $A(\rho, \phi) = R(\rho)\Phi(\phi)$ , desta maneira a Eq.(2.22) toma a forma:

$$U(\rho, \phi, z) = R(\rho)\Phi(\phi) \exp(i\beta z). \quad (2.23)$$

Agora, substituindo a Eq.(2.23) na Eq.(2.21) e dividindo o resultado disso por  $R(\rho)\Phi(\phi) \exp(i\beta z)$ , obtém-se a seguinte expressão

$$\frac{1}{\rho R} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \alpha^2 = 0, \quad (2.24)$$

em que  $\alpha^2 = k^2 - \beta^2$ . Multiplicando ambos os lados da Eq.(2.24) por  $\rho^2$ , pode-se reescrevê-la como:

$$\frac{\rho}{R} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) + \alpha^2 \rho^2 = -\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2}. \quad (2.25)$$

Uma vez que o lado esquerdo da Eq.(2.25) depende somente de  $\rho$  e o lado direito depende apenas de  $\phi$ , conseqüentemente, para a igualdade ser válida é necessário que os dois lados sejam igual a uma constante  $m^2$ . Isso implica que:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = -m^2 \Phi. \quad (2.26)$$

Uma forma simplificada de expressar a solução da Eq.(2.26) é dada por:

$$\Phi(\phi) = \exp(-im\phi). \quad (2.27)$$

A função  $\Phi(\phi)$  é periódica e deve se repetir a cada intervalo de  $2\pi$ , logo,  $\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi)$ , o que implica que  $m$  deve ser inteiro ou igual a zero, ou seja,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ .

O próximo passo é encontrar a solução radial,  $R(\rho)$ , da equação diferencial, para isso, o lado direito da Eq.(2.25) deve ser igual a  $m^2$ . Multiplicando toda a equação por  $R(\rho)$ , fica-se com:

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) + (\alpha^2 \rho^2 - m^2) R = 0. \quad (2.28)$$

Desenvolvendo a derivada no primeiro termo do lado esquerdo da Eq.(2.28) e dividindo tudo por  $\rho^2$ , tem-se:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial R}{\partial \rho} + \left( \alpha^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) R = 0. \quad (2.29)$$

A Eq.(2.29) é conhecida como equação diferencial de Bessel de ordem  $m$ . Suas soluções são funções de Bessel [29],  $J_m(\alpha\rho)$ , de ordem  $m$ . Finalmente, a amplitude complexa da onda, Eq.(2.22), pode ser escrita da seguinte forma:

$$U(\rho, \phi, z) = A_m J_m(\alpha\rho) \exp(-im\phi) \exp(i\beta z), \quad (2.30)$$

onde  $A_m$  é uma constante,  $J_m$  é a função de Bessel de primeiro tipo e ordem  $m$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  são as componentes transversal e longitudinal do vetor de onda, onde  $k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ .

Observa-se que, para  $m = 0$ , podemos escrever a amplitude complexa da Eq.(2.30) como:

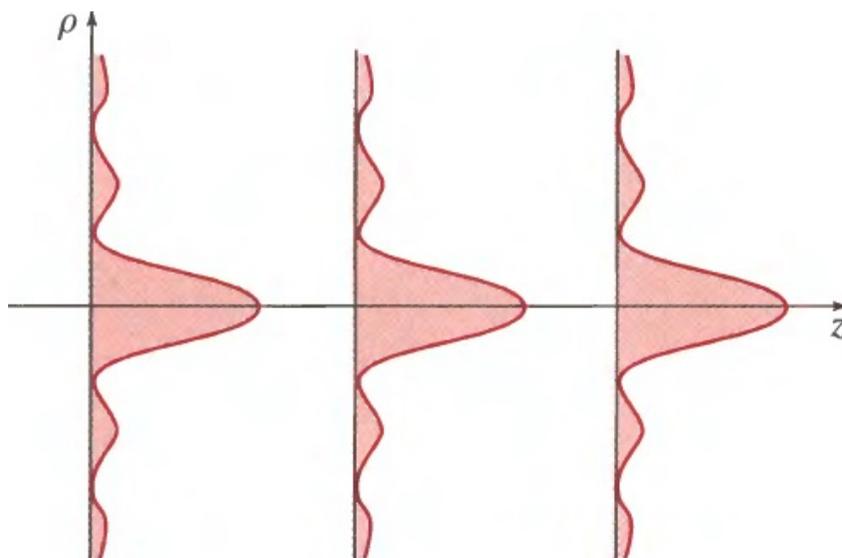
$$U(\rho, \phi, z) = A_0 J_0(\alpha\rho) \exp(i\beta z), \quad (2.31)$$

a qual tem uma distribuição de intensidade é dada por:

$$I(\rho, \phi, z) = |A_0|^2 J_0^2(\alpha\rho). \quad (2.32)$$

A Eq.(2.32) possui simetria circular variando com  $\rho$  e invariante em  $z$ , como mostra a fig.(2.4)

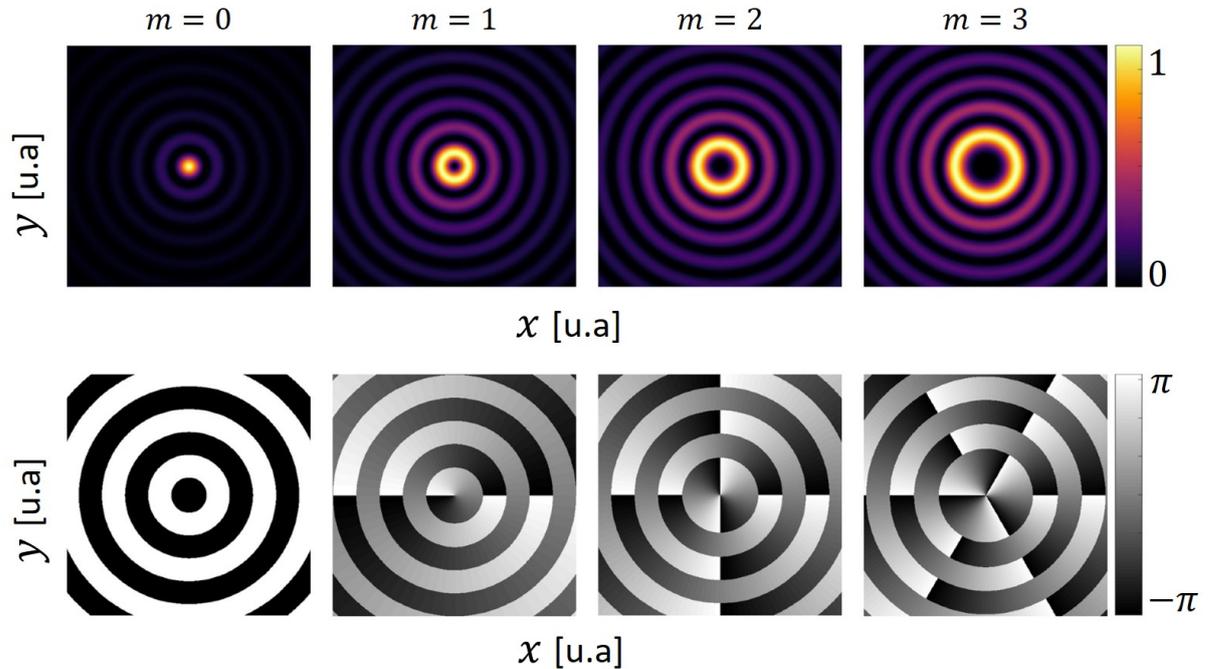
Figura 2.4: O perfil horizontal da distribuição de intensidade do feixe Bessel no plano transverso é independente de  $z$ .



Fonte: Adaptado de Saleh, 2007, pg. 99.

Notamos mais uma vez que a intensidade do feixe Bessel não depende da coordenada  $z$ . Na Fig.2.5 mostramos os padrões de intensidade e de fase no plano transversal,  $(\rho, \phi)$ , em um dado ponto  $z$ .

Figura 2.5: Distribuição de intensidade e fase no plano transversal para algumas ordens do feixe Bessel.



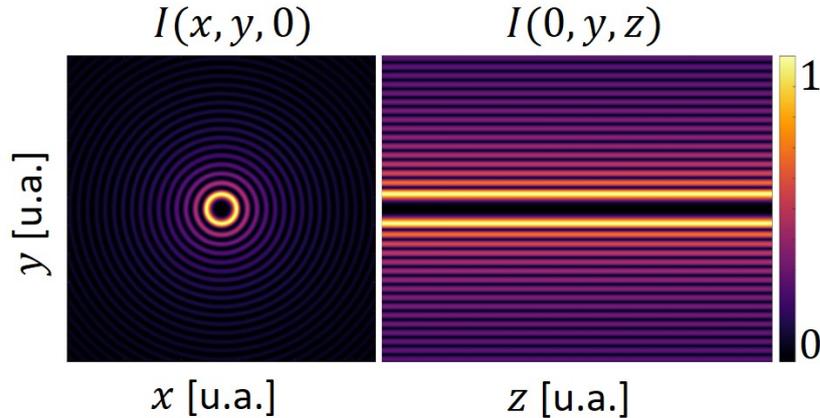
Fonte: Autor.

É importante enfatizar que a presença do termo de fase  $e^{-im\phi}$  nos feixes Bessel indica que estes também carregam momento angular orbital. Outra característica marcante do feixe Bessel é seu comportamento não difrativo. Tal comportamento pode ser observado na Fig.2.6, a qual mostra a propagação do modo de ordem  $m = 4$ . Na Fig.2.6(a), temos o padrão de intensidade no plano transversal em um dado ponto  $z$ . Na Fig.2.6(b), tem-se a visão lateral do perfil da propagação, ao longo do eixo  $z$ , da intensidade óptica.

Teoricamente, o feixe Bessel pode ser propagado, livre dos efeitos da difração, de uma distância infinita. Uma vez que foi suposto que o feixe é composto de uma superposição de múltiplas ondas planas, para que este se propague de uma distância infinita, cada onda plana componente deve ser vista como tendo extensão espacial infinita. Devido a isto, diz-se que o feixe tem energia infinita.

Porém, na prática, os modos Bessel, bem como qualquer outro, são gerados sobre uma região finita. Logo, seu comportamento não difrativo se dá para uma distância finita do eixo  $z$ .

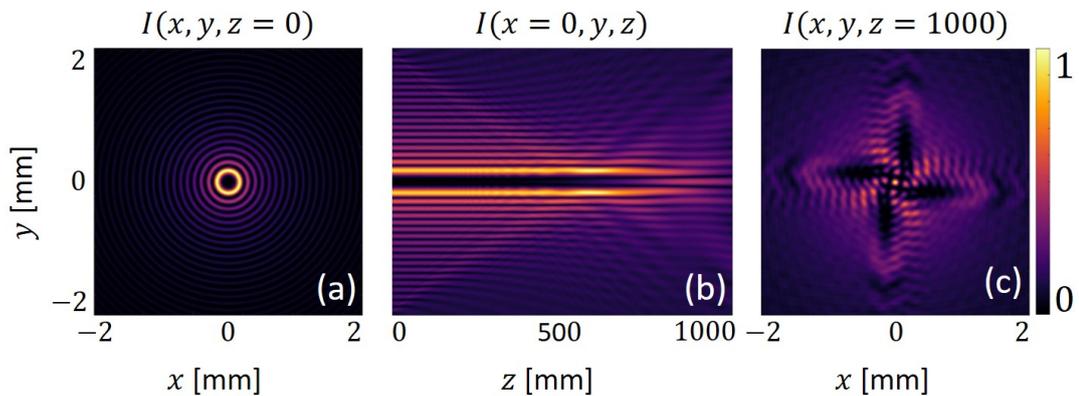
Figura 2.6: Distribuição de intensidade e perfil da propagação de um feixe Bessel de ordem  $m = 4$ .



Fonte: Autor.

A Fig.2.7(a) mostra o padrão de intensidade do feixe Bessel no plano  $z = 0$  para uma carga topológica  $m = 4$ . Já a Fig.2.7(b) mostra o perfil de intensidade ao longo da propagação, enquanto que a Fig.2.7(c) exibe o padrão de intensidade do feixe depois de ser propagado de uma distância  $z = 1000$  mm.

Figura 2.7: Distribuição de intensidade e fase no plano transverso para algumas ordem do feixe Bessel.



Fonte: Autor.

A propagação do feixe mostrado na Fig.2.7 se deu via método do espectro angular [30], o que equivale a geração de um campo óptico limitado por uma abertura quadrada finita. Tal abertura foi simulada para ter lado  $L = 4$  mm e o campo a partir dela foi propagado de uma distância de  $z = 1000$  mm. A propagação foi realizada numericamente com o intuito de simular o que acontece na prática de laboratório. Deste modo, a partir da Fig.2.7(b), percebe-se que o feixe se propaga livre dos efeitos difrativos por uma distância de aproximadamente

700 mm, a partir desse ponto o feixe começa a colapsar e em 1000 mm está praticamente todo deformado.

## 2.4 Holografia

A holografia é um método único de armazenamento e reconstrução de toda a informação, como amplitude e fase, contida na luz que é dispersa a partir de um corpo iluminado [31]. Esta técnica é usualmente datada de 1948, quando Dennis Gabor a criou para melhorar a utilidade da microscopia. No entanto, foi a partir da década de 1960 que se teve bastantes avanços nessa área, pois a invenção do laser deu aos pesquisadores uma fonte de luz altamente coerente, dando início a holografia interferométrica.

Uma noção clara do que é um holograma é dada por Heckenberg, em que ele afirma que um holograma consiste na gravação do padrão de interferência entre o feixe de interesse com um feixe de referência, geralmente uma onda plana [32]. Deste modo, nos atentaremos no método de construção de um holograma através do registro da amplitude e da fase de ondas monocromáticas. Tal holograma é obtido lançando mão da interferência de uma onda objeto  $U_o(x, y)$  com uma onda referência  $U_r(x, y)$ , de modo que se registre o padrão de interferência em um dispositivo de gravação, como uma transparência. Em seguida, ilumina-se o dispositivo com  $U_r(x, y)$  para se obter a reconstrução da onda objeto. O processo de gravação está ilustrado na Fig.2.8.(a), enquanto que a reconstrução é ilustrada na Fig.2.8.(b).

Podemos fazer o tratamento quantitativo do processo de construção de um holograma considerando que tal transparência tenha uma transmitância  $t(x, y)$ , desta maneira, supondo que  $t(x, y)$  seja proporcional à intensidade do padrão de interferência das ondas objeto e de referência,  $t \propto |U_o + U_r|^2$ , então

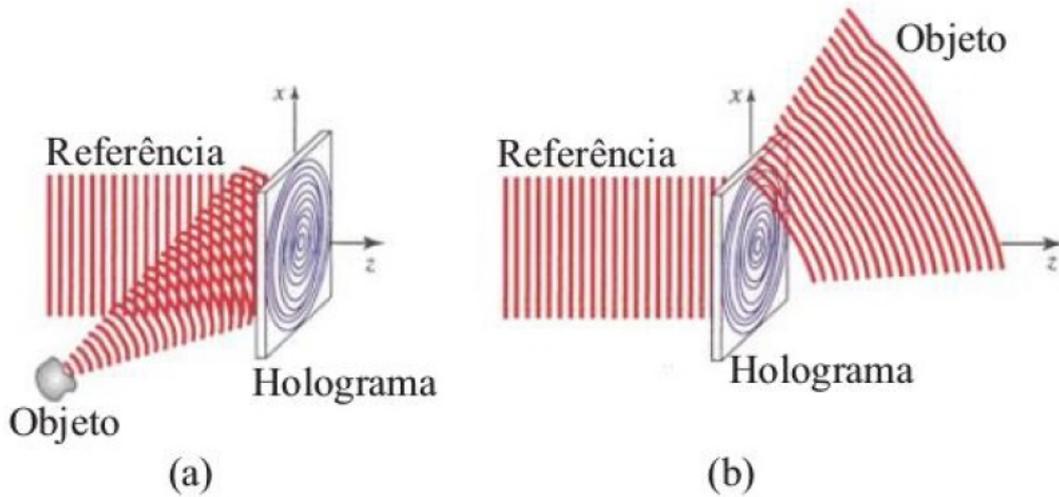
$$\begin{aligned} |U_o + U_r|^2 &= |U_r|^2 + |U_o|^2 + U_r^* U_o + U_r U_o^* \\ &= I_r + I_o + U_r^* U_o + U_r U_o^* \end{aligned}$$

e portanto,

$$t \propto I_r + I_o + 2 \cos[\text{Arg}\{U_r\} - \text{Arg}\{U_o\}], \quad (2.33)$$

onde  $I_r$  e  $I_o$  são as intensidades das ondas referência e objeto, respectivamente. A transparência é o que chamamos de holograma, e claramente vemos que a mesma contém informação de amplitude e fase das ondas objeto e referência.

Figura 2.8: Ilustração da construção de um holograma. (a) Etapa de gravação. (b) Etapa de reconstrução.



Fonte: Adaptado de Saleh, 2007.

A reconstrução da onda objeto se dá através da incidência da onda de referência sobre o holograma, como mostrado na Fig.2.8(b). O resultado é uma onda com amplitude complexa dada por

$$U(x, y) = tU_r \propto (I_r + I_o)U_r + I_rU_o + U_r^2U_o^*. \quad (2.34)$$

Como consequência do exposto acima, nota-se que no plano do holograma, assumido estar em  $z = 0$ , o terceiro termo na Eq.(2.34) é a própria onda objeto multiplicada pela intensidade da onda referência. Desde que  $I_r$  não dependa de  $x$  e  $y$ , o termo  $I_rU_o$  constitui a onda desejada reconstruída. O quarto termo é a onda objeto conjugada, no entanto, modulada por  $U_r^2$ . O primeiro e segundo termo representam a onda referência modulada pela soma das intensidades das ondas referência e objeto.

Como ilustração, pode-se supor que a onda objeto seja uma onda plana oblíqua da forma  $U_o = \sqrt{I_o} \exp(-ikx \sin \theta)$ , de modo que

$$U(x, y) \propto I_r + I_o + \sqrt{I_r I_o} \exp(-ikx \sin \theta) + \sqrt{I_r I_o} \exp(ikx \sin \theta). \quad (2.35)$$

Desde que  $I_r$  e  $I_o$  sejam constantes, os dois primeiros termos representam uma onda que se propaga na direção  $z$ . O terceiro termo representa a onda reconstruída, enquanto que o quarto termo representa a onda conjugada, viajando em um ângulo  $-\theta$ . É notório, portanto, que a onda objeto é separável das demais ondas.

Como foi definido anteriormente, este holograma consiste na gravação do padrão de inter-

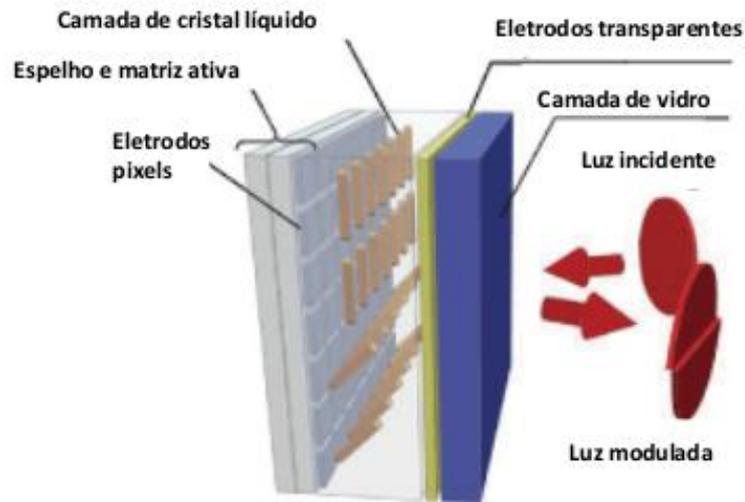
ferência formado a partir de duas ondas planas em um ângulo oblíquo  $\theta$ , o qual serve como uma rede de difração senoidal que divide uma onda de referência incidente em três ondas em ângulos  $0$ ,  $\theta$  e  $-\theta$  [22]. Essa situação constitui o método clássico de geração de hologramas.

Tudo que abordamos até agora a respeito de holografia, está no contexto clássico deste assunto, já que a construção do holograma se dá pela gravação da intensidade de um padrão de interferência. No entanto, podemos produzir um holograma usando um modulador espacial de luz (Spatial Light Modulator, SLM), o qual impõe uma variação na modulação espacial de fase do feixe. Com este dispositivo, pode-se controlar a amplitude e fase, ou até mesmo os estados de polarização da luz [33]. A distribuição de fase desejada é gerada por computador, sendo enviada eletronicamente ao SLM, o chamado holograma gerado por computador (CGH).

Um modulador espacial de luz é composto por um espelho e em cima deste é colocado uma fina camada constituída de pixels eletrodos referida como matriz ativa, logo após, tem-se uma camada de cristal líquido, em seguida uma camada de pixels eletrodos transparente e por fim uma camada de vidro transparente. Cada pixel controla seu próprio potencial elétrico de forma independente, assim, o campo elétrico através da camada de cristal líquido pode ser controlado pixel a pixel.

Inicialmente as moléculas de cristal líquido estão alinhadas em paralelo, no entanto, quando os eletrodos são submetidos a uma diferença de potencial as moléculas do cristal líquido se inclinam de acordo com o campo elétrico, de modo que a fase de luz pode ser modulada. A diferença nos índices de refração do cristal líquido ocorre em diferentes ângulos de inclinação. Isto altera o comprimento do percurso óptico na camada de cristal líquido e assim provoca uma diferença de fase na luz refletida. Para um melhor entendimento, representaremos de maneira esquemática o SLM na Fig.(2.9).

Figura 2.9: Ilustração de uma modulador espacial de luz.



Fonte: Hamamatsu, 2014.

A técnica de construção de hologramas utilizada nesta tese é a idealizada por Victor Arrizón [34], a qual consiste na codificação de amplitude e fase de um campo arbitrário cuja modulação de amplitude e fase sejam especificadas de maneira independente. Tal campo é pode ser escrito genericamente como

$$S(x, y) = a(x, y)e^{i\phi(x, y)}, \quad (2.36)$$

onde  $a(x, y)$  e  $\phi(x, y)$  tomam valores nos intervalos  $[0, 1]$  e  $[-\pi, \pi]$ , respectivamente [34].

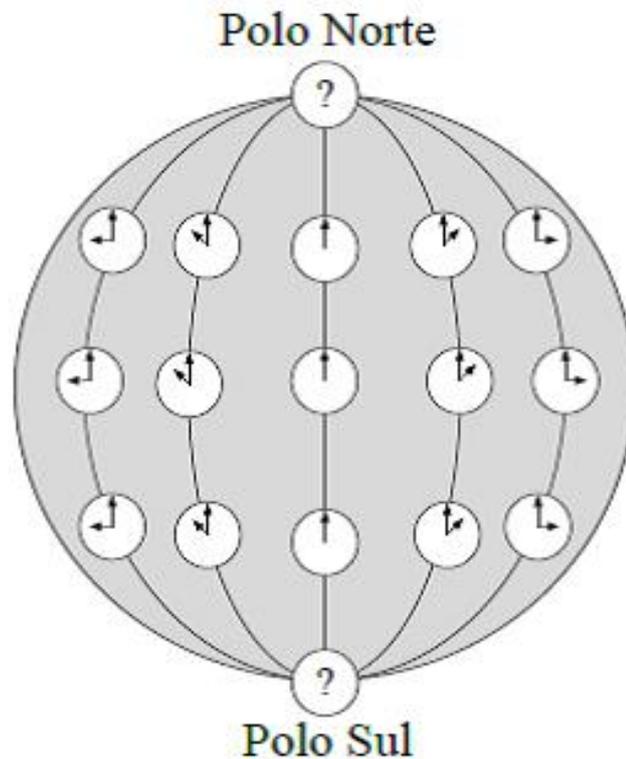
## 2.5 Conceitos Fundamentais sobre Singularidade de Fase

Uma abordagem sobre singularidade de fase de campos ópticos faz surgir a seguinte questão: qual o significado da palavra ‘singularidade’? Do ponto de vista matemático, tem-se uma singularidade quando uma determinada quantidade se torna infinita ou muda abruptamente em um determinado ponto no espaço [35]. Do ponto de vista físico, diz-se que uma grandeza é singular quando não podemos ou não conseguimos definir o seu valor numérico [36]. Além disso, Winfree e Arthur afirmam que uma singularidade de fase é um ponto em que a fase é ambígua e próximo do qual a fase assume todos os valores [37].

Há muitos exemplos ilustrativos que visam explicar qualitativamente o que é uma singularidade, como se pode ver na referência [37], mas um que se destaca significativamente para o entendimento do leitor foi muito bem exposto por Brandão Filho [36]. Através da verificação

das horas em várias partes do mundo, conclui-se que a hora depende da região espacial em que nos encontramos, de modo que se torna possível construir um “mapa horário mundial” imaginando vários relógios dispostos ao redor do globo terrestre, como esquematizado na Fig.2.10. Nesta situação, a singularidade é detectada nos Polos da Terra, pois nestes pontos a hora é indefinida.

Figura 2.10: Ilustração da distribuição das horas ao longo da superfície do globo terrestre.



Fonte: Brandão Filho [36], 2016, pg. 11.

Sabe-se que os campos ópticos monocromáticos têm caráter vetorial e os associamos a uma perturbação eletromagnética caracterizada por campos elétricos e magnéticos de variação temporal harmônica cujas amplitudes, fases e direções variam de ponto a ponto [8]. Porém, nos problemas de óptica em que a polarização da luz não desempenha um papel fundamental, podemos ignorar esse caráter vetorial. Deste modo, pode-se tratar os campos luminosos como se fossem grandezas escalares harmonicamente variáveis no tempo.

Já vimos que um campo óptico monocromático, de frequência angular  $\omega$ , em um ponto no espaço localizado pelo vetor posição  $\mathbf{r}$  em um determinado tempo  $t$ , é descrito por um campo escalar complexo  $E(\mathbf{r}, t)$ , que assume uma solução separável da equação de onda linear dada

por

$$E(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r})e^{-i\omega t},$$

em que a perturbação ou campo físico é considerado como a parte real de  $E(\mathbf{r}, t)$ . Além disso,  $U(\mathbf{r})$  é a amplitude complexa deste campo, a qual pode ser escrita da seguinte forma

$$U(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r})e^{i\phi(\mathbf{r})},$$

em que  $A(\mathbf{r})$  e a  $\phi(\mathbf{r})$  são funções reais que representam as distribuições espaciais de amplitude e de fase, respectivamente. Deste modo, as singularidades do campo,  $E(\mathbf{r}, t)$ , são referidas por Nye e Berry como deslocamento de onda [38]. Elas surgem onde  $U(\mathbf{r})$  é zero, fato que acarreta um comportamento indeterminado de  $\phi(\mathbf{r})$ , caracterizando-se como uma singularidades de fase.

O caráter complexo do campo óptico indica que  $U(\mathbf{r})$  assumirá um valor nulo somente quando suas partes real e imaginária,  $U_R(\mathbf{r})$  e  $U_I(\mathbf{r})$ , forem simultaneamente nulas. Além disso, uma vez que  $A(\mathbf{r})$  e  $\phi(\mathbf{r})$  são funções reais, acarreta que  $U_R(\mathbf{r})$  e  $U_I(\mathbf{r})$  são funções suaves, que determinam superfícies (curvadas) em três dimensões e estas duas superfícies se cruzam genericamente em uma linha suave. Portanto, em geral, um deslocamento de onda, onde a amplitude é zero, é uma linha curva estacionária em três dimensões (ou um ponto estacionário em duas dimensões).

Enfatiza-se que um dado campo luminoso que possui pelo menos uma singularidade da fase é chamado de vórtice óptico [39], pois a distribuição luminosa gira em torno do núcleo do vórtice em uma dada direção; no centro, a velocidade dessa rotação é infinita e a intensidade da luz desaparece [35].

Quantitativamente, a maneira de verificar uma provável singularidade de fase do campo óptico  $U(\mathbf{r})$  é lançando mão do fato de que este pode ser decomposto em suas partes real e imaginária ou ser escrito em sua forma polar, como segue

$$U(\mathbf{r}) = U_R(\mathbf{r}) + iU_I(\mathbf{r}) = |U(\mathbf{r})|e^{i\phi(\mathbf{r})}, \quad (2.37)$$

mas sabemos que  $|U(\mathbf{r})| = \sqrt{(U_R^2(\mathbf{r})) + U_I^2(\mathbf{r})}$  e  $\phi(\mathbf{r}) = \tan^{-1}[U_I(\mathbf{r})/U_R(\mathbf{r})]$ , logo, impondo que em um dado ponto do espaço  $U_R(\mathbf{r}) = U_I(\mathbf{r}) = 0$ , tem-se que nessa localização  $\phi(\mathbf{r}) = \tan^{-1}(0/0)$  e portanto indefinido, constata-se então uma singularidade de fase. A partir desse resultado, define-se formalmente singularidade de fase (SF) como qualquer região de um campo óptico onde a amplitude é nula e o ângulo de fase é indeterminado [8, 38].

Como já foi citado, as singularidades de fase são linhas no espaço tridimensional e este comportamento é de fácil entendimento, vejamos: para que um campo de onda escalar desapareça

em um ponto, as partes real e imaginária da onda devem ser simultaneamente nulas nesse ponto. Tem-se, portanto, duas equações homogêneas para satisfazer,  $U_R(\mathbf{r}) = U_I(\mathbf{r}) = 0$ , com três graus de liberdade: as coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  no espaço. Portanto, temos duas restrições para satisfazer no espaço tridimensional: isto nos deixa com um grau de liberdade, indicando que as singularidades de fase são linhas no espaço [8].

A fase de um campo de onda aumenta ou diminui de  $2\pi$  quando se percorre um caminho fechado em torno da singularidade [8]. Este fato é entendido quantitativamente integrando a mudança de fase em um circuito que circunda a linha:

$$\int d\phi = \pm 2m\pi. \quad (2.38)$$

Quando uma dada singularidade é genérica, tem-se que  $m = \pm 1$ . Esta característica é vista como uma propriedade topológica essencial das singularidades de fase dos campos ópticos. Quando o resultado da integração acima é um múltiplo inteiro de  $2\pi$  diferente de  $\pm 1$ , diz-se que a singularidade é não genérica. Posteriormente discutiremos com mais detalhes esta questão.

### 2.5.1 Singularidades de Fase de um Campo Paraxial

Para analisar a estrutura matemática local das singularidades de fase mais simples, assumimos trabalhar com campos do tipo feixes ópticos, os quais têm localmente a forma de uma onda plana, exceto em regiões com singularidades de fase. Em três dimensões, as singularidades de fase assumem a forma de linhas onde a amplitude do campo óptico é zero. Estas linhas singulares podem seguir caminhos curvos complicados, mas serão localmente retas [8].

A distribuição espacial de um campo óptico altamente direcional pode ser expressa como  $U(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r})e^{-ikz}$ , ou seja, optamos por uma onda que se propaga na direção  $z$ , embora tal escolha seja arbitrária. Nessa situação,  $A(\mathbf{r})$  é uma função que tem uma variação lenta em relação ao eixo  $z$ . Além disso, na direção da propagação da onda, o campo satisfaz a equação de Helmholtz paraxial.

$$\nabla_t^2 A(\mathbf{r}) - 2ik \frac{\partial A(\mathbf{r})}{\partial z} = 0,$$

Com isso em mente, estamos preparados para discutir a estrutura matemática local das singularidades de fase mais simples. Os dois tipos mais comuns possíveis de aparecer em campos ópticos são chamados de singularidades helicoidal (screw) e de borda (edge).

## Singularidade Helicoidal

A maneira mais usual de abordar as singularidades do tipo helicoidal é imaginar que a linha de singularidade de fase se estende ao longo do eixo  $z$ , passando pela origem  $x = y = z = 0$ . Na vizinhança imediata da linha singular o campo é praticamente nulo, desse modo, haverá muito pouca mudança no comportamento do campo na direção  $z$ , conseqüentemente, tem-se que  $\partial A(\mathbf{r})/\partial z \approx 0$ . Isso implica que na vizinhança imediata da origem, a componente do campo de onda  $A(\mathbf{r})$  satisfaz a equação de Laplace:

$$\frac{\partial^2 A(\mathbf{r})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A(\mathbf{r})}{\partial y^2} = 0, \quad (2.39)$$

Esta equação tem uma solução geral da forma  $A(x, y) = f(x + iy) + g(x - iy)$ , em que  $f(w)$  e  $g(w)$  são funções analíticas da variável complexa  $w$ .

Além disso,  $f(w)$  e  $g(w)$  podem ser representadas pelo menor termo não nulo de suas expansões em séries de Taylor, o que significa que podemos escrever  $A(x, y) \approx \alpha(x + iy) + \beta(x - iy)$ , onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes complexas [8]. Desse modo, considerando o caso em que  $\beta = 0$ , podemos escrever o campo completo como  $U(x, y, z) = \alpha(x + iy)e^{-ikz}$ , que em coordenadas cilíndricas pode ser expresso como

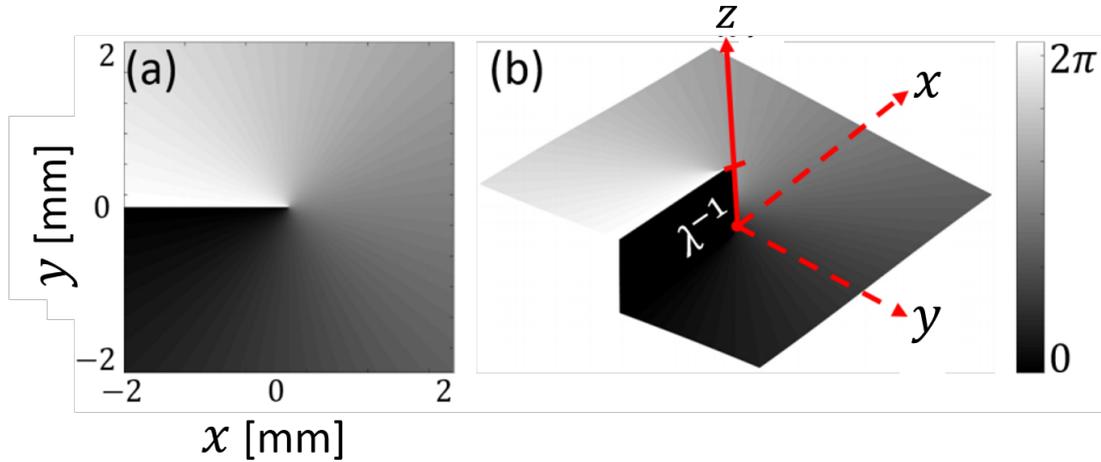
$$U(x, y, z) = \alpha \rho(x, y) e^{i\phi(x, y)} e^{-ikz}, \quad (2.40)$$

em que  $\rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  e  $\phi(x, y) = \tan^{-1}(y/x)$ .

Neste momento, faz-se necessário enfatizar que as superfícies de fase constante, frentes de onda, são determinadas por  $\phi - kz = C$ . Nota-se que a fase varia linearmente com  $z$ , de modo que tomando  $C = 0$ , temos que  $z = \phi/k$ . Somando ao último resultado o fato de que  $x = \rho \cos \phi$  e  $y = \rho \sin \phi$ , conclui-se que tal frente de onda tem a forma helicoidal com um passo de um comprimento de onda. A Fig.2.11(a) mostra o perfil desta superfície em duas dimensões, enquanto que a Fig.2.11(b) exhibe a forma da frente de onda em 3D.

A partir da Fig.2.11(b), vemos que a frente de onda tem um formato de parafuso. Além disso, vemos que os valores de fase variam de 0 a  $2\pi$ , em que o valor de fase 0 corresponde ao ponto  $z = 0$  e  $2\pi$  a  $z = \lambda$ . Este é precisamente o tipo de singularidade que aparece nos nossos feixes Laguerre-Gauss de ordem  $m = 1$ . Se, em vez disso, definimos  $\alpha = 0$  e  $\beta \neq 0$ , temos um vórtice com a forma funcional  $(x - iy)$  [8].

Figura 2.11: Ilustração da distribuição transversa da fase do campo  $U(x, y, z)$ . (a) perfil transverso ( $x, y$ ); b) visão 3D da figura em (a). O ponto vermelho em (a) indica uma singularidade genérica positiva.



Fonte: Autor.

### Singularidade de Borda

Uma singularidade de borda é representada como sendo uma linha singular paralela ao eixo  $x$  e que passa pela origem. Desta maneira, similarmente ao caso anterior, espera-se que as derivadas em relação a  $x$  próximas à singularidade sejam aproximadamente zero. Isso implica que a equação paraxial toma a seguinte forma

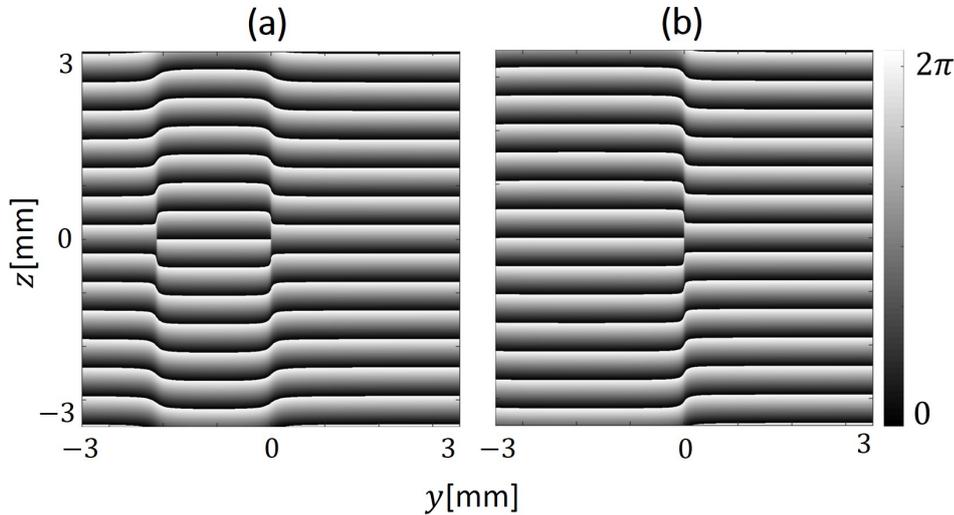
$$\frac{\partial^2 A(\mathbf{r})}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial A(\mathbf{r})}{\partial z} = 0. \quad (2.41)$$

Uma solução para a Eq.(2.41) é dada por  $A(x, y, z) = \chi(ay + ky^2 + iz)$  [8]. Em que  $\chi$  e  $a$  são constantes. Isso implica que a solução geral pode ser expressa como

$$U(x, y, z) = \chi(ay + ky^2 + iz)e^{-ikz}. \quad (2.42)$$

Utilizando a definição de singularidade de fase, constata-se facilmente que há dois pontos em que o campo se anula:  $(y, z) = (0, 0)$  e um segundo em  $(y, z) = (-a/k, 0)$ . Isso significa que as singularidades formam duas retas paralelas localizadas no plano  $z = 0$ . A Fig.2.12(a) mostra o perfil das frentes de onda (fase) no plano transversal  $(y, z)$ .

Figura 2.12: Ilustração da distribuição transversa da fase do campo  $U(x, y, z)$  da Eq.(2.42) em (a) exibe um par de singularidades; enquanto que o padrão de fase do campo  $U(x, y, z)$  da Eq.(2.43) em (b), contém apenas uma única linha singular isolada.



Fonte: Adaptado pelo autor de [8], 2016, pg. 44.

Nota-se que seguindo os contornos de fase preta do lado esquerdo da figura Fig.2.12, podemos ver que um contorno preto adicional aparece à direita de  $y = 0$  que está desacoplado com qualquer contorno à esquerda. Além disso, de acordo com a Fig.2.12, tem-se que as linhas singulares são retas perpendiculares à direção de propagação.

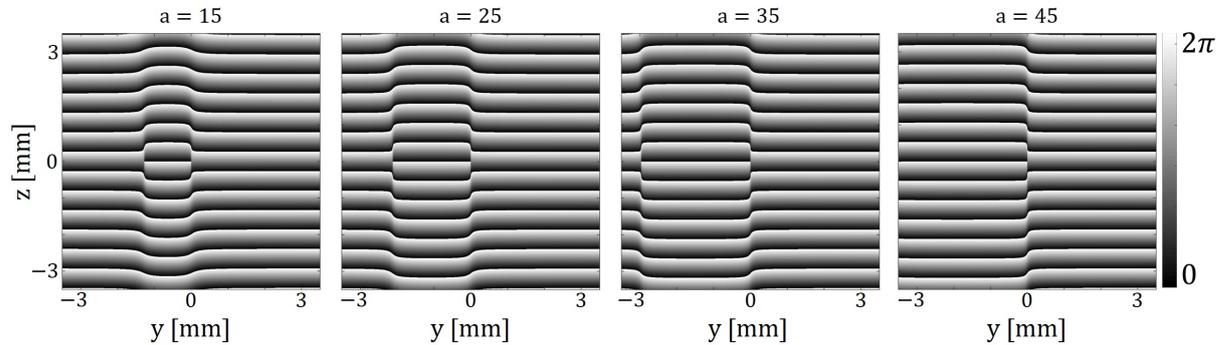
Porém, na Fig.2.12(b) temos um único ponto singular, semelhante ao caso da singularidade helicoidal em que o problema se resumia a apenas uma linha singular isolada, surge então a seguinte questão: como isolar uma singularidade de borda? Pra responder a esta pergunta, iniciamos propondo a observação do comportamento do perfil de fase do campo  $U(x, y, z)$  no plano  $(y, z)$  quando tomamos diferentes valores para a constante  $a$ , como mostrado na Fig.2.13.

Notamos que à medida que  $a$  assume valores cada vez maiores, a singularidade em  $y = -a/k$  se desloca mais e mais para esquerda de  $y = 0$ , de maneira que chegará o momento que esta estará tão distante da origem que, localmente, é como se tivéssemos apenas uma linha singular isolada em  $y = 0$ . Deste modo, a nova forma funcional do campo óptico que contém este vórtice é dado por

$$U(x, y, z) = \chi(ay + iz)e^{-ikz}, \quad (2.43)$$

e como podemos ver, é muito parecido com aquele do vórtice helicoidal. O perfil transversal das

Figura 2.13: Ilustração do comportamento das singularidades de borda quando tomamos valores cada vez maiores para a constante  $a$ .



Fonte: Autor.

frentes de onda de  $U(x, y, z)$  no plano transversal  $(y, z)$  é mostrado na Fig.2.12(b).

## 2.5.2 Carga Topológica

Em geral, as singularidades de fase de um campo óptico são linhas curvas no espaço e no tempo. Já é bem conhecido que em um dado ponto da linha, para um dado tempo fixado, ao escolhermos o sentido de um pequeno circuito ao redor da linha, a mudança total de fase nesse entorno é  $2\pi$  [38]. O sentido escolhido para o circuito é chamado de sentido de circulação que é definido pela regra da mão direita, em que o dedo polegar atribui uma direção à linha singular que será representada pelo vetor unitário,  $\hat{\mathbf{d}}$ . A representação geométrica disso pode ser vista na Fig.2.14(a).

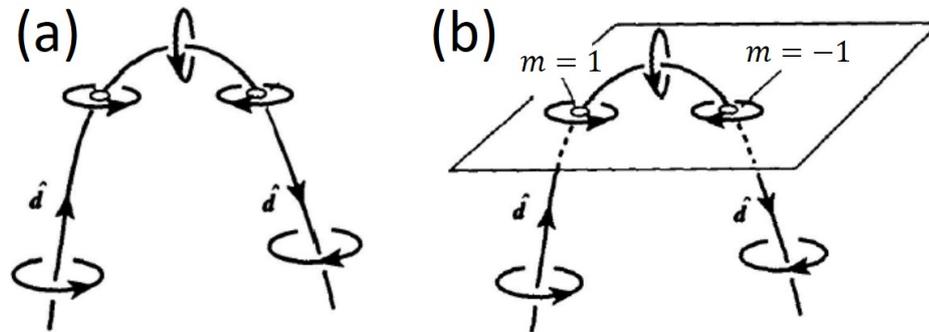
Vimos anteriormente que a fase de um campo de onda aumenta ou diminui por um múltiplo inteiro de  $2\pi$  quando se percorre um caminho fechado em torno da singularidade. Este comportamento discreto sugere a existência de um índice,  $m$ , definido pela integral da fase em um circuito positivo (anti-horário) ao redor de um ponto pertencente a um plano perpendicular à linha singular, como mostrado na Fig.2.14(b). Isto se deve ao fato de que em muitas ocasiões observamos a distribuição de fase de uma onda em um plano [36]. Tal índice pode ser quantificado a partir da integral,

$$m = \frac{1}{2\pi} \oint d\phi$$

e é referido como carga topológica associada a uma dada singularidade. No caso de a singularidade ser genérica,  $m = \pm 1$ .

Enfatiza-se que analisando a direção do vetor  $\hat{\mathbf{d}}$  no plano transversal que intersecta a linha

Figura 2.14: Em (a) é ilustrado o sentido de circulação da linha singular. Já em (b), tem-se que um plano geral intersecta a mesma linha em dois pontos, os quais serão identificados por  $m = \pm 1$  quando visto de cima ou por  $m = \mp 1$  quando visto de baixo [38].



Fonte: Adaptado pelo autor de [38], 1999, pg. 105.

singular, tem-se uma maneira de determinar o sinal da singularidade. Pois, se  $\hat{\mathbf{d}}$  aponta para fora da superfície,  $m$  é positivo, caso contrário, a carga topológica é negativa. Além disso, deve-se notar que a carga topológica é um conceito estritamente bidimensional, adequado para lidar apenas com singularidades pontuais (pontos singulares), que são aquelas comumente observadas no laboratório onde o feixe de luz possui uma direção de propagação bem definida e nós fazemos as medições do padrão de difração em um plano perpendicular à direção de propagação [8].

