

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CENTRO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

MATHEUS AMANCIO MIRANDA

**CONTRIBUIÇÕES PARA A OTIMIZAÇÃO DO POSICIONAMENTO DE
SUPORTES NA MITIGAÇÃO DE VIBRAÇÕES INDUZIDAS POR VÓRTICES
EM DUTOS RÍGIDOS SUBMARINOS EM VÃOS LIVRES**

MACEIÓ

2025

MATHEUS AMANCIO MIRANDA

**CONTRIBUIÇÕES PARA A OTIMIZAÇÃO DO POSICIONAMENTO DE
SUPORTES NA MITIGAÇÃO DE VIBRAÇÕES INDUZIDAS POR VÓRTICES
EM DUTOS RÍGIDOS SUBMARINOS EM VÃOS LIVRES**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Centro de Tecnologia da Universidade Federal de Alagoas.

Área de Concentração: Estruturas e Materiais

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Nobre Lages

Coorientador: Prof. Dr. Adeildo Soares Ramos Júnior

MACEIÓ

2025

Catálogo na Fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

M672c Miranda, Matheus Amancio.

Contribuições para a otimização do posicionamento de suportes na
mitigação de vibrações induzidas por vórtices em dutos rígidos
submarinos em vãos livres / Matheus Amancio Miranda. - 2025.
95 f. : il.

Orientador: Eduardo Nobre Lages.

Co-orientador: Adeildo Soares Ramos Júnior.

Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de
Alagoas. Centro de Tecnologia. Maceió, 2025.

Bibliografia: f. 84-87.

Apêndices: f. 88-95.

1. Dutos. 2. Vibrações induzidas por vórtices. 3. Otimização estrutural. I.
Título.

CDU:691



**CONTRIBUIÇÕES PARA A OTIMIZAÇÃO DO POSICIONAMENTO DE SUPORTES NA
MITIGAÇÃO DE VIBRAÇÕES INDUZIDAS POR VÓRTICES EM DUTOS RÍGIDOS
SUBMARINOS EM VÃOS LIVRES**

MATHEUS AMÂNCIO MIRANDA

Dissertação submetida à banca examinadora do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas e aprovada no dia 21 do mês de março do ano de 2025.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Eduardo Nobre Lages
(Orientador – PPGEC/UFAL)

Prof. Dr. Adeildo Soares Ramos Júnior
(Coorientador – PPGEC/UFAL)

Prof. Dr. Eduardo Setton Sampaio da Silveira
(Avaliador Interno – PPGEC/UFAL)

Prof. Dr. Carlos de Oliveira Cardoso
(Avaliador Externo à Instituição – Petrobras)

Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira
(Avaliador Externo à Instituição – UFOP)

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelas bênçãos concedidas em minha vida.

À minha família, pelo apoio incondicional em todos os momentos.

Ao meu orientador, Eduardo Nobre Lages, pela disponibilidade, paciência e atenção dedicadas ao longo deste trabalho, bem como pelos valiosos ensinamentos transmitidos nas aulas e no estágio de docência orientado durante o mestrado.

Ao meu coorientador, Adeildo Soares Ramos Júnior, pela disponibilidade e pelas contribuições essenciais na área de otimização, fundamentais para o desenvolvimento deste estudo. Agradeço, ainda, pelos ensinamentos transmitidos em suas disciplinas do mestrado, que forneceram uma base sólida para construção deste trabalho.

Aos professores do PPGEC, pelos conhecimentos transmitidos ao longo da minha formação.

À minha noiva e colega de mestrado, Karol, pelo apoio, paciência e incentivo durante toda essa jornada. Sou imensamente grato por tê-la ao meu lado nessa caminhada.

Aos amigos e companheiros do mestrado, em especial ao Luiz, Lucas, Christian e Evilly, pelos momentos compartilhados, pelo apoio e pelas trocas de conhecimento que tornaram essa trajetória mais leve e enriquecedora.

Aos companheiros e ex-companheiros de trabalho, ao Prof. Eduardo Setton, e a toda a equipe do LCCV, em especial ao Josué, Emerson, Weverton, Jéssica, Teófanés e Renato, pelo apoio e pela convivência ao longo dessa jornada.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo suporte financeiro por meio da bolsa concedida durante boa parte do mestrado.

À Universidade Federal de Alagoas (UFAL) e à Fundação Universitária de Desenvolvimento de Extensão e Pesquisa (FUNDEPES).

RESUMO

Os dutos rígidos submarinos são essenciais para o escoamento de hidrocarbonetos na exploração *offshore*. Entretanto, os vãos livres, formados pelas irregularidades do leito marinho e submetidos a ações ambientais, representam risco à integridade estrutural dos dutos, podendo levar a falhas por fadiga decorrentes de vibrações induzidas por vórtices (VIV). Para mitigar esses efeitos, inspeções periódicas avaliam a necessidade de intervenções, como a instalação de suportes. No entanto, a escolha da solução deve equilibrar custo e eficácia, o que demanda simulações numéricas baseadas no Método dos Elementos Finitos, alinhadas à recomendação prática DNV-RP-F105. Este trabalho propõe uma estratégia de otimização para o posicionamento de suportes em vãos livres de dutos submarinos, visando a mitigação de VIV. A abordagem utiliza uma função objetivo que representa o custo associado à inclusão de suportes, em que cada vão livre pode conter um fator de penalização distinto. Além disso, considera-se uma restrição baseada na primeira frequência natural de vibração da estrutura. A metodologia envolve o desenvolvimento e validação de um modelo numérico simplificado para análise das frequências e modos naturais de vibração, explorando diferentes modelagens do solo (bases elásticas discretas e contínuas) e condições de contorno. Além disso, um módulo de otimização discreta é integrado ao modelo, permitindo a aplicação de algoritmos metaheurísticos (algoritmo genético) ou determinísticos (método de ramificar e limitar, ou *branch-and-bound*). Os resultados evidenciam a eficiência da estratégia proposta, destacando o desempenho do método de ramificar e limitar, que alcança a solução ótima com um número reduzido de avaliações da função objetivo e sem aleatoriedade no processo de busca.

Palavras-chave: Dutos Submarinos; Vibrações Induzidas por Vórtices; Otimização Estrutural.

ABSTRACT

Subsea rigid pipelines are essential for hydrocarbon flow in offshore exploration. However, free spans caused by seabed irregularities and exposed to environmental loads pose a significant risk to pipeline structural integrity, potentially resulting in fatigue failure induced by vortex-induced vibrations (VIV). To mitigate these effects, periodic inspections assess the need for interventions, such as the installation of supports. However, selecting a solution must balance cost and effectiveness, requiring numerical simulations based on the Finite Element Method, following the DNV-RP-F105 recommended practice. This study proposes an optimization strategy for positioning supports in free spans of subsea pipelines to mitigate VIV. The approach employs an objective function representing the cost associated with support installation, where each free span can have a distinct penalty factor. Additionally, a constraint based on the structure's first natural frequency is considered. The methodology involves developing and validating a simplified numerical model for analyzing natural frequencies and vibration modes and exploring different soil modeling approaches (discrete and continuous elastic foundations) and boundary conditions. Additionally, a discrete optimization module is integrated into the model, applying metaheuristic (genetic algorithm) or deterministic (branch-and-bound algorithm) optimization techniques. The results highlight the efficiency of the proposed strategy, emphasizing the performance of the branch-and-bound algorithm, which achieves optimal support positioning with fewer objective function evaluations and without randomness in the search process.

Keywords: Subsea Rigid Pipelines; Vortex-Induced Vibrations; Structural Optimization.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Evolução da produção de petróleo e gás natural no Brasil por ambiente em milhões de barris de óleo equivalente por dia	16
Figura 2 – Localização do gasoduto Rota 3	17
Figura 3 – Direções das vibrações induzidas por vórtices	18
Figura 4 – Equipamentos acoplados aos dutos para a supressão de VIV	19
Figura 5 – Exemplos de suportes mecânicos.....	19
Figura 6 – Cenário de duto em vão livre e terminologia	20
Figura 7 – Modelo físico de um duto em vão livre	20
Figura 8 – Formação da esteira de vórtices	24
Figura 9 – Relação entre a esteira de vórtices e o número de Reynolds	25
Figura 10 – Relação entre os números de Reynolds e de Strouhal	25
Figura 11 – Vãos livres únicos e isolados.....	27
Figura 12 – Multivão interativo.....	27
Figura 13 – Representações das condições de contorno em modelos de dutos em vão livre	32
Figura 14 – Exemplo de modelo de duto em vão livre com base elástica linear discreta	32
Figura 15 – Simulação de condição <i>in situ</i> no programa comercial Abaqus®	33
Figura 16 – Fluxo de operação de uma ferramenta computacional para análise de dutos em vão livre	34
Figura 17 – Processo típico de otimização de um projeto de engenharia.....	35
Figura 18 – Esquema do modelo numérico	37
Figura 19 – Elemento de pórtico plano e seus graus de liberdade	37
Figura 20 – Ilustrações referentes às bases elásticas discreta e contínua	42
Figura 21 – Representação de uma viga semi-infinita	44
Figura 22 – Fluxo do programa computacional	47
Figura 23 – Modelo para cálculo das áreas exposta e enterrada	48
Figura 24 – Configuração geométrica do modelo de validação no programa LESM	50
Figura 25 – Seção de menus suspensos e botões para abertura de menus no programa LESM	51

Figura 26 – Resultados da avaliação das 3 primeiras frequências naturais de vibração de modelos considerando bases elásticas discreta e contínua	54
Figura 27 – Resultados da avaliação das 3 primeiras frequências naturais de vibração de modelos com a consideração ou não da inércia rotatória	56
Figura 28 – Configurações indeformadas dos dois modelos comparados.....	58
Figura 29 – Cálculo do cosseno do ângulo entre dois vetores	58
Figura 30 – Dois primeiros modos de vibração correspondentes entre o Modelo A e Modelo B.....	59
Figura 31 – Primeiro modo natural de vibração do modelo com dois vãos isolados	60
Figura 32 – Primeiro modo natural de vibração do modelo com vão único isolado.....	61
Figura 33 – Primeiro modo natural de vibração do modelo com multivão interativo....	61
Figura 34 – Relação entre o comprimento do ombro intermediário e a primeira frequência natural de vibração.....	62
Figura 35 – Comparação da frequência e modo natural de vibração ao se aplicar um esforço axial de tração	63
Figura 36 – Comparação da frequência e modo natural de vibração ao se aplicar um esforço axial de compressão	63
Figura 37 – Primeiro modo natural de vibração do modelo com suporte	64
Figura 38 – Variação da primeira frequência natural de vibração com a rigidez do solo	65
Figura 39 – Variável de projeto do problema de otimização	66
Figura 40 – Fluxograma da implementação do método de ramificar e limitar	68
Figura 41 – Interface de linha de comando para utilização do programa computacional	69
Figura 42 – Interface de linha de comando para utilizar o módulo de otimização.....	70
Figura 43 – Configuração geométrica e possíveis posições de suportes do cenário com vão isolado.....	71
Figura 44 – Combinações e frequências naturais de vibração do cenário com vão isolado	71
Figura 45 – Esquematização da evolução do método de ramificar e limitar para o cenário com vão isolado considerando a frequência alvo de 4 Hz.....	72
Figura 46 – Evolução e resultados do método de ramificar e limitar para o cenário com vão isolado considerando a frequência alvo de 4 Hz.....	72
Figura 47 – Configuração geométrica e possíveis posições de suportes do cenário com vão isolado e suporte prévio	73

Figura 48 – Combinações e frequências naturais de vibração do cenário com vão isolado e suporte prévio	73
Figura 49 – Esquematização da evolução do método de ramificar e limitar para o cenário com vão isolado e suporte prévio considerando a frequência alvo de 4 Hz.....	74
Figura 50 – Configuração geométrica e possíveis posições de suportes do cenário com múltiplos vãos.....	74
Figura 51 – Resultados do método de ramificar e limitar para o cenário com múltiplos vãos e considerando uma frequência alvo de 1 Hz.....	76
Figura 52 – Posicionamento ótimo dos suportes para cenário com múltiplos vãos e considerando uma frequência alvo de 1 Hz.....	77
Figura 53 – Resultados do método de ramificar e limitar para o cenário com múltiplos vãos e considerando uma frequência alvo de 1,65 Hz	78
Figura 54 – Posicionamento ótimo dos suportes para cenário com múltiplos vãos e considerando uma frequência alvo de 1,65 Hz	78
Figura 55 – Número de soluções viáveis obtidas por tamanhos de população distintos via algoritmo genético	79

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Condições de contorno e coeficientes	30
Tabela 2 – Característica da resposta de vãos livres de acordo com o comprimento do vão normalizado	31
Tabela 3 – Dados do modelo de validação no programa LESM	50
Tabela 4 – Comparação entre as 5 primeiras frequências naturais de vibração do modelo deste trabalho e do programa LESM	51
Tabela 5 – Comparação das primeiras frequências naturais de vibração obtidas pelo modelo numérico com as obtidas pela formulação analítica da DNV-RP-F105	52
Tabela 6 – Dados utilizados nas aplicações do modelo numérico.....	53
Tabela 7 – Comparação dos valores das duas primeiras frequências naturais de vibração entre o modelo engastado e modelos truncados	57
Tabela 8 – Valores da primeira frequência natural de vibração em função da rigidez do solo	65

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CLI	Interface de Linha de Comando
LESM	<i>Linear Elements Structure Model</i>
MEF	Método dos Elementos Finitos
UML	Linguagem de Modelagem Unificada
VIV	Vibrações Induzidas por Vórtices

LISTA DE SÍMBOLOS

$f_{IL}^{VIV\ Avoidance}$	Frequência de <i>VIV Avoidance</i> na direção <i>in-line</i>
$f_{IL}^{VIV\ Avoidance}$	Frequência de <i>VIV Avoidance</i> na direção <i>cross-flow</i>
$U_{extreme}$	Velocidade de escoamento para um evento ambiental característico
$\gamma_{f,IL}$	Fator de segurança da frequência natural de vibração na direção <i>in-</i>
<i>line</i>	
$V_{R,onset}^{IL}$	Velocidade reduzida na direção <i>in-line</i>
$\gamma_{f,CF}$	Fator de segurança da frequência natural de vibração na direção
<i>cross-flow</i>	
D	Diâmetro hidrodinâmico do duto
Re	Número de Reynolds
U	Velocidade do fluxo ou energia de deformação
ν	Viscosidade cinemática do fluido
f_s	Frequência de Strouhal
St	Número de Strouhal
n_{IL}	Número de modos na direção <i>in-line</i>
n_{CF}	Número de modos na direção <i>cross-flow</i>
n_{IL}^{SS}	Número de modos na direção <i>in-line</i> de um vão isolado
n_{CF}^{SS}	Número de modos na direção <i>cross-flow</i> de um vão isolado
$f_{IL,j}$	j-ésima frequência na direção <i>in-line</i>
$f_{CF,j}$	j-ésima frequência na direção <i>cross-flow</i>
$f_{IL,j}^{SS}$	j-ésima frequência na direção <i>in-line</i> de um vão isolado
$f_{CF,j}^{SS}$	j-ésima frequência na direção <i>cross-flow</i> de um vão isolado
L	Comprimento do vão livre ou comprimento do elemento
D_s	Diâmetro de aço do duto
S_{eff}	Esforço axial efetivo
P_{cr}	Carga crítica de flambagem
f_1	Primeira frequência natural de vibração
$C_1, \dots, C_6$	Coeficiente de condição de contorno
CSF	Fator de aumento da rigidez do concreto
EI	Rigidez à flexão do aço

m_e	Massa efetiva
L_{eff}	Comprimento efetivo
δ	Deflexão estática
β	Fator adimensional para cálculo do comprimento efetivo
K	Rigidez do solo
$\mathbf{x}$	vetor de variáveis de projeto
h_j	j-ésima restrição de igualdade do problema de otimização
g_i	i-ésima restrição de desigualdade do problema de otimização
$N_1, \dots, N_6$	Funções de interpolação do elemento de pórtico plano
ξ	Coordenada longitudinal normalizada
x	Coordenada longitudinal
$d_1, \dots, d_6$	Graus de liberdade do elemento de pórtico plano
u^P	Deslocamento longitudinal de um ponto
v^P	Deslocamento transversal de um ponto
ε_{xx}^P	Deformação específica longitudinal de um ponto
U_e^P	Energia específica de deformação de um ponto
E	Módulo de Young
A	Área
I	Momento de inércia
$\mathbf{d}$	Vetor de graus de liberdade
$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez
$\mathbf{H}$	Matriz Hessiana
ρ	Densidade de massa volumétrica
T	Energia cinética
$\dot{u}^P$	Velocidade longitudinal de um ponto
$\dot{v}^P$	Velocidade transversal de um ponto
$\dot{\mathbf{d}}$	Vetor de velocidades
$\mathbf{M}$	Matriz de massa
$\mathbf{f}$	Força do fluido por unidade de comprimento ou vetor de forças
C_M	Coefficiente de inércia de um corpo
Δ	Massa de fluido deslocada
$\mathbf{a}_f$	Aceleração do fluido
C_d	Coefficiente de arrasto

v_f	Velocidade do fluido
ρ_a	Densidade de massa linear do duto na direção axial
ρ_t	Densidade de massa linear do duto na direção transversal
k_a	Rigidez por metro na direção axial
k_t	Rigidez por metro na direção transversal
R	Raio
y_c	Ordenada do centro da circunferência
ω	Frequência angular natural de vibração
ϕ	Modo natural de vibração
c	Vetor de custos fixos
f_{alvo}	Frequência alvo para o algoritmo de otimização

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	16
1.1	Motivação	17
1.2	Justificativa.....	20
1.3	Objetivos e principais contribuições.....	22
1.4	Estrutura da dissertação	23
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	24
2.1	Vibrações Induzidas por Vórtices.....	24
2.2	Recomendação prática DNV-RP-F105.....	26
2.2.1	Classificação morfológica de vãos livres e modos de vibração	26
2.2.2	Formulação analítica aproximada para o cálculo da primeira frequência natural de vibração.....	29
2.3	Modelagem numérica de dutos rígidos submarinos em vãos livres	31
2.4	Otimização estrutural.....	34
3	MODELO NUMÉRICO	37
3.1	Duto submarino	37
3.2	Base deformável	42
3.2.1	Base elástica discreta	43
3.2.2	Base elástica contínua.....	43
3.2.3	Condição de contorno associada à solução de uma viga semi-infinita apoiada sobre uma base elástica	44
3.3	Esforço axial	46
3.4	Suportes	46
3.5	Programa computacional	46
3.6	Validação do modelo	49
3.7	Aplicações	52
3.7.1	Comparação entre bases elásticas.....	53
3.7.2	Avaliação da influência da inércia rotatória	54
3.7.3	Avaliação da condição de contorno de truncamento	56
3.7.4	Avaliação da influência de um ombro intermediário entre dois vãos.....	59

3.7.5	Avaliação da influência do esforço axial	62
3.7.6	Modelo com suporte	64
3.7.7	Avaliação da influência da rigidez do solo	64
4	OTIMIZAÇÃO DO POSICIONAMENTO DE SUPORTES	66
4.1	Formulação do problema de otimização.....	66
4.2	Algoritmo genético e método de ramificar e limitar	67
4.3	Incorporação ao programa computacional	69
4.4	Aplicações	70
4.4.1	Exemplo de validação com vão isolado	70
4.4.2	Exemplo de validação com suporte prévio.....	73
4.4.3	Cenário com múltiplos vãos	74
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	80
	REFERÊNCIAS	84
	APÊNDICE A – Folha de trabalho do Maple® contendo deduções acerca da formulação dos elementos implementados.....	88
	APÊNDICE B – Exemplo do arquivo de entrada do programa computacional desenvolvido.....	94
	APÊNDICE C – Diagrama de classes do programa computacional desenvolvido.....	95

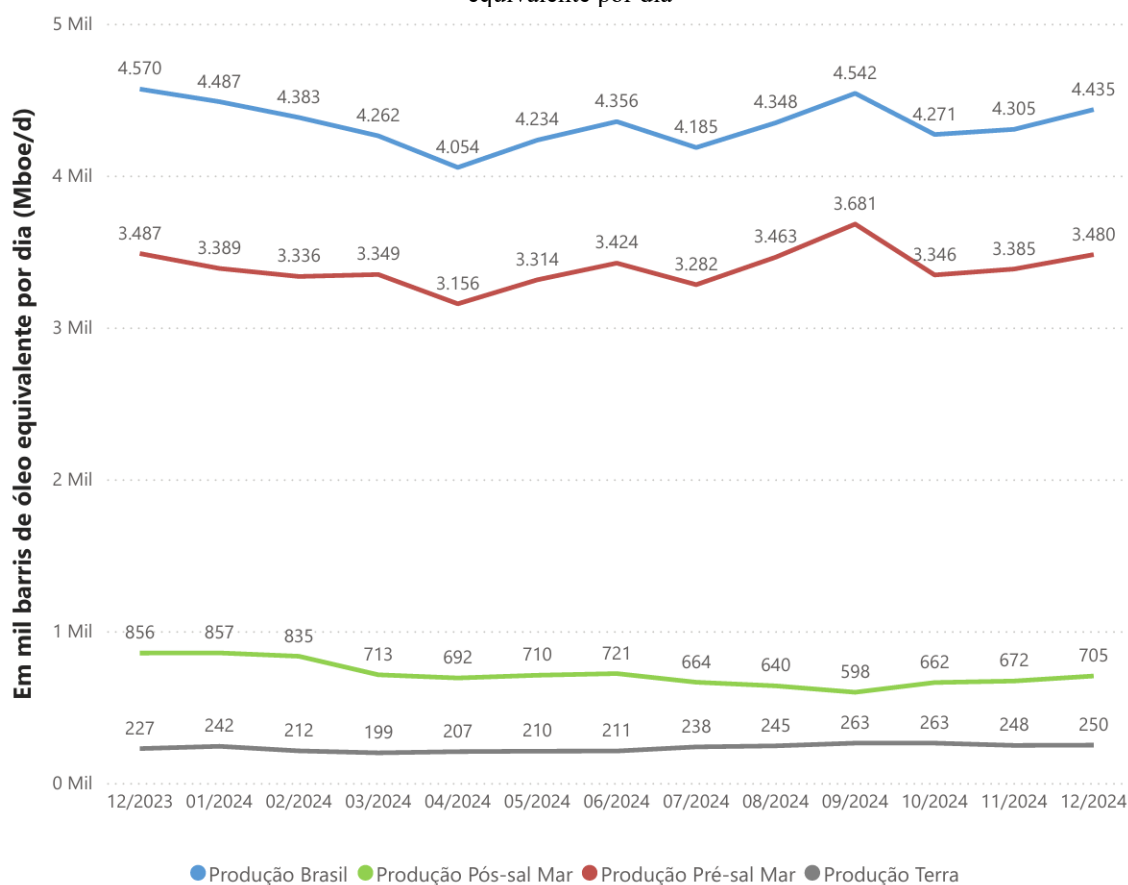
1 INTRODUÇÃO

A descoberta e exploração de campos de petróleo e gás em regiões afastadas da costa (*offshore*) demandou a instalação de sistemas submarinos complexos e de grandes extensões.

No Brasil, a descoberta de hidrocarbonetos na camada do pré-sal e os avanços nos desenvolvimentos da infraestrutura necessária para sua extração viabilizaram a produção de 4,322 milhões de barris de óleo equivalente por dia no ano de 2024. Além disso, 94,62% foram provenientes das camadas pós-sal e pré-sal (Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis, 2024).

Considerando a produção *offshore*, de acordo com a Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis (2024), de dezembro de 2023 a dezembro de 2024, a produção no horizonte geológico pré-sal é, em média, mais de quatro vezes maior quando comparada à produção no pós-sal, como observado na Figura 1.

Figura 1 – Evolução da produção de petróleo e gás natural no Brasil por ambiente em milhões de barris de óleo equivalente por dia

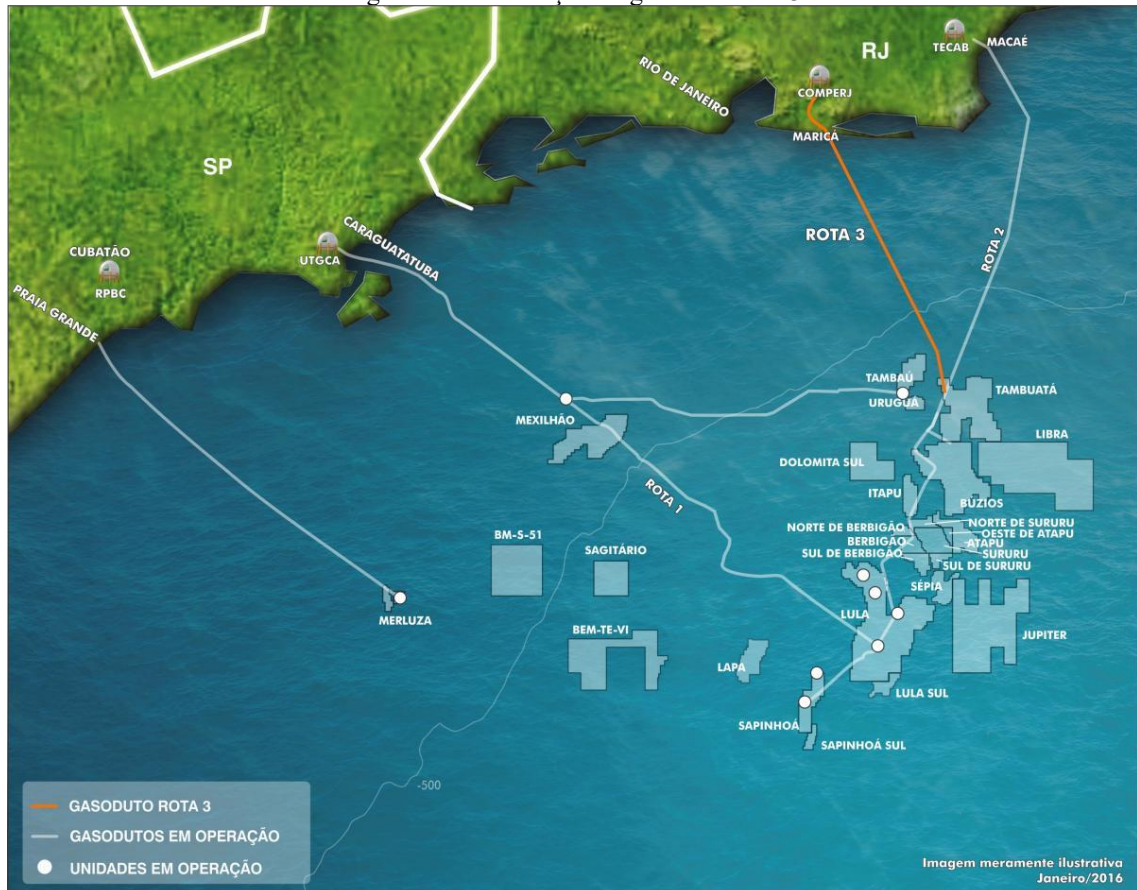


Fonte: Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis (2024)

Diante do volume produzido, a Petrobras (2024) inaugurou recentemente a maior unidade de produção de gás natural do Brasil, juntamente ao gasoduto Rota 3, com o objetivo

de ampliar o escoamento do gás extraído na área do pré-sal da Bacia de Santos. O gasoduto possui uma vazão de escoamento de aproximadamente 18 milhões de m^3 de gás por dia e uma extensão total de 355 km, sendo 307 km em trecho marítimo e 48 km em trecho terrestre. O sistema está localizado em uma região estratégica, próxima a outros gasodutos em operação (Figura 2).

