



*Trabalho de Conclusão de Curso*

# **Rastreamento de Referência Constante por Realimentação de Saída para Sistemas Lineares com Restrições via Conjuntos Invariantes**

**de Matheus Moreira Rodrigues**

**orientado por**

**Prof. Dr., UFAL Tiago Alves de Almeida**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
Instituto de Computação

**RASTREAMENTO DE REFERÊNCIA CONSTANTE POR  
REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA PARA SISTEMAS LINEARES COM  
RESTRIÇÕES VIA CONJUNTOS INVARIANTES**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido  
ao Instituto de Computação da Universidade  
Federal de Alagoas como requisito parcial  
para a obtenção do grau de Engenheiro de  
Computação.

Matheus Moreira Rodrigues

*Orientador: Prof. Dr., UFAL Tiago Alves de Almeida*

**Banca Avaliadora:**

|                                 |                 |
|---------------------------------|-----------------|
| Ícaro Bezerra Queiroz de Araújo | Prof. Dr., UFAL |
| Glauber Rodrigues Leite         | Prof. Dr., UFAL |
| Thiago Damasceno Cordeiro       | Prof. Dr., UFAL |

Maceió, Alagoas  
18 de Março de 2025

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**  
Bibliotecária: Betânia Almeida dos Santos– CRB-4 – 1542

R696r Rodrigues, Matheus Moreira.

Rastreamento de referência constante por realimentação de saída para sistemas lineares com restrições via conjuntos invariantes / Matheus Moreira Rodrigues. – 2025.

38 f. : il. color.

Orientador: Tiago Alves de Almeida.

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Engenharia da Computação) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Computação. Maceió, 2025.

Bibliografia: f. 37-38.

1. Sistemas de controle (Computação). 2. Sistemas de tanques acoplados. 3. Rastreamento de referência. 4. Sistema de realimentação de saída. 5. Controle sobre restrições. 6. Conjuntos poliedros – invariantes I. Título.

CDU: 004.451.1



## Trabalho de Conclusão de Curso - TCC

### Formulário de Avaliação

Curso: ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO

|               |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nome do Aluno |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| M             | A | T | H | E | U | S |   | M | O | R | E | I | R | A |
| R             | O | D | R | I | G | U | E | S |   |   |   |   |   |   |

|                 |   |   |   |   |   |   |   |  |  |  |  |   |  |
|-----------------|---|---|---|---|---|---|---|--|--|--|--|---|--|
| Nº de Matrícula |   |   |   |   |   |   |   |  |  |  |  |   |  |
| 2               | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 6 |  |  |  |  | - |  |

|                                                   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|---------------------------------------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| Título do TCC (Tema)                              |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| RASTREAMENTO DE REFERÊNCIA CONSTANTE POR          |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA PARA SISTEMAS LINEARES COM |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| RESTRICÇÕES VIA CONJUNTOS INVARIANTES             |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

|                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|-------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Banca Examinadora                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| <u>TIAGO ALVES DE ALMEIDA</u><br>Nome do Orientador         |  Documento assinado digitalmente<br>TIAGO ALVES DE ALMEIDA<br>Data: 18/03/2025 19:20:21-0300<br>Verifique em <a href="https://validar.iti.gov.br">https://validar.iti.gov.br</a>                        |
| <u>ÍCARO BEZERRA QUEIROZ DE ARAÚJO</u><br>Nome do Professor | Assinatura<br> Documento assinado digitalmente<br>ÍCARO BEZERRA QUEIROZ DE ARAÚJO<br>Data: 18/03/2025 21:09:32-0300<br>Verifique em <a href="https://validar.iti.gov.br">https://validar.iti.gov.br</a> |
| <u>GLAUBER RODRIGUES LEITE</u><br>Nome do Professor         | Assinatura<br> Documento assinado digitalmente<br>GLAUBER RODRIGUES LEITE<br>Data: 19/03/2025 23:32:10-0300<br>Verifique em <a href="https://validar.iti.gov.br">https://validar.iti.gov.br</a>         |
| <u>THIAGO DAMASCENO CORDEIRO</u><br>Nome do Professor       | Assinatura<br> Documento assinado digitalmente<br>THIAGO DAMASCENO CORDEIRO<br>Data: 19/03/2025 11:59:27-0300<br>Verifique em <a href="https://validar.iti.gov.br">https://validar.iti.gov.br</a>       |

|                |
|----------------|
| Data da Defesa |
| 18/03/2025     |

|             |
|-------------|
| Nota Obtida |
| 10,0 (DEZ)  |

|             |
|-------------|
| Observações |
|             |
|             |
|             |
|             |

|                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|-----------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Coordenador do Curso<br>De Acordo |  Documento assinado digitalmente<br>JOBSON DE ARAUJO NASCIMENTO<br>Data: 18/03/2025 19:25:54-0300<br>Verifique em <a href="https://validar.iti.gov.br">https://validar.iti.gov.br</a> |
|                                   | Assinatura                                                                                                                                                                                                                                                               |

# Dedicatória

Aos meus pais e meu irmão, que se esforçaram para eu chegar aqui;

# Agradecimentos

Este trabalho é fruto de quatro anos de estudos e dedicação no Instituto de Computação (IC) da Universidade Federal de Alagoas (UFAL), Maceió-AL. Meu agradecimento à UFAL e ao IC.

Gostaria de agradecer à minha mãe, ao meu pai e ao meu irmão por todo o suporte, carinho e amor durante toda a minha vida. Agradeço, de maneira geral, a toda a minha família pela ajuda e por sempre estarem ao meu lado.

Agradeço também aos meus amigos pela compreensão e por todos os momentos em que precisei de apoio. Obrigado a todos.

Sou muito grato ao meu orientador, Prof. Tiago Alves de Almeida, pelos ensinamentos, paciência e apoio. Este trabalho não teria sido possível sem ele. Obrigado por me apresentar à área de controle.

Agradeço também ao Prof. Ícaro Araújo Bezerra de Queiroz e ao Prof. Glauber Leite Rodrigues pelo apoio e incentivo ao longo desses últimos anos. Manifesto também minha gratidão ao grupo AI-SPARC pelo espaço proporcionado e pela amizade dos colegas.

*Para minha família e amigos*

# Resumo

A implementação prática de um controlador por realimentação de saída, aplicado ao problema de rastreamento de referência constante para sistemas lineares discretos com restrições, é apresentada utilizando técnicas de invariância de conjuntos. Nesse contexto, Poliedros Invariantes Controlados por Realimentação de Saída (OFCI, do inglês Output-Feedback Controlled-Invariant) são utilizados para garantir que as restrições de estado e entrada sejam sempre satisfeitas. Um sistema de tanques acoplados, composto por dois tanques de água interligados, é utilizado como estudo de caso para ilustrar a aplicação do controlador. Com base na saída medida e na dinâmica linearizada do sistema, uma sequência de controle é calculada por programação linear, de modo a garantir o rastreamento da referência sob as restrições impostas. Os resultados experimentais demonstram que o objetivo de rastrear uma referência constante é alcançado com sucesso, embora se observem limitações inerentes à aproximação do modelo e à presença de ruído.

**Palavras-chave:** *Sistemas lineares; Conjuntos invariantes; Realimentação de saída; Rastreamento de referência; Restrições; Tanques acoplados.*

# Abstract

*The design of a practical output feedback controller applied to the constant reference tracking problem for constrained linear discrete-time systems via set-invariance techniques is presented. In this regard, Output-Feedback Controlled-Invariant (OFCI) Polyhedra are used to ensure that state and input constraints are satisfied at all times. A coupled-tank system, consisting of two interconnected water tanks, is used as a case study to illustrate the controller's application. Based on the measured output and the linearized dynamics of the system, a suitable control sequence is computed via linear programming to achieve reference tracking under the imposed constraints. Experimental results show that the goal of constant reference tracking is successfully achieved, although performance limitations related to model approximation and measurement noise are observed.*

**Keywords:** *Linear systems; Invariant sets; Output feedback; Reference tracking; Constraints; Coupled tanks.*

# Lista de Figuras

|     |                                                                                                                                                                     |    |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.1 | Conjunto de restrição de estado $\Omega_x$ e conjunto invariante controlado $\Omega$ . . . . .                                                                      | 20 |
| 4.1 | Sistema de tanques acoplados Quanser . . . . .                                                                                                                      | 24 |
| 4.2 | Diagrama esquemático do sistema de tanques acoplados. . . . .                                                                                                       | 25 |
| 5.1 | Diagrama de blocos Simulink. . . . .                                                                                                                                | 29 |
| 5.2 | Conjunto de restrições de estado $\Omega_x$ , conjunto OFCI $\Omega$ , e trajetória do vetor de estado satisfazendo as restrições (Realimentação de saída). . . . . | 31 |
| 5.3 | Sinal de controle $v(k)$ (Realimentação de saída). . . . .                                                                                                          | 32 |
| 5.4 | Resposta tanque 1 (Realimentação de saída). . . . .                                                                                                                 | 32 |
| 5.5 | Resposta $y(k)$ tanque 2 (Realimentação de saída). . . . .                                                                                                          | 33 |
| 5.6 | Conjunto de restrições de estado $\Omega_x$ , conjunto OFCI $\Omega$ , e trajetória do vetor de estado satisfazendo as restrições. . . . .                          | 34 |
| 5.7 | Sinal de controle $v(k)$ (Realimentação de estados). . . . .                                                                                                        | 34 |
| 5.8 | Resposta tanque 1 (Realimentação de estados). . . . .                                                                                                               | 35 |
| 5.9 | Resposta tanque 2 (Realimentação de estados). . . . .                                                                                                               | 35 |