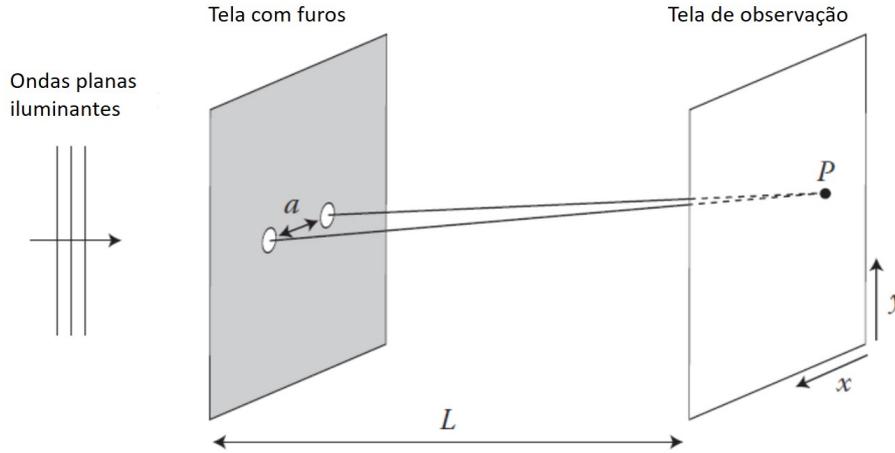
### 2.5.3 Vórtices Ópticos Genéricos e não Genéricos

Do ponto de vista das singularidades de fase dos campos óptico, a abordagem do que é ou não genérico é feita de maneira muito simples a partir do experimento de Young de dois furos [8]. Um par de pequenos furos circulares, de raios comparáveis ao comprimento de onda da luz incidente, são separados por uma distância  $a$  na tela. Uma onda monocromática de comprimento de onda,  $\lambda$ , está incidindo sobre a tela a partir do lado esquerdo; a luz transmitida pelas aberturas chega a uma tela de observação a uma distância  $L$  da tela dos orifícios, a ilustração geométrica do esquema experimental é mostrado na Fig.2.15.

Ao considerar que os campos que iluminam cada furo têm amplitudes  $U_1$  e  $U_2$  e que, para desprezar fatores geométricos adicionais considera-se apenas a distribuição da luz perto do eixo central na tela de observação e, desta forma, o campo total observado num ponto  $P$  no anteparo pode então ser escrito como

$$U(x, y, L) = -\frac{ib}{\lambda} \left[ U_1 \frac{e^{ikR_1}}{R_1} + U_2 \frac{e^{ikR_2}}{R_2} \right], \quad (2.44)$$

Figura 2.15: Ilustração da configuração do experimento de Young de dois furos.



Fonte: Adaptado pelo autor de [8], 2016, pg. 35.

onde  $b$  é a área de cada furo e  $a$  é a distância de separação entre eles. Além disso,  $R_1 = [(x - a/2)^2 + y^2 + L^2]^{1/2}$  e  $R_2 = [(x + a/2)^2 + y^2 + L^2]^{1/2}$ , com  $L$  sendo a distância entre os dois planos. É fácil mostrar que ao assumir que a tela de observação está suficientemente longe dos furos, o campo na tela de observação é dado aproximadamente por [8]

$$U(x, y, L) \approx -\frac{2ib}{\lambda} \frac{e^{ikL}}{L} e^{ika^2/8L} e^{ik(x^2+y^2)/2L} [U_1 e^{ikax/L} + U_2 e^{-ikax/L}], \quad (2.45)$$

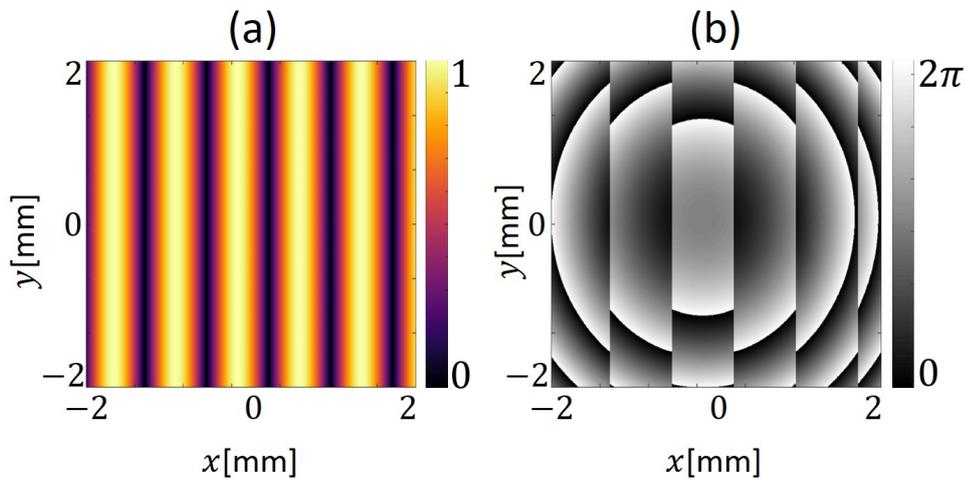
Quando a onda iluminante é uma onda plana normalmente incidente de amplitude uniformemente constante,  $U_1 = U_2 = U_0$ , o campo em  $P$  é dado aproximadamente por

$$U(x, y, L) \approx -U_0 \frac{4ib}{\lambda} \frac{e^{ikL}}{L} e^{ika^2/8L} e^{ik(x^2+y^2)/2L} \cos\left(\frac{kax}{L}\right), \quad (2.46)$$

A Fig.2.16 mostra os padrões de amplitude de fase desse campo. Observa-se que o padrão de amplitude é constituído por bandas claras e escuras (amplitude nula) de maneira alternadas. Enquanto que o padrão de fase exhibe linhas verticais onde a fase salta abruptamente. Nota-se que estes saltos correspondem aos zeros de amplitude. Estas linhas bidimensionais são as singularidades de fase do experimento de dois furos e, como veremos mais adiante, são não-genéricas. Além disso, ao supor uma mudança em  $L$ , verifica-se que os zeros de amplitude na experiência são superfícies no espaço tridimensional [8].

Porém, sabe-se que em sistemas complicados envolvendo a dispersão ou difração da luz, espera-se que o padrão de interferência resultante seja devido a superposição de mais de dois campos. Com isso em mente, surge a seguinte questão: o que esperar nesses casos? Para responder esta pergunta, analisa-se o padrão de interferência do interferômetro de três furos mostrado

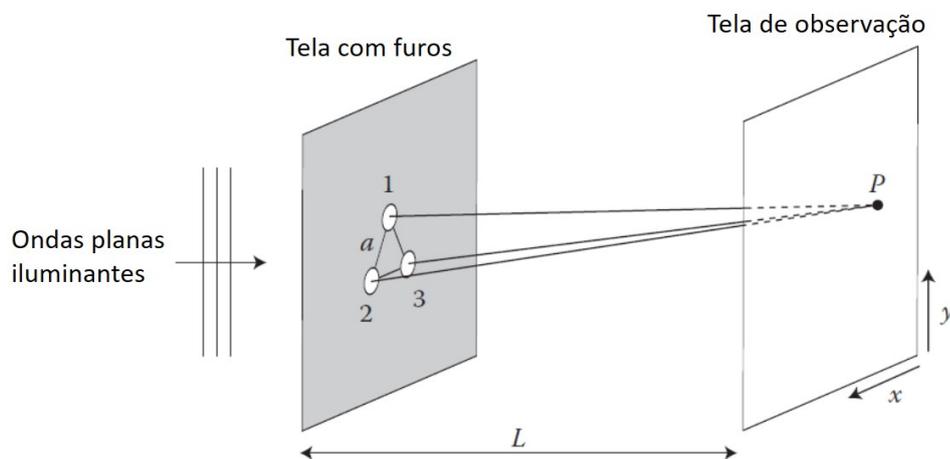
Figura 2.16: Em (a), é exibido o padrão de intensidade e em (b) a distribuição de fase do experimento de Young de dois furos.



Fonte: Adaptado pelo autor de [8], 2016, pg. 37.

na Fig.2.17. Neste caso, os furos estão dispostos na forma de um triângulo equilátero de lado

Figura 2.17: Ilustração da configuração de um experimento de Young de três furos.



Fonte: Adaptado pelo autor de [8], 2016, pg. 37.

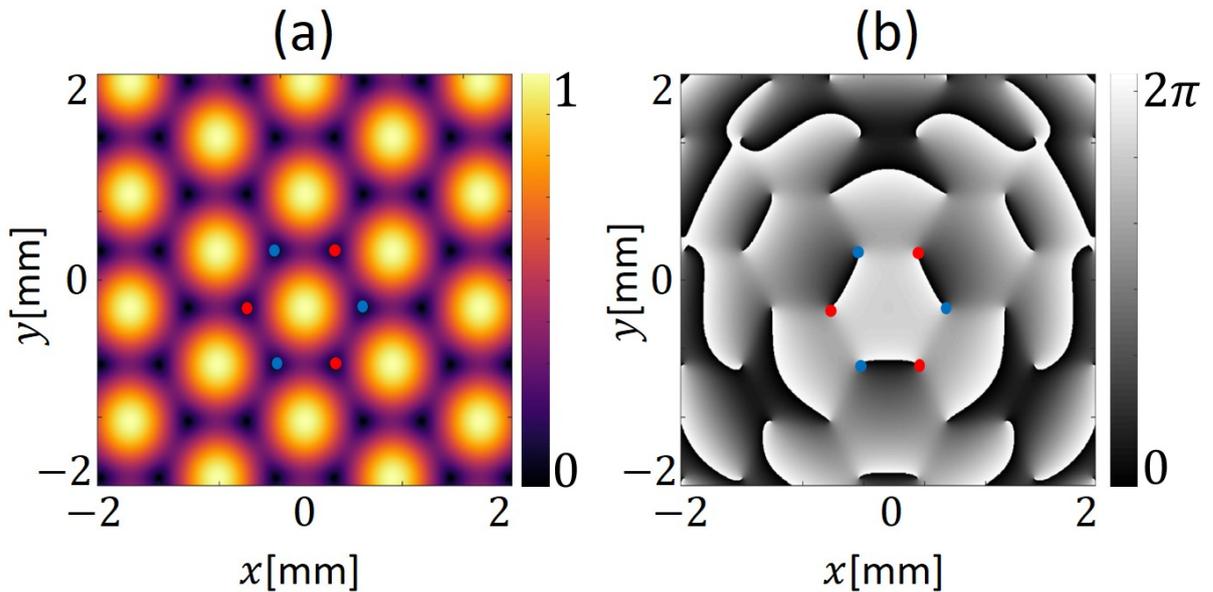
$a$ , e suas posições na tela são dadas por  $(x_1, y_1) = (0, \sqrt{3}a/3)$ ,  $(x_2, y_2) = (a/2, -\sqrt{3}a/6)$  e  $(x_3, y_3) = (-a/2, -\sqrt{3}a/6)$  [8]. Desse modo, no caso que  $U_1 = U_2 = U_3 = U_0$ , o campo no

ponto  $P$  é dado por

$$U(x, y, L) \approx - U_0 \frac{2ib}{\lambda} \frac{e^{ikL}}{L} \left[ \exp \left[ ik \frac{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}{2L} \right] + \exp \left[ ik \frac{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}{2L} \right] + \exp \left[ ik \frac{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2}{2L} \right] \right]. \quad (2.47)$$

A Fig.2.18 exibe os padrões de amplitude e fase desse campo. Na Fig.2.18(a) vemos um conjunto de pontos brilhantes com um conjunto complementar de regiões escuras. Olhando para o padrão de fase, nota-se que os pontos escuros são singularidades de fase do campo. É importante ressaltar que a maneira mais segura de ter certeza de que uma região escura do campo de ondas é uma singularidade, e não um quase zero de amplitude, é observando a distribuição espacial de fase.

Figura 2.18: Novamente, em (a), é exibido o padrão de intensidade e em (b) a distribuição de fase do experimento de Young de três furos.



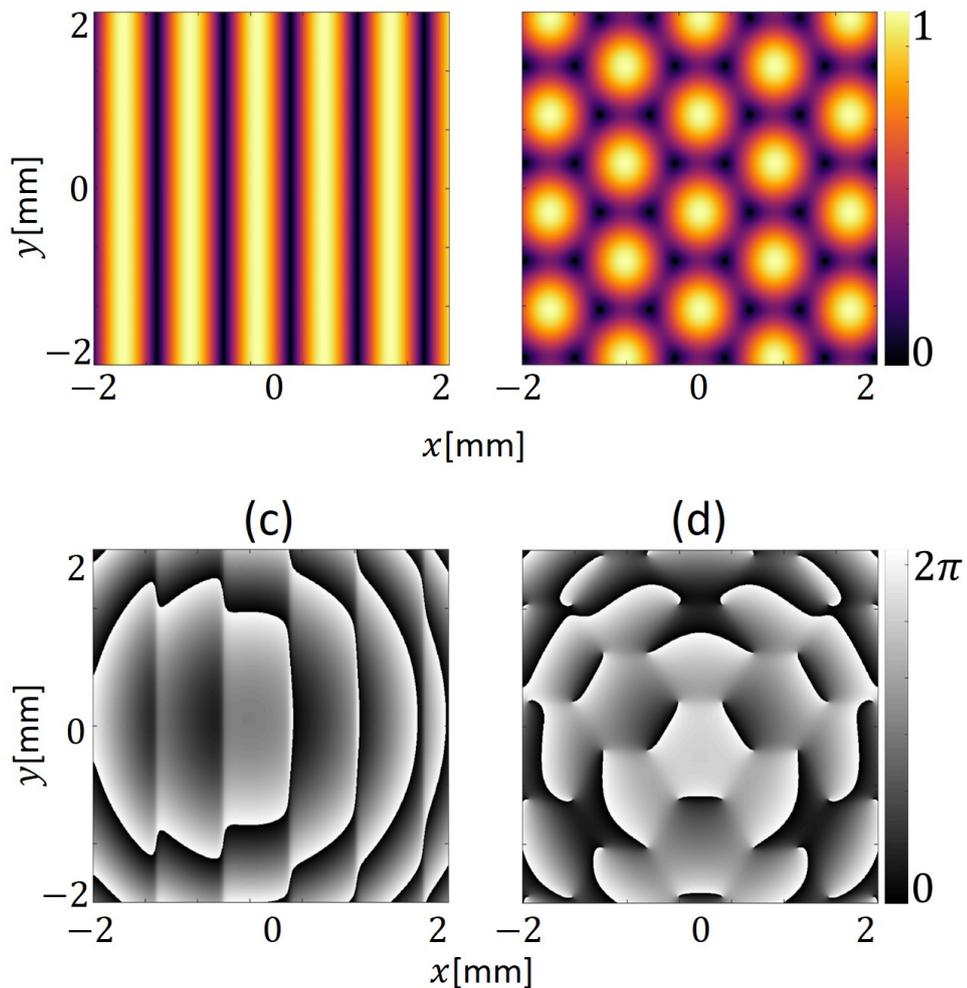
Fonte: Adaptado pelo autor de [8], 2016, pg. 38.

É importante salientar que no padrão de fase de um campo gerado a partir de um interferômetro de três furos, como mostra a Fig.2.18(b), há várias singularidades de fase de carga topológica  $m = \pm 1$ . Entretanto, acontece um comportamento similar a esse se o processo for repetido para um interferômetro de quatro, cinco furos, e assim por diante [8]. Aparentemente, estas são as singularidades típicas que ocorrem em uma experiência de interferência geral, por

isso são chamadas de genéricas, enquanto que o padrão produzido no interferômetro de dois furos é um caso muito especial e incomum.

A partir desses dois exemplos, surge uma questão interessante: o que acontece quando perturbamos o campo resultante a partir de uma pequena mudança na amplitude da luz proveniente de um dos furos para ambos os casos citados acima? Formula-se uma resposta a esta indagação ao analisarmos o comportamento das fases dos campos para o caso de  $U_1 = 1.2$  para os interferômetros de dois e três furos. A Fig.2.19 mostra os padrões de amplitudes e de fases para a situação considerada, respectivamente.

Figura 2.19: (a) e (b) exibem os padrões de intensidades dos campos das Eq.(2.46) e Eq.(2.47)s, respectivamente, quando  $U_1 = 1.2$  em ambos os casos; (c) e (d) mostram as respectivas distribuições de fase de Eq.(2.46) e Eq.(2.47), para  $U_1 = 1.2$ .



Fonte: Autor.

A partir das Fig.2.19(a) e (b), não notamos qualquer mudança nas amplitudes dos campos

resultantes, seja para a interferência de duas ondas ou de três. A primeira vista, diríamos que na Fig.2.19(a) tem-se linhas singulares não genéricas, enquanto que na Fig.2.19(b) tem-se singularidades genéricas, uma vez que as distribuições de amplitudes são iguais àquelas do caso em que os campos não foram perturbados.

Porém, quando olhamos para os padrões nas Figs.2.19(c) e (d), vemos que a distribuição de fase do caso de dois furos muda significativamente, como mostrado na Fig.2.19(c). Os saltos de fase descontínuos transformaram-se em mudanças rápidas, mas suaves na fase. Conclui-se que o novo padrão de intensidade não tem quaisquer zeros; na verdade, pode-se mostrar que o experimento de dois furos de Young só tem zeros quando a luz que o ilumina tem exatamente a mesma amplitude nas aberturas [8].

Olhando para padrão de fase do caso de três furos, ilustrado na Fig.2.19(d), verifica-se que as singularidades ainda estão presentes. Este fato mostra que apenas vórtices ópticos genéricos são estáveis sob pequenas perturbações do sistema gerador. Portanto, agora sabemos que o uso da palavra "genérica" para designar uma singularidade de fase, surge do fato que o aparecimento desses defeitos topológicos na frente de onda devem ser a observação mais comum nos eventos de interferência em geral.

Outro caso particular do aparecimento de superfícies singulares (singularidades não-genéricas), ocorre quando há uma forte simetria no sistema (geralmente cilíndrica) [36]. Um bom exemplo de um campo óptico com esta característica é o feixe Bessel que tem amplitude proporcional à função de Bessel de primeiro tipo de ordem  $m$ ,  $J_m(\rho)$ . Desta maneira, a menos da região central do feixe, existem infinitos anéis de amplitude nula,  $J_m(\rho) = 0$ , e conseqüentemente, infinitas superfícies singulares. Esta mesma situação também é válida para modos Laguerre-Gauss de índice radial  $p \neq 0$ , porém, neste caso, a quantidade de superfícies singulares dependerá do valor assumido por  $p$ .

# 3. Método Alternativo para Obtenção de Feixes Ópticos Não-difrativos

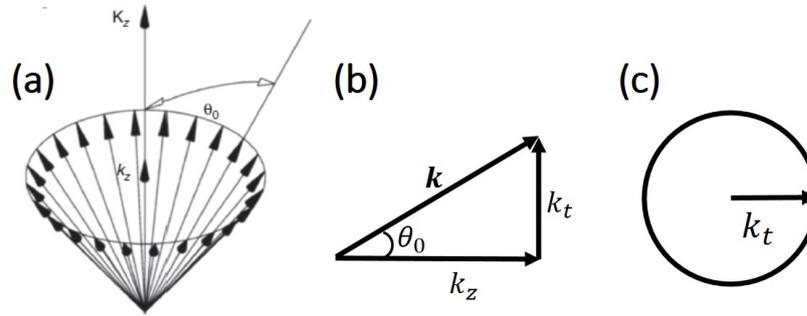
## 3.1 Introdução

Vimos anteriormente que a equação de Helmholtz (EH) rege a propagação de luz monocromática e que a partir desta equação percebe-se que a difração é uma propriedade natural do campo de onda de luz, de modo que tal fenômeno não está relacionado apenas à transmissão da luz através de aberturas e obstáculos, onde é observada com mais evidência. Em vez disso, entende-se que a difração é uma característica implícita de luz monocromática propagante.

Já é bem conhecido que qualquer campo óptico de luz pode ser representado por uma superposição de ondas planas, à medida que o campo se propaga, essas ondas planas interferem umas com as outras construtiva e destrutivamente, sendo que este processo de interferências depende da fase relativa adquirida por cada onda plana na direção de propagação [40]. Este fato constitui uma maneira alternativa de obter soluções que representam feixes não difratantes. Entretanto, todos os feixes não difrativos fazem parte do caso em que cada onda plana de uma dada superposição muda de forma idêntica.

Neste cenário, os feixes Bessel são vistos como um conjunto de ondas planas de igual amplitude com iguais componentes longitudinais do vetor de onda,  $k_z$ . Visualmente, pode-se imaginar que tais superposições de ondas formam um cone de luz em que o eixo do cone corresponde à direção de propagação de um dado modo Bessel. Nesta abordagem, admite-se que os vetores de onda  $\mathbf{k}$  residem na superfície do cone. Além disso, considera-se que estes vetores podem ser decompostos em componentes transversal,  $k_t$ , e longitudinal,  $k_z$ , em que  $k = |\mathbf{k}| = \sqrt{k_t^2 + k_z^2}$ . A Fig.3.1 mostra esquematicamente as disposições das componentes dos vetores de onda.

Figura 3.1: a) Disposições dos vetores de onda  $\mathbf{k}$  sobre a superfície de um cone; b) decomposição do vetor  $\mathbf{k}$  em suas partes transversa,  $k_t$ , e longitudinal,  $k_z$ ; c) a base do cone compreende uma circunferência de raio  $k_t$ .



Fonte: Adaptada de [41], 2010, pg. 1215.

Uma alteração nas amplitudes das ondas planas pode gerar feixes elípticos e parabólicos. Além disso, existem outras soluções que não se propagam em linhas retas, como o feixe Airy [42].

Do ponto de vista quantitativo, inicia-se escrevendo a equação de Helmholtz como:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) U(x, y, z) = 0. \quad (3.1)$$

Por conveniência, escolhemos o eixo  $z$  como a direção de propagação. Deste modo, é fácil verificar que a onda plana a seguir é solução da Eq.(3.1)

$$U_0(x, y, z) = \exp[ik_z z - ik_t(x \cos \phi + y \sin \phi)], \quad (3.2)$$

desde que a relação  $k^2 = k_t^2 + k_z^2$  seja satisfeita. Onde  $k_z$  é o componente longitudinal do vetor de onda e  $k_t$  corresponde à componente transversal. A variável  $\phi$  é o ângulo polar do plano transversal onde reside  $k_t$ . Se quisermos obter um feixe não difrativo, como o feixe Bessel, por exemplo, precisa-se de uma superposição de múltiplas ondas planas. Esta superposição pode ser descrita usando a integral de Whittaker [40],

$$U(x, y, z) = e^{ik_z z} \int_0^{2\pi} A(\phi) e^{ik_t(x \cos \phi + y \sin \phi)} d\phi, \quad (3.3)$$

que é uma solução da equação de Helmholtz. De fato,

$$\left( \nabla_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) e^{ik_z z} \int_0^{2\pi} A(\phi) e^{ik_t(x \cos \phi + y \sin \phi)} d\phi = 0,$$

$$\left( \nabla_t^2 - k_z^2 + k^2 \right) e^{ik_z z} \int_0^{2\pi} A(\phi) e^{ik_t(x \cos \phi + y \sin \phi)} d\phi = 0.$$

Como  $k_t^2 = k^2 - k_z^2$ , então

$$e^{ik_z z} \int_0^{2\pi} A(\phi) (\nabla_t^2 + k_t^2) e^{ik_t(x \cos \phi + y \sin \phi)} d\phi = 0,$$

$$e^{ik_z z} \int_0^{2\pi} A(\phi) [-k_t^2(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + k_t^2] e^{ik_t(x \cos \phi + y \sin \phi)} d\phi = 0. \quad (3.4)$$

Uma vez que  $\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$ , estar provado que a integral de Whittaker satisfaz a equação de Helmholtz. Além disso, a função complexa  $A(\phi)$  define a fase e a amplitude das diferentes ondas planas que compõem o feixe não difrativo.

Deste modo, percebe-se que um feixe não difrativo é dado por uma superposição de múltiplas ondas planas tendo vetor de onda transverso,  $k_t$ , restrito em um círculo. Hernández-Figueroa et al afirmam que qualquer função complexa  $A(\phi)$  define um feixe não difrativo. Entretanto, a integral de Whittaker só pode ser expressa analiticamente para alguns casos particulares de  $A(\phi)$  [40]. Um destes casos ocorre quando  $A(\phi) = e^{-im\phi}$ , de modo que

$$U(x, y, z) = e^{ik_z z} \int_0^{2\pi} e^{-im\phi} e^{ik_t(x \cos \phi + y \sin \phi)} d\phi. \quad (3.5)$$

A relação entre as coordenadas cartesianas e cilíndricas, para o plano transverso, é expressa como  $x = \rho \cos \phi'$  e  $y = \rho \sin \phi'$ , logo, a Eq.(3.5) pode ser escrita como

$$U(\rho, \phi, z) = e^{ik_z z} \int_0^{2\pi} e^{-im\phi} e^{ik_t \rho (\cos \phi \cos \phi' + \sin \phi \sin \phi')} d\phi$$

$$= e^{ik_z z} \int_0^{2\pi} e^{-im\phi} e^{ik_t \rho [\cos(\phi - \phi')]} d\phi.$$

Fazendo uma mudança de variável, em que  $\theta = \phi - \phi'$ , tem-se que

$$U(\rho, \phi, z) = e^{ik_z z} e^{-im\phi'} \int_0^{2\pi} e^{-im\theta} e^{ik_t \rho \cos \theta} d\theta. \quad (3.6)$$

Sabendo que a função Bessel de primeiro tipo de ordem  $m$  é dada por [43]:

$$J_n(x) = \frac{i^{-m}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-im\theta} e^{ix \cos \theta} d\theta. \quad (3.7)$$

Isso implica que

$$U(\rho, \phi, z) = A_m J_m(k_t \rho) e^{-im\phi} e^{ik_z z}. \quad (3.8)$$

em que  $A_m$  é uma constante. Deste modo, verifica-se novamente que a intensidade óptica dos modos Bessel é dada por

$$I(\rho, \phi, z) = |A_m|^2 |J_m(k_t \rho)|^2.$$

A importância de estudar feixes não difrativos se justifica no fato de que estes tipos de feixes têm uma grande gama de possíveis aplicações. No cenário da comunicação óptica, principalmente, eles surgem como uma alternativa relevante de canal de envio de informação, pois podem ser projetados para propagar grandes distâncias sem sentir efeitos apreciáveis da difração e serem bastante resistentes a flutuações atmosféricas [44].

Além disso, Arlt *et al*, em 2001, mostraram uma técnica de micromanipulação óptica para mover partículas de tamanho micrométrico com feixe Bessel [45]. Já em 1990, Lu *et al* propoeram um método de geração de imagens médicas usando feixes não paraxiais em vez de gaussiano [46]. Soma-se a essas, potenciais aplicações em metrologia [47] e microscopia [48], além da utilização desses feixes em óptica quântica e não linear [49].

Sabe-se que a equação de Helmholtz pode ser separável em 11 sistemas de coordenadas, mas só é separável nas partes transversa e longitudinal apenas em coordenadas cartesianas, cilíndricas circulares, cilíndricas parabólicas e cilíndricas elípticas [24]. A solução da EH em tais sistemas de coordenadas nos lava aos feixes ópticos Hermite-Gauss, Laguerre-Gauss, Bessel [25], Elípticos [16].

Visto a relevância dos feixes não difrativos, bem como a pouca quantidade de soluções analíticas para a EH, tem-se tentado obter estes feixes com novas formas geométricas com métodos diversos. Podemos citar como exemplo o trabalho de López-Aguayo *et al* [50], em que eles apresentam uma técnica que permite gerar feixes de luz livre do efeito da difração com uma variedade de geometrias transversais. Para isso, lançaram mão de um algoritmo iterativo que otimiza a amplitude e a fase do espectro angular  $A(\phi)$ . Trabalhos com objetivos semelhantes, mas diferindo no tipo de otimização utilizada, podem ser encontrados nas referências [17, 51]. Visto que a obtenção de feixes não difrativos com formas geométricas diversas para o perfil transversal da intensidade é de grande relevância no meio científico e tecnológico, isso nos motivou a também contribuir com tal assunto.

Nossa contribuição consistiu em propor um novo método para obter feixes não difrativos manipulando  $A(\phi)$ , de tal forma que transferiremos a informação de uma dada geometria ao espectro angular a partir da parametrizações de curvas simples. Este método tende ser mais simples do que os métodos tradicionais, que consistem em resolver a EH, bem como os que requerem otimização. Em outras palavras, conseguimos passar a informação geométrica de curvas planas simples para o perfil transversal do feixe manipulando apenas a amplitude da soma de ondas. A seguir mostraremos o modelo teórico para nossa proposta.

## 3.2 Modelo Teórico para Gerar Feixes Não Difrativos a partir da Parametrização de Curvas Simples

O ponto de partida para expressar nosso método de geração de feixes não difrativos é definir o que é uma curva simples ao lançar mão da geometria diferencial. Segundo Abbena *et al*, uma curva simples  $\alpha(\phi) = (\alpha_x(\phi), \alpha_y(\phi))$  é entendida como sendo uma curva regular fechada. Isto é, tal curva é diferenciável, assim como para uma dada constante  $c > 0$ ,  $\alpha(\phi + c) = \alpha(\phi)$  com  $c \in \mathbb{R}$ , onde  $c$  é o período. Além disso,  $\alpha(\phi_1) = \alpha(\phi_2)$  se e somente se  $\phi_1 - \phi_2 = c$  [52].

A parametrização de uma curva regular proporciona expressar o parâmetro escolhido em termos das componentes  $x$  e  $y$  a partir da seguinte relação:  $\phi = \tan^{-1}[\alpha_y(\phi)/\alpha_x(\phi)]$ . Deste modo, ao considerar que estas curvas estão no espaço dos vetores de ondas, propomos que o espectro angular de um dado feixe não difrativo pode ser escrito como segue:

$$A(\phi) = \exp\left(im \tan^{-1}\left[\frac{\alpha_y(\phi)}{\alpha_x(\phi)}\right]\right), \quad (3.9)$$

em que  $m$  é a carga topológica do feixe. Em outras palavras, o que fizemos foi tomar uma curva regular  $\alpha(\phi) = (\alpha_x(\phi), \alpha_y(\phi))$  no espaço dos vetores de onda, de modo que a parametrização desta fornece sua informação geométrica que é transmitida ao feixe não difrativo.

Entretanto, é importante enfatizar que para manter a característica de feixe não difrativo da Eq.(3.3), não alteramos o termo que contém os vetores de ondas transversos das ondas planas  $\exp[ik_t(x \cos \phi + y \sin \phi)]$ . Desta forma, em vez de procurarmos uma forma funcional para  $A(\phi)$  via solução da EH, tudo que precisamos saber é encontrar a parametrização da curva para uma dada geometria.

Como um exemplo trivial podemos citar a parametrização de um círculo de raio unitário, a qual é representada por  $\alpha(\phi) = (\alpha_x(\phi), \alpha_y(\phi)) = (\cos \phi, \sin \phi)$ . Este caso leva a  $A(\phi) = \exp(im\phi)$  e conseqüentemente, como vimos no capítulo 2, isso representa o espectro de um feixe Bessel. Além dessa forma geométrica, exploraremos mais três tipos de geometrias planas que são representadas pela elipse, cardioide e a seno oval. Entretanto, desde que a curva em questão seja regular, nosso método não se limita apenas a estes exemplos, sendo possível obter outras geometrias.

Vimos anteriormente que não é possível calcular a integral na Eq.(3.3) analiticamente. Todavia, essa integral representa uma superposição contínua de ondas planas, cada uma com amplitude complexa  $A(\phi)$ . Deste modo, sabendo que uma superposição contínua de ondas nada mais é que uma soma de  $Q$  ondas planas com  $Q \rightarrow \infty$ , podemos reescrever a Eq.(3.3) em uma

versão discreta da seguinte forma:

$$U(x, y, z) = \frac{2\pi}{Q-1} \exp(ik_z z) \sum_{n=0}^{Q-1} \exp\left(im \tan^{-1} \left[ \frac{\alpha_y(\phi_n)}{\alpha_x(\phi_n)} \right]\right) \exp[ik_t(x \cos \phi_n + y \sin \phi_n)], \quad (3.10)$$

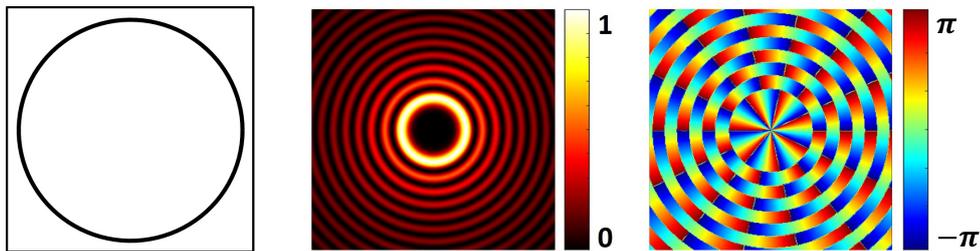
em que  $\phi_n = 2n\pi/(Q-1)$  e  $n = 0, 1, 2, \dots, Q-1$ . Para fins práticos, usando  $Q$  igual a algumas centenas é possível aproximar, com muito boa precisão, o resultado da integral [53]. Nesse contexto, sabendo que a componente transversa do vetor de onda está restrita em um círculo de raio  $k_t$ , assumimos que  $k_t = 2\pi a$ , em que  $a$  é o parâmetro que controla o tamanho das curvas que consideraremos a seguir.

Para mostrar a eficácia de nosso método, mostraremos a seguir o perfil transverso de feixes obtidos a partir da parametrização de curvas simples. Como primeiro exemplo, podemos citar o feixe Bessel de ordem  $m$ , o qual resulta da parametrização de um círculo de raio arbitrário  $a$ , ou seja,

$$\alpha_x = a \cos \phi, \quad \alpha_y = a \sin \phi. \quad (3.11)$$

De fato, quando a parametrização da Eq.(3.11) é substituída na Eq.(3.9), obtém-se que  $A(\phi) = \exp(im\phi)$ . A Fig.3.2 mostra os padrões da distribuição de intensidade e de fase no plano transversal  $xy$ .

Figura 3.2: Feixe gerado a partir da parametrização de uma curva circular com  $m = 7$  e para um vetor de onda transversal  $k_t = 10\pi \text{ mm}^{-1}$ .



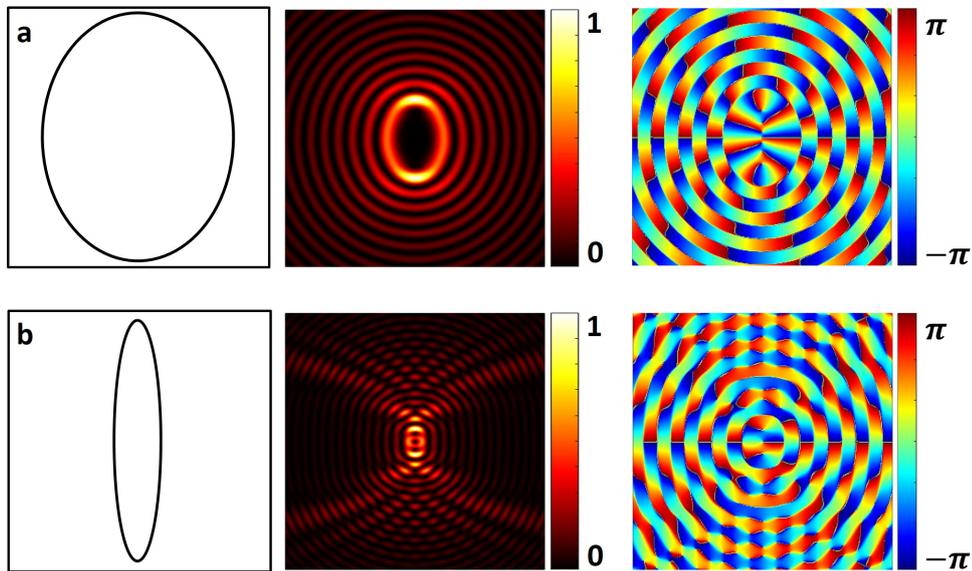
Fonte: Autor

Outro exemplo de curva simples é a elipse. Esperamos que a parametrização desta curva nos forneça um feixe em que o padrão de intensidade no plano transversal  $xy$  tenha a forma elíptica. A parametrização de tal curva é dada por

$$\alpha_x = a \cosh \mu \cos \phi, \quad \alpha_y = a \sinh \mu \sin \phi, \quad (3.12)$$

em que  $0 \leq \mu < \infty$  e  $0 \leq \phi < 2\pi$  são as coordenadas elípticas radial e angular, respectivamente. Para um dado  $\mu$  fixo, ao substituirmos a parametrização da Eq.(3.12) na Eq.(3.9), obtemos um feixe com forma elíptica. A Fig.3.3 mostra os padrões de intensidade e de fase no plano transversal  $xy$  para tal feixe. Na Fig.3.3(a), os parâmetros utilizados foram  $\mu = 1$ ,  $k_t = 10\pi \text{ mm}^{-1}$  e  $Q = 150$ . Com o intuito de verificar a influência de  $\mu$  na construção do feixe, a Fig.3.3(b) foi obtida quando fazemos  $\mu = 0, 2$ . A partir das Fig.3.3(a) e Fig.3.3(b), notamos

Figura 3.3: Feixe gerado a partir da parametrização de uma curva elíptica com  $m = 7$  e para um vetor de onda transversal  $k_t = 10\pi \text{ mm}^{-1}$ . Na figura (a), tem-se a curva, intensidade e fase do feixe gerado com  $\mu = 1$ , respectivamente; e em (b), tem-se a mesma sequência, porém com  $\mu = 0, 2$ .



Fonte: Autor

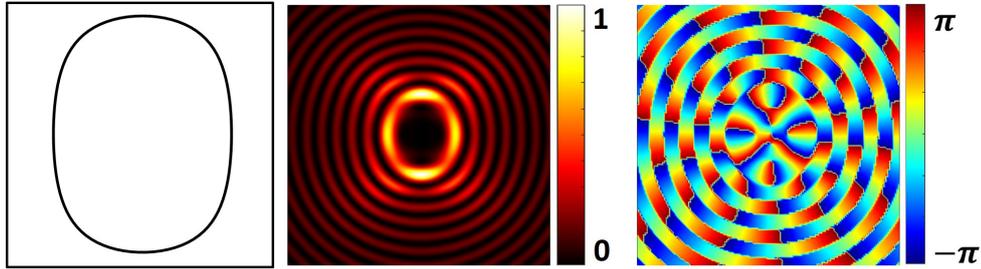
que a elipticidade da curva depende dos valores assumidos pela coordenada elíptica radial  $\mu$ . Deste modo, para valores cada vez maiores de  $\mu$ , o feixe elíptico da Fig.3.3 tende a um feixe circular, como o da Fig.3.2.

Como nosso terceiro exemplo de curva simples, apresentamos o seno oval. Esta curva se mostra ser bastante interessante, uma vez que tem uma grande semelhança com uma elipse, porém, achatada. A parametrização desta curva é dada por

$$\alpha_x = a \cos \phi, \quad \alpha_y = a \sin(\sin(\sin \phi)). \quad (3.13)$$

O feixe obtido a partir dessa parametrização, apresenta-se como se tivesse circunscrito um retângulo dentro de uma elipse. A Fig.3.4 mostra a curva no plano  $\alpha_x$ - $\alpha_y$ , bem como os padrões de intensidade e de fase, no plano  $xy$ , do feixe obtido com a parametrização na Eq.(3.13).

Figura 3.4: Feixe gerado a partir da parametrização de uma curva seno oval com  $m = 7$  e para um vetor de onda transversal  $k_t = 12\pi \text{ mm}^{-1}$ .



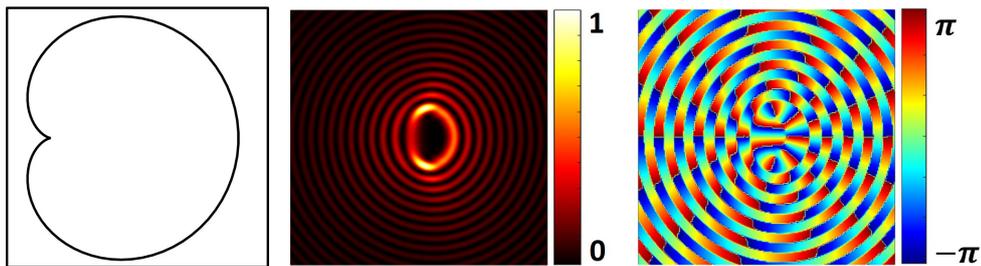
Fonte: Autor

Finalmente, nosso quarto e último exemplo de curva simples se dá através da bem conhecida cardioide. Esta curva tem parametrização dada por

$$\alpha_x = 2a \cos \phi - a \cos 2\phi, \quad \alpha_y = 2a \sin \phi - a \sin 2\phi, \quad (3.14)$$

A Fig.3.5 mostra esta curva no plano  $k_x$ - $k_y$ , além dos padrões de intensidade e de fase, no plano  $xy$ , do feixe obtido com a parametrização da Eq.(3.14). Lembrando que tal feixe é obtido ao substituirmos a parametrização da Eq.(3.14) na Eq.(3.9).

Figura 3.5: Feixe gerado a partir da parametrização de um cardioide com  $m = 7$  e para um vetor de onda transversal  $k_t = 12\pi \text{ mm}^{-1}$ .

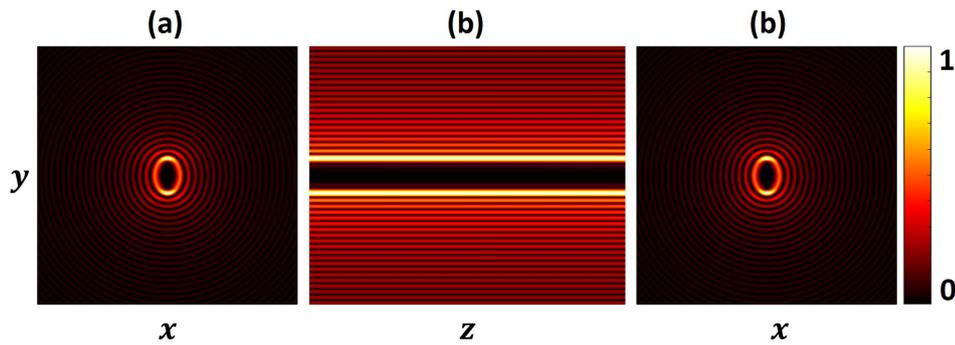


Fonte: Autor

É importante ressaltar que, com exceção do feixe Bessel, nenhuma das parametrizações utilizadas até aqui seguem a forma usual, ou seja,  $\alpha_x = f(\phi) \cos \phi$  e  $\alpha_y = f(\phi) \sin \phi$ , uma vez que percebemos, durante nossos estudos, que todos os feixes gerados com este tipo de parametrização apresentavam forma geométrica circular. Tal fato não nos possibilitava gerar feixes com geometrias diversas. Entretanto, notamos que isso acontece principalmente porque estamos manipulando apenas a fase do espectro angular.

Do ponto de vista teórico, podemos evidenciar o caráter não difrativo dos campos de luz gerados a partir da Eq.(3.9) ao observar a dinâmica de propagação do mesmo. Isso pode ser observado na Fig.3.6, em que é exibido um feixe elíptico, Fig.3.3(a), e a propagamos de uma distância arbitrária ao longo do eixo  $z$ . A Fig.3.6(a) e (c) mostram o perfil transverso dos

Figura 3.6: Ilustração do comportamento do feixe elíptico ao longo de sua propagação de uma distância arbitrária.



Fonte: Autor

padrões de intensidade no plano  $xy$  para  $z = 0$  e  $z$  arbitrário, respectivamente.

A Fig.3.6(b) mostra o perfil  $yz$  do feixe à medida que o mesmo viaja do plano inicial em  $z = 0$  até um plano final arbitrário. Observamos que o comportamento do feixe permanece inalterado ao longo da propagação entre estes dois planos. Isso implica que, de fato, teoricamente, os feixes gerados a partir da Eq.(3.9) são não difrativos.

Teoricamente, nossos feixes se mantêm não difrativos por uma distância que se estende de  $z = -\infty$  a  $z = \infty$ . Pois conforme expresso na Eq.(3.9) estes campos são dados pela superposição de  $Q$  ondas planas de igual amplitude, cujos vetores de propagação possuem uma projeção comum  $k_z$  ao longo do eixo de propagação. Nesse mesmo contexto, o módulo da componente transversa dos vetores de onda é também uma constante dada por  $k_t^2 = k^2 - k_z^2$ . Além disso, é importante enfatizar que, neste contexto, essas  $Q$  ondas planas têm dimensão espacial infinita.

É importante salientar que a projeção dos vetores de onda das múltiplas ondas planas interferindo no plano  $xy$  formam um ângulo  $\theta$  em relação ao eixo  $z$  que pode ser determinado por  $\theta = \tan^{-1}(k_t/k_z)$ . Além disso, as projeções transversa de  $\mathbf{k}$  em relação ao eixo  $x$  formam ângulos que são múltiplos de  $2\pi/(Q - 1)$ .

Enfatiza-se ainda que para um dado campo de luz gerado a partir da Eq.(3.10), a sua trans-

formada de Fourier espacial inversa, no limite de grandes valores de  $Q$ , se assemelha ao caso de uma onda plana passando por uma fenda circular muito fina com uma modulação  $A(\phi)$  dentro dela. Esta situação também pode ser descrita, para feixes não difrativos com geometria circular, como uma superposição de pequenos *spots* gaussianos deslocados radialmente do centro de uma mesma distância, cada um disposto de um certo ângulo azimutal  $\phi_n = 2\pi n/(Q - 1)$  e com certa constante de fase  $A(\phi_n)$  [54].

### 3.3 Resultados: Simulação e Experimento

#### 3.3.1 Simulação Numérica

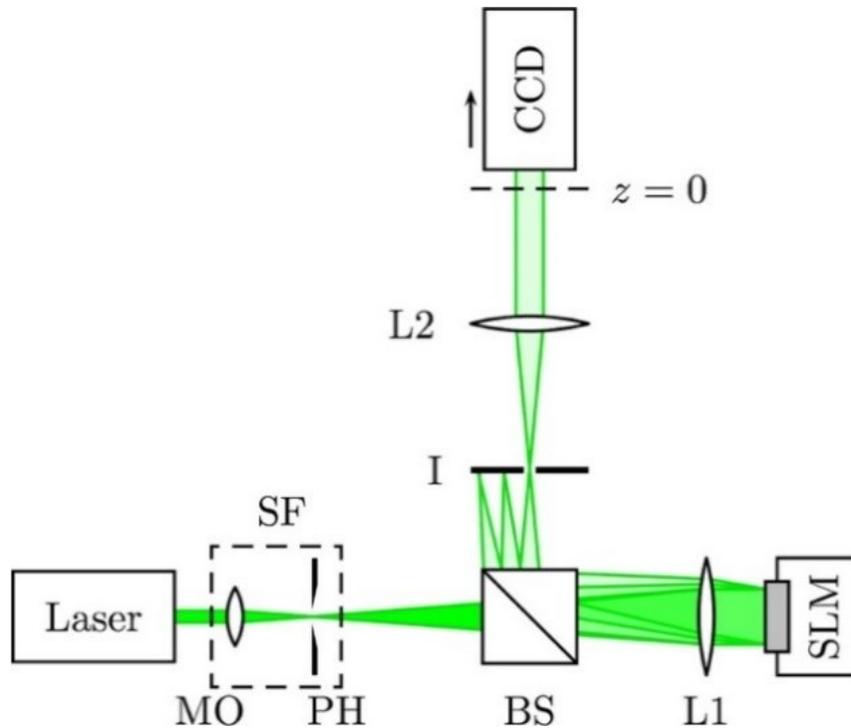
Na seção anterior, vimos que, teoricamente, os feixes obtidos a partir da Eq.(3.10) têm a característica de não difratarem ao serem propagados. Isso só é possível se cada uma das ondas planas que compõem esses feixes tiver extensão espacial infinita. No entanto, em aplicações reais, é impossível obter ondas planas infinitas e a extensão espacial deve ser truncada, e isso implica que a propriedade não difrativa também será limitada a um intervalo finito.

