

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE FÍSICA

JOSÉ GILSON DE MELO NASCIMENTO NETO

**SEPARAÇÃO DE FEIXES DE LASER MULTIPLEXADOS EM
MOMENTO ANGULAR ORBITAL**

Maceió
2020

JOSÉ GILSON DE MELO NASCIMENTO NETO

**SEPARAÇÃO DE FEIXES DE LASER MULTIPLEXADOS EM
MOMENTO ANGULAR ORBITAL**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
como parte integrante dos requisitos necessários
para a obtenção do grau de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Alcenísio José de Jesus
Silva

Maceió

2020

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária: Taciana Sousa dos Santos – CRB-4 – 2062

N244s Nascimento Neto, José Gilson de Melo.
Separação de feixes de laser multiplexados em momento angular orbital /
José Gilson de Melo Nascimento Neto. – 2020.
46 f. il. : figs. color.

Orientador: Alcenísio José de Jesus Silva.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Física: Bacharelado) –
Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Física. Maceió, 2020.

Bibliografia: f. 41-46.

1. Momento angular orbital. 2. Feixes ópticos. 3. Comunicação óptica. I.
Título.

CDU: 535.3



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE FÍSICA

Ata da Defesa do Trabalho de Conclusão de Curso do aluno **José Gilson de Melo Nascimento Neto**, matrícula **15110882**, intitulado **SEPARAÇÃO DE FEIXES DE LASER MULTIPLEXADOS EM MOMENTO ANGULAR ORBITAL**.

Às **14:00** horas do dia **catorze de setembro de dois mil e vinte**, foi instalada pela plataforma Google Meet, a sessão pública de defesa do Trabalho de Conclusão de Curso a qual se submeteu o aluno **José Gilson de Melo Nascimento Neto** do Curso de Física Bacharelado. A banca foi composta pelos professores **Prof. Dr. Alcenísio José de Jesus Silva (Orientador do trabalho, IF-UFAL)**, **Prof. Dr. João Paulo de Amaral (2º Colégio da Polícia Militar - Coronel Hervano Mecêdo Júnior – Ceará)** e **Prof. Dr. Paulo Cesar Aguiar Brandão Filho (IF-UFAL)**. Os membros desta banca avaliaram o referido trabalho e conferiram-lhe a seguinte menção Aprovado, atribuindo ao mesmo, respectivamente, as notas 9,00 (nove); 9,00 (nove); 9,00 (nove), computando assim média 9,00 (nove) e autorizando os trâmites legais. Por oportuno, tendo em vista a melhoria da qualidade do trabalho, a banca sugere a tomada das seguintes providências:

Correções de ortografia e digitação.

Estando todos de acordo, lavrou-se a presente Ata.

Maceió, 14 de setembro de 2020.

1º Examinador: Alcenísio José de Jesus Silva

2º Examinador: Paulo Brandão

3º Examinador: João Paulo de Amaral

Visto da Coordenação: Vinícius Manzonni Vieira

Prof. Vinícius Manzonni Vieira
Coordenador do Curso de Física Bacharelado
Portaria nº 65/2020 | DOU 07/04/2020
SIAPE: 2580000 | IF - UFAL

AGRADECIMENTOS

A Deus por cada vitória ao longo desse percurso e pelas derrotas, as quais me serviram de aprendizado. Ao meu pai Francisco José da Silva que está na presença de Deus e sempre me aconselhou a estudar. A minha mãe Sílvia Maria Melo Nascimento Silva por sempre me apoiar nas minhas escolhas e nunca desistir de mim. A minha irmã Francielli Maria Melo Nascimento Silva por me motivar e acreditar que tudo daria certo, mesmo quando eu não acreditava.

A todos os meus outros familiares, em especial a minha avó Maria Dilza Melo Nascimento por suas orações em todos os meus momentos de faculdade. Aos meus padrinhos e madrinhas, Flavia Eudócia Melo Nascimento, Zanelli Antônio Melo Nascimento e Maria Helena Melo Nascimento que sempre estiveram presentes nessa caminhada com seus conselhos e suportes.

A minha namorada Andreza Costa Perdigão Peixoto que sempre acreditou em mim e sempre me aconselhou a continuar e nunca desistir nos momentos difíceis da graduação. Ao meu grande amigo e irmão de fé, Padre Reinaldo Morais por seus conselhos espirituais e terrenos. Também dedico este trabalho a meu afilhado Rodolfo Cavalcanti.

Quero agradecer aos amigos e colegas do IF entre eles, Leonardo Clemente, Jefferson da Rocha e João Paulo. A minha turma, que mesmo sobrando poucos no final, sempre me ajudou nos momentos de desesperos entre provas e trabalhos. A todos os integrantes e professores do Grupo de Óptica e Nanoscopia, entre eles, Eduardo Jorge da Silva Fonseca, Samuel Teixeira de Souza, José Carlos, Danilo Gomes e Jonathas Matias.

Ao meu orientador Alcenísio José de Jesus Silva por sempre estar presente para me tranquilizar e me guiar no melhor caminho para a conclusão da Iniciação Científica durante a graduação.

RESUMO

Tendo em vista que a luz pode carregar momento angular orbital (MAO), neste trabalho de conclusão de curso investigamos, de maneira experimental e teórica, diversos aspectos de feixes ópticos com esta propriedade. Nossas investigações englobam geração, caracterização, separação e classificação de estados de MAO multiplexados no cenário de luz coerente. Sabendo que é possível codificar informação em estados de MAO multiplexados foram realizadas de-multiplexação por meio de um esquema de classificação de alta resolução. Esta pesquisa contribui para futuros avanços no cenário da comunicação óptica como decodificação eficiente de informação e aumento da capacidade de envio de dados.

Palavras-chave: Processamento ótico da informação, carga topológica, Momento angular orbital da luz, Sorting.

ABSTRACT

Bearing in mind that light can carry orbital angular momentum (OAM), in this course conclusion work we investigated, in an experimental and theoretical way, several aspects of optical beams with this property. Our investigations encompass generation, characterization, separation, and classification of OAM states multiplexed in the coherent light scenario. Knowing that it is possible to encode information in multiplexed OAM states, de-multiplexing was performed using a high-resolution classification scheme. This research contributes to future advances in the optical communication scenario, such as efficient information decoding and increased data sending capacity.

Keywords: Optical information processing, topological load, orbital angular momentum of light, Sorting.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO GERAL	7
2	ESTADOS DE MOMENTO ANGULAR ORBITAL (MAO)	11
2.1	Feixes Laguerre Gauss	11
2.2	Geração e Caracterização de Estados de Momento Angular Orbital.....	17
2.3	Método interferométrico para classificação dos Estados de Momento Angular Orbital.....	21
3	SEPARAÇÃO DE ESTADOS DE MOMENTO ANGULAR ORBITAL	24
3.1	Transformação log-polar e Transformação espirais logarítmicas.....	24
3.2	Separação de Estados de MAO coerente	30
3.3	Modelo da Propagação para os Feixes Coerentes.....	32
3.4	Simulação e resultados experimentais para separação de estados de MAO	33
3.5	Simulação numérica e resultados experimentais para a separação de estados de MAO superpostos	35
4	CONCLUSÃO	40
5	REFERÊNCIAS	41

1 INTRODUÇÃO GERAL

As descrições das equações de Maxwell no início do século XX levaram a representação das ondas eletromagnéticas, que passaram a desempenhar um papel importante para o desenvolvimento de novas teorias físicas. Entre as áreas da física que se baseiam na luz, e que se desenvolveram com essa nova teoria, temos a óptica de lasers, na qual os feixes de luz apresentam diversas aplicações, como na comunicação e no processamento óptico de informação, devido à possibilidade de manipulação de seus diferentes graus de liberdade, como polarização e momento angular, por exemplo [1].

De uma maneira geral, o momento angular da luz pode ser expresso por duas componentes. A primeira componente é o momento angular intrínseco, que está associada ao estado de polarização circular no sentido horário e anti-horário do campo elétrico. A segunda componente está associada à distribuição transversal do campo elétrico, e corresponde ao MAO [1].

Em 1909, Poynting [2] descreveu um equivalente mecânico para o momento angular intrínseco, ele mostrou em teoria que um feixe de luz circularmente polarizado deveria exercer um torque ao atravessar uma placa birrefringente, e que a razão entre o momento angular e o momento linear é igual a $\frac{\lambda}{2\pi}$, onde λ é o comprimento de onda da radiação. Baseado nessa ideia, em 1936, Beth [3] observou experimentalmente a presença do momento angular intrínseco em um feixe de luz circularmente polarizado no sentido horário, ao passá-lo por uma placa birrefringente de $\frac{\lambda}{2}$ suspensa por uma fibra de quartzo, e como resultado a placa muda à polarização do feixe para circular no sentido anti-horário e, por consequência, a placa birrefringente sofre um torque, devido à transferência do momento angular intrínseco.

Em 1992, Allen et al [4] propuseram que as soluções da equação de Helmholtz que apresentam uma fase azimutal $\exp(im\phi)$ representam feixes de luz que carregam MAO de $\pm m\hbar$ por fóton, onde o ângulo ϕ é a coordenada azimutal na seção transversal do feixe, m é um número inteiro chamado de carga topológica e \hbar é a constante de Planck. Entre esses feixes de luz, temos os modos Laguerre Gauss que são soluções da equação paraxial de Helmholtz em coordenadas cilíndricas.

Desde a descoberta de Allen, os cientistas passaram a procurar métodos de caracterizar o momento angular orbital da luz, uma vez que para tal, bastaria determinar o valor da carga topológica. Um dos métodos bastante eficiente e relevante foi proposto por Hickmann et al [12], que consistia em difratar modos Laguerre- Gauss através de aberturas triangulares. Eles perceberam que o padrão de difração, produzido na zona de Fraunhofer, manifestava-se como rede triangular, a qual se correlacionava com o valor da carga topológica m .

Estudos recentes mostram que os modos espacialmente ortogonais da luz, como os feixes Laguerre Gauss, podem ser usados como um grau de liberdade adicional para codificação de dados via rede ótica. Esses modos podem ser utilizados para atingir uma maior capacidade de transmissão de informação em sistemas de comunicação clássica [5-7] e criptografia quântica [8-9], pois permite a multiplexação e de-multiplexação de maneira eficiente de um conjunto de estados de MAO [10]. Além disso, encontram-se aplicações na micro manipulação óptica [11].

Alguns trabalhos relevantes mostram aplicações diretas de feixes Laguerre – Gauss no contexto da comunicação óptica, onde a carga topológica representa a informação codificada. Por exemplo, em meados de 2012 Wang et al [6], reportaram um sistema de comunicação no espaço livre com uma capacidade de envio de dados da escala de terabit por segundo combinando a multiplexação de estados de MAO com a multiplexação de estados de polarização.

Outro trabalho relevante foi publicado em 2016 por Mario Krenn et al [5], eles mostraram experimentalmente a transmissão de informações codificadas em estados de MAO multiplexados a uma distância de 143 km entre duas ilhas Canárias. A ilha de La Palma foi o transmissor da informação e a ilha de Tenerife o receptor da informação. O sucesso na identificação dos modos componentes da superposição teve uma precisão de mais de 80% até a terceira ordem e a decodificação de uma mensagem transmitida com uma taxa de erro de 8,33%.

Ao utilizar a multiplexação de estados de MAO para fins de comunicação óptica no espaço livre, nota-se a importância da investigação a respeito de técnicas que visem a separação de uma determinada quantidade de modos que compõem uma dada superposição. Neste sentido, há várias propostas para separar os estados de MAO componentes, por exemplo, os métodos de interferometria [13-14].

Em 2002, Leach et al [13], propuseram um método interferométrico para medir o momento angular orbital de fótons individuais. Demonstraram sua eficiência classificando quatro diferentes estados de momento angular orbital e, portanto, sendo capazes de codificar dois bits de informação em um único fóton. Esta nova abordagem tem implicações para experimentos de emaranhamento, criptografia quântica e transferência de informações. Porém, esse método exige uma complexidade crescente de esquemas interferométricos à medida que cresce o número de modos MAO a serem classificados.

Outra abordagem interessante é baseada na transformação log-polar publicada em 2010 por Berkhout et al [15], que mapeia círculos em linhas paralelas. Este método consiste na transformação de modos ópticos de entrada por uma fase azimutal em ondas planas com deslocamento lateral proporcionais à carga topológica do vórtice no plano de saída. Porém, devido ao gradiente de fase dos feixes mapeados ser limitado na faixa de 0 a 2π , observa-se sobreposição entre modos adjacentes quando tratamos de modos multiplexados. Tentou-se corrigir essa limitação utilizando um holograma de fase adicional conhecido como elemento fan-out que faz cópias dos campos ópticos de entrada, cuja interferência dessas cópias pode produzir uma melhor resolução [16], porém, há um aumento na complexidade da configuração experimental.

A dificuldade de se obter uma maior resolução do método de separação de modos de luz usando a transformação log-polar foi sanada por um método desenvolvido por *Wen et al [17]*, para separação de feixes com momento angular orbital (MAO). Baseado em uma transformação espiral de coordenadas de raios ópticos que se utiliza de uma fase que mapeia espirais logarítmicas com n retornos para linhas paralelas. Isso possibilitou classificar modos de MAO com uma resolução significativamente mais alta, fornecendo um aumento do gradiente de fase ao longo da frente da onda mapeada n vezes, maior que o da transformação log-polar. Ressalta-se que o número n de retornos da espiral depende apenas da largura do feixe de entrada.

Com isso, modos Laguerre Gauss com diferentes cargas topológicas m são mapeados em linhas verticais lateralmente separadas o que nos permitem conhecer o MAO que os feixes carregavam originalmente. Desta maneira, os feixes ao serem transformados em frentes de ondas planas com diferentes ângulos de inclinação, proporcionais à m , focalizam em posições distintas no plano focal de uma lente.

No capítulo 2, partiremos das equações de Maxwell e derivaremos a equação paraxial de Helmholtz. Tendo em vista que o MAO foi estudado pela primeira vez na aproximação paraxial, e que durante algum tempo pareceu ser uma quantidade bem definida apenas dentro dessa aproximação. Analisaremos uma família de soluções da equação de onda paraxial que constitui os feixes Laguerre – Gauss bem como a caracterização e geração desses modos de luz associados ao momento angular orbital bem definido.

No capítulo 3, mostraremos, teórico e experimentalmente, que também é possível demultiplexar estados de MAO coerentes quando um feixe que carrega múltiplos estados se propaga em um sistema com dois elementos difrativos, uma máscara de fase contendo a transformação espiral e a de correção. Desta forma, contribuiremos diretamente com futuros avanços no campo da comunicação óptica, uma vez que a capacidade de envio de dados está fortemente ligada a quantidade de estados de MAO que se pode classificar de uma única vez.