# Lista de Tabelas

|     |                                                 |    |
|-----|-------------------------------------------------|----|
| 4.1 | Valores dos parâmetros do processo. . . . .     | 27 |
| 5.1 | Tempo computacional médio por iteração. . . . . | 36 |

# Lista de Símbolos

|                       |                                              |
|-----------------------|----------------------------------------------|
| $\Omega$              | Conjunto invariante.                         |
| $\Omega_x$            | Conjunto de restrições iniciais.             |
| $k$                   | Instante de amostragem.                      |
| $x(k)$                | Estado no instante $k$ .                     |
| $u(k)$                | Sinal de controle no instante $k$ .          |
| $r$                   | Sinal de referência.                         |
| $y(k)$                | Saída no instante $k$ .                      |
| $\mathbf{A}$          | Matriz de estados.                           |
| $\mathbf{B}$          | Matriz de entrada.                           |
| $\mathbf{C}$          | Matriz de saída.                             |
| $\mathbb{R}$          | Conjunto dos números reais.                  |
| $\mathbb{N}$          | Conjunto dos números inteiros não negativos. |
| $\mathcal{U}$         | Conjunto das possíveis entradas de controle. |
| $\mathcal{Y}(\Omega)$ | Conjunto de saídas admissíveis.              |
| $T_s$                 | Tempo de amostragem.                         |
| $\lambda$             | Taxa de contração.                           |
| $\forall$             | Para todo.                                   |
| $\exists$             | Existe.                                      |
| $\in$                 | Pertence.                                    |
| $\leq$                | Menor ou igual.                              |

$\geq$  Maior ou igual.

$\bar{1}$  Vetor (ou matriz) de dimensão apropriada cujos componentes são todos iguais a 1.

$\bar{0}$  Vetor (ou matriz) de dimensão apropriada cujos componentes são todos iguais a 0.

$\arg \min_x f(x)$  Valor de  $x$  para o qual  $f(x)$  é minimizado.

# Lista de Abreviaturas

|             |                                              |
|-------------|----------------------------------------------|
| <b>CBA</b>  | Congresso Brasileiro de Automática.          |
| <b>IC</b>   | Instituto de Computação.                     |
| <b>PL</b>   | Programação Linear.                          |
| <b>MPC</b>  | <i>Model Predictive Control.</i>             |
| <b>MPT</b>  | <i>Multi-Parametric Toolbox.</i>             |
| <b>OFCI</b> | <i>Output-Feedback Controlled-Invariant.</i> |
| <b>UFAL</b> | Universidade Federal de Alagoas.             |
| <b>s.a.</b> | Sujeito a.                                   |

# Sumário

|          |                                                                                 |           |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>                                                               | <b>15</b> |
| 1.1      | Objetivo . . . . .                                                              | 16        |
| 1.2      | Objetivos Específicos . . . . .                                                 | 16        |
| 1.3      | Organização do texto . . . . .                                                  | 16        |
| <b>2</b> | <b>Conjuntos Invariantes e Controle sob Restrições</b>                          | <b>18</b> |
| 2.1      | Invariância positiva . . . . .                                                  | 18        |
| 2.2      | Invariância controlada por Realimentação de Estados . . . . .                   | 19        |
| 2.3      | Invariância controlada por realimentação de saída . . . . .                     | 19        |
| 2.3.1    | Exemplo Ilustrativo . . . . .                                                   | 20        |
| <b>3</b> | <b>Rastreamento de Referência Constante por Realimentação de Saída Estática</b> | <b>21</b> |
| 3.1      | Controle sob realimentação de saída estática . . . . .                          | 21        |
| <b>4</b> | <b>Modelo de tanques acoplados</b>                                              | <b>24</b> |
| 4.1      | Sistema de Tanques Acoplados . . . . .                                          | 24        |
| 4.2      | Modelo da planta . . . . .                                                      | 25        |
| <b>5</b> | <b>Resultados</b>                                                               | <b>29</b> |
| 5.1      | Rastreamento por realimentação de saída . . . . .                               | 30        |
| 5.2      | Rastreamento por realimentação de estados . . . . .                             | 33        |
| <b>6</b> | <b>Conclusão</b>                                                                | <b>37</b> |
|          | <b>Bibliografia</b>                                                             | <b>38</b> |

# Capítulo 1

## Introdução

O controle de sistemas lineares sujeitos a restrições tem sido amplamente estudado ao longo das últimas décadas, pois na prática todos os processos estão sujeitos a restrições (Camacho and Alba, 2013). A abordagem da invariância de conjuntos provou ser muito útil para lidar com sistemas dessa natureza (Blanchini, 1999; Blanchini and Miani, 2015). Um conjunto não vazio no espaço de estados é dito ser positivamente invariante com respeito a um dado sistema se para qualquer estado inicial pertencente a tal conjunto, a trajetória do vetor de estados do sistema se mantém no conjunto (Bitsoris, 1988; Dórea and Hennet, 1999).

Em geral, as restrições estão presentes nas variáveis de estado, controle e saída. Elas podem ser definidas como um conjunto poliédrico no espaço de estados, uma região na qual a trajetória do vetor de estados do sistema deve permanecer.

Entretanto, na maioria dos casos, o conjunto inicial de restrições não é positivamente invariante e, portanto, não é assegurado que as restrições sejam satisfeitas em todos os momentos. No entanto, quando um dado conjunto de restrições não é positivamente invariante sob uma dada dinâmica, é possível construir um conjunto invariante controlado contido nele (Blanchini, 1994; Dórea and Hennet, 1999). Neste caso, existe uma lei de controle por realimentação de estados tal que, para qualquer condição inicial pertencente ao conjunto invariante controlado, a trajetória do vetor de estado se mantém contida nele.

Em situações práticas nem sempre todas as variáveis de estado estão disponíveis para medição, pode ser que apenas as saídas do sistema estejam disponíveis. Em (Dórea, 2009; Almeida and Dórea, 2021) foram estabelecidas condições para avaliar se um determinado conjunto poliédrico é invariante controlado por realimentação de saída (*Output-Feedback Controlled-Invariant-OFCI*), bem como foi estudada uma estrutura de realimentação de saída. Conjuntos OFCI são conjuntos nos quais a trajetória do vetor de estado pode ser confinada por meio de uma sequência apropriada de ações de controle, que são tomadas com base apenas nas saídas medidas.

Baseado na saída atual e dado um conjunto poliédrico OFCI, uma ação de controle é calculada via Programação Linear (PL) à qual é capaz de rastrear uma referência respeitando as restrições de estado e controle. A abordagem usada aqui foi estudada em maiores detalhes em

Almeida and Dórea (2018); Almeida (2020) para sistemas lineares conhecidos e em (Silveira Jr. and Dórea, 2023) para sistemas lineares incertos.

Na literatura, o rastreamento de referência em sistemas lineares tem sido explorado sob diferentes óticas. Por exemplo, em (Limón et al., 2008) foi proposto um MPC (*Model Predictive Control*) que rastreia uma referência constante, onde uma referência artificial é considerada como variável de decisão do MPC. A viabilidade é garantida considerando um conjunto invariante para rastreamento como restrição terminal e o controle livre de deslocamento é garantido penalizando o desvio da referência artificial da referência desejada.

Em (Almeida and Dórea, 2018) foi proposto um controlador dinâmico que estende as condições do controlador estático enquanto visa lidar com perturbações e efeito do ruído. Mais recentemente, (Silveira Jr. and Dórea, 2023) apresentou uma abordagem de controle robusto com realimentação de saída para o rastreamento de referência constante em sistemas lineares sujeitos a incertezas, distúrbios e ruídos.

## 1.1 Objetivo

Este trabalho trata do controle por realimentação de saída aplicado ao problema de rastreamento de referência constante em sistemas lineares de tempo discreto sujeitos a restrições de estado e controle. O sistema que consideramos é um processo de tanques acoplados, embora inerentemente não linear, sua versão linearizada é utilizada para ilustrar a aplicabilidade do controlador. Com base na medição disponível e em um conjunto poliédrico OFCI, uma sequência de controle adequada é computada via Programação Linear (PL) que é capaz de atingir o rastreamento de referência sob restrições de estado e controle.