Figura 2 – Localização do gasoduto Rota 3



Fonte: Petrobras (2022)

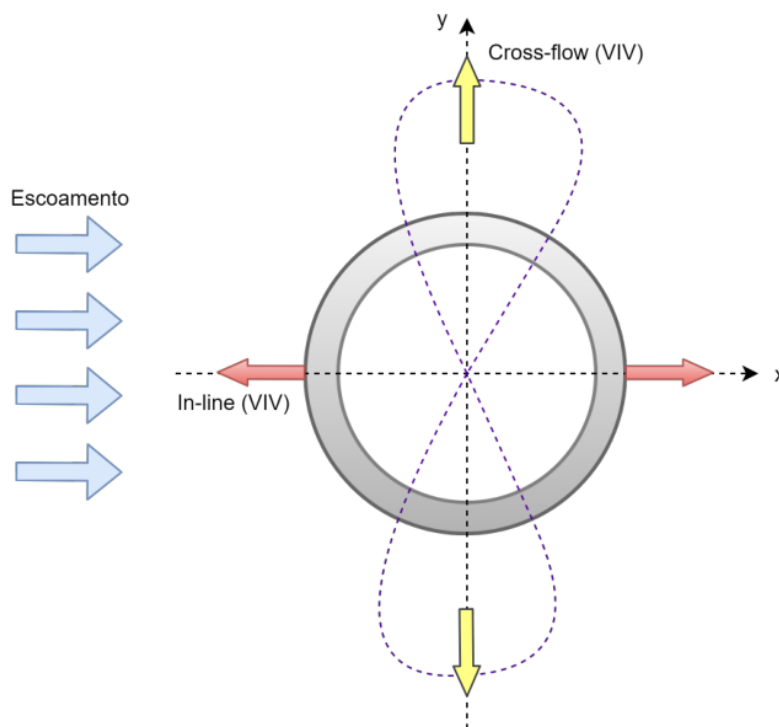
Para viabilizar a exploração em regiões de águas ultraprofundas, malhas quilométricas de dutos rígidos submarinos são instaladas sobre o leito marinho. As irregularidades do leito e o processo de erosão em torno de estruturas submersas provocado pela ação de correntes (*scouring*) formam trechos nos quais os dutos não se encontram apoiados no solo, denominados vãos livres.

1.1 Motivação

Vãos livres representam um risco à integridade estrutural dos dutos, pois as ações combinadas de ondas e correntes podem causar o desprendimento periódico de vórtices. Quando a frequência de desprendimento se aproxima de uma das frequências naturais de

vibração da estrutura na direção paralela (*in-line*) ou transversal (*cross-flow*) ao fluxo (Figura 3), ocorre o fenômeno das vibrações induzidas por vórtices (VIV), que é amplamente discutido por Blevins (2001), Santos (2005), Lopes (2006) e Sumer e Fredsøe (2006).

Figura 3 – Direções das vibrações induzidas por vórtices



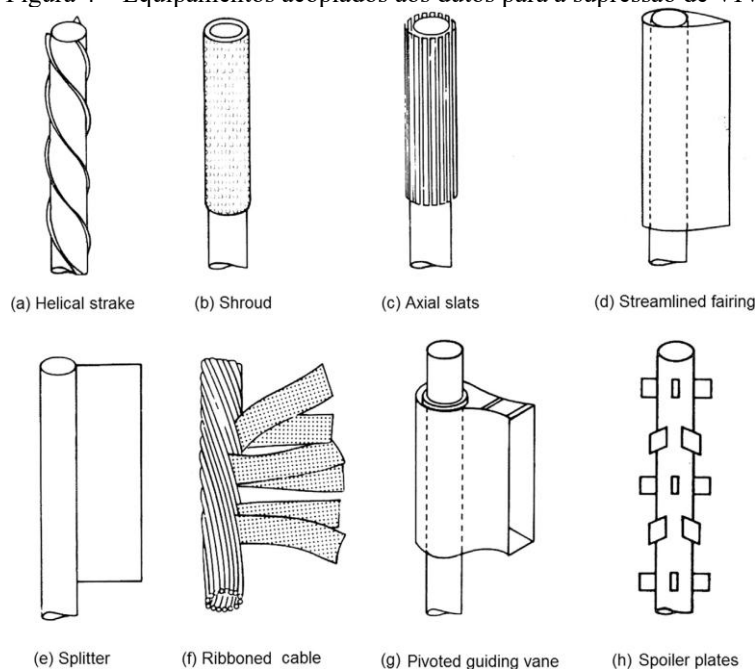
Fonte: Valença (2020)

Uma vez que os dutos submarinos são projetados para operação durante um grande período, esse fenômeno pode comprometer sua vida útil à fadiga. Dessa forma, as rotas dos dutos submarinos são planejadas de forma a evitar vãos livres extensos. Além dessa preocupação, outros critérios também influenciam na definição das rotas, levando ao desenvolvimento de diversos processos de otimização (Meisingset; Hove; Olsen, 2004; Baioco *et al.*, 2013; Rocha *et al.*, 2015).

De acordo com Bai e Bai (2014), as intervenções destinadas a mitigar ou reduzir a influência do fenômeno de VIV baseiam-se na avaliação da configuração dos vãos livres formados na instalação do duto e em dados de inspeções de dutos já instalados. Essas avaliações seguem diretrizes normativas, com destaque para a recomendação prática DNV-RP-F105 – *Free spanning pipelines* (DNV, 2017a), reconhecida como a principal referência sobre o tema.

Dentre as intervenções, destacam-se os equipamentos supressores de VIV, acoplados aos dutos com o objetivo de reduzir o desprendimento dos vórtices (Figura 4), sendo os *strakes* helicoidais os mais comuns. No entanto, de acordo com Bai e Bai (2014), esse método aumenta os custos, torna a instalação do duto mais complexa e eleva o coeficiente de arrasto.

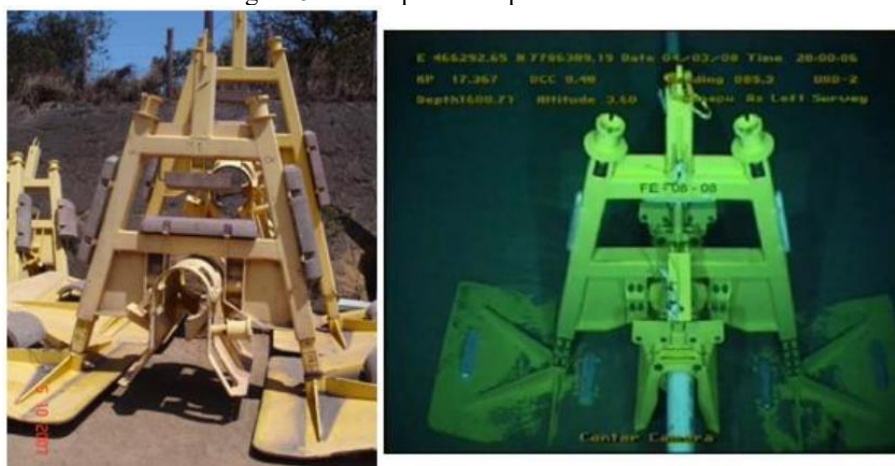
Figura 4 – Equipamentos acoplados aos dutos para a supressão de VIV



Fonte: Blevins (2001)

Outro tipo de intervenção é a retificação dos vãos livres por meio de apoios, que reduzem seus comprimentos. Essa abordagem é realizada com o uso de colchões ou bolsas de areia ou graute (*grout bags*), entrincheiramento, aterro com rochas (*rock dumping*) e suportes mecânicos (Figura 5). A escolha do método depende de diversos fatores, como a lâmina d'água, o tipo de solo, a presença de rochas e a possibilidade de instalação sem mergulhadores (Bai; Bai, 2014).

Figura 5 – Exemplos de suportes mecânicos



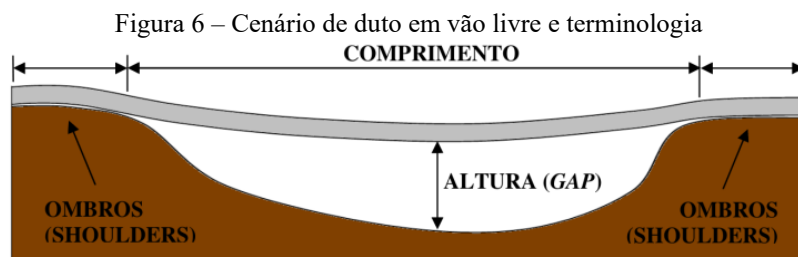
Fonte: Loureiro (2011)

Portanto, a escolha do tipo de mitigação ou retificação deve ser conduzida de maneira eficiente, visando alcançar os resultados desejados com o menor custo possível.

1.2 Justificativa

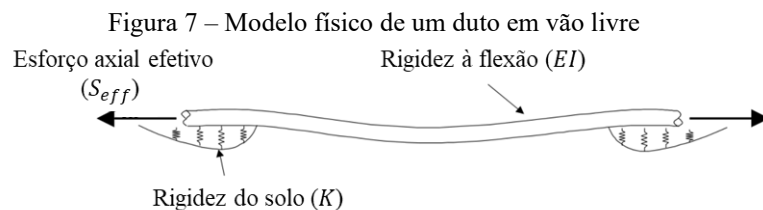
As inspeções são realizadas desde a instalação dos dutos e de forma periódica para avaliação da integridade estrutural do sistema. A recomendação prática DNV-RP-F116 – *Integrity management of submarine pipeline systems* (DNV, 2017c) contém orientações sobre o gerenciamento da integridade com uma abordagem em diferentes níveis, que exigem avaliações qualitativas e quantitativas.

Sob o aspecto dos vãos livres, essas avaliações são realizadas de forma analítica ou numérica, normalmente empregando-se o Método dos Elementos Finitos (MEF). Um cenário de duto em vão livre é caracterizado por uma sequência de trechos apoiados no solo e outros suspensos, que formam os vãos. Os trechos apoiados são denominados ombros (*shoulders*), enquanto a altura do trecho suspenso em relação ao solo marinho é chamada *gap* (Figura 6).



Fonte: Pedrosa Filho (2011)

Fyrileiv e Mørk (2002) e Sollund *et al.* (2014) propuseram métodos analíticos e semianalíticos para resolver o problema a partir da solução de uma viga de Euler-Bernoulli parcialmente apoiada sobre bases deformáveis, obtida por Hetenyi (1946). Esses métodos incorporaram os efeitos do esforço axial efetivo, uma variável discutida por Sparks (1984) e por Fyrileiv e Collberg (2005), que contabiliza o efeito das pressões no esforço normal, além da configuração deformada do duto para vãos isolados e vãos múltiplos. As expressões e considerações apresentadas nos trabalhos mostraram-se válidas para diversos cenários, de modo que foram incluídas na DNV-RP-F105 (DNV, 2017a).



Fonte: Adaptado de Fyrileiv e Mørk (2002)

No entanto, para cenários mais complexos, a DNV-RP-F105 preconiza a realização de simulações numéricas utilizando o MEF, com a possível consideração de não linearidades

(física, geométrica e de contato) do problema e com o devido histórico de carregamento ao qual o duto é submetido.

Bai e Bai (2014) apresentaram uma sequência de carregamentos a ser considerada em uma simulação tridimensional para a análise do duto *in situ*, de modo que são incluídas etapas de análise desde o assentamento do duto no leito marinho para obter uma configuração deformada realista e à análise dinâmica após a aplicação de carregamentos de correntes e ondas.

É notório que o custo computacional para realizar todas as etapas desse tipo de simulação é elevado. Dessa forma, modelos simplificados são comumente empregados para análises preliminares e estudos paramétricos em certos cenários. Uma das simplificações mais comuns é a desconsideração da topografia do leito marinho, adotando-se ombros planos, modelados por molas distribuídas linearmente ao longo dos trechos em que o duto é apoiado sobre o solo. Esse tipo de modelo é encontrado nos trabalhos de Oliveira (2016) e Ribeiro (2017).

Segundo a DNV (2017a), a análise estrutural de um duto em vão livre envolve duas etapas: a análise estática e a análise modal. A análise estática normalmente considera não linearidades, como grandes deslocamentos e a interação não linear entre o solo e o duto. Já análise modal tem como objetivo extrair as frequências e modos naturais de vibração e as respectivas tensões modais das direções *in-line* e *cross-flow*.

Os resultados da análise estrutural servem como dados de entrada para a análise de fadiga, sendo complementados com a seleção de curvas S-N, fatores de segurança e dados ambientais de correntes e ondas. Esses dados alimentam os modelos de resposta e de força descritos na DNV-RP-F105, que estimam o tempo de vida à fadiga do duto. Essa estimativa é então comparada ao tempo de exposição, constituindo o critério de projeto de fadiga da recomendação prática (DNV, 2017a).

No entanto, a ocorrência das vibrações induzidas por vórtices não é esperada para valores de frequências naturais de vibração elevadas. A DNV-RP-F105 contém um critério de projeto, denominado *VIV Avoidance*, no qual são calculados valores de frequência limites para as direções *in-line* e *cross-flow*, de forma que não se espera a ocorrência de VIV para modos de vibração com frequência maiores que eles. Essas frequências limites são dadas por:

$$f_{IL}^{VIV\ Avoidance} = \frac{U_{extreme} \gamma_{f,IL}}{V_{R,onset}^{IL} D} \quad (1)$$

$$f_{CF}^{VIV\ Avoidance} = \frac{U_{extreme} \gamma_{f,CF}}{2D} \quad (2)$$

em que $U_{extreme}$ é a velocidade de escoamento para um evento ambiental característico, $\gamma_{f,IL}$ e $\gamma_{f,CF}$ são, respectivamente, os fatores de segurança das frequências naturais de vibração nas direções *in-line* e *cross-flow*, $V_{R,onset}^{IL}$ é um parâmetro do modelo de resposta da DNV-RP-F105 para a direção *in-line* denominado velocidade reduzida e D é o diâmetro hidrodinâmico do duto (diâmetro externo incluindo qualquer revestimento existente).

Nesse contexto, uma aplicação das simulações numéricas em cenários de dutos em vãos livres é a quantificação do impacto da inclusão de suportes nas frequências e modos naturais de vibração do sistema. Pereira *et al.* (2008) e Silva (2021) propuseram abordagens computacionais para a análise de vãos livres, abrangendo a automatização das análises estrutural e de fadiga, com uso de programas comerciais de elementos finitos e ferramentas de análise de fadiga baseadas na DNV-RP-F105. No entanto, a escolha das posições dos suportes depende fortemente da experiência dos projetistas na análise dos resultados, sendo necessário simular diversos cenários visando reduzir ao máximo a quantidade de equipamentos, minimizando os custos do projeto ou da intervenção sem comprometer os critérios de projeto.

Assim, o estudo de estratégias para otimização do posicionamento de suportes em vãos livres de dutos submarinos mostra-se relevante para auxiliar tanto na fase de projeto quanto nas intervenções destinadas à retificação de vãos livres.

1.3 Objetivos e principais contribuições

O objetivo geral deste trabalho é desenvolver uma estratégia de otimização do posicionamento de suportes em vãos livres de dutos rígidos submarinos baseada em simulações numéricas e com foco na mitigação das vibrações induzidas por vórtices.

Podem ser listados como objetivos específicos:

- Desenvolver um modelo numérico simplificado para cenários com um único ou múltiplos vãos livres;
- Avaliar estratégias de modelagem do solo com molas e condições de contorno das extremidades do modelo;
- Comparar algoritmos de otimização para o posicionamento de suportes.

Este trabalho busca fornecer subsídios para o posicionamento eficiente de suportes em dutos submarinos com vãos livres, contribuindo para a mitigação de vibrações induzidas por vórtices (VIV). Por meio da modelagem numérica e da comparação entre algoritmos de otimização, espera-se ampliar o entendimento sobre o efeito de diferentes condições de

contorno e interações com o solo, promovendo soluções mais seguras e economicamente viáveis.

1.4 Estrutura da dissertação

Nesta seção são apresentados, de forma resumida, os conteúdos dos capítulos deste documento.

O Capítulo 1 é introdutório, no qual são apresentados o contexto e a relevância do trabalho. São definidos alguns conceitos básicos iniciais e discutidos temas de estudos encontrados na literatura que possuem relação com o trabalho.

No Capítulo 2 é apresentada uma fundamentação teórica sobre o fenômeno de VIV, a recomendação prática DNV-RP-F105, a modelagem numérica do problema e aspectos básicos sobre otimização estrutural.

No Capítulo 3 são apresentadas as características do modelo numérico desenvolvido neste trabalho. Detalham-se as formulações dos elementos, o programa computacional implementado, a validação dos resultados e aplicações que exploram as possibilidades oferecidas pelo modelo.

No Capítulo 4 é apresentada a estratégia de otimização de posicionamento de suportes proposta. A formulação do problema de otimização é detalhada e as características dos algoritmos empregados são discutidas, bem como a incorporação ao modelo numérico apresentado no Capítulo 3. Por fim, são apresentadas aplicações da estratégia de otimização proposta, com cenários distintos.

No Capítulo 5 são dispostas as considerações finais do trabalho. São discutidas as principais contribuições e limitações do estudo, finalizando com sugestões para trabalhos futuros.

Na sequência é apresentada a lista das referências consultadas para a construção do trabalho e, em seguida, são listados os apêndices.

O Apêndice A contém o documento do programa Maple® (MAPLE, 2018) em que são deduzidas as expressões pertinentes para as modelagens numéricas abordadas.

No Apêndice B é apresentado um exemplo de arquivo de entrada, com extensão “.json”, do programa desenvolvido para as aplicações realizadas no trabalho.

Por fim, o Apêndice C contém o diagrama de classes do programa computacional desenvolvido, explicitando a integração do módulo de otimização com o modelo numérico desenvolvido.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

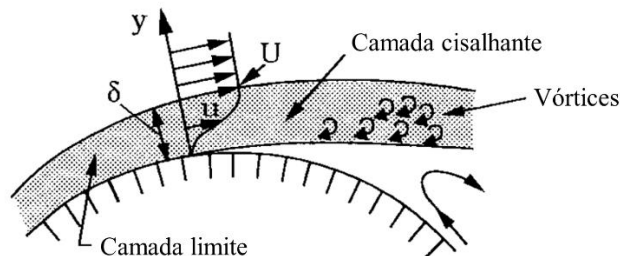
Este capítulo contém a fundamentação teórica necessária para compreender o tema abordado neste trabalho. São apresentados os principais aspectos relacionados ao fenômeno das vibrações induzidas por vórtices, tópicos da recomendação prática DNV-RP-F105, diferentes estratégias de modelagem numérica do problema físico e tópicos sobre otimização estrutural.

2.1 Vibrações Induzidas por Vórtices

Quando um fluxo viscoso contorna um obstáculo, a influência da viscosidade é contida em uma camada fina, denominada camada limite, situada ao longo da sua superfície.

Conforme Santos (2005) e Lopes (2006), observa-se que dentro dessa camada a velocidade do escoamento varia bruscamente de um valor zero, junto à superfície do obstáculo, a um valor característico (U) do escoamento livre no outro extremo da camada. Além disso, para determinadas velocidades, a camada limite pode se desprender do obstáculo e desencadear a formação de uma esteira de vórtices (Figura 8).

Figura 8 – Formação da esteira de vórtices



Fonte: Adaptado de Sumer e Fredsøe (2006)

Quando o obstáculo em questão é um cilindro circular, as classificações e parâmetros adimensionais utilizados para a descrição de um fluxo ao redor dele dependem do número de Reynolds (Re), dado por:

$$Re = \frac{U D}{\nu} \quad (3)$$

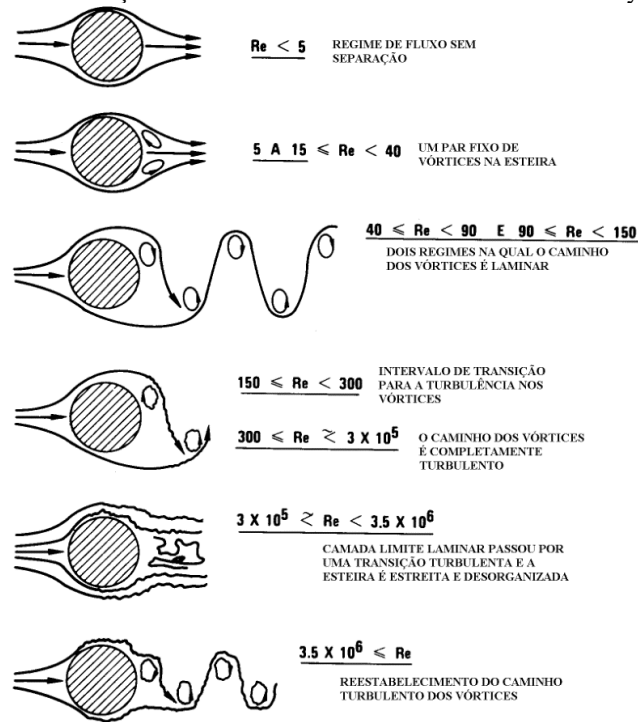
em que U é a velocidade do fluxo, D é o diâmetro do cilindro e ν é a viscosidade cinemática do fluido.

Na Figura 9 observa-se a relação entre a esteira de vórtices e o número de Reynolds. Nota-se que para um número de Reynolds maior que 40 o desprendimento de vórtices ocorre de forma periódica e alternada. A frequência com que os vórtices são desprendidos é denominada frequência de Strouhal ou de *shedding*, dada por:

$$f_s = \frac{St U}{D} \quad (4)$$

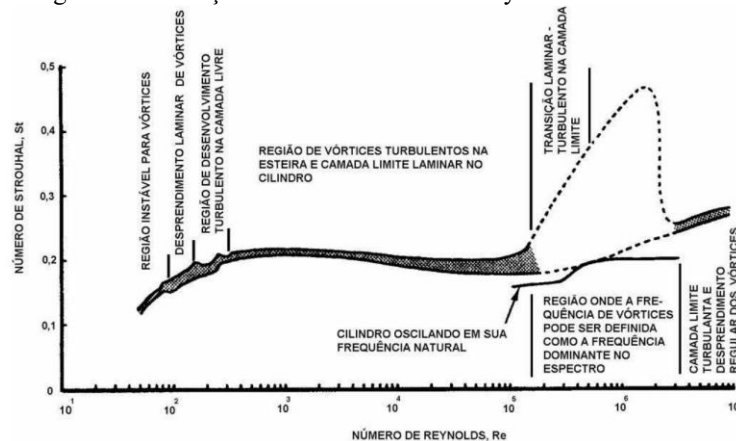
em que St é o número de Strouhal, relacionado com o número de Reynolds por meio da curva experimental apresentada na Figura 10.

Figura 9 – Relação entre a esteira de vórtices e o número de Reynolds



Fonte: Santos (2005)

Figura 10 – Relação entre os números de Reynolds e de Strouhal



Fonte: Lopes (2006)

Quando a frequência de *shedding* se aproxima de uma das frequências naturais de vibração do cilindro, ocorre o fenômeno de ressonância denominado *lock-in*. Nesse caso, de acordo com Lopes (2006), o cilindro passa a controlar a formação dos vórtices e começa a oscilar em uma frequência intermediária entre a frequência natural original e a frequência de

desprendimento de vórtices. Isso ocorre porque a frequência natural original da estrutura é modificada devido à variação de massa adicionada. No entanto, segundo Santos (2005), as vibrações induzidas por vórtices em dutos submarinos costumam apresentar baixas amplitudes, de modo que o principal problema estrutural associado ao fenômeno é predominantemente relacionado à fadiga mecânica.

Dessa forma, percebe-se a importância da consideração do fenômeno de VIV nos projetos e do cálculo robusto das frequências naturais de vibração de dutos rígidos submarinos.

2.2 Recomendação prática DNV-RP-F105

A recomendação prática DNV-RP-F105 – *Free spanning pipelines* trata de dutos em vão livre sujeitos à ação combinada de carregamentos de ondas e correntes, sendo o principal documento sobre o tema. Além das orientações e critérios de projeto, o documento também contém breves introduções sobre os fenômenos hidrodinâmicos, princípios e parâmetros para a avaliação da resposta dinâmica de dutos em vãos livre baseados em diversos projetos de pesquisa e desenvolvimento (DNV, 2017a).

Lima (2007) apresenta um histórico da recomendação prática, com o seu surgimento como DNV Guidelines 14 em 1998 e a evolução para a DNV-RP-F105 em 2002. Em seu trabalho são discutidas as mudanças entre a versão de 2002 e a revisão do documento publicada em 2006.

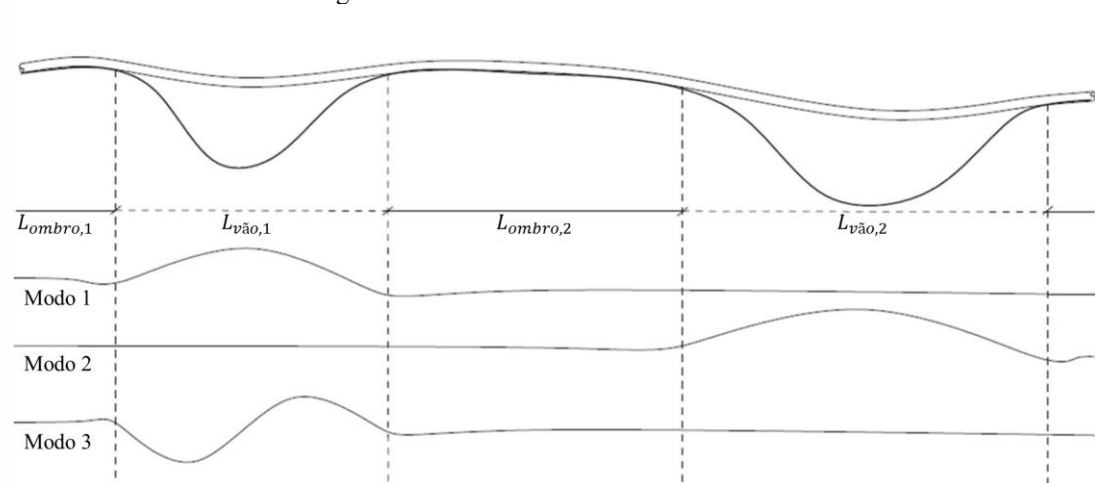
As atualizações da recomendação prática são realizadas periodicamente para mantê-la de acordo com as principais normas reconhecidas e o estado da arte atual da prática industrial e avanços obtidos em pesquisas. A versão mais atual, publicada em 2017, trouxe atualizações significativas, incluindo novas definições e conceitos sobre a classificação de vãos livres e modos de vibração, revisão de critérios de projeto, reformulação dos modelos de cálculo, ajustes nos intervalos de aplicação para respostas aproximadas e diretrizes para aplicação de sensores de monitoramento (DNV, 2017a). Vedeld, Sollund e Fyrileiv (2018) utilizaram a nova revisão em estudos de caso, explicitando os benefícios das atualizações.