Até este ponto, o nosso método de geração de feixe não difrativo, do ponto de vista teórico, se mostra bem estabelecido para tal propósito. Entretanto, a utilização destes feixes em possíveis aplicações requer que também consigamos gerá-los experimentalmente. Desta maneira, a fim de observar o comportamento da propagação de feixe não difrativos em uma aplicação real, utilizamos a seguinte configuração experimental mostrada na Fig.3.7.

A configuração da Fig.3.7 ilustra a situação em que um laser operando a 532 nm é expandido pela combinação de uma objetiva microscópica (OM) e uma lente  $L1$ , as quais possuem comprimento focal de  $f_{OM} = 1,65$  mm e  $f_1 = 500$  mm, respectivamente. O feixe expandido é colimado pela lente  $L1$  e desta maneira forma uma onda plana que ilumina uniformemente o SLM, colocado atrás da lente  $L1$ . A onda refletida a partir do SLM ganha uma determinada fase inserida neste e ao mesmo tempo é submetida a uma transformada de Fourier pela lente  $L1$ . No foco de  $L1$  é colocado uma íris (I) para selecionar o campo desejado que é difratado na primeira ordem de difração. Uma lente  $L2$ , de comprimento focal  $f_2 = 200$  mm e disposta em configuração  $4f$  com  $L1$ , é usada para formar a imagem do campo de luz na câmera CCD.

Com o objetivo de solidificar a validade da realização do experimento, antes de apresentar os resultados experimentais, simulamos numericamente a situação experimental representado pela Fig.3.7. Deste modo, ao analisarmos nossa configuração, notamos que as dimensões transver-

Figura 3.7: Configuração experimental composta das lentes  $L1$  e  $L2$ ; de um filtro espacial (FE) composto de uma lente objetiva microscópica (OM) e um furinho (P) de  $50 \mu\text{m}$  de diâmetro; de um divisor de feixe (BS); uma íris (I); um modulador espacial de luz (Spatial Light Modulator, SLM); e de uma câmera CCD acoplada a um dispositivo que a translada.



Fonte: Autor

sais do campo na CCD é reescalado espacialmente de um fator adimensional  $S = f_1/f_2 = 0,4$ . Por outro lado, as frequências espaciais,  $k_x$  e  $k_y$ , são aumentadas implicando em um vetor de onda transversal  $k_t$  grande e, portanto, usamos  $k_t \rightarrow k_t/S$ .

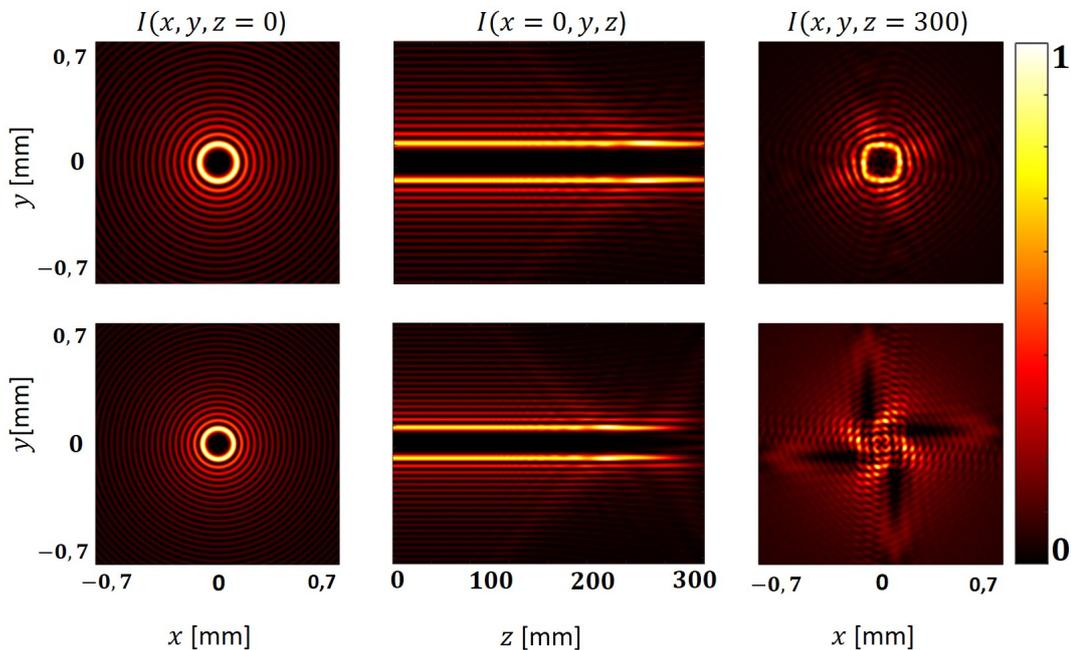
Devido à natureza finita da janela do SLM, o perfil transversal dos feixes no plano  $z = 0$  foi delimitado em uma região quadrada de lados com comprimento  $L = 7S$  mm, sendo 7 mm o tamanho do lado da janela do SLM. Portanto, calculamos o campo em  $z = 0$  usando a Eq.(3.10) e o propagamos usando o método do espectro angular [30, 55]. Além disso, sabendo que em um sistema óptico real as imperfeições experimentais estão sempre presentes, isso nos fez usar  $S = 0,475$  para fazer as simulações concordarem com os experimentos, um valor próximo a  $S = 0,4$ .

O passo inicial da simulação foi gerar um feixe em  $z = 0$  e truncá-lo em uma janela quadrada de lado  $L = 3,33$  mm. No experimento, esta janela corresponde a projeção da tela do SLM na CCD. O segundo passo é propagar o feixe de  $z = 0$  até  $z = 300$  mm, no experimento, isso equivale a transladar a CCD desta mesma distância em pequenos incrementos  $\Delta z = 0,75$

mm. Simulamos os feixes circular, elíptico, cardioide e seno oval.

A simulação do feixe circular foi realizada para o caso em que  $k_t = 10\pi \text{ mm}^{-1}$  e quando  $k_t = 12\pi \text{ mm}^{-1}$ , respectivamente. A primeira linha da Fig.3.8 mostra o padrão de intensidade, no plano transversal  $xy$ , em  $z = 0$ , o perfil da propagação do feixe ao longo de  $z$ , e o padrão de intensidade do campo de luz  $z = 300 \text{ mm}$  para o caso de  $k_t = 10\pi \text{ mm}^{-1}$ . A segunda linha é organizada de maneira similar, mas para  $k_t = 12\pi \text{ mm}^{-1}$ .

Figura 3.8: Padrões de intensidade e perfil da propagação para feixes circulares com componentes transversas do vetor de onda  $k_t = 10\pi \text{ mm}^{-1}$  e  $k_t = 12\pi \text{ mm}^{-1}$ , respectivamente.

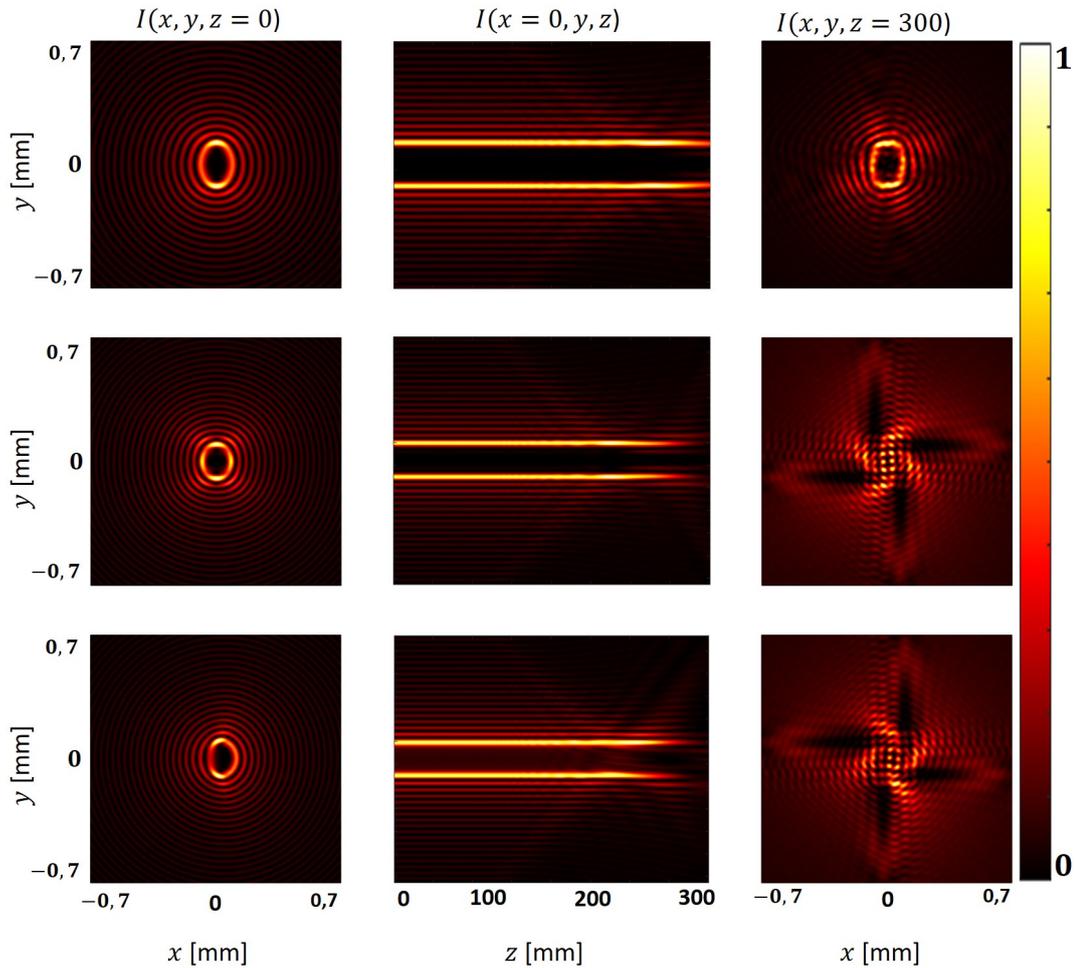


Fonte: Autor

Comparando as propagações da primeira linha com a da segunda linha da Fig.3.8, notamos que o padrão de intensidade do feixe com  $k_t = 10\pi \text{ mm}^{-1}$  permanece invariante por uma distância maior do que aquele com  $k_t = 12\pi \text{ mm}^{-1}$ . Mais adiante tal comportamento ficará mais claro, pois extrairemos uma relação quantitativa que prevê a distância máxima sobre a qual um dado feixe não paraxial permanece sem difratar.

Na Fig.3.9, mostramos a simulação numérica para um feixe elíptico com  $k_t = 10\pi \text{ mm}^{-1}$ , bem como dos feixes cardioide e seno oval, ambos com  $k_t = 12\pi \text{ mm}^{-1}$ . Ao compararmos a primeira linha da Fig.3.9 com a primeira linha da Fig.3.8, nota-se que o comportamento da propagação do feixe elíptico é semelhante ao do feixe circular. Outra observação importante é que ao comparar a segunda e terceira linhas da Fig.3.9 com a segunda linha da Fig.3.8, obser-

Figura 3.9: Padrão de intensidade e perfil da propagação para um feixes elíptico, cardioide e seno oval.



Fonte: Autor

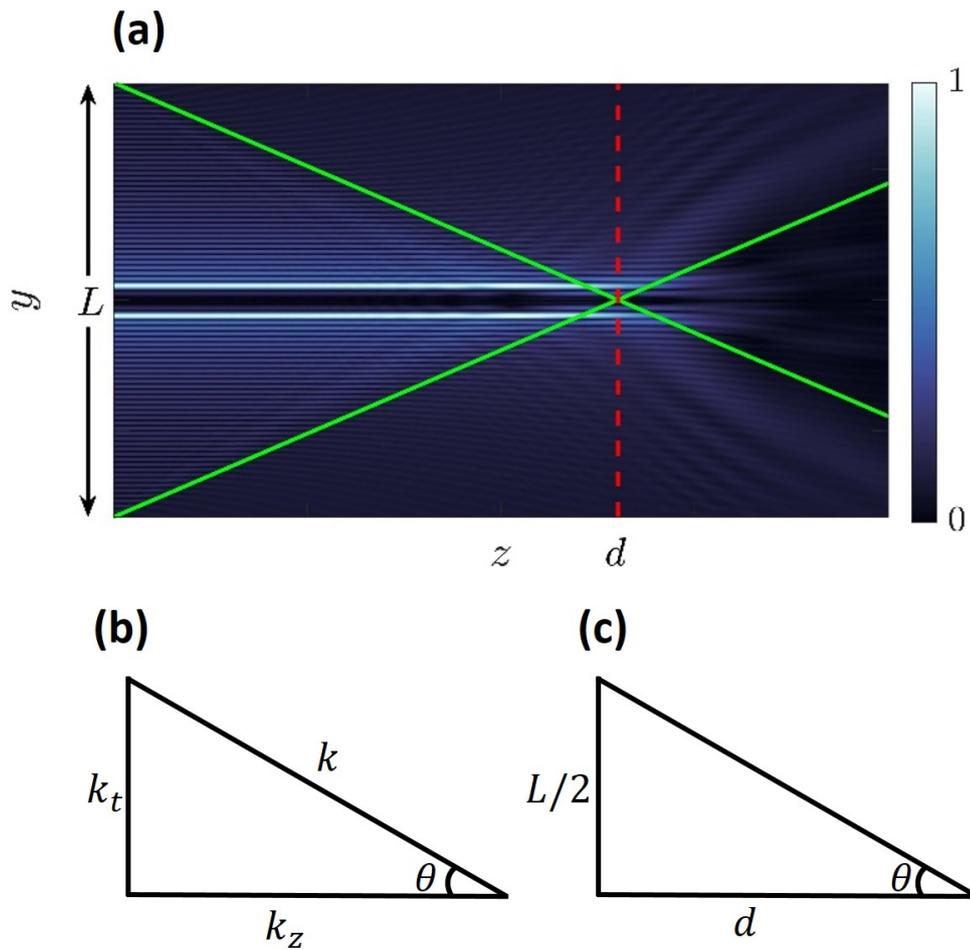
vamos novamente uma certa semelhança entre o comportamento das propagações.

A explicação física para tais semelhanças está no fato de que, no primeiro caso, tanto o feixe circular quanto o elíptico têm o mesmo vetor de onda transversal  $k_t = 10\pi \text{ mm}^{-1}$ . Similarmente, no segundo caso, os feixes circular, cardioide e seno oval compartilham da mesma componente transversal do vetor de onda  $k_t = 12\pi \text{ mm}^{-1}$ . Do ponto de vista observacional, uma vez que ainda não mostramos uma relação quantitativa que rege este comportamento, isto significa que a máxima distância de propagação, livre da difração desses feixes, dependem apenas da magnitude de  $k_t$ , não tendo relação alguma com a forma geométrica destes.

Para explicar esses comportamentos quantitativamente, usamos a Fig.3.10 que ilustra a propagação de um feixe não difrativo truncado. Usando o fato de que todos os feixes gerados a partir da Eq.(3.10) são compostos de múltiplas ondas planas, isso implica que ao analisarmos

a Fig.3.10(a), obtém-se a Fig.3.10(b). Além disso, podemos inferir que a onda plana viajando ao longo da linha verde, com inclinação positiva, é dada por  $\exp(ik_t y)$ . Esta onda, após ter sido propagada de uma distância  $d$  na direção  $z$ , terá se deslocado de  $L/2$  na direção  $y$ , o que nos leva a Fig.3.10(c).

Figura 3.10: Perfil da propagação para um feixe não difrativo arbitrário.



Fonte: Autor

A partir da Fig.3.10(b), temos que  $\tan \theta = k_t/k_z$ . Similarmente, da Fig.3.10(c), temos que  $\tan \theta = L/2d$ , isso implica que a máxima distância que um feixe não paraxial se propaga livre de efeitos difrativos é dado por

$$d = \frac{k_z L}{2k_t}.$$

Nota-se, todavia, que  $k_z = k \cos \theta$ , além disso, na prática, o ângulo  $\theta$  assume valores muito pequenos. Isso implica que  $\cos \theta \approx 1$ , deste modo temos que  $k_z \approx k$ . Portanto, a máxima

distância de propagação de um feixe não difrativo pode expresso como:

$$d = \frac{kL}{2k_t}. \quad (3.15)$$

Para uma dada janela fixa, a Eq.(3.15) nos dá a noção quantitativa a respeito do comportamento da propagação dos feixes não difrativos. Essa equação nos esclarece que a máxima distância de propagação que qualquer feixe não paraxial consegue se manter não difrativo só depende da magnitude da componente transversa do vetor de onda.

### 3.3.2 Resultados Experimentais

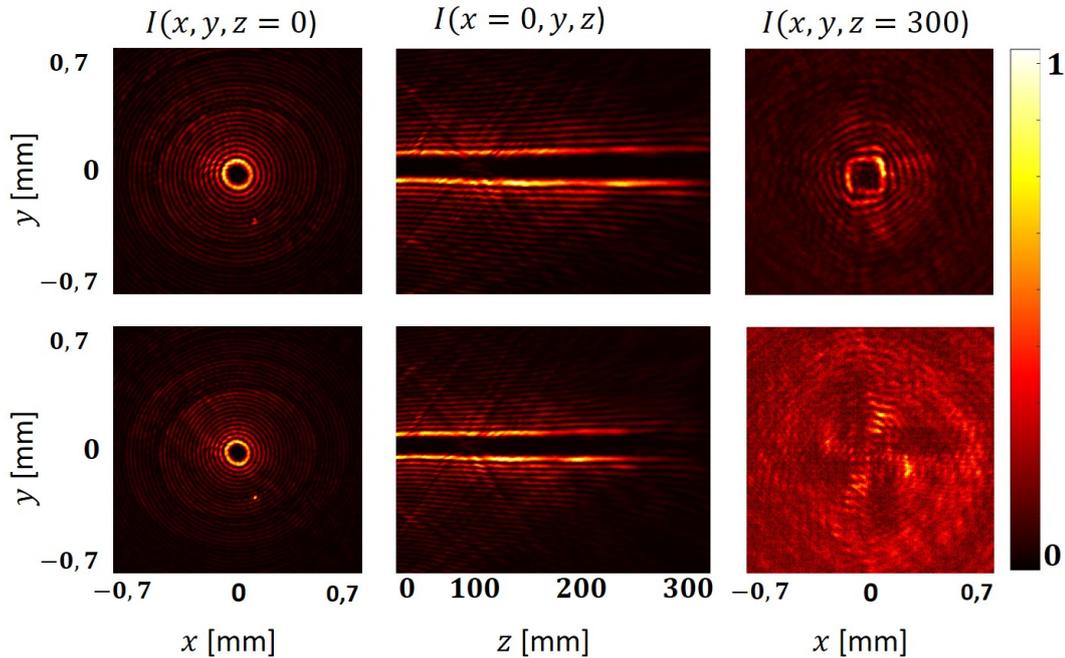
Para a geração experimental dos feixes não difrativos, mostrados nas Figs.3.8 e 3.9, utilizamos os mesmos parâmetros utilizados na simulação numérica. Além disso, codificamos amplitude e a fase do campo, resultante da superposição de ondas planas Eq.(3.10), em um holograma gerado por computador (CGH) [34] e o enviamos eletronicamente ao SLM. A seguir, apresentaremos os resultados experimentais e os compararemos com os resultados da simulação numérica discutidos acima.

A Figs.3.11 mostra os resultados experimentais correspondentes às simulações apresentadas nas Figs.3.8. Na primeira linha da Fig.3.11, temos o padrão de intensidade no plano  $xy$  em  $z = 0$ , o perfil da propagação no plano  $yz$  e padrão de intensidade no plano  $xy$  em  $z = 300$  mm do feixe circular com  $k_t = 10\pi \text{ mm}^{-1}$ . A segunda linha dessa mesma figura está organizada de maneira similar à primeira, porém, tem-se um feixe circular de quem  $k_t = 12\pi \text{ mm}^{-1}$ . Comparando as Figs.3.11 e Figs.3.8, observamos uma boa concordância entre simulação e experimento.

Além disso, levando em conta o fator de redução  $S = 0,475$ , a Eq.(3.15) prevê que a região em que o feixe circular com  $k_t = 10\pi \text{ mm}^{-1}$  permanece sem difratar corresponde a  $d = 299,4$  mm, enquanto que o feixe circular com  $k_t = 12\pi \text{ mm}^{-1}$  corresponde a  $d = 249,5$  mm. Tal previsão está totalmente confirmada pelo experimento, uma vez que a distância de propagação dos feixes experimentais concordam com a simulação.

Os resultados experimentais para a geração dos feixes elíptico, seno oval e cardinoide são mostramos na Fig.3.12. Tais resultados correspondem às simulações apresentadas na Fig.3.9. E como esperado, os resultados para os feixes gerados experimentalmente, tanto as intensidades nos planos inicial e final como o perfil de suas propagações, concordam muito bem com a simulação.

Figura 3.11: Feixes circulares gerados experimentalmente.

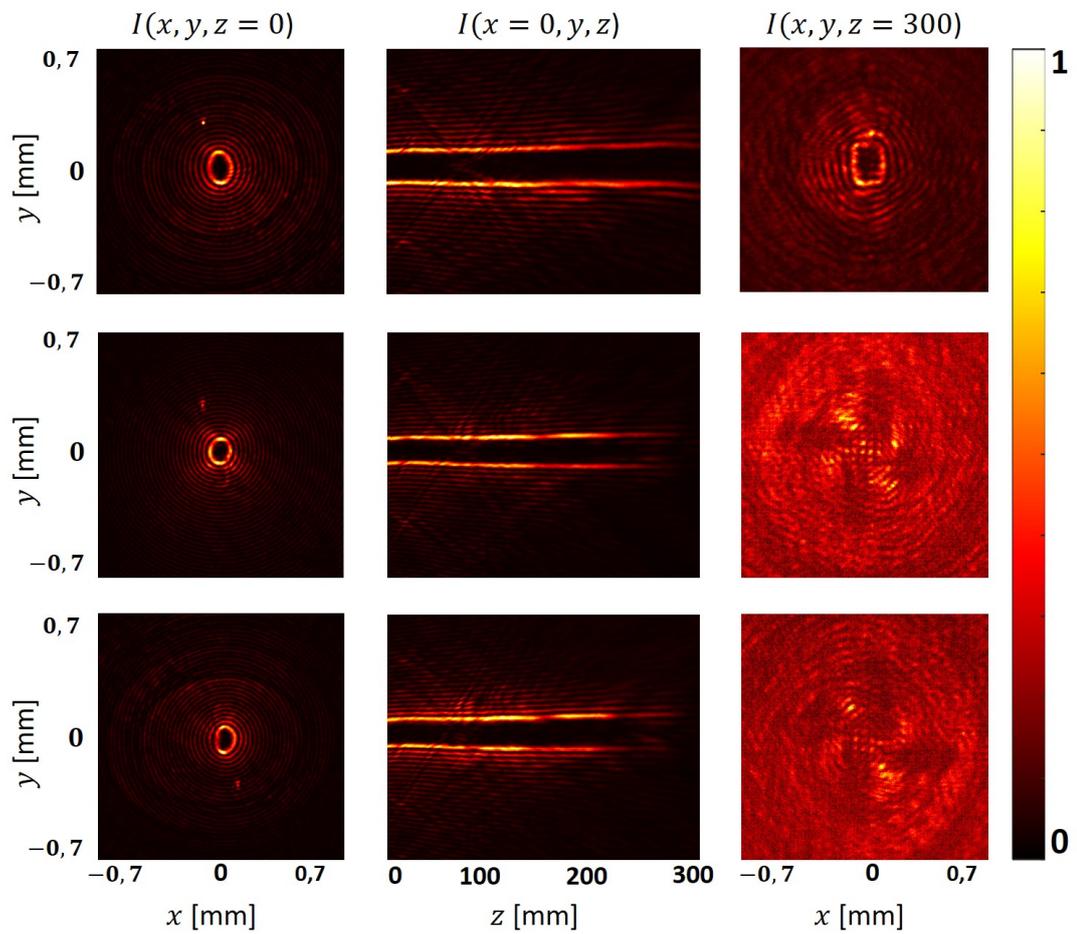


Fonte: Autor

O trabalho de Bouchal *et al* ratifica a validade de nossos resultados, tanto teóricos quanto experimentais, uma vez que ao estudarem a propriedade de auto reconstrução de um feixe não difrativo perturbado por um obstáculo, eles chegaram a uma relação semelhante a Eq.(3.15) para as distância mínima e máxima de auto reconstrução [56].

A geração de feixes não paraxiais a partir da parametrização de curvas simples foi possível devido ao fato que tais curvas são homotópicas com o círculo, isto significa que tais curvas podem ser produzidas por deformação contínua do círculo [52]. Além disso, curvas não simples podem ser vistas como um conjunto de curvas simples. E devido a isso, os feixes que seriam gerados a partir dessas curvas sofreriam interferência entre si, fato que contribui para a não formação de um padrão com franjas concêntricas lisas deformadas de acordo com a geometria considerada.

Figura 3.12: Feixes circulares gerados experimentalmente.



Fonte: Autor

# 4. Estudo da Conservação da Carga Topológica em Difração por Aberturas

## 4.1 Introdução

Vimos anteriormente que a solução da equação escalar de Helmholtz paraxial em coordenadas cilíndricas resulta em um conjunto de modos chamados de feixes Laguerre-Gauss (LG). Por motivo que ficará evidente posteriormente, nosso interesse se restringe aos modos azimutais, os quais podem ser expressos como [57]

$$E_m(r, \theta) = Ar^{|m|} \exp[-im\theta] \exp(-r^2/w_0^2), \quad (4.1)$$

em que  $r$  e  $\theta$  são as coordenadas polares que definem um cilindro coaxial,  $A$  é uma constante de normalização e  $m$  é o índice azimutal, também conhecido como carga topológica (CT).

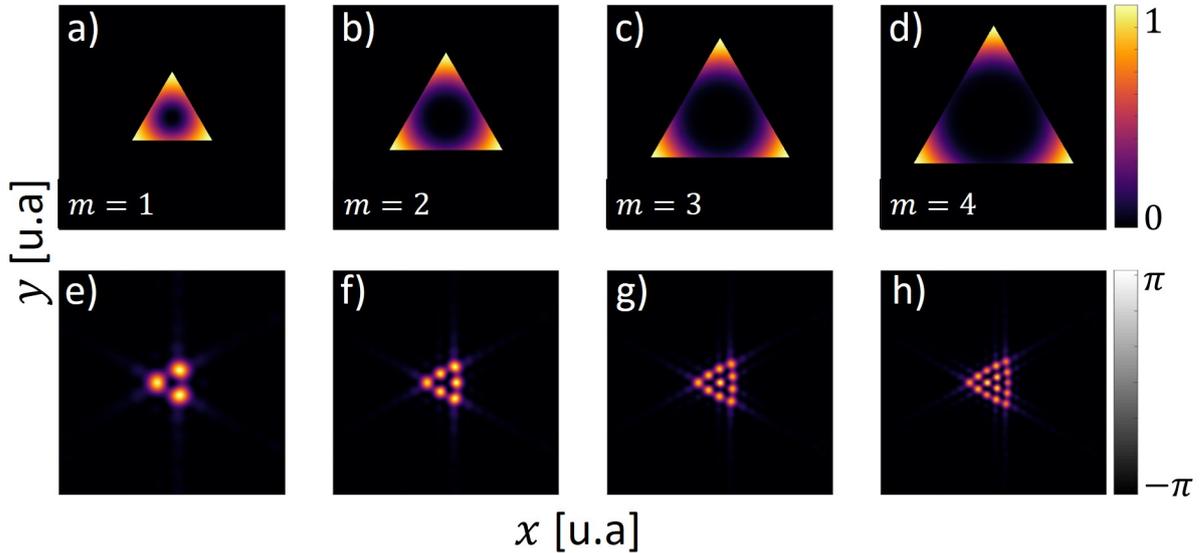
A importância dos modos LG surgiu em 1992, quando Allen *et al* mostraram que campos de luz com estrutura de fase azimutal  $\exp(-im\theta)$  transportam momento angular orbital (MAO) de magnitude  $m\hbar$  por fóton [5], em que  $\hbar$  é a constante de Planck. A partir desse momento, cientistas da óptica física passaram a procurar métodos de caracterizar o momento angular orbital da luz, uma vez que para tal, bastaria discriminar o valor da CT.

Um dos métodos bastante eficiente e relevante para discriminar a CT de um feixe que transporta MAO foi proposto por Hickmann *et al* [58]. Tal método consistiu em difratar modos LG através de aberturas triangulares. Eles perceberam que o padrão de difração, produzido na zona de Fraunhofer, manifestava-se como rede triangular, a qual se correlacionava com a carga topológica  $m$ .

Para efeito de entendimento do método, mostramos na Fig.4.1 redes triangulares, obtidas via simulação numérica, as quais resultam da transformada de Fourier de diferentes modos LG incidindo sobre uma abertura triangular. As Fig.4.1(a-d) mostram feixes com diferentes CT incidindo sobre aberturas triangulares. Nas Fig.4.1(e-h) é mostrado os respectivos padrões de difração na zona de Fraunhofer.

Percebe-se que para  $m = 1$ , o número de pontos brilhantes (*Spot*) que constituem um dos lados da respectiva rede triangular é  $N = 2$ ; para  $m = 2$ , tem-se  $N = 3$ ; para  $m = 3$ , tem-se  $N = 4$ ; e finalmente, para  $m = 4$ , nota-se que  $N = 5$ . Portanto, a relação entre o valor da CT

Figura 4.1: As figuras (a), (b), (c) e (d) mostram resultados de simulação numérica de diferentes modos LG incidindo sobre uma abertura triangular equilátera. Nas figuras (e), (f), (g) e (h) é mostrado os respectivos padrões de difração na zona de Fraunhofer.



Fonte: Autor

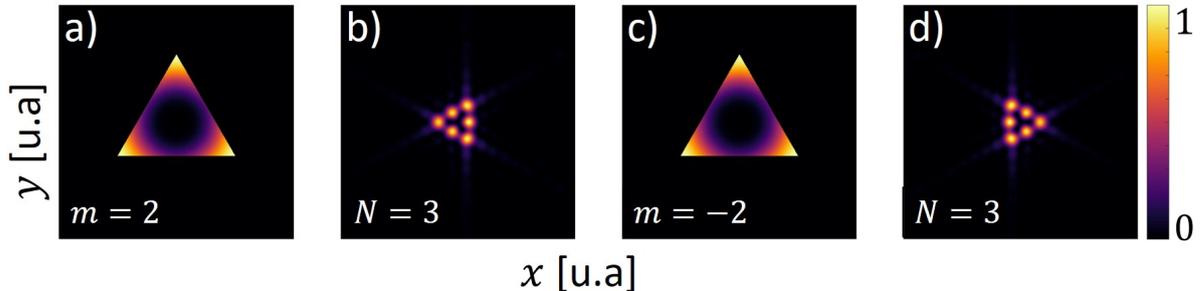
do feixe incidente sobre a abertura e o respectivo número de *spots* que determina o lado da rede triangular é dada por  $|m| = N - 1$ .

Um fato que faz dessa técnica ainda mais interessante é que, além de conseguir obter o valor da CT do feixe incidente na abertura triangular, pode-se também determinar o sinal (polaridade) de  $m$  [59], uma vez que este índice assume valores inteiros. Isto pode ser entendido ao observar a Fig.4.2.

Ao observar as Fig.4.2(c) e Fig.4.2(d), constata-se que ao inverter o valor da CT, nota-se uma rotação de  $\pi$  na rede triangular no sentido anti-horário. Este comportamento não é observado quando se usa uma abertura quadrada [57], por exemplo. Entretanto, com este outro tipo de abertura, consegue-se determinar valores significativamente altos para a carga topológica, cita-se  $m = \pm 18$ .

Como vimos no capítulo dois, o feixe LG também é conhecido como um vórtice óptico. Pois, um dado modo LG consiste de uma distribuição de intensidade que circunda simetricamente um ponto em que a amplitude do campo óptico é nula. A fase do campo pode assumir qualquer valor neste ponto. Além disso, verifica-se que os valores de fase aumentam ou diminuem de  $2m\pi$  em um giro completo no entorno desse ponto [8]. Em outras palavras, os pontos

Figura 4.2: As figuras (a) e (b) mostram o modo LG com  $m = 2$  incidindo sobre a abertura triangular e seu respectivo padrão de difração. Nas figuras (c) e (d) é mostrado o modo LG com  $m = -2$  incidindo sobre a mesma abertura triangular e sua respectiva rede óptica na região de difração de Fraunhofer.



Fonte: Autor

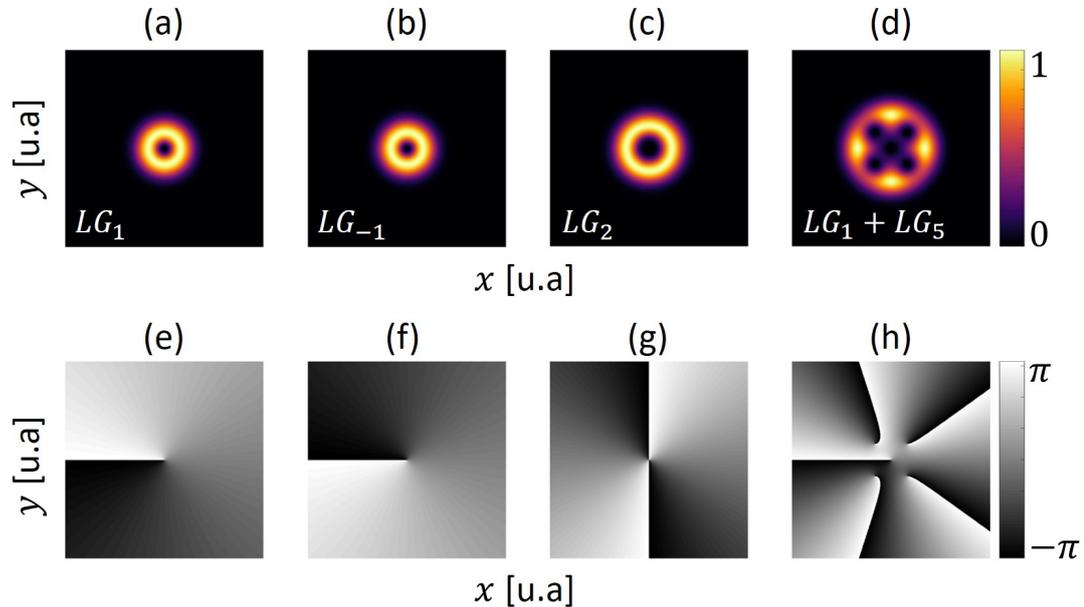
do campo em que a fase pode assumir qualquer valor é chamado de ponto singular (vórtice) ou singularidade de fase. Estes são os responsáveis pelo surgimento da estrutura de fase helicoidal dos feixes com MAO [60].

A Fig.4.3 mostra os padrões de intensidade e fase de vários modos LG com o intuito de proporcionar um melhor entendimento sobre a forma como as singularidades de fase se manifestam e o comportamento do crescimento dos valores de fase em torno de um ponto onde a intensidade do campo óptico é nula. As colunas (a) e (b) da Fig.4.3 mostram modos *LG* de cargas topológicas  $m = \pm 1$ , respectivamente. Isso implica que essas singularidades têm o mesmo tamanho, porém, as circulações de fase ao redor destes pontos são opostas.

No caso de  $m = 1$ , tem-se uma singularidade genérica positiva, enquanto que para  $m = -1$  a singularidade genérica é dita ser negativa. Na coluna (c) da Fig.4.3 observamos um modo *LG* de carga  $m = 2$ , nota-se que a fase deste campo faz duas rotações em torno do ponto singular, neste caso, tem-se uma singularidade não genérica. Enquanto que a coluna (d) mostra o padrão de intensidade de uma superposição de dois modos LG,  $LG_{1,5} = LG_1 + LG_5$ . O padrão de fase correspondente mostra o exemplo de um campo de onda com várias singularidades genéricas.

É importante enfatizar que a carga topológica é conservada na propagação, pois se mostrou robusta durante a propagação em atmosfera turbulenta [9]. Soma-se a isso o fato de os vórtices serem resistentes às perturbações do campo de onda, uma vez que ao serem difratados por uma abertura triangular isóscele sua CT foi observada no campo distante difratado [11]. Outra curiosidade importante sobre as singularidades de fase é que, assim como as partículas subatômicas, elas podem interagir entre si e, como em outras áreas da física, é possível observar a criação e

Figura 4.3: As figuras (a), (b), (c) e (d) mostram os padrões de intensidade dos  $LG_m$  modos Laguerre-Gauss. Enquanto que nas figuras (e), (f), (g) e (h) é mostrado as respectivos mapas de fase, os quais evidenciam as singularidades de fase de cada campo e seus comportamentos.



Fonte: Autor

aniquilação de pares de vórtices [61].

Para alguns feixes altamente simétricos, como os feixes LG, propagando no espaço livre, as singularidades de qualquer valor  $m$  permanecem estáveis e nenhuma singularidade nova é criada nem aniquilada durante a propagação. Entretanto, quando em seu caminho um modo LG com  $|m| > 1$  sofre uma perturbação, tal como por um meio não linear [62], turbulência [63], ou por uma única abertura [58, 64, 65], os feixes se tornam instáveis e sua singularidade não genérica pode se quebrar em várias singularidades genéricas,  $m = \pm 1$ .

Ainda sobre a conservação da CT, existem registros de que este efeito foi observado em diferentes sistemas lineares [9, 66] e não lineares [62]. Por exemplo, foi demonstrado que a CT é uma quantidade robusta que pode ser transmitida ao longo de distâncias significativas conservando seu valor ao se propagar através de turbulência atmosférica [9].

A conservação da CT total também foi encontrada em um campo focal resultante da iluminação uniforme de uma lente, embora a criação e a aniquilação de singularidades de fase possam ocorrer [66]. Outra forma de verificar conservação da CT foi estudada quando a instabilidade dos vórtices é devida à topologia do feixe [67].

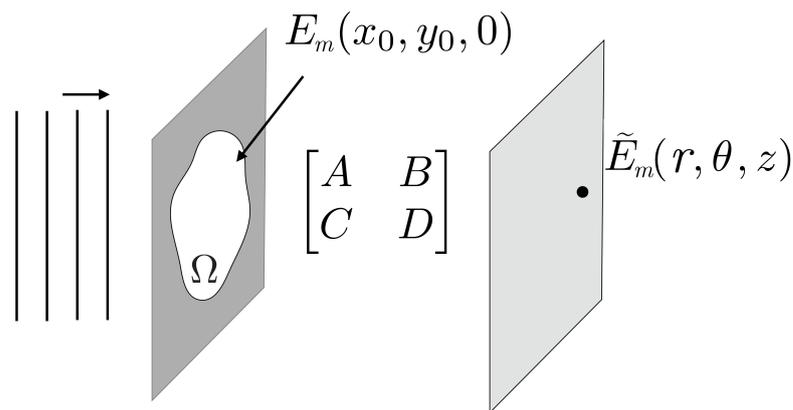
Entretanto, notamos que ainda há lacunas no que se refere à conservação da carga to-

pológica. Pensando nisso, propomos realizar um estudo detalhado da conservação geral da CT de um dado modo Laguerre-Gauss quando este é perturbado por uma abertura geral posta em seu caminho. Em outras palavras, analisaremos a conservação da CT através da difração de um feixe por uma abertura genérica. Nossa intenção é contribuir com esta questão propondo um modelo teórico que descreverá a perturbação de feixes LG por uma abertura qualquer, bem como a propagação do campo perturbado. Em seguida, faremos a confirmação experimental do modelo.

## 4.2 Representação Teórica da Perturbação de Modos Laguerre-Gauss por uma Abertura Arbitrária

Iniciamos nossa representação teórica considerando que uma abertura qualquer é o agente perturbador de feixes LG, os quais serão representados como  $E_m$ . Depois que  $E_m$  cruza a abertura, é propagado através de um sistema óptico  $ABCD$ , como pode ser visto na Fig.4.4, a qual ilustra esquematicamente a situação verbalmente exposta. Ao final da propagação, o

Figura 4.4: Geometria do sistema. O feixe de luz  $E_m$ , depois de cruzar a abertura  $\Omega$ , difrata através de um sistema  $ABCD$  produzindo o campo final  $\tilde{E}_m$ .



Fonte: Autor

campo difratado  $\tilde{E}_m$  pode ser expresso pela integral de Collins [68], a qual é dada em termos

dos elementos da matriz  $ABCD$  de nosso sistema,

$$\begin{aligned} \tilde{E}_m(x, y, z) &= \frac{ik}{2\pi B} \iint_{\Omega} E_m(x_0, y_0, 0) \exp \left\{ \left( -\frac{ik}{2B} \right) \right. \\ &\quad \times \left. [(x^2 + y^2) - 2xx_0 - 2yy_0 + A(x_0^2 + y_0^2)] \right\} dx_0 dy_0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

No plano da abertura  $\Omega$ , o campo incidente,  $E_m$ , é dado pela Eq.(4.1), mas, por conveniência, expresso em coordenadas cartesianas como

$$E_m(x_0, y_0, 0) = (x_0 \pm iy_0)^{|m|} \exp \left( -\frac{x_0^2 + y_0^2}{2w_0^2} \right). \quad (4.3)$$

Salientamos que os sinais mais ou menos no termo  $(x_0 \pm iy_0)^{|m|}$  denotam CT positiva ou negativa, respectivamente. O campo na Eq.(4.3) representa feixes LG com CT  $m$  e de cintura  $w_0$ .

Podemos reescrever a Eq.(4.2) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_m(x, y, z) &= \frac{ik}{2\pi B} \exp \left[ \left( -\frac{ikD}{B} \right) (x^2 + y^2) \right] \iint_{\Omega} (x_0 \pm iy_0)^{|m|} \exp \left( -\frac{x_0^2 + y_0^2}{2w_0^2} \right) \\ &\quad \times \exp \left\{ \left( -\frac{ik}{2B} \right) [A(x_0^2 + y_0^2) - 2xx_0 - 2yy_0] \right\} dx_0 dy_0. \end{aligned}$$

Agora, a partir da expressão acima, note que, independentemente da abertura, o termo que contém uma singularidade pode ser fatorado como um operador derivada,

$$\begin{aligned} \tilde{E}_m(x, y, z) &= \frac{ik}{2\pi B} \left( \frac{ik}{B} \right)^{-|m|} \exp \left[ \left( -\frac{ikD}{B} \right) (x^2 + y^2) \right] \left( \frac{\partial}{\partial x} \pm i \frac{\partial}{\partial y} \right)^{|m|} \iint_{\Omega} E_0(x_0, y_0, 0) \\ &\quad \times \exp \left\{ \left( -\frac{ik}{2B} \right) [A(x_0^2 + y_0^2) - 2xx_0 - 2yy_0] \right\} dx_0 dy_0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

em que  $E_0(x_0, y_0, 0) = \exp[-(x_0^2 + y_0^2)/2w_0^2]$ .

Uma maneira compacta de escrever a Eq.(4.4) é alcançada expressando o plano transversal em coordenadas polares  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$ , em que  $r$  é a coordenada radial e  $\theta$  é o ângulo polar. Agora é conveniente expressar a Eq.(4.4) como um produto de dois campos

$$\tilde{E}_m(r, \theta, z) = E'_1(r, \theta, z) E'_2(r, \theta, z). \quad (4.5)$$

Além disso, sabendo que  $\theta = \tan^{-1}(y/x)$  e que  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , podemos escrever as seguintes relações

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (4.6)$$

Uma vez que sabemos como  $r$  e  $\theta$  dependem de  $x$  e  $y$ , encontramos facilmente as derivadas a seguir

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -\frac{1}{r} \sin \theta \quad (4.7a)$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin \theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{r} \cos \theta. \quad (4.7b)$$

Deste modo, podemos fazer a seguinte mudança:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} \pm i \frac{\partial}{\partial y} \right)^{|m|} = \exp(im\theta) \left( \frac{\partial}{\partial r} \pm \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^{|m|}. \quad (4.8)$$

Além disso, com o auxílio da Eq.(4.8), assumimos que o campo  $E'_1$  toma a seguinte forma

$$E'_1(r, \theta, z) = \frac{ik}{2\pi B} \exp \left[ \left( -\frac{ik}{B} \right) Dr^2 \right] \exp(im\theta), \quad (4.9)$$

enquanto que o campo  $E'_2$  é escrito como

$$E'_2(r, \theta, z) = \left[ \left( \frac{B}{ik} \right) \left( \frac{\partial}{\partial r} \pm \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right]^{|m|} \iint_{\Omega} E_0(x_0, y_0, 0) \times \exp \left\{ \left( -\frac{ik}{2B} \right) [A(x_0^2 + y_0^2) - 2x_0r \cos \theta - 2y_0r \sin \theta] \right\} dx_0 dy_0. \quad (4.10)$$

Uma vez que feixes de CT  $|m| > 1$ , quando perturbados, são instáveis, a correspondente singularidade não genérica pode se quebrar em várias singularidades genéricas,  $m = \pm 1$ . Todavia, segundo Berry [69], é possível calcular a carga topológica líquida,  $S_{\tilde{E}_m}$ , de um campo óptico contendo múltiplos vórtices genéricos como

$$S_{\tilde{E}_m} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \operatorname{Re} \left[ (-i) \frac{\frac{\partial}{\partial \theta} \tilde{E}_m(r, \theta, z)}{\tilde{E}_m(r, \theta, z)} \right]. \quad (4.11)$$

Pois para um dado campo de luz contendo um número grande de singularidades genéricas, a CT líquida é a soma de todas elas. A integral na Eq.(4.11) pode ser entendida como a soma de todas as singularidades dentro de um círculo de raio  $r$  muito grande traçado no plano transversal do campo óptico.