## 1.2 Objetivos Específicos

- Implementar na prática um controlador que leve em conta as restrições do sistema;
- Determinar as limitações decorrentes do uso de um modelo matemático linearizado para embasar as ações de controle aplicadas ao sistema real;
- Analisar a influência do ruído no desempenho do controlador.

## 1.3 Organização do texto

Neste capítulo introdutório, foram apresentados aspectos gerais sobre a área de estudo, bem como o propósito deste trabalho. No capítulo 2, serão apresentadas as definições de conceitos como invariância positiva, invariância controlada e invariância controlada por realimentação de saída. No capítulo 3, serão abordadas as estratégias de controle por realimentação de saída

estática. No capítulo 4, será apresentada a modelagem do sistema de tanques acoplados. No capítulo 5, serão discutidos os resultados obtidos com a aplicação do controlador. Por fim, no capítulo 6, serão apresentadas as conclusões do trabalho e uma breve discussão sobre as perspectivas futuras.

## Capítulo 2

# Conjuntos Invariantes e Controle sob Restrições

Neste capítulo serão abordados os conceitos de conjuntos invariantes e sua aplicação no controle sob restrições. Serão definidos os conceitos de invariância positiva, invariância controlada e a invariância controlada por realimentação de saída.

Nas definições, considere um sistema de tempo discreto, linear e invariante no tempo, representado por:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad (2.1)$$

$$y(k) = Cx(k), \quad (2.2)$$

onde  $k \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  representa o instante de amostragem,  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  representa o vetor de estados,  $u(k) \in \mathbb{R}^m$  é a entrada de controle e  $y(k) \in \mathbb{R}^p$  é a saída medida.

Neste trabalho, será assumido que o estado  $x$  e o controle  $u$  estão restritos aos conjuntos convexos e compactos (fechados e limitados)  $\Omega_x \subset \mathbb{R}^n$  e  $\mathfrak{U} \subset \mathbb{R}^m$ , respectivamente, definidos por:

$$\Omega_x = \{x : G_x x \leq \bar{1}\}, \quad \mathfrak{U} = \{u : Uu \leq \bar{1}\}, \quad (2.3)$$

onde  $G_x \in \mathbb{R}^{g_x \times n}$  e  $U \in \mathbb{R}^{v \times m}$ .

### 2.1 Invariância positiva

Desde o desenvolvimento da teoria de Lyapunov, a abordagem de invariância de conjuntos provou ser muito útil para sistemas lineares restritos (Blanchini, 1999; Blanchini and Miani, 2015). Diz-se que um conjunto não vazio no espaço de estados é positivamente invariante em relação a um determinado sistema se, para qualquer estado inicial pertencente a tal conjunto, a

trajetória do vetor de estado permanece dentro dele (Bitsoris, 1988; Dórea and Hennet, 1999).

**Definição 2.1.1** (Invariância positiva (Blanchini and Miani, 2015)). Um conjunto  $\Omega$  é dito ser positivamente invariante se, e somente se,  $\forall x(0) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, x(k) \in \Omega$  para todo  $k \geq 0$ .

## 2.2 Invariância controlada por Realimentação de Estados

Em geral, o conjunto de restrições iniciais ( $\Omega_x$ ) não é invariante. Entretanto, é possível satisfazer as restrições caso as condições iniciais pertençam a um conjunto invariante controlado contido no conjunto de restrições (Dórea and Hennet, 1999).

**Definição 2.2.1** (Invariância controlada (Blanchini, 1994)). Dada uma taxa de contração  $\lambda$ ,  $0 \leq \lambda < 1$ , o conjunto  $\Omega \subset \Omega_x$  é dito ser invariante  $\lambda$ -contrativo com relação ao sistema (2.1) se,  $\forall x \in \Omega, \exists u \in \mathcal{U} : Ax + Bu \in \lambda\Omega$ .

A definição 2.2.1 significa que se  $\Omega \subset \Omega_x$  é um conjunto  $\lambda$ -contrativo invariante controlado, e uma vez que a condição inicial  $x(0) \in \Omega$ , então existe uma sequência de controle de realimentação de estado  $u(x(k)) \in \mathcal{U}$  tal que  $x(k) \in \lambda\Omega, \forall k \geq 0$ .

## 2.3 Invariância controlada por realimentação de saída

O conjunto invariante controlado por realimentação de saída (do inglês *Output-feedback controlled invariant set* - OFCI) é uma extensão do conceito invariante controlado. Como nem sempre todas as variáveis de estado de um sistema estão disponíveis para medição, uma alternativa seria utilizar a estrutura por realimentação de saída.

Sendo  $\Omega \subset \Omega_x$  um conjunto poliédrico invariante controlado e a região na qual se pretende manter o vetor de estado  $x$  limitado, o problema está em como realizar isso por meio das medições  $y(k), k \in \mathbb{N}$ . Portanto, como ponto de partida, torna-se necessário definir a priori o que se entende por um conjunto ser invariante sob realimentação de saída. Considere a seguir o conjunto compacto e convexo  $\mathcal{Y}(\Omega) \in \mathbb{R}^p$ , que contém todas as saídas admissíveis  $y$  que podem ser associadas a algum  $x \in \Omega$ :

$$\mathcal{Y}(\Omega) = \{y : y = Cx \text{ para } x \in \Omega\}. \quad (2.4)$$

Dessa forma, para cada  $x \in \Omega$ , temos  $y \in \mathcal{Y}(\Omega)$ . Consequentemente, a invariância sob realimentação de saída pode ser caracterizada pela seguinte definição:

**Definição 2.3.1** (Conjunto OFCI (Dórea, 2009)). Dada uma taxa de contração  $\lambda$ , com  $0 \leq \lambda < 1$ , o conjunto  $\Omega \subset \Omega_x$  é dito ser Invariante Controlado por Realimentação de Saída (OFCI) com relação ao sistema (2.1)-(2.2) se  $\forall y \in \mathcal{Y}(\Omega), \exists u \in \mathcal{U} : Ax + Bu \in \lambda\Omega, \forall x \in \Omega$  tal que  $Cx = y$ .

Quando  $\Omega$  é OFCI, se  $x(0) \in \Omega$ , então é possível calcular uma sequência de controle  $u(y(k)) \in \mathfrak{U}$  tal que  $x(k) \in \lambda\Omega, \forall k \geq 0$ . Em (Dórea, 2009), foram propostas condições necessárias e suficientes para verificar se um conjunto invariante controlado é OFCI com uma taxa de contração  $\lambda$ , a partir da solução de problemas de programação linear (PL).

### 2.3.1 Exemplo Ilustrativo

O exemplo numérico a seguir tem como objetivo ilustrar a aplicação do conceito de conjuntos invariantes controlados. Considere um sistema linear representado no espaço de estados, com dinâmica discreta no tempo, conforme descrito em Almeida (2020):

$$A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.9 \\ 0.6 & 1.8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Os conjuntos de restrição de estado e de controle são definidos da seguinte forma:

$$\Omega_x = \{x : G_x x \leq \bar{\mathbf{1}}\}, \quad \mathfrak{U} = \{u : Uu \leq \bar{\mathbf{1}}\}, \quad (2.5)$$

com:

$$G_x = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ -1 & -1 \\ -1 & 0.35 \\ 0.25 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0.2 \\ -0.2 \end{bmatrix}$$

A partir do algoritmo proposto por Dórea and Hennes (1999), foi calculado o conjunto invariante controlado  $\Omega$ , contido em  $\Omega_x$ , para uma taxa de contração  $\lambda = 0.9$ . Os conjuntos  $\Omega$  e  $\Omega_x$  são apresentados na Figura 2.1.

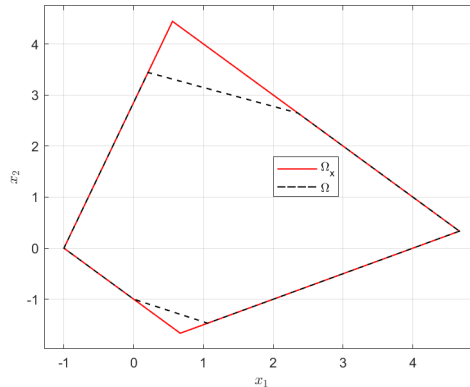


Figura 2.1: Conjunto de restrição de estado  $\Omega_x$  e conjunto invariante controlado  $\Omega$ .

Perceba que se o vetor de estado estiver dentro do poliedro tracejado  $\Omega$ , existe uma lei de controle que mantém o estado confinado em  $\Omega \subseteq \Omega_x$  sem violar as restrições.

## Capítulo 3

# Rastreamento de Referência Constante por Realimentação de Saída Estática

Com as definições apresentadas no Capítulo 2, neste capítulo estruturamos o problema de rastreamento. O objetivo do rastreamento é garantir que a saída do sistema siga a entrada de referência tanto quanto possível (Franklin et al., 2013). Ao longo deste capítulo, será detalhada a formulação do problema de rastreamento utilizando realimentação de saída via conjuntos invariantes.

