UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

UMA REFLEXÃO SOBRE AS FUNÇÕES SENOIDAIS E ALGUMAS APLICAÇÕES

EZEQUIAS DOS SANTOS PEIXOTO

Maceió, 09 de maio de 2020

Instituto de Matemática

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CAMPUS A.C. SIMÕES
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL - PROFMAT

EZEQUIAS DOS SANTOS PEIXOTO

UMA REFLEXÃO SOBRE AS FUNÇÕES SENOIDAIS E ALGUMAS APLICAÇÕES

MACEIÓ

2020

EZEQUIAS DOS SANTOS PEIXOTO

UMA REFLEXÃO SOBRE AS FUNÇÕES SENOIDAIS E ALGUMAS APLICAÇÕES

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Alagoas como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Isnaldo Isaac Barbosa

MACEIÓ

2020

.

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale – CRB4 - 661

P379u Peixoto, Ezequias dos Santos.
Uma reflexão sobre as funções senoidais e algumas aplicações / Ezequias dos Santos Peixoto. - 2020.
60 f. : il.

Orientador: Isnaldo Isaac Barbosa.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2020.

Bibliografia: f. 60.

1. Matemática – Estudo ensino. 2. Trigonometria – Ensino e aprendizagem. 3. Razões trigonométricas. 4. Triângulo retângulo. I. Título.

CDU: 372:514.116

Folha de Aprovação

EZEQUIAS DOS SANTOS PEIXOTO

UMA REFLEXÃO SOBRE AS FUNÇÕES SENOIDAIS E ALGUMAS APLICAÇÕES

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 10 de outubro de 2019.

Banca Examinadora:

____

Prof. Dr. Isnaldo Isaac Barbosa – UFAL (Presidente)

____

Prof. Dr. Vanio Fragoso de Melo - UFAL

____

Prof. Dr. Giovane Ferreira Silva – UFMA

Dedico este trabalho a Deus, a minha querida esposa Viviane Peixoto, aos meus filhos Lucas Vinícius e Nathan que são presentes de Deus para minha vida, toda minha família e amigos.

AGRADECIMENTOS

Louvo e engrandeço o nome do Senhor Jesus pela oportunidade, a força e a sabedoria a mim concedida.

A minha família pelo sustentáculo e incentivo dispensados em todo o tempo. Aos amigos por todo apoio recebido.

Ao professor Dr. Krerley Irraciel M. de Oliveira pelas palavras de incentivo e a orientação para que eu fizesse o Profmat.

Ao professor Dr. José Carlos Almeida de Lima pelo companheirismo e apoio dispensado ao longo do curso.

Ao professor Dr. Isnaldo Isaac Barbosa por ter aceitado ser meu orientador, pela confiança que me deu, pelas importantes dicas, questionamentos e principalmente por sua amizade.

A banca composta pelos professores: Dr. Vânio Fragoso de Melo e Dr. Giovane Ferreira Silva pelas relevantes contribuições.

Aos professores e todo o corpo técnico que nos instruíram, incentivaram, cooperando significativamente na realização e concretização desse tão importante trabalho.

A todos os companheiros de turma pela convivência, parceria, ajuda e troca de experiências ao longo do curso.

A todos que tem participação direta ou indireta nesse processo, minha gratidão.

RESUMO

Este trabalho se fundamenta em mostrar ao estudante de matemática, sobretudo aquele que se debruça em aprender acerca das funções senoidais, a importância do conteúdo no ensino médio, bem como algumas aplicações no dia a dia. Para isso, inicialmente, abordamos tópicos básicos de trigonometria, depois analisamos o seno e cosseno no ciclo trigonométrico, que antes era conhecido e utilizado apenas nos triângulos. Fizemos um estudo pormenorizado dos arcos no ciclo, se utilizando das simetrias no plano cartesiano, para então falarmos da redução ao primeiro quadrante, dos arcos côngruos e até chegarmos as funções periódicas. Percebemos o que as constantes reais produzem graficamente na curva da função senoidal e por fim mostramos as aplicações dessas funções senoidais em nosso cotidiano.

Palavras-chave: Trigonometria, razões trigonométricas, triângulo retângulo.

ABSTRACT

This work is based on showing the mathematics student, especially the one who focuses on learning about sinusoidal functions, the importance of content in high school, as well as some applications in everyday life. For this, we initially approach basic trigonometry topics, then we analyze the sine and cosine in the trigonometric cycle, which was previously known and used only in triangles. We made a detailed study of the arcs in the cycle, using the symmetries in the Cartesian plane, then we talk about the reduction to the first quadrant, of the arcs and until we reach the periodic functions. We perceive what the real constants produce graphically in the sinusoidal function curve and finally show the applications of these sinusoidal functions in our daily lives.

Keywords: Trigonometry, trigonometric ratios, right triangle.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O processo de ensino-aprendizagem, independente de qualquer situação, é sempre desafiador.

Quando o professor, como agente facilitador nesse processo, consegue atrair a atenção do aluno na explanação de um conteúdo, despertando nele o interesse, entendemos que acontece o aprendizado.

Na abordagem do conteúdo trigonométrico, a fim de que o aluno tenha uma clara percepção da curva característica das funções senoidais, é necessário portanto que compreenda previamente o que acontece com seno e cosseno de arcos no ciclo trigonométrico.

Salientamos que embora essa abordagem ocorra no ensino médio e que o público alvo já opera bem com elementos de um triângulo retângulo, iniciamos o capítulo 2 com as razões trigonométricas nesse tipo de triângulo. Enfatizando a relação fundamental da trigonometria e que para ângulos agudos, o seno de um ângulo é igual ao cosseno de seu complemento e vice-versa. Ainda perfazendo este capítulo, temos os arcos de circunferência, a circunferência orientada, o ciclo trigonométrico. Notemos que a partir daí surge uma nova linguagem trigonométrica, com isso sugerimos a utilização do geogebra (geogebra.org/m/s2tqv3dG), onde servirá como uma importante ferramenta na apresentação e assimilação do conteúdo. Seguindo os tópicos, encerraremos esse capítulo com as funções seno e cosseno.

No capítulo 3, utilizando novamente o geogebra, mostraremos o que ocorre com as constantes a, b, m e n nas funções senoidais. De modo que aluno identifique o gráfico a partir de uma função senoidal e vice-versa.

Certos da importância das funções senoidais no cotidiano, reservamos o capítulo 4 para uma abordagem utilizando alguns fenômenos físicos que são periódicos observando assim sua clara aplicação.

Finalmente no capítulo 5 faremos uma exposição de questões contextualizadas envolvendo nosso tema, mostrando com isso sua abrangente aplicabilidade nos fenômenos periódicos em diversas áreas.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Aqui nós retomamos um tópico essencial, a saber: razões trigonométricas em um triângulo retângulo. Este conteúdo é abordado no ensino fundamental e entendemos que é de suma importância sua presença em nosso trabalho.

2.1 RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NUM TRIÂNGULO RETÂNGULO

Desde o ensino fundamental sabemos que um triângulo é retângulo, quando possui um de seus ângulos internos de medida igual a 90°.

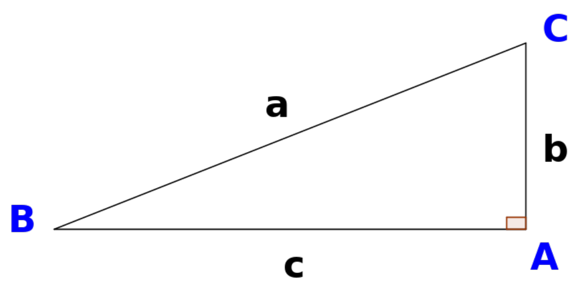


Figura 8: Triângulo retângulo

Na identificação dos elementos desse triângulo retângulo, diremos que:

- $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ são os lados de medida c, b e a respectivamente. Onde b e c são as medidas dos catetos e a é a medida hipotenusa.
- $B\hat{A}C$, $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ são os ângulos internos de medida $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, respectivamente. Onde $\hat{A}$ é a medida do ângulo reto e $\hat{B}$ e $\hat{C}$, são as medidas dos ângulos agudos.

Em relação ao ângulo $\hat{B}$, seu cateto oposto é b e seu cateto adjacente é c. Já em relação ao ângulo $\hat{C}$, seu cateto oposto é c e seu cateto adjacente é b.

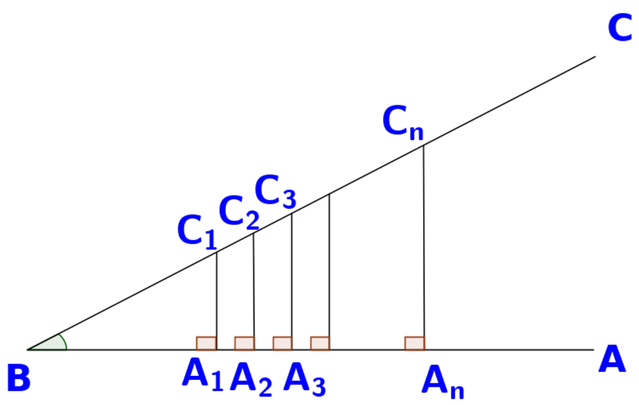
Conhecemos também que num triângulo retângulo:
O seno de um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto oposto a esse ângulo e a medida da hipotenusa.

$$\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a\operatorname{sen}\hat{B}$$
$$\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a\operatorname{sen}\hat{C}$$

O cosseno de um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto adjacente a esse ângulo e a medida da hipotenusa.

$$\cos\hat{B} = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a\cos\hat{B}$$
$$\cos\hat{C} = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a\cos\hat{C}$$

Com isso, dadas as semirretas $\overline{BA}$ e $\overline{BC}$ da figura abaixo e traçando as perpendiculares $\overline{A_1C_1}$, $\overline{A_2C_2}$, $\overline{A_3C_3}$,...,$\overline{A_nC_n}$.



Segue que os triângulos A_1BC_1, A_2BC_2, A_3BC_3,..., A_nBC_n são todos semelhantes.
Com isso:

$$\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{\overline{C_1A_1}}{\overline{BC_1}} = \frac{\overline{C_2A_2}}{\overline{BC_2}} = \frac{\overline{C_3A_3}}{\overline{BC_3}} = \cdots = \frac{\overline{C_nA_n}}{\overline{BC_n}}$$
$$\cos\hat{B} = \frac{\overline{BA_1}}{\overline{BC_1}} = \frac{\overline{BA_2}}{\overline{BC_2}} = \frac{\overline{BA_3}}{\overline{BC_3}} = \cdots = \frac{\overline{BA_n}}{\overline{BC_n}}$$

Convém observar que $\operatorname{sen}\hat{B}$ e $\cos\hat{B}$, não dependem do tamanho do triângulo retângulo onde $\hat{B}$ é um dos ângulos agudos. No entanto vai depender exclusivamente do ângulo $\hat{B}$.

Utilizamos o teorema de Pitágoras que diz que o quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos nas razões trigonométricas de um triângulo retângulo temos que: (Conforme a Figura 1).

$$a^2 = b^2 + c^2 = (a \operatorname{sen} \hat{B})^2 + (a \cos \hat{B})^2 = a^2 \operatorname{sen} \hat{B}^2 + a^2 \cos \hat{B}^2. \tag{8}$$

Como de fato $a \neq 0$ temos que:

$$\frac{a^2}{a^2} = \frac{a^2 \operatorname{sen} \hat{B}^2}{a^2} + \frac{a^2 \cos \hat{B}^2}{a^2}, \tag{9}$$

logo temos que

$$\operatorname{sen} \hat{B}^2 + \cos \hat{B}^2 = 1. \tag{10}$$

Sem perda de generalidade adotaremos $\operatorname{sen} \hat{B}^2 = \operatorname{sen}^2 \hat{B}$ e $\cos \hat{B}^2 = \cos^2 \hat{B}$. Com isso

$$\operatorname{sen}^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{B} = 1,$$

o que chamaremos de **Relação Fundamental da Trigonometria**, que pode ser generalizada para ângulos maiores do que 90°.

Segundo Elon Lages Lima em seu livro Números e Funções Reais (Pg 219), "É evidente, a partir da definição, que o cosseno de um ângulo agudo é igual ao seno do seu complemento e vice-versa. Daí a palavra "Cosseno"(Seno do complemento)".

Destacaremos o seno e cosseno dos ângulos notáveis (30°,45° e 60°).

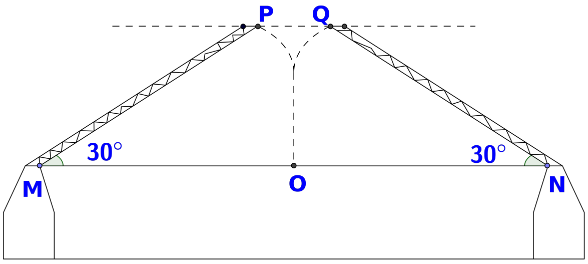
Tabela 8: Ângulos notáveis

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Exemplos

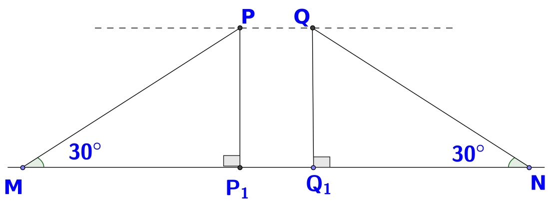
1. Em uma cidade há, sobre uma represa, uma ponte de $40m$ de comprimento que se abre, algumas vezes ao dia, para dar passagem a pequenas embarcações. Na Figura 3, O é o ponto médio e $\overset{\frown}{OP}$ e $\overset{\frown}{OQ}$ são arcos de circunferência com centro em M e N, respectivamente:

Figura 3



Com a ponte completamente aberta , forma-se um vão, representado pelo segmento $\overline{PQ}$. Qual é o comprimento desse vão?

Figura 4



Se O é ponto médio de $\overline{MN}$, então $\overline{MO} = \overline{ON} = \overline{MP} = \overline{NQ} = 20m$. Sejam P_1 e Q_1 respectivamente, os pontos da perpendicular traçada de P e Q em $\overline{MN}$, temos que $\overline{P_1Q_1}$=$\overline{PQ}$. Com isso:

$$\cos 30° = \frac{\overline{MP_1}}{\overline{MP}} = \frac{MP_1}{20} \Rightarrow \overline{MP_1} = 20\frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}m = 17m$$

$$\cos 30° = \frac{\overline{Q_1N}}{\overline{QN}} = \frac{Q_1N}{20} \Rightarrow \overline{Q_1N} = 20\frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}m = 17m$$

Logo temos:

$$\overline{MP_1} + \overline{P_1Q_1} + \overline{Q_1N} = 40$$
$$17 + \overline{PQ} + 17 = 40 \Rightarrow \overline{PQ} = 40 - 34 = 6m.$$

O Comprimento desse vão mede 6m.

2. (UFSJ-MG) Uma escada com x metros de comprimento forma um ângulo de 30° com horizontal, quando encostada ao edifício de um dos lados da rua, e um ângulo de 45° se

ficar encostada ao prédio do outro lado da rua, apoiada no mesmo ponto do chão. Sabemos que a distância entre os prédios é igual a $(5\sqrt{3}+5\sqrt{2})$ metros de largura, assinale a alternativa que contém a altura da escada, em metros.