2.2.1 Classificação morfológica de vãos livres e modos de vibração

De acordo com a DNV (2017a), um dos principais objetivos de propor uma classificação morfológica é distinguir um vão único isolado de vãos múltiplos que interagem entre si (multivão interativo).

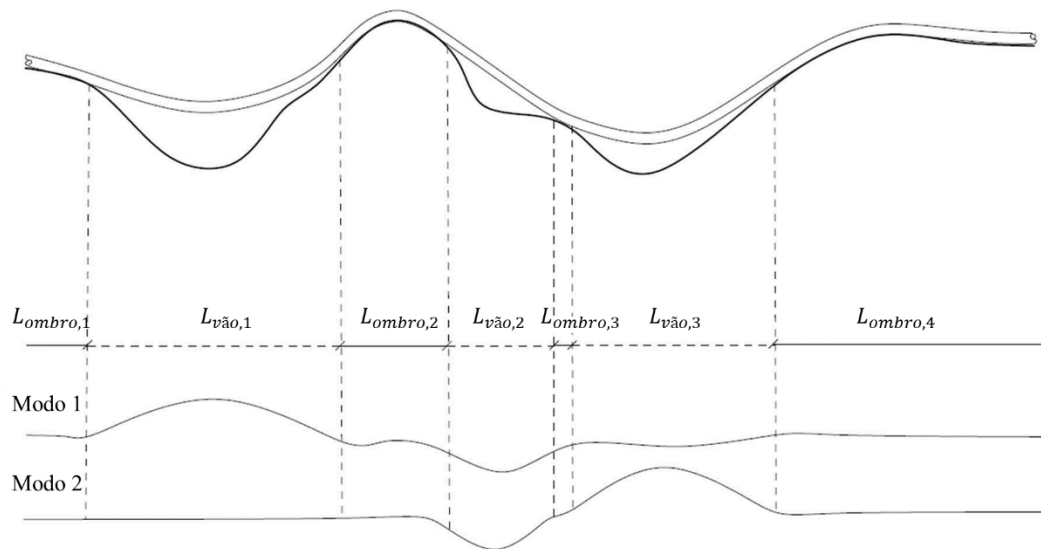
Conforme a DNV-RP-F105, um vão livre é considerado único e isolado se seus comportamentos estático e dinâmico não são significativamente afetados por possíveis vãos vizinhos. Do contrário, considera-se que a sequência de dois ou mais vãos é um multivão interativo. As diferenças entre as duas classificações são evidenciadas pela Figura 11 (vãos isolados) e Figura 12 (multivão).

Figura 11 – Vãos livres únicos e isolados



Fonte: Adaptado de DNV (2017a)

Figura 12 – Multivão interativo



Fonte: Adaptado de DNV (2017a)

Além disso, para cada combinação de estado de mar e velocidade de corrente, mais de um modo de vibração pode ser excitado por VIV, levando a uma resposta multimodal. No entanto, o número de modos excitados e a contribuição de cada modo específico para os danos por fadiga variam de acordo com a velocidade do fluxo, a posição ao longo do eixo longitudinal

e a competição com outros modos que também estão respondendo. Dessa forma, 3 conjuntos de modos de vibração são definidos: ativos, participantes e contribuintes.

Modos ativos são todos aqueles que podem ser excitados por VIV. Para uma definição mais precisa, a DNV (2017a) define as menores frequências naturais de vibração para as quais não são esperadas vibrações induzidas por vórtices durante o período de vida útil do duto. Tais frequências são calculadas para as direções *in-line* e *cross-flow*, por meio das equações (1) e (2), apresentadas no capítulo anterior.

Modos participantes são os modos ativos que possuem uma curvatura modal significativa para uma posição x ou nas vizinhanças desta posição. Em um multivão, alguns modos podem contribuir com o dano em um segmento de toda a seção analisada, podendo ser desconsiderados nos trechos em que não são participantes.

Modos contribuintes são todos os modos participantes que sofrem excitação por VIV em uma determinada localização e para uma velocidade de fluxo específica. Os modos contribuintes competem entre si, de modo de que um dos modos é dominante e contribuirá plenamente para a resposta multimodal, enquanto as contribuições de outros modos, mais fracos, são reduzidas.

Além das definições apresentadas, a nova revisão DNV-RP-F105 contém uma formulação matemática para a classificação de uma sequência de vãos como vãos únicos isolados ou como um multivão iterativo. Também é afirmado que é suficientemente preciso modelar os ombros como planos para a classificação dos vãos por meio do algoritmo proposto, cujas etapas são:

- 1) Cálculo das frequências modais e as curvaturas e tensões associadas para a sequência de vãos analisada. Neste cálculo, a sequência é modelada incluindo todos os vãos;
- 2) Identificação de todos os modos participantes para cada vão, resultando em n_{IL} modos *in-line* e n_{CF} modos *cross-flow*;
- 3) Cálculo das frequências modais e das curvaturas e tensões associadas para cada vão, considerando-os vãos únicos isolados. São obtidas, então, n_{IL}^{SS} modos *in-line* e n_{CF}^{SS} modos *cross-flow*;
- 4) Se $n_{IL} \neq n_{IL}^{SS}$ ou $n_{CF} \neq n_{CF}^{SS}$, o vão analisado é parte de um multivão;
- 5) Se $n_{IL} = n_{IL}^{SS}$ e $n_{CF} = n_{CF}^{SS}$, são comparadas as frequências obtidas considerando os vãos isolados com as correspondentes considerando o multivão.

Um vão compõe um multivão se, para todos os n_{IL} modos *in-line* participantes, a seguinte inequação é satisfeita:

$$f_{IL,j} < 0,95 f_{IL,j}^{SS} \quad (5)$$

em que $j \in \{1, 2, \dots, n_{IL}\}$.

Da mesma forma, um vão faz parte de um multivão se, para todos os n_{CF} modos *cross-flow* participantes, a seguinte inequação é satisfeita:

$$f_{CF,j} < 0,95 f_{CF,j}^{SS} \quad (6)$$

Observa-se que a determinação das primeiras frequências naturais de vibração é de fundamental importância para análise de dutos em vãos livres. Sendo assim, a DNV-RP-F105 contém uma formulação analítica aproximada para o cálculo da primeira frequência, detalhada a seguir, além de outras respostas relacionadas à análise estrutural.

2.2.2 Formulação analítica aproximada para o cálculo da primeira frequência natural de vibração

Fyrileiv e Mørk (2002) propuseram uma formulação analítica aproximada para a primeira frequência natural de vibração para o cenário de um duto em vão livre único e isolado. As expressões resultantes são apresentadas na recomendação prática.

Algumas premissas devem ser atendidas para a aplicabilidade desse equacionamento, como, por exemplo: os vãos devem ser únicos e estarem em um leito marinho relativamente plano; os modos de vibração simétricos devem dominar a resposta dinâmica, o que leva aos limites de $L/D_s < 140$ e $\delta/D < 2,5$, em que L é o comprimento do vão, D_s e D são, respectivamente, os diâmetros de aço e hidrodinâmico do duto e δ é a deflexão estática no trecho central do vão (relevante somente para modos na direção *cross-flow*); a flambagem não deve influenciar na resposta, o que leva ao limite de $S_{eff}/P_{cr} > -0,5$, em que S_{eff} é o esforço axial efetivo (positivo em tração) e P_{cr} é o valor absoluto da carga crítica de flambagem.

Dessa forma, a primeira frequência pode ser aproximada por:

$$f_1 \approx C_1 \sqrt{1 + CSF} \sqrt{\frac{EI}{m_e L_{eff}^4} \left(1 + \frac{S_{eff}}{P_{cr}} + C_3 \left(\frac{\delta}{D} \right)^2 \right)} \quad (7)$$

em que C_1 e C_3 são coeficientes de condição de contorno, EI é a rigidez à flexão considerando somente o diâmetro de aço, CSF é um fator de aumento da rigidez do concreto (zero na ausência de revestimento de concreto), L_{eff} é o comprimento efetivo do vão, m_e é a massa efetiva (que envolve a massa por unidade de comprimento incluindo a massa estrutural, a massa adicionada e a massa do fluido interno) e $P_{cr} = (1 + CSF)C_2\pi^2EI/L_{eff}^2$ é o valor absoluto calculado da carga crítica de flambagem.

As condições de contorno e respectivos coeficientes tratados na recomendação prática são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 – Condições de contorno e coeficientes			
Coeficiente	Pinado-Pinado ²⁾	Engastado-Engastado ³⁾	Vão único apoiado no solo
C_1	1,57	3,56	3,56
C_2	1,0	4,0	4,0
C_3	0,8 ¹⁾	0,2 ¹⁾	0,4 ¹⁾
C_4	4,93	14,1	Ombro: $14,1(L/L_{eff})^2$ Meio do vão: 8,6
C_5	1/8	1/12	Ombro ⁴⁾ : $\frac{1}{18(L_{eff}/L)^2 - 6}$ Meio do vão: 1/24
C_6	5/384	1/384	1/384

1) $C_3 = 0$ é normalmente assumido para a direção *in-line* se a corrente contínua não é considerada.
2) Para a condição de contorno pinado-pinado, L_{eff} deve ser substituído por L em todas as expressões.
3) Para a condição de contorno engastado-engastado, $L_{eff}/L = 1$ por definição.
4) C_5 deve ser calculado utilizando a rigidez estática do solo.

Fonte: Adaptado de DNV (2017a)

Segundo Fyrileiv e Mørk (2002), o conceito de comprimento efetivo (L_{eff}) é utilizado para calcular a resposta estrutural de um duto em vão livre apoiado sobre o solo por meio do cálculo de um duto equivalente de comprimento L_{eff} biengastado. Na DNV-RP-F105, essa grandeza é dada por:

$$\frac{L_{eff}}{L} = \begin{cases} \frac{4,73}{-0,066\beta^2 + 1,02\beta + 0,63} & \text{para } \beta \geq 2,7 \\ \frac{4,73}{0,036\beta^2 + 0,61\beta + 1,0} & \text{para } \beta < 2,7 \end{cases} \quad (8)$$

$$\beta = \log_{10} \left(\frac{KL^4}{(1 + CSF)EI} \right) \quad (9)$$

em que K é a rigidez por metro da direção analisada, estática ou dinâmica.

Fyrileiv e Mørk (2002) obtiveram resultados com boas correspondências com os obtidos por simulações utilizando elementos finitos com não linearidades inclusas dentro do intervalo de aplicabilidade dessa formulação aproximada. Para cenários que não se encaixem dentro desse intervalo, a DNV (2017a) preconiza a utilização de análises por elementos finitos, mas orienta que seja realizada uma verificação em um cenário com esforço axial efetivo zero e $L/D_s = 60$, comparando-se os resultados obtidos com a formulação aproximada, de modo que o desvio do valor da primeira frequência natural de vibração esteja dentro de $\pm 5\%$.

2.3 Modelagem numérica de dutos rígidos submarinos em vãos livres

A modelagem de dutos rígidos submarinos em vãos livres deve considerar as características do vão. A DNV-RP-F105 contém uma classificação resumida das características de resposta de vãos livres de acordo com a razão entre o comprimento do vão e o diâmetro (L/D), disposta na Tabela 2.

Tabela 2 – Característica da resposta de vãos livres de acordo com o comprimento do vão normalizado

L/D	Descrição da resposta
$L/D < 30$	Amplificação dinâmica muito pequena
$30 < L/D < 100$	Resposta dominada pelo comportamento de viga
$100 < L/D < 200$	Resposta dominada pelo comportamento combinado de viga e cabo
$L/D > 200$	Resposta dominada pelo comportamento de cabo

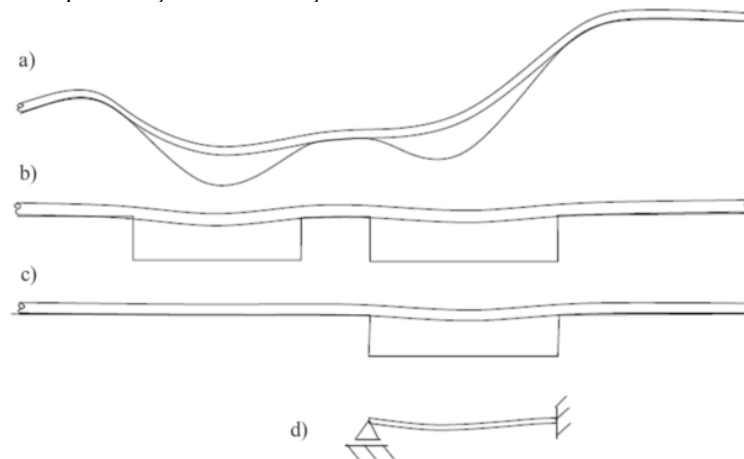
Fonte: Adaptado de DNV (2017a)

De acordo com a DNV (2017a), vãos com $L/D < 30$ normalmente não necessitam de uma checagem abrangente do critério de projeto de fadiga, pois se espera uma resposta dinâmica insignificante devido às ações ambientais e é improvável a ocorrência de VIV. Adicionalmente, as frequências naturais de vibração são sensíveis à rigidez do solo. No caso de vãos que se enquadram nas segunda e terceira faixas da Tabela 2, as frequências naturais de vibração são sensíveis às condições de contorno, ao esforço axial efetivo e às variações de comprimento do duto. A resposta dinâmica para vãos com $L/D > 200$ é relevante para dutos com diâmetros pequenos ou expostos a condições ambientais moderadas e as frequências naturais de vibração são governadas pela configuração deformada, interação entre vãos e esforço axial efetivo.

Na DNV-RP-F105 também são listadas 4 representações comuns para a consideração das condições de contorno de modelos de dutos em vãos livres, conforme ilustrado na Figura 13 e descritas a seguir:

- Modelo realista do leito marinho, com a topografia real e todos os vãos relevantes inclusos no modelo;
- Modelo do leito marinho desconsiderando a topografia (adotando-se uma topografia plana), mas com a inclusão de todos os vãos relevantes;
- Modelo com a inclusão de somente um vão isolado e ombros planos.
- Modelo com condições de contorno de corpo rígido idealizadas, excluindo-se os ombros.

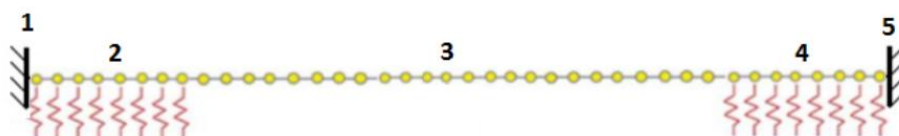
Figura 13 – Representações das condições de contorno em modelos de dutos em vão livre



Fonte: DNV (2017a)

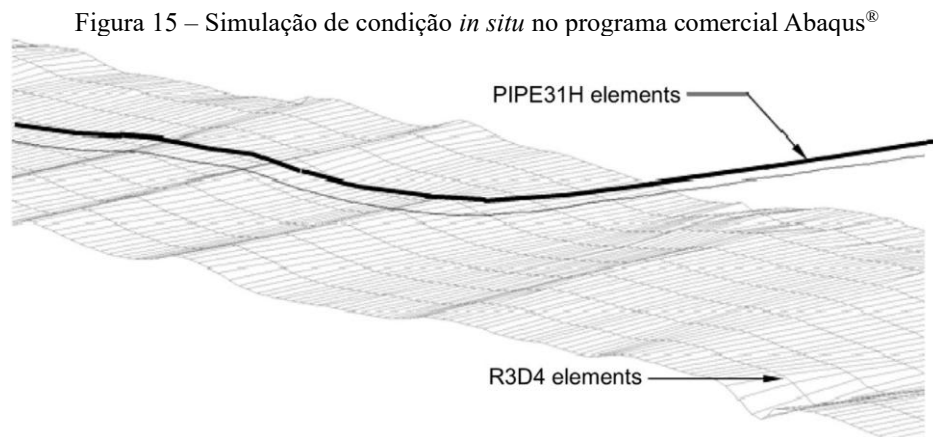
Oliveira (2016) e Ribeiro (2017) conceberam modelos numéricos por meio do programa comercial Ansys® (ANSYS, 2024) utilizando elementos de duto tridimensionais com 6 graus de liberdade por nó (3 translacionais e 3 rotacionais) e com ombros planos representados por molas elásticas lineares, constituindo uma base discreta, conforme é representado na Figura 14. Nesta figura, os pontos associados aos números 1 e 5 correspondem às condições de contorno das extremidades do modelo, que representam o truncamento do trecho de análise. Os trechos indicados pelos números 2 e 4 correspondem aos ombros, nos quais estão presentes as molas. Por fim, o trecho 3 representa o vão livre do duto.

Figura 14 – Exemplo de modelo de duto em vão livre com base elástica linear discreta



Fonte: Ribeiro (2017)

Um modelo mais complexo, destinado a análises do comportamento *in situ* do duto é descrito por Bai e Bai (2014). Nesse modelo, utiliza-se o programa comercial Abaqus® (Smith, 2009), no qual o duto é modelado por meio de elementos PIPE31H, um elemento linear tridimensional com 2 nós, e o solo marinho é modelado a partir de elementos rígidos do tipo R3D4, conforme apresentado na Figura 15.



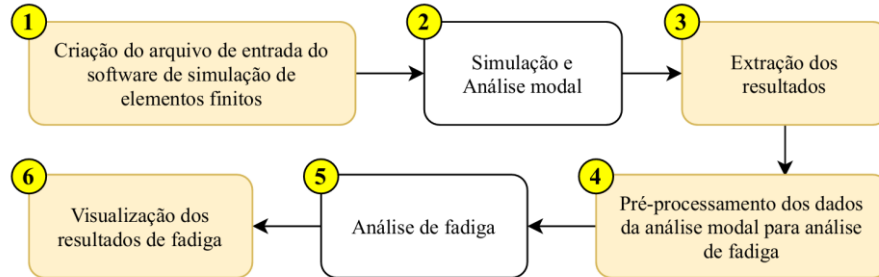
Fonte: Bai e Bai (2014)

Nessas análises, o processo de instalação do duto é realizado de modo a obter informações sobre o enterramento do duto, tração residual de lançamento e vãos livres formados durante o assentamento. Para a análise ser representativa da situação real, deve-se considerar no modelo as não linearidades física, geométrica e de contato (atrito, deslizamento, descolamento, etc.). Ademais, são executadas etapas considerando os cenários de teste hidrostático e carregamentos operacionais para obtenção do histórico de carregamento a partir da instalação de um duto. No teste hidrostático, o duto é preenchido com água do mar e uma alta pressão interna é imposta para avaliar a integridade estrutural e a estanqueidade do duto. Após esse teste, a pressão é removida e executa-se o processo de desalagamento do duto. Dessa forma, após a realização das etapas anteriores por meio de procedimentos estáticos, pode ser realizada também uma análise com uso de um procedimento dinâmico no Abaqus®, em que são aplicados carregamentos de corrente e onda (BAI; BAI, 2014).

Diante da complexidade para a realização de análises detalhadas, Silva (2021) propôs uma modelagem e implementação de uma ferramenta computacional para automatização dos processos de análise estrutural e de fadiga de dutos em vão livre. A simulação numérica para a análise estrutural é feita no Abaqus®, em que são realizados os procedimentos estáticos similares aos descritos em Bai e Bai (2014) e, por fim, é feita a extração e seleção das frequências e modos naturais de vibração a serem considerados na análise de fadiga. Esta, por

sua vez, é feita no programa comercial FatFree[®], da DNV e baseado na DNV-RP-F105. Na Figura 16, observa-se o fluxo de operação da ferramenta desenvolvida.

Figura 16 – Fluxo de operação de uma ferramenta computacional para análise de dutos em vão livre



Fonte: Silva (2021)

Esse tipo de automatização é útil não somente para agilizar e reduzir erros humanos dos procedimentos de análise, mas também para viabilizar estudos paramétricos, como o realizado por Valença (2020), no qual são avaliadas as influências da espessura de parede e do comprimento do vão na vida útil à fadiga de dutos em vãos livres.

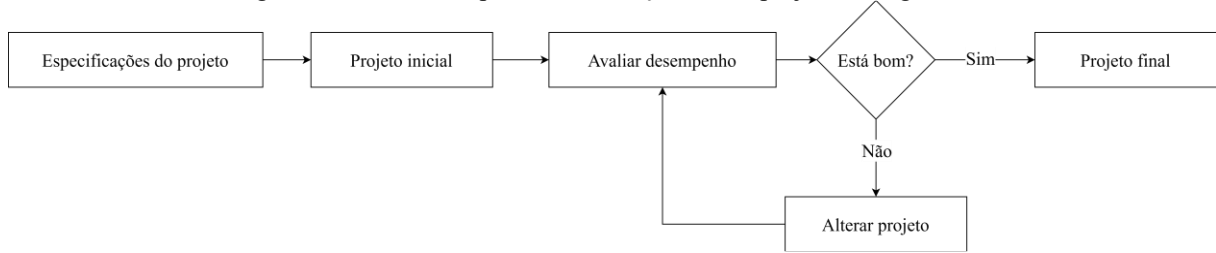
Sendo assim, percebe-se a diversidade de modelos numéricos para representar o problema de dutos em vãos livres, de modo que existem modelos mais complexos e com muitas não linearidades incorporadas para representação da condição *in situ* e modelos mais simples, que se mostraram úteis para condições em que se possui estimativas precisas dos vãos livres e o leito marinho é relativamente plano, bem como para análises de triagem, de sensibilidade e fins de verificação.

No presente trabalho, utilizam-se modelos do segundo tipo, considerando ombros planos que são modelados por bases deformáveis.

2.4 Otimização estrutural

Segundo Kochenderfer e Wheeler (2019), algoritmos de otimização podem ser utilizados para melhorar um projeto até não ser mais possível ou até uma restrição, muitas vezes de orçamento, ser atingida. Os maiores desafios relacionados à otimização são as limitações de recursos computacionais e de tempo, de modo que os projetistas devem ser seletivos na escolha dos algoritmos utilizados e habilidosos na formulação do problema. Um processo de otimização de um projeto de engenharia segue o fluxo apresentado na Figura 17.

Figura 17 – Processo típico de otimização de um projeto de engenharia



Fonte: Adaptado de Kochenderfer e Wheeler (2019)

De acordo com Arora (2017), um problema de otimização pode ser formulado matematicamente de uma forma padronizada. Considerando o vetor de variáveis de projeto $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, busca-se:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar } f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
 &\text{sujeito a } h_j(\mathbf{x}) = h_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; j = 1 \text{ até } p \\
 &\quad g_i(\mathbf{x}) = g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0; i = 1 \text{ até } m
 \end{aligned} \tag{10}$$

Os domínios das variáveis de projeto podem ser contínuos ou discretos. No caso de domínios contínuos, há restrições como $x_i \geq 0$ ou $x_{iL} \leq x_i \leq x_{iU}$, em que x_{iL} e x_{iU} são o menor e maior valores permitidos para a variável de projeto x_i . Já no caso de domínios discretos, as restrições dos valores das variáveis de projeto são do tipo $x_i \in D_i$, em que $D_i = \{d_{i1}, d_{i2}, \dots, d_{iq}\}$, sendo d_{ik} o k -ésimo valor discreto possível, dentre os q valores, para a i -ésima variável de projeto discreta. Além das otimizações contínua e discreta, há problemas em que são utilizados os dois tipos de variáveis, chamados Problemas de Otimização com Variáveis Mistas.

No contexto da otimização estrutural, Park (2007) afirma que uma otimização pode ser classificada como:

- Otimização de dimensões ou parâmetros: visa otimizar parâmetros das seções transversais;
- Otimização de forma ou configuração: visa determinar a melhor forma ou geometria para uma estrutura;
- Otimização topológica: visa determinar a melhor distribuição de material dentro de um domínio.

Além disso, de acordo com Park (2007), o método dos elementos finitos é comumente acoplado aos processos de otimização estrutural, de modo que os desenvolvimentos nas duas áreas evoluíram paralelamente.

Esses processos geralmente envolvem variáveis de projeto contínuas. No entanto, alguns problemas de projetos de engenharia envolvem variáveis discretas. Stolpe (2016) desenvolveu um estudo de revisão sobre otimização de treliças utilizando variáveis discretas. Nesse estudo são comparados classes de algoritmos utilizados para problemas de otimização discreta:

- Métodos metaheurísticos: podem fornecer soluções suficientemente boas por meio de busca parcial e comumente utilizam aleatoriedade no processo de busca. O algoritmo genético, desenvolvido por Holland (1975) e baseado na teoria evolucionária de Charles Darwin, é um dos algoritmos dessa classe;
- Métodos determinísticos: fornecem sempre a mesma solução a partir da mesma entrada de dados. Geralmente são baseados no método de ramificar e limitar (*branch-and-bound*), desenvolvido por Land e Doig (1960) e explorado por Huang e Arora (1997) na área de otimização estrutural considerando a monotonicidade da função objetivo.

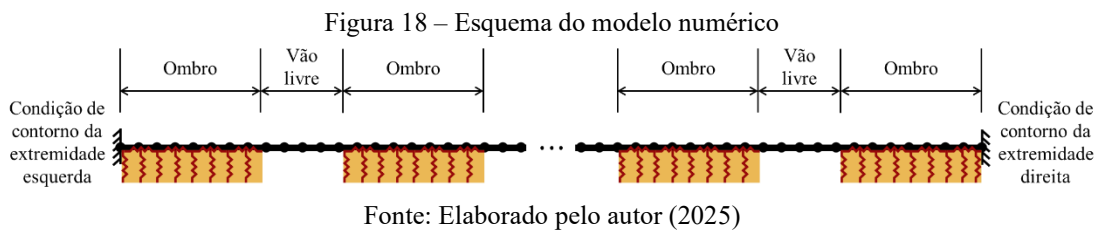
A estratégia de otimização do posicionamento de suportes implementada neste trabalho encaixa-se na categoria de otimização discreta. Dessa forma, é dado destaque ao algoritmo genético e ao método de ramificar e limitar no Capítulo 4.