### 3.1 Controle sob realimentação de saída estática

Considere, novamente, o sistema linear discreto invariante no tempo:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad (3.1)$$

$$y(k) = Cx(k), \quad (3.2)$$

Assume-se que  $\Omega = \{x : Gx \leq \bar{1}\} \subseteq \Omega_x$ ,  $G \in \mathbb{R}^{g \times n}$  é um poliedro OFCI. O principal objetivo é o seguinte: calcular uma sequência  $u(k)$ ,  $k = 0, 1, \dots$  com base nas medições  $y(k)$ , de forma que a saída  $y$  rastreie uma referência constante  $r$ , que respeite ao mesmo tempo todas as restrições impostas, ou seja:

$$\forall x(0) \in \Omega : \begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = r, \\ x(k) \in \Omega, u(k) \in \mathfrak{U}, \forall k \geq 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

O conjunto de saídas admissíveis (3.3) também é um poliedro convexo e compacto definido por:

$$\mathcal{Y}(\Omega) = \{y : y = Cx \text{ para } x : Gx \leq \bar{1}\}. \quad (3.4)$$

Considerando a Definição 2.3.1, pode-se ver que, se  $\Omega$  é OFCI com taxa de contração  $\lambda$ ,

então

$$\forall y \in \mathcal{Y}(\Omega), \exists u \in \mathcal{U} : G(Ax + Bu) \leq \lambda \bar{1}, Uu \leq \bar{1}. \quad (3.5)$$

Como o vetor de estado não é medido, precisamos determinar um único  $u \in \mathcal{U}$  que mantenha qualquer  $x$  consistente com a saída medida  $y$  dentro de  $\Omega$ . Isso pode ser alcançado calculando o pior caso de  $x$ , linha por linha de  $G$ , que pode ocorrer. Seja  $\phi(y) \in \mathbb{R}^g$  o vetor cujos elementos são dados por:

$$\begin{aligned} \phi_j(y) &= \max_x G_j Ax, \quad j = 1, \dots, g \\ \text{s.a.} \quad &Gx \leq \bar{1}, \quad Cx = y. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Assim, a condição (3.5) pode ser reescrita como:

$$\forall y \in \mathcal{Y}(\Omega), \exists u \in \mathcal{U} : \phi(y) + GBu \leq \lambda \bar{1}, Uu \leq \bar{1} \quad (3.7)$$

ou

$$\forall y \in \mathcal{Y}(\Omega), \exists u \in \mathcal{U} : \begin{bmatrix} \phi(y) \\ \bar{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} GB \\ U \end{bmatrix} u \leq \begin{bmatrix} \lambda \bar{1} \\ \bar{1} \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

As desigualdades (3.8) são relevantes porque, uma vez satisfeitas, pode-se garantir a invariância do poliedro  $\Omega$ . Em seguida, devemos encontrar condições que permitam o rastreamento da referência.

A referência desejada  $r$  é suposta ser tal que os estados estacionários correspondentes não violem as restrições  $u \in \mathcal{U}$  e  $x \in \Omega$ . Um sinal de referência que satisfaça o requisito acima é chamado admissível (Almeida et al., 2023). O erro de rastreamento é definido por  $e(k) = r(k) - y(k)$ , onde a saída medida  $y(k)$  é assumida ter a forma (3.2). A estratégia a ser considerada é a de minimizar o valor absoluto do erro um passo à frente  $|e(k+1)|$ , o que significa ter o erro no próximo instante o menor possível. Assumimos  $r(k+1) = r(k) = r$  (referência constante), então:

$$|e(k+1)| = \left| r - \underbrace{(CAx + CBu)}_{y(k+1)} \right| \leq \varepsilon \Rightarrow \begin{cases} CAx + CBu - r \leq \varepsilon \\ -CAx - CBu + r \leq \varepsilon \end{cases} \quad (3.9)$$

$|e(k+1)|$  pode ser minimizado minimizando  $\varepsilon$ . As desigualdades (3.9) podem ser reescritas

como:

$$\begin{bmatrix} CA \\ -CA \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} CB & -\bar{I} \\ -CB & -\bar{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \epsilon \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} r \\ -r \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Considere o vetor  $\gamma(y) \in \mathbb{R}^{2p}$  dado por:

$$\begin{aligned} \gamma_{\bar{j}}(y) = \max_x \begin{bmatrix} CA \\ -CA \end{bmatrix}_{\bar{j}} x, \quad \bar{j} = 1, \dots, 2p \\ \text{s.a.} \quad Gx \leq \bar{I}, \quad Cx = y. \end{aligned} \quad (3.11)$$

O cálculo de  $\gamma(y)$  considera o pior caso de  $x$  em relação à minimização de  $\epsilon$ . A condição (3.10) é equivalente a:

$$\begin{bmatrix} CB & -\bar{I} \\ -CB & -\bar{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \epsilon \end{bmatrix} \leq \bar{r} - \gamma(y). \quad (3.12)$$

onde  $\bar{r} = \begin{bmatrix} r & -r \end{bmatrix}^T$ .

Combinando as condições (3.8) e (3.12), é possível calcular a ação de controle  $u(y)$  de tal forma que o sistema rastreie a referência  $r$  satisfazendo restrições de estado e controle simultaneamente:

$$\begin{aligned} u(y(k)) = \arg \min_{u, \epsilon} \epsilon \\ \text{s.a.} \quad \begin{bmatrix} GB & \bar{0} \\ U & \bar{0} \\ CB & -\bar{I} \\ -CB & -\bar{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \epsilon \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \lambda \bar{I} - \phi(y(k)) \\ \bar{I} \\ \bar{r} - \gamma(y(k)) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.13)$$

A ação de controle (3.13) é calculada *online* para cada medição atual  $y(k)$ . Assim para os vetores  $\phi(y(k))$  e  $\gamma(y(k))$ .

O cálculo da ação de controle  $u(k)$  descrita acima é realizada em dois passos:

- Dado  $y(k)$ , os vetores  $\phi(y(k))$  e  $\gamma(y(k))$  são calculados através de  $g$  problemas de PL (3.6) e  $2p$  problemas de PL (3.11), respectivamente.
- A solução do problema de PL (3.13) fornece a entrada  $u(k)$ . Note também que as duas primeiras restrições em (3.13) garantem a invariância de  $\Omega$  sob realimentação de saída. As duas últimas restrições são responsáveis pela estratégia de otimização.

# Capítulo 4

## Modelo de tanques acoplados

Neste capítulo, será discutido o modelo da planta utilizado para ilustrar a aplicação do controlador. O modelo fenomenológico será desenvolvido com base na aplicação das leis fundamentais da física. A partir disso, será obtida a representação do sistema no espaço de estados. Em seguida, o modelo será linearizado e, posteriormente, discretizado para viabilizar sua implementação.

### 4.1 Sistema de Tanques Acoplados

O sistema utilizado neste trabalho é o dos tanques acoplados da Quanser (Figura 4.1), uma solução frequentemente empregada em aplicações como armazenamento e distribuição de combustíveis, na indústria química e no tratamento de água. Este sistema representa um exemplo prático e versátil para ilustrar o dinamismo de processos industriais amplamente utilizados.



Figura 4.1: Sistema de tanques acoplados Quanser

A Figura 4.2 apresenta um diagrama esquemático do processo, que consiste em dois tanques de água interconectados e uma bomba. A entrada do sistema é a tensão elétrica  $v(t)$  aplicada

à bomba, que impulsiona a água para o tanque 1. A água então escoar para o tanque 2 e, posteriormente, para o reservatório. As variáveis  $h_1(t)$  e  $h_2(t)$  representam os níveis de água nos tanques 1 e 2, respectivamente. Consideramos o nível de água no tanque 2,  $h_2(t)$ , como a saída do sistema.

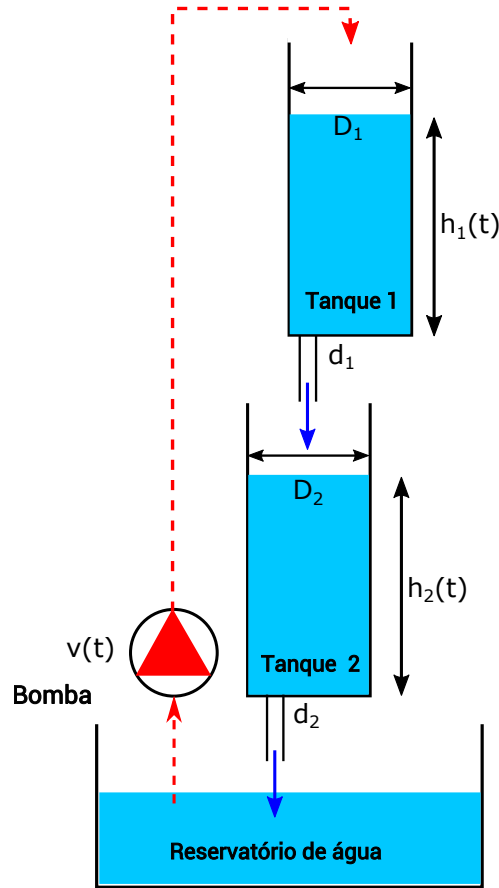


Figura 4.2: Diagrama esquemático do sistema de tanques acoplados.