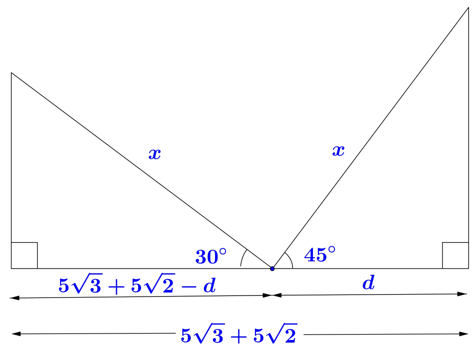
(a) $5\sqrt{2}$

(b) 5

(c) $10\sqrt{3}$

(d) 10

Figura 5



$$\cos 45^\circ = \frac{d}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{d}{x} \Rightarrow d = \frac{x\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{5\sqrt{3}+5\sqrt{2}-d}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}+5\sqrt{2}-d}{x}$$

$$x\sqrt{3} = 10\sqrt{3}+10\sqrt{2}-2d$$

$$x\sqrt{3} = 10\sqrt{3}+10\sqrt{2}-2\cdot\frac{x\sqrt{2}}{2}$$

$$x\sqrt{3}+x\sqrt{2} = 10\sqrt{3}+10\sqrt{2}$$

$$x(\sqrt{3}+\sqrt{2}) = 10(\sqrt{3}+\sqrt{2})$$

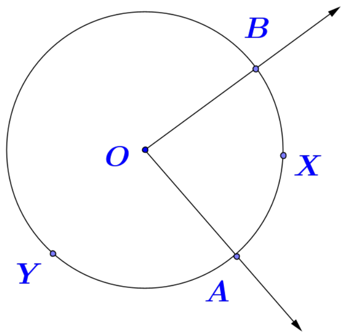
$$x = 10m.$$

2.2 ARCOS DE CIRCUNFERÊNCIA

Dois pontos A e B de uma circunferência de centro O, com o ângulo central $A\hat{C}$ a dividem em duas partes, que chama de arcos de circunferência.

Sejam X e Y dois pontos distintos que pertencem exclusivamente a casa uma dessas partes (conforme a Figura 6), daí temos

Figura 6



Um arco de circunferência $\widehat{AXB}$ e um arco de circunferência $\widehat{AYB}$, onde A e B são as extremidades do arco.
DA geometria temos que a medida angular do ano $\widehat{AB}$ corresponde a medida do ângulo central $A\widehat{O}B$.

Com relação aos pontos A e B consideraremos:

- Caso sejam extremidades de um diâmetro, cada um dos arcos é chamado de semicircunferência.
- Caso sejam coincidentes, determinam dois arcos. Um deles é o arco nulo, o outro é o arco de uma volta.

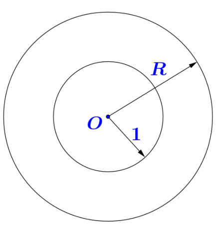
OBSERVAÇÃO: caso não haja dúvida em relação ao arco supracitado, usaremos apenas $\widehat{AB}$ no lugar de $\widehat{AXB}$ ou $\widehat{AYB}$.

Segundo Manfredo em seu texto *Trigonometria e Números Complexos* (Pg. 31) ele escreve: "o comprimento de um segmento está bem definido nos livros de geometria. Porém, o comprimento de uma curva não tem definição fácil. Ajustar sobre uma curva um arame e depois esticá-lo dá uma boa noção intuitiva do que seja o comprimento dessa curva, mas naturalmente não serve como definição."

De fato toda circunferência tem um comprimento real C. Vamos assumir que o número π é o comprimento de uma semicircunferência de raio 1.
Por conseguinte, na circunferência de raio 1, o comprimento $c = 2\pi$.

Da geometria, temos que duas circunferência quaisquer são sempre semelhantes entre si. Com isso se uma circunferência tem raio 1 seu comprimento é igual a 2π quanto mede o comprimento de uma circunferência de raio R?

Figura 7



$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{R}{1} \Rightarrow \frac{C_2}{2\pi} = \frac{R}{1} \Rightarrow C_2 = 2\pi R \quad (11)$$

Portanto numa circunferência de raio R, seu comprimento C, é dado por $C = 2\pi R$.

Observamos com isso que o número π é a razão entre o comprimento de qualquer circunferência e o seu diâmetro.

$$\frac{C}{2R} = \pi \simeq 3,14159265...$$

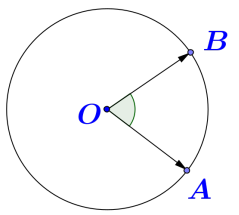
Medidas de arcos

Embora existam diversas maneiras para se medir uma arco, uma vez que depende da unidade que se adota, limitaremos as unidades de medidas de arcos e ângulos a apenas duas:

Medida e comprimento de arco

Medida angular de um arco corresponde a região do ângulo central que o arco está subtendido.

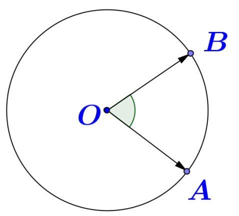
Figura 8



$m(\mathrm{A\widehat{O}B}) = 80°$

temos que o arco $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ mede 80°.

Medida linear de um arco corresponde ao seu comprimento. O segmento de reta obtido retificando um arco de circunferência tem medida igual ao seu comprimento.



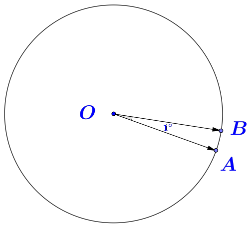
Comprimento do arco $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$.

Unidades de medidas de arcos e ângulos

Adotamos como medida de arco e ângulo apenas duas:

O grau (símbolo °) por se tratar de uma unidade de medida milenar e padrão na geometria, o radiano, por ser a unidade padrão na trigonometria, como veremos.

Ao dividir uma circunferência em 360 partes iguais. cada arco unitário igual a $\frac{1}{360}$ dela,

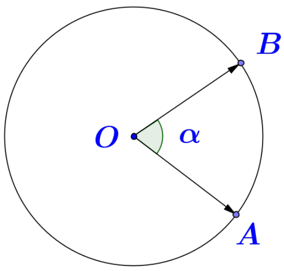


$$m(\overset{\frown}{AB}) = \frac{1}{360}$$

do comprimento da circunferência.

Radiano (Símbolo rad)

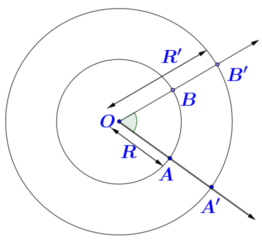
Quando o comprimento de um arco determinado pelo ângulo central é igual ao raio de uma mesma circunferência, a medida angular desse arco denominamos de 1 radiano.



Comprimento do arco $\overset{\frown}{AB} = Raio$

$\alpha = 1rad$

Sabemos que arcos de circunferência subtendidos pelo mesmo ângulo central são sempre semelhantes a razão entre os raios é a razão de semelhança.



$$\frac{\overset{\frown}{A'B'}}{R'} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{R}$$

Decorre que dado o ângulo central, a razão entre o comprimento do arco determinado em radianos, temos que:

$$\alpha = \frac{l}{R} rad \Rightarrow l = \alpha R \tag{12}$$

Ora o comprimento de uma semicircunferência é dado por πR (que é um arco de 180°). Segue que:

$$180^\circ = \frac{\pi R}{R} \Rightarrow 180^\circ = \pi rad \tag{13}$$

ou seja, Agora sendo o ângulo central de medida α, em graus, e o comprimento do arco determinado (l), temos a seguinte proposição:

$$\frac{2\pi R}{360^\circ} = \frac{l}{\alpha} \Rightarrow l = \frac{\alpha 2\pi R}{360^\circ} \tag{14}$$

Exemplos:

1. Converta cada medida de graus para radianos:

   (a) $60°$
   $\frac{\pi}{x} = \frac{180°}{60°} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}rad$

   (b) $150°$
   $\frac{\pi}{x} = \frac{180°}{150°} \Rightarrow 18x = 15\pi \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6}rad$

   (c) $330°$
   $\frac{\pi}{x} = \frac{180°}{330°} \Rightarrow x = \frac{11\pi}{6}rad$

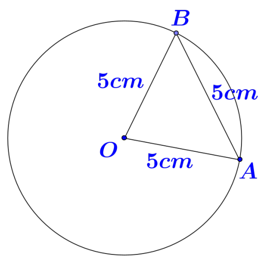
2. Converta cada medida de radianos para graus:

   (a) $\frac{\pi}{9}rad$
   Basta substituir π_{rad} por $180°$, ou seja,
   $\frac{\pi}{9} = \frac{180°}{9} = 20°$

   (b) $\frac{3\pi}{4}rad$
   De igual modo substituindo π_{rad} por $180°$, temos que:
   $\frac{3}{4}180° = 135°$

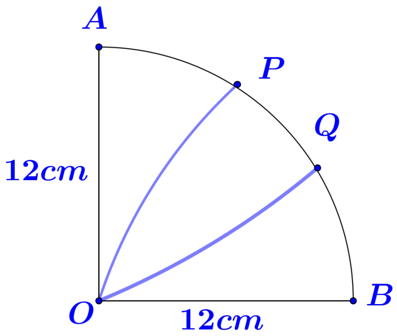
   (c) $\frac{5\pi}{3}rad$
   Fazendo a substituição π_{rad} por $180°$, temos:
   $\frac{5}{3}180° = 300°$

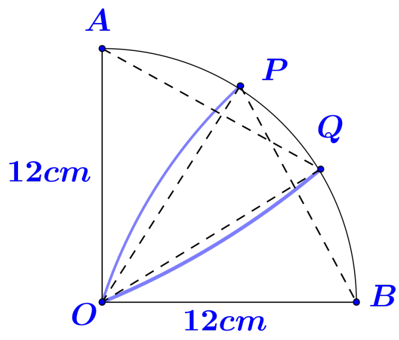
3. Sobre uma circunferência de raio $5cm$, marca-se um arco $\overset{\frown}{AB}$ tal que a corda $\overline{AB}$ mede $5cm$. Encontre a medida do arco em radianos.



   $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{AB} = 5cm$
   Com isso o ΔAOB é equilátero. Logo a medida do ângulo central que subtende o arco $\overset{\frown}{AB}$ mede $60°$.
   Agora fazendo a conversão para radianos, temos que $60° = \frac{\pi}{3}rad$. Portanto a medida do arco $\overset{\frown}{AB}$ é de $\frac{\pi}{3}rad$.

4. Calcule o perímetro da região pintada, sabendo que A e B são os centros dos arcos $\overset{\frown}{OQ}$ e $\overset{\frown}{OP}$, respectivamente, e o ponto O é o centro do arco $\overset{\frown}{AB}$.

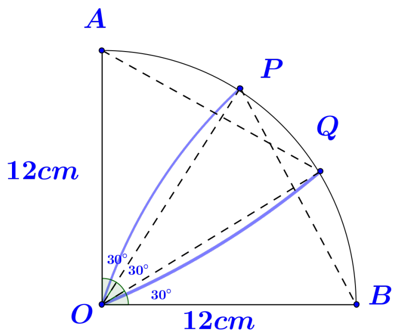




Inicialmente temos que $\overline{OB} = \overline{OQ} = \overline{OP} = \overline{OA} = raio$ do arco $\overset{\frown}{\mathrm{AB}} = 12cm$. Temos também que $\overline{OB} = \overline{BP} = raio$ do arco $\overset{\frown}{\mathrm{OP}} = 12cm$ e que $\overline{OA} = \overline{AQ} = raio$ do arco $\overset{\frown}{\mathrm{OQ}} = 12cm$. Com isso os triângulos ΔOBP e ΔOQ, são ambos triângulos equiláteros.

Do triângulo equilátero ΔOBP, temos que $O\hat{B}P = B\hat{P}O = P\hat{O}B = 60°$. Ora $A\hat{O}P$ é o complemento de $P\hat{O}B$ e mede $30°$.

Do triângulo equilátero ΔOQA, temos que $O\hat{Q}A = Q\hat{A}O = A\hat{O}Q = 60°$. Ora se $A\hat{O}Q = 60°$ e $A\hat{O}P = 30°$, então $P\hat{O}Q = 30°$. De maneira análoga, se $P\hat{O}B = 60°$ e $P\hat{O}Q = 30°$, então $B\hat{O}Q = 30°$.



O perímetro da região pintada é calculada somando o comprimento dos arcos

$$l_{\overset{\frown}{\mathrm{OQ}}} + l_{\overset{\frown}{\mathrm{PQ}}} + l_{\overset{\frown}{\mathrm{OP}}}$$

. Convertendo para radianos, temos:

$$30° = \frac{\pi}{6} rad \text{ e } 60° = \frac{\pi}{3} rad.$$

Com isso:

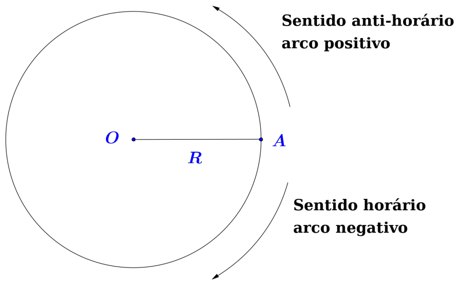
$$l_{\overset{\frown}{\mathrm{OQ}}} = \alpha r = \frac{\pi}{3} 12 = 4\pi cm$$
$$l_{\overset{\frown}{\mathrm{PQ}}} = \alpha r = \frac{\pi}{6} 12 = 2\pi cm$$
$$l_{\overset{\frown}{\mathrm{OP}}} = \alpha r = \frac{\pi}{3} 12 = 4\pi cm$$

Portanto o perímetro da região pintada mede $10\pi cm$.

2.3 CIRCUNFERÊNCIA ORIENTADA

Uma circunferência de centro O e raio R pode ser percorrida em dois sentidos. Quando um deles é escolhido e denominado positivo, a partir de um ponto A, origem dos arcos e o outro, é escolhido e denominado negativo, no sentido contrário, dizemos que a circunferência está orientada. Observe uma circunferência orientada com origem dos arcos no ponto A conforme Figura 7.

Figura 7



2.4 CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA OU CICLO TRIGONOMÉTRICO

Tomemos sobre um plano, um sistema cartesiano ortogonal. Agora consideremos a circunferência orientada de centro O e raio unitário (raio igual a 1). Notamos que o comprimento dessa circunferência é 2π, pois $r = 1$.

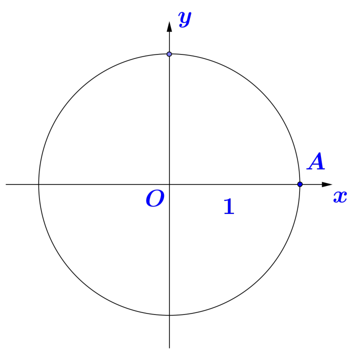


Figura 8

Essa circunferência orientada denominada de circunferência trigonométrica ou ciclo trigonométrico.

Na sequência deste trabalho utilizaremos o radiano como unidade de medida de ângulo e arco.

Na Figura 9, chamaremos o ângulo $A\hat{O}P$ de α radianos, podendo assumir valores positivos quando o arco for percorrido no sentido anti-horário e valores negativos em caso contrário.