2 ESTADOS DE MOMENTO ANGULAR ORBITAL (MAO)

2.1 Feixes Laguerre Gauss

A luz é uma onda eletromagnética constituída de campos elétricos \mathbf{E} e magnéticos \mathbf{B} oscilantes e perpendiculares entre si. Tendo isso em vista, podemos descrever a luz usando as equações de Maxwell [18] na forma diferencial no vácuo, que apresentam ausência de densidade de cargas ρ e densidade de corrente \mathbf{j} , podendo ser escritas da seguinte forma,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \text{Lei de Gauss (Eletrostática)} \quad (1.1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{Lei de Gauss (Magnetostática)} \quad (1.1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{Lei de Faraday} \quad (1.1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \text{Lei de Ampère} \quad (1.1.4)$$

Para derivarmos as equações do tipo onda de \mathbf{E} e \mathbf{B} vamos aplicar o rotacional na lei de Faraday, levando em conta a lei de Gauss e usando a identidade vetorial $\nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \cdot \mathbf{A}$, podemos chegar na equação do tipo onda para \mathbf{E} ,

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (1.1.5)$$

De maneira análoga, calculamos o rotacional na lei de Ampère e chegamos na equação de onda para \mathbf{B} ,

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (1.1.6)$$

Com isso, comparando as Eqs. (1.1.5) ou (1.1.6) com a equação de onda num espaço de dimensão 3 [19] chegamos na velocidade da luz,

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}. \quad (1.1.7)$$

Para avaliar v , Maxwell usou os resultados de experimentos elétricos realizados em 1856 em Leipzig por Wilhelm Weber (1804-1891) e Rudolph Kohlrausch (1809-1858). Utilizamos ϵ_0 e μ_0 em unidades modernas para estimar o valor de v ,

$$\epsilon_0 \mu_0 \approx (8.85 \times 10^{-12} \text{ s}^2 \cdot \text{C}^2 / \text{m}^3 \cdot \text{kg}) (4\pi \times 10^7 \text{ m} \cdot \text{kg} / \text{C}^2)$$

Ou,

$$\epsilon_0 \mu_0 \approx 11.12 \times 10^{-18} \text{ s}^2 / \text{m}^2$$

Essa análise brilhante foi um dos grandes triunfos intelectuais da ciência. Tornou-se habitual designar a velocidade da luz no vácuo pelo símbolo c , que vem da palavra latina *celer*, que significa rápido. Ao substituirmos o valor de $\epsilon_0 \mu_0$ na equação 1.1.7, chegamos no valor estimado da velocidade da luz,

$$c \approx 2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s}$$

A seguir, consideramos campos elétricos e magnéticos complexos e limitamos o nosso estudo a feixes monocromáticos com frequência angular ω . Podemos separar campo elétrico em uma parte espacial e outra dependente do tempo $\exp(-i\omega t)$, [20]

$$\mathbf{E} = [\mathcal{E} \exp(-i\omega t)]. \quad (1.1.8)$$

Substituindo essa solução na equação de onda do campo elétrico Eq. (1.1.5) obtemos a equação de Hemholtz para \mathcal{E} :

$$\nabla^2 \mathcal{E} + k^2 \mathcal{E} = 0, \quad (1.1.9)$$

onde $k = \frac{\omega}{c}$ é o módulo do vetor de onda. A forma vetorial da equação de Helmholtz pode ser transformada em uma equação escalar, pois consideramos campos vetoriais que tem polarização transversal ao eixo óptico que está ao longo da direção z [21]. Escrevemos, portanto,

$$\mathcal{E} = \mathbf{t} \xi(\mathbf{r}), \quad (1.1.10)$$

tal que \mathcal{E} é o campo elétrico e \mathbf{t} é o vetor de polarização constante. Substituímos a equação (1.1.10) na equação (1.1.9) e obtemos a equação escalar de Helmholtz,

$$\nabla^2 \xi + k^2 \xi = 0. \quad (1.1.11)$$

A equação (1.1.11) é o ponto inicial para a solução da forma exata de feixes de luz com momento angular orbital. Para chegarmos na aproximação paraxial, consideramos uma onda plana que se propaga na direção z , a qual tem amplitude $u(\mathbf{r})$ e fase $\exp(ikz)$. Tal onda é expressa como:

$$\xi(\mathbf{r}) = u(r) \exp(ikz). \quad (1.1.12)$$

Substituímos a solução (1.1.12) na equação escalar de Helmholtz (1.1.11), temos

$$\nabla^2 \xi(\mathbf{r}) = (\nabla^2 u) \exp(ikz) + 2ik(\nabla u) \cdot \exp(ikz) - k^2 u \exp(ikz). \quad (1.1.13)$$

Portanto, podemos escrever,

$$(\nabla^2 + k^2)\xi = \left\{ \nabla^2 u + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} \right\} \exp(ikz) = 0, \quad (1.1.14)$$

de modo que

$$\nabla_t^2 u + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (1.1.15)$$

Essa equação diferencial pode ser aproximada desprezando a derivada segunda de u em relação a z em comparação com os outros dois termos. Se a seção transversal mudar apenas lentamente com z , a variação transversal do perfil pode se tornar dominante, de modo que temos a primeira aproximação [20]:

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right| \ll |\nabla_t^2 u|. \quad (1.1.16)$$

A segunda estimativa para a aproximação paraxial é o perfil variar lentamente em z , de forma que a segunda derivada será muito menor que a primeira derivada multiplicada pelo número de onda [20]:

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right| \ll k \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|. \quad (1.1.17)$$

A equação diferencial (1.1.15) se reduz a,

$$\nabla_t^2 u + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad (1.1.18)$$

onde $\nabla_t^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ é o laplaciano transverso. A Eq. (1.1.18) é a equação paraxial de Helmholtz. Essa equação apresenta como solução em coordenadas cartesianas os modos Hermite Gauss [22].

Quando realizamos na equação paraxial de Helmholtz uma mudança de variável de coordenadas cartesianas para cilíndricas a partir de $x = \rho \cos \phi$, $y = \rho \sin \phi$ e $z = z$. A equação paraxial toma a seguinte forma,

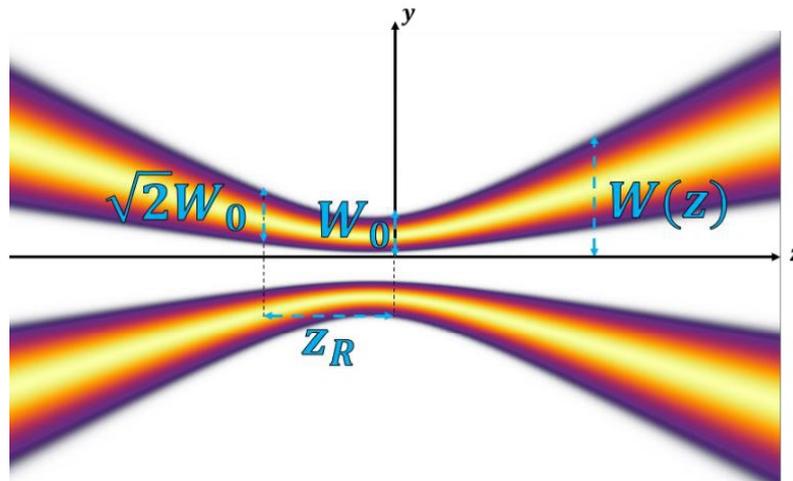
$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right) u_{mp}^{LG} = 0, \quad (1.1.19)$$

onde ρ é a coordenada radial e ϕ é o ângulo azimutal. A solução da Eq. (1.1.19) descreve os feixes Laguerre-Gauss na qual a amplitude é expressa abaixo,

$$\begin{aligned} u_{mp}^{LG} = & C_{mp}^{LG} \frac{w_0}{w(z)} \left[\frac{\rho\sqrt{2}}{w(z)} \right]^{|m|} L_p^{|m|} \left[\frac{\rho^2}{w^2(z)} \right] \\ & \times \exp\left(-\frac{\rho^2}{w^2(z)}\right) \exp\left(-ik \frac{\rho^2 z}{2(z_R^2 + z^2)}\right) \exp(im\phi) \\ & \times \exp\left[i(|m| + 2p + 1) \tan^{-1} \frac{z^2}{z_R^2}\right]. \end{aligned} \quad (1.1.20)$$

Nessa equação, w_0 é a menor cintura do feixe para $z = 0$, $w(z) = w_0 \sqrt{1 + z^2/z_R^2}$ é a cintura do feixe para qualquer z , $z_R = kw_0^2/2$ é o comprimento de Rayleigh e o termo $(2p + |m| + 1) \tan^{-1} z^2/z_R^2$ é a fase de Gouy [22]. Essas grandezas estão representadas na figura 1 abaixo. $L_p^{|m|}$ são os polinômios de Laguerre e C_{mp}^{LG} é a constante apropriada de normalização.

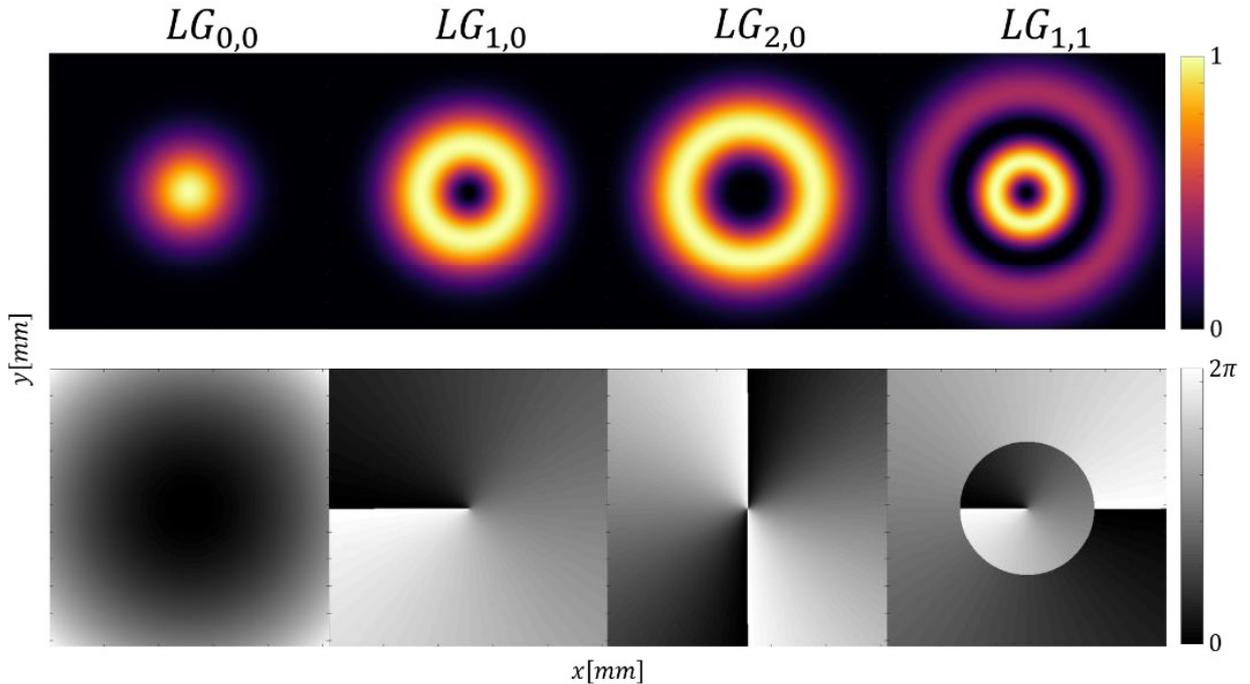
Figura 1: Propagação dos Feixes Laguerre Gauss



Fonte: Autor, 2020.

Apresentamos na figura 2 diferentes padrões de intensidades e de fase para diferentes números inteiros m e p , onde p está relacionado com o número de anéis do perfil de intensidade do feixe e m está relacionado com a quantidade de vezes que a fase varia de 0 a 2π . Quanto maior os valores de m , maiores serão os anéis luminosos.

Figura 2: Perfis de intensidades e fases dos feixes Laguerre Gauss.



Fonte: Autor, 2020.

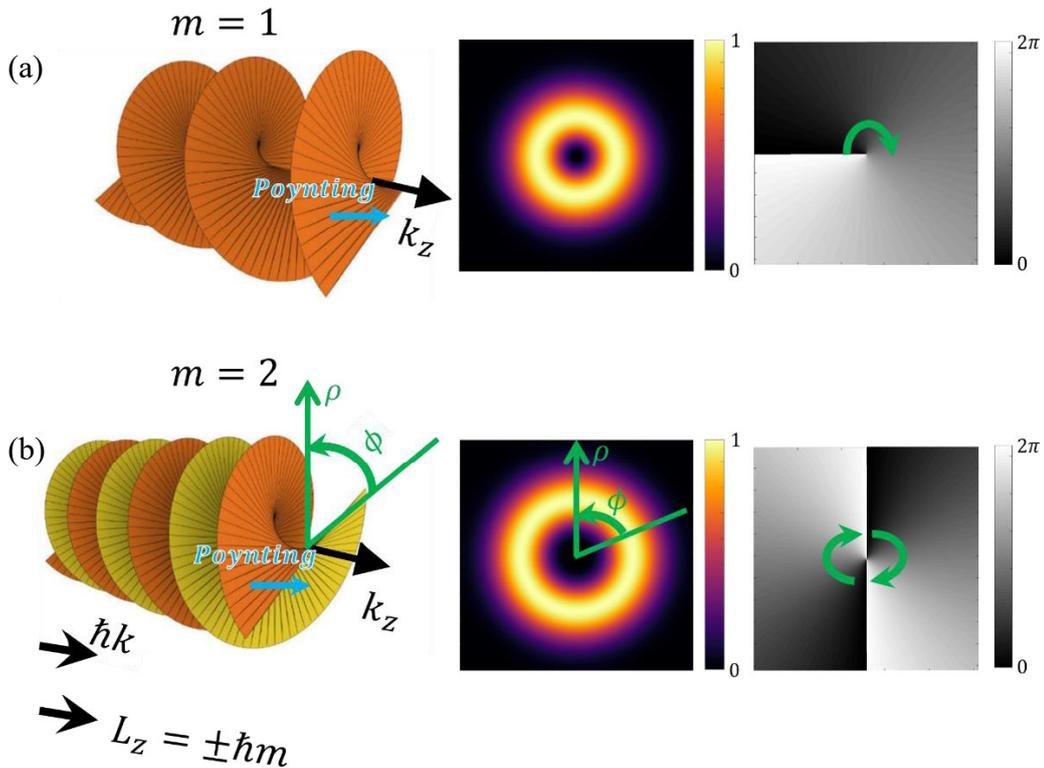
Esses feixes formam uma base ortonormal devido as propriedades de ortogonalidade dos polinômios generalizados de Laguerre. Eles são ortonormais nos dois índices de integração ρ e ϕ , obedecendo a seguinte relação,

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} \rho d\rho u_{np}^{LG}(\rho, \phi, z) [u_{np}^{LG}(\rho, \phi, z)]^* = \delta_{nm} \delta_{pq}. \quad (1.1.21)$$

A presença do termo de fase azimutal $\exp(im\phi)$ na Eq. (1.1.20) faz com que o estudo de feixes Laguerre - Gauss sejam de grande interesse científico, pois carregam Momento Angular Orbital (MAO) bem definido de $\pm m\hbar$ por fóton independente da polarização da luz. A quantidade total de MAO que um feixe de luz transporta é $\pm m\hbar N$ onde N é o número de fótons. Portanto, m é a carga topológica do feixe, número esse que está intrinsicamente relacionado com a orientação e módulo do MAO.