## 4.2 Modelo da planta

A maioria dos sistemas físicos reais são representados por equações diferenciais não lineares:

$$\dot{h}(t) = f(h, v), \quad s(t) = g(h, v), \quad h \in \mathbb{R}^n, \quad v \in \mathbb{R}^m, \quad s \in \mathbb{R}^p. \quad (4.1)$$

Na prática, para controlar sistemas descritos por (4.1), projetam-se controladores por realimentação, reduzindo o problema ao projeto de controladores para sistemas lineares no espaço de estados, de modo que esses aproximem o comportamento do sistema original. Para isso, considera-se uma linearização local de (4.1) ao redor de um ponto de equilíbrio (Hespanha, 2018). Antes de abordar a linearização, será considerado o conceito de ponto de equilíbrio:

**Definição 4.2.1** (Equilíbrio). Um par  $(h^{eq}, v^{eq}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  é chamado de *ponto de equilíbrio* de (4.1) se  $f(h^{eq}, v^{eq}) = 0$ . Neste caso,

$$v(t) = v^{eq}, \quad h(t) = h^{eq}, \quad s(t) = s^{eq} = g(h^{eq}, v^{eq}), \quad \forall t \geq 0,$$

é uma solução de (4.1).

Introduzindo as variáveis de desvio  $x = h - h^{eq}$ ,  $u = v - v^{eq}$  e  $y = s - s^{eq}$  o modelo (4.1) na forma linearizada é descrito abaixo.

**Definição 4.2.2.** O sistema linear invariante no tempo de tempo contínuo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{4.2}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{4.3}$$

definido pelas seguintes matrizes:

$$A = \left[ \left( \frac{\partial f_i}{\partial h_j} \right)_{ij} \right] \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B = \left[ \left( \frac{\partial f_i}{\partial v_j} \right)_{ij} \right] \in \mathbb{R}^{n \times m},$$

$$C = \left[ \left( \frac{\partial g_i}{\partial h_j} \right)_{ij} \right] \in \mathbb{R}^{p \times n}, \quad D = \left[ \left( \frac{\partial g_i}{\partial v_j} \right)_{ij} \right] \in \mathbb{R}^{p \times m},$$

todas avaliadas em  $(h^{eq}, v^{eq})$ , é chamada de linearização local de (4.1) em torno do ponto de equilíbrio  $(h^{eq}, v^{eq})$ .

O modelo fenomenológico do processo pode ser obtido pela aplicação de balanços de massa e da lei de Bernoulli:

$$\begin{cases} \dot{h}_1(t) = -\frac{a_1}{A_1} \sqrt{2gh_1(t)} + \frac{k_m}{A_1} v(t) \\ \dot{h}_2(t) = \frac{a_1}{A_2} \sqrt{2gh_1(t)} - \frac{a_2}{A_2} \sqrt{2gh_2(t)} \\ s(t) = h_2(t) \end{cases} \tag{4.4}$$

onde  $A_i$  é a área da seção transversal do tanque  $i$  ( $i = 1, 2$ ),  $a_i$  é a área da seção transversal do orifício de saída e  $h_i$  é o nível da água. Observe que no modelo (4.4), assumimos o fluxo da bomba correspondente como  $q(t) = k_m v(t)$ , onde  $k_m$  é uma constante. A aceleração da gravidade é denotada por  $g$ . A altura de cada tanque é de 30 cm. Os valores dos parâmetros são fornecidos na Tabela 4.1.  $D_i$  e  $d_i$  (orifício de saída),  $i = 1, 2$ , representam diâmetros conforme indicado na Figura 4.2.

Tabela 4.1: Valores dos parâmetros do processo.

| Parâmetro  | Valor | Unidade             |
|------------|-------|---------------------|
| $D_1, D_2$ | 4.445 | cm                  |
| $d_1, d_2$ | 0.476 | cm                  |
| $k_m$      | 4.1   | cm <sup>3</sup> /Vs |
| $g$        | 981   | cm/s <sup>2</sup>   |

De acordo com a definição 4.2.1, os pontos de equilíbrio do modelo (4.4) são obtidos definindo  $\dot{h}_1 = 0$  e  $\dot{h}_2 = 0$ , o que resulta em:

$$h_1^{eq} = \left( \frac{k_m v^{eq}}{a_1} \right)^2 \frac{1}{2g}, \quad h_2^{eq} = \left( \frac{a_1}{a_2} \right)^2 h_1^{eq}, \quad s^{eq} = h_2^{eq}. \quad (4.5)$$

Portanto, neste caso, é possível calcular de forma simples  $h_1^{eq}$  e  $h_2^{eq}$  dada a entrada constante  $v^{eq}$ . O modelo linearizado de (4.4) em torno de  $(h_1^{eq}, h_2^{eq}, v^{eq})$ , com  $x_i = h_i - h_i^{eq}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $u = v - v^{eq}$ , e  $y = s - s^{eq}$ , é então dado por:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{a_1}{A_1} \sqrt{\frac{g}{2h_1^{eq}}} & 0 \\ \frac{a_1}{A_2} \sqrt{\frac{g}{2h_1^{eq}}} & -\frac{a_2}{A_2} \sqrt{\frac{g}{2h_2^{eq}}} \end{bmatrix}}_{A_c} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{k_m}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_c} u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

que pode ser reescrito na forma mais compacta como:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_c x(t) + B_c u(t) \\ y(t) &= C x(t). \end{aligned} \quad (4.7)$$

O ponto de operação, em que o sistema será linearizado, corresponde a  $(h_1^{eq}, h_2^{eq}, v^{eq}) = (15 \text{ cm}, 15 \text{ cm}, 7.4459 \text{ V})$ . Ao fazer isso o ponto  $(h_1^{eq}, h_2^{eq}) = (15 \text{ cm}, 15 \text{ cm})$  se torna a nova origem do sistema. O equivalente em tempo discreto do sistema (4.7), é:

$$\begin{aligned} x[(k+1)T_s] &= Ax[kTs] + Bu[kTs] \\ y[kTs] &= Cx[kTs]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde:

$$A = e^{A_c T_s} = \begin{bmatrix} 0.9677 & 0 \\ 0.0317 & 0.9677 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \int_0^{T_s} e^{A\tau} B_c d\tau = \begin{bmatrix} 0.1300 \\ 0.0021 \end{bmatrix}.$$

O período de amostragem, determinado empiricamente, foi de  $T_s = 0,5$  segundos, e o método de discretização utilizado foi o segurador de ordem zero (Franklin et al., 2013).

# Capítulo 5

## Resultados

Para a implementação do controlador, foi desenvolvido um servidor responsável por receber os dados dos sensores da planta, calcular o sinal de controle e enviá-lo de volta à planta. Os cálculos necessários foram parcialmente implementados utilizando a ferramenta *Multi-Parametric Toolbox* (MPT) no software Matlab® (Herceg et al., 2013). O servidor foi desenvolvido em Python (versão 3.9.5), e a comunicação com a planta ocorre por meio do ambiente Simulink/Matlab®. A Figura 5.1 ilustra o diagrama de blocos básico da comunicação com a planta.

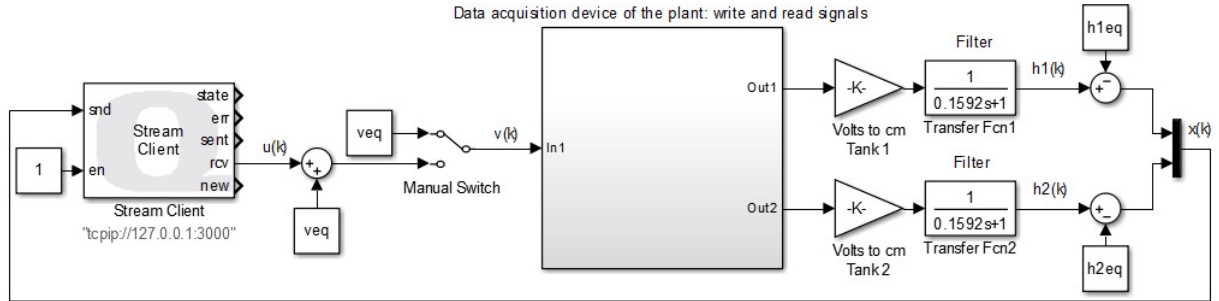


Figura 5.1: Diagrama de blocos Simulink.