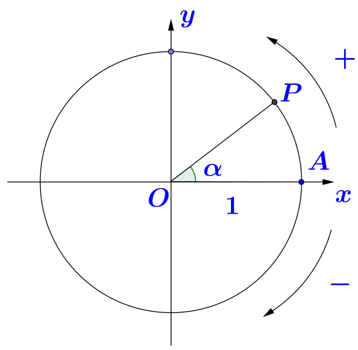
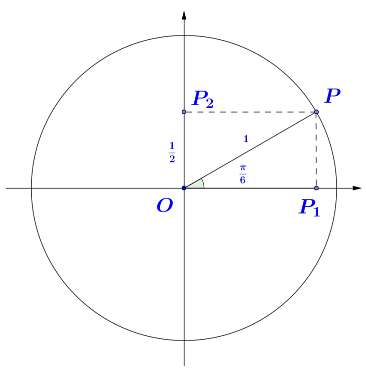


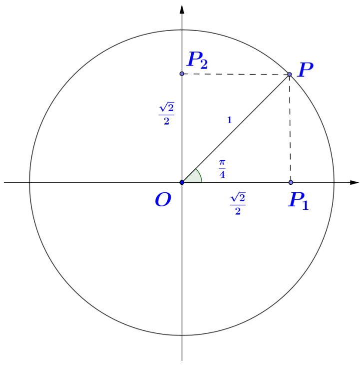
Figura 9

O sistema cartesiano ortogonal divide o cilo trigonométrico em quatro partes, que identificamos por quadrantes. Dado um número real α, temos que:
Se $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, então α pertence ao primeiro quadrante;
Se $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, então α pertence ao segundo quadrante;
Se $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$, então α pertence ao terceiro quadrante;
Se $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, então α pertence ao quarto quadrante;
Caso α seja um múltiplo de $\dfrac{\pi}{2}$, logo dizemos que α pertence a algum dos eixos.

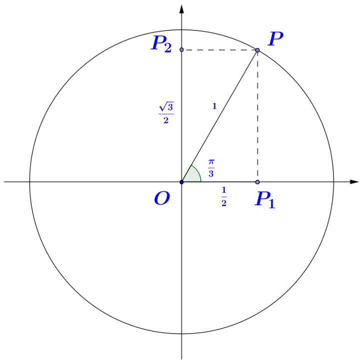
Estamos em perfeitas condições de definirmos o seno e cosseno de um arco dado em radianos, no ciclo trigonométrico, para isso, faremos inicialmente a análise tomando como base as razões trigonométricas no triângulo retângulo, sobretudo seno e cosseno, no ciclo trigonométrico.
Sem perda de generalidade, usaremos para o seno e cosseno de um ângulo α a notação $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$, respectivamente.



$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{PP_1}{1} \Rightarrow PP_1 = \frac{1}{2}$$
$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{OP_1}{1} \Rightarrow OP_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

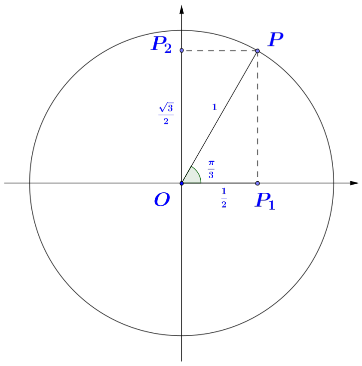


$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{PP_1}{1} \Rightarrow PP_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{OP_1}{1} \Rightarrow OP_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{PP_1}{1} \Rightarrow PP_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{OP_1}{1} \Rightarrow OP_1 = \frac{1}{2}$$

Agora sim, seja um ângulo α, em radianos, e $\widehat{\mathrm{AP}}$ o arco que o subtende conforme a Figura temos que



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{PP_1}{1} \Rightarrow PP_1 = \operatorname{sen}\alpha$$

Observe que $\quad PP_1 = OP_2$, logo

$$\cos\alpha = \frac{OP_1}{1} \Rightarrow OP_1 = \cos\alpha$$

Portanto definimos o seno do ângulo α sendo a ordenada do ponto P e o cosseno do ângulo α sendo a abscissa do ponto P.

Percebemos com isso que os sinais de seno e cosseno de α serão descritos da seguinte forma

- O $\operatorname{sen}\alpha$ será positivo, caso α pertença ao 1ª ou 2ª quadrante. Caso α pertença ao 3ª ou 4ª quadrante, ele será negativo.

- O $\cos\alpha$ será positivo, caso α pertença ao 1ª ou 4ª quadrante. Caso α pertença ao 2ª ou 3ª quadrante, ele será negativo.

É interessante notarmos que a maior ordenada de um ponto no ciclo trigonométrico é 1 enquanto que a menor é -1. A maior abscissa de um ponto neste é 1, e a menor é -1.

Com isso temos que:

$$-1 \leq \operatorname{sen} \alpha \leq 1$$
$$\text{e}$$
$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1$$

Em tempo observamos também que aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo OP_1P, retângulo em P_1, temos:

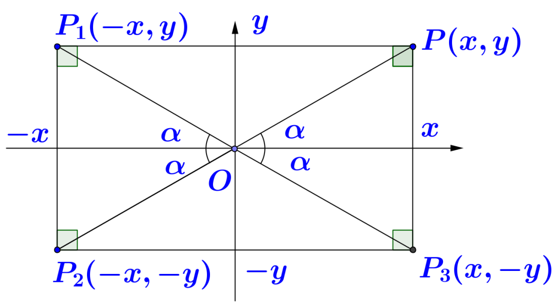
$$\overline{P_1P}^2 + \overline{OP}^2,$$

ou seja, $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ que chamamos de relação fundamental. Já havíamos mencionado nas razões trigonométricas no triângulo retângulo.

2.5 SIMETRIAS NO PLANO CARTESIANO

No plano cartesiano observamos três simetrias. Uma em relação ao eixo das abscissas, outra em relação ao eixo das ordenadas (vertical) e por fim, em relação à origem do cartesiano.

2.6 REDUÇÃO AO PRIMEIRO QUADRANTE

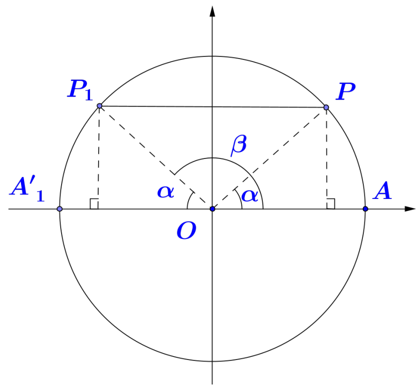


Usando a congruência de triângulos visto na geometria, notamos que:

- São simétricos em relação ao eixo das abscissas os pontos P e P_3; P_1 e P_2.
- São simétricos em relação ao eixo das ordenadas os potos P e P_1; P_2 e P_3.
- São simétricos em relação à origem do plano cartesiano os pontos P e P_2; P_1 e P_3.

Aplicando as simetrias no ciclo trigonométrico, ocorre o que chamamos de redução ao primeiro quadrante e são usados para encontrar valores trigonométricos de arcos externos ao primeiro quadrante. A seguir, veremos como procedemos nestas reduções:

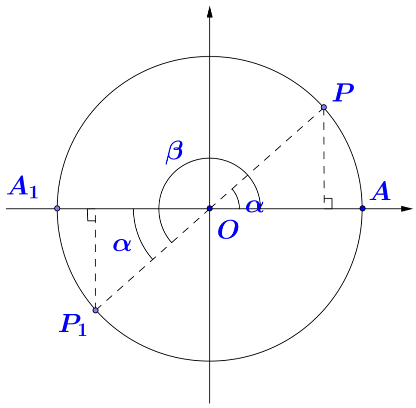
Redução do segundo quadrante ao primeiro quadrante.



Sabendo que P e P_1 são simétricos em relação ao eixo vertical, temos que $A\hat{O}P \equiv A_1\hat{O}P_1$. Logo α e β são suplementares, ou seja, $\alpha + \beta = \pi$. Segue que $\alpha = \pi - \beta$. Com isso:

$$\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}(\pi - \beta) = \operatorname{sen}\alpha$$
$$\cos\beta = -\cos(\pi - \beta) = -\cos\alpha$$

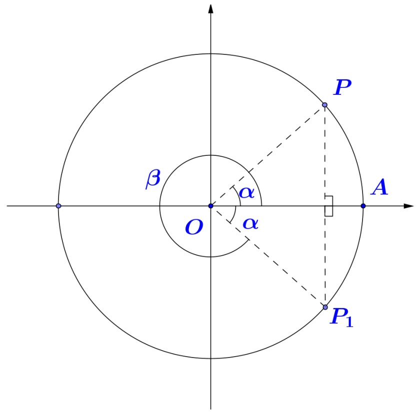
Redução do terceiro quadrante ao primeiro quadrante



Sabendo que P e P_1 são simétricos em relação a origem, temos que $A\hat{O}P \equiv A_1\hat{O}P$. Logo $\beta = \pi + \alpha$. Segue que $\alpha = \beta - \pi$. Com isso:

$$\operatorname{sen}\beta = -\operatorname{sen}(\beta - \pi) = -\operatorname{sen}\alpha$$
$$\cos\beta = -\cos(\beta - \pi) = -\cos\alpha$$

Redução do quarto quadrante ao primeiro quadrante

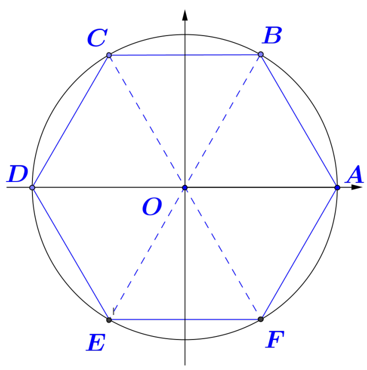


Sabendo que P e P_1 são simétricos em relação ao eixo horizontal, temos que $A\hat{O}P \equiv A_1\hat{O}P$.
Logo $\alpha + \beta = 2\pi$. Segue que $\alpha = 2\pi - \beta$. Com isso:

$$\operatorname{sen}\beta = -\operatorname{sen}(2\pi - \beta) = -\operatorname{sen}\alpha$$
$$\cos\beta = -\cos(2\pi - \beta) = \cos\alpha$$

Exemplos

1. Na Figura o hexágono regular $ABCDEF$ está inscrito na circunferência trigonométrica sabendo que os vértices do hexágono são imagens de números reais pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi[$ e que A é imagem do número real zero.



(a) Encontre esses números

$m(\widehat{AB}) = m(\widehat{BC}) = m(\widehat{CD}) = m(\widehat{DE}) = m(\widehat{EF}) = m(\widehat{FA}) = \dfrac{360°}{6} = 60° = \dfrac{\pi}{3} rad$

Daí temos que:

$A = 0$

$B = \dfrac{\pi}{3}$

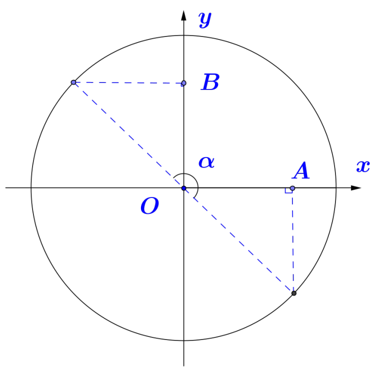
$C = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$
$D = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$
$E = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$
$F = \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

(b) Encontre o seno e o cosseno desses números

$\operatorname{sen} A = \operatorname{sen} 0 = 0$
$\operatorname{sen} B = \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\operatorname{sen} C = \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\operatorname{sen} D = \operatorname{sen} \pi = 0$
$\operatorname{sen} E = \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} = -\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\operatorname{sen} F = \operatorname{sen} \frac{5\pi}{3} = -\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos A = \cos 0 = 1$
$\cos B = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$
$\cos C = \cos \frac{2\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$
$\cos D = \cos \pi = -1$
$\cos E = \cos \frac{4\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$
$\cos F = \cos \frac{5\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

2. (UFRGS-RS) No ciclo trigonométrico da figura a seguir, tem-se $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. O valor de $\overline{OAOB}$ é:



Reduzindo $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ ao 1º quadrante encontramos $\frac{\pi}{3}$.

No 4º quadrante o arco correspondente é dado por $\frac{2\pi}{3} + \pi = \frac{5\pi}{3}$.

Observe que $\overline{OA} = \cos \frac{5\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

e $\overline{OB} = \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = \operatorname{sen} \frac{api}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Com isso $\overline{OA}.\overline{OB} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

(a) $\frac{1}{2}$

(b) $\frac{1}{4}$

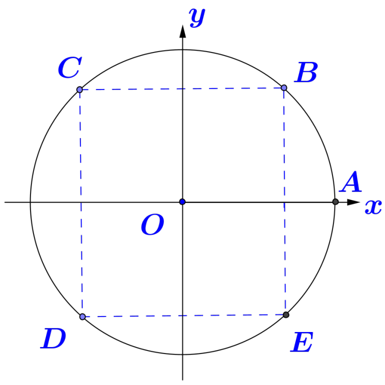
(c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(e) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

3. A figura *BCDE* é um retângulo inscrito em um círculo e os arcos $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{AD}$ e $\overset{\frown}{AE}$ foram medidas no sentido anti-horário. Se a medida do arco $\overset{\frown}{AC}$ é $\frac{2\pi}{3}$*rad*, então qual é o

valor da expressão dada por $\dfrac{\operatorname{sen}\overset{\frown}{AE}}{\cos\overset{\frown}{AD}}$?

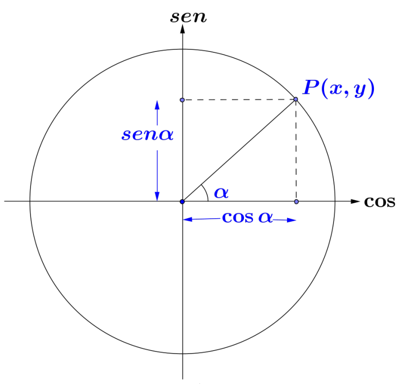


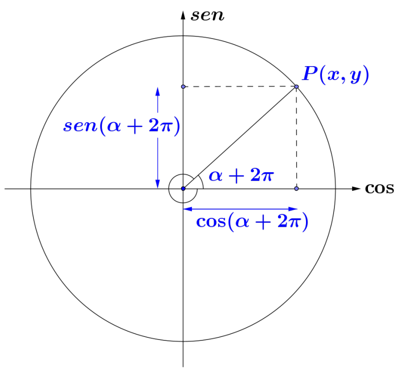
Reduzindo $\dfrac{2\pi}{3}rad$ ao 1º quadrante encontramos $\dfrac{\pi}{3}$.
No 3º e 4º quadrante os arcos correspondentes são dados por $\dfrac{4\pi}{3}rad$ e $\dfrac{5\pi}{3}rad$, respectivamente.
Assim, temos que:

$$\cos\overset{\frown}{AD} = \cos\frac{4\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$
$$\operatorname{sen}\overset{\frown}{AE} = \operatorname{sen}\frac{5\pi}{3} = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\text{Portanto } \frac{\operatorname{sen}\overset{\frown}{AE}}{\cos\overset{\frown}{AD}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{2}{1}\right) = \sqrt{3}$$

2.7 ARCOS CÔNGRUOS

É fato que seno e cosseno de um arco estão vinculados às coordenadas do ponto P que pertence ao ciclo trigonométrico. Expandindo esse conceito a outros arcos, temos que:





$\alpha = \alpha + 0.2\pi$ (1º volta)

$\alpha = \alpha + 1.2\pi$ (2º volta)

$\alpha = \alpha + 2.2\pi$ (3º volta)

$\vdots$

$\alpha = \alpha + k.2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (k-ésima volta)

k representa o número de voltas no ciclo trigonométrico.