3 MODELO NUMÉRICO

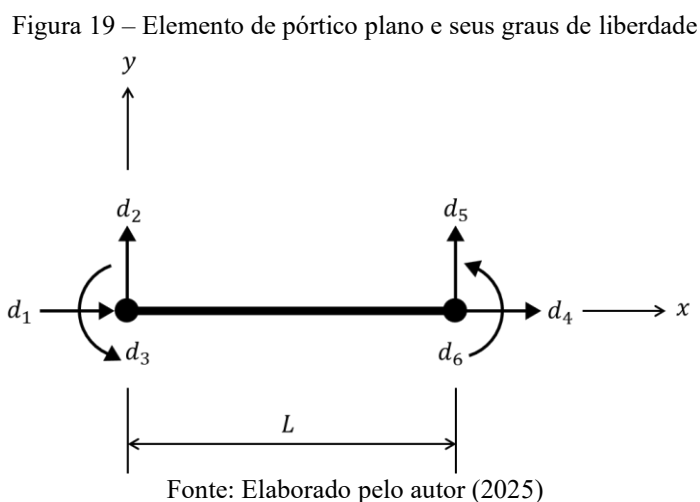
Neste capítulo são apresentadas as características do modelo numérico implementado no presente trabalho. São discutidas as etapas para o cálculo das matrizes de rigidez e de massa dos elementos utilizados para a modelagem do duto e do solo, bem como o detalhamento do programa computacional elaborado para realizar as análises. Por fim, são apresentadas aplicações do modelo numérico desenvolvido, nas quais as possibilidades oferecidas são exploradas.

3.1 Duto submarino

Uma das simplificações adotadas neste trabalho é a modelagem unidimensional em um plano, adotando-se elementos de pórtico plano para representar o duto submarino e a direção *cross-flow*. Observa-se um esquema do modelo numérico na Figura 18.



A representação de um elemento de pórtico plano com seus respectivos graus de liberdade translacionais (longitudinais e transversais) e rotacionais é ilustrada na Figura 19.



A maneira demonstrada para a obtenção das matrizes de rigidez e de massa desse elemento é realizada a partir das energias de deformação e cinética. Utilizando a formulação cartesiana de viga de Euler-Bernoulli, tema amplamente discutido na literatura de MEF, como,

por exemplo, em Cook *et al.* (2001) e Fish e Belytschko (2007), obtêm-se as funções de interpolação polinomial linear para o deslocamento longitudinal em um ponto do eixo da barra:

$$N_1(x) = 1 - \frac{x}{L} \quad (11)$$

$$N_4(x) = \frac{x}{L} \quad (12)$$

em que x é a coordenada longitudinal e L é o comprimento indeformado do elemento, e para o deslocamento transversal, a partir da interpolação cúbica hermitiana, obtêm-se:

$$N_2(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (13)$$

$$N_3(x) = L \left[\frac{x}{L} - 2\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right)^3 \right] \quad (14)$$

$$N_5(x) = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (15)$$

$$N_6(x) = L \left[-\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right)^3 \right] \quad (16)$$

de tal forma que se pode escrever os deslocamentos longitudinal (u) e transversal (v) de um ponto do eixo da barra como:

$$u(x) = N_1(x)d_1 + N_4(x)d_4 \quad (17)$$

$$v(x) = N_2(x)d_2 + N_3(x)d_3 + N_5(x)d_5 + N_6(x)d_6 \quad (18)$$

Considerando-se o regime geometricamente linear e a hipótese de que as seções transversais planas permanecem planas e ortogonais ao eixo deformado da barra, pode-se escrever as expressões para os deslocamentos longitudinal e transversal de um ponto qualquer da seção transversal da barra:

$$u^P(x, y, z) = u(x) - y \cdot \frac{dv(x)}{dx} \quad (19)$$

$$v^P(x, y, z) = v(x) \quad (20)$$

Dessa forma, a deformação específica longitudinal de um ponto qualquer da seção transversal da barra é dada por:

$$\varepsilon_{xx}^P(x, y, z) = \frac{\partial u^P(x, y, z)}{\partial x} \quad (21)$$

e a respectiva energia específica de deformação, considerando um material isotrópico, elástico e linear, em que E é seu módulo de Young, é dada por:

$$U_e^P(x, y, z) = \frac{1}{2} E [\varepsilon_{xx}^P(x, y, z)]^2 \quad (22)$$

de modo que, ao efetuar a integração da energia específica de deformação no volume da barra, obtém-se a energia de deformação da barra:

$$U = \int_V U_e^P(x, y, z) dV \quad (23)$$

No Apêndice A, as expressões são desenvolvidas por meio do programa Maple[®], em que ainda é considerado que a área da seção transversal (A) do elemento é constante e que o eixo x de referência é centroidal, de modo que a parcela da expressão resultante da energia específica de deformação associadas ao termo y deve ser desprezada para o cálculo da energia de deformação. Além disso, a parcela associada ao termo y^2 , ao ser integrada na seção transversal, pode ser escrita em função do momento de inércia da seção (I). Sendo assim, a expressão da energia de deformação é escrita em função dos graus de liberdade, do módulo de Young e dos parâmetros geométricos do elemento.

A expressão resultante da energia de deformação do elemento é uma forma quadrática com relação aos graus de liberdade e pode ser escrita como:

$$U(\mathbf{d}) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} \quad (24)$$

em que $\mathbf{d} = [d_1 \ d_2 \ d_3 \ d_4 \ d_5 \ d_6]^T$ e $\mathbf{K}$ é a matriz de rigidez elástica do elemento, que pode ser obtida pela matriz Hessiana da expressão da energia de deformação, resultando na clássica matriz de rigidez de um elemento de pórtico plano:

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}[U(\mathbf{d})] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (25)$$

Analogamente, pode-se obter a matriz de massa do elemento a partir da expressão da energia cinética, em que é considerada a densidade de massa volumétrica (ρ) na expressão:

$$T = \int_V \frac{1}{2} \rho \{ [\dot{u}^P(x, y, z)]^2 + [\dot{v}^P(x, y, z)]^2 \} dV \quad (26)$$

No Apêndice A também são feitas considerações para expressar a energia cinética em termos da área e do momento de inércia da seção transversal. A expressão resultante da energia cinética é uma forma quadrática que pode ser escrita como:

$$T(\dot{\mathbf{d}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{d}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{d}} \quad (27)$$

em que $\dot{\mathbf{d}} = [\dot{d}_1 \quad \dot{d}_2 \quad \dot{d}_3 \quad \dot{d}_4 \quad \dot{d}_5 \quad \dot{d}_6]^T$ é o vetor de velocidades dos graus de liberdade e $\mathbf{M}$ é a matriz de massa. Da mesma forma, a matriz $\mathbf{M}$ corresponde à matriz Hessiana da expressão da energia cinética com relação às variáveis do vetor de velocidades, definida por:

$$\mathbf{M} = \mathbf{H}[T(\dot{\mathbf{d}})] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\rho LA & 0 & 0 & \frac{1}{6}\rho LA & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho(13L^2A + 42I)}{35L} & \frac{\rho(11L^2A + 21I)}{210} & 0 & \frac{3\rho(3L^2A - 28I)}{70L} & -\frac{\rho(13L^2A - 42I)}{420} \\ 0 & \frac{\rho(11L^2A + 21I)}{210} & \frac{\rho L(L^2A + 14I)}{105} & 0 & \frac{\rho(13L^2A - 42I)}{420} & -\frac{\rho L(3L^2A + 14I)}{420} \\ \frac{1}{6}\rho LA & 0 & 0 & \frac{1}{3}\rho LA & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3\rho(3L^2A - 28I)}{70L} & \frac{\rho(13L^2A - 42I)}{420} & 0 & \frac{\rho(13L^2A + 42I)}{35L} & -\frac{\rho(11L^2A + 21I)}{210} \\ 0 & -\frac{\rho(13L^2A - 42I)}{420} & -\frac{\rho L(3L^2A + 14I)}{420} & 0 & -\frac{\rho(11L^2A + 21I)}{210} & \frac{\rho L(L^2A + 14I)}{105} \end{bmatrix} \quad (28)$$

Em alguns modelos numéricos, a inércia rotatória é desprezada, de modo que a matriz $\mathbf{M}$ resulta em:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\rho LA & 0 & 0 & \frac{1}{6}\rho LA & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13}{35}\rho LA & \frac{11}{210}\rho L^2 A & 0 & \frac{9}{70}\rho LA & -\frac{13}{420}\rho L^2 A \\ 0 & \frac{11}{210}\rho L^2 A & \frac{1}{105}\rho L^3 A & 0 & \frac{13}{420}\rho L^2 A & -\frac{1}{140}\rho L^3 A \\ \frac{1}{6}\rho LA & 0 & 0 & \frac{1}{3}\rho LA & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{70}\rho LA & \frac{13}{420}\rho L^2 A & 0 & \frac{13}{35}\rho LA & -\frac{11}{210}\rho L^2 A \\ 0 & -\frac{13}{420}\rho L^2 A & -\frac{1}{140}\rho L^3 A & 0 & -\frac{11}{210}\rho L^2 A & \frac{1}{105}\rho L^3 A \end{bmatrix} \quad (29)$$

Neste trabalho, as duas matrizes de massa apresentadas nas Equações (28) e (29) são consideradas. No entanto, é feita uma adaptação no cálculo, de modo a considerar a massa adicionada ao duto, que é relacionada com a equação de Morison *et al.* (1950), dada por:

$$\mathbf{f} = C_M \Delta \mathbf{a}_f + \frac{1}{2} \rho C_d A \|\mathbf{v}_f\| \mathbf{v}_f \quad (30)$$

em que $\mathbf{f}$ é a força do fluido envolvente por unidade de comprimento que age no corpo, C_M é o coeficiente de inércia do corpo, Δ é a massa de fluido deslocada pelo corpo por unidade de comprimento, $\mathbf{a}_f$ é a aceleração do fluido, ρ é a densidade do fluido, C_d é o coeficiente de arrasto do corpo, A é a área de arrasto e $\mathbf{v}_f$ é a velocidade do fluido. Essa equação é utilizada para calcular as forças hidrodinâmicas atuando em estruturas submersas ou parcialmente submersas devido à interação com ondas e correntes no meio ambiente marinho.

Na adaptação citada, o cálculo da matriz de massa é realizado a partir das densidades de massa lineares do duto, considerando o material aço, nas direções axial (ρ_a) e transversal (ρ_t), de modo que as parcelas da matriz de massa não relacionados com a inércia rotatória são efetuadas com a composição da massa por unidade de comprimento do duto, conteúdo interno e da massa adicionada, sendo a última calculada a partir da densidade do fluido envolvente, e dos coeficientes de inércia do problema. As expressões para as densidades lineares são dadas por:

$$\rho_a = \rho_{aço} A_{aço} + \rho_{cont} A_{cont} + C_{M,a} (\rho_{fluido} A_{exposta} + \rho_{solo} A_{enterrada}) \quad (31)$$

$$\rho_t = \rho_{aço} A_{aço} + \rho_{cont} A_{cont} + C_{M,t} (\rho_{fluido} A_{exposta} + \rho_{solo} A_{enterrada}) \quad (32)$$

em que $\rho_{aço}$, ρ_{cont} , ρ_{fluido} e ρ_{solo} são, respectivamente, as densidades volumétricas do aço, do conteúdo interno, do fluido no qual a estrutura está exposta e do solo no qual a estrutura pode

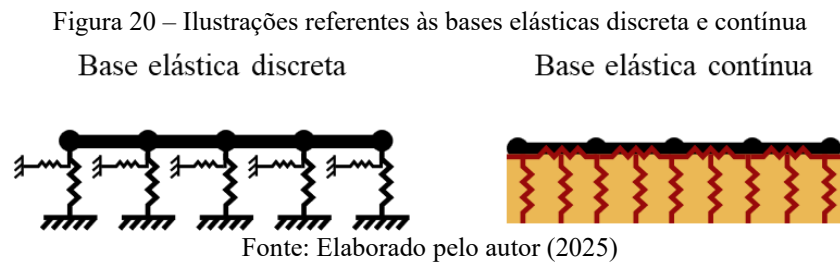
estar parcialmente ou totalmente enterrada; $A_{aço}$ e A_{cont} são, respectivamente, as áreas de aço e de conteúdo interno (área interna); $A_{exposta}$ e $A_{enterrada}$ são as parcelas da área externa da seção transversal utilizadas nos cálculos das massas adicionadas para as direções axial e transversal, que, por sua vez, utilizam os coeficientes de inércia $C_{M,a}$ e $C_{M,t}$ para as respectivas direções (normalmente obtidos por meio de experimentos ou técnicas de Fluidodinâmica Computacional). Logo, a matriz de massa desconsiderando as parcelas que envolvem a inércia rotatória é definida por:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\rho_a L & 0 & 0 & \frac{1}{6}\rho_a L & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13}{35}\rho_t L & \frac{11}{210}\rho_t L^2 & 0 & \frac{9}{70}\rho_t L & -\frac{13}{420}\rho_t L^2 \\ 0 & \frac{11}{210}\rho_t L^2 & \frac{1}{105}\rho_t L^3 & 0 & \frac{13}{420}\rho_t L^2 & -\frac{1}{140}\rho_t L^3 \\ \frac{1}{6}\rho_a L & 0 & 0 & \frac{1}{3}\rho_a L & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{70}\rho_t L & \frac{13}{420}\rho_t L^2 & 0 & \frac{13}{35}\rho_t L & -\frac{11}{210}\rho_t L^2 \\ 0 & -\frac{13}{420}\rho_t L^2 & -\frac{1}{140}\rho_t L^3 & 0 & -\frac{11}{210}\rho_t L^2 & \frac{1}{105}\rho_t L^3 \end{bmatrix} \quad (33)$$

3.2 Base deformável

As bases deformáveis implementadas no presente trabalho consistem em molas translacionais, elásticas lineares, nas direções axial e transversal do elemento de pórtico plano representado na Figura 19.

Dois tipos de base elástica são avaliados, sendo o primeiro em que não há o acoplamento com os graus de liberdade rotacionais, ao qual se chama a base elástica de discreta, e o segundo, em que há o acoplamento e a base elástica é dita contínua. Ilustrações referentes aos dois tipos são dispostas na Figura 20.



A estratégia para a obtenção da matriz de rigidez das bases elásticas é a mesma utilizada na obtenção da matriz de rigidez do elemento de pórtico plano e será discutido nas seções seguintes e detalhadas no Apêndice A.

3.2.1 Base elástica discreta

Assumindo-se o comportamento fisicamente elástico linear, como é adotado por Oliveira (2016) e Ribeiro (2017), a expressão da energia de deformação da base elástica discreta (U_{BED}) é obtida algebricamente considerando-se molas resultantes por nó a partir das rigidezes por unidade de comprimento para as direções axial (k_a) e transversal (k_t), tendo como zona de influência a metade do comprimento do elemento, resultando em:

$$U_{BED} = \frac{k_a \frac{L}{2} (d_1^2 + d_4^2)}{2} + \frac{k_t \frac{L}{2} (d_2^2 + d_5^2)}{2} \quad (34)$$

A matriz de rigidez da base elástica discreta (K_{BED}) é obtida a partir da matriz Hessiana de U_{BED} :

$$K_{BED} = \begin{bmatrix} \frac{k_a L}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_t L}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k_a L}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k_t L}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

3.2.2 Base elástica contínua

Novamente, assumindo-se o comportamento fisicamente elástico linear, a energia de deformação da base elástica contínua (U_{BEC}) é obtida por meio da integração envolvendo os deslocamentos longitudinal (u) e transversal (v) do elemento de pórtico, além das rigidezes por unidade de comprimento da base elástica nas direções axial e transversal, e é dada por:

$$U_{BEC} = \int_0^L \frac{1}{2} \{k_a [u(x)]^2 + k_t [v(x)]^2\} dx \quad (36)$$

de modo que a matriz de rigidez (K_{BEC}) é:

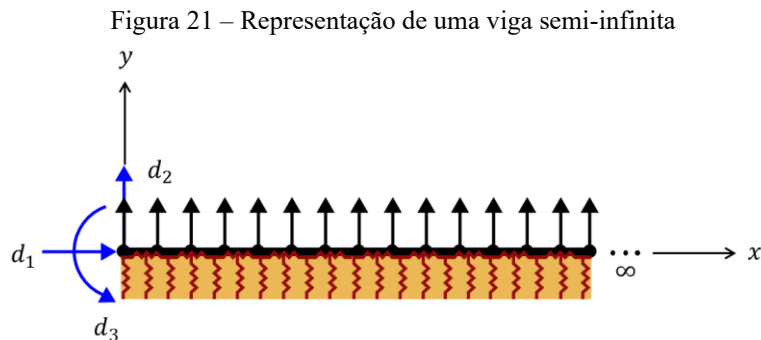
$$\mathbf{K}_{BEC} = \begin{bmatrix} \frac{k_a L}{3} & 0 & 0 & \frac{k_a L}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13k_t L}{35} & \frac{11k_t L^2}{210} & 0 & \frac{9k_t L}{70} & -\frac{13k_t L^2}{420} \\ 0 & \frac{11k_t L^2}{210} & \frac{k_t L^3}{105} & 0 & \frac{13k_t L^2}{420} & -\frac{k_t L^3}{140} \\ \frac{k_a L}{6} & 0 & 0 & \frac{k_a L}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9k_t L}{70} & \frac{13k_t L^2}{420} & 0 & \frac{13k_t L}{35} & -\frac{11k_t L^2}{210} \\ 0 & -\frac{13k_t L^2}{420} & -\frac{k_t L^3}{140} & 0 & -\frac{11k_t L^2}{210} & \frac{k_t L^3}{105} \end{bmatrix} \quad (37)$$

3.2.3 Condição de contorno associada à solução de uma viga semi-infinita apoiada sobre uma base elástica

Devido aos grandes comprimentos de dutos, a simulação completa em um único modelo é muitas vezes custosa ou até mesmo inviável, sendo necessário realizar simulações por trechos de interesse.

Nesse sentido, ao selecionar um trecho para análise, geralmente são impostas condições de contorno que podem restringir deslocamentos e rotações nas extremidades do modelo. Para evitar a influência dessas restrições na área de análise, geralmente aumentam-se os comprimentos dos ombros das extremidades do modelo, o que, consequentemente, aumenta o número de elementos da malha e o custo computacional necessário.

Este trabalho traz como alternativa a essa abordagem substituir as condições de contorno convencionais por um elemento nodal de truncamento baseado na solução de uma viga semi-infinita apoiada sobre uma base elástica. O tema de vigas infinitas é bastante explorado no trabalho de Hetenyi (1946). Uma representação de uma viga semi-infinita é apresentada na Figura 21.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Para obter as matrizes de rigidez e de massa associadas ao elemento que substitui a condição de contorno do nó da extremidade direita do modelo, calculam-se as funções que representam os deslocamentos longitudinal e transversal. Essas funções são obtidas ao se resolver as equações diferenciais de equilíbrio, escritas em função dos deslocamentos associados, etapa realizada utilizando o programa Maple® e apresentada no Apêndice A.

A equação diferencial de equilíbrio e as condições de contorno para a obtenção do deslocamento longitudinal em um ponto do eixo da barra são dadas por:

$$EA \frac{d^2 u(x)}{dx^2} = k_a u(x) \quad (38)$$

$$u(0) = d_1 \text{ e } u(\infty) = 0 \quad (39)$$

Para o deslocamento transversal, a equação diferencial de equilíbrio e as condições de contorno são:

$$EI \frac{d^4 v(x)}{dx^4} = -k_t v(x) \quad (40)$$

$$v(0) = d_2; \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=0} = d_3; v(\infty) = 0 \text{ e } \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=\infty} = 0 \quad (41)$$

A energia de deformação para esse problema é dada pela soma das energias de deformação axial e de flexão, na forma:

$$U_{TRU} = \int_0^\infty \frac{1}{2} \left\{ EA \left[\frac{du(x)}{dx} \right]^2 + EI \left[\frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right]^2 + k_a u(x)^2 + k_t v(x)^2 \right\} dx \quad (42)$$

e a matriz de rigidez do elemento é:

$$\mathbf{K}_{TRU} = \begin{bmatrix} \sqrt{k_a EA} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \sqrt[4]{k_t^3 EI} & \sqrt{k_t EI} \\ 0 & \sqrt{k_t EI} & \sqrt{2} \sqrt[4]{k_t (EI)^3} \end{bmatrix} \quad (43)$$

De forma análoga, a energia cinética, considerando as densidades de massa lineares nas direções axial (ρ_a) e transversal (ρ_t), é dada por:

$$T_{TRU} = \int_0^\infty \frac{1}{2} \{ \rho_a [\dot{u}(x)]^2 + \rho_t [\dot{v}(x)]^2 \} dx \quad (44)$$

e a matriz de massa ($\mathbf{M}_{TRU}$) obtida é:

$$\mathbf{M}_{TRU} = \begin{bmatrix} \frac{\rho_a}{2} \sqrt{\frac{EA}{k_a}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3\sqrt{2}\rho_t}{4} \sqrt{\frac{EI}{k_t}} & \frac{\rho_t}{2} \sqrt{\frac{EI}{k_t}} \\ 0 & \frac{\rho_t}{2} \sqrt{\frac{EI}{k_t}} & \frac{\sqrt{2}\rho_t}{4} \sqrt{\left(\frac{EI}{k_t}\right)^3} \end{bmatrix} \quad (45)$$

Com o mesmo procedimento, obtêm-se as matrizes para o truncamento da extremidade esquerda do modelo.

3.3 Esforço axial

Os efeitos de esforços axiais de tração e compressão são considerados no modelo numérico por meio da contabilização da matriz de rigidez geométrica, encontrada em livros de elementos finitos, como o de Cook *et al.* (2001), e definida por:

$$\mathbf{K}_g = \frac{P}{30L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & -36 & 3L \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & -3L & -L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 36 & -3L \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (46)$$

em que P é o esforço axial (positivo em tração) e L é o comprimento do elemento.

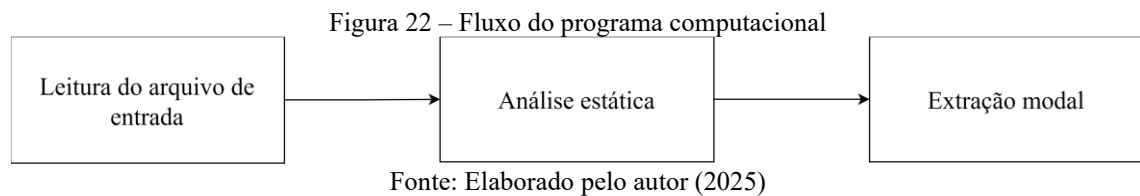
3.4 Suportes

Os suportes são modelados como condições de contorno de deslocamento na direção vertical nos nós da discretização que não estão apoiados no solo. Essa estratégia pode corresponder tanto aos suportes mecânicos, com posições pontuais, como às *grout bags*, com posicionamento distribuído ao longo de um trecho.

3.5 Programa computacional

A implementação do modelo numérico é realizada por meio de um programa computacional escrito na linguagem de programação Python (Rossum; Drake, 2009). O

paradigma de programação orientada a objetos é empregado, padrão que tem sido aplicado comumente na análise estrutural de problemas de engenharia, como discutido por Bittencourt, Guimarães e Feijóo (1999). Utiliza-se o método da rigidez direta para o cálculo das matrizes de globais do problema e as estruturas de dados e manipulações matemáticas são realizadas com o auxílio de pacotes computacionais amplamente conhecidos por sua eficiência e robustez, como NumPy (Harris *et al.*, 2020) e SciPy (Virtanen *et al.*, 2020). O fluxo implementado consiste na leitura de um arquivo de entrada, uma etapa de análise estática e uma etapa de extração das frequências e modos naturais de vibração do duto, conforme ilustrado na Figura 22.



O modelo é construído a partir de um arquivo de entrada que contém todas as informações relevantes para a construção da malha de elementos finitos, parâmetros dos materiais, rigidezes por metro das molas e opções do modelo, como a base elástica adotada e a consideração da inércia rotatória no cálculo das matrizes de massa. Um exemplo de arquivo de entrada utilizado está presente no Apêndice B.

O primeiro passo de carga do modelo é estático, no qual é aplicado o peso submerso do duto e resolvidos os deslocamentos globais do modelo ($\mathbf{d}$), por meio do sistema de equações representado por:

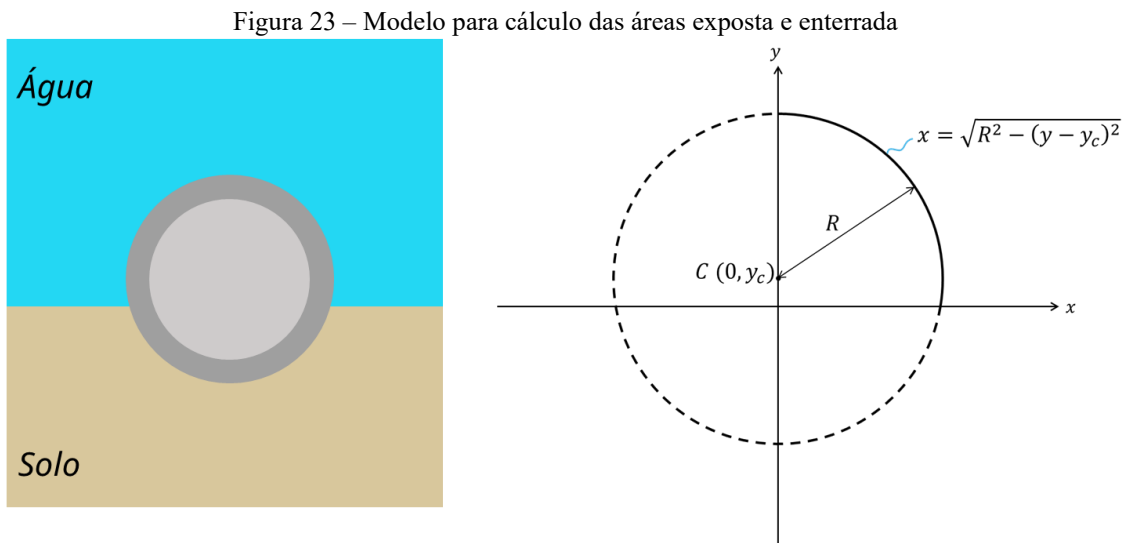
$$\mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{f} \quad (47)$$

em que $\mathbf{K}$ é a matriz de rigidez global do sistema discreto e $\mathbf{f}$ é o vetor de forças globais.