Diferentemente das ondas com superfície de fase plana, os feixes com a fase azimutal $\exp(im\phi)$ apresentam frentes de ondas com estrutura helicoidal ao longo do eixo de propagação implicando que no espaço livre, as frentes de onda não são perpendiculares a direção de propagação do feixe e, portanto, o vetor de Poynting não é paralelo a direção de propagação. Deste modo, é intuitivo pensar que o vetor de Poynting tem uma componente azimutal e outra radial à medida que se propaga, como de fato acontece. A componente azimutal é a responsável pelo surgimento do momento angular orbital, enquanto a componente radial contribui para a divergência do feixe ao ser propagado [23]. Na figura 3, o vetor de Poynting está ilustrado pela seta azul.

Figura 3: Modos (a) $LG_{1,0}$ e (b) $LG_{2,0}$ com suas estruturas de fase helicoidal, seus respectivos perfis de intensidade e de fase no plano transverso.



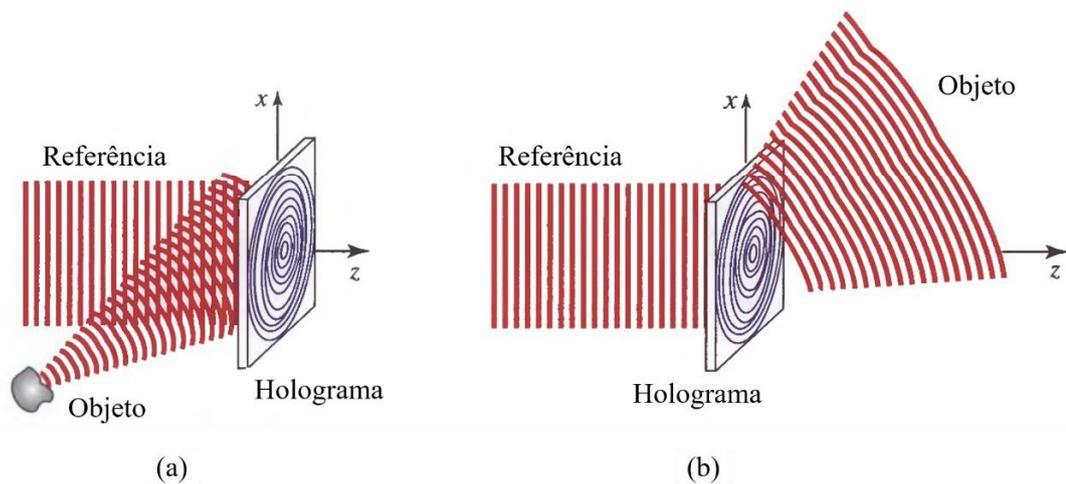
Fonte: Adaptado de [24], 2016.

Como a componente azimutal do vetor de Poynting circula em torno do eixo do feixe, cria uma singularidade no centro da fase, onde a intensidade é nula, conhecida na óptica como vórtice óptico. Na figura 3 vemos que na vizinhança da singularidade do feixe a sua fase aumenta ou diminui com a carga topologia m como múltiplo de 2π , tal que para $m = 2$ a fase varia do ângulo 0 até 4π , comportamento esse específico para feixes com a fase $\exp(im\phi)$.

2.2 Geração e Caracterização de Estados de Momento Angular Orbital

Uma maneira eficiente para gerar feixes Laguerre - Gauss, assim como outros tipos de feixes, é o uso de hologramas que são obtidos por métodos computacionais. Um holograma é a gravação do padrão de interferência entre o feixe de interesse com um feixe de referência, em geral uma onda plana [22]. Ao iluminarmos o holograma com o feixe de referência, reconstruímos o feixe de interesse pela difração da luz. A figura 4 ilustra este processo.

Figura 4: (a) Gravação de um holograma e (b) processo de reconstrução do feixe desejado.

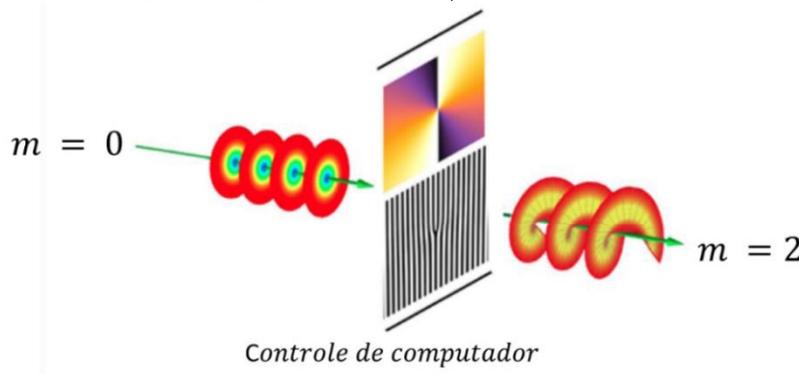


Fonte: Adaptado de [22], 2007.

Utilizamos ao longo desse trabalho os hologramas gerados por computador, sendo enviados eletronicamente para um dispositivo que modula espacialmente a forma da frente de onda da luz, por meio da variação dos índices de refração. Tal dispositivo é conhecido como modulador espacial de luz “Spatial Light Modulator”, SLM, o qual é constituído de uma tela de cristal líquido onde se grava o holograma gerado numericamente. Portanto, o método clássico difere dos hologramas gerados por computador principalmente no processo de gravação, pois no primeiro caso devemos gravar um padrão de intensidade em uma transparência, enquanto no segundo caso usamos o cristal líquido do SLM para gravar o holograma calculado numericamente [25-26].

A Figura 5 mostra o padrão de interferência entre uma onda plana e o feixe Laguerre – Gauss, “padrão bifurcado”, que ao ser iluminado por uma onda plana de um laser convencional é transformado em feixes LG com momento angular orbital [27].

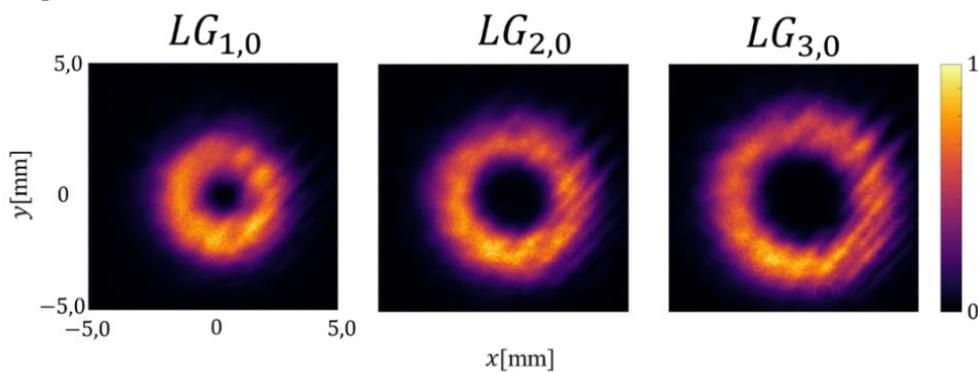
Figura 5: O holograma que contém o padrão bifurcado gerado em computador modula o modo gaussiano para o modo $LG_{2,0}$.



Fonte: Adaptado de [28]

Para gerar experimentalmente campos complexos escalares arbitrários foi utilizada uma classe de hologramas de fase gerados por computador que os codificam e os reconstruem com uma alta qualidade [26]. Na figura 6 apresentamos feixes Laguerre – Gauss com três exemplos de perfis transversais para $m = 1$, $m = 2$ e $m = 3$, respectivamente, gerados utilizando a técnica holográfica desenvolvida por Victor Arrizón *et al* [26].

Figura 6: Perfil de intensidade para feixes Laguerre – Gauss com $m = 1$, $m = 2$ e $m = 3$, respectivamente.

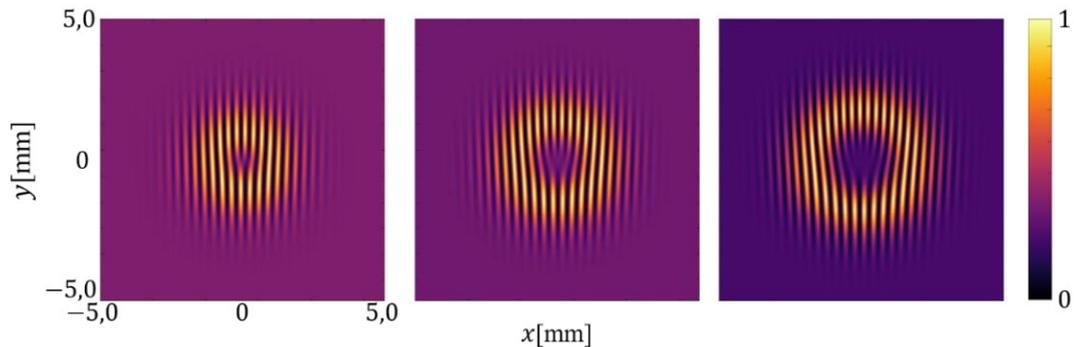


Fonte: Autor, 2020.

Ao produzir feixes de luz Laguerre Gauss em laboratório é importante caracterizar o quanto de Momento Angular Orbital esses feixes carregam para fazermos isso, devemos identificar o valor da carga topológica do feixe. A primeira técnica estudada é a interferência com uma onda plana, onde na singularidade de fase do feixe temos um padrão de bifurcação e o número de franjas desse padrão representa a carga topológica [29].

Na figura 7 mostramos padrões de interferência para $m = 1$, $m = 2$ e $m = 3$, respectivamente. Onde o valor das cargas topológicas está relacionado com o número de franjas nas bifurcações, sendo para $m = 1$, uma franja, para $m = 2$ duas franjas e para $m = 3$ três franjas. Observamos que à medida que a carga topológica do feixe aumenta fica mais difícil a sua identificação pois o número de bifurcações aumenta, limitando muito a técnica interferométrica para caracterizar MAO de um feixe.

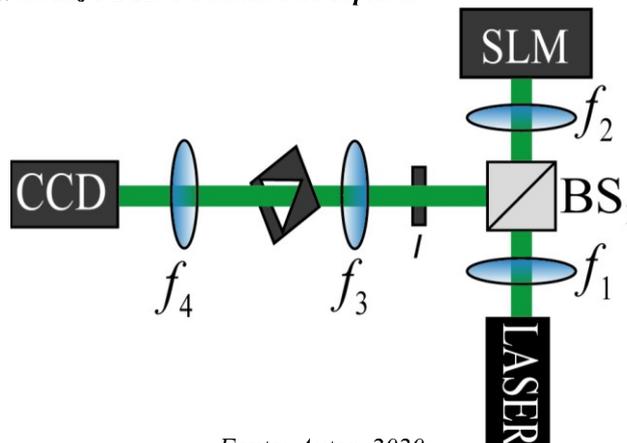
Figura 7: Padrão de interferência entre onda plana no regime não colinear e feixes Laguerre-Gauss com cargas topológicas $m=1$, $m=2$ e $m=3$, respectivamente.



Fonte: Autor, 2020.

Como vimos anteriormente o método interferométrico não é adequado para valores maiores de cargas topológicas. Portanto, estudamos um método que usa o padrão de difração na aproximação de Fraunhofer de um feixe Laguerre por uma abertura triangular [12]. O padrão de difração tem a forma de uma rede triangular de máximos de intensidade relacionado com o valor da carga topológica m . Assim, é possível definir um método simples e viável para determinar a magnitude e o sinal da carga topológica de um feixe possuindo momento angular orbital.

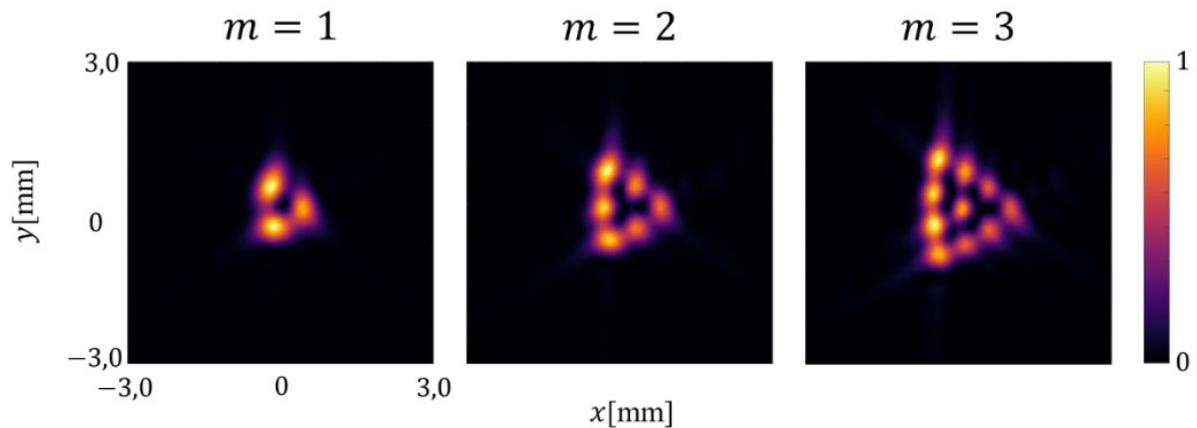
Figura 8: Configuração experimental. (f_1, f_2, f_3, f_4) são as lentes, BS_1 é o divisor de feixes, I é o filtro espacial ou íris, SLM é o modulador espacial da luz e CCD é a câmera de captura.



Fonte: Autor, 2020.

A configuração experimental, foi montada conforme a figura 8. Utilizamos o laser argônio operando à 514 nm que é expandido pela lente $f_1 = 30\text{ mm}$ e colimado pela lente $f_2 = 500\text{ mm}$ e ilumina o holograma com o padrão bifurcado, gerando um feixe possuindo MAO o qual é selecionado na ordem de difração desejada que sai do “SLM” utilizando uma íris, I. A lente $f_3 = 300\text{ mm}$ colima o feixe que emerge da íris e o feixe colimado incide na abertura triangular com lados de 3 mm . Usando uma lente de foco $f_4 = 200\text{ mm}$, obtivemos o padrão de difração do campo distante no plano focal da lente. Os padrões de difração foram gravados por uma câmera CCD (Charge-Coupled Device).