Assim $P(x,y)$ tem coordenadas dadas por:

$(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha) = (\cos(\alpha + 2\pi), \operatorname{sen}(\alpha + 2\pi))$.

Com isso os arcos côngruos, são arcos (em radianos), que possuem a mesma origem e a mesma extremidade, e a diferença de duas medidas é um inteiro múltiplo de 2π . Admitindo que t e t_1 são arcos côngruos, ou seja, $t - t_1 = 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, temos que:

$$\operatorname{sen} t = \operatorname{sen} t_1 \text{ e } \cos t = \cos t_1,$$
ou seja,
$$\operatorname{sen}(t + 2k\pi) = \operatorname{sen} t \text{ e } \cos(t + 2k\pi) = \cos t, \forall \in \mathbb{Z}.$$

2.8 FUNÇÕES PERIÓDICAS

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita periódica quando existe um número $p \neq 0$ tal que $f(x + p) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
Se isto ocorre, então $f(x + kp) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $k \in \mathbb{Z}$. Com isso o menor $p > 0$, tal que $f(x + p) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, chama-se período da função f.
No dia a dia, é habitual nos deparamos com diversos fenômenos que ocorrem repetidas vezes após um dado intervalo de tempo, por exemplo:

- os dias da semana se repetem de 7 em 7 dias;
- os meses do ano se repetem de 12 em 12 meses;
- o ciclo das marés;
- as fases da lua e etc;

Exemplos

Trabalhemos nos exemplos excepcionalmente com alguns arcos de medidas em graus:Qual é o arco da primeira volta côngruo do arco de:

1. • $800°$

Basta dividir por $360°$ pois é o equivalente a uma volta completa.
$\dfrac{800°}{360°} = 80° + 2.360°$, ou seja, $800°$ é côngruo ao arco de $80°$.

- $2340°$

  $2340° = 180° + 6.360°$, ou seja $2340°$ é côngruo ao arco de $180°$.

- $\dfrac{17\pi}{3} rad$

  O arco da primeira volta é côngruo a $\dfrac{17\pi}{3} rad$ pode ser obtido a partir de uma soma de parcelas em que uma delas é um número divisível por 3 e múltiplo de 2π, e a outras seja um arco da primeira volta.

  $\dfrac{17\pi}{3} = \dfrac{15\pi}{3} + \dfrac{2\pi}{3} = 5\pi + \dfrac{2\pi}{3}$

  Não interessa pois 5π não é múltiplo de 2.

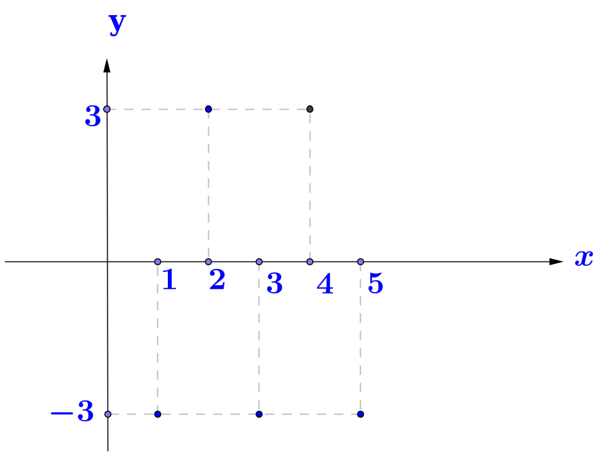
  $\dfrac{17\pi}{3} = \dfrac{12\pi}{3} + \dfrac{5\pi}{3} = 4\pi + \dfrac{5\pi}{3}$.

  Observe que 4π é um múltiplo de 2π e que $\dfrac{5\pi}{3}$ pertence a primeira volta. Com isso $\dfrac{17\pi}{3} rad$ é côngruo ao arco de $\dfrac{5\pi}{3} rad$.

2. Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = 3(-1)^x$. Represente graficamente $f(x)$.

   Veremos numa tabela o que ocorre com f quando x varia nos naturais.

x	$f(x)$
0	3
1	-3
2	3
3	-3
4	3
5	-3
$\vdots$	$\vdots$



Denotamos que :

Se x é par, então $f(x) = 3$.

Se x é ímpar, então $f(x) = -3$.

Para que uma função $f(x)$ seja periódica logo $f(x) = f(x+p)$. Em particular temos:

i) $f(0) = f(2) = f(4) = \dots$

(ii) $f(1) = f(3) = f(5) = \dots$

Em ambos os casos, quando x varia por duas unidades, há uma repetição em $f(x)$

$f(x) = f(x+2) = f(x+4) = \dots$

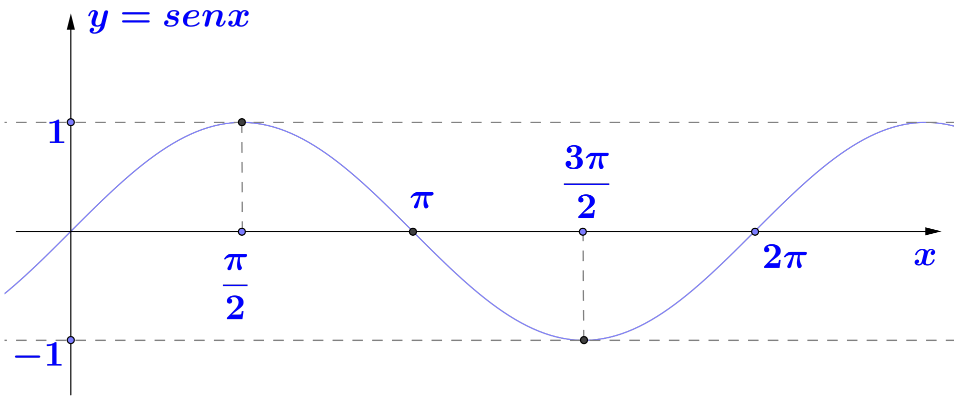
O menor valor de p, $p > 0$, em que $f(x) = f(x+p)$ é 2. Com isso constatamos que essa é uma função periódica de período igual a 2.

2.9 FUNÇÃO SENO

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada número real x, o número real $y = f(x) = \operatorname{sen} x$, é denominada função seno.

Representação gráfica da função seno

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \operatorname{sen} x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0



A curva do gráfico é chamada de senóide, que indica como varia a função $f(x) = \operatorname{sen} x$. Considerações acerca da função seno:

- Domínio da função: $D(f) = \mathbb{R}$
- Contra domínio $CD(f) = \mathbb{R}$
- Por definição $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$, logo a função $y = \operatorname{sen} x$ varia de -1 a 1, ou seja, sua imagem (Im), é dada por $Im = [-1, 1]$.
  Assim, na função $y = \operatorname{sen} x$, o valor máximo é 1 e o valor mínimo é -1.
- A linha média de uma função trigonométrica é uma reta horizontal que passa rigorosamente no meio, entre o valor máximo e o valor mínimo do gráfico dessa função. A linha média da função seno é o eixo das abscissas.

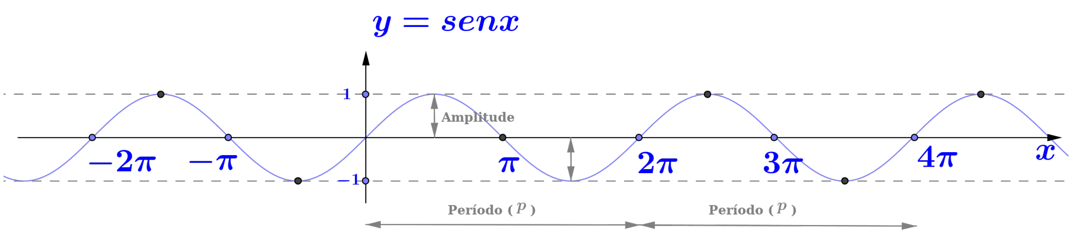
- A amplitude de uma função trigonométrica no gráfico é a medida da distância, em módulo, entre a linha média e o valor máximo dessa função ou entre a linha média e o valor mínimo dessa função.
  Com isso a amplitude da função seno é 1.

- Uma função é periódica de período p quando $f(x+p) = f(x)$, em que p é o menor número real maior que zero.
  Para que $y = \operatorname{sen} x$ seja um função periódica, temos que:

$$\operatorname{sen}(x+p) = \operatorname{sen} x,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

  Pela definição de arcos côngruos, $\operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Portanto a função seno é periódica de período $p = 2\pi$.
  No gráfico, o período representa a menor distância em que a função seno realiza um ciclo completo.

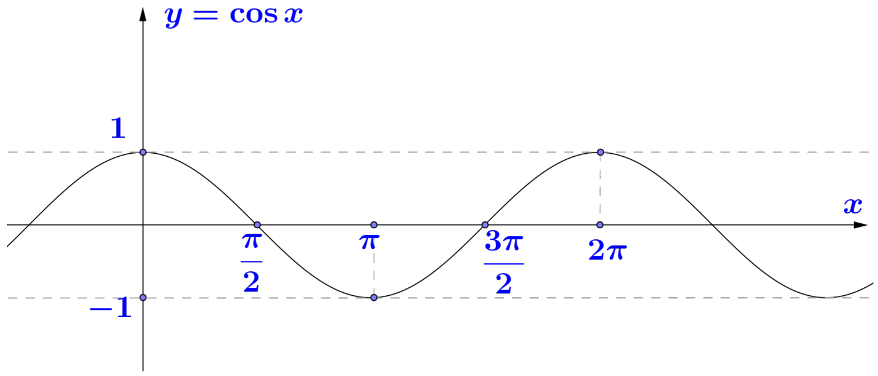
- A função seno é uma função ímpar pois $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
  Haja visto que a função seno é definida no conjunto dos números reais, podemos estender a curva que representa o gráfico de $y = \operatorname{sen} x$ para $x < 0$ e $x > 2\pi$.



2.10 FUNÇÃO COSSENO

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada número real x, o número real $y = f(x) = \cos x$, é denominada função cosseno. Com base na tabela seguinte podemos marcar alguns pontos importantes no gráfico:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

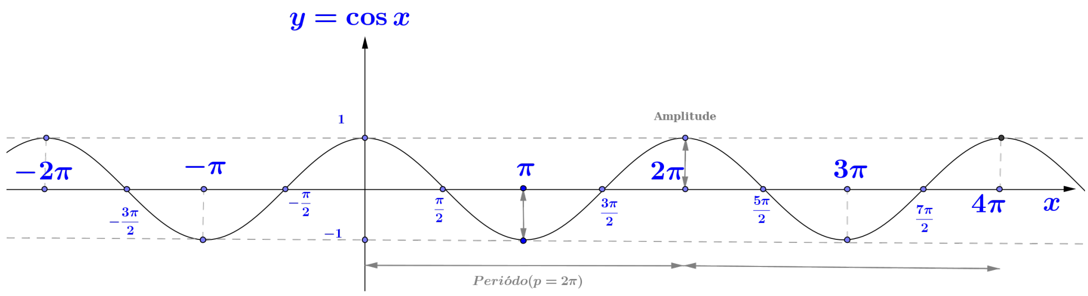


A curva do gráfico é chamada de cossenoide, que indica como varia a função $f(x) = \cos x$. Considerações acerca da função cosseno:

- Domínio da função $D(f) = \mathbb{R}$;
- Contra domínio da função $CD(f) = \mathbb{R}$
- Por definição $-1 \leq \cos x \leq 1$, logo a função $y = cos$ varia de -1 a 1, ou seja, sua imagem (Im) é dada por $Im = [-1, 1]$.
  Assim, na função $y = \cos x$, o valor máximo é 1 e o valor mínimo é -1.
- A linha média de uma função é uma reta horizontal que passa rigorosamente no meio, entre o valor máximo e o valor mínimo do gráfico dessa função.
  A linha média da função cosseno é o eixo das abscissas.
- A amplitude de uma função trigonométrica no gráfico é a medida da distância em módulo, entre a linha média e o valor máximo dessa função ou entre a linha média e o valor mínimo dessa função.
  Com isso a amplitude da função cosseno é -1.
- Uma função é periódica de período p, quando $f(x+p) = f(x)$, em que p é menor número real maior que zero.
  Para que $y = \cos x$ seja uma função periódica, temos que: $\cos(x+p) = cosx$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
  Pela definição de arcos côngruos, $\cos(x+2\pi) = \cos(x+4\pi) = \cdots = \cos(x+k2\pi) = cos(x)$ com $k \in \mathbb{Z}$. Isso denota que $p = k2\pi$. Ora como p é o menor número real positivo, temos que $p = 2\pi$, quando k=1. Portanto a função cosseno é periódica de período $p = 2\pi$.
  No gráfico, o período representa a menos distância em que a função cosseno realiza um ciclo completo.

- A função cosseno é uma função par, isto é, $\cos(-x) = cosx$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

  Haja vista que a função cosseno é definida no conjunto dos números reais, podemos estender a curva que representa o gráfico de $y = \cos x$ para $x < 0$ e $x > 2\pi$.



3 ANÁLISE DAS CONSTANTES REAIS A, B, M E N NAS FUNÇÕES SENOIDAIS

Faremos um estudo mais abrangente nos gráficos de funções trigonométricas que envolvem seno e cosseno, tais como $f(x) = ax + b\,\text{sen}(mx+n)$ e $g(x) = ax + b\cos(mx+n)$, que chamaremos de funções senoidais, onde a, b, m e n são suas constantes reais. Antes porém, vamos encontrara a imagem e o período da função $f(x) = a + b\,\text{sen}(mx+n)$.

Para encontrar a imagem de $f(x)$, faremos $mx+n = t$. Observe que quando x percorre $\mathbb{R}$, t percorre $\mathbb{R}$, haja visto que a função afim $t = mx+n$ é sobrejetiva. Com isso, $\text{sen}\,t$ percorre o intervalo $[-1,1]$, logo $b\,\text{sen}\,t$ percorre o intervalo $[-b,b]$ e $f(x) = a + b\,\text{sen}\,t$, percorre o intervalo $[a-b, a+b]$. Portanto a imagem de $f(x) = a + b\,\text{sen}(mx+n)$ é o intervalo $[a-b, a+b]$.

Para encontrar o período de $f(x)$, faremos $t = mx+n$. Para que $\text{sen}\,t$ complete um período, é necessário que t varie de 0 a 2π, ou seja,

$$0 \leq t \leq 2\pi \Longleftrightarrow 0 \leq mx+n \leq 2\pi \Longleftrightarrow -n \leq mx \leq -n+2\pi.$$

Daí temos que:

Se $m > 0$, então $-\dfrac{n}{m} \leq x \leq \dfrac{-n+2\pi}{m}$, isto é,

$$x \in \left[-\frac{n}{m}, \frac{-n+2\pi}{m}\right],$$

e o período p é dado por:

$$\frac{-n+2\pi}{m} - \left(-\frac{n}{m}\right) = \frac{-n+2\pi}{m} + \left(\frac{n}{m}\right) = \frac{2\pi}{m},$$

logo $p > 0$.