Assumimos que, na Eq.(4.5), o campo final difratado é o produto de dois campos,  $E'_1$  e  $E'_2$ , desse modo, é fácil mostrar que  $S_{\tilde{E}_m} = S_{E'_1 E'_2} = S_{E'_1} + S_{E'_2}$ . Então, devemos fazer o cálculo da Eq.(4.11), para  $E'_1$  e  $E'_2$ . Para calcular  $S_{E'_1}$  iniciamos com

$$\frac{\partial}{\partial \theta} E'_1(r, \theta, z) = \frac{(i)^2 mk}{2\pi B} \exp \left[ \left( -\frac{ik}{B} \right) Dr^2 \right] \exp(im\theta). \quad (4.12)$$

É de fácil observação que

$$\frac{\frac{\partial}{\partial \theta} \tilde{E}_m(r, \theta, z)}{\tilde{E}_m(r, \theta, z)} = im, \quad (4.13)$$

portanto,

$$S_{E'1} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \operatorname{Re} [(-i)(im)] = m. \quad (4.14)$$

Vimos que o cálculo de  $S_{E'1}$  foi bastante trivial, entretanto, para obter  $S_{E'2}$  olharemos para  $E'2$  em seu regime assintótico em relação a  $r$ , ou seja, para o caso em que  $r \rightarrow \infty$ . Além disso, os termos de fase quadrática na Eq.(4.10) podem ser negligenciados neste limite. Deste modo, chegamos a seguinte expressão

$$\lim_{r \rightarrow \infty} E'2 = \left( \frac{B}{ik} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{|m|} \iint_{\Omega} E_0(x_0, y_0, 0) \exp \left[ \frac{ik}{B} (x_0 r \cos \theta + y_0 r \sin \theta) \right] dx_0 dy_0. \quad (4.15)$$

Agora, ao olhar a Eq.(4.4), observamos que a CT inicial está contida no termo que contém os operadores derivadas que foi fatorado,  $(\partial/\partial x \pm i\partial/\partial y)^{|m|}$ . Isso implica que, quando se toma o limite de  $r$  tendendo ao infinito, tem-se como consequência o desaparecimento da derivada em  $\theta$ . Isso indica que a CT de  $S_{E'2}$  é nula, independentemente da abertura. Desta maneira, verifica-se que a carga topológica líquida é dada por  $S_{\tilde{E}_m} = S_{E'1E'2} = S_{E'1} = m$ .

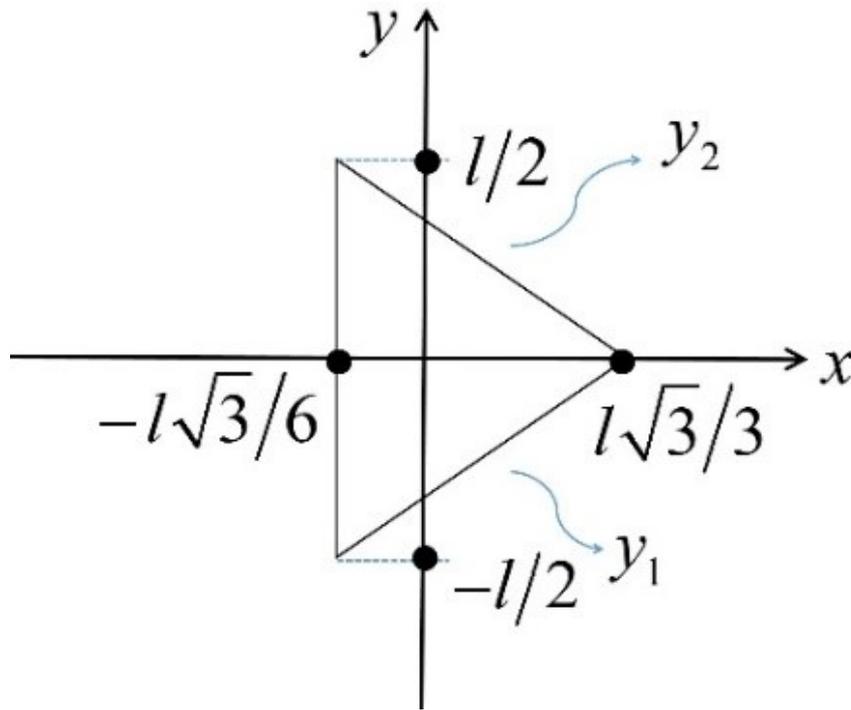
Portanto, constata-se teoricamente que a carga topológica não genérica de um modo LG que incide em uma abertura qualquer se conserva ao longo da propagação. Para ilustrar este resultado teórico, exemplificaremos com as aberturas triangular equilátera e quadrada na zona de difração de Fraunhofer, observando apenas a fase dos padrões de difração. Para isso, calcularemos apenas a forma analítica do padrão de difração de Fraunhofer de uma abertura triangular, uma vez que para a abertura quadrada já consta na literatura [57].

### 4.3 Cálculo Exato do Padrão de Difração de Fraunhofer para Aberturas Triangulares e Quadradas

Até este momento, a maneira de obter o padrão de difração de um feixe difratado por uma abertura foi via simulação numérica. Porém, podemos também chegar a tais padrões por meio de cálculo analítico, o que chamamos de cálculo exato. Para produzirmos as distribuições de amplitude e de fase do campo difratado por uma abertura, precisamos calcular as integrais de difração analiticamente.

O resultado analítico exato para a difração de um feixe LG por uma abertura quadrada, no limite de Fraunhofer da Eq.(4.2), foi apresentado em [57]. Uma aproximação de difração de borda foi apresentada em [70] para a difração de Fraunhofer de um feixe de LG por uma abertura triangular.

Figura 4.5: Geometria da borda de uma abertura triangular equilátera com lados de comprimento  $l$ .  $y_1$  e  $y_2$  representam funções lineares que descrevem as bordas da abertura triangular, como indicado pelas setas.



Fonte: Autor

Para desenvolver um resultado analítico exato de um modo  $LG_m = \tilde{E}_m(x, y)$  difratado por uma abertura triangular, considere a Fig.4.5 que mostra a geometria da borda de uma abertura triangular equilátera de lados  $l$ . Considerando que o raio da cintura do feixe incidente sobre a abertura é maior que um de seus lados, ou seja,  $w_0 > l$ , o padrão de difração do modo fundamental,  $\tilde{E}_0(x, y)$ , o que equivaleria um feixe Laguerre-Gauss com  $m = 0$  difratado, é calculado ao realizarmos a integral de difração de Fraunhofer sobre a abertura da Fig.4.5 da seguinte maneira:

$$\tilde{E}_0(x, y) = \int_{-l\sqrt{3}/6}^{l\sqrt{3}/3} \int_{y_1}^{y_2} \exp[i(xx_0 + yy_0)] dy_0 dx_0, \quad (4.16)$$

em que  $y_1 = \sqrt{3}(x_0 - l\sqrt{3}/3)/3$  e  $y_2 = -\sqrt{3}(x_0 - l\sqrt{3}/3)/3$ .

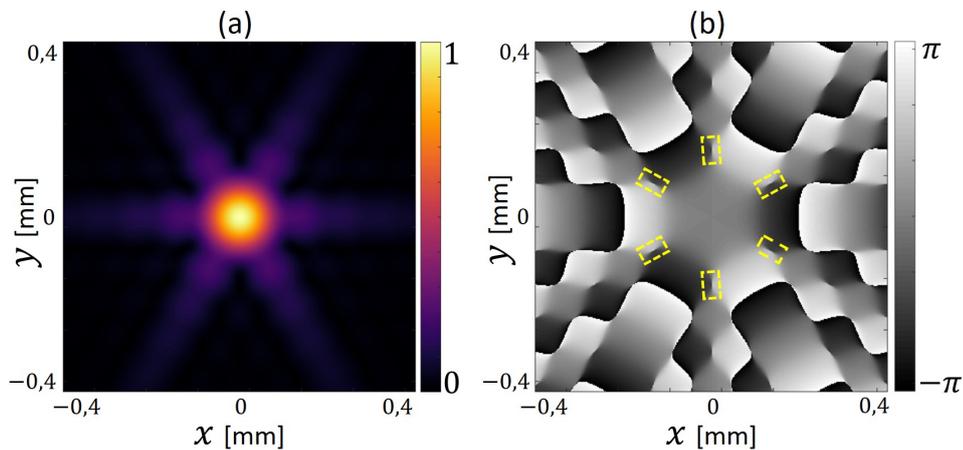
O cálculo da integral na Eq.(4.16) é um tanto simples, de modo que seu resultado é expresso

como

$$\begin{aligned} \tilde{E}_0(x, y) = & \frac{l \sqrt{3}}{iy} \frac{1}{4} \exp \left[ i \left( y \frac{l}{4} + x \frac{l\sqrt{3}}{12} \right) \right] \operatorname{sinc} \left[ \left( -y \frac{\sqrt{3}}{3} + x \right) \frac{l\sqrt{3}}{4\pi} \right] \\ & - \frac{l \sqrt{3}}{iy} \frac{1}{4} \exp \left[ i \left( -y \frac{l}{4} + x \frac{l\sqrt{3}}{12} \right) \right] \operatorname{sinc} \left[ \left( y \frac{\sqrt{3}}{3} + x \right) \frac{l\sqrt{3}}{4\pi} \right], \end{aligned} \quad (4.17)$$

em que  $\operatorname{sinc}(x) = \sin(\pi x)/\pi x$ . A distribuição de amplitude e fase do campo de ordem zero é mostrado na Fig.(4.6)

Figura 4.6: Feixe Laguerre-Gauss de ordem zero difratado por uma abertura triangular equilátera, na zona de Fraunhofer, obtido por cálculo analítico. (a) Amplitude do padrão de difração; (b) distribuição de fase do padrão difração.



Fonte: Autor

Uma análise um pouco mais minuciosa da Fig.(4.6)(b) nos mostra que as singularidades de fase aparecem sempre em pares, ou seja, pontos singulares de CT  $m = 1$  e  $m = -1$ . Desta maneira, quando se soma todas as singularidades, tem-se que a carga topológica líquida será nula, como esperado para o modo fundamental. As linhas tracejadas marcam alguns dos vários pares de singularidades de fase que são exibidas no padrão. Estes pares podem estar morrendo ou nascendo simultaneamente [61].

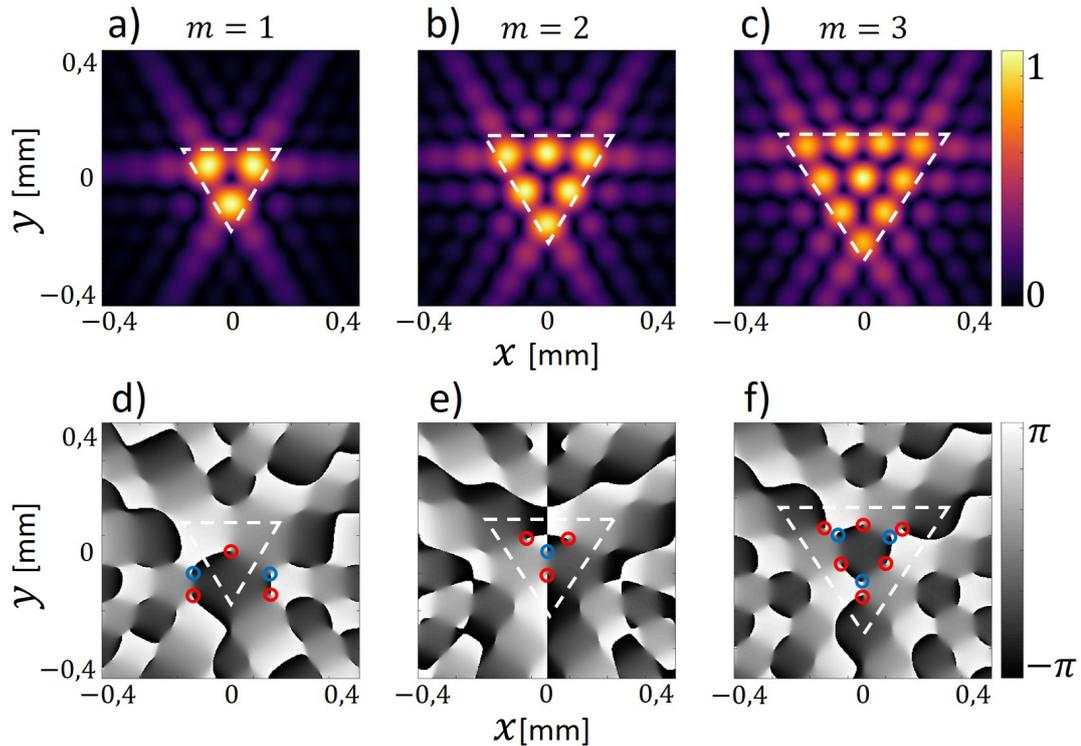
Os campos de alta ordem são obtidos ao atuarmos o operador derivada da Eq.(4.8) sobre o modo fundamental para um determinado  $m \neq 0$ :

$$\tilde{E}_m(x, y) = \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^{|m|} \tilde{E}_0(x, y). \quad (4.18)$$

em que o sinal positivo (+) significa que as CT dos feixes assumem valores positivos. As Fig.(4.7)(a-c) exibem distribuições de amplitude do padrão de difração de feixes Laguerre-

Gauss de alta ordem ao passarem por uma abertura triangular equilátera, enquanto que nas Fig.(4.7)(d-f) é mostrado as respectivas fases.

Figura 4.7: Feixes Laguerre-Gauss de alta ordem difratado por aberturas triangulares equiláteras, na zona de Fraunhofer, obtido por cálculo analítico. Em (a), (b) e (c) é exibido as distribuição transversa de amplitude. As imagens (d), (e) e (f) mostram as distribuições de fase.



Fonte: Autor

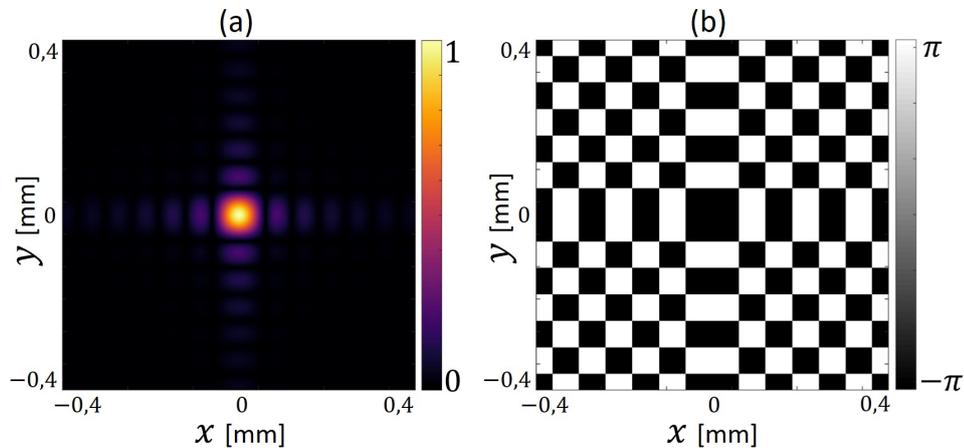
Testamos também nossa teoria quando a abertura em questão é quadrada. Nesta nova situação, a forma analítica do campo de ordem zero,  $\tilde{E}_0(x, y)$ , é dado por [57]:

$$\tilde{E}_0(x, y) = \frac{2 \sin(lx/2)}{x} \frac{2 \sin(ly/2)}{y}, \quad (4.19)$$

onde  $l$  também representa a largura da abertura. A distribuição de amplitude e fase da rede óptica resultante da difração do modo Laguerre-Gauss de ordem zero é mostrado na Fig.(4.8)

Quando analisamos com cuidado a Fig.(4.8)(b), não observamos nenhuma singularidades de fase. O mapa de fase nos mostra apenas patamares em que o valor de fase é máximo,  $\pi$ , ou mínimo,  $-\pi$ . No caso dos modos fundamentais, somos levados a pensar que o surgimento de singularidades de fase está relacionado com o tipo de geometria da abertura pela qual o feixe é difratado.

Figura 4.8: Feixe Laguerre-Gauss de ordem zero difratado por uma abertura quadrada, na zona de Fraunhofer, obtido por cálculo analítico. (a) Amplitude do padrão de difração; (b) distribuição de fase do padrão difração.



Fonte: Autor

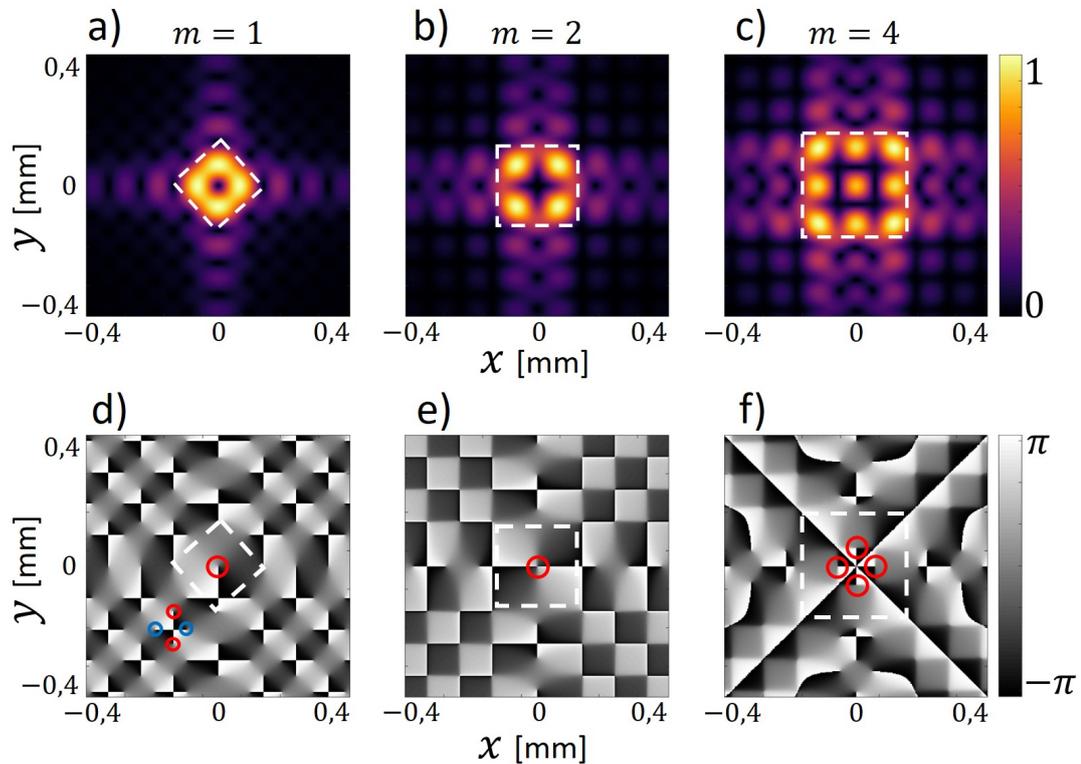
De maneira similar ao que foi feito para a abertura triangular, usamos a mesma operação da Eq.(4.18) para obter os campos de alta ordem,  $\tilde{E}_m(x, y)$ , que são difratados por uma abertura quadrada. A amplitude e a fase dos padrões de difração na zona de Fraunhofer são exibidos na Fig.(4.9). Nas Fig.(4.9)(a-c), pode-se ver as amplitudes, enquanto as Fig.(4.9)(d-f) exibem as respectivas fases.

Os círculos vermelhos, tanto na Fig.(4.7) quanto na Fig.(4.9), indicam as localizações das singularidades genéricas positivas, enquanto que os azuis as negativas nos respectivos campo ópticos difratados. O sinal das singularidades é dado pelo sentido de crescimento dos valores de fase em torno da singularidade, isto é, quando os valores de fase aumentam ao caminhar no entorno do ponto singular no sentido horário é negativa e no sentido anti-horário é positiva.

Podemos ver que todos os vórtices fora da rede óptica aparecem em pares, singularidades positivos e negativos, com valor líquido nulo, como indicado pelos círculos vermelhos e azuis nos padrões de fases nas Fig.(4.7)(d) e Fig.(4.9)(d). Entretanto, ao tomar a soma dos vórtices genéricos dentro da rede (dentro das regiões delimitadas pelas linhas tracejadas), tem-se que o resultado coincide com o valor da CT do feixe incidente a abertura.

Portanto, por meio destes resultados teóricos, constata-se a conservação da CT do feixe incidente sobre as aberturas depois de propagado até a zona de difração de Fraunhofer. Tal constatação foi feita por meio da soma de todos os pontos singulares exibidos na fase do campo. Além disso, a partir das Fig.(4.7)(c) e Fig.(4.9)(f), verifica-se, de fato, as singularidades não

Figura 4.9: Da mesma maneira que na Fig.(4.7), aqui temos feixes Laguerre-Gauss de alta ordem difratado por aberturas quadradas, na zona de Fraunhofer, obtido por cálculo analítico. Em (a), (b) e (c) é exibido as distribuição transversa de amplitude. As imagens (d), (e) e (f) mostram as distribuições de fase.



Fonte: Autor

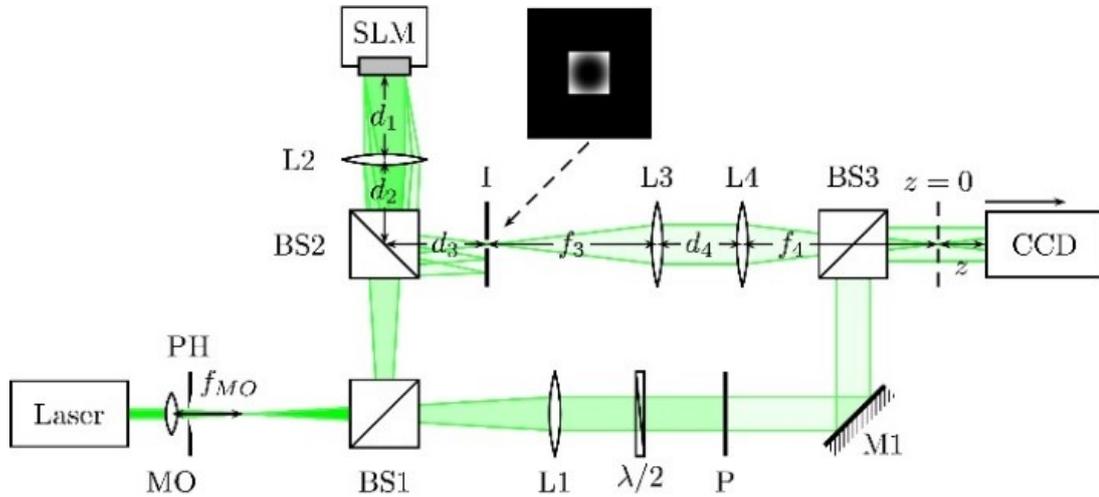
genéricas se dividem em seus constituintes genéricos obedecendo a conservação da CT.

## 4.4 Resultados Experimentais

Estamos de posse de um modelo teórico que mostra que a carga topológica, de um feixe que possui momento angular orbital perturbado por uma abertura, é conservada ao longo da propagação. A fim de confirmar tal previsão teórica experimentalmente, realizamos o experimento da difração de um feixe LG passando por uma abertura. Propagamos o campo a partir da abertura até a zona de difração de Fraunhofer. Com isso, recuperamos a fase do campo difratado para analisar se houve conservação da CT.

O experimento consistiu na implementação de um interferômetro de Mach-Zehnder para recuperar a fase do feixe através de medições de intensidade. A configuração experimental utilizada para tal fim é mostrada na Fig.(4.10), a qual faz uso, além de outro itens, de um laser

Figura 4.10: Configuração experimental para medir a fase e a carga topológica do feixe.



Fonte: Autor

modelo Ultralasers MSL-FN-532-200 mW operando em 532 nm. O feixe laser passa através de um filtro espacial composto de uma objetiva microscópica (OM) e de um pinolho (PH) que limpa e expande espacialmente o feixe. Além desses componentes, utilizamos divisores de feixes (BS) (Beam Splitter), lentes (L), placa de retardo de onda ( $\lambda/2$ ), polarizador (P), uma íris (I), espelho (M) e uma câmera CCD montada sobre um dispositivo que a translada. O comprimento focal das lentes utilizadas no experimento são:  $f_{OM} = 1,65$  mm,  $f_1 = f_2 = 300$  mm e  $f_3 = f_4 = 100$  mm.

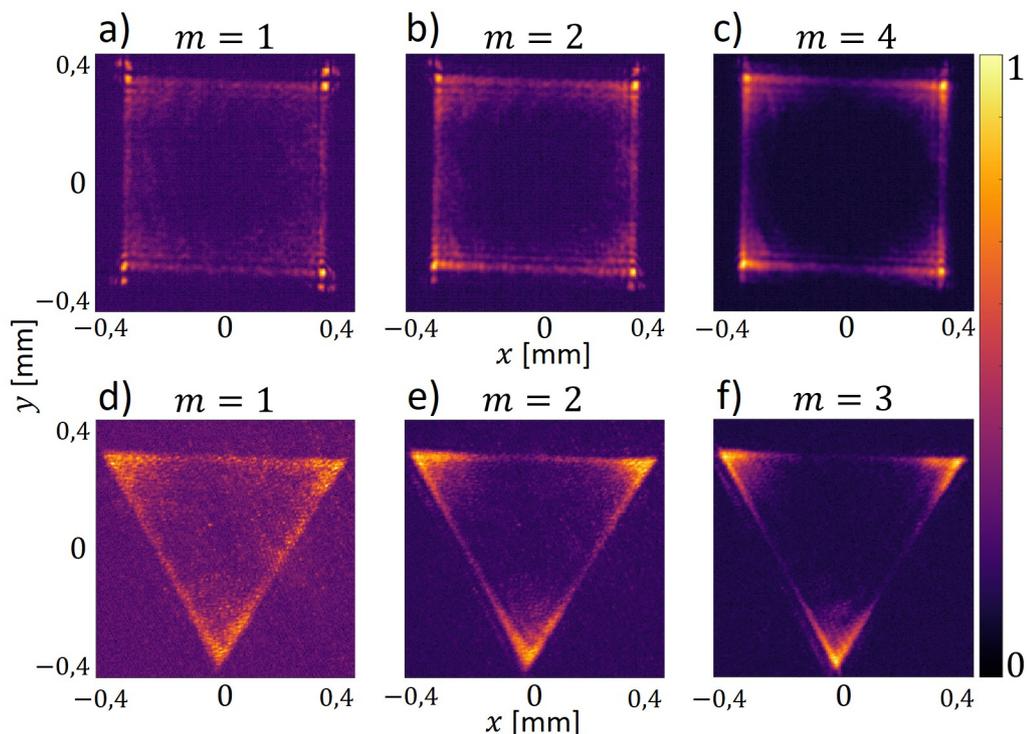
Vimos anteriormente que, no contexto de nosso estudo, uma dada rede óptica pode ser vista como a transformada de Fourier (TF) de uma abertura correspondente, como mostramos na Fig.4.1. Desse modo, para gerar experimentalmente um feixe passando por uma abertura, codificamos no modulador espacial de luz (Spatial Light Modulator, LSM) um holograma que contém a fase e a amplitude resultantes da TF de um feixe LG incidindo sobre uma abertura (Quadrada ou triangular equilátera). Este holograma é gerado numericamente e o chamamos de holograma gerado por computador (HGC).

O fato de termos codificado a abertura no holograma, em detrimento do uso de um objeto físico, foi devido termos percebido que desta maneira diminuiríamos os erros ocasionados na construção destas, uma vez que devem ser aberturas da ordem de alguns décimos de milímetros. Além disso, teríamos que construir várias, pois à medida que a CT aumenta, o diâmetro do feixe também aumenta.

Segue que a lente  $L2$  cofocal com a MO, que expande o feixe laser, forma uma onda plana

(PW) (plane wave) que ilumina uniformemente a tela do SLM. Ao incidir sobre o SLM a PW ganha a fase do holograma codificado que, ao ser refletida, passa novamente pela lente  $L2$  a qual realiza uma TF da fase codificada e uma imagem do feixe no interior da abertura aparecerá na íris I. As lentes  $L3$  e  $L4$  projetam essa imagem no ponto  $z = 0$ . As imagens experimentais dos feixes incidindo no plano das aberturas são mostradas na Fig.(4.11).

Figura 4.11: Imagens de medidas experimentais de diferentes modos LG incidindo sobre as aberturas. Em (a), (b) e (c) é mostrado as amplitudes das de modos LG no interior das aberturas quadradas. Enquanto que em (d), (e) e (f) mostra os feixes no interior de aberturas triangulares.



Fonte: Autor

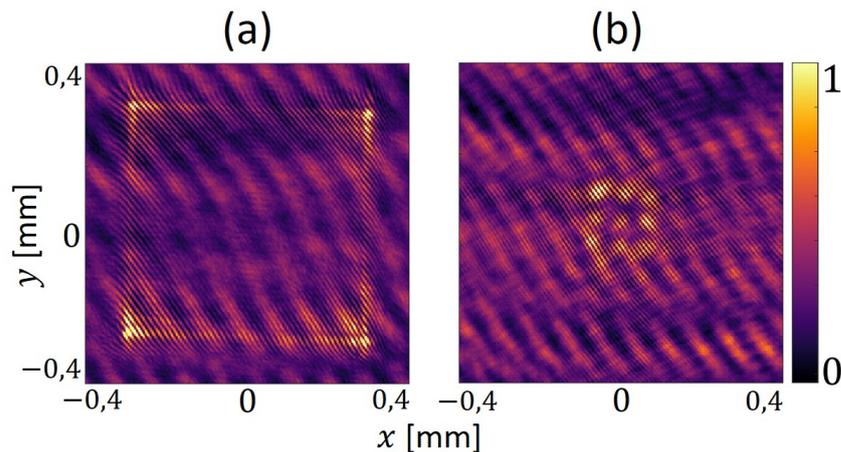
Como etapa inicial do experimento, a partir do ponto  $z = 0$ , iniciamos o translado da câmera CCD até chegar na região de difração de Fraunhofer. Isso nos permite visualizar a propagação do campo de luz. No ponto em que a rede óptica é formada, capturamos imagens de intensidade do campo. Este procedimento foi realizado, para todos os campos mostrados na Fig.(4.11), pois, desta maneira, fixamos o ponto, ao longo de  $z$ , em que se localizaria o padrão de difração desejado.

No segundo braço do interferômetro, a lente  $L1$ , também está cofocal com a MO, e origina uma segunda PW de intensidade uniforme que no ponto  $z = 0$  será superposta com o campo no interior da abertura e o padrão de interferência resultante será propagado. A fim de controlar a

intensidade relativa entre os dois braços do interferômetro para aumentar ainda mais o contraste das franjas de interferência, fazemos esta onda plana passar através de uma placa de meia onda  $\pi/2$  (placa de retardo) e por um polarizador (P).

Uma vez que não utilizamos uma superposição colinear, ajustamos o alinhamento entre os dois campos, LG e PW, de modo que eles conseguissem se superpor até a zona de difração de Fraunhofer. Para efeito de entendimento, mostramos, na Fig.(4.12), os padrões de interferência no ponto  $z = 0$ , Fig.(4.12)(a), e no ponto em que a rede triangular ou quadrada são formadas, Fig.(4.12)(b). Com o objetivo de sermos breve, exibimos apenas os padrões para a abertura quadrada e feixe LG de CT  $m = 4$ .

Figura 4.12: Padrão de intensidade do campo de interferência entre a PW e o feixe  $LG_4$  no interior da abertura quadrada e na zona de difração de Fraunhofer.



Fonte: Autor

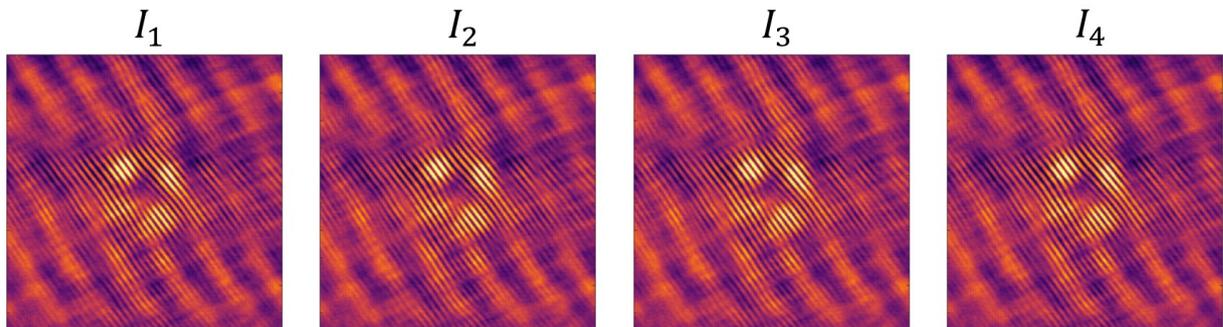
#### 4.4.1 Recuperação de Fase

As medidas de fase foram realizadas usando o método de interferometria de deslocamento de fase (phase-shifting interferometry method) [71, 72]. Esta técnica requer a geração de quatro hologramas cada um desses somado a uma fase constante, ou seja,  $\psi_1 = \psi$ ,  $\psi_2 = \psi + \pi/2$ ,  $\psi_3 = \psi + \pi$  e  $\psi_4 = \psi + 3\pi/2$ . Note que tais elementos ópticos têm um deslocamento de fase igualmente espaçado de  $\pi/2$ . Desse modo, tem-se que o ângulo de fase é obtido da seguinte maneira [71, 72]:

$$\varphi = \tan^{-1} \left( \frac{I_4 - I_2}{I_1 - I_3} \right). \quad (4.20)$$

Isso implica que no plano em que desejamos medir a fase do campo, temos que capturar quatro padrões de intensidade gerados pelos respectivos hologramas, como mostrado na Fig.4.13.

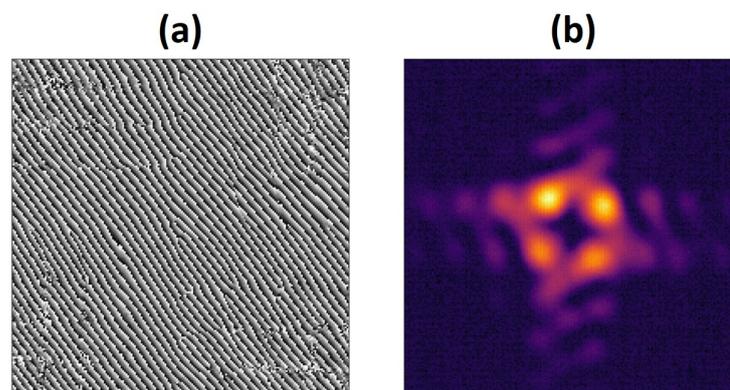
Figura 4.13: Padrões de intensidade dos campos de interferência na zona de difração de Fraunhofer, entre a PW e o feixe  $LG_2$ , correspondentes aos hologramas  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  e  $\psi_4$ .



Fonte: Autor

Este procedimento nos proporciona calcular a distribuição de fase de um campo óptico correspondente em qualquer ponto do eixo  $z$ . Entretanto, estamos interessados na fase do campo difratado na zona de Fraunhofer, de modo que realizando a operação dada pela Eq.(4.20), teremos o padrão de fase mostrado na Fig.4.14(a).

Figura 4.14: (a) Padrão de fase,  $\varphi$ , do campo de interferência, entre a PW e o feixe  $LG_2$  difratado pela abertura quadrada, no final da propagação. (b) Padrão de intensidade,  $I_s$ , do feixe  $LG_2$  difratado pela abertura quadrada na zona de Fraunhofer.



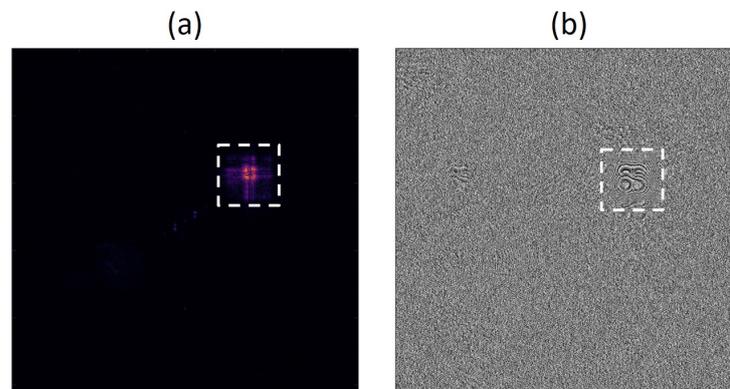
Fonte: Autor

Porém, devemos notar que a distribuição de fase encontrada, na Fig.4.14(a), não se parece em nada com aquela que esperaríamos encontrar para o modo  $LG_2$  difratado por uma abertura quadrada, como mostra a Fig.4.9. Em vez disso, o que temos é um padrão de fase do campo de

interferência, entre a PW e o feixe  $LG_2$  difratado pela abertura quadrada, na zona de Fraunhofer.

Para encontrarmos a fase de interesse, o passo inicial é eliminar o efeito da onda plana. Para isso, assumimos que na zona de difração de Fraunhofer o campo resultante é dado por  $U = \sqrt{I_s} \exp(i\varphi)$ , onde  $I_s$  é o padrão de intensidade do feixe  $LG_2$  no final da propagação na ausência da onda plana WP. Chamamos  $I_s$  de intensidade do feixe sinal. Desta maneira, ao tomarmos a transformada de Fourier numérica de  $U$ , teremos os padrões de amplitude e de fase mostrados na Fig.4.15.

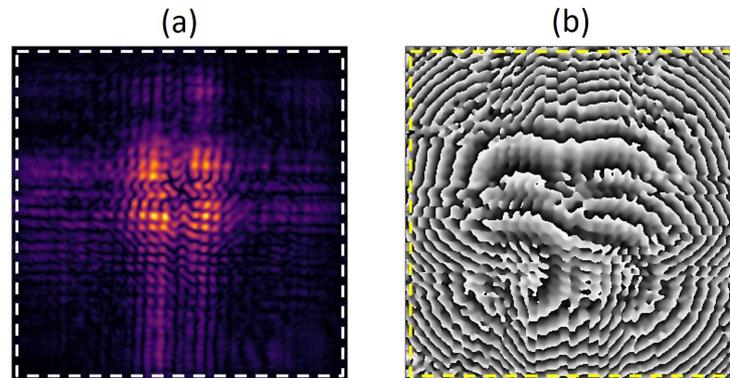
Figura 4.15: Ilustração dos padrões de (a) amplitude e (b) fase da transformada de Fourier de  $U$ . As linhas tracejadas delimitam a região de interesse.



Fonte: Autor

Observamos, na Fig.4.15, que ao realizar a transformada de Fourier de  $U$ , o padrão de amplitude resultante está deslocado do centro da imagem. Isso é devido ao efeito da fase da onda plana na zona de Fraunhofer. Entretanto, agora temos um campo  $U_2$  de quem a amplitude,  $|U_2|$ , e a fase,  $\varphi' = \text{Arg}\{U\}$ , é um recorte da região delimitada pelas linhas tracejadas na Fig.4.15, como pode ser visto na Fig.4.16.

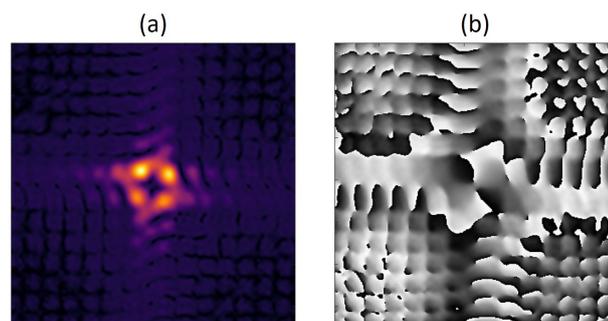
Figura 4.16: (a) Distribuição de amplitude e (b) de fase da transformada de Fourier de  $U$  obtidos a partir do recorte das regiões de interesse na Fig.4.15. As linhas tracejadas foram mantidas para ressaltar que esses padrões são recortes das regiões de interesse mostradas na Fig.4.15.



Fonte: Autor

Desse modo, podemos expressar o campo resultante como  $U_2 = |U_2| \exp(i\varphi')$ . Em seguida, tomaremos a transformada de Fourier numérica de  $U_2$  de quem os padrões de amplitude e da fase são mostrados na Fig.4.17. Portanto, comparando este resultado com aquele da Fig.4.9, concluímos que obtemos a fase experimental esperada pela simulação numérica do nosso modelo teórico.

Figura 4.17: Padrões esperados de (a) amplitude e (b) fase recuperados a partir dos dados experimentais.

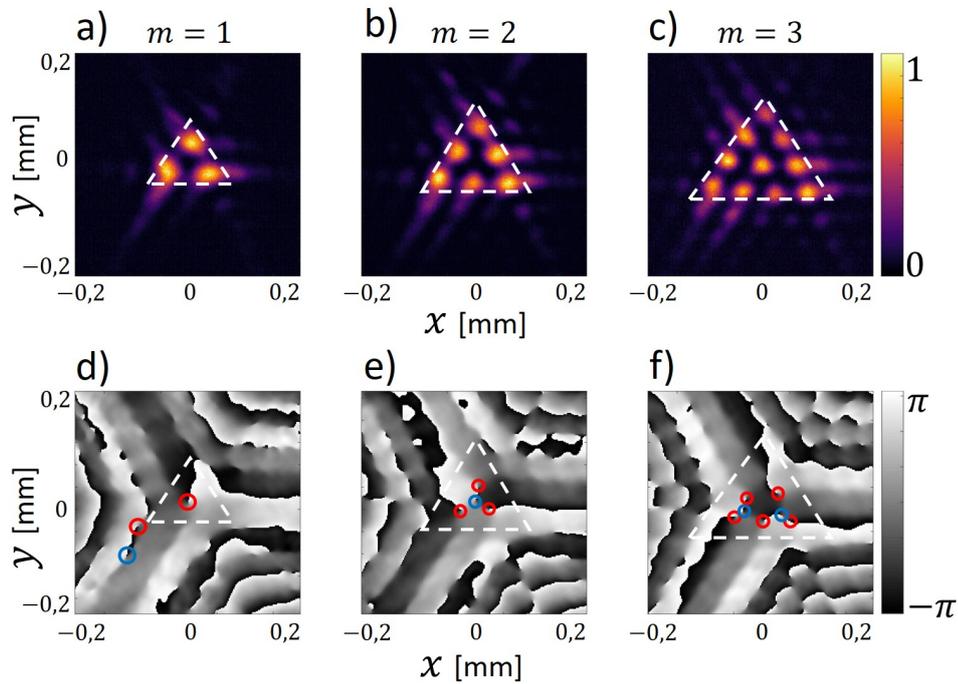


Fonte: Autor

Realizamos este procedimento utilizando as medidas experimentais dos padrões de difração resultante de um feixe LG incidindo sobre aberturas triangulares equiláteras e os resultados são mostrados na Fig.(4.18).

Observando os resultados obtidos a partir dos dados experimentais de um feixe LG difratado por uma abertura triangular, Fig.(4.18), notamos que estes concordam muito bem com os resultados teóricos mostrados na Fig.(4.7). Pois, novamente, constatamos que a carga líquida

Figura 4.18: Nas figuras (a), (b) e (c) é mostrado as amplitudes e em (d), (e) e (f) as fases, obtidas a partir do tratamento numérico dos resultados experimentais, resultantes de feixes LG difratados por aberturas triangulares.

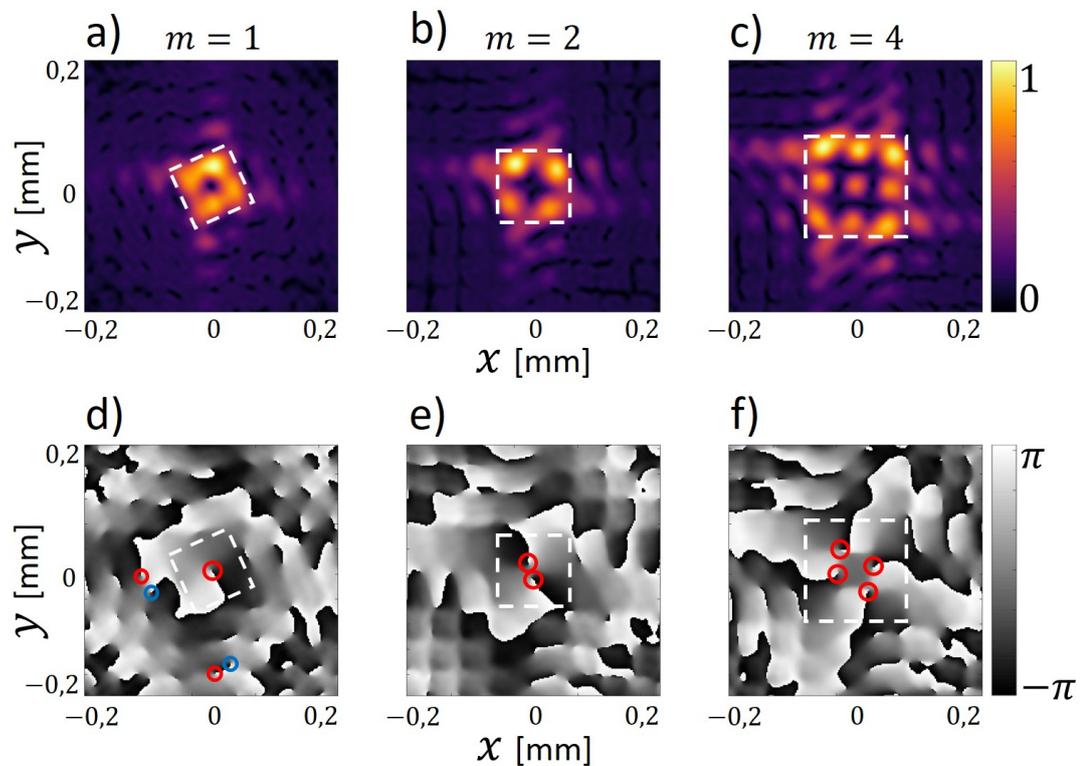


Fonte: Autor

dentro das redes triangulares coincide com a CT do campo inicial incidido sobre a abertura. De fato, como se pode ver na Fig.(4.18)(d), as singularidades fora da rede aparecem em pares, e portanto, cancelam-se uma a uma.

Realizamos o experimento para o caso de um feixe LG incidindo sobre uma abertura quadrada. A Fig.(4.19) mostra as distribuições de amplitude e a fase, recuperadas também a partir do tratamento numérico dos dados experimentais, dos padrões de difração do campo na zona de Fraunhofer. Novamente, comparando os dados experimentais da Fig.(4.19) com os resultados teóricos da A Fig.(4.9), notamos uma ótima concordância entre teoria e experimento. Enfatizamos que os valores das cargas topológicas utilizadas para os feixes incidentes nas aberturas são indicados no topo de cada padrão de difração. Enfatizamos que as singularidades genéricas positivas são indicadas por círculos vermelhos e as negativas são indicadas por círculos azuis.

Figura 4.19: As figuras (a), (b) e (c) mostram as amplitudes e em (d), (e) e (f) as fases dos padrões de difração na zona de Fraunhofer, resultante de feixes LG difratados por aberturas quadradas, obtidos a partir do tratamento numérico dos dados experimentais.