Figura 9: Resultados experimentais para a distribuição de intensidade do padrão de difração de feixes Laguerre-Gauss na abertura triangular com cargas topológicas $m=1$, $m=2$ e $m=3$, respectivamente.



Fonte: Autor, 2020.

Com os resultados experimentais obtidos na figura 9, podemos observar que o valor da carga topológica m está diretamente relacionado aos pontos externos da estrutura formando o triângulo. A carga total dada por $|m| = N - 1$, onde N é o número de pontos em qualquer lado do triângulo. Outra observação é que se o sentido da carga topológica for invertido ($m < 0$), a distribuição do campo no plano de Fourier será girada de 180° em relação à anterior [12].

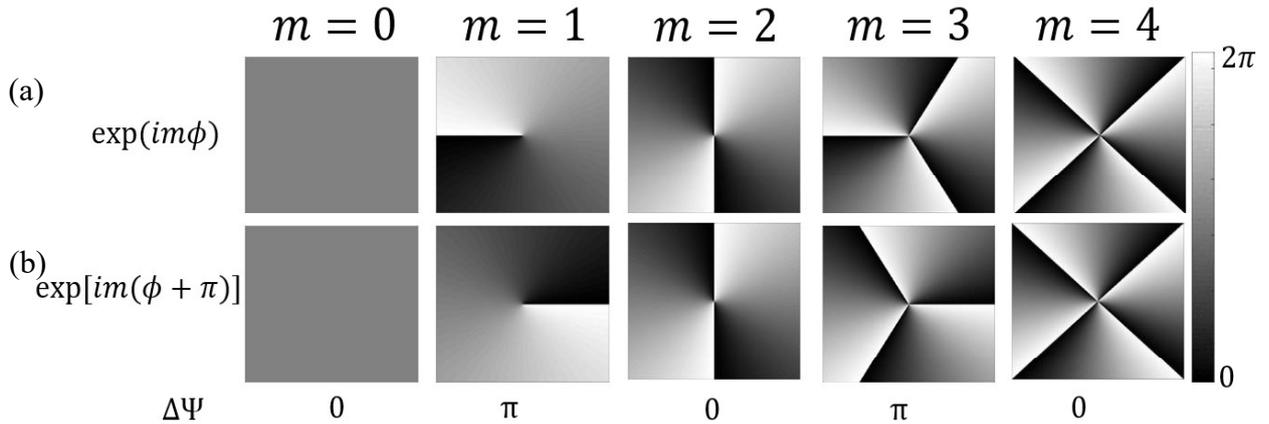
Essa técnica difrativa nos permite encontrar tanto o sinal através da orientação da rede formada em relação a abertura, quanto a magnitude da carga topológica através da contagem do número de máximos de intensidade do lado externo de um triângulo que aparece no padrão de difração.

2.3 Método interferométrico para classificação dos Estados de Momento Angular Orbital

Pelo o que já foi visto anteriormente, sabemos que fótons transportam Momento Angular Orbital (MAO). Em 2002, Leach et al [13], propuseram um método interferométrico para medir MAO de fótons. Esse interferômetro de Mach-Zehnder, além de classificar diferentes estados de momento angular orbital, possibilitou de-multiplexar superposições de feixes Laguerre – Gauss ímpares e pares, codificando dois bits de informação em um único fóton. Além disso, mostrou-se a possibilidade de multiplexar e de-multiplexar a informação utilizando estados de MAO da luz.

O dispositivo apresentado no artigo usa o fato de que modos transversais que têm o termo $\exp(im\phi)$, ao serem girados de ângulo α se transformam na forma $\exp[im(\phi + \alpha)]$, onde $\Delta\psi = m\alpha$ é variação sofrida na fase do feixe. Para superposições de feixes com diferentes m , o feixe pode sofrer variações de fase controladas para cada valor de m através da variação de α .

Figura 10: Representações em escala de cinza de perfis de fase de feixes (a) não rotacionados e (b) rotacionados com uma estrutura de fase $\exp(im\phi)$. Por exemplo, para $a = \pi$. Feixes com cargas topológicas m (pares) estão em fase com o feixe original e feixes com m (ímpares) estão fora de fase por π .

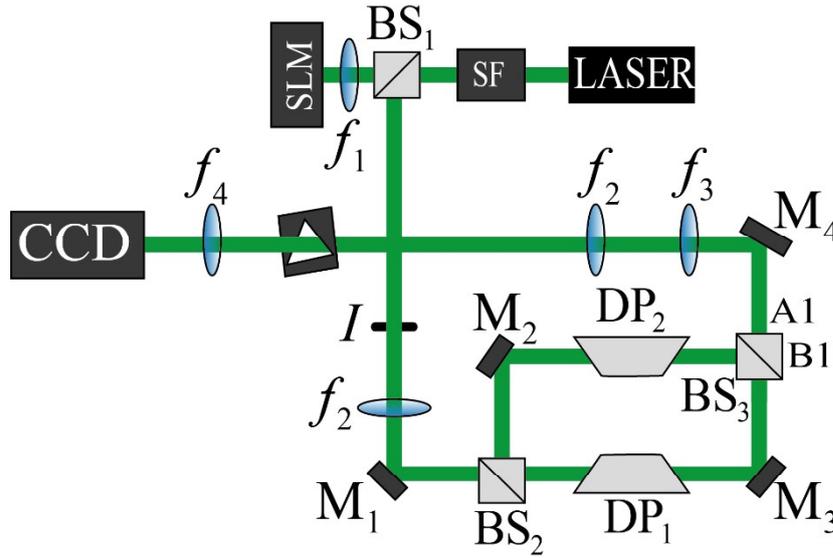


Fonte: Autor, 2020.

A figura 10 mostra representações em escala de cinza de perfis de fase de feixes não rotacionados (primeira linha) e girados (segunda linha). Por exemplo, para $a = \pi$, feixes com cargas topológicas m par estão em fase com o feixe com original e feixes com m ímpar estão fora de fase por π .

O princípio proposto é ampliado para nos permitir testar um número arbitrariamente grande de estados MAO, que pelo conceito descrito acima pode ser realizado na forma de um interferômetro Mach-Zehnder com um prisma de Dove inserido em cada braço que adiciona diferentes ângulos de rotação. Com isso, realizamos um setup experimental para obter e estudar os conceitos.

Figura 11: Configuração experimental, onde (f_1, f_2, f_3, f_4) são as lentes, (BS_1, BS_2) são os divisores de feixes, SLM é o modulador espacial da luz, (I, SF) são os filtros espaciais ou íris, (M_1, M_2, M_3, M_4) são os espelhos, (DP_1, DP_2) são os prismas de dove e (CCD) é a câmera de captura.



Fonte: Autor, 2020.

O esquema de classificação do momento angular da luz proposto, apresenta três estágios de classificação. Porém, para demonstração do princípio usamos apenas o primeiro estágio, como visto na figura 11. O feixe de luz plana gerado por um Laser de 532 nm é modulado no SLM e passa a ser uma superposição de feixes Laguerre-Gauss de cargas topológicas ímpares e pares. A primeira ordem de difração gerada pelo holograma produzido no SLM foi selecionada pela íris.

O interferômetro Mach-Zehnder foi montado no experimento composto por dois espelhos 100% refletores e dois “beam splitter” que são semi-espelhos que transmitem 50 % da luz neles incidentes. Cada braço do interferômetro apresenta o mesmo tamanho de 30 cm , fazendo com que não exista diferença de fase devido a uma diferença de caminho entre os raios luminosos. Acrescentamos dois prismas “doves”, um perpendicular ao outro, nos braços do interferômetro para realizarem o acréscimo de fase relativa da forma $\exp[im\phi] \rightarrow \exp[im(\phi + \pi)]$. Desta maneira, na saída do interferômetro temos a seguinte superposição,

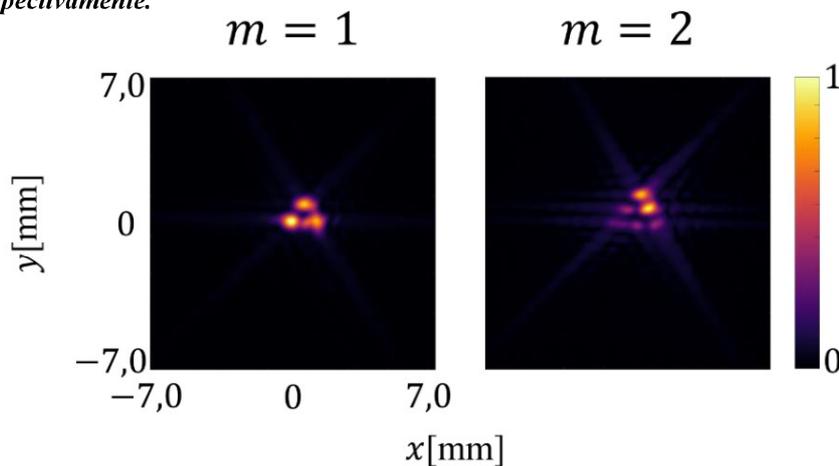
$$A1 = LG_i \pm rot180(LG_i). \quad (1.1.22)$$

Onde LG_i se refere à superposição de feixes que entra no interferômetro e o sinal \pm pode ser ajustado usando-se uma pequena placa de vidro colocada em um dos braços do interferômetro, ou seja, a placa de vidro serve para ajustar a caminho ótico de um braço em relação ao outro. Cada sinal significa que vai ter interferência destrutiva para um dos modos com carga par ou ímpar nas saídas A1 ou B1, indicadas na figura 11, ou seja, em cada saída vai ter apenas um dos modos e não a superposição.

A nossa configuração experimental consta de um laser operando em 532 nm ; das lentes L_1, L_2, L_3, L_4 e L_5 de comprimentos focais $f_1 = 500 \text{ mm}$, $f_2 = 100 \text{ mm}$, $f_3 = 31,7 \text{ mm}$ e $f_4 = 300 \text{ mm}$, respectivamente; de três divisores de feixes (BS); de quatro espelhos (M_i), ($i = 1,2,3,4$); de um modulador de luz: Hamamatsu X10468-01(SLM); de uma íris (I) que seleciona a primeira ordem de difração do holograma que gera um dado modo LG; e de uma câmera CCD usada como detector de intensidade.

A carga topológica m do feixe é medida usando o método difrativo da abertura triangular, também mostrada na figura 11, nas saídas A1 e B1. Com isso chegamos aos seguintes resultados: gerando uma superposição de feixes Laguerre com cargas topológicas m pares e ímpares, essas componentes são “Classificados” em um canal par A1 e um canal ímpar B1. Os resultados experimentais obtidos são apresentados na Figura 12, onde à esquerda temos a saída A1 e à direita temos a saída B1.

Figura 12: Resultados experimentais para o método de difrativo da abertura triangular, com a saída das portas B1 e A1, respectivamente.



Fonte: Autor, 2020.

3 SEPARAÇÃO DE ESTADOS DE MOMENTO ANGULAR ORBITAL

No capítulo anterior vimos que o método interferométrico se torna muito complexo e ineficiente à medida que aumentamos o número de modos na superposição de estados com Momento Angular orbital. Partindo dessa dificuldade em classificar modos com MAO, nesse capítulo, estudaremos dois métodos baseados nas transformações de coordenadas [30-32] para multiplexar e de-multiplexar estados de MAO utilizando tanto a transformação log-polar [15] quanto a transformação em espirais logarítmicas [17], de modo a aumentar a capacidade de envio de informação em sistema de comunicação óptica.

O primeiro trabalho que falaremos será a transformação log-polar [15], que mapeia círculos em linhas paralelas. Este método consiste na transformação de modos ópticos de entrada, possuindo uma fase azimutal, em ondas planas com deslocamento lateral proporcionais à carga topológica do vórtice no plano de saída. Essa abordagem é simples e eficiente, porém, devido ao gradiente de fase dos feixes mapeados ser limitado na faixa de 0 a 2π , observa-se sobreposição entre modos adjacentes.

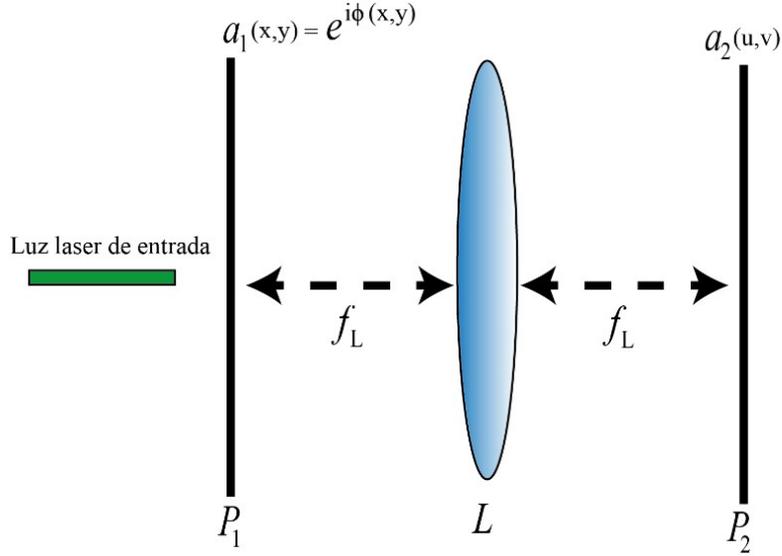
A dificuldade de se obter uma maior resolução do método de separação de modos de luz usando a transformação log-polar foi sanada por Wen et al [17], pois em vez de transformar círculos em linhas, foi proposto uma fase que mapeia espirais logarítmicas em linhas paralelas. Isso possibilitou classificar modos de MAO com resolução significativamente mais alta.

Dessa maneira, mostraremos, teórica e experimentalmente, que também é possível de-multiplexar estados de MAO coerentes utilizando um sistema composto de dois elementos difrativos, uma máscara de fase de transformação espiral e a de correção.

3.1 Transformação log-polar e Transformação espirais logarítmicas

Um método para projetar as máscaras de fase requeridos para uma transformação de coordenadas usa a aproximação de fase estacionária que foi desenvolvido por Olof Bryngdahl [30-32]. O sistema óptico para transformação de coordenadas está representado na figura 13. Onde a lente L tem uma distância focal f fazendo a transformada de Fourier do plano P_1 para P_2 .

Figura 13: Sistema óptico para transformação de coordenadas. A lente L tem distância focal f e realiza a transformada de Fourier do plano P_1 no plano P_2 .



Fonte: Autor, 2020.