Se $m < 0$, então $\dfrac{n}{m} \geq x \geq \left(-\dfrac{n+2\pi}{m}\right)$, isto é, $x \in \left[-\dfrac{n+2\pi}{m}, -\dfrac{n}{m}\right]$, e o período p é dado por:

$$-\frac{n}{m} - \left(-\frac{n+2\pi}{m}\right) = -\frac{2\pi}{m},$$

logo $p > 0$.

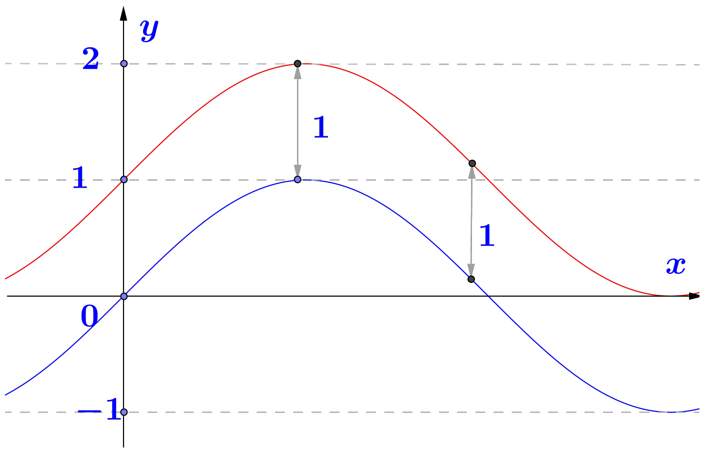
Portanto o período p da função $f(x) = a + b\,\text{sen}(mx+n)$ é $p = \dfrac{2\pi}{|m|}$.

Agora sim estudaremos como alguns exemplos o que acontece com o gráfico da função senoidal $h(x) = a + b\,\text{sen}(mx + n)$, comparando ao gráfico de $f(x) = \text{sen}\,x$. Analisaremos o o papel das constantes reais a, b, m e n, e tendo feito a análise comentaremos acerca da função $I(x) = a + b\cos(mx + n)$.

3.1 O QUE A CONSTANTE *A* PRODUZ NO GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO SENOIDAL?

O que a constante a produz no gráfico de uma função senoidal? Para responder essa pergunta, vejamos algumas situações:

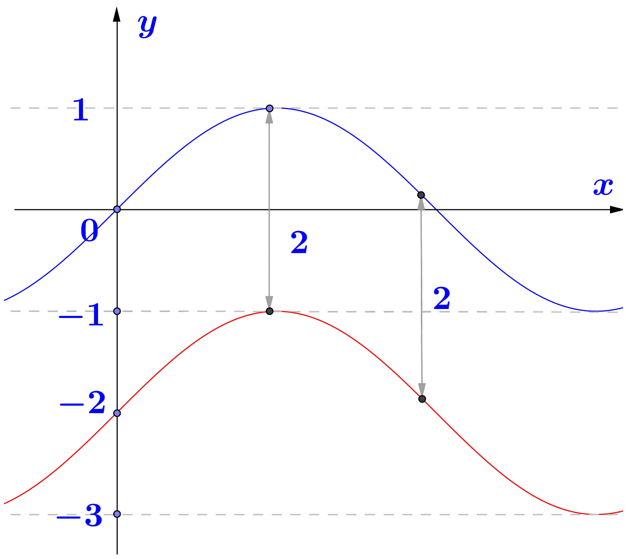
sendo $a = 1$, na função $i(x) = 1 + \text{sen}\,x$, teremos:



	Domínio	Imagem	Período	Amplitude
$f(x) = \text{sen}\,x$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	$p = 2\pi$	1
$i(x) = 1 + \text{sen}\,x$	$\mathbb{R}$	$[0, 2]$	$p = 2\pi$	1

Quando $a = 1$, o gráfico de $f(x) = \text{sen}\,x$ se desloca uma unidade para cima, ou seja, ocorre uma translação (deslocamento) vertical.

Sendo $a = -2$, na função $l(x) = -2 + \text{sen}\,x$, temos:

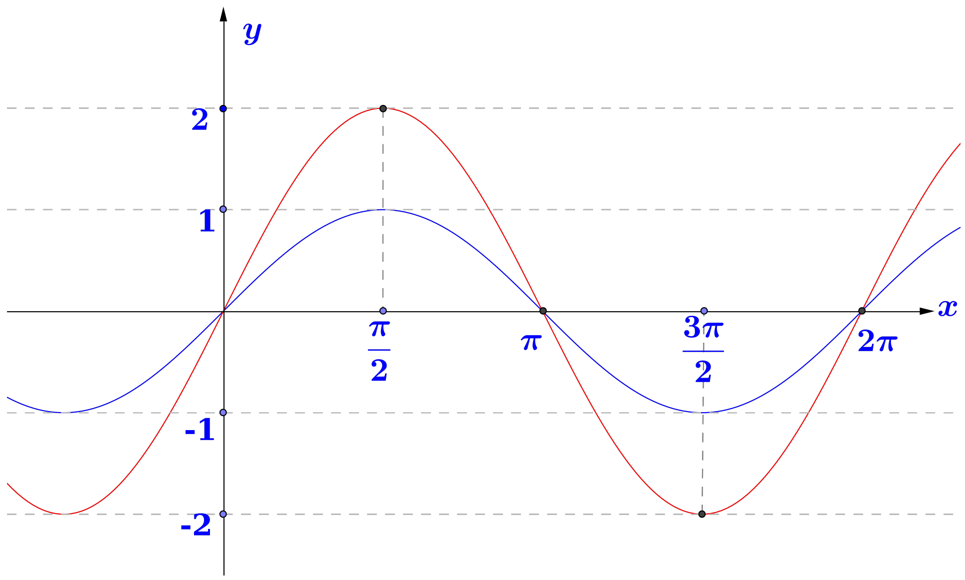


	Domínio	Imagem	Período	Amplitude
$f(x) = \operatorname{sen} x$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	$p = 2\pi$	1
$i(x) = -2 + \operatorname{sen} x$	$\mathbb{R}$	$[-3, -1]$	$p = 2\pi$	1

Quando $a = 2$, o gráfico de $f(x) = \operatorname{sen} x$ se desloca duas unidades para baixo resultando em $l(x) = -2 + \operatorname{sen} x$, ou seja, ocorre uma translação (deslocamento) vertical. Portanto a constante a vai produzir no gráfico de uma função senoidal uma translação (deslocamento) vertical. Se $a > 0$, para cima e se $a < 0$ para baixo.
Observando que o valor de a é resultado do encontro da linha média da função com o eixo das ordenadas, temos que a é média aritmética entre o valor máximo e o valor mínimo dessa função, ou seja, $a = \dfrac{valormximo + valormnimo}{2}$.

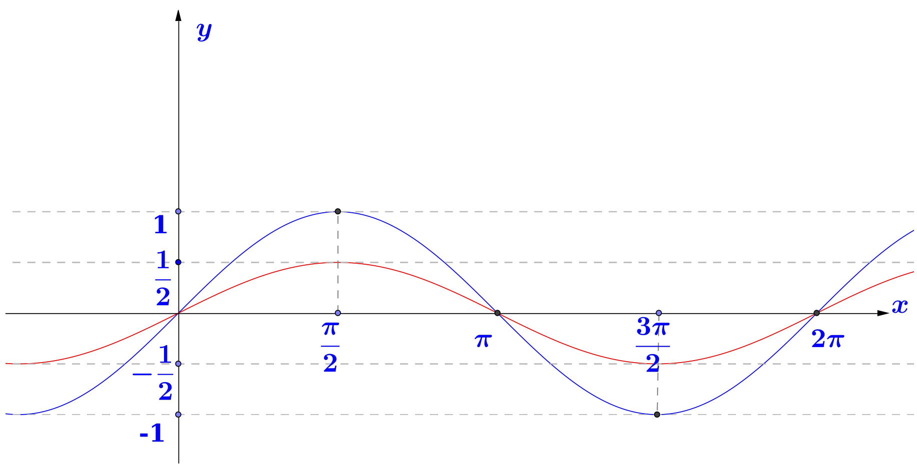
3.2 O QUE A CONSTANTE B PRODUZ NO GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO SENOIDAL?

O que a constante b produz no gráfico de uma função senoidal ?
Para responder essa pergunta, vejamos algumas situações:
Sendo $b = 2$ na função $q(x) = 2 \operatorname{sen} x$, teremos:



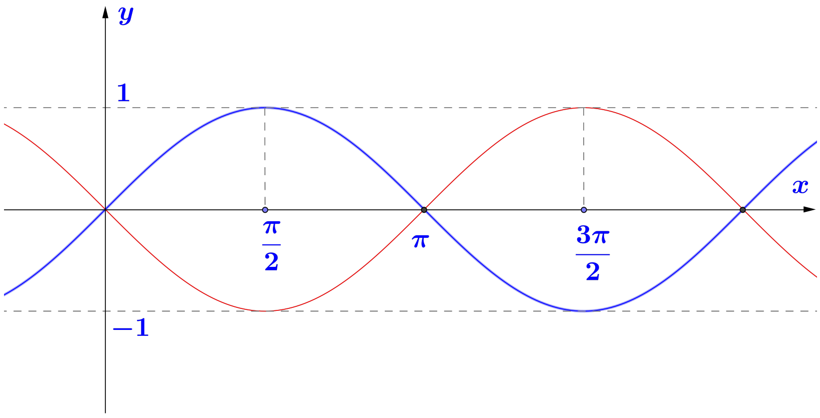
	Domínio	Imagem	Período	Amplitude
$f(x) = \operatorname{sen} x$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	$p = 2\pi$	1
$i(x) = 2\operatorname{sen} x$	$\mathbb{R}$	$[-2,-2]$	$p = 2\pi$	2

O gráfico de $f(x) = sex$, quando $b = 2$ alterou a sua amplitude, resultando em $q(x) = 2\operatorname{sen} x$. Sendo $b = \dfrac{1}{2}$, na função $r(x) = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} x$, teremos:



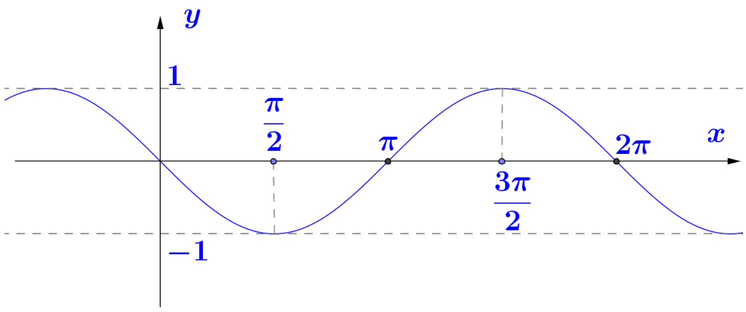
O gráfico de $f(x) = \operatorname{sen} x$, quando $b = \dfrac{1}{2}$ alterou a amplitude, resultando em $r(x) = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} x$. Portanto a constante b vai produzir no gráfico de uma função senoidal uma alteração na amplitude. De modo que o valor de $|b|$ pode ser encontrado como a metade da diferença entre o valor máximo e o valor mínimo da função, ou seja, $|b| = \dfrac{\text{Valor máximo-valor mínimo}}{2}$ (amplitude). Vale observar também que os sinal de b não altera a amplitude. Após o estudo feito com a constante no tópico 4, faremos novamente um comentário acerca da constante b, onde complementaremos a análise da constante b observando situações cuja interpretação da função senoidal depende também da constante n.

Completando a análise acerca do que acontece com a senóide quando b assume valores negativos e n igual a zero ou quando b assume valores positivos e n diferente de zero.
Sendo $b = -1$, na função $w(x) = -\sin x$, teremos:



	Domínio	Imagem	Período	Amplitude
$f(x) = \text{sen}\, x$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	$p = 2\pi$	1
$i(x) = -\text{sen}\, x$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	$p = 2\pi$	1

Quando $b = -1$, em particular, o gráfico de $f(x) = \text{sen}\, x$ foi refletido em relação a linha média (eixo das abscissas) resultando em $w(x) = -\text{sen}\, x$.
Sendo $b = +1$ e $n = \pi$, na função $w_1(x) = \text{sen}(x + \pi)$

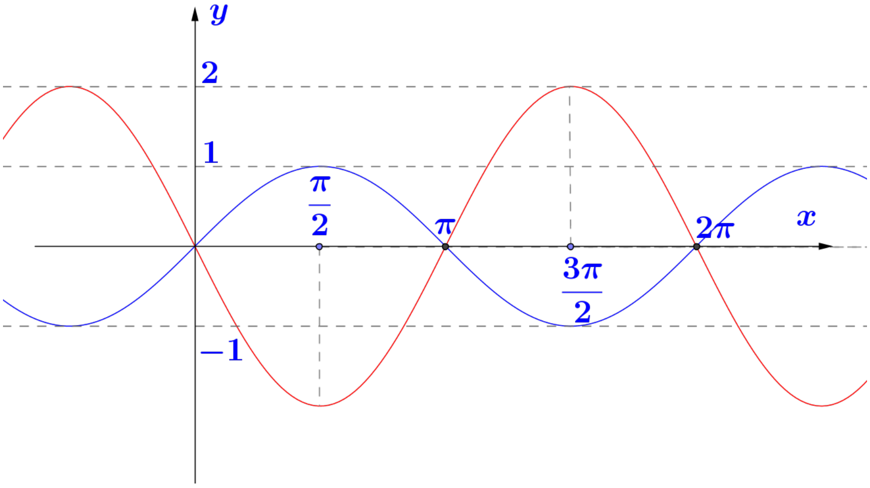


	Domínio	Imagem	Período	Amplitude
$f(x) = \text{sen}\, x$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	$p = 2\pi$	1
$i(x) = \text{sen}(x + \pi)$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	$p = 2\pi$	1

Observe que quando $b = 1$ e $n = \pi$ o gráfico da função $w_1(x) = \operatorname{sen}(x+\pi)$ coincide com o gráfico da função $w(x) = -\operatorname{sen} x$.

Com isso percebemos que o gráfico de $f(x) = \operatorname{sen} x$ sofre um deslocamento horizontal resultando em $w_1(x) = \operatorname{sen}(x+\pi)$.