Fonte: Autor

Outra constatação importante é que, assim como nos resultados teóricos, novamente observamos que as singularidades não genéricas dos feixes incidentes sobre as aberturas se quebram em singularidades genéricas à medida que o campo é propagado. Isso mostra que os vórtices não genéricos são instáveis.

# 5. Separação de Estados de Momento Angular Orbital com Luz Espacialmente Coerente

## 5.1 Introdução

Modos ópticos espacialmente ortogonais que possuem uma dependência de fase azimutal,  $\exp(-im\phi)$ , carregam momento angular orbital (MAO) de  $m\hbar$  por fóton [5], onde  $\phi$  é a coordenada azimutal na seção transversal do feixe,  $m$  é um número inteiro chamado de carga topológica e  $\hbar$  é a constante de Planck. Para essa classe de feixes, a descoberta desta característica vem sendo utilizada como uma forma de aumentar a capacidade de envio de dados em sistemas de comunicação clássica [7, 73] e criptografia quântica [74, 75], pois permite a multiplexação e separação de maneira eficiente de um conjunto de estados de MAO [76].

Modos ortogonais (Bessel, elíptico e parabólico, por exemplo) podem ser explorados para a multiplexação espacial com o intuito de aumentar a capacidade de transmissão em sistemas de comunicação óptica. No entanto, o mais utilizado é o chamado feixe Laguerre-Gauss (LG) [5], que pode ser decomposto em termos de componentes ortogonais, permitindo ser separado no espaço com baixíssima interação intermodal [76]. Esse feixe possui uma extensão espacial finita e, devido à sua dependência da fase azimutal, as informações contidas em uma mistura de modos podem ser separadas com alta eficiência [77, 78].

No cenário da comunicação óptica no espaço livre, cada índice  $m$ , do conjunto de modos Laguerre-Gauss, pode ser considerado uma informação, por exemplo: Fickler *et al* enviaram uma imagem de um ponto a outro sobre a cidade de Viena de maneira que cada um dos pixels da figura representa um estado de MAO [13]. Desta maneira, a multiplexação de estados de MAO, que se obtém por meio de uma superposição de modos, caracteriza uma mistura de dados. Entretanto, superpor e transmitir é uma tarefa relativamente simples, a dificuldade é encontrar técnicas adequadas para separar essa mistura de modos quando um receptor a detecta.

Uma contribuição relevante nesse sentido foi dada por Gibson *et al* [12]. Eles realizaram a transferência de informações codificadas como estados de MAO de um feixe de luz. As unidades transmissoras e receptoras são baseadas em moduladores espaciais de luz, que geram

ou medem a CT de um feixe laser em um de oito estados puros de MAO. Verificou-se que as informações codificadas dessa maneira são resistentes à espionagem, no sentido de que qualquer tentativa de exibir o feixe para longe de seu eixo estará sujeita a uma restrição angular e um deslocamento lateral, os quais resultam em incerteza inerente na medição.

Outra contribuição relevante foi dada por Wang et al [7], eles reportaram um sistema de comunicação no espaço livre com uma capacidade de envio de dados da ordem de terabit por segundo combinando a multiplexação de estados de MAO com a multiplexação de estados de polarização. Com este procedimento, eles constataram que é possível aumentar a capacidade de envio de informação em  $2N$  vezes, em que  $N$  é o número de estados de MAO multiplexados.

Ao utilizar a multiplexação de estados de MAO para fins de comunicação óptica no espaço livre, nota-se a importância da investigação a respeito de técnicas que visem a separação de uma determinada quantidade de modos que compõem uma dada superposição. Neste sentido, há várias propostas para separar os estados de MAO componentes, por exemplo, os métodos de interferometria [79, 80], que exigem uma complexidade crescente de esquemas interferométricos à medida que cresce o número de modos a serem separados.

Outra abordagem interessante é baseada na transformação log-polar, a qual mapeia círculos em linhas paralelas. Este método consiste na transformação de modos ópticos de entrada, que possuem uma fase azimutal, em ondas planas com a componente do vetor de onda transversal proporcionais à carga topológica (CT) do feixe de entrada [77]. O feixe mapeado, quando focalizado por uma lente, sofre um deslocamento horizontal em que a sua magnitude e sentido também depende da CT.

A proposta de separar estados de MAO multiplexados usando a transformação log-polar foi reportado por Berkhout *et al* [77]. Para tal, eles utilizaram dois elementos ópticos (EO), o primeiro transforma um feixe com frentes de onda helicoidais em um fino bastão de luz que acomoda um gradiente de fase transversal que varia de 0 a  $2m\pi$ . Tal transformação é representada pela fase  $F_1 = \exp[i\phi_1(x, y)]$ , a qual conecta dois sistemas de coordenadas  $(x, y) \rightarrow (u, v)$ , e é dada por

$$\phi_1(x, y) = \frac{k}{f}(xu - yv + x), \quad (5.1)$$

onde  $u = -a \ln[(x^2 + y^2)/b]$  e  $v = a \tan^{-1}(y/x)$ . Neste caso,  $a$  é um parâmetro que dimensiona a imagem transformada, enquanto  $b$  translada-a na direção  $u$  e pode ser escolhido independentemente de  $a$ .

O segundo EO, posicionado no plano de Fourier do primeiro, representado pela fase  $F_2 =$

$\exp[i\phi_2(u, v)]$ , tem a função de corrigir as deflexões dos vetores de onda do feixe de entrada causadas por  $F_1$ . Este elemento é dado por

$$\phi_2(u, v) = -\frac{kab}{f} \exp\left(\frac{u}{a}\right) \cos\left(\frac{u}{a}\right), \quad (5.2)$$

onde  $k = 2\pi/\lambda$  é o módulo do vetor de onda. Ressalta-se que  $a = d/2\pi$ .

No plano de Fourier do elemento óptico de correção o feixe é focalizado e sofre um leve deslocamento horizontal que depende do valor da CT. A magnitude deste deslocamento transversal é dada por

$$t_m = \frac{\lambda f}{d} m, \quad (5.3)$$

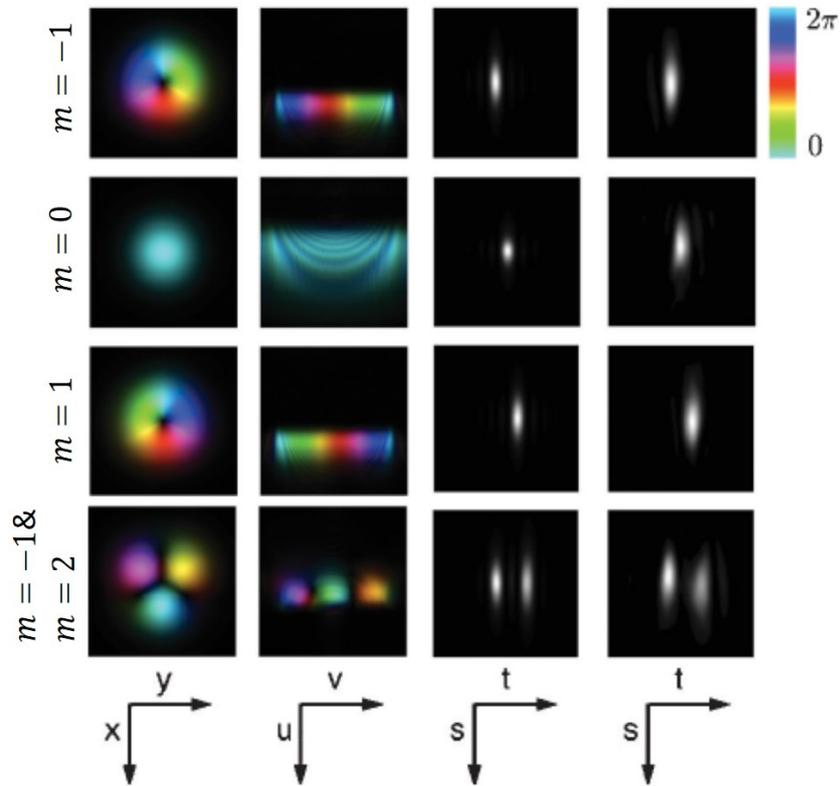
onde  $d$  é o comprimento do retângulo de luz [77].

A Fig.5.1 mostra o que acontece com modos Laguerre-Gauss ao serem propagados no sistema óptico contendo  $F_1$  e  $F_2$ . Nas duas primeiras colunas, à esquerda, vemos as distribuições de fase e intensidade dos feixes de entrada, obtidas por simulação numérica, imediatamente antes do elemento óptico transformador e logo após o elemento de correção de fase. Nota-se que os feixes de entrada com perfil de intensidade circular são desdobrados em um perfil de intensidade retangular com um gradiente de fase que varia  $m$  vezes de 0 a  $2\pi$ . Isso induz uma mudança no fluxo de energia dos feixes, pois antes era circular e agora passa ser linear, porém, o sentido desse fluxo ainda permanece dependente do sinal da carga topológica  $m$ .

Nas duas colunas à direita, vemos os padrões de intensidade, modelado e medido, no plano de um detector. Os padrões de intensidades observados mostram que a posição dos pontos luminosos alongados mudam com o estado de MAO de entrada. Essa abordagem é simples e eficiente, porém, independentemente da CT do feixe de entrada, o gradiente de fase dos feixes mapeados têm sempre a mesma região espacial para serem acomodados (Observe a Fig.5.1), isso ocasiona uma sobreposição entre modos adjacentes [77]. Esta ocorrência é uma consequência de a transformação descartar a natureza periódica da variável angular. Tentou-se sanar esta limitação usando um holograma de fase adicional conhecido como elemento fan-out que faz cópias dos campos ópticos de entrada e a interferência dessas cópias pode produzir uma melhor resolução [78], mas ao custo de aumentar a complexidade da configuração experimental.

A dificuldade de se obter uma maior resolução do método de separação de modos de luz usando a transformação log-polar foi sanada por Wen et al [18], pois em vez de uma transformar círculos em linhas, foi proposto uma fase que mapeia espirais logarítmicas com  $n$  retornos em linhas paralelas. Desta maneira, o tamanho da região espacial que acomodará o gradiente de

Figura 5.1: Da esquerda para direita, a primeira coluna mostra as distribuições fase e de intensidade dos feixes de entrada modelados imediatamente antes do elemento óptico transformador, enquanto que a segunda coluna de imagens exibe os feixes transformados logo após o elemento de correção de fase. As últimas duas colunas motram as imagens modeladas e observadas no plano CCD para cinco valores de cargas topológicas especificados.



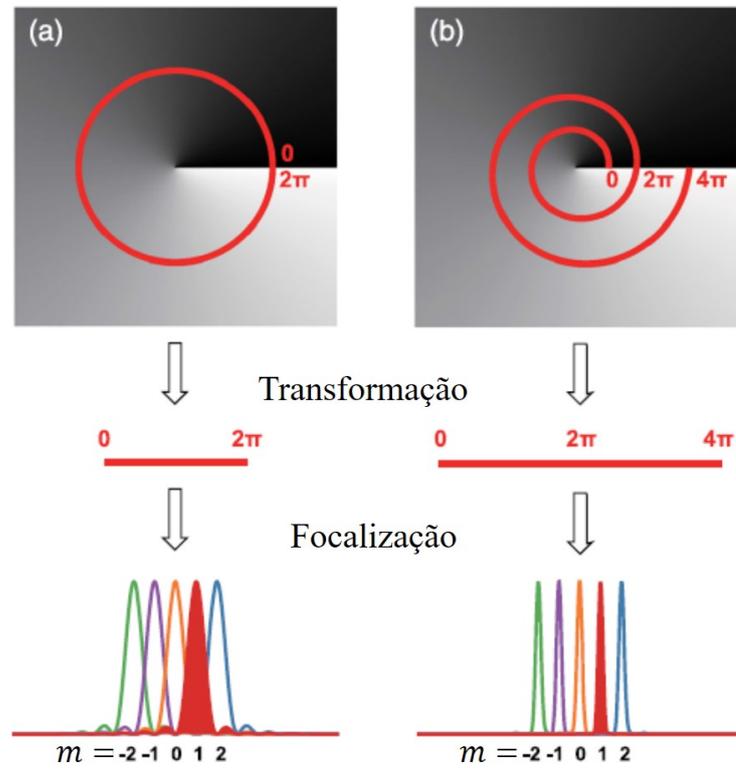
Fonte: Adaptado de [77], 2010,

fase do feixe mapeado aumentará de  $n$  vezes ao longo da frente da onda mapeada e tal aumento dependerá do valor da CT do(s) modo(s) de entrada. Isso possibilitou classificar estados de MAO com resolução significativamente mais alta.

A partir da Fig.5.2, podemos ver que o esquema de transformação espiral proposto fornece um aumento da região espacial que acomoda o gradiente de fase ao longo da frente da onda mapeada, pois enquanto a transformação log-polar transforma círculos em linhas retas de tamanho  $2\pi$ , o novo esquema transforma espirais de  $n$  retornos em linhas de tamanhos proporcionais à  $n$ . Conseqüentemente, no plano de saída, observa-se uma maior separação entre modos adjacentes na Fig.5.2(b) do que na Fig.5.2(a). Ressalta-se que o número  $n$  de retornos da espiral depende apenas da largura do feixe de entrada [18].

Para obter a transformação que mapeia espirais logarítmicas em linhas paralelas, foi considerado propagação paraxial de ondas luminosas entre dois planos paralelos separados de uma

Figura 5.2: Em (a), tem-se a ilustração do princípio da transformação log-polar; em (b), é exibido o esquema de transformação espiral.



Fonte: Adaptado de [18], 2018,

distância  $d$ : o plano de entrada,  $(x_1, y_1)$ , e o de saída  $(x_2, y_2)$ . Deste modo, o mapeamento de um dado ponto  $(x_1, y_1)$  em  $(x_2, y_2)$  pode ser dado no contexto da óptica de raios, de modo que a fase que realiza tal conexão,  $F_Q = \exp[iQ(x_1, y_1)]$ , tem um ângulo de fase dado por [18]

$$Q(x_1, y_1) = \frac{k\beta}{(1+a^2)f} \left[ (ax_1 + y_1) \ln \left( \frac{r_1}{r_0} \right) + (x_1 - ay_1)\theta - (ax_1 + y_1) \right], \quad (5.4)$$

em que  $k = 2\pi/\lambda$  e  $\lambda$  é o comprimento de onda da luz. As quantidades  $a$  e  $\beta$  são parâmetros constantes,  $f$  é a distância focal de uma lente colocada após o elemento de fase para realizar uma transformada de Fourier opticamente.

Além disso,  $r$  e  $\theta$  são as coordenadas polares, mas a variável  $\theta$  não é a convencional, uma vez que não é limitado. Estas duas variáveis são expressas da seguinte maneira:  $r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$  e  $\theta = \theta_0 + 2m\pi$ , onde

$$\theta_0 = \tan^{-1}(y_1/x_1), \quad m = \left\lfloor \frac{1}{2a\pi} \ln \left( \frac{r_1}{r_0} e^{-a\theta_0} \right) \right\rfloor, \quad (5.5)$$

e  $\lfloor \dots \rfloor$  é a função piso, que converte um número real  $X$  no maior número inteiro menor ou

igual a  $X$ .

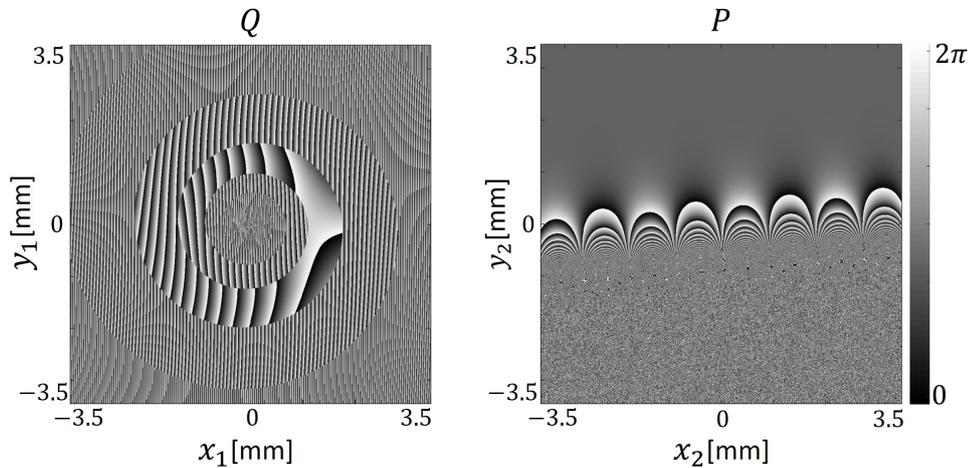
Após a realização do mapeamento, utiliza-se uma fase corretora,  $F_P = \exp[iP(x_2, y_2)]$ , que deve ser colocada no plano de Fourier de  $F_Q$ . Esse elemento de correção de fase é dado por [18],

$$P(x_2, y_2) = \frac{kr_0\beta}{(1+a^2)f} \exp\left(\frac{ax_2 + y_2}{\beta}\right) \left[ \text{sen}\left(\frac{x_2 - ay_2}{\beta}\right) + a \cos\left(\frac{x_2 - ay_2}{\beta}\right) \right], \quad (5.6)$$

em que uma  $f$  é a distância focal de uma lente colocada após o elemento de correção de fase. Enfatiza-se que as constantes,  $a$  e  $\beta$ , são as mesmas definidas na função  $Q(x_1, y_1)$ . A Fig.5.3 mostra os padrões de fase nos respectivos planos transversos. Além disso,  $(x_2, y_2)$  são as coordenadas espaciais no plano de Fourier de  $F_Q$  e são expressas da seguinte maneira [18]

$$x_2(r_1, \theta) = \frac{\beta}{(1+a^2)} \left[ a \ln\left(\frac{r_1}{r_0} e^{-a\theta_0}\right) + \theta \right], \quad y_2(r_1, \theta) = \frac{\beta}{(1+a^2)} \left[ \ln\left(\frac{r_1}{r_0} e^{-a\theta_0}\right) - a\theta \right], \quad (5.7)$$

Figura 5.3: Padrões de distribuições de fases para transformação espiral  $Q$  e o elemento corretor  $P$ , respectivamente.

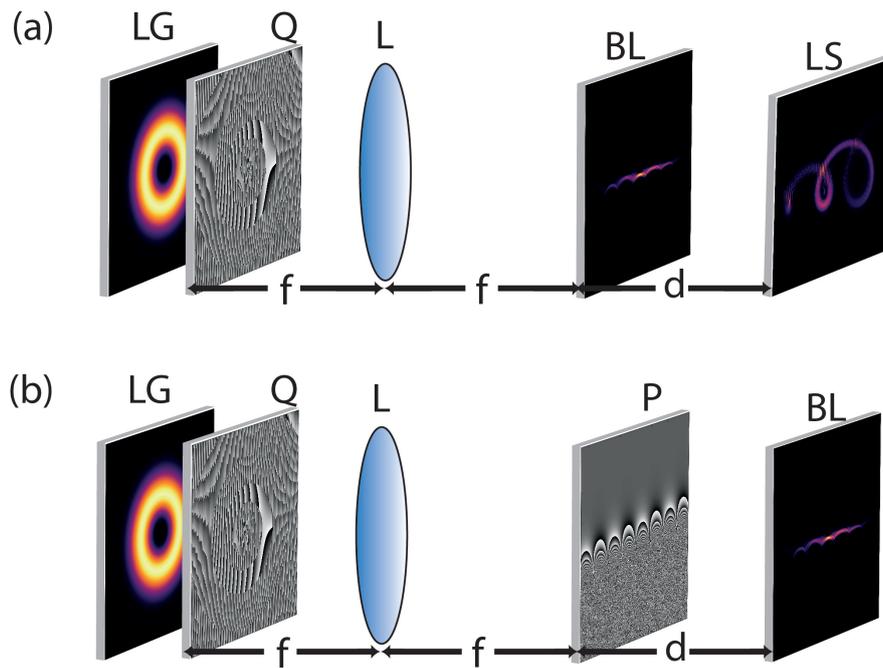


Fonte: Autor

É importante enfatizar que a primeira máscara de fase,  $F_Q$ , imprime ao feixe incidente deflexões para realização da transformação. Entretanto, no ponto em que se alcança o mapeamento desejado tem que ser colocado o segundo elemento de fase que terá a função de compensar tais deflexões e a fase adquirida pela onda durante a propagação a partir de  $F_Q$ . O efeito da fase de correção está ilustrado na Fig.5.4. Na Fig.5.4(a), na ausência de  $F_P$ , o feixe mapeado, ao se propagar, tende a se espiralar, uma vez que ainda sente os efeitos de  $F_Q$ . Na Fig.5.4(b),

com a presença de  $F_P$ , o padrão mapeado se propaga colimado, pois os efeitos de  $F_Q$  foram cancelados por  $F_P$ .

Figura 5.4: Esquema para ilustrar a função da fase de correção. Em (a) um dado modo LG é mapeado em um bastão de luz (BL) no foco da lente  $L$ . Após se propagar de uma distância  $d$ , o feixe torna a espiralar. Em (b) é mostrado a mesma situação de (a), porém, o fato de colocarmos a fase de correção faz com que BL se propague colimado.

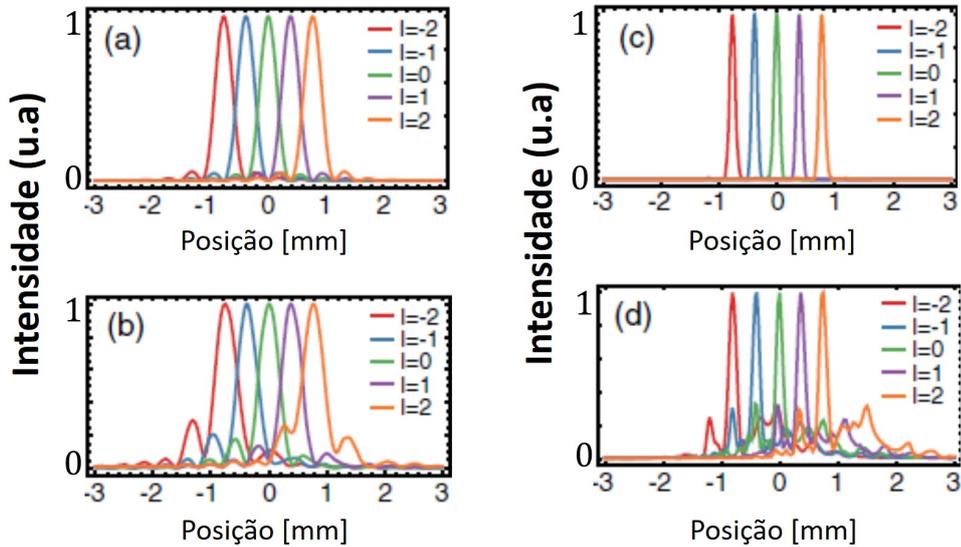


Fonte: Autor

Com o intuito de comparar o desempenho das duas transformações, Wen et al [18] produziram um conjunto de dados, obtidos via simulação numérica e realização experimental, para os dois tipos de transformação que mostra a separação de modos Laguerre-Gauss ( $-2 \leq m \leq 2$ ), respectivamente. Como esperado para ambos os esquemas, os modos LG com diferentes cargas topológicas são deslocados horizontalmente do centro por um deslocamento proporcional à  $m$  [18]. Para evidenciar a separação eles construíram os perfis de intensidade desses modos na direção horizontal, como mostrado na Fig.5.5.

A partir da Fig.5.5, nota-se que há um aumento significativo da resolução quando a separação dos modos LG é realizada com transformação espiral. Desta maneira, percebe-se que esta técnica de classificar modos de luz contendo MAO é bastante relevante, pois diminui significativamente a sobreposição entre os canais adjacentes. Isso contribui para o aumento da qualidade

Figura 5.5: Em (a) e (b) é mostrado os resultados numéricos e experimentais quando usado o método de transformação log-polar; já em (c) e (d) é exibido os gráficos dos dados simulados e via realização experimental para o esquema de transformação espiral.



Fonte: Adaptado de [18]

no recebimento de dados enviados por tal canal o que é importante para o desenvolvimento de sistemas de comunicação óptica. Porém, os perfis mostrados na Fig.5.5 não constituem superposições de estados de MAO, mas sim a sobreposição numérica de cinco estados puros.

Percebemos que os autores do referido trabalho [18], que classifica estados de MAO por meio do método da transformação espiral, não realizaram de fato uma separação de um conjunto de modos multiplexados, como por exemplo uma superposição de modos LG. Em vez disso, eles mostraram apenas que é possível classificar um dado modo de acordo com seu deslocamento em relação ao estado fundamental,  $m = 0$ . Ao tomarmos conhecimento desta lacuna, incrementamos aos resultados uma efetiva separação de modos.

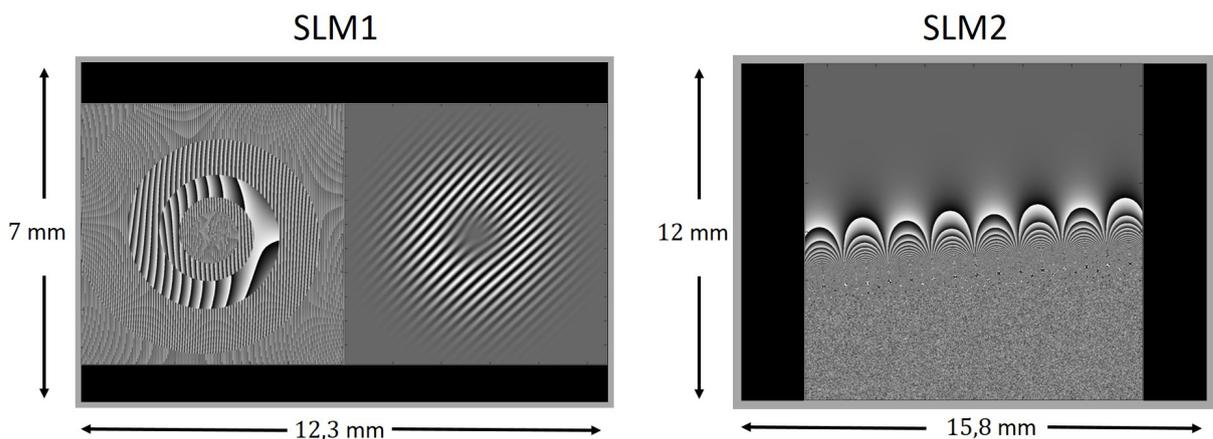
Neste sentido, propusemos mostrar, teórica e experimentalmente, a separação de estados de MAO coerentes quando um feixe que carrega múltiplos estados de MAO multiplexados se propaga em um sistema com dois elementos difrativos, uma máscara de fase de transformação espiral e a de correção. Desta forma, estaremos contribuindo diretamente com futuros avanço no campo da comunicação óptica, uma vez que a capacidade de envio de dados está fortemente ligada a quantidade de estados de MAO que se pode separar de uma única vez. Para tal, nossos campos de entrada consistem de múltiplos estados de MAO multiplexados como superposições de feixes Laguerre-Gauss. Estes serão separados e classificados no plano de saída.

## 5.2 Separação de Estados de MAO Coerentes

Inicialmente, reproduziremos por simulação numérica e realização experimental, os resultados do artigo [18] com o intuito de dominar esta técnica usando luz coerente. Porém, uma dificuldade que encontramos foi que no trabalho seminal os autores utilizaram três moduladores de luz (SLM): um para gerar modos Laguerre-Gauss, outro para codificar a transformação espiral e o último para gravar a fase de correção. Entretanto, em nosso laboratório, só contávamos com 2 SLMs. Resolvemos esse problema codificando as fases que geram os feixes LG e a que realiza a transformação espiral em um único modulador. Contudo, isso aumenta a complexidade de nossa configuração experimental.

Um dos moduladores (SLM1) comporta uma matriz de  $1080 \times 1920$  pixels, com cada pixel tendo tamanho de  $6.4 \times 10^{-3}$  mm; enquanto que o outro dispositivo (SLM2) suporta uma matriz bem menor:  $600 \times 792$  pixels, com tamanho de cada pixel sendo  $20 \times 10^{-3}$  mm. Deste modo, codificamos dois hologramas de  $960 \times 960$  pixels de resolução cada, lado a lado, no SLM1: no lado esquerdo a transformação espiral e no direito a fase que gera um modo LG. No SLM2 gravamos o holograma de correção que tem resolução de  $600 \times 600$  pixels. A disposição frontal de cada SLM com suas respectivas gravações de fase é mostrada na Fig.5.6.

Figura 5.6: Esquema de gravação dos hologramas. No SLM1 é gravado  $Q$  e as fases que geram modos LG, enquanto que no SLM2 é impresso a fase de correção.



Fonte: Autor

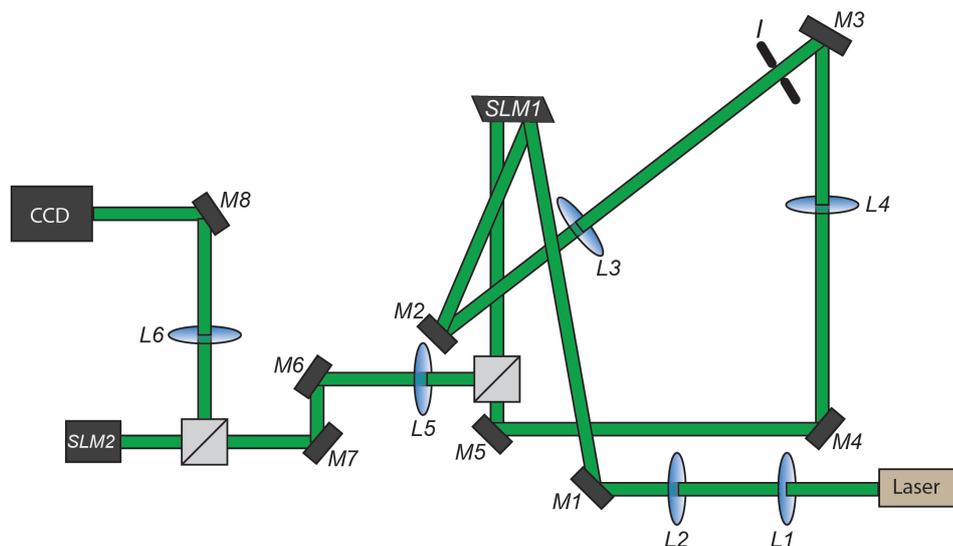
A nossa configuração experimental utilizou um laser operando em 532 nm (modelo: Ultra-lasers MSL-FN-532-200 mW); lentes  $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5$  e  $L_6$  de comprimentos focais  $f_1 = 2,8$  mm,  $f_2 = 150$  mm,  $f_3 = f_4 = f_5 = 300$  mm e  $f_6 = 200$  mm, respectivamente; dois divi-

sores de feixes (BS); oito espelhos ( $M_i$ ), ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ); dois moduladores de luz: Holoeye LETO (SLM1) e Hamamatsu X10468-01(SLM2); uma íris ( $I$ ) que seleciona a primeira ordem de difração do holograma que gera um dado modo LG; e uma câmera CCD usada como detector de intensidade.

As lentes  $L_1$  e  $L_2$  são utilizadas para expandir e colimar o feixe laser, tornando-o uma onda plana que incide sobre o primeiro holograma. A lente  $L_3$  realiza uma transformada de Fourier do holograma em várias ordens de difração no plano de Fourier, no foco de  $L_3$ , onde a íris seleciona a primeira ordem de difração na qual está localizado o modo desejado. A partir da íris, o feixe de luz começa a se expandir e a lente  $L_4$  colima-o e o projeta perpendicularmente sobre a região do SLM1 que foi codificado  $Q(x, y)$ . O feixe ganha essa fase e é submetido à uma transformada de Fourier por  $L_5$ , projetada no plano do SLM2 onde é gravado a correção de fase  $P(u, v)$ .

A partir do SLM2, o feixe mapeado passa ter comportamento de uma onda plana colimada [18],  $\exp(imx/\beta)$ , de modo que  $L_6$  o focaliza no plano da CCD. É importante salientar que dependendo do sinal da CT do feixe gerado, a luz focalizada na CCD se deslocará para a direita ou para esquerda e a magnitude deste deslocamento será proporcional ao valor absoluto do índice topológico  $m$ . Nosso aparato experimental é mostrado na Fig.5.7.

Figura 5.7: Configuração experimental: SLM1 e SLM2 são os moduladores de luz; câmera CCD;  $M_1$  a  $M_8$  são espelhos;  $BS_1$  e  $BS_2$  são divisores de feixes; o comprimento focal das  $L_i$  lentes são  $f_1 = 2,8$  mm,  $f_2 = 150$  mm,  $f_3 = f_4 = f_5 = 300$  mm, e  $f_6 = 200$  mm.



Fonte: Autor

### 5.3 Modelo da Propagação para os Feixes Coerentes

Apresentamos a formulação teórica da ideia conceitual do experimento com luz espacialmente coerente. Uma onda plana gerada no telescópio (lentes  $L_1$  e  $L_2$ ) atinge a primeira metade do SLM1 onde está codificado um holograma  $h(\mathbf{r}_1)$  construído para gerar feixes  $U_i(\mathbf{r}_1)$ , que podem ser modos LG puros ou superposições destes. Em seguida,  $U_i(\mathbf{r}_1)$  é projetado sobre a segunda metade do SLM1 onde está gravada a fase  $Q(\mathbf{r}_1)$ . O campo resultante é submetido a uma transformada de Fourier por uma lente de comprimento focal  $f_5$

$$E_1(\mathbf{r}_2) = \int U_i(\mathbf{r}_1) \exp[iQ(\mathbf{r}_2)] \exp\left(\frac{ik}{f_5} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2\right) d\mathbf{r}_1. \quad (5.8)$$

É importante enfatizar que o campo  $E_1(\mathbf{r}_2)$ , obtido no processo descrito acima, está projetado sobre o SLM2 onde está gravada a fase de correção  $P(\mathbf{r}_2)$ . Finalmente, a lente  $f_6$  realiza uma transformada de Fourier do campo resultante, produzindo a distribuição de luz final no plano do detector,

$$E_2(\mathbf{r}_3) = \int E_1(\mathbf{r}_2) \exp[iP(\mathbf{r}_2)] \exp\left(\frac{ik}{f_6} \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3\right) d\mathbf{r}_2. \quad (5.9)$$

Explicitando todos os termos do integrando da Eq.(5.9), teremos que o campo no plano da CCD é representado explicitamente por

$$E_2(\mathbf{r}_3) = \iint U_i(\mathbf{r}_1) \exp[iQ(\mathbf{r}_1) + iP(\mathbf{r}_2)] \exp\left[\frac{ik}{f_5 f_6} (f_6 \mathbf{r}_1 + f_5 \mathbf{r}_3) \cdot \mathbf{r}_2\right] d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \quad (5.10)$$

É importante salientar também que, gerado um dado feixe LG, a função da lente  $L_4$  é apenas colimá-lo. Além disso, como  $f_3 = f_4$ , o feixe que incide na fase de mapeamento tem as mesmas dimensões da janela em que estava gravado o holograma que o gerou. Os resultados teóricos que mostraremos a seguir são obtidos pela simulação numérica de  $E_2(\mathbf{r}_3)$ .

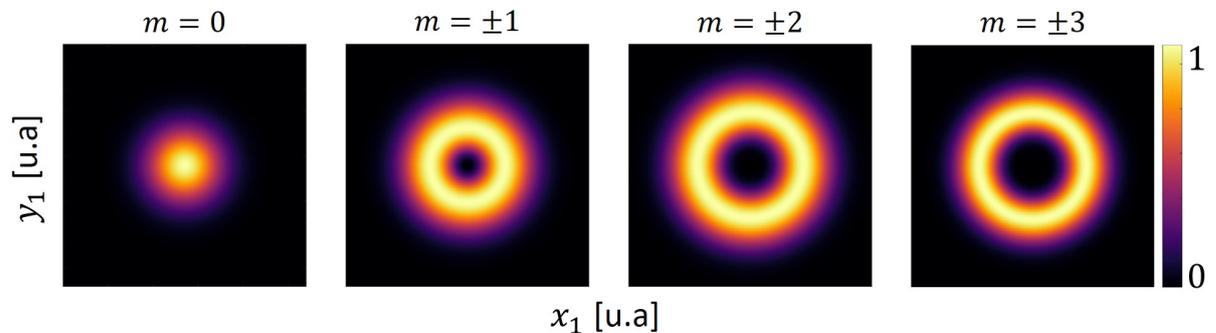
### 5.4 Simulação Numérica e Resultados Experimentais para a Classificação de Estados de MAO Puros

Nessa primeira parte do trabalho, mostraremos resultados teórica e experimentais tanto da classificação de modos puros quanto de suas superposições usando feixes LG. Classificamos sete estados de MAO ( $-3 \leq m \leq 3$ ), além disso, realizamos a separação de maneira efetiva de cinco tipos de superposições destes. Pois, como enfatizamos anteriormente, o processo de desfazer uma multiplexação realizada por meio de superposições de estados não havia sido

explorado anteriormente. Além de reproduzir os resultados do artigo motivador, conseguimos incrementar a este uma separação dos estados componentes de uma superposição constituída de sete modos LG.

É importante enfatizar que tanto a transformação espiral quanto a fase de correção são hologramas fixos. Mudamos apenas os hologramas que produzem os feixes LG. A Fig.5.8 mostra os padrões de intensidades dos campos de entrada utilizados no processo de classificação de estados de MAO puros. Cada modo é identificado por sua CT. Como em um dado plano transverso  $|LG_m|^2 = |LG_{-m}|^2$ , por isso que na Fig.5.8 temos um único padrão de intensidade representando duas CT.

Figura 5.8: Padrões de intensidade dos campos de entrada obtidos numericamente.



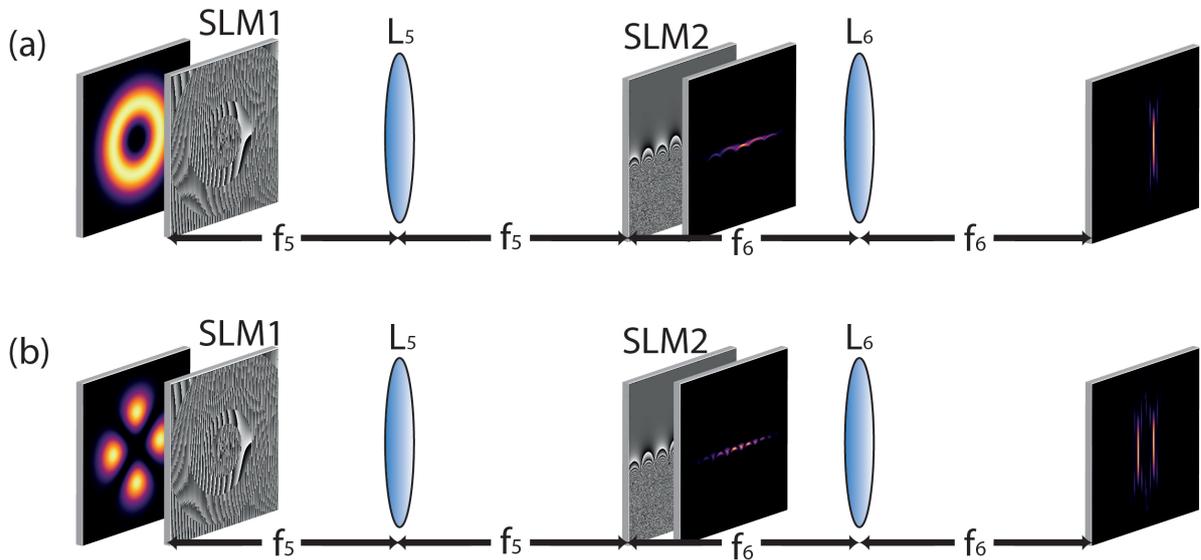
Fonte: Autor

Mostramos na Fig.5.9 a disposição linear do percurso percorrido por qualquer modo ou superposições destes a partir do elemento óptico de mapeamento até o plano da CCD. Nesta ilustração conseguimos enxergar as transformações sofridas pelo feixe de entrada até o plano de observação.

Observando a Fig.5.9(a), notamos que a transformação sofrida pelo modo  $LG_2$  de entrada se dá quando o feixe de luz ganha a fase espiral impressa no SLM1. Pois tal estado de MAO, imediatamente antes do SLM1, possui simetria circular, entretanto, no plano do SLM2 ou logo após este passa ter uma simetria retangular, um bastão de luz.

Um fato importante de ser salientado é a respeito do processo de alinhamento. Pois, o modo LG de entrada tem que estar perfeitamente alinhado com a fase gravada no SLM1. Isso significa que os centros dos feixes devem coincidir com o do holograma de transformação. Analisando com cuidado o padrão de fase gravado no SLM2 (ver Fig.5.6), notamos uma leve inclinação nas modulações de fase. Além disso, acima dessas modulações, tem-se uma fase constante e abaixo

Figura 5.9: Em (a), temos que o campo de entrada é o feixe LG de CT  $m = 2$ , enquanto que o padrão de saída é um spot focalizado e deslocado. Em (b), o feixe de entrada é a superposição  $LG_{-2} + LG_2$  e o detectado são dois spots focalizados e deslocados simetricamente em relação ao centro da tela de observação.

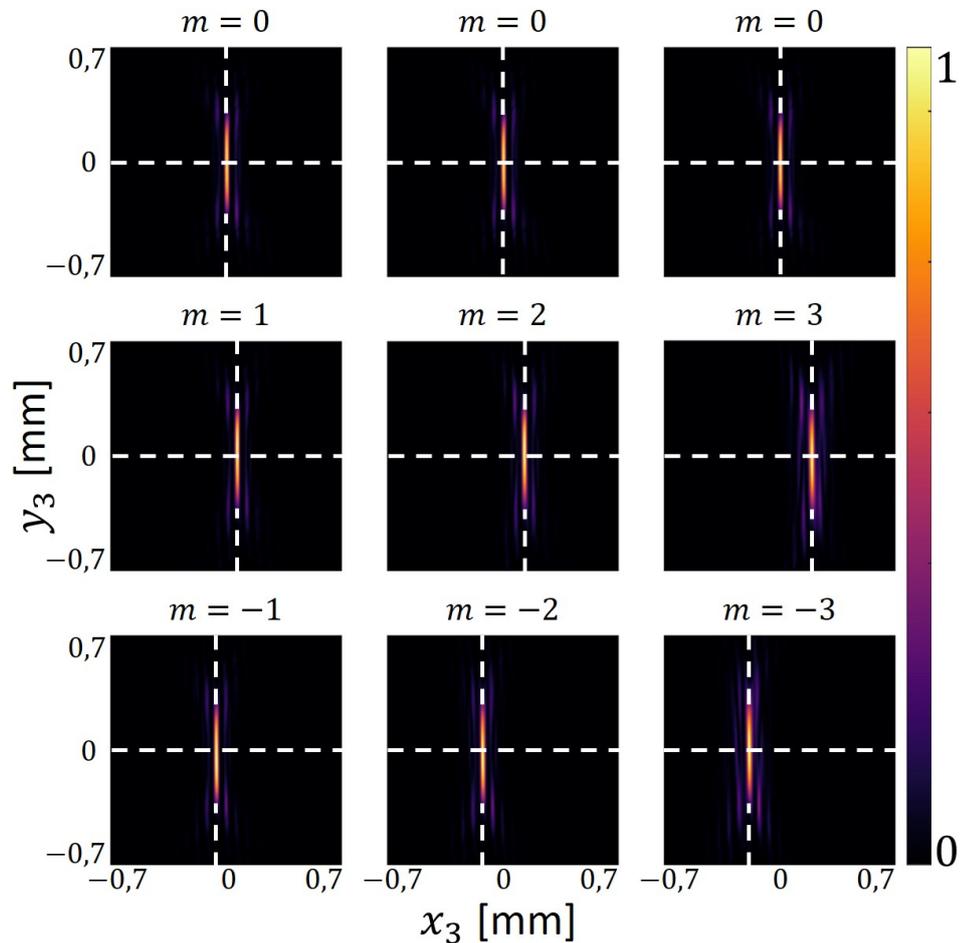


Fonte: Autor

fase aleatória. Deste modo, o bastão de luz tem que ser alinhado com tais modulações de fase.

Quando realizamos as simulações numéricas, usamos para todos os feixes LG de entrada uma cintura  $w_0 = 1,2$  mm; os parâmetros das fases de transformação espiral e de correção foram tomados como sendo  $a = 0.07$  e  $\beta = 0.29$  mm. Em seguida, utilizamos estes parâmetros para construir os hologramas gerados por computador (HGC) [34], como mostrados na Fig.5.6, que serão empregados na realização experimental. A simulação numérica para os campos de saída é mostrada na Fig.5.10. A propagação teórica de nossos campos luminosos foi feita usando o método do espectro angular [30].

Figura 5.10: Padrões de intensidade dos campos de saída obtidos por simulação numérica. Cada modo classificado estar especificado por sua CT  $m$ .

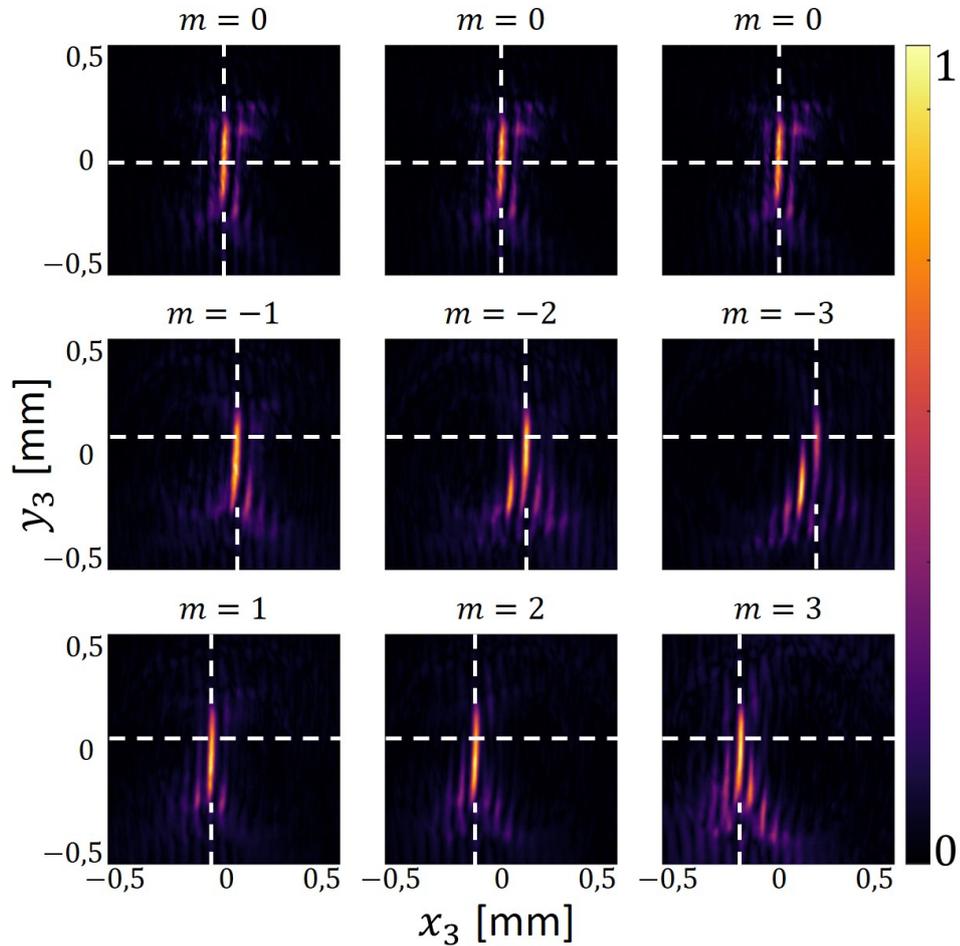


Fonte: Autor

Enfatizamos que a posição do modo fundamental,  $m = 0$ , é usada como referência espacial. Desta maneira, para um dado conjunto de parâmetros, todos os modos de alta ordem serão classificados a partir de posições tomadas em relação a posição de ordem zero, como podemos notar observando a Fig.5.10. Além disso, o conhecimento do deslocamento transversal entre dois modos consecutivos possibilita construir um conjunto de marcações na tela do detector que representarão posições esperadas para um determinado modo de saída.