Um elemento óptico holográfico com função de fase $\phi(x, y)$ é colocado no plano P_1 . A amplitude complexa $a_2(u, v)$ no plano focal P_2 da lente, é dada aproximadamente por meio da transformada de Fourier,

$$a_2(u, v) = \frac{e^{-ikz}}{i\lambda f} \iint_{-\infty}^{\infty} a_1(x, y) \exp \left\{ i\phi(x, y) + \frac{ik}{2f} [(u-x)^2 + (v-y)^2] \right\} dx dy. \quad (1.1.23)$$

Usando a condição de fase estacionária, temos que:

$$\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} = \frac{k}{f} (u - x), \quad \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} = \frac{k}{f} (v - y). \quad (1.1.24)$$

Com base nisso, Berkhout et al [15], utilizaram essas condições para realizar o mapeamento de $(x, y) \rightarrow (u, v)$, de maneira que (x, y) é o plano de entrada e (u, v) de saída. Nessa abordagem as coordenadas do primeiro elemento são dadas por, $v = a \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ e $u = -aln\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{b}\right)$ que substituindo nas Eqs. 1.124 e resolvendo as equações diferenciais obtemos a seguinte função de fase,

$$\phi_1(x, y) = \frac{2\pi a}{\lambda} \left[y \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - x \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{b}\right) + x \right], \quad (1.1.25)$$

onde λ é o comprimento de onda do feixe de entrada e f é a distância focal da lente. A fase de correção necessária também pode ser calculada pela aproximação de fase estacionária é dada por,

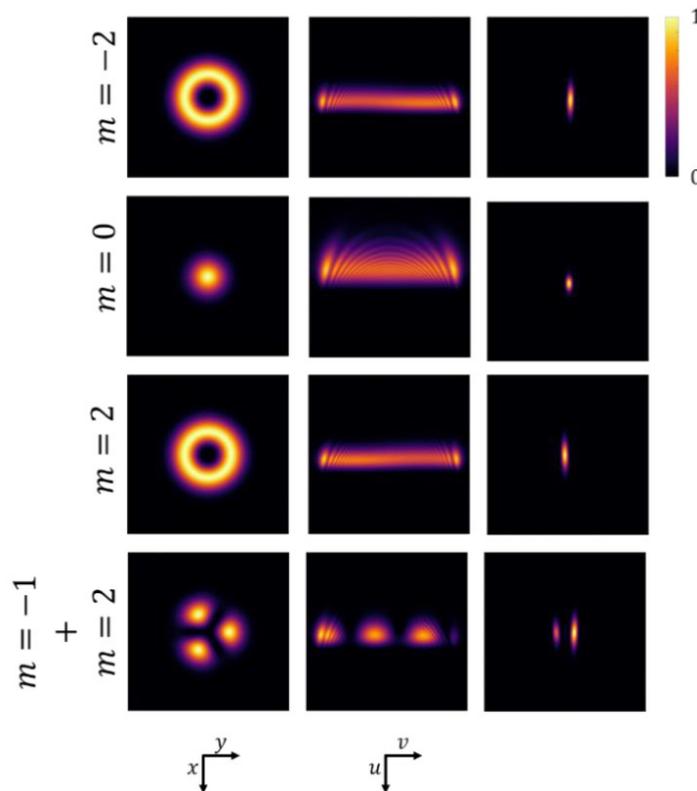
$$\phi_2(u, v) = -\frac{2\pi ab}{\lambda f} \exp\left(-\frac{u}{a}\right) \cos\left(\frac{v}{a}\right). \quad (1.1.26)$$

No plano de Fourier do elemento óptico de correção o feixe é focalizado e sofre um leve deslocamento horizontal que depende do valor da carga topológica. A magnitude deste deslocamento transverso é [15],

$$t = \lambda f m / 2\pi a. \quad (1.1.27)$$

Ao estudarmos a transformação log-polar, por meio de simulação, geramos a Figura 14. Vemos na primeira coluna os perfis dos feixes Laguerre Gauss com uma variedade de estados de Momento Angular Orbital. Na segunda coluna analisamos que um feixe de entrada com perfil de intensidade circular é desdobrado em um perfil de intensidade retangular com um gradiente de fase $2\pi m$. Conforme previsto, esse gradiente de fase faz com que os spots no plano de Fourier da lente, fiquem em posições diferentes, dependendo do valor da carga topológica.

Figura 14: Da esquerda para direita, a primeira coluna mostra as distribuições de intensidade dos feixes de entrada, enquanto que a segunda coluna de imagens exhibe os feixes transformados logo após o elemento de correção de fase. A última coluna mostra as imagens observadas no plano da CCD.



Fonte: Autor, 2020.

Para obter a transformação que mapeia espirais logarítmicas em linhas paralelas, foi considerado as mesmas condições de fase estacionária e a propagação paraxial de ondas luminosas entre dois planos paralelos separados de uma distância $2f$, onde o plano de entrada tem coordenadas (x, y) , e o de saída, (u, v) . Deste modo, o mapeamento do ponto (x, y) no ponto (u, v) pode ser dado no contexto da óptica de raios, de modo que a fase que realiza tal conexão, $F_Q = \exp[iQ(x, y)]$, tem um função de fase dado por,

$$Q(x, y) = \frac{k\beta}{f(a^2 + 1)} \left[(ax + y) \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) + (x - ay)\theta - (ax + y) \right], \quad (1.1.28)$$

em que $k = 2\pi/\lambda$ e λ é o comprimento de onda. As quantidades a e β são parâmetros constantes, f é a distância focal de uma lente colocada após o elemento de fase para realizar uma transformada de Fourier opticamente.

Além disso, r e θ são as coordenadas polares, mas a variável θ não é a convencional, uma vez que, dependendo da largura da cintura do feixe de incidente, pode assumir um conjunto ilimitado de valores. Estas duas variáveis são expressas da seguinte maneira

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad \theta = \theta_0 + 2l\pi, \quad (1.1.29)$$

onde

$$\theta_0 = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \in [0, 2\pi), \quad l = \left\lfloor \frac{1}{2\pi a} \ln\left(\frac{r}{r_0} e^{-a\theta_0}\right) \right\rfloor, \quad (1.1.30)$$

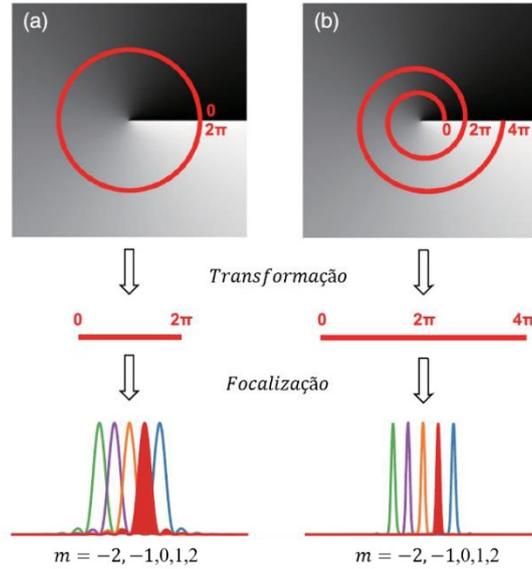
em que $\lfloor \blacksquare \rfloor$ é uma função maior inteiro menor ou igual ao argumento. Após a realização do mapeamento, utiliza-se uma fase corretora [33], $F_P = \exp[iP(u, v)]$, que deve ser colocada no plano de Fourier de F_Q . Esse elemento de correção de fase é dado por,

$$P(u, v) = \frac{kr_0\beta}{f(a^2 + 1)} \exp\left(\frac{au + v}{\beta}\right) \left[\sin\left(\frac{u - av}{\beta}\right) + a \cos\left(\frac{u - av}{\beta}\right) \right] \quad (1.1.31)$$

em que uma f é a distância focal de uma lente colocada após o elemento correção de fase. Enfatiza-se que as constantes, a e β , são as mesmas definidas na função $Q(x, u)$.

A figura 15 ilustra a comparação entre o método log-polar e a espiral logarítmica. A transformação espiral fornece um aumento natural de n vezes do gradiente de fase ao longo da frente da onda de saída, onde o número n , que é o número de giros da espiral, é limitado apenas pela largura do feixe do modo de entrada.

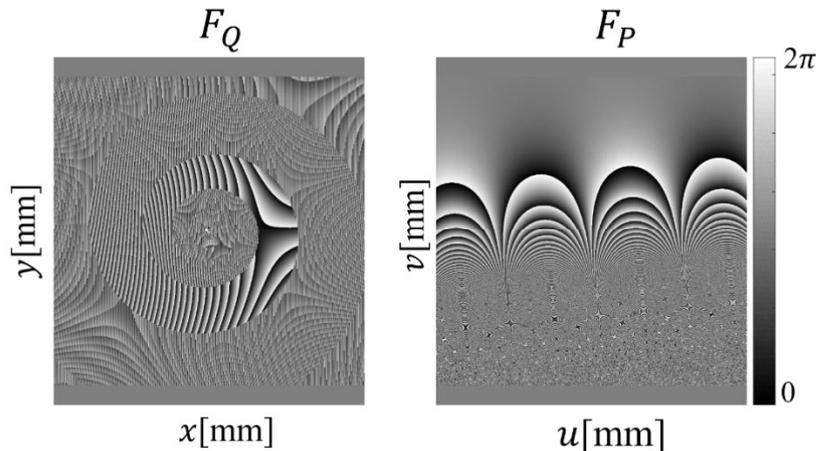
Figura 15: Em (a), tem-se a ilustração do princípio da transformação log-polar; em (b), é exibido o esquema de transformação espiral.



Fonte: Adaptado de [17].

É importante enfatizar que a primeira máscara de fase, F_Q , imprime ao feixe incidente deflexões para realização da transformação. Entretanto, no ponto em que se alcança o mapeamento desejado tem que ser colocado o segundo elemento de fase, F_P , que terá a função de compensar tais deflexões e a fase adquirida pela onda durante a propagação a partir de F_Q . A figura 16 mostra os padrões de fase nos respectivos planos transversos.

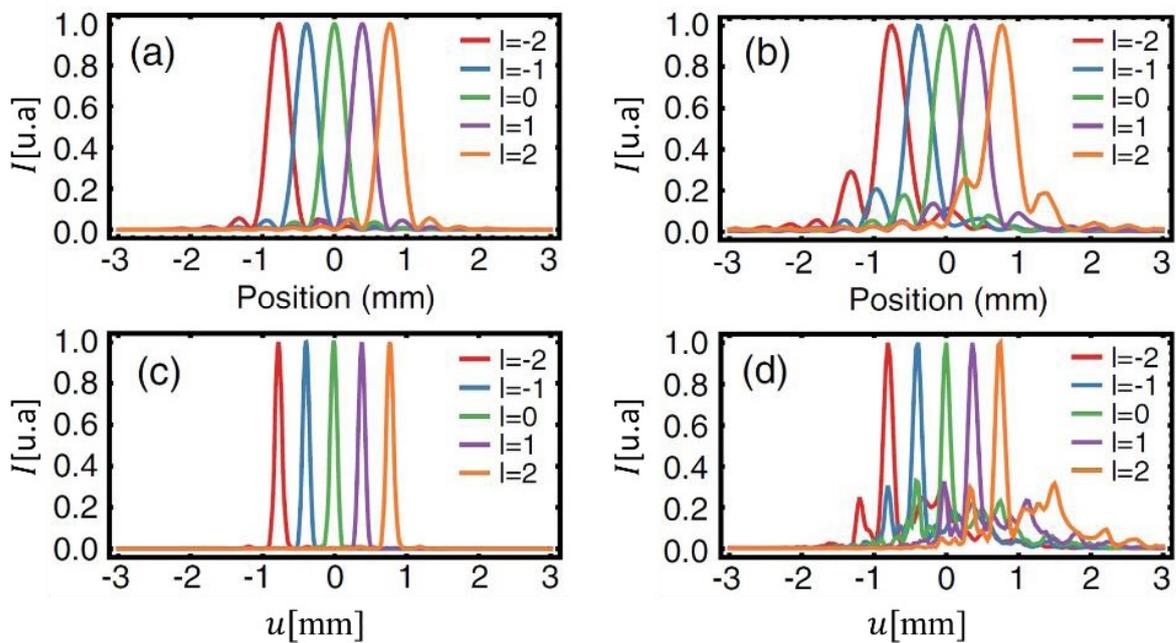
Figura 16: Padrões de distribuições de fases para transformação espiral Q e o elemento corretor P , respectivamente.



Fonte: Adaptado de [34].

Na figura 17, analisamos os resultados numéricos e experimentais de *Wen et al* [17], nota-se que há um aumento significativo da resolução quando a separação dos modos Laguerre Gauss é realizada com transformação espiral em comparação com o log-polar. Ao compararmos os resultados numéricos das figuras 17 (a) e 17 (c) ou os resultados experimentais das figuras 17 (b) e 17 (d), vemos que os perfis com os modos MAO separados no esquema espiral são claramente mais estreitos e menos sobrepostos do que os perfis correspondentes do esquema log-polar. Porém os perfis mostrados na figura 17 não constituem superposições de estados de MAO, mas sim a sobreposição numérica de cinco estados puros.

Figura 17: Em (a) e (b) é mostrado respectivamente os resultados numéricos e experimentais quando usado o método de transformação log-polar; já em (c) e (d) é exibido os gráficos dos dados simulados e via realização experimental para o esquema de transformação espiral.



Fonte: Adaptado de [17].

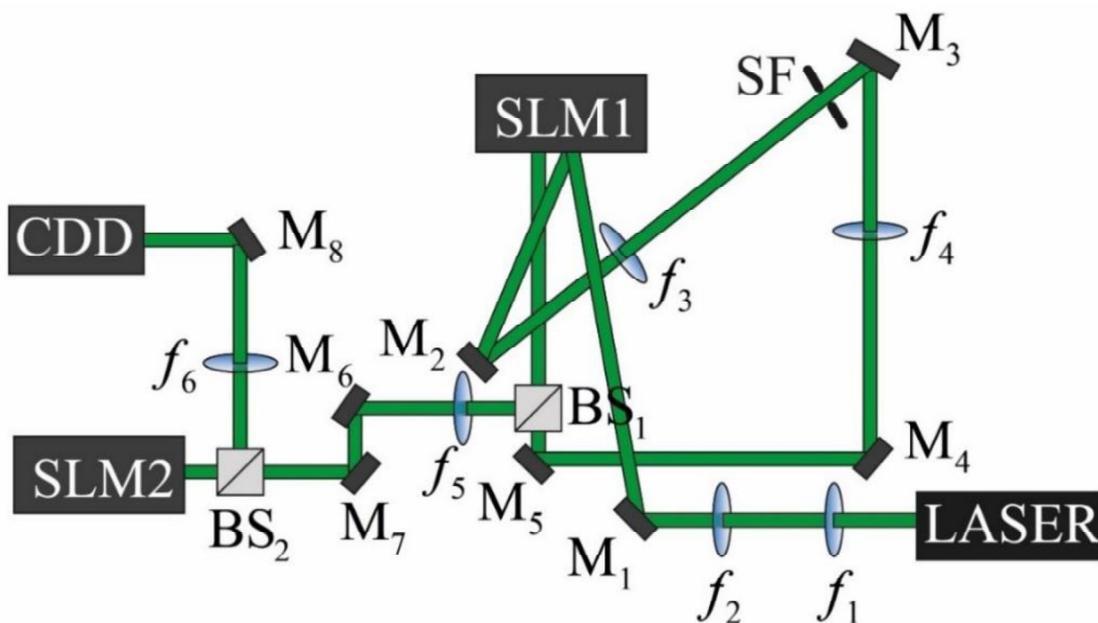
O trabalho citado em [17], classifica estados de MAO por meio do método da transformação espiral, não realizando de fato uma separação de um conjunto de modos multiplexados, como por exemplo uma superposição de modos Laguerre-Gauss. Em vez disso, demonstra apenas que é possível classificar um dado modo de acordo com seu deslocamento em relação ao estado fundamental, $m = 0$. Ao tomarmos conhecimento desta lacuna, incrementamos aos resultados uma efetiva separação de modos.