Para as condições de contorno convencionais das extremidades, como pinos e engastes, bem como para os nós onde há suporte, as linhas e colunas da matriz de rigidez global associadas aos graus de liberdade restringidos são excluídas da matriz de rigidez global do sistema, de modo que o sistema seja possível e determinado. Esse processo de manipulação e solução do sistema linear é realizado com o uso de matrizes esparsas, em que se armazenam somente os elementos diferentes de zero das matrizes, reduzindo o custo computacional. Segundo Jennings (1968), esse recurso é apropriado para a área de análise estrutural, diante da natureza esparsa das matrizes obtidas nas formulações matriciais.

Já para a condição de contorno que representa o truncamento do modelo, associada à solução de uma viga semi-infinita, não há exclusão de linhas e colunas da matriz de rigidez global. Nesse caso, são somados aos elementos da matriz de rigidez dos elementos de pórtico plano das extremidades do modelo os correspondentes elementos da matriz de rigidez do elemento de truncamento. Esse processo é repetido do mesmo modo para a matriz de massa quando há essa condição. Além disso, o vetor de forças globais também é atualizado, somando-se as contribuições do esforço cortante e momento fletor para os elementos das extremidades, as quais são deduzidas no Apêndice A.

Após os cálculos dos graus de liberdade ($\mathbf{d}$), é realizada uma atualização acerca das áreas exposta e enterrada nas regiões dos ombros, para o cálculo da massa adicional. O enterramento é calculado a partir do deslocamento médio entre os dois nós de cada elemento situado na região dos ombros do modelo, de modo que o cálculo das áreas é realizado a partir do esquema apresentado na Figura 23. Nesse esquema é considerado um círculo de raio R e centro com coordenadas cartesianas $(0, y_c)$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Considerando o eixo x como o piso marinho, pode-se calcular a parcela da área exposta do duto pela resolução da integral:

$$A_{exposta} = 2 \int_0^{R+y_c} \sqrt{R^2 - (y - y_c)^2} dy \quad (48)$$

que resulta em:

$$A_{exposta} = y_c \sqrt{R^2 - y_c^2} + R^2 \arcsen\left(\frac{y_c}{R}\right) + \frac{1}{2} \pi R^2 \quad (49)$$

A área enterrada é obtida pela subtração da área exposta da área total do círculo.

Após o passo estático, a montagem da matriz de massa global ($\mathbf{M}$) é realizada, considerando a massa do duto, conteúdo interno e massas adicionais. A partir dessa matriz e da matriz de rigidez global ($\mathbf{K}$), é resolvido o problema de autovalor generalizado para o cálculo das frequências e dos modos naturais de vibração do duto, dado por:

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\phi} = \omega^2 \mathbf{M}\boldsymbol{\phi} \quad (50)$$

em que ω é a frequência angular natural de vibração e $\boldsymbol{\phi}$ é o correspondente modo natural de vibração associado. Considerando o elemento de pórtico plano utilizado, um modelo com n nós pode ter até $3n$ pares de solução $(\omega_j, \boldsymbol{\phi}_j)$, a depender das condições de contorno.

Além da automatização dessas etapas, o programa contém um módulo relacionado aos processos de otimização do posicionamento dos suportes. O relacionamento entre as classes implementadas é representado no diagrama de classes presente no Apêndice C, em que é utilizada a Linguagem de Modelagem Unificada (*Unified Modeling Language* – UML), um recurso amplamente utilizado na construção de programas computacionais (Medvidovic *et al.*, 2002).

3.6 Validação do modelo

O programa *Linear Elements Structure Model* – LESM é utilizado para validação dos cálculos das frequências naturais de vibração do modelo apresentado. Desenvolvido por Rangel e Martha (2019), o LESM possui interface gráfica para a análise estrutural estática e dinâmica de elementos lineares, como treliças, pórticos e grelhas.

Com a possibilidade de inclusão de molas discretas no LESM, um cenário com os dados dispostos na Tabela 3 é elaborado no programa LESM e comparado com o modelo deste trabalho.

Tabela 3 – Dados do modelo de validação no programa LESM

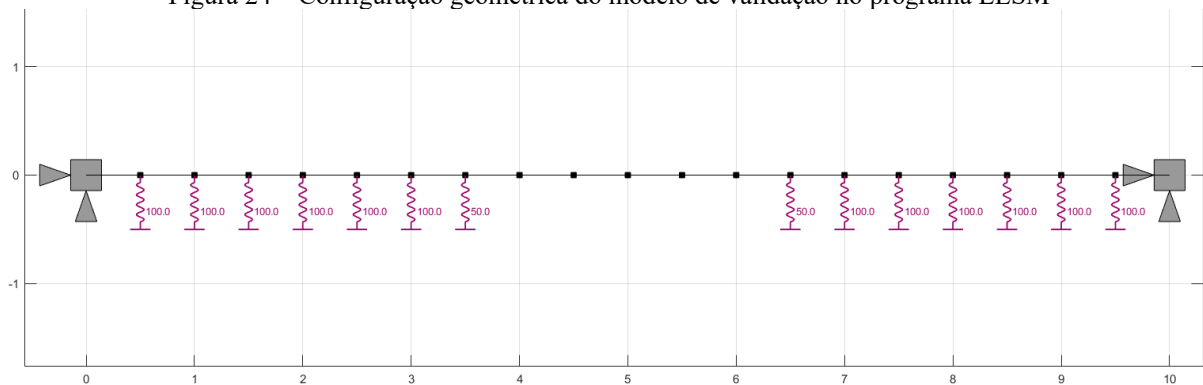
Parâmetro	Valor	Unidade
Diâmetro externo de aço	0,3	<i>m</i>
Espessura da parede de aço	0,015	<i>m</i>
Módulo de Young	207,0	<i>GPa</i>
Coefficiente de Poisson	0,3	—
Densidade do aço	7850,0	<i>kg/m³</i>
Rigidez por metro do solo na direção transversal	200,0	<i>kN/m/m</i>

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Para compatibilizar os dois modelos, as densidades do conteúdo interno, da água do mar e do solo são desconsideradas, sendo somente aplicada a etapa de extração modal no elemento de aço, sem atualizações das áreas exposta e enterrada. Além disso, a inércia rotatória é desprezada e o solo é modelado por meio de uma base elástica discreta.

A configuração geométrica do cenário é definida por dois ombros de 3,5 *m* de comprimento separados por um vão livre central, de 3 *m*. Nos ombros, somente há a presença de molas na direção vertical, visto que o foco do programa está nas frequências nessa direção. Ademais, as duas extremidades do modelo são engastadas e o comprimento de elemento de 0,5 *m* é utilizado. A configuração descrita é modelada por meio da interface gráfica do programa LESM e da escrita do arquivo de entrada do programa do presente trabalho e pode ser observada na Figura 24.

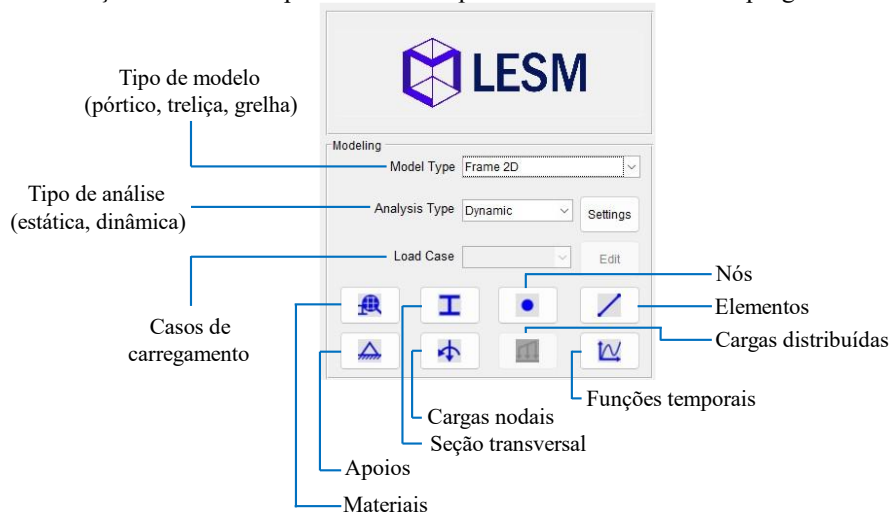
Figura 24 – Configuração geométrica do modelo de validação no programa LESM



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Para obter as frequências e modos naturais de vibração é realizada uma análise do tipo dinâmica no programa LESM e todas as etapas para a construção do modelo são efetuadas por meio dos menus abertos ao se clicar nos botões indicativos (Figura 25).

Figura 25 – Seção de menus suspensos e botões para abertura de menus no programa LESM



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Ao executar a análise no programa LESM, há a opção de exportar os resultados em um relatório em arquivo de texto. Nele, são apresentadas todas as informações do modelo e, para o caso da extração modal, as frequências e modos naturais de vibração extraídos. Os resultados obtidos são consistentes com o modelo equivalente desenvolvido no presente trabalho até a casa decimal exportada pelo LESM (Tabela 4).

Tabela 4 – Comparação entre as 5 primeiras frequências naturais de vibração do modelo deste trabalho e do programa LESM

Frequência	Frequência Modelo (Hz)	Frequência LESM (Hz)
1	1,8881917E+01	1,88819E+01
2	5,1221312E+01	5,12213E+01
3	9,9882568E+01	9,98826E+01
4	1,6493761E+02	1,64938E+02
5	2,4637021E+02	2,46370E+02

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Outro cálculo efetuado para validação do modelo numérico é a comparação da primeira frequência natural de vibração extraída com a calculada segundo a formulação analítica da DNV-RP-F105, cujo equacionamento é discutido no Capítulo 2.

Neste caso, os dados da Tabela 3 também são utilizados. No entanto, segundo a DNV (2017a), a configuração geométrica do cenário de vão livre para validação deve respeitar a relação entre o comprimento do vão e o diâmetro de aço (L/D_s) de 60 e ter esforço axial efetivo zero. Sendo assim, para se obter um vão isolado, são modelados ombros de 54 m de comprimento separados por um vão central de 18 m, com comprimento de elemento de 0,25 m. Adicionalmente, são consideradas as densidades da água do mar, de 1027 kg/m^3 e do solo, de

1500 kg/m^3 , associadas aos coeficientes de inércia de 1,0 na direção transversal e 0,1 na direção axial. Também são avaliados cenários com condições de contorno pinado-pinado e engastado-engastado presentes na DNV-RP-F105 em que somente os vãos livres são modelados como uma viga apoiada nas extremidades. Os valores da primeira frequência natural de vibração obtidos do modelo para as 3 condições de contorno diferiram dos valores da formulação analítica dentro da faixa de 5% recomendada pela recomendação prática para comparações com análises de elementos finitos (Tabela 5).

Tabela 5 – Comparação das primeiras frequências naturais de vibração obtidas pelo modelo numérico com as obtidas pela formulação analítica da DNV-RP-F105

Condição de contorno	Frequência Modelo (Hz)	Frequência DNV-RP-F105 (Hz)	Desvio
Pinado-Pinado	1,933	1,934	0,04%
Engastado-Engastado	4,382	4,381	0,03%
Vão único isolado apoiado sobre o solo	1,708	1,780	4,07%

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Os desvios são esperados, uma vez que a formulação da DNV-RP-F105 incorpora alguns efeitos das não linearidades que o modelo desenvolvido não considera, principalmente para a condição de vão único isolado apoiado sobre o solo.

3.7 Aplicações

Nesta seção são apresentadas aplicações do modelo numérico desenvolvido. São avaliadas as bases elásticas, a influência da inércia rotatória, a condição de contorno de truncamento, um cenário com dois vãos livres vizinhos, a influência do esforço axial e a inclusão de um suporte no modelo.

Os dados comuns a todas as aplicações são adaptações dos apresentados por Oliveira (2016) e dispostos na Tabela 6.

Tabela 6 – Dados utilizados nas aplicações do modelo numérico

Parâmetro	Valor	Unidade de medida
Diâmetro externo de aço	0,27305	<i>m</i>
Espessura da parede de aço	0,0127	<i>m</i>
Módulo de Young	206,0	<i>GPa</i>
Coefficiente de Poisson	0,29	—
Densidade do aço	7850,0	<i>kg/m³</i>
Densidade da água do mar	1025,0	<i>kg/m³</i>
Densidade do solo	1500,0	<i>kg/m³</i>
Densidade do conteúdo interno	200,0	<i>kg/m³</i>
Coefficiente de inércia axial	0,1	—
Coefficiente de inércia transversal	1,0	—
Rigidez por metro do solo na direção axial	160,0	<i>kN/m/m</i>
Rigidez por metro do solo na direção transversal	160,0	<i>kN/m/m</i>

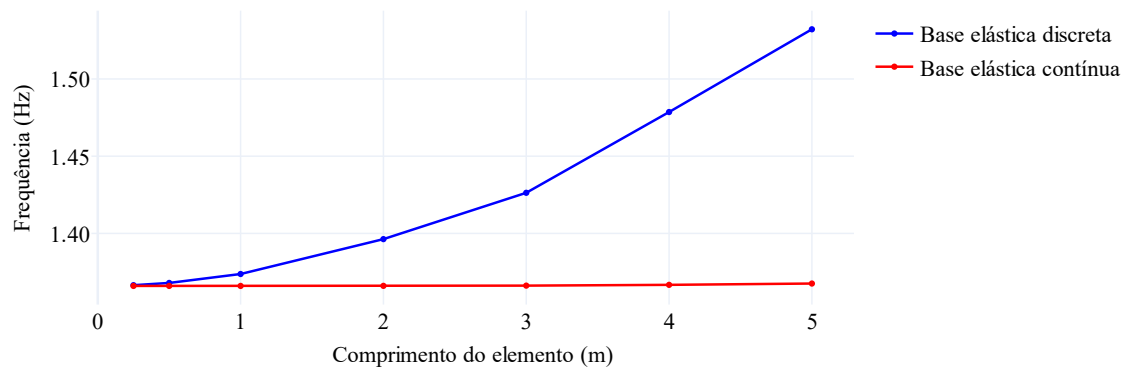
Fonte: Adaptado de Oliveira (2016)

3.7.1 Comparação entre bases elásticas

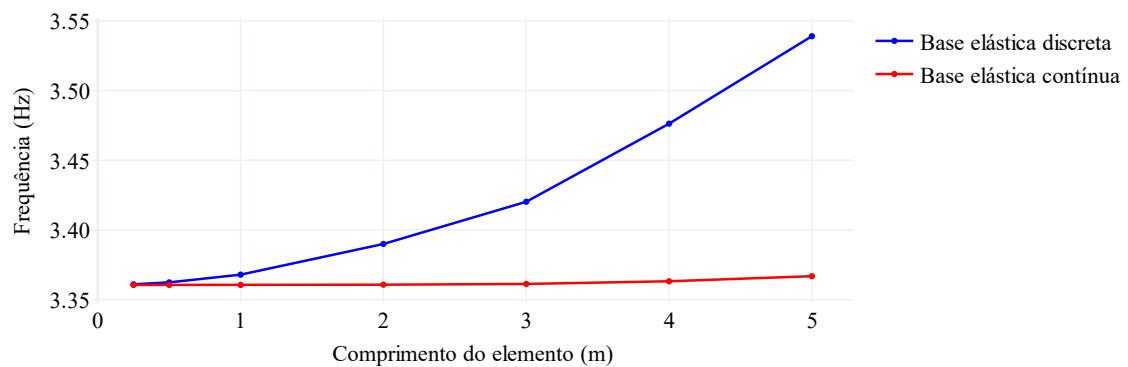
Nesta aplicação, dois modelos com a mesma configuração geométrica são comparados, em que 2 ombros e um vão central possuem 20 *m* de comprimento cada ($L/D = 73,25$). A diferença entre os modelos consiste no tipo de base elástica adotado, em que são avaliadas a base elástica discreta e contínua.

O estudo consiste em avaliar diferentes comprimentos de elemento em que as variáveis de interesse são as 3 primeiras frequências naturais de vibração do modelo. Observa-se que as frequências calculadas em modelos com comprimento de elementos curtos são próximas independentemente da base elástica adotada. Por outro lado, ao aumentar o comprimento dos elementos, as frequências obtidas entre os dois tipos de modelo tendem a apresentar desvios (Figura 26).

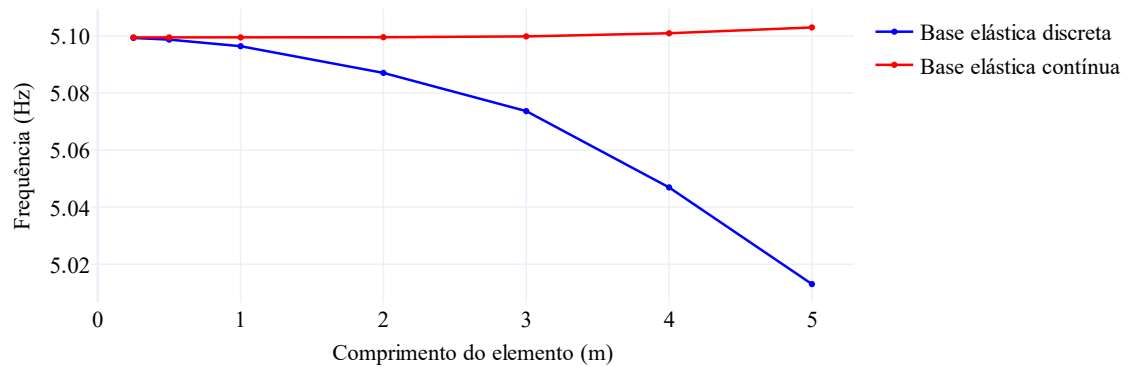
Figura 26 – Resultados da avaliação das 3 primeiras frequências naturais de vibração de modelos considerando bases elásticas discreta e contínua



(a) Primeira frequência natural



(b) Segunda frequência natural



(c) Terceira frequência natural

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

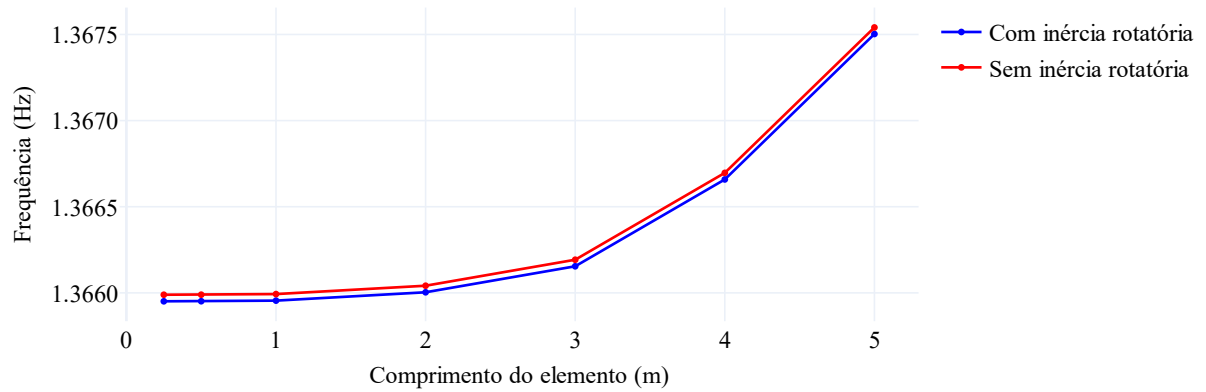
Adicionalmente, observa-se que no modelo com base elástica contínua, os valores das frequências mantêm-se estáveis com o aumento do comprimento do elemento, demonstrando a eficiência computacional ao adotar essa modelagem.

3.7.2 Avaliação da influência da inércia rotatória

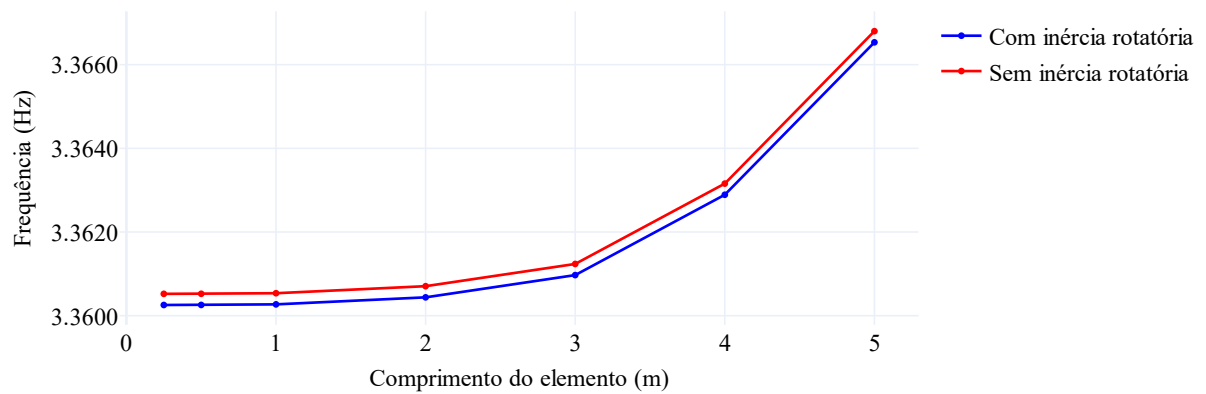
Neste estudo, utiliza-se o mesmo modelo descrito na aplicação anterior, adotando-se a base elástica contínua. Novamente dois modelos são comparados e as variáveis de interesse são

as 3 primeiras frequências naturais de vibração, mas nesse cenário a diferença entre os dois é a consideração da inércia rotatória no cálculo da matriz de massa. Observa-se que a consideração da inércia rotatória resulta em frequências naturais de vibração menores, o que é relevante na análise de dutos, pois frequências mais baixas podem tornar a estrutura mais suscetível à VIV. No entanto, para os parâmetros adotados, também se percebe que a influência nos valores numéricos das frequências é pequena para o problema, o que justifica a sua desconsideração (Figura 27).

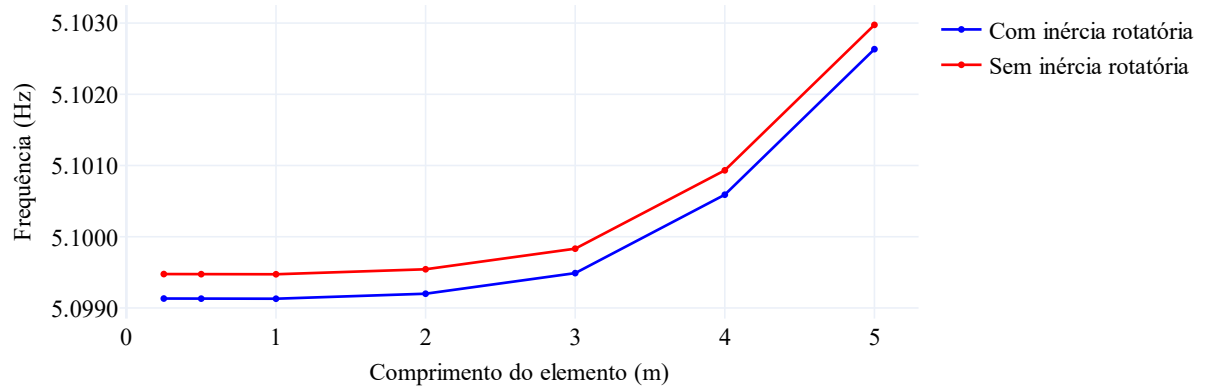
Figura 27 – Resultados da avaliação das 3 primeiras frequências naturais de vibração de modelos com a consideração ou não da inércia rotatória



(a) Primeira frequência natural



(b) Segunda frequência natural



(c) Terceira frequência natural

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

3.7.3 Avaliação da condição de contorno de truncamento

Nesta aplicação, modelos com o mesmo comprimento de vão livre, de 20 m, base elástica contínua, com a consideração da inércia rotatória e com o comprimento de elemento de

10 *cm* são simulados. A diferença entre eles consiste no comprimento dos ombros e nas condições de contorno das extremidades. Inicialmente, um modelo com ombros mais longos, de 80 *m* cada, e com as extremidades engastadas é tomado como base. Nos demais modelos, o comprimento dos ombros é reduzido, mantendo-se a posição do vão livre inalterada, e as extremidades são modeladas por meio do elemento de truncamento desenvolvido neste capítulo. Essa variação do comprimento dos ombros é realizada com o objetivo de determinar qual o comprimento mínimo de ombro de modo a obter resultados equivalentes entre o modelo completo e o truncado. Como métricas da avaliação, são consideradas as duas primeiras frequências naturais de vibração do modelo, cujos valores estão dispostos na Tabela 7.

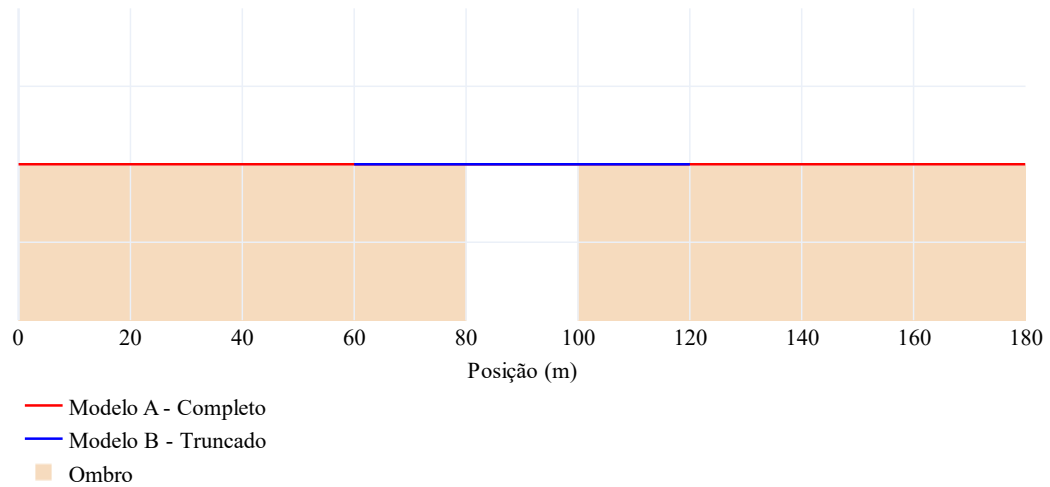
Tabela 7 – Comparação dos valores das duas primeiras frequências naturais de vibração entre o modelo engastado e modelos truncados

Modelo	Comprimento dos ombros (m)	Primeira frequência (Hz)	Segunda frequência (Hz)
Engastado	80	1,366	3,359
Truncado	70	1,366	3,359
Truncado	60	1,366	3,359
Truncado	50	1,366	3,359
Truncado	40	1,366	3,359
Truncado	30	1,366	3,359
Truncado	20	1,366	3,359
Truncado	10	1,321	3,447

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Dessa forma, para a avaliação dos modos de vibração, é adotado um modelo truncado com ombros de 20 *m*. O modelo engastado com ombros longos é chamado de Modelo A e o modelo truncado selecionado é chamado Modelo B. As configurações indeformadas dos modelos são apresentadas na Figura 28.