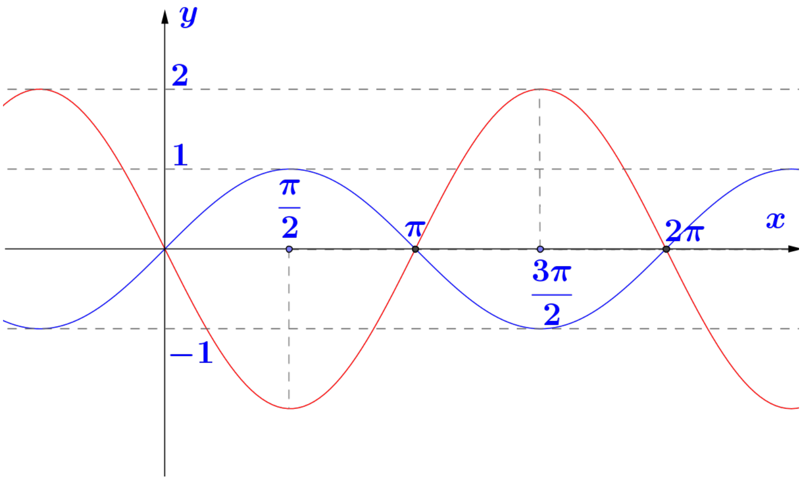
Sendo $b = -2$ na função $z(x) = -2 \operatorname{sen} x$, temos:



	Domínio	Imagem	Período	Amplitude
$f(x) = \operatorname{sen} x$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	$p = 2\pi$	1
$i(x) = -2 \operatorname{sen} x$	$\mathbb{R}$	$[-2,2]$	$p = 2\pi$	2

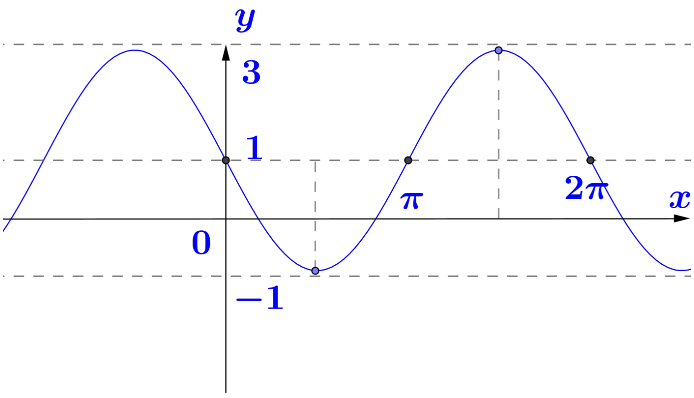
Quando $b = -2$, o gráfico de $f(x) = \operatorname{sen} x$ alterou a amplitude e simultaneamente foi refletido em relação a linha média (eixo das abscissas), resultando em $z(x) = -2 \operatorname{sen} x$.

Ainda sendo $b = +2$ e $n = \pi$ na função $z_1(x) = +2 \operatorname{sen}(x+\pi)$, teremos:



	Domínio	Imagem	Período	Amplitude
$f(x) = \operatorname{sen} x$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	$p = 2\pi$	1
$i(x) = 2\operatorname{sen}(x+\pi)$	$\mathbb{R}$	$[-2,2]$	$p = 2\pi$	2

Quando $b = 2$ e $n = \pi$, o gráfico de $f(x) = \operatorname{sen} x$ alterou a amplitude e simultaneamente foi refletido em relação a linha média (eixo das abscissas), resultando em $\mathbb{Z}_1(x) = 2\operatorname{sen}(x+\pi)$.
Podemos concluir que quando $b < 0$ e $n = 0$ o gráfico da função senoidal sofre uma reflexão em relação a linha média.
Quando $b > 0$ e $n \neq 0$ o gráfico da função senoidal sofre um deslocamento horizontal.
Veja mais um exemplo:(UFRGS-RS) Se $f(x) = a + b\operatorname{sen} x$ tem como gráfico:



então

1. $a = -2$ e $b = 1$
2. $a = -1$ e $b = 2$
3. $a = 1$ e $b = -1$
4. $a = 1$ e $b = -2$
5. $a = 2$ e $b = -1$

Solução 1:
$a = \dfrac{ValorMax + ValorMin}{2} = \dfrac{3+(-1)}{2} = 1$
$|b| = \dfrac{ValorMax - ValorMin}{2} = \dfrac{3-(-1)}{2} = 2$
$|b| = 2 \Rightarrow b = -2$ ou $b = 2$.
como $n = 0$, não houve translação (deslocamento) horizontal. Com isso $b = -2$ pois o gráfico de $f(x) = \operatorname{sen} x$ foi refletido em relação a linha média.

Solução 2:

Tomemos os pontos de coordenadas $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ e $\left(\frac{3\pi}{2},3\right)$ e vamos substituir na função. Daí temos que:

$f(\frac{\pi}{2}) = a + b\,\text{sen}(\frac{\pi}{2}) = -1$

$a + b = -1$

$f(\frac{3\pi}{2}) = a + b\,\text{sen}(\frac{3\pi}{2}) = 3$

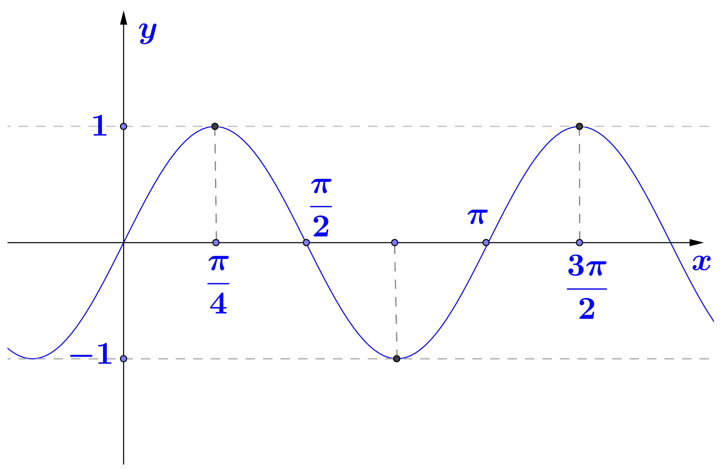
$a - b = 3$

Daí, temos $a = 1$ e $b = -2$.

3.3 O QUE A CONSTANTE M PRODUZ NO GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO SENOIDAL?

Para responder essa pergunta, vejamos algumas situações:

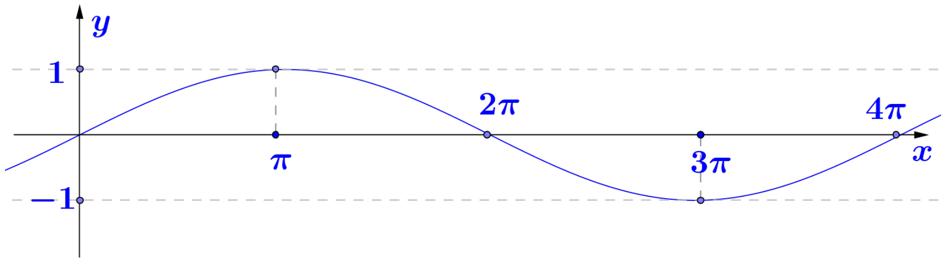
- Sendo $m = 2$, na função $s(x) = \text{sen}(2x)$, temos:



	Domínio	Imagem	Período	Amplitude
$f(x) = \text{sen}\,x$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	$p = 2\pi$	1
$i(x) = \text{sen}(2x)$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	$p = \pi$	1

Quando $m = 2$, o gráfico de $f(x) = \text{sen}\,x$ alterou o período, resultando e $s(x) = \text{sen}(2x)$.O período é encontrado $p = \frac{2\pi}{|m|} = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$.

- Sendo $m = \frac{1}{2}$, na figura $t(x) = \text{sen}(\frac{x}{2})$, teremos:



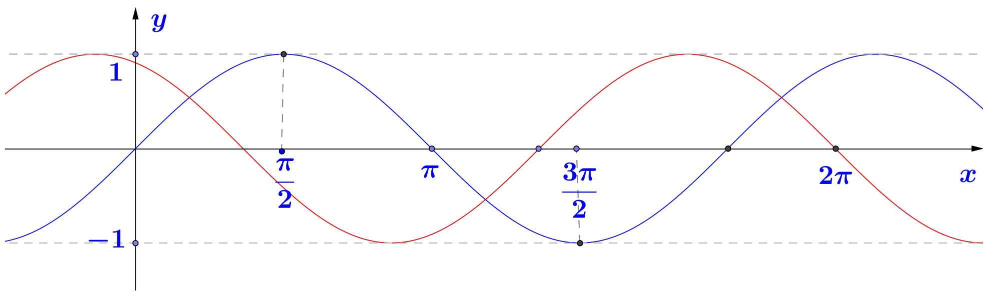
	Domínio	Imagem	Período	Amplitude
$f(x) = \operatorname{sen} x$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	$p = 2\pi$	1
$i(x) = \operatorname{sen}(\frac{x}{2})$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	$p = 4\pi$	1

Quando $m = 1$, o gráfico de $f(x) = \operatorname{sen} x$ alterou o período, resultando em $t(x) = \operatorname{sen}(\frac{x}{2})$. O período é encontrado através da fórmula $p = \dfrac{2\pi}{|n|}$, daí, temos que $p = \dfrac{2\pi}{|2|} = \pi$. Portanto a constante m vai produzir no gráfico de uma função senoidal um alteração no período.

3.4 O QUE A CONSTANTE N PRODUZ NO GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO SENOIDAL?

Para responder essa pergunta, vejamos algumas situações:

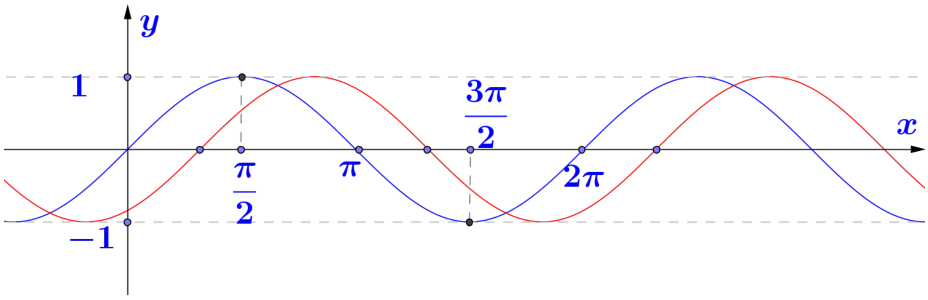
- $n = 2$, na função $u(x) = \operatorname{sen}(x+2)$, temos :



	Domínio	Imagem	Período	Amplitude
$f(x) = \operatorname{sen} x$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	$p = 2\pi$	1
$i(x) = \operatorname{sen}(x+2)$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	$p = 4\pi$	1

Quando $n = 2$, o gráfico de $f(x) = \operatorname{sen} x$ se deslocou duas unidades para esquerda, resultando em $u(x) = \operatorname{sen}(x+2)$, ou seja, ocorreu uma translação (deslocamento) horizontal.

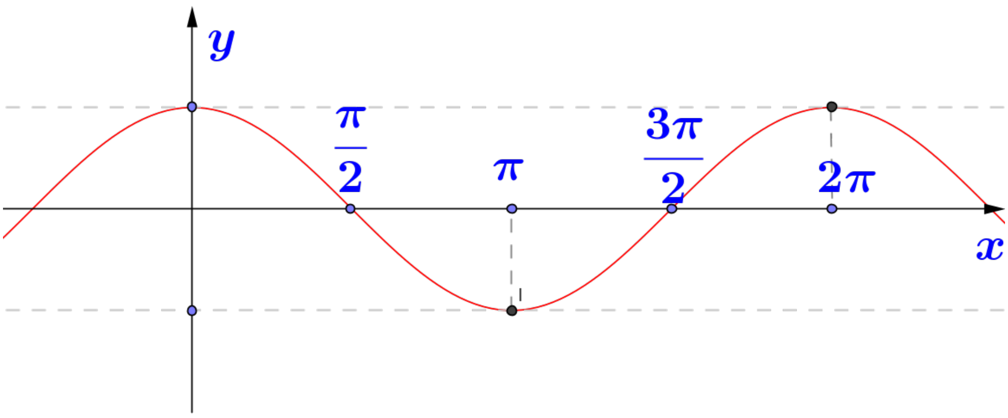
- Sendo $n = -1$, na função $v(x) = \operatorname{sen}(x-1)$, teremos:



	Domínio	Imagem	Período	Amplitude
$f(x) = \operatorname{sen} x$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	$p = 2\pi$	1
$i(x) = \operatorname{sen}(x-1)$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	$p = 2\pi$	1

Quando $n = -1$, o gráfico de $f(x) = \operatorname{sen} x$ se desloca uma unidade para a direita resultando em $v(x) = \operatorname{sen}(x-1)$, ou seja, ocorreu uma translação (deslocamento) horizontal. Portanto a constante n vai produzir no gráfico de uma função senoidal uma translação (deslocamento) horizontal. Se $n > 0$, desloca para esquerda e $n < 0$, desloca-se para direita.

Após as análise realizadas nas funções trigonométricas, objetivo de nosso estudo, convém mencionar que o gráfico de função cosseno, que denominamos cossenoide, não é uma nova curva, e sim uma senoide transladada de $\frac{\pi}{2}$ unidade para direita. Com isso podemos observar que colocando o eixo das ordenadas no ponto de abscissa $x = \frac{\pi}{2}$, teremos exatamente a cossenoide, ou seja, $g(x) = \cos x = \operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{2})$.



Isso mostra que os aspectos relevantes da função cosseno em sua maioria são os mesmos que os da função seno. A distinção entre essas funções fica por conta dos fatos que dependem dos valores das imagens ligadas aos domínios, que transladam $\frac{\pi}{2}$ unidades. Um exemplo disso, como já mostramos anteriormente, é que a função seno é ímpar e a função cosseno é par.

4 A IMPORTÂNCIA DE ESTUDAR FUNÇÕES SENOIDAIS NO ENSINO MÉDIO?

Existem objetos ou fatos do cotidiano que facilmente fazemos uma conexão com assuntos da matemática e vice-versa. Quando recebemos uma informação de que uma loja está com seus produtos em liquidação, de imediato associamos a porcentagem. Quando observamos numa maquete figuras em três dimensões tais como: primas, pirâmides, cilindros; logo, relacionamos a geometria. Com as funções senoidais não é diferente. Existem inúmeras situações cotidianas que são representadas (modeladas) através dessas funções. A fim de que perguntas do tipo: Pra que estou estudando esse assunto? Qual é a sua importância? Em que ele é aplicado? Não fiquem sem respostas, muito pelo contrário, que elas sejam respondidas na exposição do conteúdo pelo professor em aula, se antevendo a esses questionamentos, mostraremos a seguir razões pelas quais julgamos necessário estudarmos as funções senoidais:

4.1 É UM CONTEÚDO EXIGIDO NO ENEM

O mesmo está exposto na Matriz de Referência do ENEM 2019. Como observamos a seguir:

MATRIZ DE REFERÊNCIA ENEM EIXOS COGNITIVOS (comuns a todas as áreas de conhecimento)

I . Dominar linguagens (DL): dominar a norma culta da Língua Portuguesa e fazer uso das linguagens matemática, artística e científica e das línguas espanhola e inglesa.

II . Compreender fenômenos (CF): construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos naturais, de processos histórico-geográficos, da produção tecnológica e das manifestações artísticas.

III . Enfrentar situações-problema (SP): selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema.

IV . Construir argumentação (CA): relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente.

V . Elaborar propostas (EP): recorrer aos conhecimentos desenvolvidos na escola para elaboração de propostas de intervenção solidária na realidade, respeitando os valores humanos e considerando a diversidade sociocultural.

Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias

Competência de área 1 - Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

H1 - Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações - naturais, inteiros, racionais ou reais.

H2 - Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

H3 - Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

H4 - Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.

H5 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.

Competência de área 2 - Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

H6 - Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

H7 - Identificar características de figuras planas ou espaciais.

H8 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

H9 - Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

Competência de área 3 - Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H10 - Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.