Nesta perspectiva, mostraremos, teórico e experimentalmente, que também é possível demultiplexar estados de MAO coerentes quando um feixe que carrega múltiplos estados se propaga em um sistema com dois elementos difrativos, uma máscara de fase contendo a transformação espiral e a de correção. Desta forma, contribuiremos diretamente com futuros avanços no campo da comunicação óptica, uma vez que a capacidade de envio de dados está fortemente ligada a quantidade de estados de MAO que se pode classificar de uma única vez.

3.2 Separação de Estados de MAO coerente

A separação dos modos se dará de acordo com seu deslocamento em relação ao estado fundamental, $m = 0$. A nossa configuração experimental consta de um laser operando em 532 nm (modelo: Ultralasers MSL-FN-532-200 mW); das lentes L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 e L_6 de comprimentos focais $f_1 = 2.8$ mm, $f_2 = 150$ mm, $f_3 = f_4 = f_5 = 300$ mm e $f_6 = 200$ mm, respectivamente; de dois divisores de feixes (BS); de oito espelhos (M_i), ($i = 1, 2, \dots, 8$); de dois moduladores de luz: Holoeye LETO (SLM1) e Hamamatsu X10468-01 (SLM2); de uma íris (I) que seleciona a primeira ordem de difração do holograma que gera um dado modo LG; e de uma câmera CCD usada como detector de intensidade.

Figura 18: Configuração experimental: SLM1 e SLM2 são os moduladores de luz; câmera CCD; M_1 a M_8 são espelhos; BS_1 e BS_2 são divisores de feixes; o comprimento focal das lentes são $f_1 = 2.8$ mm, $f_2 = 150$ mm, $f_3 = f_4 = f_5 = 300$ mm, e $f_6 = 200$ mm.



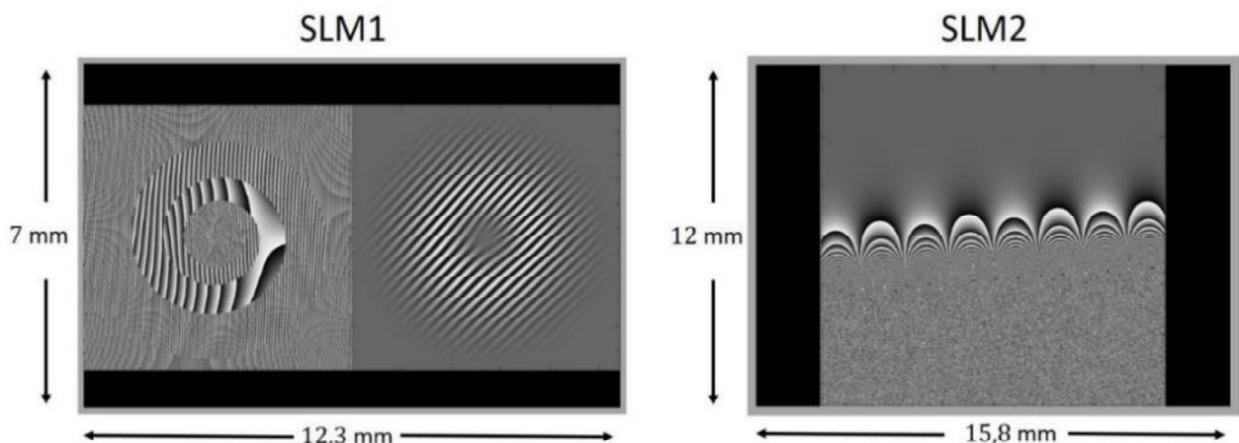
Fonte: Autor, 2020.

Os dados experimentais que serão apresentados posteriormente foram obtidos com o uso de dois moduladores de luz (SLM): o SLM1 comporta uma matriz de 1080×1920 pixels, com cada pixel tendo tamanho de 6.4×10^{-3} mm; enquanto que o outro dispositivo, SLM2, suporta uma matriz bem menor: 600×792 pixels, com tamanho de cada pixel sendo 20×10^{-3} mm. Deste modo, codificamos dois hologramas de 960×960 pixels de resolução cada, lado a lado, no SLM1: no lado esquerdo a transformação espiral e no direito a fase que gera uma dada superposição de modos LG. No SLM2 gravamos o holograma de correção que tem resolução de 600×600 pixels.

As lentes L_1 expande e L_2 colima o feixe laser, tornando-o uma onda plana que incide sobre o primeiro holograma. A lente L_3 realiza uma transformada de Fourier do holograma originando várias ordens de difração no plano de Fourier, no foco de L_3 , onde a íris seleciona a primeira ordem na qual está localizado o modo desejado.

A partir da íris, o feixe de luz começa a se expandir e a lente L_4 colima-o e o projeta perpendicularmente sobre a parte do SLM1 que foi codificado $Q(x, y)$. O feixe ganha essa fase e é submetido à uma transformada de Fourier por L_5 e incide no plano do SLM2 onde é gravado a correção de fase $P(u, v)$. A partir do SLM2 o feixe mapeado passa ter comportamento de uma onda plana colimada, $\exp(imx/\beta)$, e L_6 o focaliza no plano da CCD.

Figura 19: Esquema de gravação dos hologramas. No SLM1 é gravado Q e as fases que geram modos LG, enquanto no SLM2 é impresso a fase de correção.



Fonte: Adaptado de [34].

É importante salientar que dependendo do sinal da carga topológica do feixe gerado, a luz focalizada na CCD se deslocará para a direita ou para esquerda e a magnitude deste deslocamento será proporcional ao valor absoluto da carga topológica m . Além disso, o deslocamento teórico, t , entre modos adjacente é inversamente proporcional ao parâmetro de escala β [17], e sua forma funcional é dada por,

$$t = \frac{\lambda f_6}{2\pi\beta}. \quad (1.1.32)$$

3.3 Modelo da Propagação para os Feixes Coerentes

Apresentamos, agora, a formulação teórica da ideia conceitual do experimento com luz espacialmente coerente. A onda plana gerada no telescópio (lentes L_1 e L_2) $U_1(\mathbf{r}_1)$ atinge a primeira metade do SLM1 contendo um holograma que codifica o campo de interesse $h(\mathbf{r}_1)$, que neste caso estamos considerando superposições de feixes LG. O campo resultante é submetido à uma transformada de Fourier por uma lente de distância focal f_3 , o que dá origem a uma distribuição luminosa, $U_2(\mathbf{r}_2)$, sobre a segunda metade do SLM1 onde está gravado a fase $Q(\mathbf{r}_2)$.

$$U_2(\mathbf{r}_2) = \int U_1(\mathbf{r}_1) h(\mathbf{r}_1) \exp\left(\frac{2\pi i}{\lambda f_3} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2\right) d\mathbf{r}_1 \quad (1.1.33)$$

O campo obtido nesse processo é projetado sobre o SLM2 via transformação de Fourier pela lente de distância focal f_5 ,

$$U_3(\mathbf{r}_3) = \int U_2(\mathbf{r}_2) \exp[iQ(\mathbf{r}_2)] \exp\left(\frac{2\pi i}{\lambda f_5} \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3\right) d\mathbf{r}_2. \quad (1.1.34)$$

O campo na equação acima atinge o SLM2 que contém a fase $P(\mathbf{r}_3)$. Finalmente, a lente f_6 realiza uma transformada de Fourier do campo resultante, produzindo a distribuição de luz final no plano CCD,

$$U_4(\mathbf{r}_4) = \int U_3(\mathbf{r}_3) \exp[iP(\mathbf{r}_3)] \exp\left(\frac{2\pi i}{\lambda f_6} \mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{r}_4\right) d\mathbf{r}_3. \quad (1.1.35)$$

Portanto, o campo no plano da CCD é representado explicitamente por,

$$U_4(\mathbf{r}_4) = \iint U_2(\mathbf{r}_2) \exp[iQ(\mathbf{r}_2) + iP(\mathbf{r}_3)] \exp\left[-\frac{2\pi i}{\lambda(f_5 f_6)}(f_6 \mathbf{r}_2 + f_5 \mathbf{r}_4) \mathbf{r}_3\right] d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3, \quad (1.1.36)$$

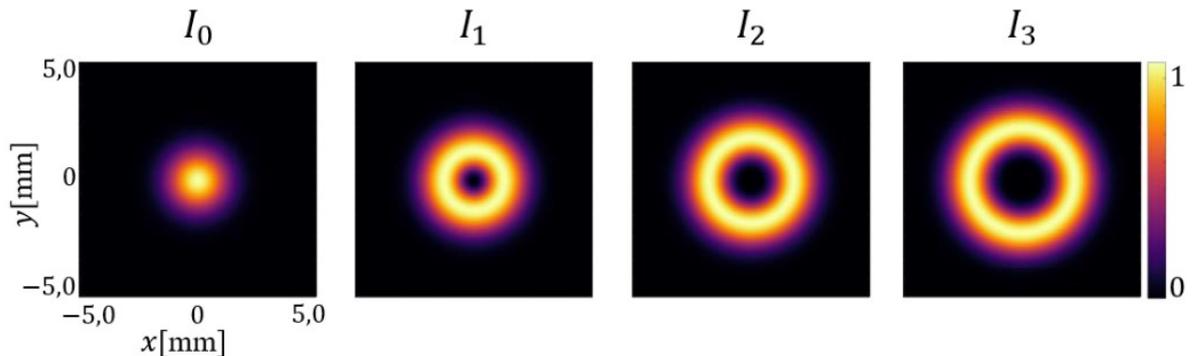
em que $U_2(\mathbf{r}_2)$ é algum modo LG. É importante salientar que, gerado um dado feixe LG, a função da lente L_4 é apenas colimá-lo. Além disso, como os $f_3 = f_4$, o feixe que incide na fase de mapeamento têm as mesmas dimensões da janela em que estava gravado o holograma que o gerou. Os resultados teóricos que mostraremos a seguir são obtidos pela simulação numérica da integral na Eq. (1.1.35).

3.4 Simulação e resultados experimentais para separação de estados de MAO

Para mostrar domínio sobre a técnica de classificar modos Laguerre Gauss com dois elementos ópticos utilizando a transformação em espiral proposta por Wen *et al* [17], classificamos sete estados de MAO ($-3 \leq m \leq 3$). Lembrando que as duas máscaras de fase tanto a contendo a transformação espiral quanto a fase de correção são hologramas fixos. Mudamos os hologramas dos feixes de entrada.

A figura 20 mostra os perfis transversais de intensidades dos feixes que utilizamos para a classificação de estados de MAO. Cada perfil tem sua respectiva carga topológica $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ da esquerda para a direita na figura 20: $I_0 = |LG_{\pm 0}|^2$, $I_1 = |LG_{\pm 1}|^2$, $I_2 = |LG_{\pm 2}|^2$ e $I_3 = |LG_{\pm 3}|^2$, respectivamente.

Figura 20: Padrões de intensidade dos campos de entrada obtidos numericamente.



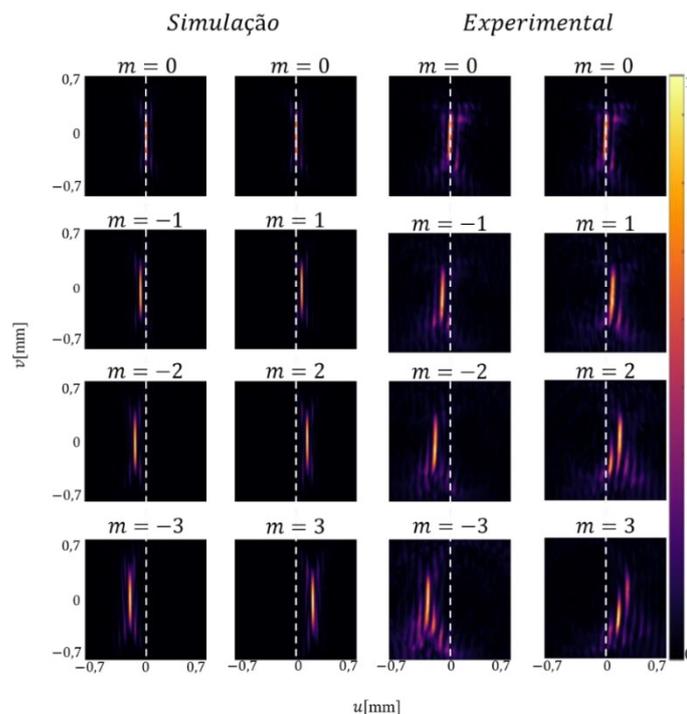
Fonte: Autor, 2020.

Para obter resultados satisfatórios é importante salientar como o processo de alinhamento foi realizado. Pois, os modos transversais de feixes LG de entrada têm que estar perfeitamente alinhados com a fase gravada no *SLM1*. Isso significa que os centros dos feixes devem coincidir com o do holograma de transformação. O padrão de fase gravado no *SLM2*, tem uma leve inclinação nas modulações de fase. De fato, acima dessas modulações, tem-se uma fase constante e abaixo uma fase aleatória. Deste modo, o feixe de luz transformado tem que ser alinhado com tais modulações na fase.

Na realização das simulações numéricas, utilizamos feixes Laguerre Gauss de entrada com uma cintura $w_0 = 1,2 \text{ mm}$; os parâmetros das fases de transformação espiral e de correção foram tomados como sendo $a = 0,07 \text{ mm}$ e $\beta = 0,29 \text{ mm}$. Em seguida, utilizamos estes parâmetros para construir os hologramas gerados por computador.

Por meio de uma simulação de propagação de espectro angular [35], temos a simulação teórica dos feixes de saída nas duas colunas da esquerda e os padrões de intensidade dos campos de saída obtidos experimentalmente nas duas colunas da direita na figura 21. Observamos uma excelente concordância entre teoria e experimento. Além disso, a partir dos padrões de intensidades, simulados e experimentais, nota-se uma significativa resolução da separação entre os modos adjacentes. O modo fundamental $m = 0$, é usado como referência espacial para classificar as respectivas cargas topológicas em relação a sua posição.