Os padrões de intensidades dos campos de saída obtidos experimentalmente, correspondentes à simulação, são mostrados na Fig.5.11. Observamos uma excelente concordância entre teoria e experimento, quando comparamos os resultados da Fig.5.11 com os da Fig.5.10. Além disso, a partir dos padrões de intensidades, simulados e experimentais, nota-se uma significativa resolução da separação entre os modos adjacentes.

Figura 5.11: Distribuição de intensidade dos campos de saída obtidos experimentalmente. Novamente, cada modo classificado estar especificado por sua CT  $m$ .

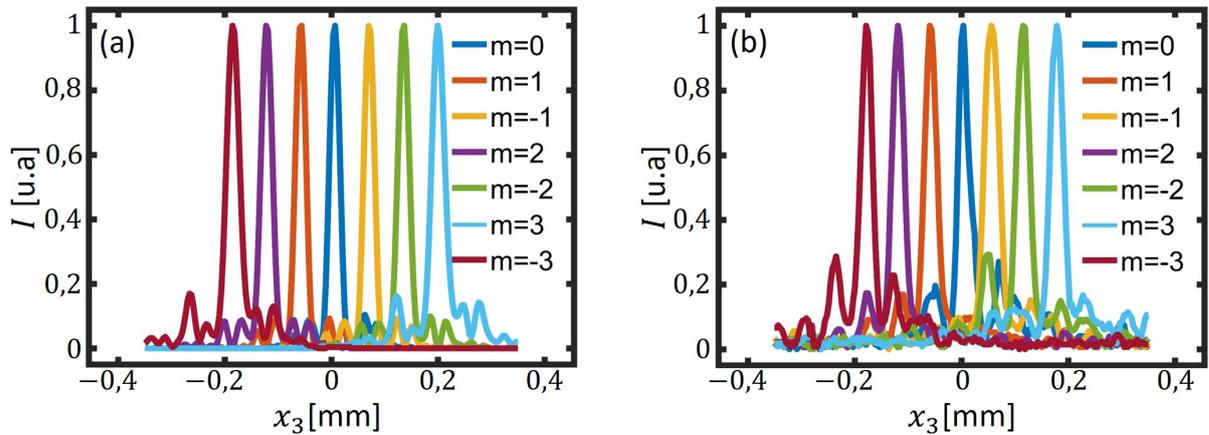


Fonte: Autor

Com a intenção de tornar mais claro a apresentação de nossos resultados, construímos a Fig.5.12 para mostrar os perfis de intensidade desses modos na direção horizontal ao longo das linhas médias tracejadas mostradas na figuras acima.

Observamos novamente, a partir da Fig.5.12, uma excelente concordância entre teoria e experimente. Entretanto, quando verificamos a distância entre dois modos adjacente,  $t$ , encontramos que, para os resultados da simulação,  $t_s \approx 0,07$  mm, já para o as medidas experimentais encontramos que  $t_e \approx 0,06$  mm. Esta suave discordância é devido a questões de alinhamento e imperfeições dentro de nosso sistema óptico, como por exemplo: pequenas aberrações, leves deslocamentos na posição das lentes, SLM2 levemente deslocado do plano de Fourier do SLM1, além de ruídos gerados no sistema óptico.

Figura 5.12: Perfis de intensidades horizontais ao longo das linhas tracejadas obtidos por: (a) simulação numérica ; (b) realização experimental.



Fonte: Autor

## 5.5 Simulação Numérica e Resultados Experimentais para a Separação de Estados de MAO Multiplexados

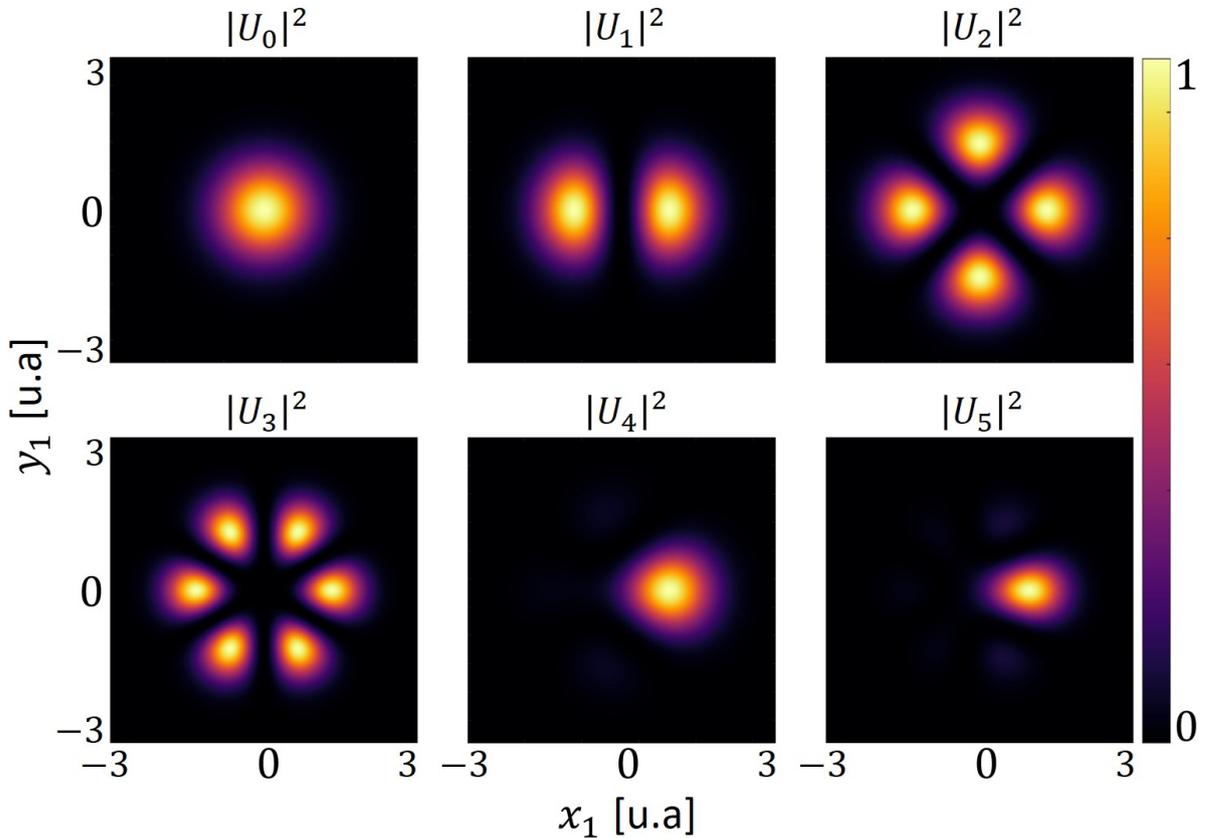
Nesta segunda parte do trabalho, mostraremos, teórica e experimentalmente, que também é possível separar estados de MAO coerentes quando um feixe que carrega múltiplos estados de MAO multiplexados se propaga no sistema com dois elementos difrativos, uma máscara de fase de transformação espiral e a de correção, como mostrado na Fig.5.9(b). Desta forma, estaremos fazendo uma contribuição no campo da comunicação óptica, uma vez que a capacidade de envio de dados está fortemente ligada a quantidade de estados de MAO que se pode classificar de uma única vez.

Desta maneira, em vez de um feixe que representa um único modo LG, nossos campos de entrada consistem de múltiplos estados de MAO multiplexados como superposições de feixes Laguerre-Gauss. Estes serão separados e classificados no plano de saída. Enfatizamos que a classificação dos modos separados se dará de acordo com seu deslocamento em relação ao estado fundamental,  $m = 0$ .

É importante enfatizar que tanto a transformação espiral quanto a fase de correção são hologramas fixos. Mudamos apenas os hologramas que produzem os campos de entrada. A Fig.5.13 mostra os padrões de intensidades dos campos de entrada utilizados no processo de classificação através da separação dos estados de MAO componentes de uma multiplexação destes. A mistura de modos se deu a partir das seguintes superposições:  $U_0 = LG_0$ ,  $U_1 = LG_{-1} + LG_1$ ,

$U_2 = LG_{-2} + LG_2$ ,  $U_3 = LG_{-3} + LG_3$ ,  $U_4 = \sum_{m=-2}^2 LG_m$  e  $U_5 = \sum_{m=-3}^3 LG_m$ , respectivamente.

Figura 5.13: Padrões de intensidades teóricos dos campos de entrada.



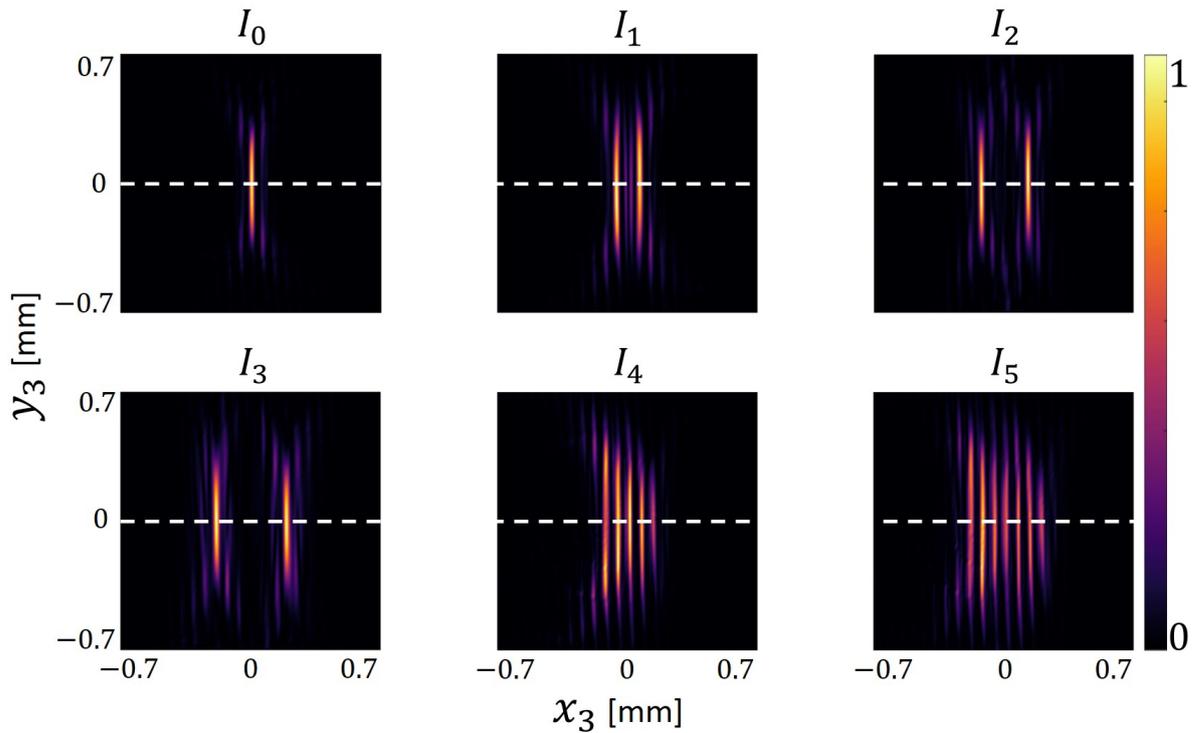
Fonte: Autor

Quando realizamos as simulações numéricas e os campos de entrada são propagados através do sistema óptico mostrado na Fig.5.9(b), os padrões de intensidades de saída resultantes são mostrados na Fig.5.14. Além disso, frisamos que usamos os mesmos parâmetros da seção anterior, ou seja, para todos os feixes de entrada, temos  $w_0 = 1,2$  mm; bem como  $a = 0.07$  e  $\beta = 0.29$  mm.

Com a intenção de explicitar a considerável separação entre os modos adjacentes dos estados separados, construímos a Fig.5.15 para mostrar os perfis de intensidade desses modos na direção horizontal ao longo das linhas médias tracejadas mostradas na Fig.5.14. Por contagem de pixels, constatamos que a distância de separação entre dois modos consecutivos é de  $t_s \approx 0,06$  mm.

Desta maneira, para um dado conjunto de parâmetros, todos os modos de alta ordem serão classificados a partir de posições tomadas em relação a posição de ordem zero, como pode-

Figura 5.14: Padrões de intensidades,  $I_i$ , obtidos por simulação numérica para os respectivos campos de saída correspondentes às superposições de entrada da Fig.5.13.

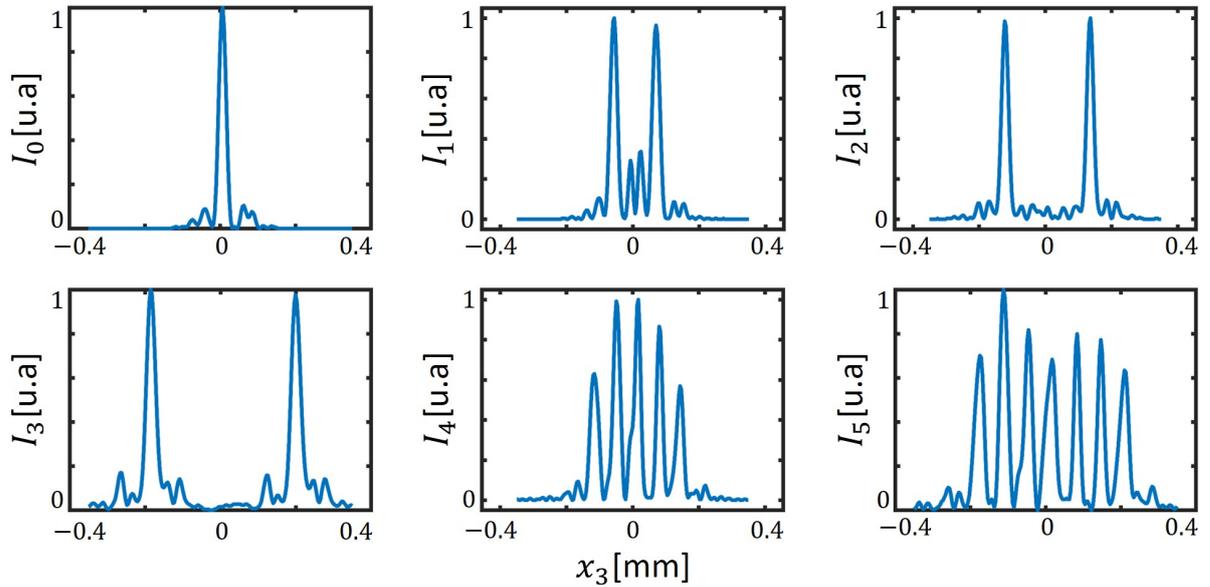


Fonte: Autor

mos notar observando a Fig.5.15. Além disso, o conhecimento do deslocamento transversal entre dois modos consecutivos possibilita um conjunto de marcações na tela do detector que representarão posições esperadas para um determinado modo de saída.

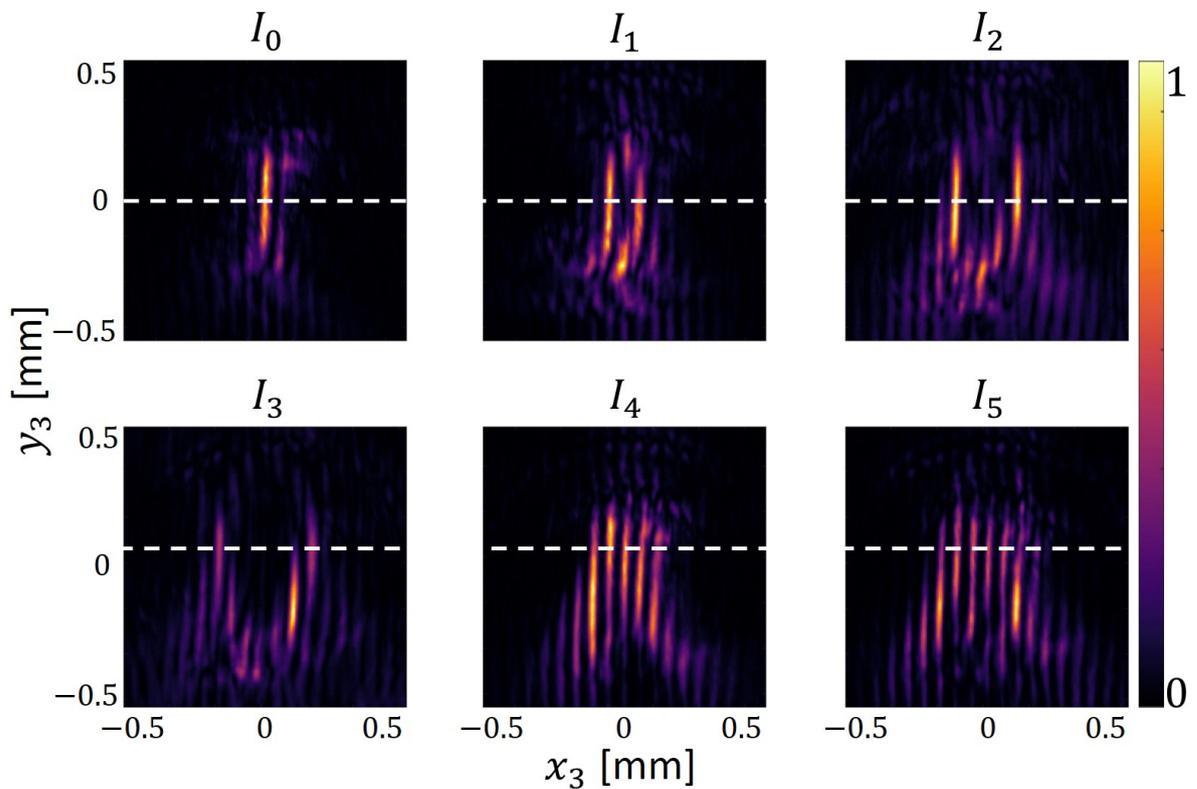
Os padrões de intensidades dos campos de saída obtidos experimentalmente para as superposições de modos LG são mostrados na Fig.5.16. Observamos uma excelente concordância entre teoria e experimento, quando comparamos os resultados da Fig.5.16 com os da Fig.5.14. Além disso, a partir da Fig.5.15, nota-se uma significativa resolução da separação dos modos LG multiplexados realizada com transformação espiral.

Figura 5.15: Exibição dos respectivos perfis horizontais ao longo das linhas médias tracejadas da Fig.5.14.



Fonte: Autor

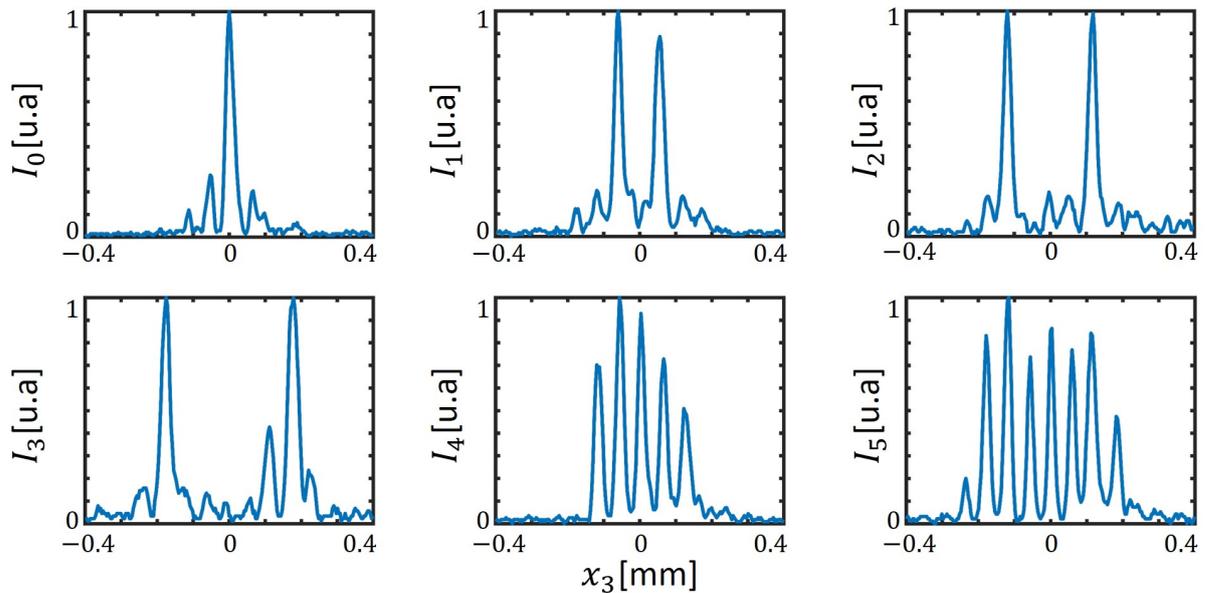
Figura 5.16: Padrões de intensidades,  $I_i$ , obtidos experimentalmente para os respectivos campos de saída correspondentes às superposições de entrada da Fig.5.13.



Fonte: Autor

Porém, como para os resultados da simulação, para uma melhor visualização da separação dos modos, construímos a Fig.5.17 para mostrar os perfis de intensidade desses modos na direção horizontal ao longo das linhas tracejadas mostradas na Fig.5.16. Novamente por contagem de pixels, constatamos que a distância de separação entre dois modos consecutivos é de  $t_s \approx 0,056$  mm.

Figura 5.17: Exibição dos respectivos perfis horizontais ao longo das linhas médias tracejadas da Fig.5.16.



Fonte: Autor

A partir da comparação dos dados experimentais da Fig.5.17 com os simulados da Fig.5.15, por contagem de pixels, verificamos uma leve discordância entre as distâncias entre dois modos consecutivos, pois enquanto que na simulação,  $t_s \approx 0,06$  mm, já para as medidas experimentais encontramos que  $t_e \approx 0,056$  mm. Esta suave diferença é devido a questões de alinhamento e imperfeições dentro de nosso sistema óptico, como por exemplo: pequenas aberrações, leves deslocamentos na posição das lentes, SLM2 levemente deslocado do plano de Fourier do SLM1, ruídos gerados no sistema óptico.

# 6. Separação de Estados de Momento Angular Orbital com Luz Espacialmente Incoerente

## 6.1 Introdução

A descoberta de feixes luminosos que transportam momento angular orbital (MAO) atraiu o interesse de muitos cientistas, uma vez que, do ponto de vista da micromanipulação e comunicação óptica, o MAO pode ser visto como um novo grau de liberdade o qual torna viável a codificação de dados [76] e torna possível mover pequenas partículas usando feixes de luz. Em tal caso, a unidade que representa uma informação é a carga topológica (CT), pois este tipo de luz transporta MAO de  $m\hbar$  por fóton [81].

Neste sentido, uma contribuição bastante relevante nesse sentido foi dada por Mario Krenn *et al* [13]. Eles realizaram experimentalmente a transmissão de informações clássicas codificadas nos padrões de intensidade de superposições de modos Laguerre-Gauss através de 3 km de forte turbulência sobre a cidade de Viena. Entretanto, como o padrão transmitido esteve sujeito a turbulências atmosféricas, o receptor detecta luz com um certo grau de incoerência (distorções no padrão de intensidade). Devido a isso, para identificar quais modos foram usados na multiplexação usando apenas o padrão de intensidade detectado, foi utilizado um algoritmo iterativo que simula uma rede neuronal artificial. Tal trabalho sugere que é viável links de comunicação terra-satélite usando modos de MAO.

Além disso, os autores caracterizaram a estabilidade do modo rotacional, que é significativo para experimentos de emaranhamento quântico, e constataram que ele é muito resistente à degradação pela atmosfera. Posteriormente, Krenn *et al* fizeram o mesmo experimento para transmitir modos de luz com momento angular orbital a uma distância de 143 km entre duas Ilhas Canárias [14]. O sucesso na identificação dos modos componentes da superposição teve uma precisão de mais de 80% até a terceira ordem e a decodificação de uma mensagem transmitida com uma taxa de erro de 8,33%.

No capítulo anterior, vimos que a implementação óptica da classificação de estados de MAO puros bem como estados espacialmente multiplexados foi alcançada ao utilizarmos a

transformação de fase espiral. Entretanto, como enfatizado anteriormente, uma informação escondida em um campo óptico espacialmente incoerentes pode ser mais robusta na propagação através da atmosfera turbulenta ou obstáculos que bloqueiam parte da luz. Portanto, a partir de agora, passamos a expor nossos resultados teóricos (simulação numérica) e experimentais a respeito de um esquema de classificação de alta resolução de estados de MAO (vórtices) espacialmente incoerentes.

Neste trabalho, o que chamamos de vórtices ópticos espacialmente incoerentes (VOI) é um feixe de luz incoerente originado pela passagem de um campo de speckle através de um holograma projetado para gerar modos LG ou quando um feixe LG coerente é espalhado por uma superfície áspera [82–85]. Consequentemente, a luz gerada apresenta um vórtice na função de coerência, o chamado vórtice de coerência [86].

Notavelmente, os vórtices de menor coerência são menos influenciados do que os de maior coerência durante a propagação em atmosfera turbulenta [87] e através de obstáculos [19]. Além disso, é importante salientar que a busca para discriminar os modos componentes de uma dada superposição de vórtices ópticos incoerentes com diferentes TCs é um tópico de interesse atual para a comunicação óptica [88, 89].

## 6.2 Fundamentos Básicos da Teoria de Coerência Óptica

Em literaturas didático-científicas é recorrente assumir que a luz é completamente coerente, uma vez que qualquer experimento de interferência resultará em franjas de interferência perfeitas [90]. Porém, quando experimentos interferométricos são realizados com luz incoerente, não é possível detectar tal efeito. Deste modo, faz-se necessário uma breve revisão de elementos da teoria da coerência óptica que nos dará ferramentas para entendermos o que acontece quando duas ondas não coerentes são superpostas. Além disso, nos atentaremos apenas ao estudo do comportamento da coerência espacial, uma vez que as propriedades de coerência temporal não exercem papel relevante ao longo desta tese.

Uma fonte de luz altamente coerente é a onda plana que emerge de um laser. Porém, a grande maioria das fontes ópticas, tanto naturais como artificiais, emitem luz por meio de emissão espontânea de uma coleção de átomos ou moléculas excitadas. Pode-se citar como exemplo a luz do sol, das lâmpadas incandescentes e das lâmpadas de descarga de gás. Uma grande coleção de átomos ou moléculas, excitados para estados de alta energia por meios

térmicos, elétricos ou outros, decaem aleatoriamente e independentemente para estados de energia mais baixos, emitindo luz no processo. Uma característica importante dessa luz são suas flutuações aleatórias e, muitas vezes, é referida como fonte térmica [91].

A ondas geradas de fontes térmicas, geralmente, são chamadas de incoerentes. Porém, essa descrição é um tanto enganosa, pois, por volta do ano de 1860, Emile Verdet observou franjas quando realizara o experimento de Young com luz solar [92]. Entretanto, a separação entre os dois furos em uma tela opaca deve assumir pequenas distâncias ( $\geq 0,05$  mm). Desse modo, é intuitivo pensar que há alguma correlação espacial entre quaisquer dois pontos de uma frente de onda originária de uma fonte térmica. O grau de parentesco entre quaisquer dois pontos de uma frente de onda é medido pela função de coerência mútua [93].

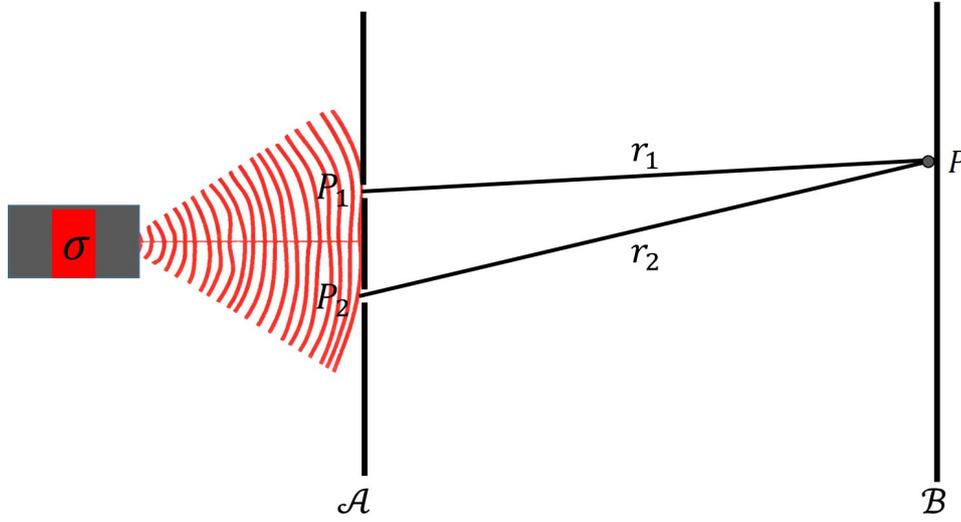
### 6.2.1 Função de Correlação Cruzada

A partir de agora, mostraremos a maneira de como obter a função de coerência mútua, e para tal lançaremos mão do experimento de Young. Este pode ser descrito considerando uma fonte de luz térmica,  $\sigma$ , quase monocromática que emite ondas contendo flutuações aleatórias em sua distribuição espacial de fase. Tal fonte ilumina dois furos na tela opaca,  $\mathcal{A}$ , nos pontos  $P_1$  e  $P_2$ . No ponto  $P$ , na tela também opaca  $\mathcal{B}$  paralela à primeira, tem-se a superposição dos campos  $E(\mathbf{r}_1, t - t_1)$ , que chega de  $P_1$ , e  $E(\mathbf{r}_2, t - t_2)$ , que chega de  $P_2$ . A Fig.6.1 mostra de maneira esquemática o experimento de Young. As distâncias  $PP_1 = |\mathbf{r}_1| = r_1$  e  $PP_2 = |\mathbf{r}_2| = r_2$ ; os tempos  $t_1 = r_1/c$  e  $t_2 = r_2/c$ , onde  $c$  é a velocidade da luz. Desse modo, o campo em  $P$  é dado por

$$E(\mathbf{r}, t) = K_1 E(\mathbf{r}_1, t - t_1) + K_2 E(\mathbf{r}_2, t - t_2). \quad (6.1)$$

Enfatiza-se que há autores que consideram  $K_1$  e  $K_2$  como sendo fatores constantes complexos, puramente imaginários, que dependem do tamanho e da geometria dos furos [93], enquanto outros os veem como os propagadores de  $E(\mathbf{r}_1, t - t_1)$  e  $E(\mathbf{r}_2, t - t_2)$  [20], respectivamente.

Figura 6.1: Notação relacionada ao experimento de interferência de Young, a partir do qual as funções de correlação de segunda ordem de um feixe de luz podem ser determinadas.



Fonte: Adaptado pelo autor de [22], 1991, pg. 404.

Como vimos anteriormente, a distribuição de intensidade instantânea do campo óptico no ponto  $P$  pode ser expressa como

$$I(\mathbf{r}, t) = E^*(\mathbf{r}, t)E(\mathbf{r}, t).$$

É importante salientar que a luz originária de uma fonte térmica oscila aleatoriamente ao longo do tempo [93]. Por isso, é comum tomar a média de  $I(\mathbf{r}, t)$  sobre um conjunto (ensemble) de diferentes realizações do campo e denotar tal média por  $\langle I(\mathbf{r}, t) \rangle_e$ . Com isso em mente, podemos representar a média da intensidade como

$$\begin{aligned} \langle I(\mathbf{r}, t) \rangle_e &= |K_1|^2 \langle I_1(\mathbf{r}_1, t - t_1) \rangle_e + |K_2|^2 \langle I_2(\mathbf{r}_2, t - t_2) \rangle_e \\ &+ 2|K_1||K_2| \Re \{ \langle E^*(\mathbf{r}_1, t - t_1)E(\mathbf{r}_2, t - t_2) \rangle_e \}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Usamos o fato de que  $K_1$  e  $K_2$  serem puramente imaginários, logo,  $K_1^*K_2 = K_1K_2^* = |K_1||K_2|$ .

Desse modo, introduz-se agora uma nova função, conhecida como função de correlação cruzada [93] que é definida como

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t - t_1, t - t_2) = \langle E^*(\mathbf{r}_1, t - t_1)E(\mathbf{r}_2, t - t_2) \rangle_e. \quad (6.3)$$

Nota-se de imediato que  $\Gamma$  depende apenas dos produtos dos campos em dois momentos diferentes e em dois pontos diferentes no espaço. Tal função representa a correlação existente entre

as vibrações da luz nos furos em  $P_1$  e  $P_2$ , nos tempos  $t_1$  e  $t_2$ , respectivamente. Deste modo, percebe-se que o aparecimento de franjas de interferência depende de quão correlacionados são os campos em  $P_1$  e  $P_2$ , além de necessitar que  $|K_1| \neq 0$  e  $|K_2| \neq 0$ .

Usualmente, considera-se que tais campos são estacionários. Isso implica que todas as realizações do conjunto considerado têm comportamento médio semelhante, fala-se, portanto, que todas as médias do conjunto são independentes da origem do tempo e, portanto, pode-se substituir a média do ensemble pela média temporal [93], ou seja,  $\langle I(\mathbf{r}, t) \rangle_e = \langle I(\mathbf{r}, t) \rangle_t = \langle I(\mathbf{r}, t) \rangle$ . Isso possibilita escrever  $\Gamma$  da seguinte forma:

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \langle E^*(\mathbf{r}_1, t)E(\mathbf{r}_2, t + \tau) \rangle, \quad (6.4)$$

que é conhecida como a função de coerência mútua [94], uma vez que a mesma descreve tanto as relações de coerência espacial quanto temporal. Além disso, tem-se que  $\tau = t_1 - t_2$ .

Uma constatação importante é que  $\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}, 0) = \langle E^*(\mathbf{r})E(\mathbf{r}) \rangle = \langle I(\mathbf{r}) \rangle$ . Com isso em mente, faremos agora uma análise da situação quando temos apenas um dos furos abertos. Por exemplo: supondo que  $|K_2| = 0$ , o primeiro termo da Eq.(6.2) representa a intensidade média da luz que seria observada no ponto  $P$  se apenas o furo em  $P_1$  estivesse aberto. Desse modo, podemos reescrever a Eq.(6.2) como  $\langle I(\mathbf{r}) \rangle = \langle I^{(1)}(\mathbf{r}) \rangle = |K_1|^2 \langle I(\mathbf{r}_1) \rangle$ . De maneira similar, quando  $|K_1| = 0$ , tem-se que  $\langle I(\mathbf{r}) \rangle = \langle I^{(2)}(\mathbf{r}) \rangle = |K_2|^2 \langle I(\mathbf{r}_2) \rangle$ . Portanto,  $|K_1| = \sqrt{\langle I^{(1)}(\mathbf{r}) \rangle} / \sqrt{\langle I(\mathbf{r}_1) \rangle}$  e  $|K_2| = \sqrt{\langle I^{(2)}(\mathbf{r}) \rangle} / \sqrt{\langle I(\mathbf{r}_2) \rangle}$ . Tal resultado implica que, para  $|K_1| \neq 0$  e  $|K_2| \neq 0$ , a Eq.(6.2) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\langle I(\mathbf{r}, t) \rangle = \langle I^{(1)}(\mathbf{r}) \rangle + \langle I^{(2)}(\mathbf{r}) \rangle + 2\sqrt{\langle I^{(1)}(\mathbf{r}) \rangle} \sqrt{\langle I^{(2)}(\mathbf{r}) \rangle} \Re\{\langle \gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) \rangle\}.$$

A Eq.(6.5) nos mostra que apareceu uma nova função, esta é definida como

$$\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \frac{\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)}{\sqrt{\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, 0)} \sqrt{\Gamma(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, 0)}}. \quad (6.5)$$

A função  $\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$  é conhecida como grau complexo de coerência [93]. Usamos o fato de que  $\langle I(\mathbf{r}_1) \rangle = \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, 0)$  e  $\langle I(\mathbf{r}_2) \rangle = \Gamma(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, 0)$ .

O grau complexo de coerência se caracteriza por ser uma medida precisa da similaridade estatística das vibrações da luz não apenas nos furos em  $P_1$  e  $P_2$ , mas em quaisquer dois pontos de um campo de ondas, pois já é sabido que a função de correlação cruzada de quaisquer dois processos aleatórios estacionários satisfaz a relação [93]

$$0 \leq |\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)| \leq 1, \quad (6.6)$$

para quaisquer  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  e  $\tau$  do argumento de  $\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$  [93]. Portanto, em um atraso de tempo para o qual  $|\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)| = 0$ , diz-se que a luz é incoerente; em conta partida, para um atraso de tempo tal que  $|\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)| = 1$ , diz-se que a luz é completamente coerente. No intervalo entre esses dos extremos, tem-se luz parcialmente coerente.

A medida usual da nitidez das franjas de interferência é a chamada visibilidade (ou o contraste do padrão de interferência), um conceito introduzido por Michelson [93]. Desse modo, a visibilidade  $\mathcal{V}(\mathbf{r})$  no ponto  $P$  na tela opaca  $\mathcal{B}$  é definido por

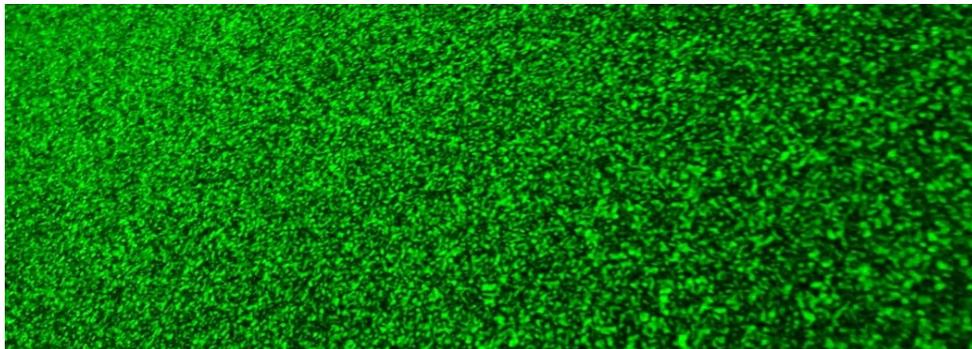
$$\mathcal{V}(\mathbf{r}) = \frac{\langle I(\mathbf{r}) \rangle_{max} - \langle I(\mathbf{r}) \rangle_{min}}{\langle I(\mathbf{r}) \rangle_{max} + \langle I(\mathbf{r}) \rangle_{min}}, \quad (6.7)$$

em que  $\langle I(\mathbf{r}) \rangle_{max}$  e  $\langle I(\mathbf{r}) \rangle_{min}$  representam os valores máximo e mínimo que a intensidade média assume na vizinhança imediata de  $P$ .

## 6.2.2 Luz parcialmente coerente gerada em laboratório

Na prática de laboratório, luz com pouca coerência espacial se manifesta através dos chamados padrões de Speckles. Geralmente, este tipo de padrão pode ser obtido quando a luz laser com alto grau de coerência espacial é transmitida ou refletida por um meio com rugosidades da ordem de comprimento de onda incidente [92]. Este processo quebra parcialmente a correlação bem definida entre quaisquer dois pontos das frentes de onda antes totalmente correlacionados. Isso implica que as ondas espalhadas a partir de tais superfícies se tornam parcialmente coerentes e com aspecto visual de uma estrutura granular, como mostrado na Fig.6.3.

Figura 6.2: Ilustração de um padrão de speckle real obtido naturalmente em laboratório a partir da reflexão de luz laser coerente por superfícies no ambiente de trabalho (papalão, paredes, superfícies dos equipamentos e etc.)



Fonte: Autor.

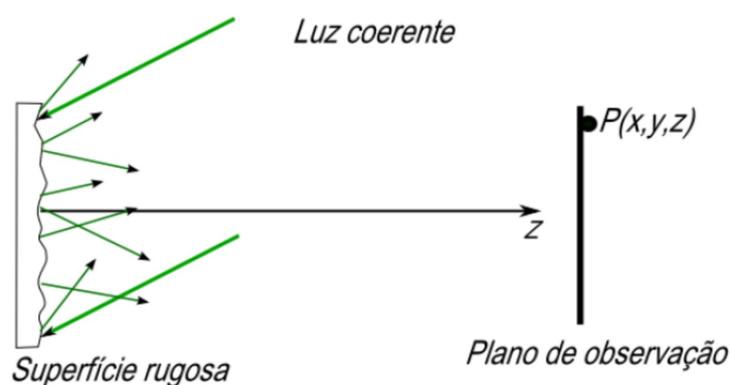
Esse modo genérico de gerar luz granulada pode ser modelado ao admitirmos que um feixe de luz coerente de comprimento de onda  $\lambda$  incide sobre uma superfície rugosa. Considerando

que as rugosidades variam de forma aleatória, podemos vê-las como pequenas fontes de onde emergem ondas esféricas parciais que apresentam distribuição de fase e amplitude aleatórias. Estas pequenas ondas vão se superpor em diversos pontos de um anteparo de observação, interferindo construtiva ou destrutivamente. Percebe-se, portanto, que um padrão de speckle resultante de fenômeno de interferência. Matematicamente, tal campo luminoso no ponto  $P$  pode ser representado por

$$U(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^N a_n(\mathbf{r}) e^{i\phi_n(\mathbf{r})}, \quad (6.8)$$

em que  $a_n$  e  $\phi_n$  são amplitude e fase componentes,  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  e  $N$  é a quantidade total de ondas parciais. Além disso, este tipo de luz, geralmente, apresenta propriedades estatísticas de um típico processo aleatório gaussiano [3]. Esta situação é representada esquematicamente na figura abaixo.

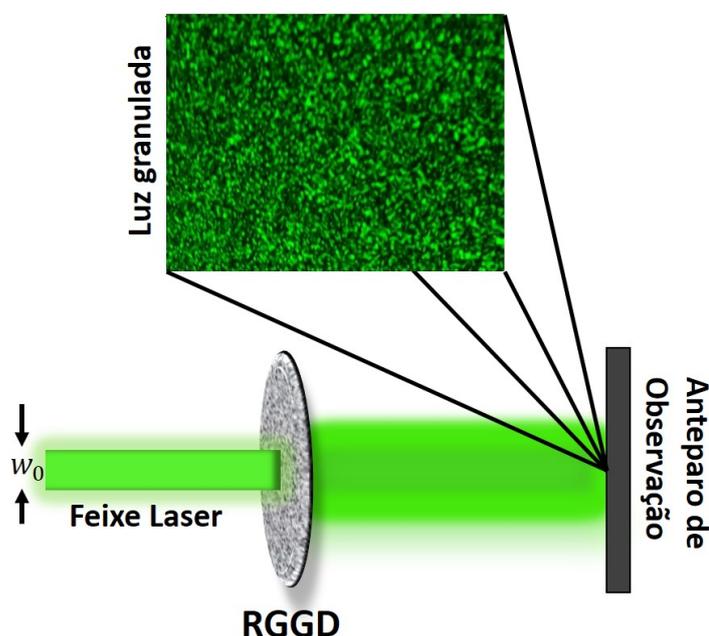
Figura 6.3: Ilustração do esquema de geração de um campo de speckle a partir da reflexão de luz coerente por uma superfície opticamente rugosa.



Fonte: Alves [95], 2016, pg. 26.

Porém, do ponto de vista do físico experimental, é de interesse uma maneira de geração de luz granulada que seja possível ter um certo controle sobre o tamanho médio dos grãos da estrutura granulada, pois é sabido que existe uma forte relação entre a ordem de grandeza destes e a coerência do padrão de Speckles [96]. Para isso, incide-se luz laser em um disco de vidro com ranhuras aleatórias (Random Glass Grooved Disc, RGGD), de modo que a luz que emerge, vista em um anteparo de observação, é speckle, como ilustrado na Fig.6.4. Ressalta-se que nesta situação, tamanho dos grãos é inversamente proporcional à cintura do feixe incidente no RGGD.

Figura 6.4: Ilustração do esquema de geração de um campo de speckle a partir da transmissão de luz coerente por um RGGD. O tamanho de cada grão é inversamente proporcional a cintura do feixe incidente no discode vidro.



Fonte: Autor.

### 6.2.3 Função de Correlação de Intensidade

A importância de uma explanação sobre como gerar luz parcialmente coerente é devido ao fato que quando o trabalho experimental é com esse tipo de campo luminoso, muitas vezes é preciso realizar correlações de intensidade para recuperar uma dada informação. Entretanto, este tipo de correlação é um caso típico de correlação de quarta ordem em relação à variável campo, precisa-se, então, ter alguma base a respeito deste conceito. Por isso, em seguida abordaremos brevemente tal assunto.