O bloco mais à esquerda é responsável pelo cálculo da ação de controle  $u(k)$ . Como essa ação é determinada com base no modelo linear, é necessário somá-la à tensão de equilíbrio  $v^{eq}$  antes de enviá-la à bomba. Já o bloco central gerencia a comunicação com os tanques, realizando a leitura e escrita de dados. As medições dos tanques são ajustadas pela subtração dos respectivos pontos de equilíbrio,  $h_1^{eq}$  e  $h_2^{eq}$ , antes de serem enviadas ao servidor.

### Restrições de estados

As restrições no estado são estabelecidas a partir do ponto de operação, levando em consideração a altura máxima dos tanques (30 cm).

$$\text{Tanque 1} : \begin{cases} x_{1_{min}} = h_{1_{min}} - h_1^{eq} = 0 - 15 = -15 \text{ cm} \\ h_{1_{min}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1_{max}} = h_{1_{max}} - h_1^{eq} = 30 - 15 = 15 \text{ cm} \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\text{Tanque 1} : \begin{cases} x_{1_{min}} \leq x_1 \leq x_{1_{max}} \\ h_{1_{min}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \leq 15 \\ -x_1 \leq 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{15}x_1 \leq 1 \\ -\frac{1}{15}x_1 \leq 1 \end{cases} . \quad (5.2)$$

O mesmo desenvolvimento para o tanque 2:  $\begin{cases} \frac{1}{15}x_2 \leq 1 \\ -\frac{1}{15}x_2 \leq 1 \end{cases}$ . Em seguida, o seguinte poliedro que define as restrições de estado é obtido:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{15} & 0 \\ -\frac{1}{15} & 0 \\ 0 & \frac{1}{15} \\ 0 & -\frac{1}{15} \end{bmatrix}}_{G_x} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x \leq \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\bar{1}} \Rightarrow \Omega_x = \{x : G_x x \leq \bar{1}\}. \quad (5.3)$$

### Restrições de controle

A tensão máxima que pode ser aplicada na bomba é  $v(t) = 12 \text{ V}$ . Portanto:

$$\text{Bomba} : \begin{cases} u_{min} = v_{min} - v^{eq} = -7.4459 \text{ V} \\ v_{min} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{max} = v_{max} - v^{eq} = 4.5541 \text{ V} \end{cases} \quad (5.4)$$

$$\text{Bomba} : \begin{cases} u_{min} \leq u \leq u_{max} \\ v_{min} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0.2196 u \leq 1 \\ -0.1343 u \leq 1 \end{cases} . \quad (5.5)$$

que pode ser escrito na seguinte forma poliédrica:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0.2196 \\ -0.1343 \end{bmatrix}}_U u \leq \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\bar{1}} \Rightarrow \mathfrak{U} = \{u : Uu \leq \bar{1}\}. \quad (5.6)$$

## 5.1 Rastreamento por realimentação de saída

Um conjunto invariante controlado  $\lambda$ -contrativo  $\Omega$  contido no conjunto de restrições iniciais  $\Omega_x$  com uma taxa de contração de  $\lambda = 0,99$  foi calculado usando o algoritmo proposto em (Dórea and Hennet, 1999). Em seguida foi verificado que  $\Omega$  é OFCI usando as condições

propostas em (Dórea, 2009), com  $\lambda = 0,99$ . A taxa de contração escolhida garante o maior conjunto invariante possível. Portanto, a sequência de controle (3.13) pode ser implementada. Os conjuntos  $\Omega_x$  e  $\Omega$  são mostrados na Figura 5.2. Para os resultados experimentais, admitiu-se a seguinte situação: inicialmente, a partir do ponto de operação, o sistema deve rastrear uma referência constante  $r = 20\text{ cm}$  o que implica uma variação de 5 unidades a partir do ponto de operação  $h_2^{eq} = 15\text{ cm}$ ; então, após 160 segundos a referência é alterada para  $r = 23\text{ cm}$  totalizando uma variação de 8 unidades em relação a  $h_2^{eq}$ . A Figura 5.2 também representa a trajetória do vetor de estado resultante da ação de controle (3.13), partindo do estado inicial  $(h_1^{eq}, h_2^{eq}) = (15\text{ cm}, 15\text{ cm})$  que é rotulado como  $x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ . Devido a problemas de calibração dos sensores, o estado inicial está ligeiramente fora da origem.

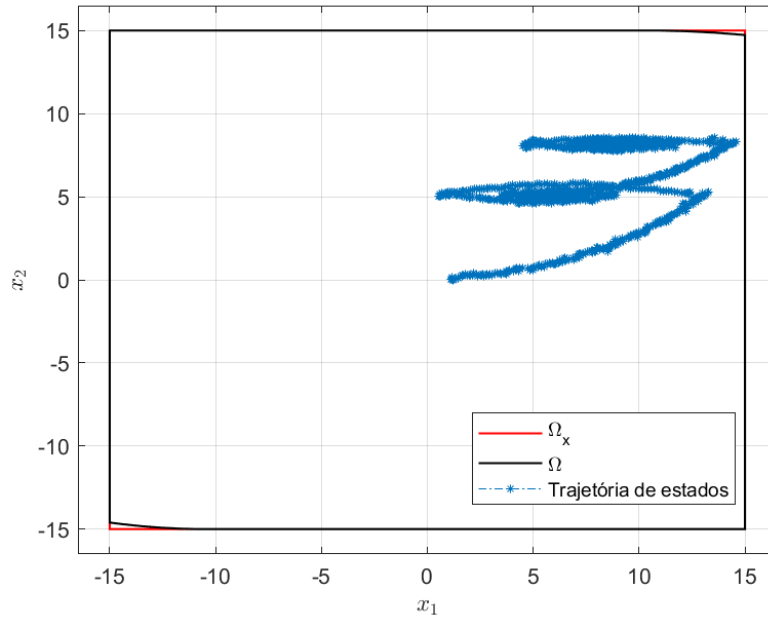


Figura 5.2: Conjunto de restrições de estado  $\Omega_x$ , conjunto OFCI  $\Omega$ , e trajetória do vetor de estado satisfazendo as restrições (Realimentação de saída).

A Figura 5.3 corresponde ao sinal de controle  $v(k) = u(k) + v^{eq}$ . O sinal de controle  $v(k)$  reflete a combinação entre  $u(k)$ , que representa a ação de controle calculada, e  $v^{eq}$  que corresponde ao ponto de operação do sistema. As Figuras 5.4 e 5.5 mostram, respectivamente, as evoluções temporais das variáveis  $h1(k) = x_1(k) + h_1^{eq}$  e  $y(k) = x_2(k) + h_2^{eq}$ . As mesmas figuras contemplam a evolução até o ponto de operação do sistema em que o controlador é ligado.

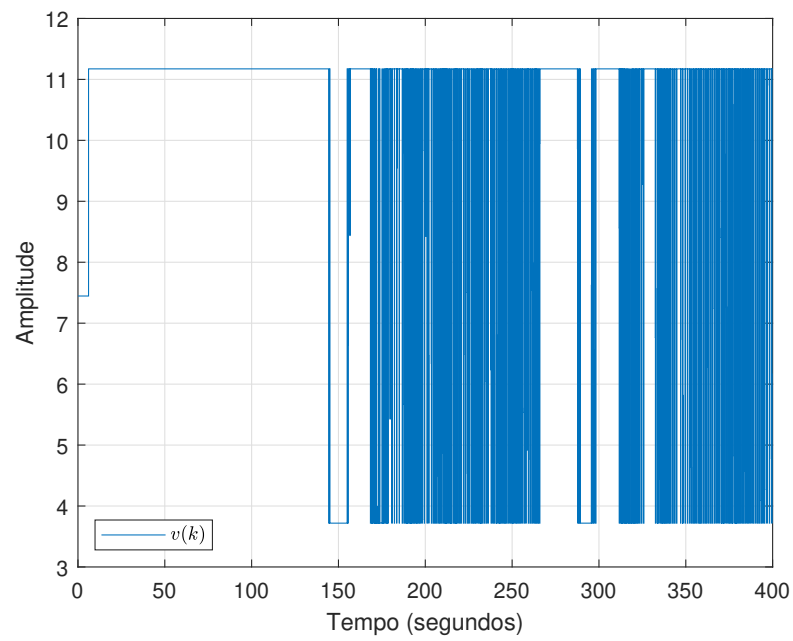
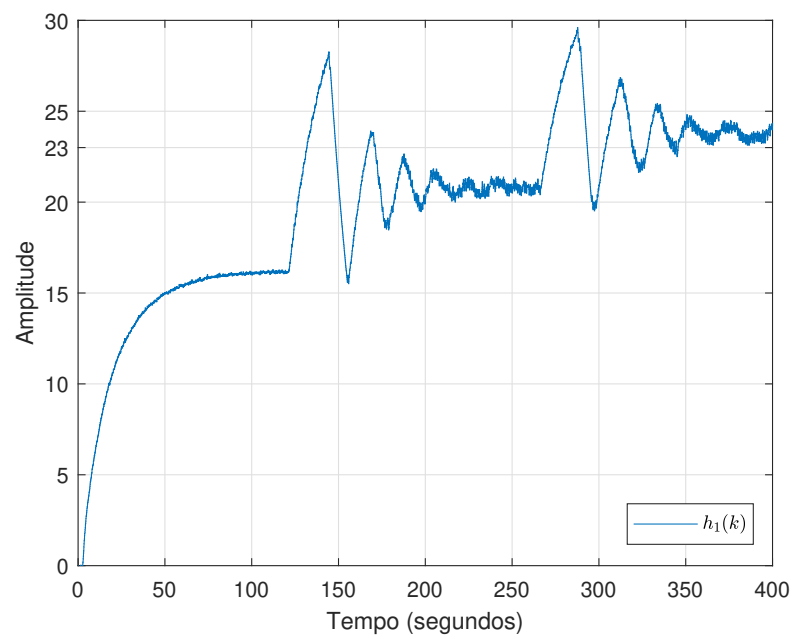
Figura 5.3: Sinal de controle  $v(k)$  (Realimentação de saída).