Figura 21: Padrões de intensidade dos campos de saída obtidos por simulação numérica e experimental.

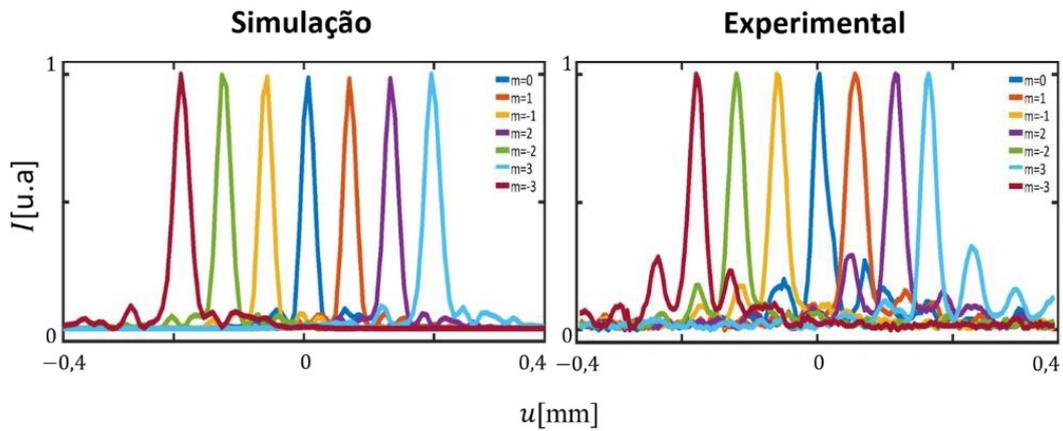


Fonte: Autor, 2020.

Para uma melhor compreensão dos descolamentos dos feixes no plano de saída, mostramos na Figura 22 cortes horizontais no plano transversal da distribuição de intensidade.

Verificamos a distância entre dois modos adjacente t . Para os resultados da simulação, $ts \approx 0,07 \text{ mm}$, já para o as medidas experimentais temos, $te \approx 0,06 \text{ mm}$. Essa pequena diferença é devido a questões de alinhamento e imperfeições dentro de nosso sistema óptico, como por exemplo: pequenas aberrações, leves deslocamentos na posição das lentes, *SLM2* levemente deslocado do plano de Fourier do *SLM1*, além de perturbações geradas no sistema óptico.

Figura 22: Perfis de intensidades horizontais ao longo das linhas tracejadas.

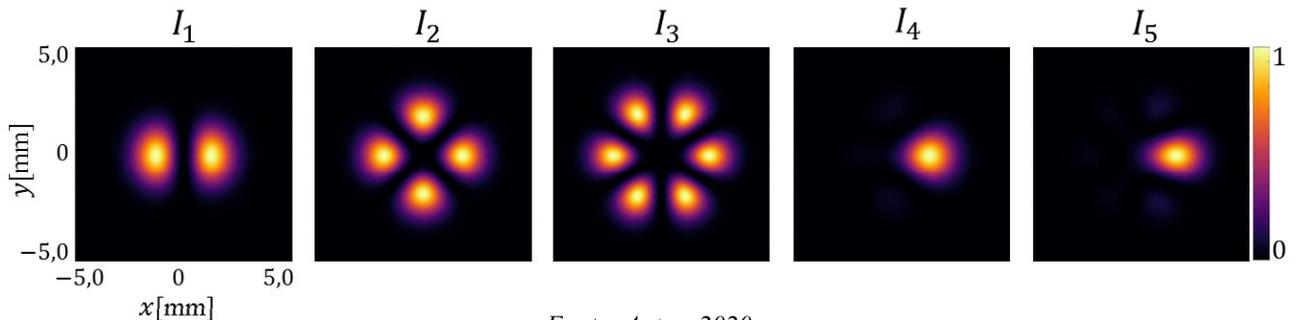


Fonte: Autor, 2020.

3.5 Simulação numérica e resultados experimentais para a separação de estados de MAO superpostos

A figura abaixo mostra os padrões de intensidades dos campos de entrada utilizados no processo de separação. Consideramos as seguintes superposições: $U_1 = LG_{-1} + LG_1$, $U_2 = LG_{-2} + LG_2$ e $U_3 = LG_{-3} + LG_3$, $U_4 = \sum_{m=-2}^2 LG_m$ e $U_5 = \sum_{m=-3}^3 LG_m$, respectivamente. Calculamos dessa maneira as suas respectivas intensidades, $I_1 = |U_1|^2$, $I_2 = |U_2|^2$, $I_3 = |U_3|^2$ e $I_4 = |U_4|^2$ mostradas nas figura 23.

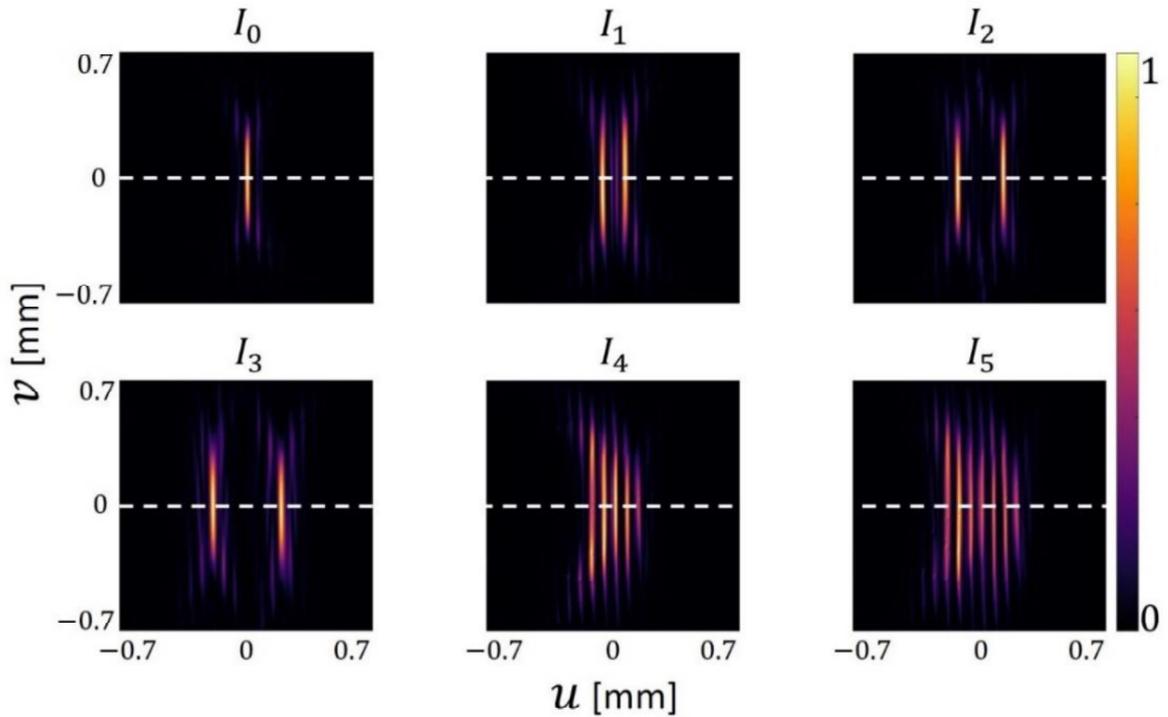
Figura 23: Padrões de intensidades teóricos dos campos de entrada para feixes multiplexados.



Fonte: Autor, 2020.

Na realização das simulações numéricas utilizamos a mesma cintura para os feixes Laguerre Gauss, $w_0 = 1.2 \text{ mm}$; os parâmetros das fases de transformação espiral e de correção foram tomados como sendo $a = 0.07 \text{ mm}$ e $\beta = 0.29 \text{ mm}$. Com isso, temos na figura 23 os resultados obtidos via simulação para os campos de saída.

Figura 24: Padrões de intensidades, I_i , obtidos por simulação numérica para os respectivos campos de saída correspondentes as superposições de entrada da figura 23.

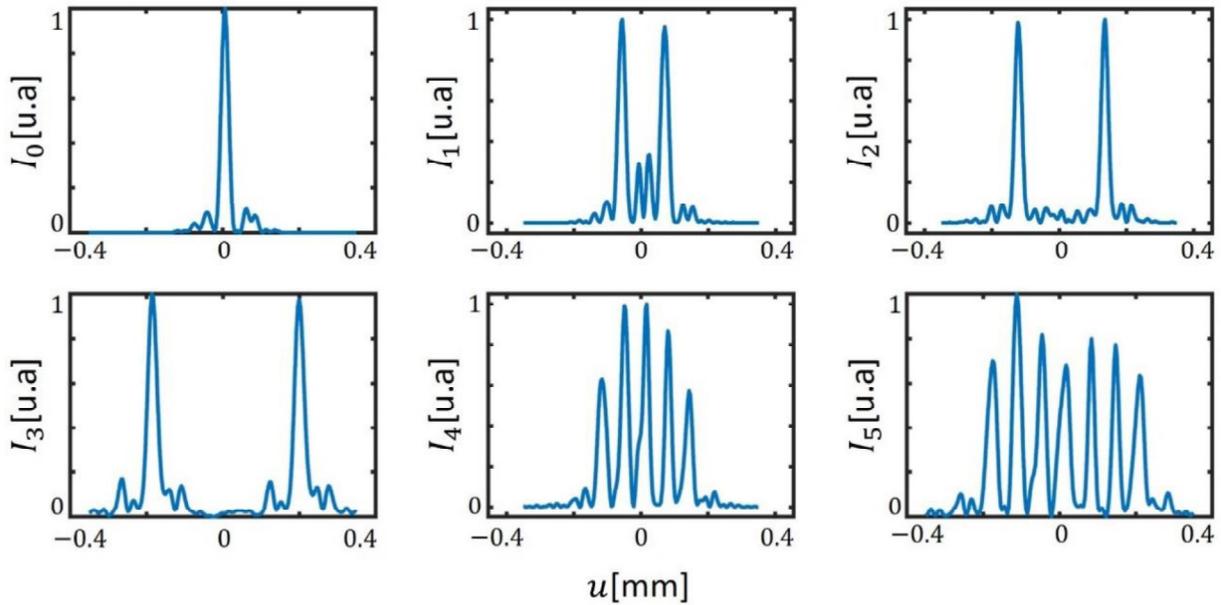


Fonte: Autor, 2020.

Ao analisarmos a figura 24, notamos que, do ponto de vista teórico, o método da transformação espiral funciona perfeitamente para classificar os estados de MAO das superposições de dois modos. Mas quando olhamos para as intensidades de saída, I_4 e I_5 , notamos que apenas sua observação visual pode não ser suficiente para garantir que há uma alta resolução.

Para explicitar a considerável separação entre os modos adjacentes, traçamos a figura 25 para mostrar os perfis de intensidade desses modos na direção horizontal ao longo das linhas médias tracejadas mostradas na figura 24. Constatamos por contagem de pixels que a distância de separação entre dois modos consecutivos é de $t_s \approx 0,06 \text{ mm}$.

Figura 25: Exibição dos respectivos perfis horizontais ao longo das linhas medias tracejadas da figura 24.



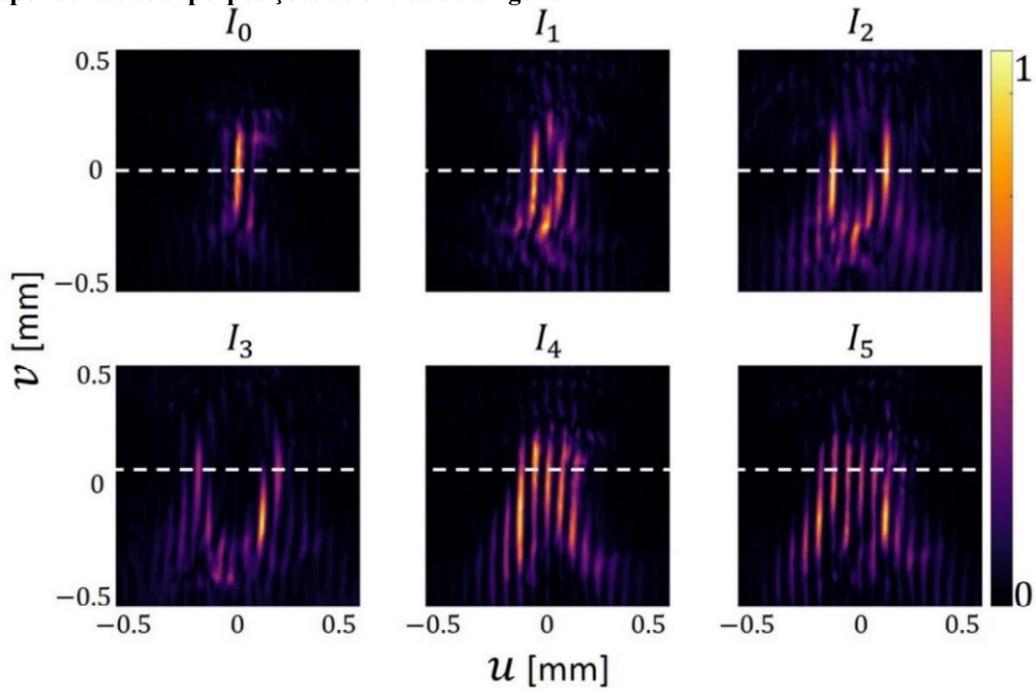
Fonte: Autor, 2020.

O modo fundamental, $m = 0$, é utilizado para que sua posição seja tomada como referência espacial. Desta maneira, para um dado conjunto de parâmetros, todos os modos de alta ordem serão classificados a partir de posições tomadas em relação a posição de ordem zero, como podemos notar observando a figura 25.

Analisando os gráficos obtidos numericamente temos as posições simétricas dos filetes de luz para os campos com dois estados de MAO. Dessa maneira, os picos das intensidades em I_1 , I_2 e I_3 apresentam as respectivas distâncias em relação ao modo $m = 0$ no centro: $d = 0,07mm$, $d = 0,14mm$ e $d = 0,19mm$.

Os padrões de intensidades dos campos de saída obtidos experimentalmente para as superposições de modos Laguerre Gauss são mostrados na figura 26. Observamos uma excelente concordância entre teoria e experimento, quando comparamos os resultados da figura 24 com os da figura 26. Além disso, a partir da figura 26, nota-se uma significativa resolução da separação dos modos LG multiplexados realizada com transformação espiral.