Anteriormente, vimos que a função de coerência mútua descreve os efeitos de coerência que dependem da correlação da variável de campo em dois pontos de espaço-tempo  $(r_1, t_1)$  e  $(r_2, t_2)$ . Essa função de correlação é dita ser de baixa ordem e sua representação quantitativa é dada por

$$\Gamma^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) = \langle E^*(\mathbf{r}_1, t_1)E(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle, \quad (6.9)$$

quando o conjunto de todas as realizações do campo não é necessariamente estacionário. Esta função é de segunda ordem na variável campo. Entretanto, quando se pretende trabalhar com correlação de intensidade, surge a necessidade de conhecermos as propriedades da função de correlação de quarta ordem que descreve as similaridades de um campo em mais de dois pontos

no espaço-tempo [93]. Ela é definida como

$$\Gamma^{(2,2)}(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2, \mathbf{r}_3, t_3, \mathbf{r}_4, t_4) = \langle E^*(\mathbf{r}_1, t_1)E^*(\mathbf{r}_2, t_2)E(\mathbf{r}_3, t_3)E(\mathbf{r}_4, t_4) \rangle, \quad (6.10)$$

Quando as flutuações de um campo podem ser descritas como um processo aleatório gaussiano, todas as funções de correlação do campo podem então ser expressas em termos de  $\Gamma^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2)$ , pelo uso do teorema do momento para tal processo [93]. Para que um campo luminoso obedeça as propriedades estatísticas gaussianas, tem-se que necessariamente  $\langle E(\mathbf{r}, t) \rangle = 0$ . Conseqüentemente, a função de correlação pode ser escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2,2)}(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2, \mathbf{r}_3, t_3, \mathbf{r}_4, t_4) &= \langle E^*(\mathbf{r}_1, t_1)E(\mathbf{r}_3, t_3) \rangle \langle E^*(\mathbf{r}_2, t_2)E(\mathbf{r}_4, t_4) \rangle \\ &+ \langle E^*(\mathbf{r}_1, t_1)E(\mathbf{r}_4, t_4) \rangle \langle E^*(\mathbf{r}_2, t_2)E(\mathbf{r}_3, t_3) \rangle, \end{aligned} \quad (6.11)$$

que também pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2,2)}(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2, \mathbf{r}_3, t_3, \mathbf{r}_4, t_4) &= \Gamma^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_3, t_3)\Gamma^{(1,1)}(\mathbf{r}_2, t_2, \mathbf{r}_4, t_4) \\ &+ \Gamma^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_4, t_4)\Gamma^{(1,1)}(\mathbf{r}_2, t_2, \mathbf{r}_3, t_3). \end{aligned}$$

Agora, se tomarmos  $\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_4 = \mathbf{r}_2$ ,  $t_3 = t_1$  e  $t_4 = t_2$ , teremos que

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2,2)}(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2, \mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2) &= \Gamma^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_1, t_1)\Gamma^{(1,1)}(\mathbf{r}_2, t_2, \mathbf{r}_2, t_2) \\ &+ \Gamma^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2)\Gamma^{(1,1)}(\mathbf{r}_2, t_2, \mathbf{r}_1, t_1). \end{aligned} \quad (6.12)$$

Além disso, já sabemos que ao considerarmos a condição de campo estacionário, a dependência temporal das funções de correlação se dará através da diferença  $\tau = t_1 - t_2$ , de modo que podemos escrever a equação anterior como

$$\Gamma^{(2,2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \Gamma^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, 0)\Gamma^{(1,1)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, 0) + \Gamma^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)\Gamma^{(1,1)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, -\tau).$$

Uma propriedade interessante da função de coerência mútua é que  $\Gamma^{(1,1)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, -\tau) = [\Gamma^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)]^*$  [93], e lembrando que  $\Gamma^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, 0) = \langle I(\mathbf{r}_1) \rangle$  e  $\Gamma^{(1,1)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, 0) = \langle I(\mathbf{r}_2) \rangle$ , então

$$\Gamma^{(2,2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \langle I(\mathbf{r}_1) \rangle \langle I(\mathbf{r}_2) \rangle + |\Gamma^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)|^2. \quad (6.13)$$

Por outro lado, assumindo a condição de campo estacionário e novamente  $\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_4 = \mathbf{r}_2$ ,  $t_3 = t_1$  e  $t_4 = t_2$ , podemos escrever a função de correlação na Eq.(6.11) como

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2,2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) &= \langle E^*(\mathbf{r}_1, t_1)E^*(\mathbf{r}_2, t_2)E(\mathbf{r}_1, t_1)E(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle \\ &= \langle E^*(\mathbf{r}_1, t_1)E(\mathbf{r}_1, t_1)E^*(\mathbf{r}_2, t_2)E(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle \\ &= \langle I(\mathbf{r}_1, t)I(\mathbf{r}_2, t + \tau) \rangle. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Portanto, comparando as Eq.(6.13) e Eq.(6.14) notamos que

$$\langle I(\mathbf{r}_1, t)I(\mathbf{r}_2, t + \tau) \rangle = \langle I(\mathbf{r}_1) \rangle \langle I(\mathbf{r}_2) \rangle + |\Gamma^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)|^2. \quad (6.15)$$

Através de uma simples manipulação algébrica pode ser mostrado a seguinte relação

$$\langle I(\mathbf{r}_1, t)I(\mathbf{r}_2, t + \tau) \rangle = \langle I(\mathbf{r}_1) \rangle \langle I(\mathbf{r}_2) \rangle [1 + |\gamma^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)|^2]. \quad (6.16)$$

Em que, novamente,  $\gamma^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$  é o grau complexo de coerência do campo de onda nos pontos  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ , que é definido por

$$\gamma^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \frac{\Gamma^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)}{\sqrt{\langle I(\mathbf{r}_1) \rangle} \sqrt{\langle I(\mathbf{r}_2) \rangle}}. \quad (6.17)$$

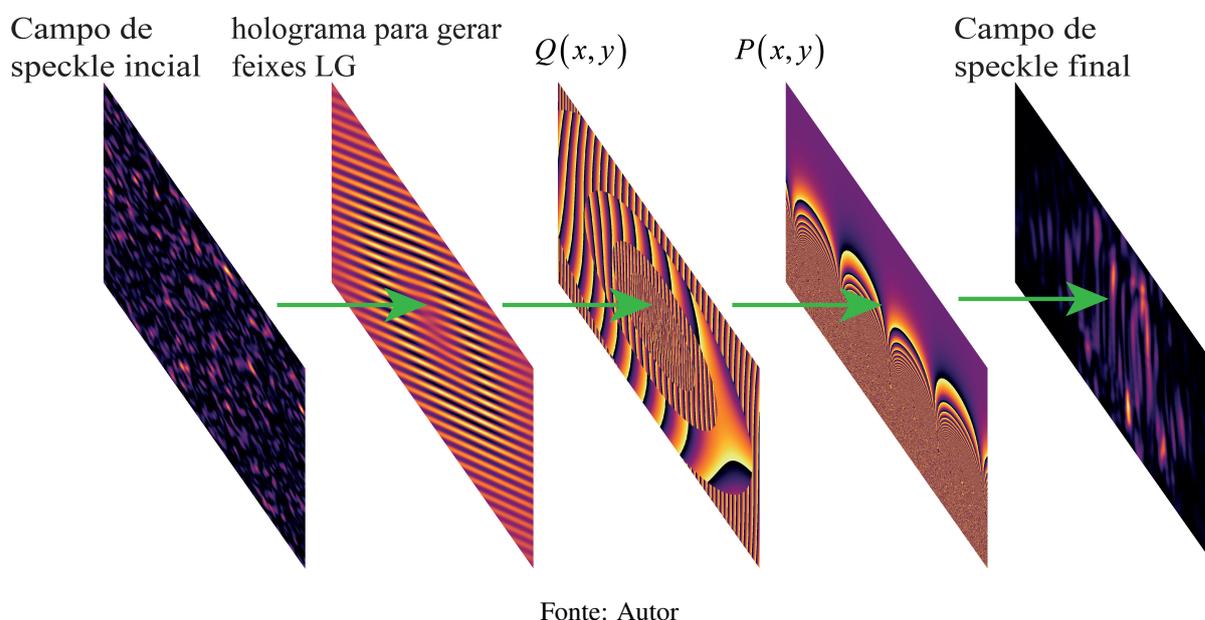
Portanto, nota-se que o valor absoluto do grau de coerência de luz parcialmente coerente em dois pontos de um campo,  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ , pode ser determinado a partir de medições das correlações de intensidade e das intensidades médias nesses pontos .

### 6.3 Separação de Vórtices Ópticos Incoerentes

Para facilitar o entendimento da nossa proposta de classificar e separar VOI, construímos a Fig.6.5 que ilustra a ideia principal do presente trabalho. Um feixe de luz espacialmente incoerente ilumina um holograma projetado para gerar modos LG. Dessa maneira, feixes LG incoerentes são gerados e suas transformadas de Fourier [55] são projetadas sobre a máscara da fase de transformação  $Q(x, y)$ . O campo resultante é submetido à uma nova transformada de Fourier projetada sobre a máscara da fase de correção,  $P(u, v)$ . E finalmente, uma última transformada de Fourier gera um campo de speckle.

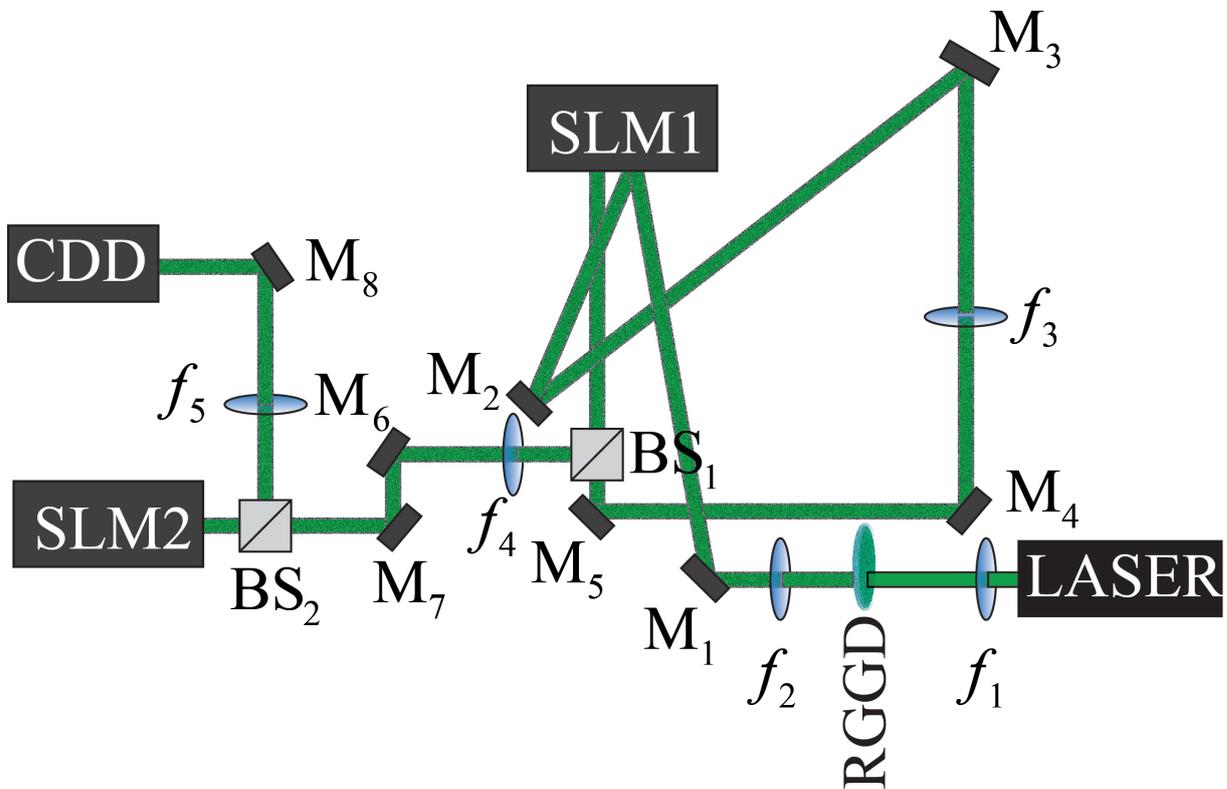
Como mostra Fig.6.5, a intensidade óptica do campo granulado final flutua aleatoriamente. Entretanto, a informação do vórtice enviado é totalmente recuperada a partir das correlações das flutuações espaciais da intensidade [26]. Enfatizamos que tanto o holograma que está codificando a transformação espiral quanto a fase de correção são os mesmos que utilizamos para separar estados de MAO coerentes.

Figura 6.5: A ideia geral da proposta: uma luz espacialmente incoerente representada por um campo de speckle, em vez de luz coerente, é usada para gerar modos OAM. Os modos incoerentes são passados através de um sistema usual de classificação de modos coerentes e um campo de speckle final é produzido a partir do qual precisamos extrair as informações para classificar a carga topológica do feixe de entrada.



A Fig.6.6 exibe a configuração experimental usada. Um feixe laser é expandido e colimado por um telescópio formado por lentes de distância focais  $f_1 = 2,8$  mm e  $f_2 = 150$  mm, onde um disco rotativo de vidro fosco é colocado entre essas lentes. A luz obtida ilumina a metade direita do SLM1 que foi dividido ao meio para conter, à direita, o holograma para gerar modos LG [34] e, à esquerda, a fase  $Q(x, y)$ . O feixe LG gerado é submetido à uma transformada de Fourier e projetado sobre  $Q(x, y)$  por uma lente de distância focal  $f_3 = 1000$  mm.

Figura 6.6: Configuração experimental: SLM1 e SLM2 são os moduladores de luz; câmera CCD;  $M_1$  a  $M_8$  são espelhos;  $BS_1$  e  $BS_2$  são divisores de feixes; o comprimento focal das lentes são  $f_1 = 2,8$  mm,  $f_2 = 150$  mm,  $f_3 = 1000$  mm,  $f_4 = 300$  mm e  $f_5 = 200$  mm.



Fonte: Autor

Após ser refletido pela segunda vez no SLM1, os feixes LG adquirem uma fase  $Q(x, y)$ . A lente de distância focal  $f_4 = 300$  mm ao mesmo tempo que realiza uma transformada de Fourier também projeta este novo campo sobre o SLM2 que contém a fase de correção  $P(u, v)$ . Uma lente de distância focal  $f_5 = 200$  mm projeta a transformada de Fourier do campo refletida no SLM2 na câmera CCD. Nossa nova configuração difere daquele para luz coerente apenas pela substituição do segundo par de lentes de distâncias focais 300 mm cada pela lente  $f_3$ .

## 6.4 Modelo Teórico da Propagação para os Feixes Incoerentes

Apresentamos a formulação teórica da ideia conceitual do experimento com luz espacialmente incoerente. O campo speckle  $E_1(\mathbf{r}_1)$  gerado no RGGD atinge a primeira metade do

SLM1 contendo um holograma que codifica o campo sinal  $S(\mathbf{r}_1)$ , que pode ser constituído por modos LG puros ou uma superposição destes. O campo resultante é submetido à uma transformada de Fourier por uma lente de distância focal  $f_3$  que o projeta na segunda metade do SLM1 contendo a fase  $Q(\mathbf{r}_2)$ , ou seja,

$$E_2(\mathbf{r}_2) = \int E_1(\mathbf{r}_1) S(\mathbf{r}_1) \exp\left(\frac{ik}{f_3} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2\right) d\mathbf{r}_1. \quad (6.18)$$

O campo obtido nesse processo é projetado sobre o SLM2 via transformação de Fourier pela lente de distância focal  $f_4$ ,

$$E_3(\mathbf{r}_3) = \int E_2(\mathbf{r}_2) \exp[iQ(\mathbf{r}_2)] \exp\left(\frac{ik}{f_4} \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3\right) d\mathbf{r}_2. \quad (6.19)$$

O campo na equação acima atinge o SLM2 que contém a fase  $P(\mathbf{r}_3)$ . Finalmente, a lente  $f_5$  realiza uma transformada de Fourier do campo resultante, produzindo a distribuição de luz final no plano CCD,

$$E_4(\mathbf{r}_4) = \int E_3(\mathbf{r}_3) \exp[iP(\mathbf{r}_3)] \exp\left(\frac{ik}{f_5} \mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{r}_4\right) d\mathbf{r}_3. \quad (6.20)$$

Usualmente, para recuperar o vórtice espalhado temos que tomar a correlação entre o campo sinal e um campo referência  $R(\mathbf{r}'_1)$ . Geralmente,  $R(\mathbf{r}'_1)$  é o modo *LG* de ordem zero codificado no holograma, o qual é propagado através dos mesmos componentes ópticos. Neste caso, a fim de permitir um cálculo analítico da função de correlação supomos, sem perda de generalidade, que para esse campo as fases de transformação são  $Q(\mathbf{r}'_2) = P(\mathbf{r}'_3) = 0$ . Portanto, a função de correlação é escrita como [93],

$$\begin{aligned} \langle E_4^*(\mathbf{r}_4) E_4(\mathbf{r}'_4) \rangle &= \int \int \int \int \int \int S^*(\mathbf{r}_1) R(\mathbf{r}'_1) \langle E_1^*(\mathbf{r}_1) E_1(\mathbf{r}'_1) \rangle \exp[-iQ(\mathbf{r}_2)] \exp\left(\frac{ik}{f_4} \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3\right) \\ &\times \exp[-iP(\mathbf{r}_3)] \exp\left(-\frac{ik}{f_5} \mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{r}_4\right) \exp\left(\frac{ik}{f_4} \mathbf{r}'_2 \cdot \mathbf{r}'_3\right) \exp\left(\frac{ik}{f_5} \mathbf{r}'_3 \cdot \mathbf{r}'_4\right) \\ &\times \exp\left(-\frac{ik}{f_3} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2\right) \exp\left(\frac{ik}{f_3} \mathbf{r}'_1 \cdot \mathbf{r}'_2\right) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}'_1 d\mathbf{r}'_2 d\mathbf{r}'_3. \end{aligned} \quad (6.21)$$

onde o símbolo "\*" representa o complexo conjugado do campo e  $\langle \dots \rangle$  significa uma média de um dado conjunto de realizações.

Consideramos que nossos campos de speckles são delta correlacionados, ou seja, sua correlação cruzada no plano do holograma que gera os campos sinal e referência é  $\langle E_1^*(\mathbf{r}_1) E_1(\mathbf{r}'_1) \rangle =$

$\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1)$ . Ou seja,

$$\begin{aligned} & \iint S^*(\mathbf{r}_1)R(\mathbf{r}'_1)\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1) \exp\left(-\frac{ik}{f_3}\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2\right) \exp\left(\frac{ik}{f_3}\mathbf{r}'_1 \cdot \mathbf{r}'_2\right) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}'_1 \\ &= \int S^*(\mathbf{r}_1)R(\mathbf{r}_1) \exp\left[-\frac{ik}{f_3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_2) \cdot \mathbf{r}_1\right] d\mathbf{r}_1, \end{aligned}$$

entretanto, podemos escrever o lado direito da expressão acima como a convolução entre as transformadas de Fourier dos campos sinal  $\tilde{S}^*(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_2)$  e referência  $\tilde{R}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_2)$ , isto é,

$$\tilde{S}^*(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_2) * \tilde{R}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_2) = \int S^*(\mathbf{r}_1)R(\mathbf{r}_1) \exp\left[-\frac{ik}{f_3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_2) \cdot \mathbf{r}_1\right] d\mathbf{r}_1.$$

Como tomamos a cintura do feixe referência como sendo maior que o do sinal, o tamanho dos grãos luminosos que compõem  $\tilde{R}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_2)$ , no plano de Fourier, serão bem menores que aqueles do campo  $\tilde{S}^*(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_2)$ , dessa maneira, é permitido considerar a aproximação  $\tilde{R}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_2) \approx \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_2)$ . Isso implica que  $\tilde{S}^*(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_2) * \tilde{R}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_2) \approx \tilde{S}^*(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_2)$ , e portanto

$$\int S^*(\mathbf{r}_1)R(\mathbf{r}_1) \exp\left[-\frac{ik}{f_3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_2) \cdot \mathbf{r}_1\right] d\mathbf{r}_1 = \tilde{S}^*(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_2), \quad (6.22)$$

portanto, temos que

$$\begin{aligned} \langle E_4^*(\mathbf{r}_4)E_4(\mathbf{r}'_4) \rangle &= \int \int \int \int \tilde{S}^*(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_2) \exp[-iQ(\mathbf{r}_2)] \exp[-iP(\mathbf{r}_3)] \exp\left(-\frac{ik}{f_4}\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3\right) \\ &\times \exp\left(-\frac{ik}{f_5}\mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{r}_4\right) \exp\left(\frac{ik}{f_4}\mathbf{r}'_2 \cdot \mathbf{r}'_3\right) \exp\left(\frac{ik}{f_5}\mathbf{r}'_3 \cdot \mathbf{r}'_4\right) d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}'_2 d\mathbf{r}'_3. \end{aligned}$$

Agora passamos a analisar o que acontece quando manipulamos a integral na variável  $\mathbf{r}'_3$  contida dentro da Eq.(6.21), ou seja,

$$\begin{aligned} \int \exp\left(\frac{ik}{f_4}\mathbf{r}'_2 \cdot \mathbf{r}'_3\right) \exp\left(\frac{ik}{f_5}\mathbf{r}'_3 \cdot \mathbf{r}'_4\right) d\mathbf{r}'_3 &= \int \exp\left[\frac{ik}{f_4 f_5}(f_5 \mathbf{r}'_2 + f_4 \mathbf{r}'_4) \cdot \mathbf{r}'_3\right] d\mathbf{r}'_3 \\ &= \delta(f_5 \mathbf{r}'_2 + f_4 \mathbf{r}'_4). \end{aligned} \quad (6.23)$$

Isso implica que

$$\begin{aligned} \langle E_4^*(\mathbf{r}_4)E_4(\mathbf{r}'_4) \rangle &= \iiint \tilde{S}^*(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_2) \delta(f_5 \mathbf{r}'_2 + f_4 \mathbf{r}'_4) \exp[-iQ(\mathbf{r}_2)] \exp[-iP(\mathbf{r}_3)] \\ &\times \exp\left(-\frac{ik}{f_4}\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3\right) \exp\left(-\frac{ik}{f_5}\mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{r}_4\right) d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}'_2. \end{aligned}$$

Agora, realizando a integração em  $\mathbf{r}'_2$ , teremos

$$\begin{aligned} \langle E_4^*(\mathbf{r}_4)E_4(\mathbf{r}'_4) \rangle &= \iint \tilde{S}^* \left( \mathbf{r}_2 + \frac{f_4}{f_5} \mathbf{r}'_4 \right) \exp[-iQ(\mathbf{r}_2) - iP(\mathbf{r}_3)] \\ &\times \exp \left[ -\frac{ik}{f_4 f_5} (f_5 \mathbf{r}_2 + f_4 \mathbf{r}_4) \cdot \mathbf{r}_3 \right] d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Além disso, assumindo que  $\mathbf{r}_4 = \mathbf{r}$  e que  $\mathbf{r}'_4 = 0$ , obtemos que a Eq.(6.24) pode ser escrita como

$$\langle E_4^*(\mathbf{r})E_4(0) \rangle = \iint \tilde{S}^* (\mathbf{r}_2) \exp[-iQ(\mathbf{r}_2) - iP(\mathbf{r}_3)] \exp \left[ -\frac{ik}{f_4 f_5} (f_5 \mathbf{r}_2 + f_4 \mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}_3 \right] d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3. \quad (6.25)$$

É importante enfatizar que a simulação numérica da Eq.(6.25) mostra que a função de correlação  $\langle E_4^*(\mathbf{r})E_4(0) \rangle$  é idêntica ao resultado que foi obtido para os campos coerentes que chegam ao plano da CCD, como vimos anteriormente. Salienta-se ainda que não há resultado analítico para a integral na Eq.(6.25), portanto, na próxima seção, os resultados teóricos apresentados foram obtidos a partir da realização computacional dessa integral.

## 6.5 Simulação Numérica e Resultados Experimentais

A realização da simulação numérica foi obtida através do uso do método do espectro angular com banda limitada [30] para propagar os campos ópticos no espaço livre entre as lentes e os SLMs, onde cada lente de distância focal  $f_i$  é representada por uma fase quadrática  $\exp(-ikr^2/2f_i)$ . Portanto, o campo é multiplicado por esta fase quadrática para simular sua passagem por uma lente. Da mesma maneira, o feixe é multiplicado por uma fase  $Q(x, y)$  ou  $P(u, v)$  para simular a reflexão do campo nos SLMs.

Em seguida temos que gerar um campo de speckle que é multiplicado pelos feixes LG e depois propagado pelas lentes de foco  $f_3$  até a fase de transformação  $Q(x, y)$ , seguindo o caminho através da lente de distância focal  $f_4$  até a fase de correção  $P(u, v)$ , e depois pela lente  $f_5$  até a câmera CCD. Para gerar um campo de speckle, multiplicamos uma função gaussiana por uma fase aleatória e realizamos uma transformada de Fourier. Assumimos que os grãos luminosos que compõem o padrão de speckle são muito pequenos, de modo que podemos considerar o campo como sendo delta correlacionado. O feixe de referência é gerado apenas passando um feixe LG de ordem zero pelo sistema.

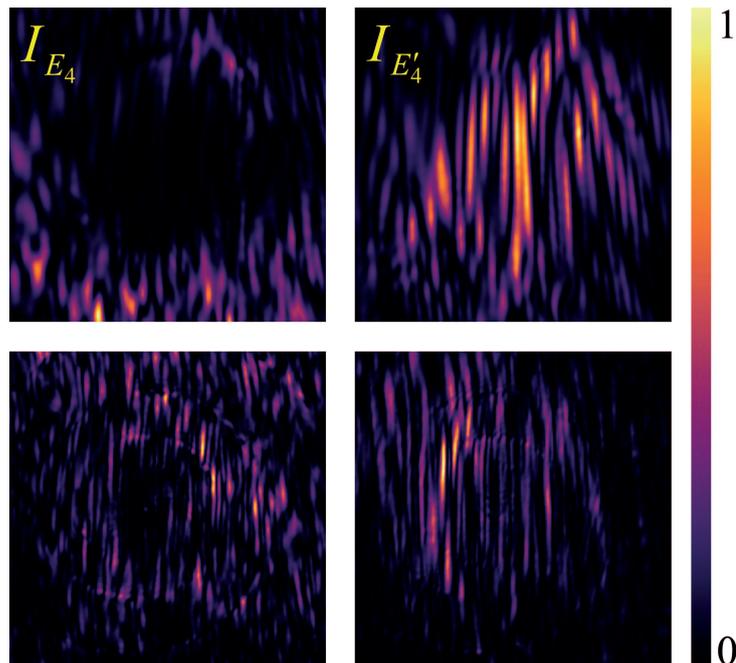
No experimento, primeiramente medimos a intensidade do feixe sinal seguida pela intensidade do referênciã com o RGGD parado e, em seguida, o disco de vidro com ranhuras é girado de um pequeno ângulo e colocado em repouso para realizar uma nova medida. Este procedimento é repetido 100 vezes. Para cada par de medidas, calculamos a correlação cruzada entre as intensidades medidas e tomamos a média das 100 realizações. Como vimos anteriormente, os padrões de speckle têm estatística gaussiana, de modo que a função de correlação cruzada pode ser escrita como

$$\Gamma = A + |W|^2, \quad (6.26)$$

em que  $A$  é a quantidade de luz não correlacionada que aparece por trás do objeto recuperado (background) e  $W = \langle E_4^* E_4 \rangle$  é dado pela Eq.(6.25).

A Fig.6.7 exhibe amostras dos padrões de speckle calculados numericamente (primeira linha) e medidos experimentalmente (segunda linha), para os feixes sinal (primeira coluna) e referênciã (segunda coluna) no plano CCD, respectivamente. Como pode ser visto os padrões de intensidade obtidos via experimento são muito parecidos com aqueles originados do cálculo numérico.

Figura 6.7: Padrões de intensidades aleatórios observados para o feixe sinal  $I_{E_4} = |E_4|^2$  ( $m = 2$ , primeira coluna) e referênciã  $I_{E'_4} = |E'_4|^2$  ( $m = 0$ , segunda coluna) no plano de detecção. Na primeira linha, tem-se a simulação e na segunda linha, o experimento. As janelas são quadradas com dimensões de 1,4 mm por 1,4 mm.



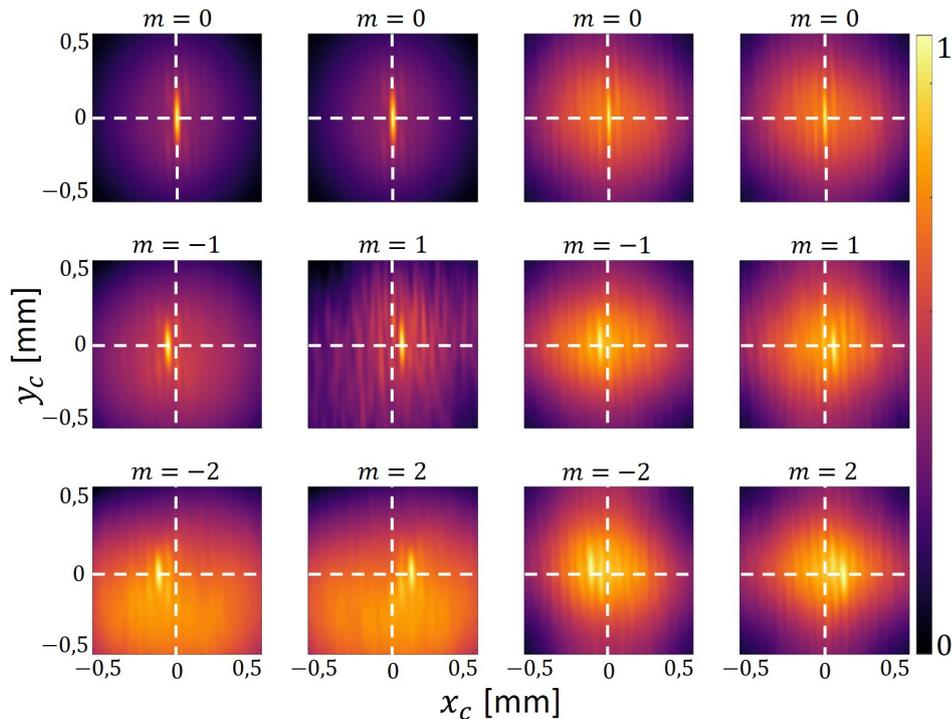
Fonte: Autor

Para obter uma melhor diferenciação dos modos, usamos o controle do tamanho da fonte deslocando ligeiramente o RGGD do foco  $f_1$ , uma vez que já é conhecido que o tamanho da fonte que ilumina o RGGD tem influência direta na qualidade da informação que emerge na função de correlação [97, 98].

A Fig.6.8 exhibe os resultados para os padrões de correlação cruzada de intensidade  $\Gamma$  obtida por simulação e via experimento, respectivamente. A partir das correlações conseguidas numericamente, observamos que embora os feixes sinal e referência flutuem aleatoriamente, a função de correlação entre eles tende a um padrão bem definido de acordo com a previsão da teoria, pois vimos em nosso modelo teórico que a função de correlação  $\langle E_4^* E_4 \rangle$  é idêntica ao resultado que poderia ser obtido para os campos coerentes que chegam ao plano final na CCD.

Além disso, como também podemos observar na Fig.6.8, esta previsão da teoria agora também é confirmada, isto é, apesar de os padrões de speckles flutuarem aleatoriamente, os padrões para a correlação  $\Gamma$  são os mesmos que as intensidades dos campos coerentes obtidos anteriormente.

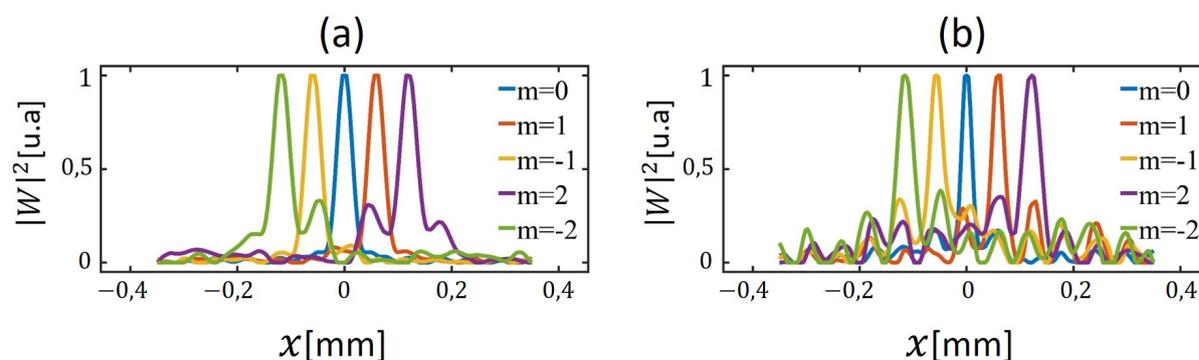
Figura 6.8: Observando a imagem da esquerda para a direita, as duas primeiras colunas exibem os padrões de correlação  $\Gamma$  simulados, enquanto que as duas últimas mostram os dados experimentais. Cada modo classificado está especificado por sua CT  $m$ .



Fonte: Autor

A Fig.6.9 mostra os perfis na direção horizontal ao longo das linhas médias tracejadas, na Fig.4, tirados das funções de correlação cruzada do campo espacialmente incoerente, Fig.6.9(a), e o mesmo para os resultados experimentais, Fig.6.9(b). Enfatizamos que tanto para obter o experimento quanto a simulação das funções de correlação cruzada, calculamos a média de 100 realizações de correlação cruzada resultante de 100 pares de padrão aleatório (ver Fig.6.7) e realizamos uma subtração do “background” [99], resultando em  $|W|^2$ . Observamos uma boa concordância entre simulação e experimento, indicando que o esquema de classificação é viável com luz espacialmente incoerente.

Figura 6.9: Perfis horizontais para a função de correlação cruzada do campo no plano da CCD. Em (a), tem-se a simulação numérica, em (b), o experimento.



Fonte: Autor

A partir da Fig.6.9, mais uma vez, constatamos uma excelente concordância entre teoria e experimento. Para vórtices incoerentes, verificamos que a distância entre modos adjacente para os resultados da simulação é  $t_s \approx 0,056$  mm. Por outro lado, para o as medidas experimentais encontramos que  $t_e \approx 0,06$  mm. Como no caso de vórtices coerentes, esta suave discordância é principalmente devido a questões de alinhamento. Contudo, as imperfeições dentro de nosso sistema óptico, como por exemplo: pequenas aberrações, leves deslocamentos na posição das lentes, SLM2 levemente deslocado do plano de Fourier do SLM1, ruídos gerados no sistema óptico também contam.

# 7. Uso da Geometria da Função de Correlação Cruzada do Campo Distante para Caracterizar um Estado de Momento Angular Orbital

## 7.1 Introdução

Estudos envolvendo vórtices ópticos foram realizados em sistemas coerentes e parcialmente coerentes. No primeiro, a fase está bem definida; e no segundo, apesar da fase mal definida, tornou-se um campo de pesquisa promissor. Um feixe de luz parcialmente coerente pode revelar vórtices ópticos na função de correlação entre um sinal e um feixe de referência. Nesse caso, os vórtices são chamados de vórtices de coerência [106]. A CT de cada feixe vincula o valor da TC efetivo obtida em uma correlação entre dois feixes parcialmente coerentes que possuem OAM [84].

Devido às potenciais aplicações, desenvolver novas técnicas para medir a CT tem sido uma tarefa constante para muitos estudiosos da óptica. As técnicas de interferometria foram as primeiras a revelar a fase helicoidal dos vórtices [107,108]. Nos últimos anos, o estudo dos padrões formados pela difração do campo através de elementos específicos ganhou mais atenção devido à aplicação prática. Registro do padrão de intensidade gerado pela transmissão de vórtices por fendas duplas [109], aberturas anelares [110], aberturas triangulares [58, 111], aberturas quadradas [57], entre outras, são técnicas de difração usadas para medir a CT.

Ultimamente, a geometria dos perfis de intensidade de feixes em forma de anel tem sido estudada [83, 112]. Foi demonstrado que existe uma dependência direta da área anelar dos vórtices ópticos coerentes com sua CT [112]. Em outro trabalho, os autores concluíram que a CT pode ser obtida a partir dos raios dos vórtices ópticos coerentes, em uma configuração específica [113]. A atenção dos pesquisadores também se concentrou no estudo da geometria dos vórtices de coerência.

Recentemente, foi demonstrado que a área de vórtices de coerência depende linearmente de suas CT efetivas [85]. Também foi observado que o número de anéis escuros na transformada

de Fourier da intensidade de um vórtice óptico é igual a sua CT [114]. Outro estudo também foi realizado com o vórtice parcialmente coerente, onde o número de deslocamentos de anéis na função de correlação cruzada é igual ao valor da CT [115]. Um método baseado em uma função de dupla correlação foi proposto para determinar os índices dos modos radial e azimutal de um campo de vórtice parcialmente coerente [116].

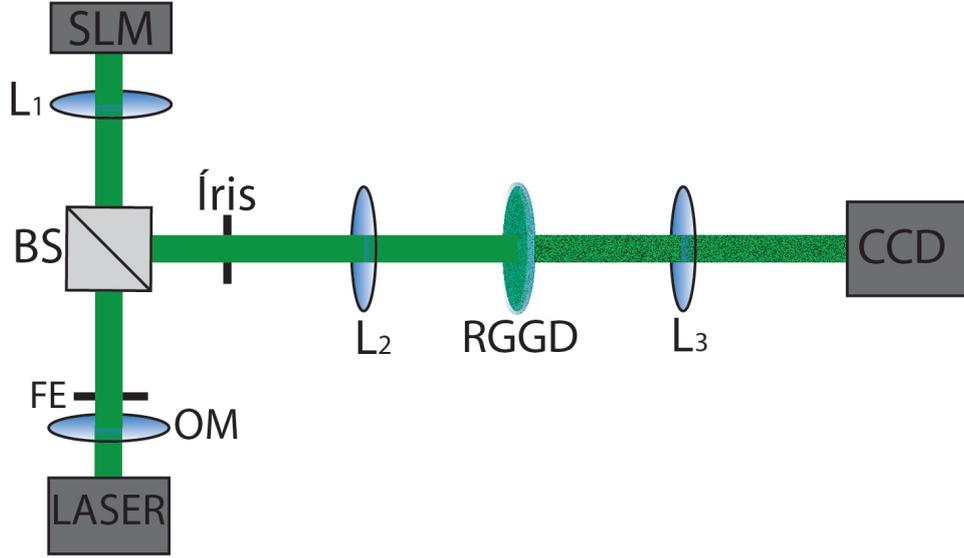
Além disso, foi proposto um método para medir os índices dos modos radial e azimutal de feixes parcialmente coerentes com vórtices, mas requer a medição de fase [117, 118]. O grande interesse em novas maneiras de determinar a CT de vórtices parcialmente coerentes é justificado pelo fato de eles serem mais robustos durante a propagação em uma atmosfera turbulenta [87] e através de obstáculos opacos [19], em comparação com vórtices totalmente coerentes.

## 7.2 Modelo Teórico

Neste trabalho, fundamentado em uma formulação teórica do problema, exploramos numérica e experimentalmente os perfis de correlação cruzada de intensidade de segunda ordem de vórtices parcialmente coerentes e analisamos o comportamento dos contornos de nível zero de raio mínimo. Os resultados revelaram uma maneira mais robusta de medir a carga topológica de vórtices parcialmente coerentes, pois não requer um feixe de referência, nem uma medição de fase, além de não exigir a visualização de todos os anéis na função de correlação cruzada.

A Fig.7.1 mostra nossa configuração experimental. Um laser (modelo Ultralaser MSL-FN-532-200mW) operando a 532 nm, é espacialmente limpo de ruídos e expandido por um filtro espacial, composto por uma objetiva microscópica (OM) e um orifício. Codificamos no SLM (Spatial Light Modulator) um feixe LG. Uma imagem desse feixe, após uma filtragem espacial das altas ordens de difração, é projetada no RGGD. As lentes projetam a transformada de Fourier da superfície do RGGD no sensor CCD. Os modos LG que incidirão no RGGD foram codificados em hologramas de fase e inseridos eletronicamente no SLM.

Figura 7.1: Configuração experimental: objetiva microscópica (OM), filtro espacial (FE), divisor de feixes (BS), modulador espacial de luz (SLM), disco de vidro com ranhuras aleatórias (RGGD), lentes (L1, L2 e L3) de comprimentos focais  $f_1 = f_2 = 300$  mm e  $f_3 = 200$  mm.



Fonte: Autor

Antes de apresentar os resultados experimentais e de simulação, apresentamos a formulação teórica para a evolução da luz do RGGD para o CCD. Considerando que  $E_1(\mathbf{r})$  é o feixe de speckle que sai da superfície do RGGD, logo, a distribuição luminosa que é detectada no sensor CCD é dado por,

$$\tilde{E}_1(\mathbf{k}) = \int E_1(\mathbf{r}) \exp\left(\frac{2\pi i}{\lambda f_3} \mathbf{r} \cdot \mathbf{k}\right) d\mathbf{r}. \quad (7.1)$$

Portanto, a função de correlação cruzada no plano da CCD é escrita como,

$$G(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \langle \tilde{E}_1^*(\mathbf{k}_2) \tilde{E}_1(\mathbf{k}_1) \rangle = \iint \langle E_1^*(\mathbf{r}_2) E_1(\mathbf{r}_1) \rangle \exp\left[\frac{2i\pi}{\lambda f_3} (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{k}_1 - \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{k}_2)\right] d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \quad (7.2)$$

Considerando que o campo próximo à superfície do RGGD é completamente incoerente, podemos escrever sua função de correlação cruzada da seguinte maneira

$$\langle E_1^*(\mathbf{r}_2) E_1(\mathbf{r}_1) \rangle = A \mathbf{r}_2^m \mathbf{r}_1^m \exp\left(-\frac{r_1^2 + r_2^2}{w_0^2}\right) \exp[-im(\theta_1 - \theta_2)] \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \quad (7.3)$$

onde  $A$  é uma constante de normalização.

Agora, se assumirmos que  $\mathbf{k}_2 = -\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}$ , e substituindo a Eq.(7.3) na Eq.(7.2) podere-

mos calcular a integral, pois

$$G(\mathbf{k}) = A \iint \mathbf{r}_2^m \mathbf{r}_1^m \exp\left(-\frac{r_1^2 + r_2^2}{w_0^2}\right) \exp[-im(\theta_1 - \theta_2)] \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \exp\left[\frac{2i\pi}{\lambda f_3}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{k}\right] d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \quad (7.4)$$

Além disso, considerando que  $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1) = (r_1 \cos \theta_1, r_1 \sin \theta_1)$  e  $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2) = (r_2 \cos \theta_2, r_2 \sin \theta_2)$ , notamos que  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1$  se e somente se  $\theta_2 = \theta_1$ . Desse modo, ao realizarmos a integral da Eq.(7.4) em  $\mathbf{r}_1$ , teremos

$$G(\mathbf{k}) = A \int \mathbf{r}^m \mathbf{r}^m \exp\left(-2\frac{r^2}{w_0^2}\right) \exp\left(\frac{4i\pi}{\lambda f_3} \mathbf{r} \cdot \mathbf{k}\right) d\mathbf{r}, \quad (7.5)$$

onde definimos  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$ . Em seguida, decompondo os vetores  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{k}$ , ou seja,  $\mathbf{r} = (r \cos \theta, r \sin \theta)$  e  $\mathbf{k} = (k \cos \phi, k \sin \phi)$ , podemos reescrever a Eq.(7.5) como segue

$$G(\mathbf{k}) = A \iint r^{2|m|} \exp\left(-\frac{2r^2}{w_0^2}\right) \exp\left[\frac{4i\pi}{\lambda f_3} r k \cos(\theta - \phi)\right] r dr d\theta. \quad (7.6)$$

A Eq.(7.6) mostra que a função de correlação cruzada do campo distante é, matematicamente, a transformada de Fourier da intensidade do feixe Laguerre-Gauss (LG),

$$E_1(r, \theta) = A r^{|m|} \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2}\right) \exp(-im\theta). \quad (7.7)$$

Portanto, torna-se evidente o motivo pelo qual aparecem anéis na função de correlação cruzada de campos espacialmente incoerentes [115] de maneira semelhante à transformada de Fourier da intensidade de campos coerentes [114].

Com o auxílio da tabela de integrais de Gradshteyn [119], verificamos que o cálculo da integral na Eq.(7.6) em  $\theta$  tem a seguinte forma

$$G(\mathbf{k}) = A \int_0^\infty r^{2|m|+1} \exp\left(-\frac{2r^2}{w_0^2}\right) J_0\left(\frac{4\pi r k}{\lambda f_3}\right) dr, \quad (7.8)$$

onde  $J_0(\dots)$  é a função Bessel de ordem zero. Lançando mão novamente das tabelas de integrais [119, 120], obtemos que a solução da integral na Eq.(7.8) é dada por

$$G(k) = A \left(\frac{w_0^2}{2}\right)^{|m|+\frac{1}{2}} \frac{\lambda f_3 (|m|+1)!}{4\pi k} \exp\left(-\frac{\pi^2 k^2 w_0^2}{\lambda^2 f_3^2}\right) \mathbb{M}_{|m|+1/2,0}\left(\frac{2\pi^2 k^2 w_0^2}{\lambda^2 f_3^2}\right). \quad (7.9)$$

Entretanto, a função hipergeométrica  $\mathbb{M}_{|m|+1/2,0}(\dots)$  pode ser representada em termos do polinômio de Laguerre [121], de modo que

$$G(k) = A \left(\frac{w_0^2}{2}\right)^{|m|+\frac{1}{2}} \frac{\lambda^2 f_3^2 |m|!}{4\sqrt{2} w_0 \pi^2 k^2} \exp\left(-\frac{2\pi^2 k^2 w_0^2}{\lambda^2 f_3^2}\right) \mathbb{L}_{|m|}\left(\frac{2\pi^2 k^2 w_0^2}{\lambda^2 f_3^2}\right), \quad (7.10)$$

onde  $\mathbb{L}_{|m|}(\dots)$  é o polinômio de Laguerre. Essa construção teórica de  $G(k)$  se mostrará muito importante, pois a partir dela é possível encontrar as distâncias radiais que localizam os contornos circulares em que  $G(k) = 0$ .

Seja  $k_0$  o raio mínimo de um contorno zero do módulo da função de correlação cruzada. Para obter  $k_0$ , procuramos a menor raiz da expressão na Eq.(7.10), que na verdade é o menor zero do polinômio de Laguerre. Um resultado importante obtido por E. R. Neumann [122] afirma que a menor raiz  $x_0$  de um polinômio de Laguerre  $\mathbb{L}_n(x)$  está no intervalo  $1/n \leq x_0 \leq 2/(n+1)$ . Aqui consideramos que  $x_0$  é apenas a média aritmética dos extremos desse intervalo. Portanto, para  $m \neq 0$ ,

$$k_0^2 = \left( \frac{1}{|m|} + \frac{2}{|m|+1} \right) \frac{(\alpha w)^2}{2}, \quad (7.11)$$

onde substituímos a constante  $(\lambda f_3)/(\sqrt{2}\pi w_0)$  pela largura à meia altura,  $w$ , do “spot” central obtido a partir do padrão de correlação cruzada medido experimentalmente ou calculado numericamente após uma subtração do “background” [99] (ver Fig.7.2).