H11 - Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.

H12 - Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.

H13 - Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.

H14 - Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

Competência de área 4 - Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H15 - Identificar a relação de dependência entre grandezas.

H16 - Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.

H17 - Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.

H18 - Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

Competência de área 5 - Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

H19 - Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

H20 - Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.

H21 - Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

H22 - Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

H23 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

Competência de área 6 - Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

H24 - Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.

H25 - Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

H26 - Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

Competência de área 7 - Compreender o caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

H27 - Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.

H28 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

H29 - Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.

H30 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

Faremos nas próximas linhas um breve comentário acerca do exame supracitado, bem como situaremos os tópicos do conteúdo de nosso trabalho, relacionando-o às competências e habilidades especificadas na Matriz de Referência do Ministério da Educação (MEC) para a prova de matemática e suas tecnologias. O ENEM foi criado em 1998 com o objetivo de avaliar o desenvolvimento do estudante ao fim da escolaridade básica. EM 2009 o MEC mudou de maneira significativa a proposta do Exame, passando a ser um dispositivo de política pública na reorganização do currículo do Ensino Médio em todo o país. Com isso o novo ENEM, como passou a ser conhecido, tem a finalidade de avaliar o aspecto cognitivo, no entanto, destacando a capacidade de liberdade intelectual e o pensamento crítico dos alunos.

Tópicos	Competência	Habilidade
Razões trig. no triangulo ret.	C_2	H_7/H_8
Circunf. orientada e Circ. trig. ou ciclo trig.	C_2/C_3	$H_7/H_8/H_10/H_12$
Simetrias no plano cart.	C_5	H_20
Redução ao primeiro quadrante	C_2/C_5	$H_7/H_8/H_20$
Arcos côngruos	C_2/C_3	$H_7/H_8/H_10/H_12$
Fun. per. Fun.cos. e Fun. sen	C_5	$H_19/H_20/H_21/H_22/H_23$

Exemplos:

1. (Enem 2017 - adaptado) Um cientista, em seus estudos para modelar a pressão arterial de uma pessoa, utiliza uma função do tipo $P(t) = A + B\cos(kt)$ em que A, B e K são constantes reais positivas e f representa a variável tempo, medida em segundo. Considere que um batimento cardíaco representa o intervalo de tempo entre duas sucessivas pressões máximas. Ao analisar um caso específico, o cientista obteve os dados: pressão mínima 78 e pressão máxima 120, além do que ele constatou que o número de batimentos cardíacos por minuto foi de 90. Qual foi a função $P(t)$ obtida, por este cientista, ao analisar o caso específico?

$$A = \frac{120+78}{2} = \frac{198}{2} = 99$$
$$|B| = \frac{120-78}{2} = \frac{42}{2} = 21$$
$$B = 21, \text{ pois } B > 0.$$

Do enunciado temos que 1 batimento cardíaco representa o período da função. Logo

$$90 \text{ batimentos} \to 60s$$
$$1 \text{ batimento} \to x$$
$$90x = 60 \Rightarrow x = \frac{60}{90} \Rightarrow x = \frac{2}{3}s$$

Com isso

$$\text{P}=\frac{2\pi}{|k|} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{2\pi}{|k|} \Rightarrow |k| = 3\pi, \text{ pois } k > 0. \text{ Portanto a função } P(t) \text{ obtida é}$$
$$P(t) = 99 + 21\cos(3\pi t).$$

2. (Enem 2015 - adaptado) Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra. A partir de uma série histórica, observou-se que o preço P, em reais, do quilograma de um certo produto sazonal pode ser descrito pela função: $P(x) = 8 + 5\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$, onde x representa o mês do ano, sendo $x = 1$ associado ao mês de janeiro, $x = 2$ ao mês de fevereiro, e assim sucessivamente, até $x = 12$ associado ao mês de dezembro [*Disponível em: www.ibge.gov.br.*

Acesso em: 2 ago. 2012 (adaptado).] Na safra, qual é o mês de produção máxima desse produto?

Do enunciado temos que para que a produção seja máxima o preço é mínimo. Logo a questão pede o valor de x, para $\cos\left(\dfrac{\pi x-\pi}{6}\right)=-1$, isso ocorre pela primeira vez quando $\dfrac{\pi x-\pi}{6}=\pi$. Daí, temos que

$$\begin{aligned}\pi x-\pi &= 6\pi\\ \pi x &= 7\pi\\ x &= 7\end{aligned}$$

Portanto o mês de produção máxima desse produto é Julho. (Letra D)

3. (Enem 2015 - adaptado) Um técnico precisa consertar o termostato do aparelho de ar-condicionado de um escritório, que está desregulado. A temperatura T, em graus Celsius, no escritório, varia de acordo com a função $T(h)=A+B\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{12}(h-12)\right)$, sendo h o tempo, medido em horas, a partir da meia-noite e A e B os parâmetros que o técnico precisa regular. Os funcionários do escritório pediram que a temperatura máxima fosse 26°C, a mínima 18°C, e que durante a tarde a temperatura fosse menor do que durante a manhã. Quais devem ser os valores de A e de B para que o pedido dos funcionários seja atendido?

$$\begin{aligned}A &= \frac{26+18}{2}=\frac{44}{2}=22\\ |B| &= \frac{26-18}{2}=4, \text{ ou seja } B=4 \text{ ou } B=-4\end{aligned}$$

Para identificar o valor de B, usaremos $h=10$ e $h=10$ e $h=14$, para tanto faremos inicialmente $B=4$. Com isso $T(h)=22+4\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{12}(h-12)\right)$.
$T(10)=22+4\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{12}(10-12)\right)=22+4\operatorname{sen}\left(\dfrac{-\pi}{6}\right)=22+4\left(\dfrac{-1}{2}\right)=20°C$
$T(14)=22+4\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{12}(14-12)\right)=22+4\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=22+4\left(\dfrac{1}{2}\right)=24°C.$
Logo para que a temperatura da tarde seja menor $B=-4$.

4.2 BASE PARA O ESTUDO DA FÍSICA

É um conteúdo aplicado nos movimentos oscilatórios na física do ensino médio. Faremos a seguir um comentário sucinto acerca desse movimento e depois uns exemplos. Depois de ter visto as funções senoidais na matemática, o aluno utilizará o referido conteúdo na física;

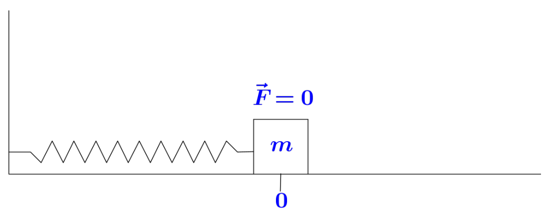
no movimento oscilatório que fica caracterizado quando um corpo se desloca periodicamente numa mesma trajetória, indo e vindo para um lado e para o outro em torno de uma posição de equilíbrio. Esse movimento é observado no dia-a-dia em diversas situações, como por exemplo: num copro ligado a uma mola (sistema massa-mola); num pêndulo; na vibração de uma corda; nas moléculas em um sólido que oscilam em torno de seu ponto de equilíbrio. Essas oscilações fazem parte dos movimentos periódicos, sendo possível modelá-las utilizando os movimentos harmônicos simples (MHS).

O intervalo de tempo decorrido pelo durante o deslocamento do corpo ao completar a trajetória é denominado período (T) sua unidade é o segundo (s). A frequência (f) é o número de vezes que o corpo completa a trajetória por segundo e sua unidade é o hertz (Hz). Observe que

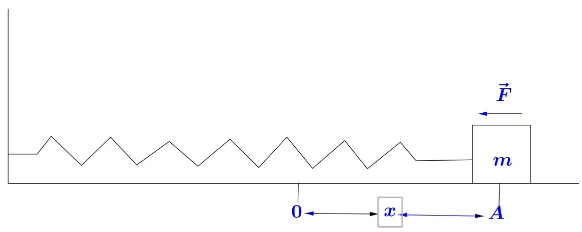
$$1Hz = 1s^{-1}.$$

Um corpo de massa (m) apresenta MHS quando oscila, sem atrito, sob a ação de uma força restauradora (F) proporcional ao seu deslocamento (x) em relação a posição de equilíbrio, isto é $F = -kx$ em que k é uma constante. os quadros abaixo nos ajudam a entender melhor a situação:

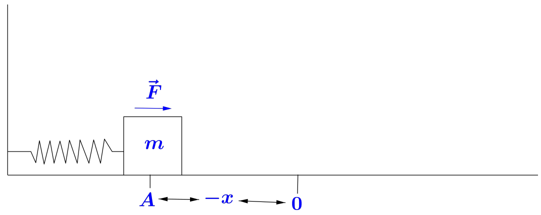
i.



ii.

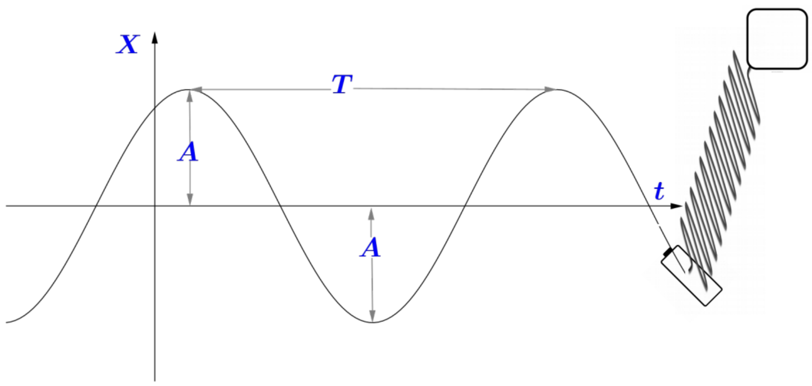


iii.



Temos a posição de equilíbrio em (i), a força da mola exercida no corpo é zero; mola alongada (ii) ou mola comprimida (iii), exerce no corpo uma força que aponta para a posição de equilíbrio.

Agora temos outra situação da física, o gráfico representando o deslocamento de um corpo ligado a uma mola no MHS, conforme figura que segue abaixo, tem sua posição descrita através de uma função senoidal dada por $x(t) = A\cos(wt + \theta)$, onde A, w e θ são constantes, em que:
$A \rightarrow$ amplitude do movimento (valor máximo da posição do corpo na direção x positiva ou negativa). Define-se também como máxima elongação.
$w \rightarrow$ frequência angular (em radianos por segundo).
$t \rightarrow$ o tempo em segundos
$X(t) \rightarrow$ a posição do corpo num tempo t, a partir da posição de equilíbrio também chamada de elongação.
$\theta \rightarrow$ constante da fase ou ângulo de fase.
$wt + \theta \rightarrow$ fase. Vejamos a figura:



Observamos no entanto que como o movimento é periódico de período T, temos que as posições que o corpo ocupa se repetem a cada intervalo de tempo T. Com isso

$$x(t) = x(t+T)$$

Como a fase aumenta em $2\pi rad$ no intervalo de tempo T, decorre que:

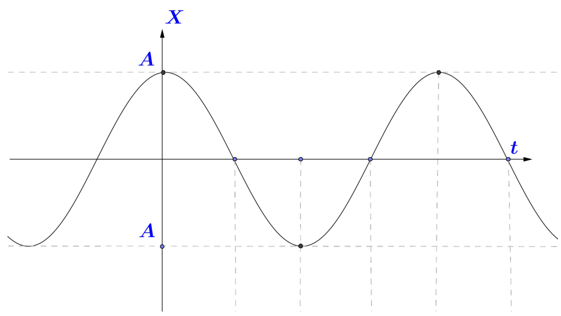
$$wt + \theta + 2\pi = w(t+T) + \theta \Rightarrow wT = 2\pi$$

Logo a frequência angular é dada por $w = \dfrac{2\pi}{T}$ ou $w = 2\pi f$
Ao aplicar a segunda lei de Newton no MHS, podemos tirar alguma conclusão, dentre elas

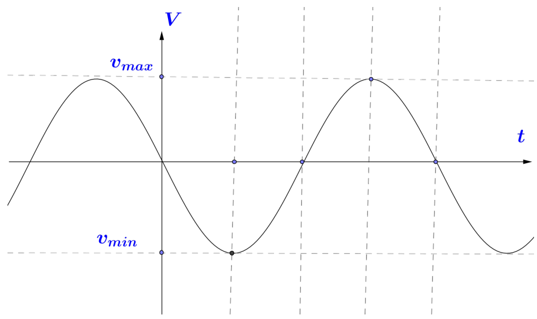
1. $w^2 = \dfrac{k}{m} \Rightarrow w = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ Com isso, $T = \dfrac{2\pi}{w}$, ou seja $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

2. $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$.
   A partir de algumas operações matemáticas chegamos as equações da velocidade e da aceleração em função do tempo t, respectivamente iguais a $v(t) = -wA\,\mathrm{sen}(wt+\theta)$ e $a(t) = -w^2A\cos(wt+\theta)$.
   A seguir temos as representações gráficas do deslocamento (i), velocidade (ii) e aceleração em função do tempo (iii).

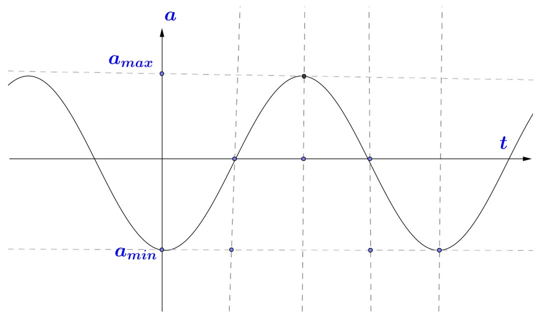
(i)



(ii)



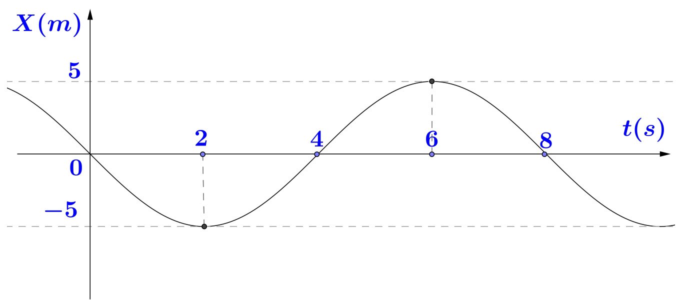
(iii)



5 QUESTÕES CONTEXTUALIZADAS DAS FUNÇÕES SENOIDAIS

A seguir, apresentaremos algumas questões de vestibulares nacionais que envolvem o conteúdo tratado nas páginas anteriores, enfatizando a contextualização do conteúdo.

1. (Univ.Federal de Lavras-MG) O gráfico representa a elongação de um corpo em movimento harmônico simples (MHS) em função do tempo. A amplitude, o período e a frequência para esse movimento são dados, respectivamente, por:



A amplitude é de $5m$, pois trata-se da elongação máxima do corpo em relação ao seu ponto de equilíbrio. O período é de $8s$, pois trata-se do tempo decorrido pelo corpo ao completar um ciclo.
A frequência é de $\frac{1}{8}Hz$, pois trata-se do inverso do período.