Figura 28 – Configurações indeformadas dos dois modelos comparados

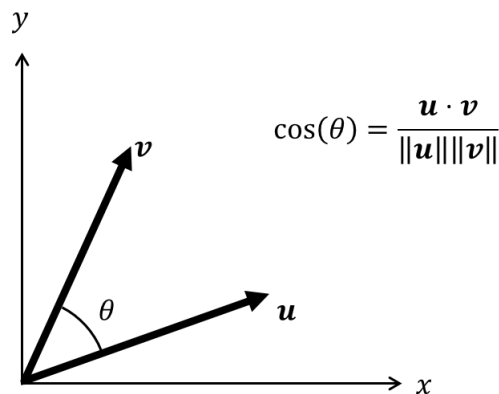


Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Uma vez que o Modelo A possui mais graus de liberdade do que o Modelo B, também possui mais modos de vibração. Sendo assim, para comparar os modos é necessário realizar a correspondência dos modos entre os modelos.

Nesse sentido, é realizada uma comparação entre os autovetores obtidos da solução do problema de cálculo de frequências e modos naturais de vibração, de forma que dois autovetores são correspondentes se o valor absoluto do cosseno do menor ângulo entre eles é unitário, ou aproximadamente unitário. Essa técnica é conhecida como similaridade por cossenos na área de Aprendizado de Máquina (*Machine Learning*) e aplicada em vários trabalhos, como, por exemplo, Singh *et al.* (2020). A base da Geometria Analítica para o cálculo do cosseno do ângulo entre dois vetores é ilustrada na Figura 29.

Figura 29 – Cálculo do cosseno do ângulo entre dois vetores

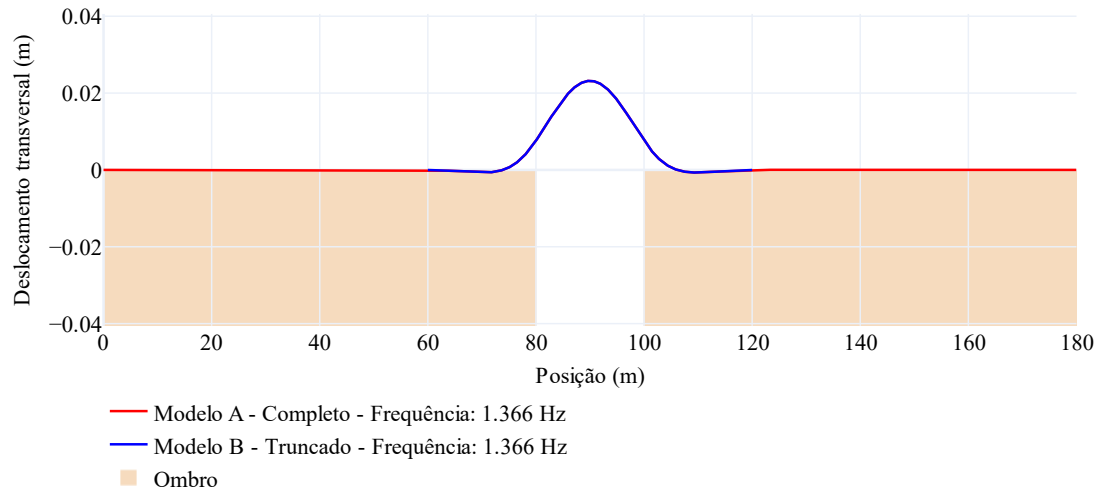


Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

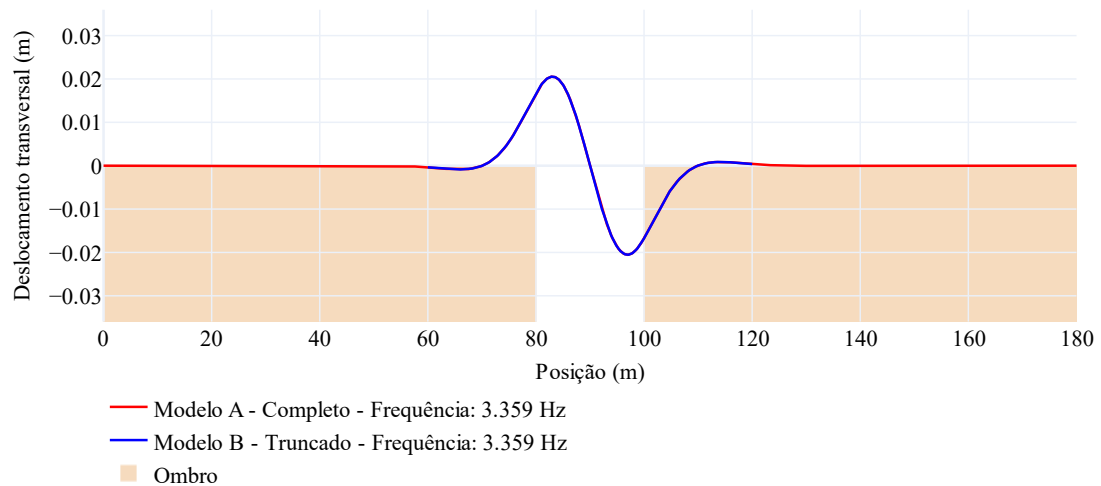
Os resultados obtidos após a comparação e obtenção dos dois primeiros pares de modos correspondentes dos modelos são apresentados na Figura 30. Nota-se que as frequências e

modos naturais de vibração calculados com o Modelo B são próximos aos obtidos com Modelo A, mas com um menor custo computacional, de modo que se pode afirmar que os resultados são equivalentes para as variáveis analisadas.

Figura 30 – Dois primeiros modos de vibração correspondentes entre o Modelo A e Modelo B



(a) Primeiro modo de vibração



(b) Segundo modo de vibração

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

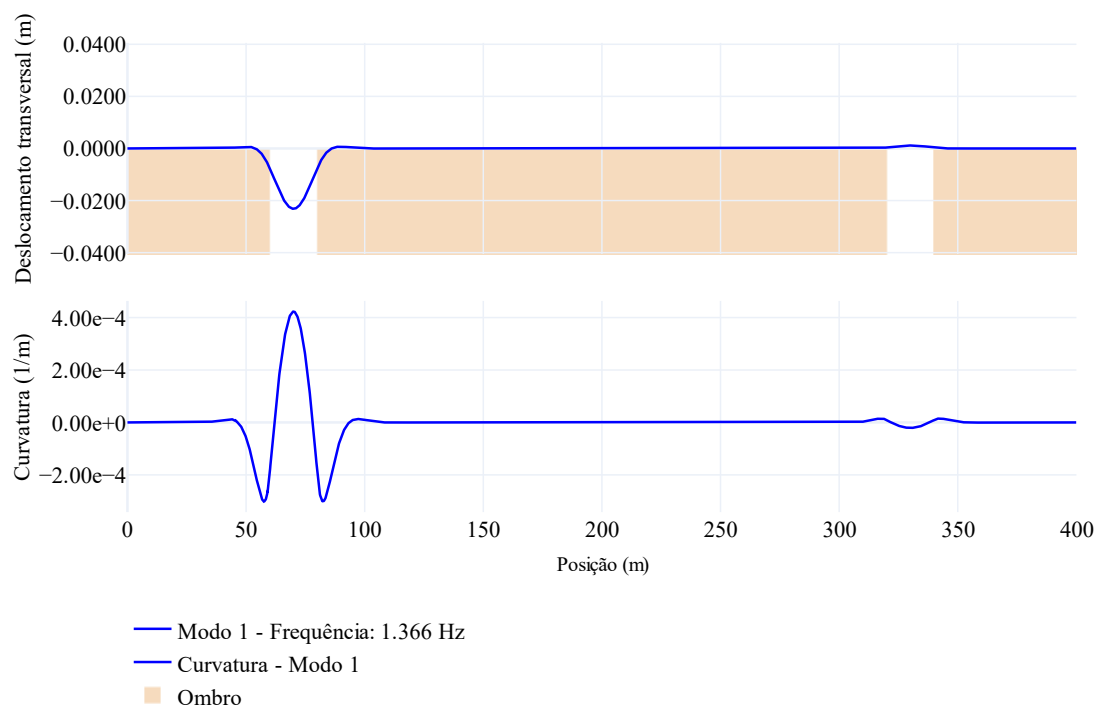
3.7.4 Avaliação da influência de um ombro intermediário entre dois vãos

Nesta aplicação, um trecho com as características da aplicação anterior e extremidades engastadas com dois vãos livres e um ombro entre eles é modelado com o objetivo de avaliar a influência do comprimento do vão intermediário no primeiro modo natural de vibração.

Em uma primeira análise, o ombro intermediário é modelado com o comprimento longo o suficiente para os vãos livres serem considerados isolados, uma vez que, ao longo do ombro intermediário, há um trecho em que a curvatura do modo é nula (Figura 31).

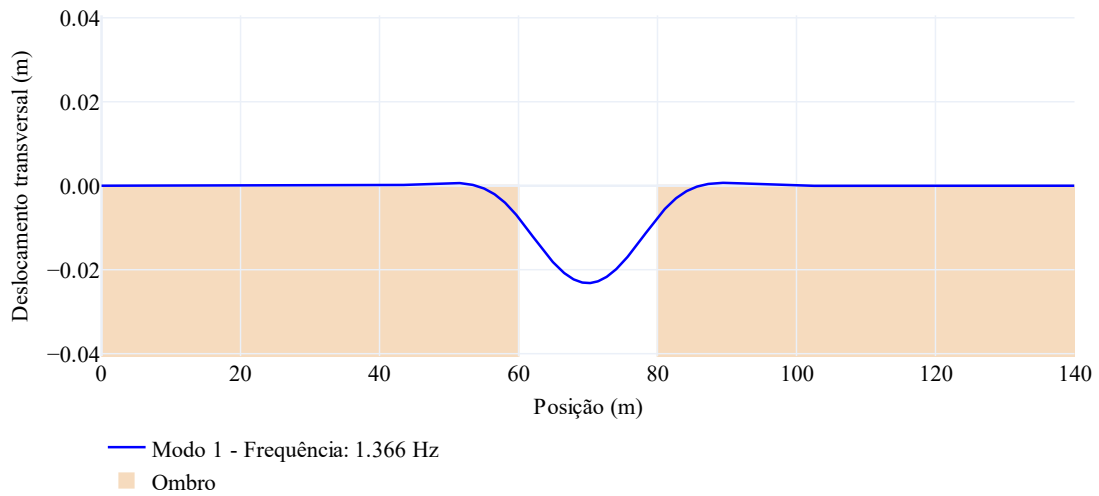
Outra análise realizada para confirmar que o primeiro vão é isolado para este modo de vibração é a modelagem desse vão de forma independente, resultando na mesma frequência e mesmo modo natural de vibração do modelo que considera os dois vãos livres, como ilustrado na Figura 32.

Figura 31 – Primeiro modo natural de vibração do modelo com dois vãos isolados



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

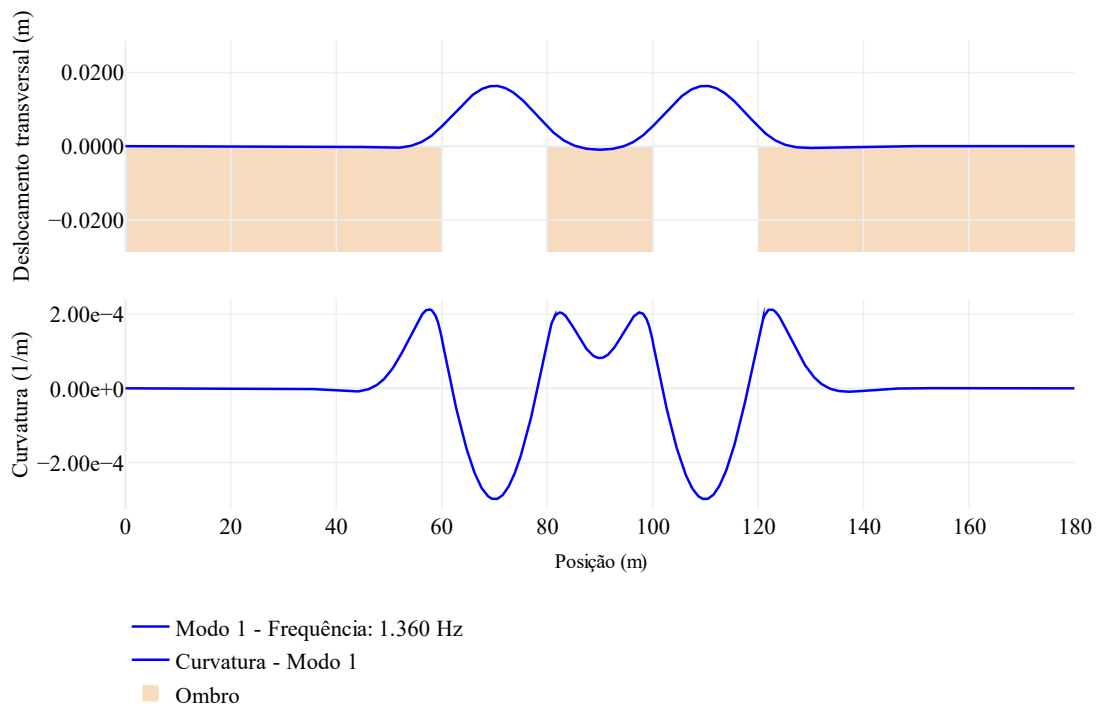
Figura 32 – Primeiro modo natural de vibração do modelo com vão único isolado



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Ao reduzir o comprimento do ombro intermediário, observa-se que o modo de vibração apresenta curvaturas significativas no ombro intermediário (Figura 33). Sendo assim, a sequência dos dois vãos deve ser analisada como um multivão interativo.

Figura 33 – Primeiro modo natural de vibração do modelo com multivão interativo

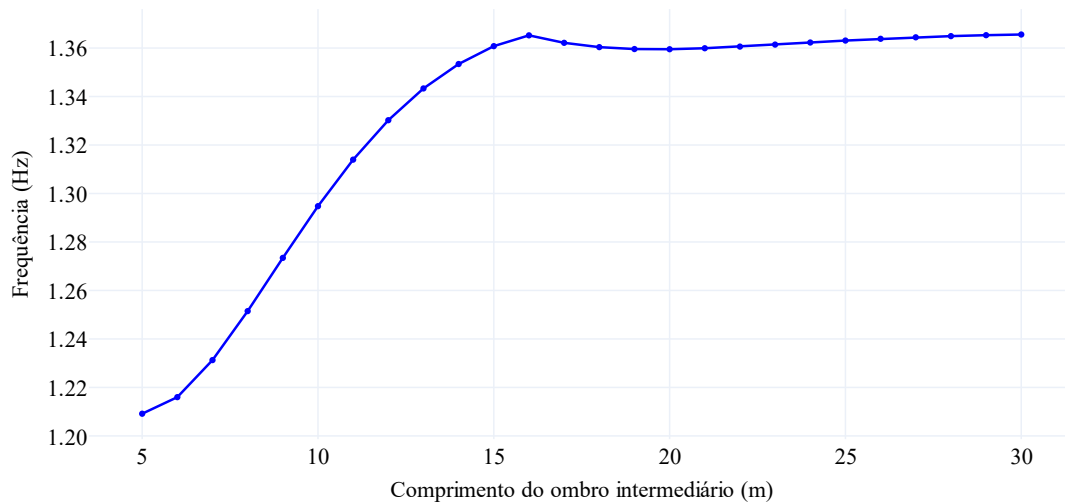


Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Dessa forma, observa-se que os modos de vibração de um modelo com mais de um vão livre são influenciados pelos comprimentos dos trechos apoiados que os separam, o que está de acordo com a DNV-RP-F105 e é ilustrado na Figura 34, na qual se observa uma variação não

linear da primeira frequência natural de vibração ao variar o comprimento do ombro intermediário. A partir de um comprimento de ombro de 25 m, percebe-se uma estabilização no valor da frequência para o cenário analisado.

Figura 34 – Relação entre o comprimento do ombro intermediário e a primeira frequência natural de vibração



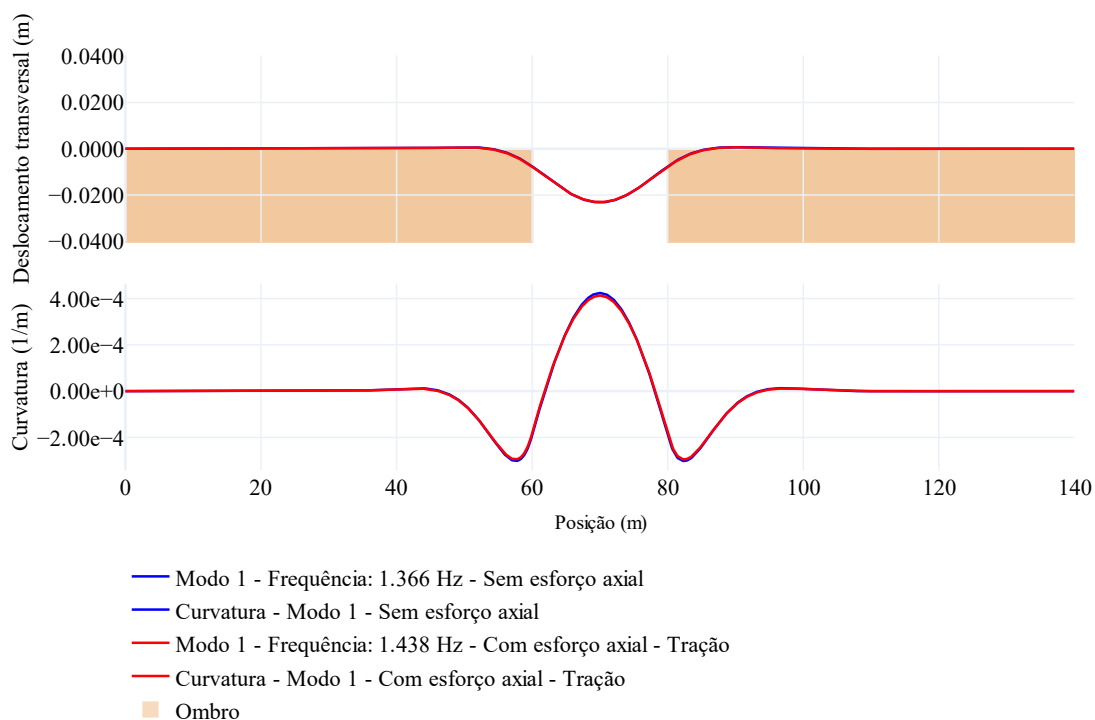
Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

3.7.5 Avaliação da influência do esforço axial

Neste estudo é utilizado o mesmo modelo da Figura 32, sendo considerada a base elástica contínua e a influência da inércia rotatória. O objetivo é avaliar a influência de esforços axiais nas frequências e modos naturais de vibração. São elaborados então dois modelos, com 100 kN de esforço axial, em que em um deles o esforço é de compressão e no outro, de tração.

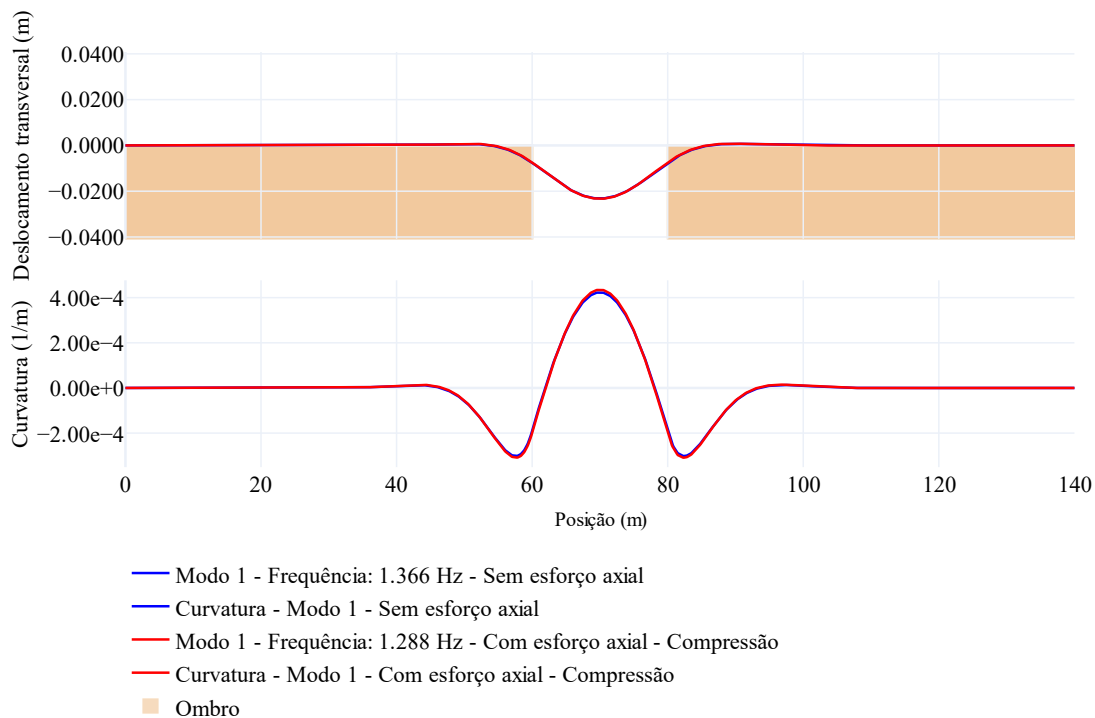
Observa-se que ao se considerar um esforço de tração, a frequência natural de vibração aumenta (Figura 35), enquanto um esforço de compressão leva a uma frequência menor (Figura 36). Isso é esperado, uma vez que esforços de tração aumentam a rigidez do sistema pela matriz de rigidez geométrica, enquanto o contrário acontece para esforços axiais compressivos.

Figura 35 – Comparação da frequência e modo natural de vibração ao se aplicar um esforço axial de tração



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Figura 36 – Comparação da frequência e modo natural de vibração ao se aplicar um esforço axial de compressão

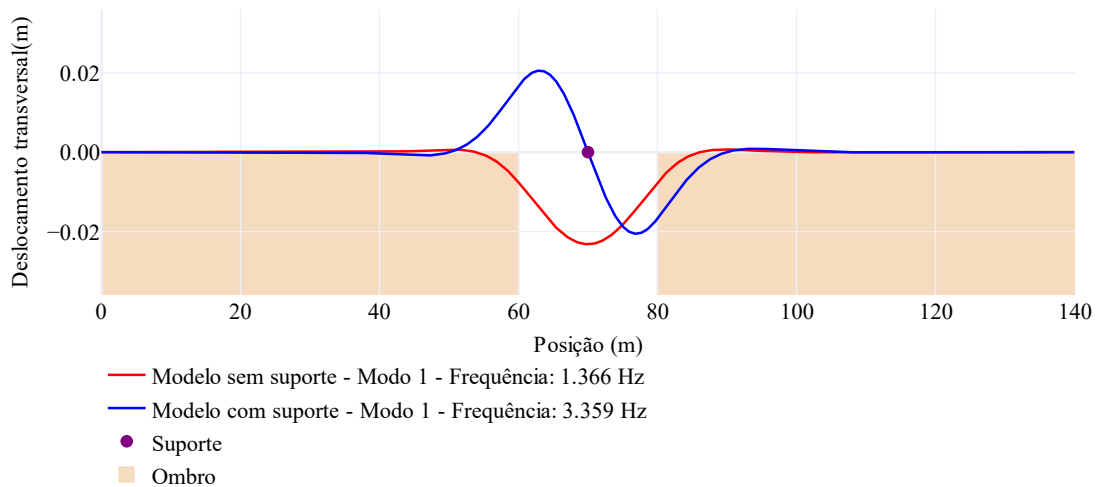


Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

3.7.6 Modelo com suporte

Nesta aplicação, o mesmo modelo do estudo anterior é utilizado, mas livre de esforço axial. O objetivo é avaliar a alteração na primeira frequência e modo natural de vibração associado ao incluir um suporte no trecho central do vão livre. Os resultados são apresentados na Figura 37.

Figura 37 – Primeiro modo natural de vibração do modelo com suporte



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Observa-se o aumento da frequência natural de vibração, o que reforça a importância de intervenções para retificação dos vãos livres com a inclusão de suportes. Isso motiva o desenvolvimento do módulo de otimização do posicionamento de suportes detalhado no próximo capítulo.

3.7.7 Avaliação da influência da rigidez do solo

Neste estudo, o modelo sem suportes da aplicação anterior é utilizado e o objetivo é avaliar o comportamento da primeira frequência natural de vibração com a variação da rigidez vertical do solo.

Os tipos de solo dispostos na DNV-RP-F114 – *Pipe-soil interaction for submarine pipelines* (DNV, 2017b) são utilizados nas simulações, nas quais são adotadas as rigidezes verticais estáticas médias de referência dispostas no documento. Os valores de rigidezes por metro e das primeiras frequências naturais de vibração são apresentados na Tabela 8.

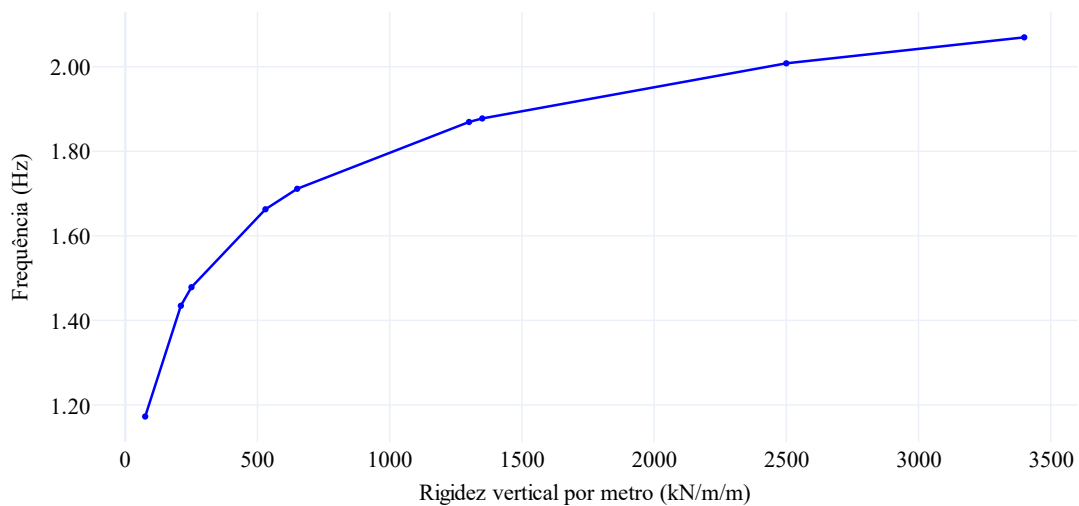
Tabela 8 – Valores da primeira frequência natural de vibração em função da rigidez do solo

Solo	Rigidez vertical média (kN/m/m)	Primeira frequência (Hz)
<i>Clay - Very Soft</i>	75	1,172
<i>Clay - Soft</i>	210	1,435
<i>Sand - Loose</i>	250	1,478
<i>Sand - Medium</i>	530	1,663
<i>Clay - Firm</i>	650	1,711
<i>Clay - Stiff</i>	1300	1,869
<i>Sand - Dense</i>	1350	1,878
<i>Clay - Very Stiff</i>	2500	2,008
<i>Clay - Hard</i>	3400	2,070

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Observa-se que a frequência natural de vibração cresce à medida que a rigidez do solo aumenta, sendo que o valor da frequência para o solo de maior rigidez analisado é quase o dobro do valor obtido para o solo menos rígido, como ilustrado na Figura 38.