Além disso,  $\alpha = 0.0875$  é uma constante de ajuste para validar a relação, controlando a escala dos valores de  $k_0$ . Portanto, a CT podem ser determinada resolvendo uma equação quadrática para  $|m|$  obtida da Eq.(7.11) e aproximando o resultado do número inteiro mais próximo.

Resolvendo a expressão obtida na Eq.(7.11) para  $|m|$ , encontramos que a CT depende de  $k_0$ , ou seja,

$$|m| = \text{rint} \left[ \frac{((9\alpha^2 w^2 - 4\alpha^2 k_0^2 w^2 + 4k_0^4)^{1/2} - 2k_0^2 + 3\alpha^2 w^2)}{4k_0^2} \right]. \quad (7.12)$$

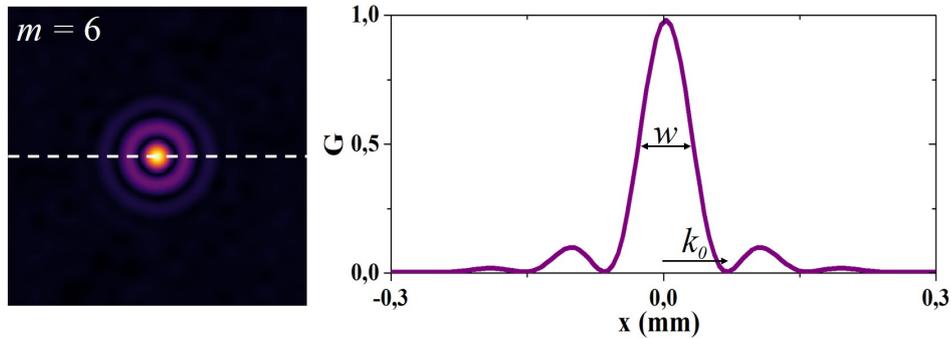
onde  $\text{rint}(\dots)$  é a função que retorna o inteiro mais próximo do resultado estimado.

### 7.3 Simulação Numérica

Enfatizamos que a Eq.(7.12) representa o principal resultado deste trabalho. Esta equação permite determinar o valor absoluto da CT de um vórtice óptico parcialmente coerente a partir do conhecimento da menor raiz,  $k_0$ , do módulo da função de correlação cruzada e da largura à meia altura máxima do “spot” central, como mostrado na Fig.7.2.

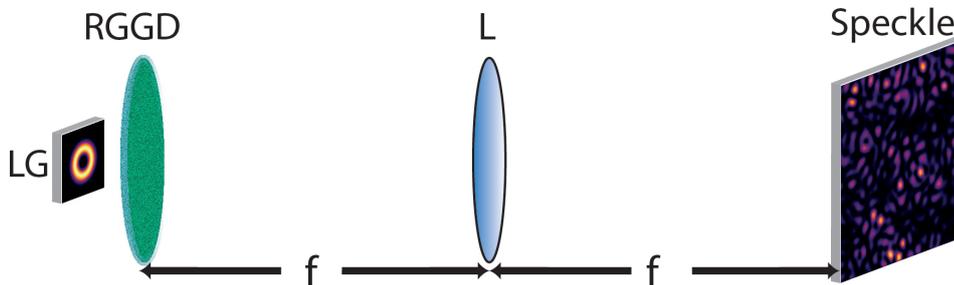
Para uma melhor visualização do fenômeno óptico descrito pela formulação teórica anterior, realizamos uma simulação numérica que precede e auxilia a análise dos resultados experimentais. Tal simulação deve representar um feixe LG incidente sobre um RGGD para gerar luz parcialmente coerente. A Fig.7.3 mostra a implementação óptica da situação descrita.

Figura 7.2: A imagem à esquerda mostra o perfil transversal do módulo da correlação cruzada calculada usando padrões de speckle simulados numericamente. Enquanto que à direita, é exibido perfil transversal em  $k_y = 0$  para mostrar a geometria da função de correlação cruzada. Aqui,  $k_0$  é a menor raiz do módulo da função de correlação cruzada e  $w$  é a cintura do ponto central.



Fonte: Autor

Figura 7.3: Ilustração esquemática de geração de padrões de speckles que serão simulados numericamente. O campo resultante do espalhamento de um feixe LG ao atravessar o RGGD é submetido a uma transformada de Fourier realizada pela lente  $L$ , de maneira que no outro foco da lente aparece a distribuição requerida.



Fonte: Autor

A representação matemática da simulação computacional da  $j$ -ésima realização de um campo de speckle resultante do espalhamento aleatório de um vórtice óptico coerente por um RGGD é dada por

$$S_j(x, y) = \mathbb{F} [E(r, \theta)e^{2\pi i R_j}], \quad (7.13)$$

onde  $\mathbb{F}$  denota a transformada de Fourier, enquanto a fase aleatória  $e^{2\pi i R_j}$  simula o RGGD sobre o qual o vórtice coerente acabou de cruzar. A intensidade do campo  $I_j(x, y) = |S_j(x, y)|^2$ . Em seguida, é calculada a correlação cruzada numérica dos padrões com a TC desejada.

Ressalta-se que  $R_j$  é uma matriz aleatória obtida por um gerador de números aleatórios, além disso, tem-se que  $R_{j+1} \neq R_j$ , conseqüentemente,  $I_{j+1}(x, y) \neq I_j(x, y)$ . Do ponto de vista da simulação computacional, a correlação cruzada de intensidade é expressa da seguinte

maneira

$$G_j(x, y) = \mathbb{F}^{-1} \{ \mathbb{F} [I_j(x, y)] \mathbb{F} [I_j(-x, -y)] \}. \quad (7.14)$$

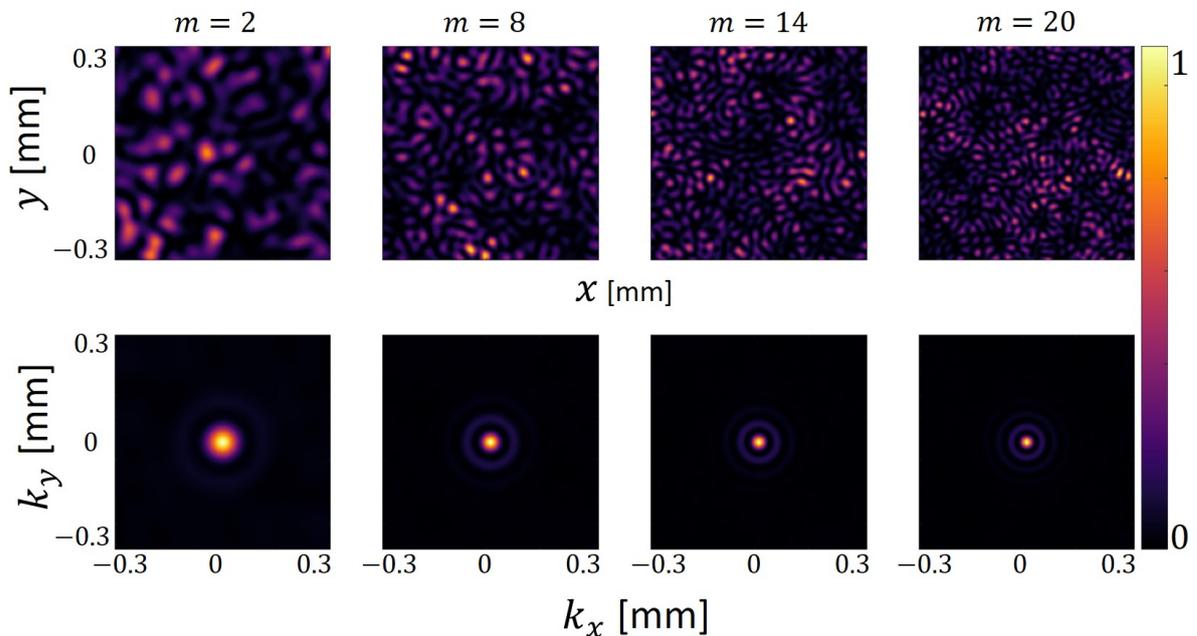
Vimos anteriormente que  $G(x, y)$  consiste de uma média de um conjunto de medidas, isso implica que a função de correlação cruzada média,  $G_M(x, y)$ , pode ser expressa como

$$G_M(x, y) = \frac{G_1(x, y) + G_2(x, y) + \cdots + G_N(x, y)}{N} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N G_j(x, y), \quad (7.15)$$

em que  $N$  é a quantidade total de realizações do campo. Todos os resultados de simulação apresentados a seguir têm uma média de 100 realizações. Repetimos este procedimento para modos LG com 20 diferentes CT, ( $1 \leq m \leq 20$ ).

A Fig.7.4 mostra os resultados da correlação cruzada obtidos a partir das simulações numéricas dos padrões de intensidade transversa dos vórtices ópticos parcialmente coerentes para diferentes valores de CT. Por questão de simplicidade exibiremos apenas 4 CTs.

Figura 7.4: Simulação numérica do vórtice parcialmente coerente: na primeira linha é mostrado a distribuição de intensidade dos campos de speckles; na segunda linha, tem-se os respectivos módulos da correlação cruzada calculada numericamente.



Fonte: Autor

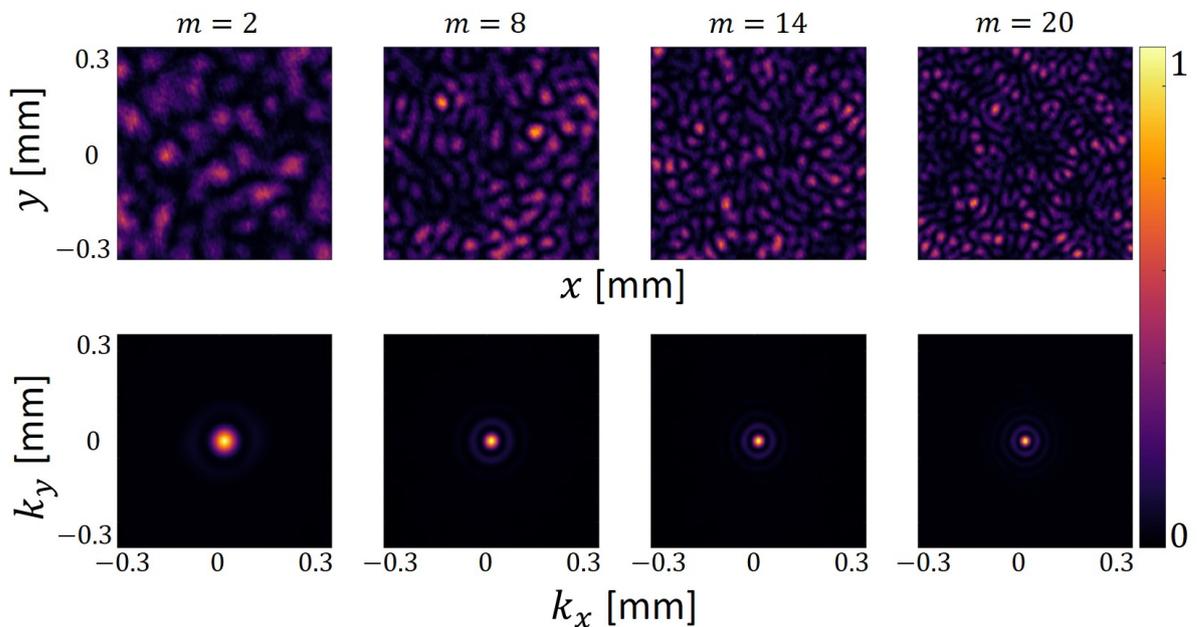
Na primeira linha de imagens da Fig.7.4, temos a distribuição de intensidade de luz parcialmente coerente resultante dos espalhamento dos feixes LG de CT 2, 8, 14 e 20. Na segunda linha, apresentamos os respectivos padrões de correlação cruzada das intensidades.

A partir da Fig.7.4, podemos observar claramente que o aumento dos valores de CT implicam em uma diminuição no tamanho médio dos grãos de speckle, bem como na área do “spot” central das imagens de correlação cruzada. Também é possível observar um aumento no número de anéis à medida que a CT aumenta.

## 7.4 Resultados Experimentais

A Fig.7.5 mostra os resultados da realização experimental. As distribuições de intensidade transversa dos feixes ópticos parcialmente coerentes capturados pela CCD com  $m$  igual a 2, 8, 14 e 20 são mostradas na primeira linha e o módulo da função de correlação cruzada, calculado numericamente a partir dos dados experimentais, na segunda linha. Aqui também podemos observar um comportamento semelhante aos resultados da simulação numérica apresentados na Fig.7.2, incluindo a presença de anéis concêntricos na figura de correlação cruzada.

Figura 7.5: Resultados experimentais para as distribuições de intensidade dos feixes parcialmente coerente, primeira linha; e módulo da função de correlação cruzada calculado numericamente a partir dos dados experimentais, segunda linha.



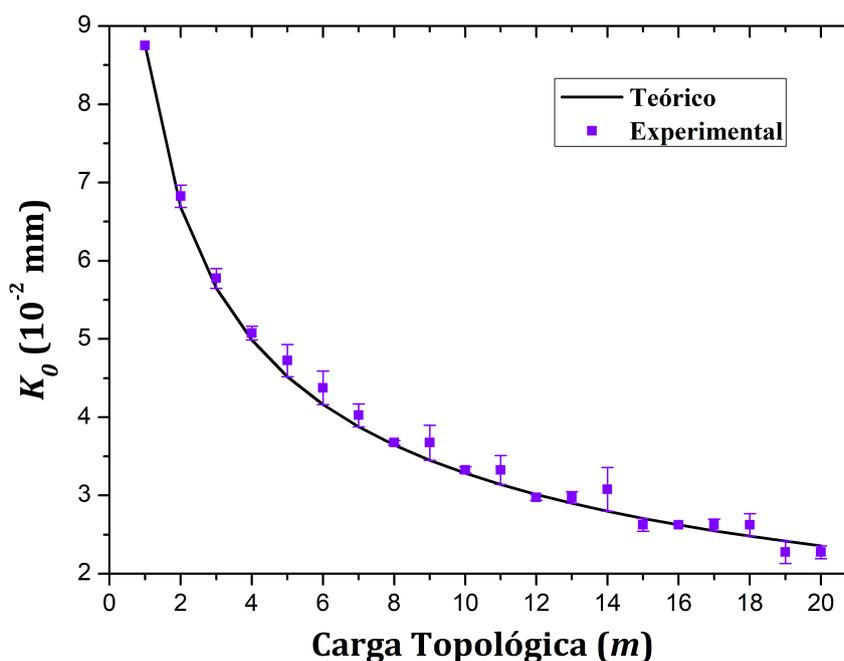
Fonte: Autor

Os resultados experimentais mostrados na segunda linha da Fig.7.5 foram obtidos a partir da média da correlação cruzada de 100 padrões de speckles. De maneira geral, produzimos

20 conjuntos de 100 elementos. A distribuição espacial de intensidade de cada elemento são independentes um dos outros. Isso é devido ao fato de que o RGGD rotacionar de um pequeno ângulo para cada medida.

A Fig.7.6 mostra o gráfico do raio mínimo  $k_0$  em função da carga topológica  $m$ . A curva preta sólida exibe o resultado teórico da Eq.(7.11). Os resultados experimentais são mostrados em quadrados roxos. Para obter os pontos experimentais apresentados, utilizamos uma contagem numérica da quantidade de pixels contidos linearmente entre o pixel central e o primeiro pixel de intensidade mínima ao longo do perfil de correlação cruzada do vórtice parcialmente coerente, conforme a ilustração mostrada na Fig.7.2.

Figura 7.6: Relação entre o raio mínimo  $k_0$  e a carga topológica cobrar  $m$ . Curva preta sólida é o resultado teórico; quadrados azuis são resultados experimentais.



Fonte: Autor

Podemos facilmente observar no gráfico da Fig.7.6 que os resultados experimentais concordam muito bem com os resultados teóricos obtidos. Como já previsto, com o aumento do módulo de carga topológica,  $m$ , o raio mínimo,  $k_0$ , diminui, obedecendo ao resultado teórico obtido na equação Eq.(7.11). Vale ressaltar que esse resultado se mostra bastante relevante, uma vez que foi obtido sem o uso de um feixe referência, como ocorre em outras técnicas utilizando

vórtices parcialmente coerentes (como foi visto no Capítulo 6).

## 8. Conclusões

Nesta tese fizemos um estudo a respeito da geração e manipulação de feixes de luz com momento angular orbital. O ponto de partida foi relembrar conceitos básicos da teoria eletromagnética, bem como tipos de feixes ópticos, vórtices ópticos, singularidade de fase e holografia.

Já no Capítulo 3, propusemos um método alternativo de geração de feixes não difrativos com formas geométricas arbitrárias através da parametrização de curvas simples. Para tal, sugerimos um breve modelo teórico o qual foi confirmado com medidas experimentais. Concluímos que a geração de feixes não paraxiais a partir da parametrização de curvas simples foi possível devido ao fato que tais curvas são homotópicas com o círculo, isto significa que tais curvas podem ser produzidas por deformação contínua do círculo [52].

Concluiu-se ainda que a máxima distância que um feixe não difrativo se propaga sem sentir efeitos da difração depende apenas da magnitude de sua componente transversa do vetor de onda. Soma-se a isso o fato de que as curvas não simples podem ser vistas como um conjunto de curvas simples. E devido a isso, os feixes que seriam gerados a partir dessas curvas sofreriam interferência entre si, fato que contribui para a não formação de um padrão com franjas concêntricas lisas deformadas de acordo com a geometria dada.

Além disso, a nossa proposta de um novo método para gerar feixes não paraxiais, usando a parametrização de curvas planas simples, tem solidez experimental e teórica e se mostra um tanto vantajoso em relação aos demais, pois é uma maneira simples e direta de se chegar um feixe com uma dada geometria. Podemos evidenciar estas vantagens ao enfatizar que os resultados encontrados até então na literatura científica ou utilizam algoritmos de otimização ou lançam mão da 'força bruta' ao resolver a equação de Helmholtz em novos sistemas de coordenadas.

No Capítulo 4, fizemos estudo teórico a respeito da conservação da carga topológica de modos LG incidentes em uma abertura arbitrária. A partir destes estudos, concluímos a conservação da CT é independente da forma geométrica da abertura. Para confirmar nossa previsão teórica, foram realizadas medições experimentais as quais concordaram efetivamente com a teoria.

Notamos que a inserção de aberturas no caminho dos modos LG quebra a simetria do feixe incidente e causa um embaralhamento do vórtice. A singularidade não genérica do feixe incidente, após a propagação, divide-se em genéricas cuja carga líquida permanece invariante com a dinâmica da propagação. Estes resultados podem ser úteis para a comunicação óptica usando

feixes com TC e para entender o caráter fundamental da CT como uma propriedade robusta de feixes óticos.

Portanto, observamos experimentalmente que, tanto para o caso da abertura triangular quanto a abertura quadrada, a CT líquida dentro da rede é igual a CT do feixe incidente na abertura. Porém, observa-se que um par de vórtices que aparece no resultado teórico para o padrão de difração triangular com  $m = 3$  não aparece no experimento. Isso acontece porque os padrões de fase são muito sensíveis ao ruído, mas o importante é que a TC líquida é uma quantidade robusta e é conservada.

Durante a propagação do campo de  $z = 0$  até o ponto em que a rede se forma, notamos que a dinâmica de propagação destes pontos singulares é extremamente complexa e depende da geometria da abertura e da TC inicial do feixe incidente. Além disso, fica evidente que as aberturas perturbam o campo de onda inicial e, como resultado, decompõem sua singularidade inicial não-genérica em genéricas, com carga topológica individuais de  $+1$  e  $-1$ . Os vórtices genéricos se misturam de forma bastante confusa, mas, ao serem somados, tem-se a CT líquida que permanece constante ao longo da propagação.

Além disso, apesar de nossos resultados experimentais que mostram a conservação da carga topológica de feixes difratados por aberturas ter sido feito a partir da análise dos exemplos com as aberturas triangular e quadrada. Entretanto, poderíamos ter analisado casos com formas geométricas genéricas.

Seguindo a linha de estudos das propriedades físicas, no espaço livre, de luz que carrega momento angular orbital, é um tema bastante atual a investigação de métodos para conseguir, de maneira experimental, separar superposições de modos de MAO. Entretanto, observa-se que até então o que consta na literatura são técnicas desenvolvidas apenas no contexto de luz com alta coerência espacial.

No capítulo 5, através da técnica de separação de estados de MAO coerentes, utilizando dois elementos óticos [18], classificamos estados puros de MAO coerentes de maneira bastante eficiente. Além disso, verificamos que este método funciona excelentemente para separar os modos componentes de uma superposição de feixes LG com diferentes CT. A alta resolução observada na separação dos estados de MAO faz deste método um forte candidato a ser usado para avanços na comunicação ótica.

No capítulo 6, mostramos que o esquema de dois elementos óticos, transformação espiral e fase de correção, usados para classificar estados de MAO coerentes, também classifica modos

incoerente. Para tal, necessitamos apenas encontrar o vórtice da função de coerência, o chamado vórtice de coerência [86].

Concluimos que é possível usar os graus de liberdade espaciais da função de coerência para multiplexar espacialmente o vórtice de coerência como um possível canal de envio de informações para comunicações ópticas. Pois os vórtices ópticos espacialmente incoerentes são robustos à dispersão causada pelas turbulências atmosférica e obstáculos opacos, isso os caracteriza como uma alternativa promissora para codificação e transmissão de informações.

No capítulo 7, mostramos numericamente, teoricamente e experimentalmente como medir a carga topológica de um vórtice óptico parcialmente coerente através da geometria da função de correlação cruzada do campo distante. Para isso, basta usar o raio de um contorno zero de raio mínimo do módulo da função de correlação cruzada e na medição da largura a meia altura do “spot” central.

Por fim, a partir da Eq.(7.14), verificamos que o presente método não requer a geração de um feixe de referência adicional, nem a determinação da fase da função de coerência. Necessita-se apenas da visualização do anel interno da função de correlação. A importância de nosso método é constatada quando percebemos que em algumas aplicações como na astronomia não temos um feixe de referência e os anéis podem não estar visíveis na função de correlação cruzada experimental. Esperamos que nossos resultados possam ser úteis na medição da carga topológica em astrofísica e astronomia, bem como na comunicação a laser em meios atmosféricos.

## **Artigos publicados pelo autor da tese:**

1. Bezerra, D. O., Amaral, J. P., Fonseca, E. J., Alves, C. R., & Jesus-Silva, A. J. (2020). Sorting of spatially incoherent optical vortex modes. *Scientific reports*, 10(1), 1-7.
2. Alves, C. R., Amaral, J. P., Neto, A. P., Neto, J. G., & Jesus-Silva, A. J. (2020). Measuring the topological charge of coherence vortices through the geometry of the far-field cross-correlation function. *Applied optics*, 59(6), 1553-1557.
3. Rocha, J. C., Amaral, J. P., Fonseca, E. J., & Jesus-Silva, A. J. (2019). Study of the conservation of the topological charge strength in diffraction by apertures. *JOSA B*, 36(8), 2114-2117.
4. Amaral, J. P., Rocha, J. C., Fonseca, E. J., & Jesus-Silva, A. J. (2019). Method to de-

fine non-diffracting optical beams mimicking the shape of simple plane curves. *Applied optics*, 58(13), 3659-3663.

5. Amaral, J. P., Fonseca, E. J., & Jesus-Silva, A. J. (2015). Tailoring speckles with Weibull intensity statistics. *Physical Review A*, 92(6), 063851.

# Referências Bibliográficas

- [1] Alexandr Jonáš and Pavel Zemanek. Light at work: The use of optical forces for particle manipulation, sorting, and analysis. *Electrophoresis*, 29(24):4813–4851, 2008.
- [2] Miles Padgett, Johannes Courtial, and Les Allen. Light’s orbital angular momentum. *Physics Today*, 57(5):35–40, 2004.
- [3] John Henry Poynting. The wave motion of a revolving shaft, and a suggestion as to the angular momentum in a beam of circularly polarised light. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 82(557):560–567, 1909.
- [4] Richard A Beth. Mechanical detection and measurement of the angular momentum of light. *Physical Review*, 50(2):115, 1936.
- [5] Les Allen, Marco W Beijersbergen, RJC Spreeuw, and JP Woerdman. Orbital angular momentum of light and the transformation of laguerre-gaussian laser modes. *Physical Review A*, 45(11):8185, 1992.
- [6] J Durnin. Exact solutions for nondiffracting beams. i. the scalar theory. *JOSA A*, 4(4):651–654, 1987.
- [7] Jian Wang, Jeng-Yuan Yang, Irfan M Fazal, Nisar Ahmed, Yan Yan, Hao Huang, Yongxiong Ren, Yang Yue, Samuel Dolinar, Moshe Tur, et al. Terabit free-space data transmission employing orbital angular momentum multiplexing. *Nature photonics*, 6(7):488, 2012.
- [8] Gregory J Gbur. *Singular optics*. Crc Press, 2016.
- [9] Greg Gbur and Robert K Tyson. Vortex beam propagation through atmospheric turbulence and topological charge conservation. *JOSA A*, 25(1):225–230, 2008.

- [10] José CA Rocha, João P Amaral, Eduardo JS Fonseca, and Alcenísio J Jesus-Silva. Study of the conservation of the topological charge strength in diffraction by apertures. *JOSA B*, 36(8):2114–2117, 2019.
- [11] Monika Bahl and P Senthilkumaran. Energy circulations in singular beams diffracted through an isosceles right triangular aperture. *Physical Review A*, 92(1):013831, 2015.
- [12] Graham Gibson, Johannes Courtial, Miles J Padgett, Mikhail Vasnetsov, Valeriy Pas’ko, Stephen M Barnett, and Sonja Franke-Arnold. Free-space information transfer using light beams carrying orbital angular momentum. *Optics express*, 12(22):5448–5456, 2004.
- [13] Robert Fickler, Mehul Malik, Thomas Scheidl, and Rupert Ursin. Twisted light communication through turbulent air across vienna. 2014.
- [14] Mario Krenn, Johannes Handsteiner, Matthias Fink, Robert Fickler, Rupert Ursin, Mehul Malik, and Anton Zeilinger. Twisted light transmission over 143 km. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 113(48):13648–13653, 2016.
- [15] João P Amaral, José CA Rocha, Eduardo JS Fonseca, and Alcenisio J Jesus-Silva. Method to define non-diffracting optical beams mimicking the shape of simple plane curves. *Applied optics*, 58(13):3659–3663, 2019.
- [16] S Chávez-Cerda, JC Gutiérrez-Vega, and GHC New. Elliptic vortices of electromagnetic wave fields. *Optics Letters*, 26(22):1803–1805, 2001.
- [17] Pedro A Sanchez-Serrano, David Wong-Campos, Servando Lopez-Aguayo, and Julio C Gutiérrez-Vega. Engineering of nondiffracting beams with genetic algorithms. *Optics letters*, 37(24):5040–5042, 2012.
- [18] Yuanhui Wen, Ioannis Chremmos, Yujie Chen, Jiangbo Zhu, Yanfeng Zhang, and Siyuan Yu. Spiral transformation for high-resolution and efficient sorting of optical vortex modes. *Physical review letters*, 120(19):193904, 2018.
- [19] Cleberson R Alves, Alcenisio J Jesus-Silva, and Eduardo JS Fonseca. Robustness of a coherence vortex. *Applied optics*, 55(27):7544–7549, 2016.
- [20] Eugene Hecht. Optics, 4th. *International edition, Addison-Wesley, San Francisco*, 3:2, 2002.

- [21] Max Born, Emil Wolf, Avadh Behari Bhatia, PC Clemmow, et al. *Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*, volume 4. Pergamon press Oxford, 1970.
- [22] Bahaa EA Saleh, Malvin Carl Teich, and Bahaa E Saleh. *Fundamentals of photonics*, volume 22. Wiley New York, 1991.
- [23] David L Andrews and Mohamed Babiker. *The angular momentum of light*. Cambridge University Press, 2012.
- [24] Zdeněk Bouchal. Nondiffracting optical beams: physical properties, experiments, and applications. *Czechoslovak journal of physics*, 53(7):537–578, 2003.
- [25] JI Durnin, JJ Miceli Jr, and JH Eberly. Diffraction-free beams. *Physical review letters*, 58(15):1499, 1987.
- [26] Miguel A Bandres, Julio C Gutiérrez-Vega, and Sabino Chávez-Cerda. Parabolic non-diffracting optical wave fields. *Optics letters*, 29(1):44–46, 2004.
- [27] MJ Padgett and L Allen. The poynting vector in laguerre-gaussian laser modes. *Optics communications*, 121(1-3):36–40, 1995.
- [28] Les Allen and Miles Padgett. The orbital angular momentum of light: An introduction. *Twisted Photons: Applications of Light with Orbital Angular Momentum*, pages 1–12, 2011.
- [29] Hans J Weber and George B Arfken. *Essential Mathematical Methods for Physicists, ISE*. Elsevier, 2003.
- [30] Kyoji Matsushima and Tomoyoshi Shimobaba. Band-limited angular spectrum method for numerical simulation of free-space propagation in far and near fields. *Optics express*, 17(22):19662–19673, 2009.
- [31] Gary Cloud. *Optical methods of engineering analysis*. Cambridge university press, 1998.
- [32] NR Heckenberg, R McDuff, CP Smith, and AG White. Generation of optical phase singularities by computer-generated holograms. *Optics letters*, 17(3):221–223, 1992.

- [33] René L Eriksen, Paul C Mogensen, and Jesper Glückstad. Elliptical polarisation encoding in two dimensions using phase-only spatial light modulators. *Optics communications*, 187(4-6):325–336, 2001.
- [34] Victor Arrizón, Ulises Ruiz, Rosibel Carrada, and Luis A González. Pixelated phase computer holograms for the accurate encoding of scalar complex fields. *JOSA A*, 24(11):3500–3507, 2007.
- [35] Yuri S Kivshar and Elena A Ostrovskaya. Optical vortices folding and twisting waves of light. *Optics and photonics news*, 12(4):24–28, 2001.
- [36] Paulo Cesar Aguiar Brandão Filho et al. Singularidades de fase em luz clássica. 2016.
- [37] Arthur T Winfree. *The geometry of biological time*, volume 12. Springer Science & Business Media, 2001.
- [38] John Frederick Nye. *Natural focusing and fine structure of light: caustics and wave dislocations*. CRC Press, 1999.
- [39] Greg Gbur. The evolution of vortex beams in atmospheric turbulence. In *Atmospheric Propagation of Electromagnetic Waves II*, volume 6878, page 687804. International Society for Optics and Photonics, 2008.
- [40] Hugo E Hernández-Figueroa, Michel Zamboni-Rached, and Erasmo Recami. *Nondiffracting waves*. John Wiley & Sons, 2013.
- [41] Carlos López-Mariscal and Kristian Helmersson. Shaped nondiffracting beams. *Optics letters*, 35(8):1215–1217, 2010.
- [42] Antti Vasara, Jari Turunen, and Ari T Friberg. Realization of general nondiffracting beams with computer-generated holograms. *JOSA A*, 6(11):1748–1754, 1989.
- [43] Emil Wolf. Electromagnetic diffraction in optical systems-i. an integral representation of the image field. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 253(1274):349–357, 1959.
- [44] Tatsuo Shiina, Kei Yoshida, Masafumi Ito, and Yasuyuki Okamura. Long-range propagation of annular beam for lidar application. *Optics Communications*, 279(1):159–167, 2007.

- [45] Jochen Arlt, Veneranda Garcés-Chávez, Wilson Sibbett, and Kishan Dholakia. Optical micromanipulation using a bessel light beam. *Optics Communications*, 197(4-6):239–245, 2001.
- [46] J-Y Lu and James F Greenleaf. Ultrasonic nondiffracting transducer for medical imaging. *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, 37(5):438–447, 1990.
- [47] Xinbao Zhang, Bin Zhao, and Zhu Li. Measurement method of spatial straightness error using non-diffracting beam and moiré-fringe technology. *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*, 6(1):121, 2003.
- [48] Florian O Fahrbach, Philipp Simon, and Alexander Rohrbach. Microscopy with self-reconstructing beams. *Nature Photonics*, 4(11):780, 2010.
- [49] Melanie McLaren, Thandeka Mhlanga, Miles J Padgett, Filippus S Roux, and Andrew Forbes. Self-healing of quantum entanglement after an obstruction. *Nature communications*, 5:3248, 2014.
- [50] Servando López-Aguayo, Yaroslav V Kartashov, Victor A Vysloukh, and Lluís Torner. Method to generate complex quasinondiffracting optical lattices. *Physical review letters*, 105(1):013902, 2010.
- [51] Johannes Courtial, Graeme Whyte, Zdeněk Bouchal, and Jaroslav Wagner. Iterative algorithms for holographic shaping of non-diffracting and self-imaging light beams. *Optics express*, 14(6):2108–2116, 2006.
- [52] Elsa Abbena, Simon Salamon, and Alfred Gray. *Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica*. Chapman and Hall/CRC, 2017.
- [53] Victor Arrizón, David Sánchez de-la Llave, Guadalupe Méndez, and Ulises Ruiz. Efficient generation of periodic and quasi-periodic non-diffractive optical fields with phase holograms. *Optics express*, 19(11):10553–10562, 2011.
- [54] José S Rodrigues, Caio VC Mendes, Eduardo JS Fonseca, and Alcenísio J Jesus-Silva. Talbot effect in optical lattices with topological charge. *Optics letters*, 42(19):3944–3947, 2017.

- [55] Joseph W Goodman. *Introduction to Fourier optics*. Roberts and Company Publishers, 2005.
- [56] Zdenek Bouchal, J Wagner, and M Chlup. Self-reconstruction of a distorted nondiffracting beam. *Optics Communications*, 151(4-6):207–211, 1998.
- [57] Juarez G Silva, Alcenísio J Jesus-Silva, Márcio ARC Alencar, Jandir M Hickmann, and Eduardo JS Fonseca. Unveiling square and triangular optical lattices: a comparative study. *Optics letters*, 39(4):949–952, 2014.
- [58] JM Hickmann, EJS Fonseca, WC Soares, and S Chávez-Cerda. Unveiling a truncated optical lattice associated with a triangular aperture using light’s orbital angular momentum. *Physical review letters*, 105(5):053904, 2010.
- [59] Dina Grace Banguilan, Nestor Bareza, Esmerando Escoto, and Nathaniel Hermosa. Measuring the orbital angular momentum of light by dynamic polygon apertures. In *Holography, Diffractive Optics, and Applications VIII*, volume 10818, page 108180U. International Society for Optics and Photonics, 2018.
- [60] John Frederick Nye and Michael Victor Berry. Dislocations in wave trains. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 336(1605):165–190, 1974.
- [61] Filippus S Roux. How to distinguish between the annihilation and the creation of optical vortices. *Optics letters*, 38(19):3895–3898, 2013.
- [62] Yaroslav V Kartashov, Victor A Vysloukh, and Lluís Torner. Stability of vortex solitons in thermal nonlinear media with cylindrical symmetry. *Optics express*, 15(15):9378–9384, 2007.
- [63] Xiao-Lu Ge, Ben-Yi Wang, and Cheng-Shan Guo. Evolution of phase singularities of vortex beams propagating in atmospheric turbulence. *JOSA A*, 32(5):837–842, 2015.
- [64] Anindya Ambuj, Emily Walla, Sophia Andaloro, Sean Nomoto, Reeta Vyas, and Surendra Singh. Symmetry in the diffraction of beams carrying orbital angular momentum. *Physical Review A*, 99(1):013846, 2019.

- [65] Pedro HF Mesquita, Alcenísio J Jesus-Silva, Eduardo JS Fonseca, and Jandir M Hickmann. Engineering a square truncated lattice with light's orbital angular momentum. *Optics express*, 19(21):20616–20621, 2011.
- [66] GP Karman, MW Beijersbergen, A Van Duijl, and JP Woerdman. Creation and annihilation of phase singularities in a focal field. *Optics letters*, 22(19):1503–1505, 1997.
- [67] Isaac Freund. Critical point explosions in two-dimensional wave fields. *Optics communications*, 159(1-3):99–117, 1999.
- [68] Stuart A Collins. Lens-system diffraction integral written in terms of matrix optics. *JOSA*, 60(9):1168–1177, 1970.
- [69] MV Berry. Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps. *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*, 6(2):259, 2004.
- [70] Charlotte Stahl and Greg Gbur. Analytic calculation of vortex diffraction by a triangular aperture. *JOSA A*, 33(6):1175–1180, 2016.
- [71] Kjell J Gåsvik. *Optical metrology*. John Wiley & Sons, 2003.
- [72] Joanna Schmit and Katherine Creath. Extended averaging technique for derivation of error-compensating algorithms in phase-shifting interferometry. *Applied Optics*, 34(19):3610–3619, 1995.
- [73] Nenad Bozinovic, Yang Yue, Yongxiong Ren, Moshe Tur, Poul Kristensen, Hao Huang, Alan E Willner, and Siddharth Ramachandran. Terabit-scale orbital angular momentum mode division multiplexing in fibers. *science*, 340(6140):1545–1548, 2013.
- [74] Gabriel Molina-Terriza, Juan P Torres, and Lluís Torner. Management of the angular momentum of light: preparation of photons in multidimensional vector states of angular momentum. *Physical review letters*, 88(1):013601, 2001.
- [75] Juan Carlos García-Escartín and Pedro Chamorro-Posada. Quantum multiplexing with the orbital angular momentum of light. *Physical Review A*, 78(6):062320, 2008.
- [76] Alan E Willner, Hao Huang, Yan Yan, Yongxiong Ren, Nisar Ahmed, Goudong Xie, Changjing Bao, L Li, Y Cao, Z Zhao, et al. Optical communications using orbital angular momentum beams. *Advances in Optics and Photonics*, 7(1):66–106, 2015.

- [77] Gregorius CG Berkhout, Martin PJ Lavery, Johannes Courtial, Marco W Beijersbergen, and Miles J Padgett. Efficient sorting of orbital angular momentum states of light. *Physical review letters*, 105(15):153601, 2010.
- [78] Mohammad Mirhosseini, Mehul Malik, Zhimin Shi, and Robert W Boyd. Efficient separation of the orbital angular momentum eigenstates of light. *Nature communications*, 4:2781, 2013.
- [79] Jonathan Leach, Miles J Padgett, Stephen M Barnett, Sonja Franke-Arnold, and Johannes Courtial. Measuring the orbital angular momentum of a single photon. *Physical review letters*, 88(25):257901, 2002.
- [80] Wuhong Zhang, Qianqian Qi, Jie Zhou, and Lixiang Chen. Mimicking faraday rotation to sort the orbital angular momentum of light. *Physical review letters*, 112(15):153601, 2014.
- [81] Leslie Allen, Stephen M Barnett, and Miles J Padgett. *Optical angular momentum*. CRC press, 2016.
- [82] Gangi Reddy Salla, Chithrabhanu Perumangattu, Shashi Prabhakar, Ali Anwar, and Ravindra P Singh. Recovering the vorticity of a light beam after scattering. *Applied Physics Letters*, 107(2):021104, 2015.
- [83] Salla Gangi Reddy, Ashok Kumar, Shashi Prabhakar, and RP Singh. Experimental generation of ring-shaped beams with random sources. *Optics letters*, 38(21):4441–4444, 2013.
- [84] AJ Jesus-Silva, JM Hickmann, and EJS Fonseca. Strong correlations between incoherent vortices. *Optics express*, 20(18):19708–19713, 2012.
- [85] Cleberson R Alves, Alcenísio J Jesus-Silva, and Eduardo JS Fonseca. Characterizing coherence vortices through geometry. *Optics letters*, 40(12):2747–2750, 2015.
- [86] Sergey A Ponomarenko. A class of partially coherent beams carrying optical vortices. *JOSA A*, 18(1):150–156, 2001.
- [87] Tao Wang, Jixiong Pu, and Ziyang Chen. Propagation of partially coherent vortex beams in a turbulent atmosphere. *Optical Engineering*, 47(3):036002, 2008.

- [88] Jun Chen and Yao Li. Discrimination of incoherent vortex states of light. *Optics letters*, 43(22):5595–5598, 2018.
- [89] Mario Krenn, Robert Fickler, Matthias Fink, Johannes Handsteiner, Mehul Malik, Thomas Scheidl, Rupert Ursin, and Anton Zeilinger. Communication with spatially modulated light through turbulent air across vienna. *New Journal of Physics*, 16(11):113028, 2014.
- [90] Matt Young. *Optics and lasers: an engineering physics approach*, volume 5. Springer, 2013.
- [91] Oleg Marchenko, Sergi Kazantsev, and Laurentius Windholz. *Demonstrational Optics: Part 2, Coherent and Statistical Optics*, volume 2. Springer Science & Business Media, 2009.
- [92] Joseph W Goodman. *Statistical optics*. John Wiley & Sons, 2015.
- [93] Vladimir Man’ko. Mandel leonard and wolf emil, optical coherence and quantum optics, cambridge university press (1995), 1166 pages. *Laser and Particle Beams*, 15(3):481–482, 1997.
- [94] Max Born and Emil Wolf. *Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*. Elsevier, 2013.
- [95] Cleberson Rodrigues Alves et al. Autorreconfiguração de um campo de “speckle”: teoria, experimento e aplicações. 2016.
- [96] Cleberson R Alves, Alcenísio J Jesus-Silva, and Eduardo JS Fonseca. Effect of the spatial coherence length on the self-reconfiguration of a speckle field. *Physical Review A*, 94(1):013835, 2016.
- [97] Itamar Vidal, Dilson P Caetano, Eduardo JS Fonseca, and Jandir M Hickmann. Effects of pseudothermal light source’s transverse size and coherence width in ghost-interference experiments. *Optics letters*, 34(9):1450–1452, 2009.
- [98] Yangjian Cai and Shi-Yao Zhu. Ghost interference with partially coherent radiation. *Optics letters*, 29(23):2716–2718, 2004.

- [99] Alex Cao, Abhilash K Pandya, Gulay K Serhatkulu, Rachel E Weber, Houbei Dai, Jagdish S Thakur, Vaman M Naik, Ratna Naik, Gregory W Auner, Raja Rabah, et al. A robust method for automated background subtraction of tissue fluorescence. *Journal of Raman Spectroscopy: An International Journal for Original Work in all Aspects of Raman Spectroscopy, Including Higher Order Processes, and also Brillouin and Rayleigh Scattering*, 38(9):1199–1205, 2007.
- [100] Jennifer E Curtis and David G Grier. Structure of optical vortices. *Physical review letters*, 90(13):133901, 2003.
- [101] Miles J Padgett. Orbital angular momentum 25 years on. *Optics express*, 25(10):11265–11274, 2017.
- [102] David G Grier. A revolution in optical manipulation. *nature*, 424(6950):810, 2003.
- [103] Astrid van der Horst and Nancy R Forde. Calibration of dynamic holographic optical tweezers for force measurements on biomaterials. *Optics express*, 16(25):20987–21003, 2008.
- [104] Clara I Osorio, Gabriel Molina-Terriza, Blanca G Font, and Juan P Torres. Azimuthal distinguishability of entangled photons generated in spontaneous parametric down-conversion. *Optics express*, 15(22):14636–14643, 2007.
- [105] JM Hickmann, EJS Fonseca, and AJ Jesus-Silva. Born’s rule and the interference of photons with orbital angular momentum by a triangular slit. *EPL (Europhysics Letters)*, 96(6):64006, 2011.
- [106] Greg Gbur and Taco D Visser. Coherence vortices in partially coherent beams. *Optics communications*, 222(1-6):117–125, 2003.
- [107] M Harris, CA Hill, PR Tapster, and JM Vaughan. Laser modes with helical wave fronts. *Physical Review A*, 49(4):3119, 1994.
- [108] M Harris, CA Hill, and JM Vaughan. Optical helices and spiral interference fringes. *Optics communications*, 106(4-6):161–166, 1994.
- [109] HI Sztul and RR Alfano. Double-slit interference with laguerre-gaussian beams. *Optics letters*, 31(7):999–1001, 2006.

- [110] Cheng-Shan Guo, Lei-Lei Lu, and Hui-Tian Wang. Characterizing topological charge of optical vortices by using an annular aperture. *Optics letters*, 34(23):3686–3688, 2009.
- [111] Luís EE de Araujo and Matthew E Anderson. Measuring vortex charge with a triangular aperture. *Optics letters*, 36(6):787–789, 2011.
- [112] Salla Gangi Reddy, Shashi Prabhakar, Ashok Kumar, J Banerji, and RP Singh. Higher order optical vortices and formation of speckles. *Optics letters*, 39(15):4364–4367, 2014.
- [113] Jie Zhang, Su-Juan Huang, Fu-Quan Zhu, Wei Shao, and Mu-Sheng Chen. Dimensional properties of laguerre–gaussian vortex beams. *Applied optics*, 56(12):3556–3561, 2017.
- [114] Shashi Prabhakar, Ashok Kumar, J Banerji, and RP Singh. Revealing the order of a vortex through its intensity record. *Optics letters*, 36(22):4398–4400, 2011.
- [115] Yuanjie Yang, Michael Mazilu, and Kishan Dholakia. Measuring the orbital angular momentum of partially coherent optical vortices through singularities in their cross-spectral density functions. *Optics letters*, 37(23):4949–4951, 2012.
- [116] Yuanjie Yang and Yi-dong Liu. Measuring azimuthal and radial mode indices of a partially coherent vortex field. *Journal of Optics*, 18(1):015604, 2015.
- [117] Jun Zeng, Xingyuan Lu, Leixin Liu, Xinlei Zhu, Chengliang Zhao, and Yangjian Cai. Simultaneous measurement of the radial and azimuthal mode indices of a higher-order partially coherent vortex beam based on phase detection. *Optics letters*, 44(15):3881–3884, 2019.
- [118] Xingyuan Lu, Chengliang Zhao, Yifeng Shao, Jun Zeng, Sander Konijnenberg, Xinlei Zhu, Sergei Popov, H Paul Urbach, and Yangjian Cai. Phase detection of coherence singularities and determination of the topological charge of a partially coherent vortex beam. *Applied Physics Letters*, 114(20):201106, 2019.
- [119] Izrail Solomonovich Gradshteyn and Iosif Moiseevich Ryzhik. *Table of integrals, series, and products*. Academic press, 2014.
- [120] Bruno Gabutti. On high precision methods for computing integrals involving bessel functions. *Mathematics of Computation*, pages 1049–1057, 1979.

- [121] Bruno Gabutti and Luigi Gatteschi. New asymptotics for the zeros of whittaker's functions. *Numerical algorithms*, 28(1-4):159–170, 2001.
- [122] Helge Skovgaard. On the greatest and the least zero of laguerre polynomials. *Matematisk tidsskrift. B*, pages 59–66, 1951.