Figura 5.4: Resposta tanque 1 (Realimentação de saída).

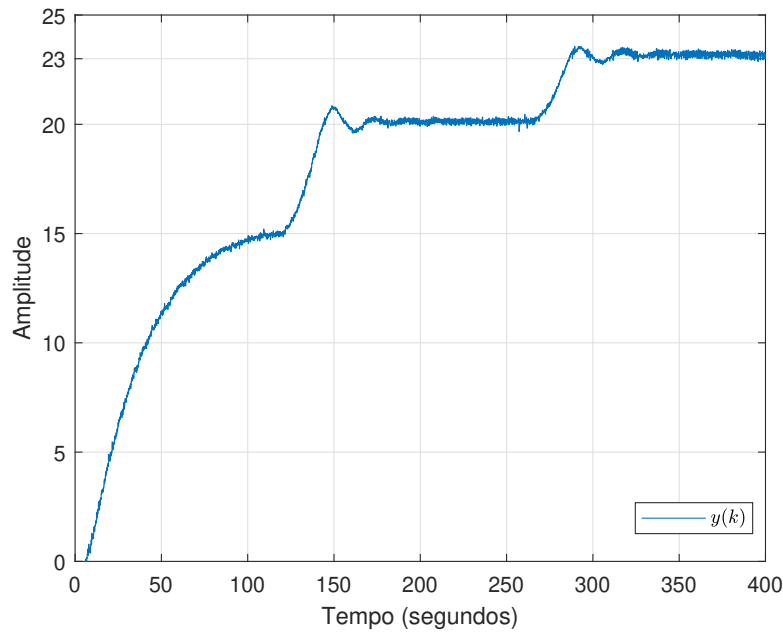


Figura 5.5: Resposta  $y(k)$  tanque 2 (Realimentação de saída).

É importante ressaltar que, embora o controle seja por realimentação de saída (com a informação apenas de  $h_2(k)$ ), é possível ter acesso ao tanque 1. Os resultados para o tanque 1 são apresentados aqui para mostrar que mesmo sem a informação direta de  $h_1(k)$ , as restrições são satisfeitas para essa variável.

## 5.2 Rastreamento por realimentação de estados

Uma versão por realimentação de estados do controle (3.13) também foi implementada. Neste caso, os vetores  $\phi(y)$  em (3.6) e  $\gamma(y)$  em (3.11) são substituídos por  $GAx(k)$  e  $\begin{bmatrix} CA \\ -CA \end{bmatrix} x(k)$ , respectivamente, uma vez que o vetor de estado completo  $x(k)$  agora está disponível. As Figuras 5.6 a 5.9 retratam os resultados.

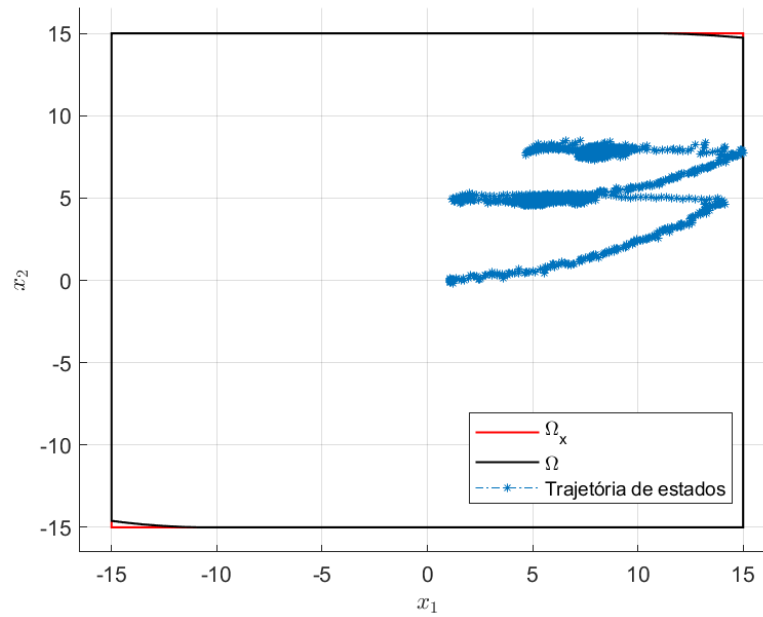


Figura 5.6: Conjunto de restrições de estado  $\Omega_x$ , conjunto OFCI  $\Omega$ , e trajetória do vetor de estado satisfazendo as restrições.

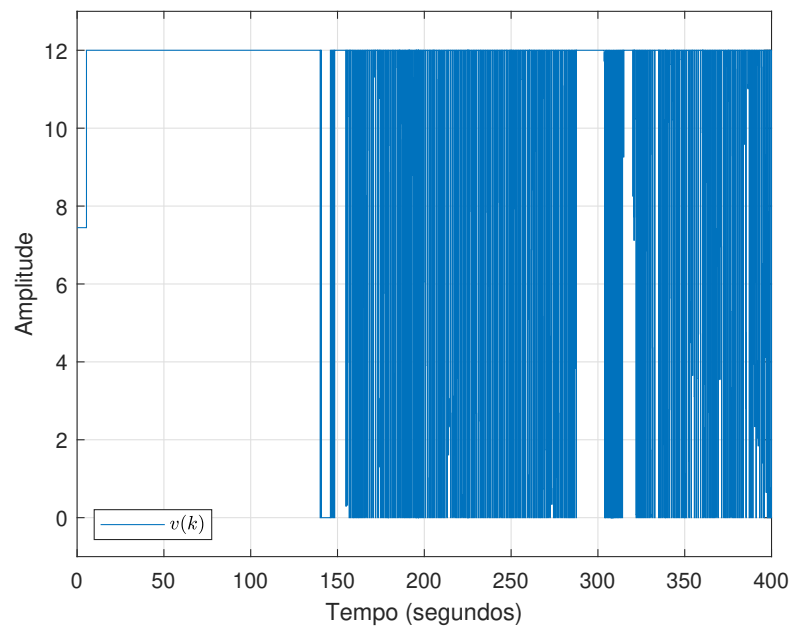


Figura 5.7: Sinal de controle  $v(k)$  (Realimentação de estados).

As Figuras 5.8 e 5.9 também ilustram a evolução temporal dos dois tanques. Em comparação com a abordagem anterior, observa-se que o tanque 1 apresenta uma resposta transiente com menor oscilação, enquanto o tanque 2 demonstra uma redução no *overshoot*. Além disso, ambos os tanques atingem o regime estacionário de maneira mais rápida.

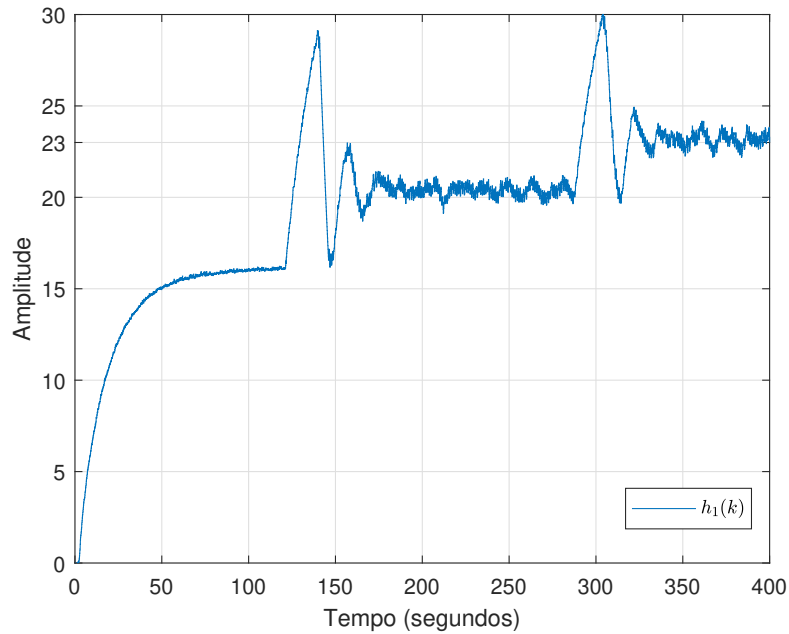


Figura 5.8: Resposta tanque 1 (Realimentação de estados).