Figura 38 – Variação da primeira frequência natural de vibração com a rigidez do solo



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

4 OTIMIZAÇÃO DO POSICIONAMENTO DE SUPORTES

Neste capítulo são apresentados os desenvolvimentos relacionados à otimização do posicionamento de suportes nos vãos livres. São detalhados os aspectos da formulação do problema de otimização, algoritmos utilizados, incorporação no programa computacional apresentado no capítulo anterior e aplicações do trabalho desenvolvido.

4.1 Formulação do problema de otimização

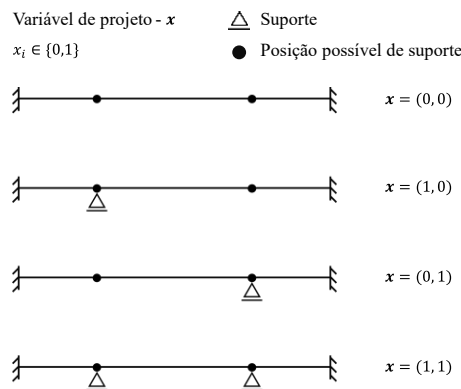
As variáveis de projeto idealizadas neste trabalho representam a presença, ou não, de suporte transversal em n posições dos nós especificados da discretização do modelo que se encontram nos vãos livres, compondo o vetor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Nesse sentido, essas variáveis são binárias, em que um valor zero indica a ausência de suporte, enquanto o valor unitário indica a sua presença, como ilustrado na Figura 39.

Em cenários extensos e com múltiplos vãos livres, fatores como a lâmina d'água, *gap*, o tipo de solo e a necessidade de equipamentos e operadores para a instalação dos suportes impactam no custo e, conseqüentemente, na decisão de intervenção em determinados vãos. Sendo assim, cada possível posição de suporte possui um fator de penalização do custo associado ao vão livre, compondo um vetor de custos fixos $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$. O problema de otimização concebido neste trabalho consiste em:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } f(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} \\ &\text{sujeito a } g(\mathbf{x}) = f_{alvo} - f_1(\mathbf{x}) \leq 0 \\ &\quad x_i \in \{0, 1\} \end{aligned} \tag{51}$$

em que f_1 é a primeira frequência natural de vibração na direção vertical obtida por meio do modelo numérico desenvolvido e f_{alvo} é um valor mínimo de frequência que se deseja obter no modelo.

Figura 39 – Variável de projeto do problema de otimização



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

A escolha de f_{alvo} como a frequência limite obtida no critério de *VIV Avoidance* da DNV-RP-F105 (Equações (1) e (2)) significa buscar uma configuração de suportes que mitiga a ocorrência de vibrações induzidas por vórtices segundo esse critério.

A solução desse problema por busca exaustiva requer 2^n avaliações da função objetivo, devido à natureza binária das variáveis de projeto. Nesse contexto, algoritmos de otimização são empregados com o objetivo de encontrar a solução utilizando um número reduzido de avaliações.

4.2 Algoritmo genético e método de ramificar e limitar

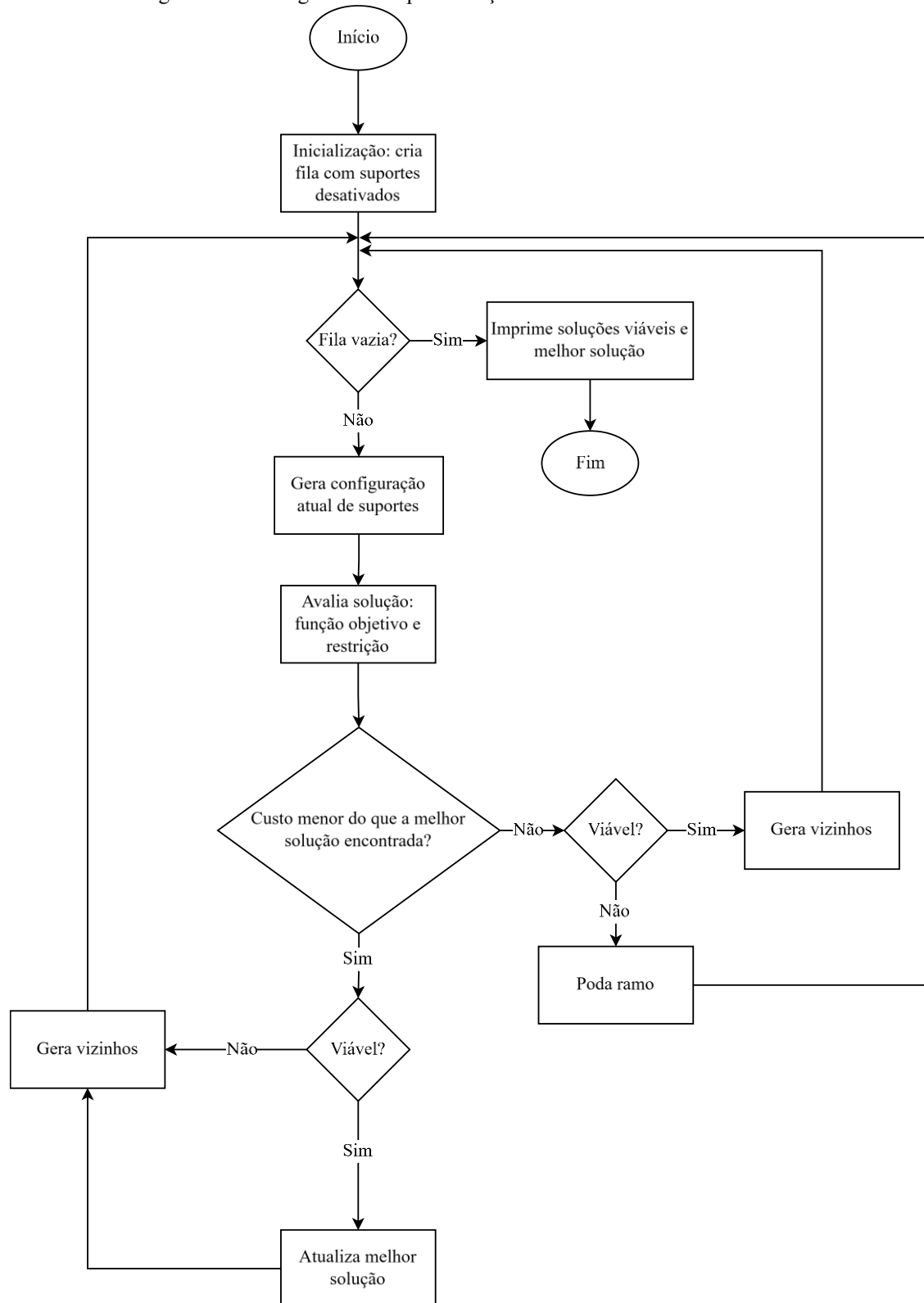
Para resolver o problema de otimização em pauta, utilizam-se tanto o algoritmo genético quanto o método de ramificar e limitar (*branch-and-bound*).

No caso do algoritmo genético, utiliza-se o pacote computacional de otimização Platypus, desenvolvido por Hadka (2024). Uma das vantagens desse pacote é a possibilidade de definir o tipo de variável de projeto como binária nativamente, além de permitir trabalhar com restrições não lineares, o que vai ao encontro do problema de otimização proposto. A partir de um tamanho informado, o algoritmo gera aleatoriamente uma população de soluções candidatas respeitando o domínio binário das variáveis de projeto. A cada iteração, indivíduos mais aptos são selecionados para gerar novas soluções por meio de operadores de cruzamento, que combinam as características dos indivíduos selecionados na geração dos descendentes, e mutação, que altera aleatoriamente algumas variáveis. A execução do algoritmo implementado no Platypus prossegue de acordo com o tamanho da população, sendo este o parâmetro mais importante para a quantidade de avaliações requeridas.

Já para o método de ramificar e limitar, trata-se de uma implementação própria a partir da revisão e aprimoramento de ideias e trechos de código gerados com o auxílio da ferramenta ChatGPT (OpenAI, 2024), com o modelo de linguagem GPT-4o. A estratégia adotada considera o comportamento monótono crescente da função objetivo, seguindo uma abordagem semelhante à proposta por Huang e Arora (1997). Dessa forma, não são exploradas possibilidades que levem a um custo superior ao atingido anteriormente caso uma solução viável, isto é, uma solução que atenda à restrição do problema, já tenha sido encontrada. Logo, há a possibilidade de diminuir a quantidade de avaliações da função objetivo e da restrição significativamente. Segundo Tseng, Wang e Ling (1995), este processo se enquadra em uma busca em largura na árvore de possibilidades. O processo de avaliação das possibilidades desse

algoritmo é detalhado no fluxograma apresentado na Figura 40 e nas duas primeiras aplicações deste capítulo.

Figura 40 – Fluxograma da implementação do método de ramificar e limitar



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Para ambos os algoritmos, é possível armazenar todas as soluções viáveis encontradas ao longo do processo de busca. A solução ótima resultante é aquela que minimiza a função objetivo, atendendo à restrição imposta. Um diferencial da estratégia proposta, é que caso haja múltiplas soluções com o mesmo valor que minimiza a função objetivo, a escolha recai sobre aquela cuja frequência natural de vibração se encontra mais distante da frequência alvo estabelecida.

4.3 Incorporação ao programa computacional

Os dois algoritmos discutidos na Seção 4.2 são incorporados ao programa computacional desenvolvido por meio de duas classes. O princípio da herança do paradigma de programação orientada à objetos é aplicado para evitar a duplicação desnecessária de código, como é apresentado no diagrama de classes do Apêndice C.

Diante das opções implementadas para a otimização, uma interface de linha de comando (*Command Line Interface* – CLI) é utilizada para interagir com o programa computacional (Figura 41).

Figura 41 – Interface de linha de comando para utilização do programa computacional

```

python cli.py --help

Usage: cli.py [OPTIONS] COMMAND [ARGS]...

Options
  --install-completion  Install completion for the current shell.
  --show-completion     Show completion for the current shell, to copy it or customize the installation.
  --help               Show this message and exit.

Commands
  run-model            Run the model analysis and save the results.
  run-batch            Run the model analysis and save the results for all models in a folder.
  optimize-bnb        Optimize the model to reach a target frequency using branch and bound algorithm.
  optimize-genetic     Optimize the model to reach a target frequency using genetic algorithm.
  
```

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Dessa forma, é possível executar um modelo a partir da informação do caminho do arquivo de entrada, executar todos os modelos cujos arquivos de entrada estão contidos em uma pasta informada e, por fim, executar o módulo de otimização utilizando um dos algoritmos informando o caminho do arquivo de entrada do cenário base ao qual se quer obter o posicionamento ótimo dos suportes, a frequência alvo e, como parâmetro opcional, as possíveis posições nas quais se deseja intervir com a inclusão de suportes (Figura 42).

Figura 42 – Interface de linha de comando para utilizar o módulo de otimização

```

● > python cli.py optimize-bnb --help

Usage: cli.py optimize-bnb [OPTIONS] BASE_CASE_PATH FREQ_TARGET

Optimize the model to reach a target frequency using branch and bound algorithm.

Arguments
  * base_case_path  TEXT  Path to the base case file. [default: None] [required]
  * freq_target     FLOAT Target frequency for optimization. [default: None] [required]

Options
  --possible-supports TEXT List of possible support positions separated by spaces (e.g., "1.0 2.0 3.3").
                        [default: None]
  --help              Show this message and exit.

```

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Ao informar a lista de possíveis posições de suportes, os graus de liberdade verticais das respectivas posições são capturados e o algoritmo de otimização é executado, acionando o modelo numérico para executar os cenários necessários para o processo de otimização. Caso as posições não sejam informadas, os graus de liberdade verticais dos n nós dos vãos livres são automaticamente capturados e o algoritmo é executado considerando n variáveis de projeto. Em cenários com maior discretização, não informar as posições de suportes previamente pode aumentar significativamente o custo computacional, uma vez que no pior cenário são necessárias 2^n simulações numéricas.

Adicionalmente, os algoritmos também podem ser utilizados em cenários onde já existem suportes instalados previamente, de modo que a otimização é realizada sem interferir na presença deles. Uma das aplicações apresentadas na sequência detalha essa situação.

4.4 Aplicações

Nesta seção são apresentadas aplicações envolvendo o módulo de otimização. As duas primeiras aplicações abordam cenários sem e com suporte prévio em um vão isolado para validação do método de ramificar e limitar. Na terceira aplicação, avalia-se um caso com 3 vãos com custos distintos.

Todas as aplicações possuem os dados apresentados na Tabela 6, do capítulo anterior, em comum e os modelos possuem o comprimento de elemento de 25 cm. Os valores das frequências alvos adotados são baseados em simulações prévias e selecionados para explorar os processos de otimização. Em cenários reais, esses valores podem ser determinados com base no critério *VIV Avoidance*.

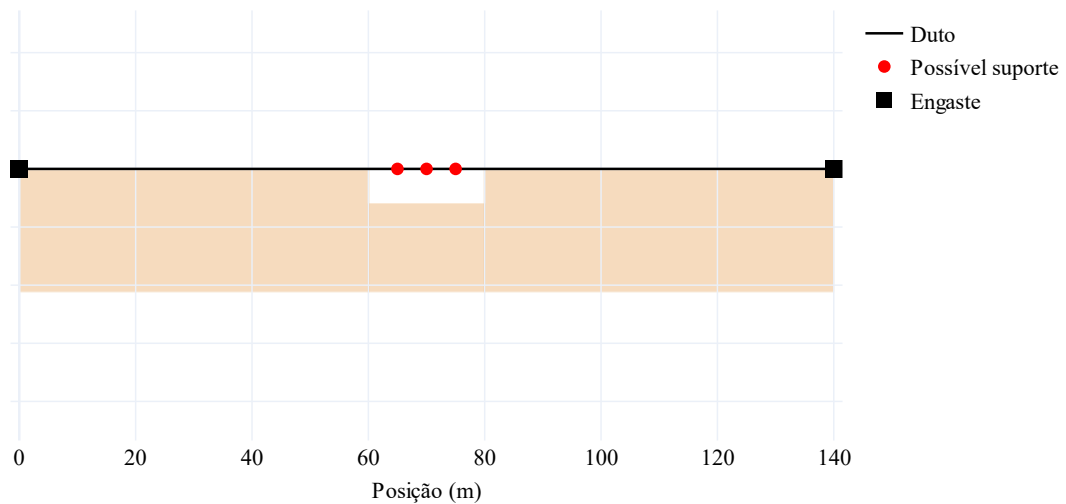
4.4.1 Exemplo de validação com vão isolado

Neste estudo, um vão livre isolado de 20 m de comprimento é modelado (Figura 43). As 3 posições possíveis de suportes situam-se nas abscissas 65 m, 70 m e 75 m e são

informadas para o método de otimização de ramificar e limitar. O custo de cada suporte é considerado unitário.

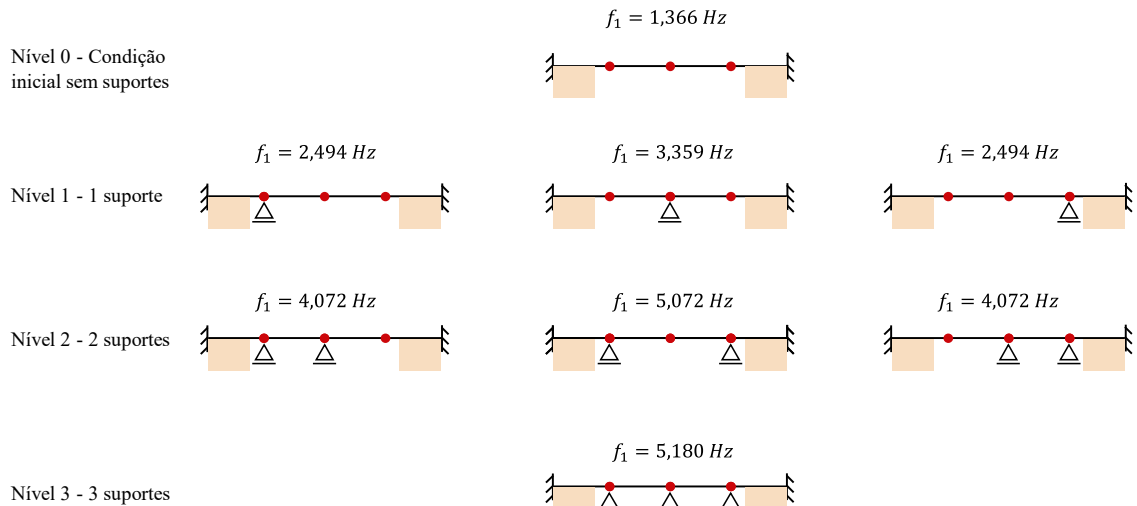
Visto que há 3 posições possíveis de suportes, 8 combinações podem ocorrer. As combinações e valores associados da primeira frequência natural de vibração na direção vertical são apresentadas na Figura 44.

Figura 43 – Configuração geométrica e possíveis posições de suportes do cenário com vão isolado



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Figura 44 – Combinações e frequências naturais de vibração do cenário com vão isolado



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

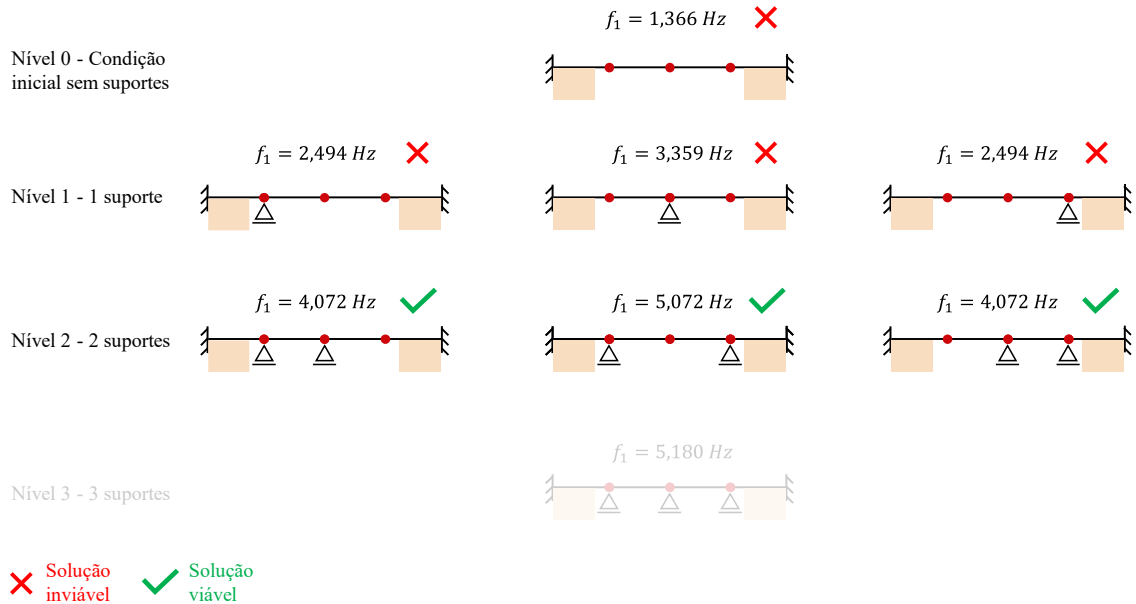
Dessa forma, aplicando-se o método de ramificar e limitar, obtêm-se os resultados esquematizados na Figura 45, considerando-se uma frequência alvo de 4 Hz.

Percebe-se que a solução com 3 suportes atende à restrição, mas não é avaliada no algoritmo, por estar em um nível que aumentaria o valor da função objetivo e já ter sido

encontrada pelo menos uma solução viável com uma menor quantidade de suportes, minimizando o custo.

Figura 45 – Esquematisação da evolução do método de ramificar e limitar para o cenário com vão isolado considerando a frequência alvo de 4 Hz

Cenário com frequência alvo de 4 Hz



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Durante a evolução do algoritmo, são informadas as avaliações da função objetivo e o encontro de soluções viáveis, sendo possível interromper o processo caso o interesse seja apenas encontrar uma solução desse tipo. Ao final, são apresentadas as soluções viáveis e determinada a solução ótima, bem como as respectivas posições dos suportes que levam a essa solução (Figura 46).

Figura 46 – Evolução e resultados do método de ramificar e limitar para o cenário com vão isolado considerando a frequência alvo de 4 Hz

```
Rodando otimização...
Avaliando no ponto (0, 0, 0) - Qtde. de suportes: 0
Avaliando no ponto (1, 0, 0) - Qtde. de suportes: 1
Avaliando no ponto (0, 1, 0) - Qtde. de suportes: 1
Avaliando no ponto (0, 0, 1) - Qtde. de suportes: 1
Avaliando no ponto (1, 1, 0) - Qtde. de suportes: 2
Solução viável encontrada: [1, 1, 0], freq: 4.072142468782303, cost: 2, objective_evals: 5, constraint_evals: 5
Avaliando no ponto (1, 0, 1) - Qtde. de suportes: 2
Solução viável encontrada: [1, 0, 1], freq: 5.07173541146737, cost: 2, objective_evals: 6, constraint_evals: 6
Avaliando no ponto (0, 1, 1) - Qtde. de suportes: 2
Solução viável encontrada: [0, 1, 1], freq: 4.072142469250708, cost: 2, objective_evals: 7, constraint_evals: 7

Soluções viáveis (3):
x: [1, 1, 0], objective: 2, freq: 4.072142468782303
x: [1, 0, 1], objective: 2, freq: 5.07173541146737
x: [0, 1, 1], objective: 2, freq: 4.072142469250708
Valor mínimo da função objetivo: 2
Solução ótima: [1, 0, 1]
Freq: 5.07173541146737
Posições dos suportes: [65.0, 75.0]

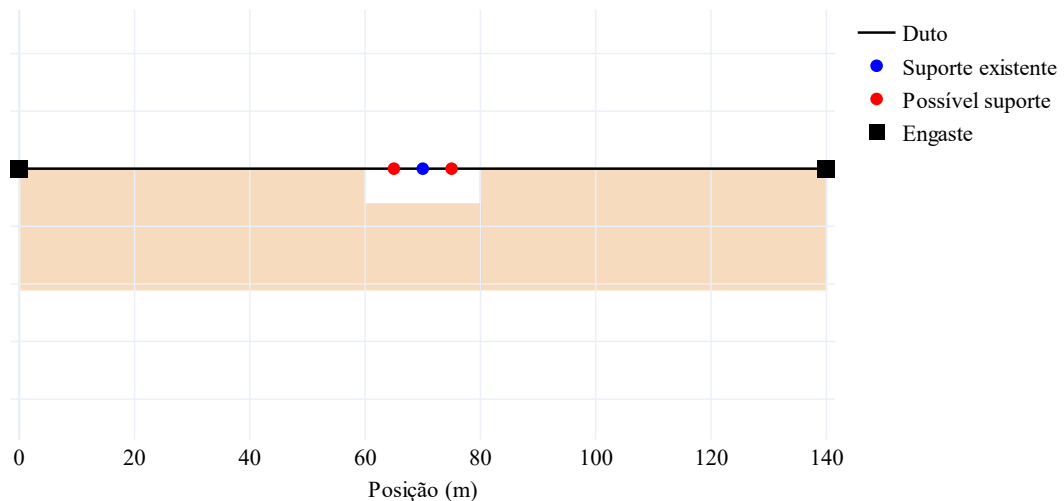
Qtde. de avaliações da função objetivo: 7
Qtde. de avaliações da restrição: 7
```

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

4.4.2 Exemplo de validação com suporte prévio

Nesta aplicação o mesmo cenário da aplicação anterior é avaliado. No entanto, um suporte na posição central é incluso, conforme apresentado na Figura 47.

Figura 47 – Configuração geométrica e possíveis posições de suportes do cenário com vão isolado e suporte prévio

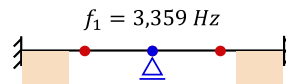


Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

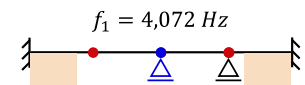
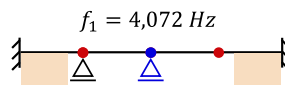
Dessa forma, o algoritmo de otimização é executado considerando-se somente as posições possíveis livres, reduzindo a quantidade de combinações (Figura 48).

Figura 48 – Combinações e frequências naturais de vibração do cenário com vão isolado e suporte prévio

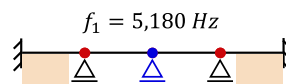
Nível 0 - Condição inicial



Nível 1 - Adição de 1 suporte



Nível 2 - Adição de 2 suportes



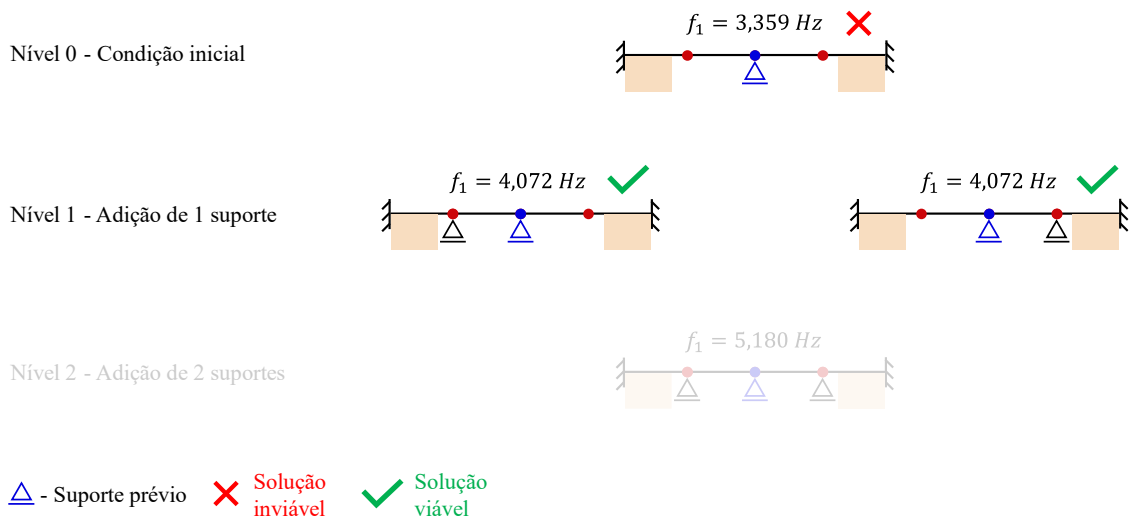
△ - Suporte prévio

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Nesse sentido, executando o método de ramificar e limitar adotando-se a frequência alvo de 4 Hz, obtêm-se os resultados esquematizados na Figura 49.