(a) $10m$, $4s$, $\frac{1}{8}Hz$

(b) $5m$, $4s$, $\frac{1}{8}Hz$

(c) $10m$, $8s$, $\frac{1}{4}Hz$

(d) $5m$, $8s$, $\frac{1}{8}Hz$

(e) $5m$, $0,8s$, $\frac{1}{8}Hz$

2. (Escola Preparatória de Cadetes do Exército-AMAN) Peneiras vibratórias são utilizadas na indústria de construção para classificação e separação de agregados em diferentes tamanhos. O equipamento é constituído de um motor que faz vibrar uma peneira retangular, disposta no plano horizontal, para separação dos grãos. Em uma certa industria de mineração, ajusta-se a posição da peneira de modo que ela execute um movimento harmônico simples (MHS) de função horária $x = 8\cos(8\pi t)$, onde x é a posição medida em centímetros e t, o tempo em segundos. O número de oscilações a cada segundo executado por essa peneira é de:

   (a) 2

   (b) 4

   (c) 8

   (d) 16

   (e) 32

   Como a função horária da posição em função do tempo é dada por $x(t) = A\cos(wt + \varphi)$, com base no enunciado temos que:
   Amplitude é de $8cm$, frequência angular é de $8\pi rad/s$.
   $w = 8\pi rad/s$
   $2\pi f = 8\pi \Rightarrow f = 4Hz$.

3. Uma partícula move-se obedecendo à função horária $x = 2\cos(\pi t + \frac{\pi}{2})$, com x em metros e t em segundos. Determine:

   (a) o período do movimento.

   (b) a velocidade escalar da partícula em $t = 1s$.

   (c) a aceleração escalar da partícula em $t = 5s$.

   A função horária da posição em função do tempo é dada por $x(t) = A\cos(wt + \varphi)$. De acordo com as informações da questão temos que:
   Amplitude é de $2m$.
   A frequência angular é de $\pi rad/s$.
   $w = \pi rad/s$, com isso $2\pi f = \pi \rightarrow f = \frac{1}{2} = 0,5Hz$.

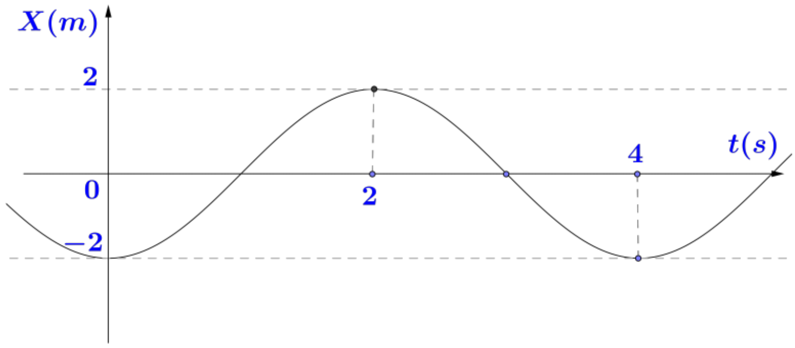
   (a) O período é dado por $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1/2} = 2s$

   (b) $V(t) = -wA\,\mathrm{sen}(wt + \varphi)$

$V(1) = -\pi 2 \operatorname{sen}(\pi 1 + \frac{\pi}{2})$
$V(1) = -2\pi(-1) = 2\pi m/s.$

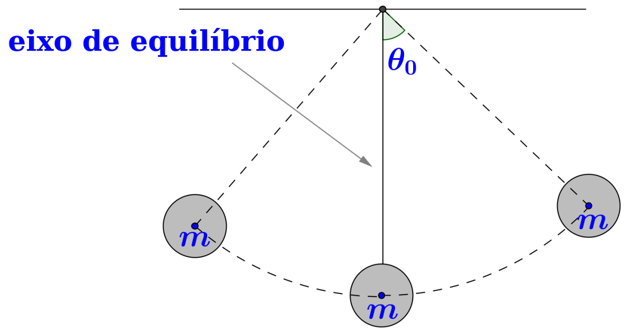
(c) $a(t) = -w^2 A \cos(wt + \varphi)$
$a(5) = -\pi^2 2 \cos(\pi 5 + \frac{\pi}{2})$
$a(5) = -2\pi^2 0 = 0$

4. Encontre a equação horária correspondente, no S.I. de acordo com o gráfico apresentado no movimento harmônico simples da elongação em função do tempo.



A amplitude é de $2m$.
O período é de $4s$. Logo a frequência é dada por $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{4} = 0,25Hz$. Com isso a frequência angular $W = 2\pi f = 2\pi \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2} rad/s$
$X(t) = A\cos(wt + \varphi)$
Como $X(0) = -2$, temos que: $X(0) = 2\cos(\frac{\pi}{2}0 + \varphi) = -2$
$2\cos\varphi = -2$
$\cos\varphi = -1$
$\varphi = \pi rad$
Portanto a equação horária é $X(t) = 2\cos(\frac{\pi}{2}t + \pi)$.

Seguindo a linha do problema anterior sobre movimento oscilatório, temos o pêndulo simples que consiste de um sistema composto por um corpo de massa (m) preso a um fio, que permite sua movimentação livremente (sem atrito) para frente e para trás.
A posição do pêndulo é definida pelo ângulo θ_0 formado entre o fio e o eixo de equilíbrio (conforme a figura)



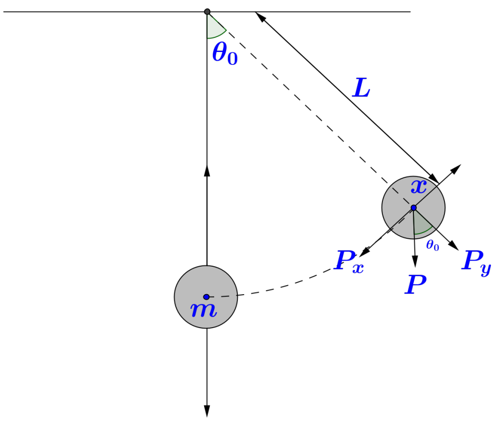
Sabendo que sob a ação do força peso, o pêndulo quando é deslocado de sua posição de equilíbrio, apresenta um movimento periódico, precisamos encontrar a equação de $\theta_0(t)$. Onde $\theta_0 = 0$, o fio coincide com a vertical, ou seja, sua posição de equilíbrio e que θ_0, é o ângulo que indica o deslocamento do pêndulo em relação a posição de equilíbrio.

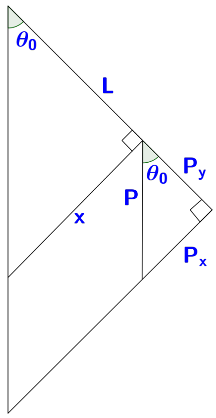
Acerca do pêndulo simples, infere-se que ele executa o M.H.S., apenas para ângulos muito pequenos $(\theta_0 \leq 10°)$, caso contrário haverá uma maior variação da amplitude e que comprometerá a precisão dos dados numéricos.

No MHS a equação que descreve o deslocamento do corpo em função do tempo t, desprezando o ângulo de fase, é dada por $X(t) = A\cos(wt)$.

Aplicando ao pêndulo simples, usaremos θ em lugar de X, ou seja, faremos o ângulo em função do tempo, ou seja, encontraremos a equação do deslocamento angular do pêndulo. Com isso temos: $\theta_0(t) = \theta_0 \max\cos(\frac{2\pi}{T}t)$. Onde $\theta_0 \max$, é o máximo deslocamento angular do pêndulo em relação a posição de equilíbrio.

Observamos também no pêndulo simples (conforme figura)





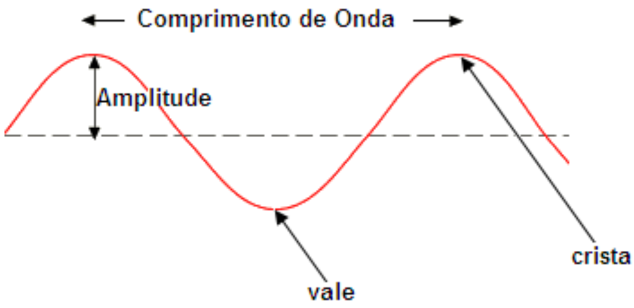
$\cos\theta_0 = \dfrac{P_y}{P} \Rightarrow P_y = P\cos\theta_0 \; P_y = mg\cos\theta_0$
$\operatorname{sen}\theta_0 = \dfrac{P_x}{P} \Rightarrow P_x = P\operatorname{sen}\theta_0$
$P_x = mg\operatorname{sen}\theta_0$
$\tan\theta_0 = \dfrac{x}{L} = \operatorname{sen}\theta_0$, pois é muito pequeno.
$P_x = mg\dfrac{x}{L} = \dfrac{mg}{L}x$, em que $\dfrac{mg}{L} = k$, constante.
Como o período no MHS é $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$, logo obtemos a equação de período do pêndulo simples:
$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$.
A frequência (f) é dada por $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{L}}$

Exemplos

5. A posição angular de um pêndulo é representada pela equação $\theta = 0,032\cos wt$, onde θ está em radianos e $w = 4,43 rad/s$. Determine o período e o comprimento do pêndulo.
   $\theta = 0,032\cos(4,43t) = \theta\max\cos(\dfrac{2\pi}{T}t)$
   Com isso $\dfrac{2\pi}{T} = 4,43 \Rightarrow T = \dfrac{2\pi}{4,43} = 0,45\pi$
   Como $\theta\max = 0,032 rad$ é muito pequeno, logo usaremos $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$
   $0,45\pi = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{9,8}} \Rightarrow (0,45)^2 = (2\sqrt{\dfrac{L}{9,8}})^2 \Rightarrow 0,2025 = 4\dfrac{L}{9,8}$
   $\Rightarrow L = 0,49m$

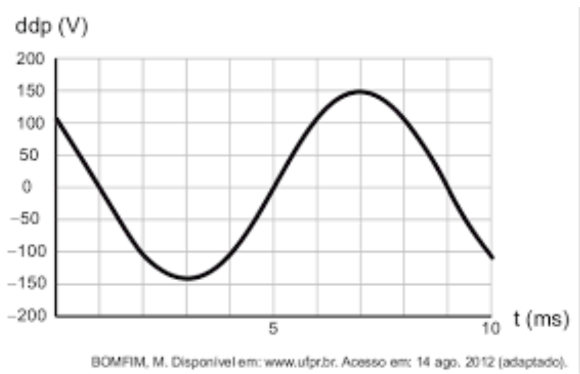
6. Na ondulatória, área da física que estuda as ondas, notamos nas grandezas características de uma onda, parâmetros observados nos gráficos das funções senoidais.
   Consideremos que o movimento vibrante de uma corda elástica(conforme figura a seguir)

de modo constante exercido pela mão de uma pessoa na extremidade dessa corda produz uma onda. Destacamos:



Período (T) de uma onda é o tempo gasto em segundos para que ela efetue uma oscilação completa.
Frequência (f) de uma onda corresponde ao máximo de oscilações completas numa unidade de tempo em hertz (Hz). Segue do movimento oscilatório que $f = \dfrac{num}{T}$.
Amplitude (A), refere-se a altura da onda, ou seja, é a distância da crista(ponto mais alto da onda) ou vale (ponto mais baixo da onda) ao nível de equilíbrio.
Vejamos os exemplos:

7. (ENEM-2017) O osciloscópio é im instrumento que permite observar uma diferença de potencial (ddp) em um circuito elétrico em função do tempo ou em função de outra ddp. A leitura do sinal é feita em uma tela sob a forma de um gráfico tensão x tempo.



(a) $300Hz$

(b) $250Hz$

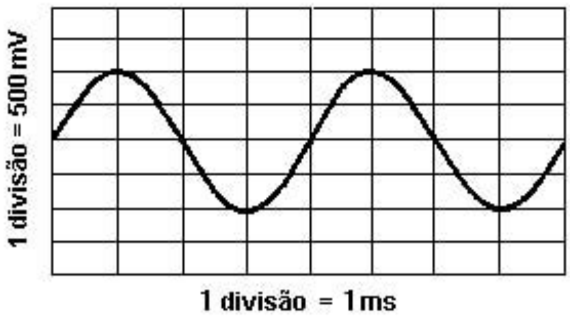
(c) $200Hz$

(d) $150Hz$

(e) $125Hz$

$T = 8ms = 8 \cdot 10^{-3}$
$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{8 \cdot 10^{-3}} = \frac{1}{8} \cdot 10^{3} = 125Hz$

8. (FATEC) O padrão de forma de onda proveniente de um sinal eletrônico está representado na figura a seguir.



$A = 2 \cdot 500mV = 2 \cdot 500 \cdot 10^{-3} = 1000 \cdot 10^{-3} = 1V$
$T = 4ms$
$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{4 \cdot 10^{-3}} = \frac{1}{4} 10^{3} = 250Hz$

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante de mais um assunto da matemática que possui ampla aplicação no dia-a-dia, quer seja no cálculo da altura de um objeto, no perímetro de um ambiente circular, ou ainda nos movimento periódicos, a trigonometria torna-se um conteúdo relevante.

Ao longo dos anos de experiência vividos em sala de aula, observamos que mesmo o aluno tendo uma noção das razões trigonométricas no triângulo retângulo, vistas anteriormente, sentem o impacto ao se deparar no ensino médio com a trigonometria no ciclo trigonométrico e consequentemente o surgimento dos novos conceitos.

Nesse trabalho trouxemos um embasamento teórico no capítulo 1. No seguinte, mostramos que os efeitos que as constantes a, b, m e n produzem no gráfico de uma função senoidal dada por $y = a + b\,\text{sen}(mx + n)$. No capítulo 3 descrevemos a importância de estudarmos as funções senoidais para o exame nacional do ensino médio bem como no MHS, pêndulo simples e nas grandezas características de uma onda, ambos assuntos da física. Por fim, no capítulo 4 fizemos a exposição de questões contextualizadas em áreas diversas.

Com isso esperamos contribuir para que haja uma melhor exposição e assimilação desse conteúdo.

REFERÊNCIAS

LIMA, Elon Lages Números e Funções Reais-Coleção Profmat, IMPA, Rio de Janeiro, 2013. Sociedade Brasileira de Matemática

NETO, Antonio Caminha Muniz Geometria-Coleçao Profmat, 2013 Sociedade Brasileira de Matemática.

CARMO, Manfredo Perdigão do e MORGADO, Augusto César e WAGNER, Eduardo: Trigonometria e Números Complexos, Rio de Janeiro:2005 SBM.

BARBOSA, João Lucas Marques: Geometria euclidiana plana. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012

GIOVANNI, José Rui; GIOVANNI Jr, José Rui; BONJORNO, José Roberto; SOUSA, Paulo Roberto Câmara de: 360° matemática fundamental: uma nova abordagem, parte 1 & 2.ed. São Paulo: FTD, 2015

Bernoulli: Coleção ensino médio. Belo Horizonte: sistema de ensino Bernoulli, 2018

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze de: Matemática: ciência e aplicações: ensino médio, vol. 2 ? 9.ed. ? São Paulo: Saraiva, 2016

DANTE, Luiz Roberto Matemática: contexto & aplicações: ensino médio / Luiz Roberto Dante. – 3. ed. – São Paulo: Ática, 2016.

SERWAY, Raymond A. Princípios de física / Raymond A. Serway; John W. Jewett Jr. tradução EZ2 Translate; revisão técnica Sergio Roberto Lopes. – São Paulo: Cengage Learning, 2014.