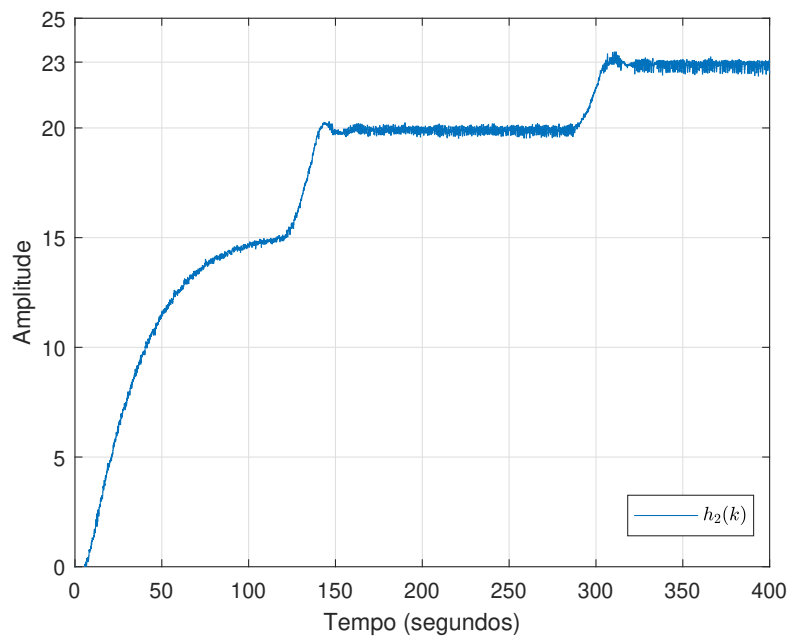


Figura 5.9: Resposta tanque 2 (Realimentação de estados).

A partir dos resultados apresentados, é possível observar que a ação de controle (3.13)

realizou o rastreamento da referência ao custo de uma variabilidade considerável do sinal de controle, o que pode ser atribuído à significativa amplitude e frequência do ruído.

Outro ponto a ser destacado é que as ações de controle foram baseadas em um modelo discretizado oriundo de um modelo contínuo linearizado. Tal modelo não garante capturar o comportamento do sistema caso esteja longe do ponto de operação. Em nossos experimentos, o controlador foi capaz de rastrear a referência mesmo com uma variação de oito unidades em relação ao ponto de operação.

Pode-se observar nas Figuras 5.4 e 5.5 que, durante o transiente do rastreamento da referência, o tempo de resposta do tanque 2 é mais suave do que o do tanque 1, que apresenta um comportamento oscilatório com maior *overshoot*. O controlador atua diretamente no tanque 1, e uma maneira de aumentar a entrada no tanque 2 é elevando o volume no tanque 1. Conforme destacado em (Dórea, 2009; Almeida and Dórea, 2021), utilizando o conceito de OFCI, é possível obter soluções com conjuntos maiores de estados iniciais admissíveis do que abordagens bem estabelecidas. Também é possível notar na Figura 5.2 que o conjunto de estados iniciais admissíveis ( $\Omega$ ) é quase o conjunto de restrições de estados ( $\Omega_x$ ).

Neste trabalho, não foram consideradas perturbações nem a influência de ruídos de medição na formulação do controlador. No entanto, é possível incluí-los no modelo, sendo representados por poliedros, como apresentado em Almeida (2020); Mancini (2021).

A Tabela 5.1 apresenta o tempo médio de computação necessário para que ambos os controladores calculem o sinal de controle  $u(k)$ .

Tabela 5.1: Tempo computacional médio por iteração.

| Controlador              | Tempo (segundos) |
|--------------------------|------------------|
| Realimentação de estados | 0.00099          |
| Realimentação de saída   | 0.0143           |

Deve-se notar que, no cenário de realimentação de saída,  $g + 2p$  problemas adicionais de programação linear precisam ser resolvidos, os quais correspondem aos cálculos de  $\phi(y)$  e  $\gamma(y)$  em (3.6) e (3.11), respectivamente. Os resultados foram obtidos utilizando um processador Intel(R) Core(TM) i5 – 4570 CPU 3.20GHz, 24.0GB de RAM e sistema operacional de 64 bits.

# Capítulo 6

## Conclusão

Neste trabalho foram apresentadas duas implementações de controladores, por realimentação de saída e de estados, para um sistema linear sujeito a restrições, com o objetivo de rastrear uma referência constante. Um sistema de tanques acoplados foi empregado para validar os controladores. Com base nos conceitos de conjuntos OFCI e um modelo linearizado discreto, uma sequência de controle adequada foi computada *online* para assegurar as restrições e rastrear a referência. Os resultados experimentais mostraram que os controladores atenderam aos seus requisitos ao custo de uma alta variabilidade no sinal de controle, principalmente devido à influência do ruído.

Com base nos conceitos e resultados apresentados neste trabalho de conclusão de curso, o seguinte artigo foi publicado no Congresso Brasileiro de Automática (CBA):

- RODRIGUES, M. M., LEITE, G. R., ARAÚJO, I. B. Q., ALMEIDA, T. A., and DÓREA, C. E. T.. Output Feedback Reference Tracking for Constrained Linear Systems via Invariant Sets: The Coupled Tanks Process. Congresso Brasileiro de Automática, 2024.

Atualmente, experimentos com quatro tanques estão em fase de desenvolvimento. Será empregada uma realimentação dinâmica de saída em conjunto com estimadores de estado. Com o uso de estimadores de estado, nesta abordagem, é possível limitar o erro de observação em um conjunto invariante. Além disso, os efeitos de perturbações e ruídos devem ser considerados e contabilizados.

# Bibliografia

- Almeida, T. A. (2020). *Output Feedback Regulation and Constant Reference Tracking with Disturbance Rejection for Constrained Linear Systems via Controlled-Invariant Sets*. Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Norte.
- Almeida, T. A. and Dórea, C. E. (2018). Output feedback constant reference tracking and disturbance rejection for constrained linear systems. *IFAC-PapersOnLine*, 51(25):30–35. 9th IFAC Symposium on Robust Control Design ROCOND 2018.
- Almeida, T. A. and Dórea, C. E. T. (2021). Output feedback constrained regulation of linear systems via controlled-invariant sets. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 66(7):3378–3385.
- Almeida, T. A., Mancini, A. T. F. O., and Dórea, C. E. T. (2023). Output feedback reference tracking and disturbance rejection for constrained linear systems using invariant sets. In *Informatics in Control, Automation and Robotics*, pages 135–150, Cham. Springer International Publishing.
- Bitsoris, G. (1988). Positively invariant polyhedral sets of discrete-time linear systems. *International Journal of Control*, 47(6):1713–1726.
- Blanchini, F. (1994). Ultimate boundedness control for uncertain discrete time systems via set-induced lyapunov function. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(2):428–433.
- Blanchini, F. (1999). Set invariance in control. *Automatica*, 35:1747–1767.
- Blanchini, F. and Miani, S. (2015). *Set-Theoretic Methods in Control*. Birkhäuser Cham, Switzerland, second edition.
- Camacho, E. and Alba, C. (2013). *Model Predictive Control*. Springer.
- Dórea, C. E. T. (2009). Output-feedback controlled-invariant polyhedra for constrained linear systems. *Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 5317–5322.
- Dórea, C. E. T. and Hennes, J. C. (1999). (a,b)-invariant polyhedral sets of linear discrete-time system. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 103(3):521–542.

- Franklin, G. F., Powell, J. D., and Emami-Naeini, A. (2013). *Sistemas de Controle para Engenharia*. Bookman, Porto Alegre, 6 edition. Dados eletrônicos.
- Herceg, M., Kvasnica, M., Jones, C., and Morari, M. (2013). Multi-Parametric Toolbox 3.0. In *Proc. of the European Control Conference*, pages 502–510, Zürich, Switzerland.
- Hespanha, J. P. (2018). *Linear Systems Theory*. Princeton Press, Princeton, New Jersey. ISBN13: 9780691179575.
- Limón, D., Alvarado, I., Alamo, T., and Camacho, E. F. (2008). Mpc for tracking piecewise constant references for constrained linear systems. *Autom.*, 44:2382–2387.
- Mancini, A. T. F. O. (2021). *Controle por Realimentação de Saída de Sistemas Lineares sob Restrições com Redução do Conjunto Terminal*. Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Norte.
- Silveira Jr., J. I. S. and Dórea, C. E. T. (2023). Reference tracking via output feedback for constrained uncertain linear systems. *International Journal of Systems Science*, 54(14):2748–2764.