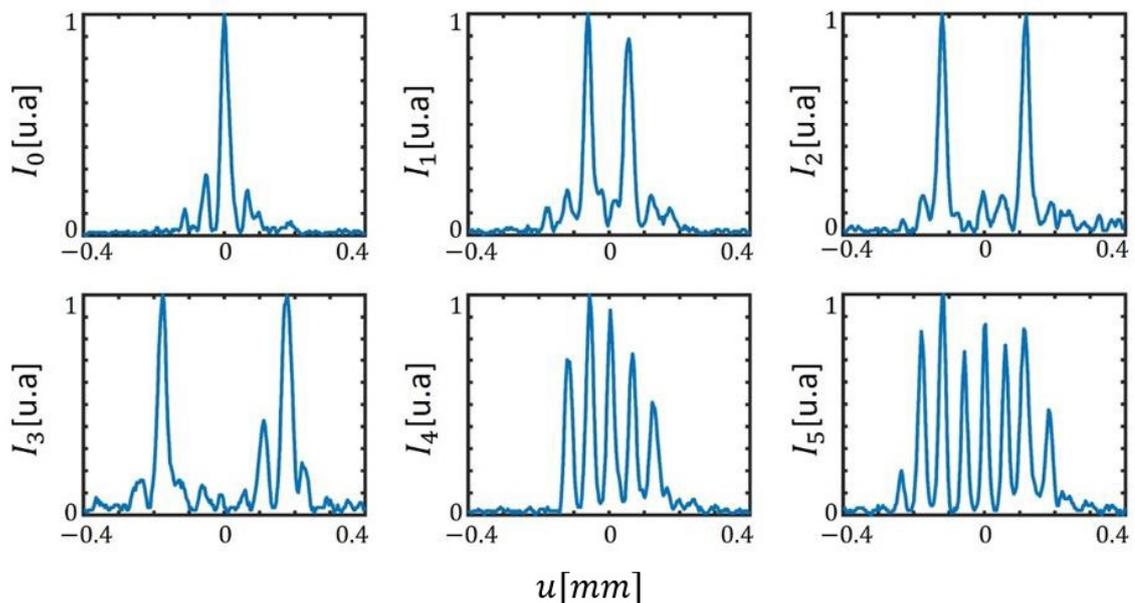
Figura 26: Padrões de intensidades, I_i , obtidos experimentalmente para os respectivos campos de saída correspondentes as superposições de entrada da figura 24.



Fonte: Autor, 2020.

Para garantir que a separação também é significativa para as distribuições de intensidades de saída experimentais, I_4 e I_5 , construímos a figura 27 para mostrar os perfis de intensidade desses modos na direção horizontal ao longo das linhas tracejadas mostradas na figura 26. Constatamos que a distância de separação entre dois modos consecutivos é de $t_s \approx 0,056$ mm.

Figura 27: Exibição dos respectivos perfis horizontais ao longo das linhas médias tracejadas da figura 26.



Fonte: Autor, 2020.

De maneira análoga à análise feita com os gráficos da simulação, para os dados obtidos experimentalmente temos as posições simétricas dos filetes de luz para os campos com dois estados de MAO. Os picos das intensidades em I_1 , I_2 e I_3 apresentam as respectivas distâncias em relação ao centro: $d = 0,06mm$, $d = 0,12mm$ e $d = 0,18mm$.

Portanto, a partir da comparação dos dados experimentais da figura 27 com os dados numéricos da figura 25, por contagem de pixels, verificamos uma leve discordância entre as distâncias entre dois modos consecutivos, pois enquanto que na simulação, $t_s \approx 0,06$ mm, para medidas experimentais encontramos que $t_e \approx 0,056$ mm. Esta suave diferença é devido a questões de alinhamento e imperfeições dentro de nosso sistema óptico.

Esse método pode ser usado para melhorar sistemas de comunicação óptica, pois para um dado campo de entrada, a classificação do estado de MAO deste é direta. Por exemplo, quando usamos U_2 como campo de entrada, a intensidade de saída consistirá em dois filetes de luz localizados em $u = 0,12mm$ e em $u = -0,12mm$. Essas posições correspondem a estados de MAO de $\pm 2\hbar$ por fóton, respectivamente.

Portanto, mostramos que o método da transformação espiral funciona de forma satisfatória para de-multiplexar os estados que compõem uma superposição de estados de MAO correspondente a uma soma de feixes LG com diferentes cargas topológicas. A alta resolução observada na separação dos estados tem como consequência uma diminuição significativa da interação intermodal. Isso faz deste método um forte candidato a ser usado para avanços na comunicação óptica, pois desta maneira é alcançado um aumento da qualidade de dados enviados por algum canal ótico.

4 CONCLUSÃO

Partimos das equações de Maxwell e derivamos a equação paraxial da luz, estudamos as soluções com simetria cilíndrica dessa equação que é o um conjunto ortonormal de modos de luz Laguerre Gauss que transportam de maneira natural Momento Angular Orbital (MAO). Aprendemos a gerar esses feixes em laboratório por meio da técnica holográfica que se mostra muito eficiente para modular modos especiais de luz. Com base nisso, pudemos identificar o quanto de momento esses feixes carregam utilizando o método de interferência com uma onda plana ou uma técnica difrativa por abertura triangular, pela qual pudemos detectar o sentido e o modulo da carga topológica.

Classificar esses feixes Laguerre Gauss é de muito interesse para comunicação óptica, por isso, utilizamos a técnica da abertura triangular para identificar nas saídas de um interferômetro de Mach-Zehnder os estados de MAO e vimos o quanto esses sistemas interferométricos se tornam grandes quando a quantidade de estados que queremos medir aumenta. Desta forma, foi trabalhada a técnica de transformação de coordenadas para a classificação dos feixes usando hologramas de fase. O método de transformação geométrica dos raios ópticos amplia nossas visões das ferramentas e conceitos matemáticos disponíveis para uma separação eficiente de superposições de modos LG com diferentes cargas topológicas, com aplicações na codificação de informações para comunicações ópticas.

5 REFERÊNCIAS

1. M. Yao and M. J. Padgett, "**Orbital angular momentum: origins, behavior and applications**," Advances in Optics and Photonics 3, 161-204 (2011). Disponível em: <<https://www.osapublishing.org/aop/abstract.cfm?uri=aop-3-2-161>>.
2. PADGETT, Miles; COURTIAL, Johannes; ALLEN, Les. "**Light's orbital angular momentum.**" Physics today, v. 57, n. 5, p. 35-40, 2004. Disponível em: <<https://if.pw.edu.pl/~wierzba/zajecia/ed15/2017/ref11.pdf>>.
3. BETH, Richard A. "**Mechanical detection and measurement of the angular momentum of light.**" Physical Review, v. 50, n. 2, p. 115, 1936. Disponível em: <<https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.50.115>>.
4. L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. Spreeuw, and J. Woerdman, "**Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes,**" Physical review A 45, 8185 (1992). Disponível em: <<https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRevA.45.8185>>.
5. M. Krenn, J. Handsteiner, M. Fink, R. Fickler, R. Ursin, M. Malik, and A. Zeilinger, "**Twisted light transmission over 143 km,**" Proceedings of the National Academy of Sciences 113, 13648-13653 (2016). Disponível em: <<https://www.pnas.org/conten/113/48/13648.short>>.
6. J. Wang, J.-Y. Yang, I. M. Fazal, N. Ahmed, Y. Yan, H. Huang, Y. Ren, Y. Yue, S. Dolinar, and M. Tur, "**Terabit free-space data transmission employing orbital angular momentum multiplexing,**" Nature photonics 6, 488 (2012). Disponível em: <<https://www.nature.com/articles/nphoton.2012.138>>.

7. N. Bozinovic, Y. Yue, Y. Ren, M. Tur, P. Kristensen, H. Huang, A. E. Willner, and S. Ramachandran, “**Terabit-scale orbital angular momentum mode division multiplexing in fibers,**” *Science* 340, 1545-1548 (2013). Disponível em: <<https://science.sciencemag.org/content/340/6140/1545.abstract>>.
8. G. Molina-Terriza, J. P. Torres, and L. Torner, “**Management of the angular momentum of light: preparation of photons in multidimensional vector states of angular momentum,**” *Physical review letters* 88, 013601 (2001). Disponível em: <<https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.88.013601>>.
9. J. C. García-Escartín and P. Chamorro-Posada, “**Quantum multiplexing with the orbital angular momentum of light,**” *Physical Review A* 78, 062320 (2008). Disponível em: <<https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevA.78.062320>>.
10. E. Willner, H. Huang, Y. Yan, Y. Ren, N. Ahmed, G. Xie, C. Bao, L. Li, Y. Cao, and Z. Zhao, “**Optical communications using orbital angular momentum beams,**” *Advances in Optics and Photonics* 7, 66-106 (2015). Disponível em: <<https://www.osapublishing.org/aop/abstract.cfm?uri=aop-7-1-66>>.
11. J. R. Moffitt, Y. R. Chemla, S. B. Smith, and C. Bustamante, “**Recent advances in optical tweezers,**” *Annu. Rev. Biochem.* 77, 205-228 (2008). Disponível em: <<https://www.annualreviews.org/doi/full/10.1146/annurev.biochem.77.043007.090225>>.
12. HICKMANN, J. M. et al. Unveiling a truncated optical lattice associated with a triangular aperture using light’s orbital angular momentum. *Physical review letters*, v. 105, n. 5, p. 053904, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.105.053904>>.

13. J. Leach, M. J. Padgett, S. M. Barnett, S. Franke-Arnold, and J. Courtial, “**Measuring the orbital angular momentum of a single photon,**” Physical review letters 88, 257901 (2002). Disponível em: <<https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.88.257901>>.
14. W. Zhang, Q. Qi, J. Zhou, and L. Chen, “**Mimicking Faraday rotation to sort the orbital angular momentum of light,**” Physical review letters 112, 153601 (2014). Disponível em: <<https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.112.153601>>.
15. BERKHOUT, G. C. G. et al. “**Efficient Sorting of Orbital Angular Momentum States of Light.**” Physical Review Letters, v. 105, n. 15, p. 153601, 10/04/ 2010. Disponível em: <<https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.105.153601>>.
16. M. Mirhosseini, M. Malik, Z. Shi, and R. W. Boyd, “**Efficient separation of the orbital angular momentum eigenstates of light,**” Nature communications 4, 1-6 (2013). Disponível em: <<https://www.nature.com/articles/ncomms3781>>.
17. WEN, Yuanhui, et al. “**Spiral transformation for high-resolution and efficient sorting of optical vortex modes.**” Physical review letters 120.19 (2018): 193904. Disponível em: <<https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.120.193904>>.
18. GRIFFITHS, David J. **Introduction to Electrodynamics**. 3. ed. Upper Saddle River, N. J. Prentice Hall 1999.
19. HECHT, Eugene. **OPTICS**. 5. Ed. Pearson Education Limited 2017.

20. AN GÖTTE, J., & Barnett, S. (2012). **Light beams carrying orbital angular momentum**. In D. Andrews & M. Babiker (Eds.), **The Angular Momentum of Light** (pp. 1-30). Cambridge: Cambridge University Press. Disponível em: < <https://doi:10.1017/CBO9780511795213.002>>
21. LAX, Melvin; LOUISELL, William H.; MCKNIGHT, William B. **From Maxwell to paraxial wave optics**. Physical Review A, v. 11, n. 4, p. 1365, 1975. Disponível em: < <https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRevA.11.1365>>.
22. BAHAA E. A. Saleh and Malvin Carl Teich, **Fundamentals of Photonics**, 2nd ed. New Jersey: Wiley-Interscience, 2007.
23. ALLEN, L.; PADGETT, M. J. **The Poynting vector in Laguerre–Gaussian beams and the interpretation of their angular momentum density**. Optics Communications, v. 184, n. 1-4, p. 67-71, 2000. Disponível em: < <https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRevA.11.1365>>.
24. SEGHILANI, Mohamed S. et al. **Vortex Laser based on III-V semiconductor metasurface: direct generation of coherent Laguerre-Gauss modes carrying controlled orbital angular momentum**. Scientific reports, v. 6, p. 38156, 2016. Disponível em: <<https://www.nature.com/articles/srep38156>>.
25. HECKENBERG, N. R. et al. **Generation of optical phase singularities by computer-generated holograms**. Optics letters, v. 17, n. 3, p. 221-223, 1992. Disponível em: < <https://www.osapublishing.org/ol/abstract.cfm?uri=ol-17-3-221>>.
26. ARRIZÓN, Victor et al. **Pixelated phase computer holograms for the accurate encoding of scalar complex fields**. JOSA A, v. 24, n. 11, p. 3500-3507, 2007. Disponível em: < <https://www.osapublishing.org/josaa/abstract.cfm?uri=josaa-24-11-3500> >.
27. KARIMI, Ebrahim. **Generation and manipulation of laser beams carrying orbital angular momentum for classical and quantum information applications**. Tese (Doutorado em Filosofia na óptica no Soft-Matter) - Universidade de Nápoles “Federico II”. Napoli, p. 37. 2009.

28. LE GUENNIC, TANGI. “How is an OAM generated? What is the potential of OAM generators on the market?”. **Cailabs: Shaping the light**. Disponível em: <<https://blog.cailabs.com/en/how-is-an-oam-generated>>. Acesso em: 23 de julho de 2020.
29. Silva, W.C. S. **Geração e caracterização de feixes possuindo momento angular**. Tese (Doutorado em Física) – Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2015.
30. BRYNGDAHL, Olof. Geometrical transformations in optics. **JOSA**, v. 64, n. 8, p. 1092-1099, 1974. Disponível em: <<https://www.osapublishing.org/josa/abstract.cfm?uri=josa-64-8-1092>>.
31. STUFF, M. A.; CEDERQUIST, J. N. “**Coordinate transformations realizable with multiple holographic optical elements.**” *Journal of the Optical Society of America A*, v. 7, n. 6, p. 977-981, 1990/06/01 1990. Disponível em: <<https://www.osapublishing.org/josaa/abstract.cfm?uri=josaa-7-6-977>>.
32. HOSSACK, W. J.; DARLING, A. M.; DAHDOUH, A. “Coordinate transformations with multiple computer-generated optical elements.” **Journal of Modern Optics**, v. 34, n. 9, p. 1235-1250, 1987. Disponível em: <<https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/09500348714551121>>.
33. WEN, Yuanhui et al. “**Supplemental Material for: Spiral Transformation for High-Resolution and Efficient Sorting of Optical Vortex Modes.**” *Physical review letters*, v. 120, n. 19, p. 193904, 2018. Disponível em: <<https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.120.193904>>.
34. AMARAL, João Paulo. **Estudo sobre geração e manipulação de feixes de luz com momento angular orbital**. Tese (Doutorado em Física) – Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2020.

35. MATSUSHIMA, Kyoji; SHIMOBABA, “Tomoyoshi. **Band-limited angular spectrum method for numerical simulation of free-space propagation in far and near fields.**” Optics express, v. 17, n. 22, p. 19662-19673, 2009. Disponível em: <<https://www.osapublishing.org/oe/abstract.cfm?uri=oe-17-22-19662>>.