Figura 49 – Esquematisação da evolução do método de ramificar e limitar para o cenário com vão isolado e suporte prévio considerando a frequência alvo de 4 Hz

Cenário com frequência alvo de 4 Hz

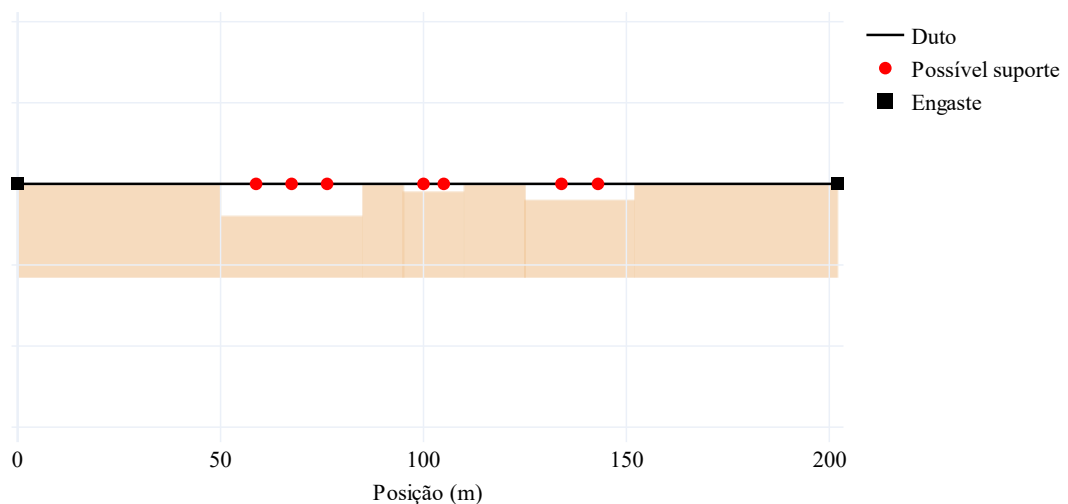


Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

4.4.3 Cenário com múltiplos vãos

Neste estudo, avalia-se um cenário com 3 vãos livres de comprimentos de 35 m, 15 m e 27 m, com a configuração geométrica esquematizada na Figura 50. As abscissas das possíveis posições dos suportes são 58,75 m, 67,5 m, 76,25 m, 100 m, 105 m, 134 m e 143 m.

Figura 50 – Configuração geométrica e possíveis posições de suportes do cenário com múltiplos vãos



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Nota-se que cada vão livre possui um *gap* distinto. Sendo assim, o custo de incluir suportes em cada vão será proporcional ao *gap*, definindo-se o vetor de custos fixos como:

$$\mathbf{c} = (8, 8, 8, 2, 2, 4, 4) \quad (52)$$

A partir deste cenário, é possível gerar $2^7 = 128$ combinações de posicionamento de suportes distintas. Uma vez que cada vão possui um custo diferente, há a possibilidade de soluções com uma maior quantidade de suportes serem ótimas, o que também é explorado no método de ramificar e limitar.

Adotando-se uma frequência alvo de 1 Hz , com a aplicação do método de ramificar e limitar encontra-se uma solução viável com apenas 13 avaliações da função objetivo. No entanto, é realizada a verificação de outras potenciais combinações definidas pelo algoritmo, inclusive com uma maior quantidade de suportes, que possam levar a um custo menor, ou ao mesmo custo, mas com uma frequência natural de vibração maior. Esgotado o espaço de busca de soluções considerando o comportamento crescente da função objetivo, chega-se à solução ótima com 75 avaliações da função objetivo (Figura 51), reduzindo em 41% a quantidade de simulações necessárias quando comparada à quantidade necessária para realizar uma busca exaustiva.

Figura 51 – Resultados do método de ramificar e limitar para o cenário com múltiplos vãos e considerando uma frequência alvo de 1 Hz

```

Soluções viáveis:
x: [1, 0, 0, 0, 0, 1, 0], objective: 12, freq: 1.0866892346711317
x: [1, 0, 0, 0, 0, 0, 1], objective: 12, freq: 1.0866891748124496
x: [0, 1, 0, 0, 0, 1, 0], objective: 12, freq: 1.6348588502403367
x: [0, 1, 0, 0, 0, 0, 1], objective: 12, freq: 1.6348271562136183
x: [0, 0, 1, 0, 0, 1, 0], objective: 12, freq: 1.0953365669464352
x: [0, 0, 1, 0, 0, 0, 1], objective: 12, freq: 1.095336561167124
x: [1, 1, 0, 0, 0, 1, 0], objective: 20, freq: 1.845281431573788
x: [1, 1, 0, 0, 0, 0, 1], objective: 20, freq: 1.842402150698391
x: [1, 0, 1, 0, 0, 1, 0], objective: 20, freq: 1.8910385164520171
x: [1, 0, 1, 0, 0, 0, 1], objective: 20, freq: 1.8817099330143572
x: [1, 0, 0, 1, 0, 1, 0], objective: 14, freq: 1.0957257700045784
x: [1, 0, 0, 1, 0, 0, 1], objective: 14, freq: 1.0957256516544966
x: [1, 0, 0, 0, 1, 1, 0], objective: 14, freq: 1.0918228779340926
x: [1, 0, 0, 0, 1, 0, 1], objective: 14, freq: 1.0918224075836322
x: [0, 1, 0, 1, 0, 1, 0], objective: 14, freq: 1.6578760399218488
x: [0, 1, 0, 1, 0, 0, 1], objective: 14, freq: 1.6578753952514589
x: [0, 1, 0, 0, 1, 1, 0], objective: 14, freq: 1.6535195837045558
x: [0, 1, 0, 0, 1, 0, 1], objective: 14, freq: 1.6535170101352195
x: [0, 0, 1, 1, 0, 1, 0], objective: 14, freq: 1.0962222084428896
x: [0, 0, 1, 1, 0, 0, 1], objective: 14, freq: 1.0962222102207169
x: [0, 0, 1, 0, 1, 1, 0], objective: 14, freq: 1.0958973603892241
x: [0, 0, 1, 0, 1, 0, 1], objective: 14, freq: 1.095897316913733
x: [1, 0, 0, 0, 0, 1, 1], objective: 16, freq: 1.0866894488342247
x: [0, 1, 0, 0, 0, 1, 1], objective: 16, freq: 1.6348734171589885
x: [0, 0, 1, 0, 0, 1, 1], objective: 16, freq: 1.095336615476224
x: [1, 0, 0, 1, 1, 1, 0], objective: 16, freq: 1.0964768558168163
x: [0, 1, 0, 1, 1, 1, 0], objective: 16, freq: 1.6585351932000285
x: [0, 0, 1, 1, 1, 1, 0], objective: 16, freq: 1.0962571950707733
x: [1, 0, 0, 1, 1, 0, 1], objective: 16, freq: 1.0964768056487808
x: [0, 1, 0, 1, 1, 0, 1], objective: 16, freq: 1.658535071646923
x: [0, 0, 1, 1, 1, 0, 1], objective: 16, freq: 1.0962571702895756
x: [1, 0, 0, 1, 0, 1, 1], objective: 18, freq: 1.0957257979242876
x: [0, 1, 0, 1, 0, 1, 1], objective: 18, freq: 1.6578762235017988
x: [0, 0, 1, 1, 0, 1, 1], objective: 18, freq: 1.0962222103608266
x: [1, 0, 0, 0, 1, 1, 1], objective: 18, freq: 1.0918229746959078
x: [0, 1, 0, 0, 1, 1, 1], objective: 18, freq: 1.6535199976086883
x: [0, 0, 1, 0, 1, 1, 1], objective: 18, freq: 1.095897379310057
Valor mínimo da função objetivo: 12
Solução ótima: [0, 1, 0, 0, 0, 1, 0]
Posições dos suportes: [67.5, 134.0]

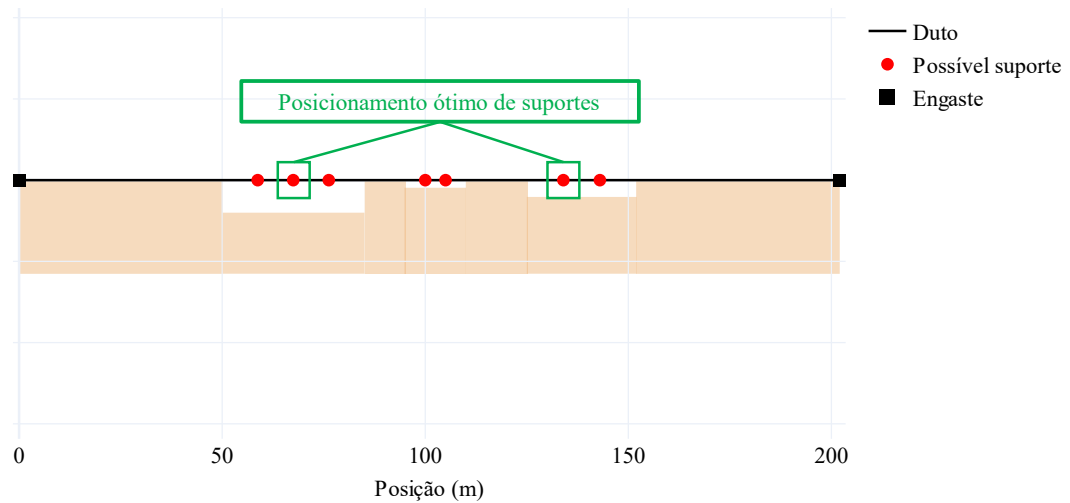
Qtde. de avaliações da função objetivo: 75
Qtde. de avaliações da restrição: 75

```

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Sendo assim, o posicionamento ótimo de suportes respeitando à restrição consiste na instalação de dois suportes nas posições 67,5 m e 134 m (Figura 52).

Figura 52 – Posicionamento ótimo dos suportes para cenário com múltiplos vãos e considerando uma frequência alvo de 1 Hz



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Observa-se que, neste caso, as primeiras soluções viáveis encontradas minimizam o custo, o que levaria a uma economia de tempo abortando-se o processo ao passo que a notificação da primeira solução ter sido encontrada. Entretanto, essa situação não ocorre sempre. Adotando-se a frequência alvo de 1,65 Hz, uma busca mais profunda é necessária para determinar a solução ótima, apesar de soluções viáveis serem encontradas com poucas avaliações da função objetivo (Figura 53).

Nesse cenário, nota-se que até mesmo soluções com mais suportes apresentam custos menores ou iguais aos das primeiras soluções viáveis encontradas no processo. Dessa forma, ressalta-se a capacidade do método de ramificar e limitar aliado à consideração do comportamento da função objetivo. O posicionamento ótimo deste caso é destacado na Figura 54.

Figura 53 – Resultados do método de ramificar e limitar para o cenário com múltiplos vãos e considerando uma frequência alvo de 1,65 Hz

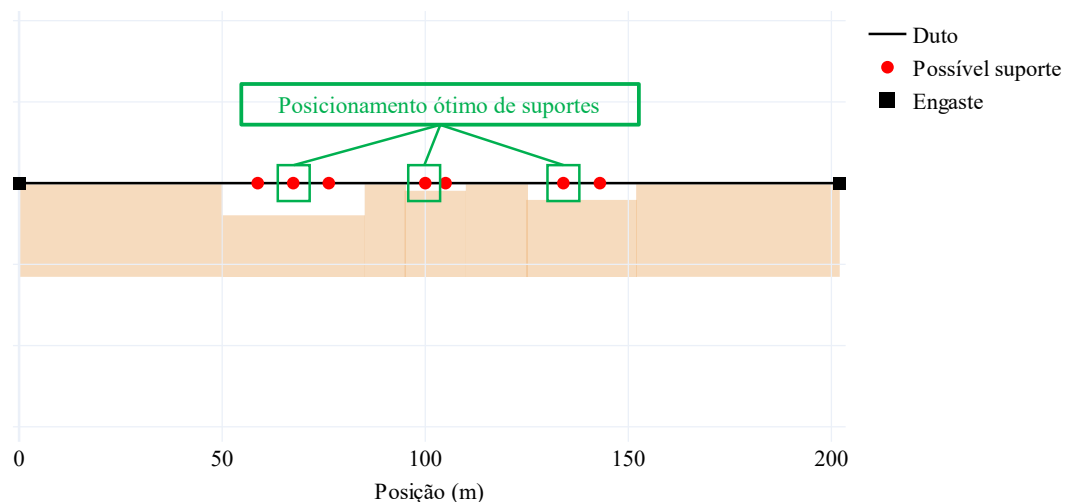
```
Soluções viáveis:
x: [1, 1, 0, 0, 0, 1, 0], objective: 20, freq: 1.845281431573788
x: [1, 1, 0, 0, 0, 0, 1], objective: 20, freq: 1.842402150698391
x: [1, 0, 1, 0, 0, 1, 0], objective: 20, freq: 1.8910385164520171
x: [1, 0, 1, 0, 0, 0, 1], objective: 20, freq: 1.8817099330143572
x: [0, 1, 1, 0, 0, 1, 0], objective: 20, freq: 1.8921386613850704
x: [0, 1, 1, 0, 0, 0, 1], objective: 20, freq: 1.8827104466186855
x: [0, 1, 0, 1, 0, 1, 0], objective: 14, freq: 1.6578760399218488
x: [0, 1, 0, 1, 0, 0, 1], objective: 14, freq: 1.6578753952514589
x: [0, 1, 0, 0, 1, 1, 0], objective: 14, freq: 1.6535195837045558
x: [0, 1, 0, 0, 1, 0, 1], objective: 14, freq: 1.6535170101352195
x: [1, 1, 1, 0, 0, 1, 0], objective: 28, freq: 1.8924440689776143
x: [1, 1, 1, 0, 0, 0, 1], objective: 28, freq: 1.8829820076875219
x: [1, 1, 0, 1, 0, 1, 0], objective: 22, freq: 1.9016121006999094
x: [1, 1, 0, 1, 0, 0, 1], objective: 22, freq: 1.9007283647304383
x: [1, 1, 0, 0, 1, 1, 0], objective: 22, freq: 1.9017151438998998
x: [1, 1, 0, 0, 1, 0, 1], objective: 22, freq: 1.9012468603442985
x: [1, 0, 1, 1, 0, 1, 0], objective: 22, freq: 1.9016128209317051
x: [1, 0, 1, 1, 0, 0, 1], objective: 22, freq: 1.9007320838559532
x: [1, 0, 1, 0, 1, 1, 0], objective: 22, freq: 1.9017170598669282
x: [1, 0, 1, 0, 1, 0, 1], objective: 22, freq: 1.9012610814867186
x: [1, 1, 0, 0, 0, 1, 1], objective: 24, freq: 1.8463120961033972
x: [1, 0, 1, 0, 0, 1, 1], objective: 24, freq: 1.8985689633008764
x: [0, 1, 1, 1, 0, 1, 0], objective: 22, freq: 1.9016128448592713
x: [0, 1, 1, 1, 0, 0, 1], objective: 22, freq: 1.900732149893471
x: [0, 1, 1, 0, 1, 1, 0], objective: 22, freq: 1.9017171092116334
x: [0, 1, 1, 0, 1, 0, 1], objective: 22, freq: 1.9012614448126006
x: [0, 1, 0, 1, 1, 1, 0], objective: 16, freq: 1.6585351932000285
x: [0, 1, 0, 1, 1, 0, 1], objective: 16, freq: 1.658535071646923
x: [0, 1, 0, 1, 0, 1, 1], objective: 18, freq: 1.6578762235017988
x: [0, 1, 0, 0, 1, 1, 1], objective: 18, freq: 1.6535199976086883
x: [0, 1, 0, 1, 1, 1, 1], objective: 20, freq: 1.6585352050562716

Valor mínimo da função objetivo: 14
Solução ótima: [0, 1, 0, 1, 0, 1, 0]
Posições dos suportes: [67.5, 100.0, 134.0]

Qtde. de avaliações da função objetivo: 101
Qtde. de avaliações da restrição: 101
```

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Figura 54 – Posicionamento ótimo dos suportes para cenário com múltiplos vãos e considerando uma frequência alvo de 1,65 Hz

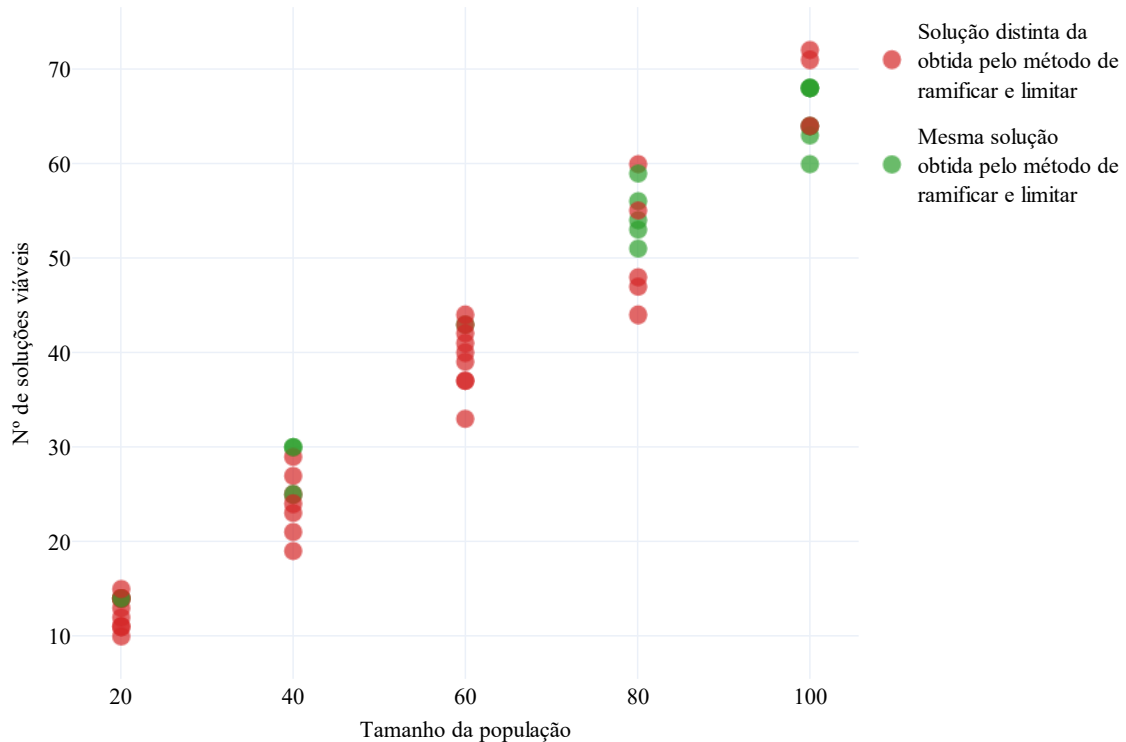


Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

A aplicação do algoritmo genético leva a resultados similares aos do método de ramificar e limitar. No entanto, devido ao critério de parada da implementação proposta pelo pacote Platypus desse algoritmo é determinado pelo tamanho da população, utilizam-se

diferentes tamanhos para avaliar o algoritmo. Além disso, por conta da aleatoriedade inerente ao algoritmo, nem sempre a melhor solução encontrada corresponde à solução obtida pelo método de ramificar e limitar, o que é ilustrado na Figura 55, em que os resultados indicam a quantidade de soluções viáveis para cada tamanho populacional e 10 execuções do algoritmo para cada população.

Figura 55 – Número de soluções viáveis obtidas por tamanhos de população distintos via algoritmo genético



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Dessa forma, observa-se que para problemas configurados de modo que o número de avaliações da função objetivo seja menor do que a quantidade de combinações possíveis, sempre há a possibilidade da solução ótima encontrada no método de ramificar e limitar não tenha sido avaliada e inclusa no conjunto de soluções viáveis resultante do algoritmo genético. Soma-se isso a não consideração do comportamento da função objetivo na evolução do algoritmo, devido a sua natureza meta-heurística, o que resulta em avaliações desnecessárias. Estes resultados são esperados, uma vez que o algoritmo genético não garante a convergência para a solução global (Pinto; Martarelli; Nagano, 2022). Porém, se o objetivo for somente encontrar soluções viáveis, o algoritmo genético mostra-se como um método poderoso, sendo capaz de encontrar soluções com cerca de 84% a menos de avaliações (considerando 20 indivíduos na população) quando comparado à estratégia de busca exaustiva.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo são sintetizadas as principais contribuições e implicações dos desenvolvimentos, bem como são discutidas as limitações do estudo, sugerindo-se ideias para trabalhos futuros.

Este trabalho propôs uma estratégia de otimização do posicionamento de suportes em vãos livres de dutos rígidos submarinos, que estão sujeitos a vibrações induzidas por vórtices. Isso foi realizado com o auxílio de um modelo numérico simplificado e validado para a extração de frequências e modos naturais de vibração do duto, também desenvolvido neste trabalho, em que a primeira frequência é utilizada no processo de otimização.

A aplicação voltada à comparação entre as bases elásticas discreta e contínua demonstrou que ambas podem ser utilizadas para representar o apoio do duto sobre o leito marinho com resultados coerentes. Observou-se que, apesar de pequenas diferenças numéricas nas frequências naturais, os dois modelos são compatíveis considerando-se elementos menores. No entanto, a base contínua oferece uma representação mais realista do contato com o solo, mesmo aumentando o comprimento de elemento.

A análise da influência da inércia rotatória revelou que sua consideração pode impactar as frequências naturais de vibração, já nos primeiros modos. Contudo, a desconsideração da inércia rotatória, prática comum em modelos simplificados, se mostrou aceitável devido à baixa influência nos resultados. Assim, a aplicação reforça a importância de avaliar a pertinência de simplificações adotadas nos modelos numéricos.

A implementação da condição de contorno baseada na solução de uma viga semi-infinita sobre base elástica mostrou-se eficiente para representar o efeito de continuidade estrutural dos trechos do duto não modelados. A estratégia permitiu reduzir o custo computacional, principalmente para a etapa de extração modal, sem comprometer a precisão dos resultados, conforme verificado pela comparação com um modelo mais extenso. Como limitação, destaca-se que essa abordagem pode não ser representativa para modos naturais de vibração de ordem mais alta ou com modelos com os ombros das extremidades de comprimentos muito reduzidos.

A inserção de um ombro intermediário entre dois vãos livres evidenciou sua influência significativa sobre os modos naturais de vibração do sistema. Essa aplicação destacou a importância de considerar a configuração geométrica completa de vãos livres vizinhos para capturar a resposta de um multivão. Por outro lado, observou-se que, em cenários com grande espaçamento entre os vãos, cada vão possui o comportamento de um vão isolado, o que pode justificar simplificações.

A consideração de esforços axiais nos modelos demonstrou impacto direto nas frequências naturais de vibração, com aumento para tração e redução para compressão, conforme previsto teoricamente. Essa aplicação reforça a necessidade de incorporar os esforços axiais provenientes de processos de instalação e operação dos dutos no modelo numérico.

A introdução de suportes no modelo confirmou sua efetividade na elevação das frequências naturais e, portanto, na mitigação do risco de ocorrência de VIV. A abordagem adotada, via imposição de restrições de deslocamento vertical nos nós, mostrou-se simples e compatível com a lógica de modelagem proposta.

A análise da rigidez do solo evidenciou uma forte influência na resposta dinâmica do sistema, com variações significativas nas frequências naturais conforme se alteram os valores de rigidez das molas. A aplicação reforça a importância da caracterização do solo para a modelagem estrutural de dutos em vãos livres. Por outro lado, foi adotado um modelo linear para o solo, o que não contempla efeitos encontrado em condições reais, como os dependentes da deformação ou de ciclos de carregamento.

As aplicações do modelo numérico permitiram consolidar a formulação, verificando sua consistência e a capacidade de representar aspectos relevantes do comportamento estrutural de dutos em vãos livres. Com base nesses resultados, o modelo foi integrado a métodos de otimização, permitindo a identificação de configurações ótimas do posicionamento de suportes para a mitigação de VIV.

O algoritmo genético e o método de ramificar e limitar (*branch-and-bound*) possuem a capacidade de fornecer a configuração ótima de suportes baseada no problema de otimização formulado neste trabalho, com destaque para o segundo, no qual é considerada a monotonicidade da função objetivo, resultando em um processo de busca estruturado e robusto, com a possibilidade de reduzir significativamente o número de avaliações da função objetivo e da restrição imposta. A seguir, são descritas as principais vantagens e desvantagens de cada um, com base no comportamento observado nas simulações realizadas:

- Algoritmo genético
 - Vantagens
 - Adapta-se facilmente a cenários com função objetivo e/ou restrição complexas;
 - Apresenta grandes chances de alcançar regiões promissoras mesmo com tamanhos populacionais reduzidos em um espaço de

busca amplo devido à aleatoriedade e aos operadores de cruzamento e mutação.

- Desvantagens
 - Não garante a solução ótima global devido ao processo estocástico;
 - Variabilidade de resultados devido ao componente aleatório, sendo necessário executar o algoritmo várias vezes para ajustar os parâmetros, como o tamanho da população.
- Método de ramificar e limitar (*branch-and-bound*)
 - Vantagens
 - Encontra a solução ótima percorrendo sistematicamente o espaço de soluções e consegue identificar a melhor solução, desde que o problema seja finito e bem estruturado;
 - Por considerar a monotonicidade da função objetivo, poda ramos inviáveis rapidamente, reduzindo o número de avaliações;
 - O processo de decisão é rastreável e determinístico, ou seja, dado o mesmo conjunto de dados de entrada, o resultado é sempre igual.
 - Desvantagens
 - Pode se tornar inviável computacionalmente para problemas de grande dimensão, pois o número de avaliações cresce de forma exponencial;
 - Depende de restrições fortes, pois caso o valor da frequência alvo não for bem definido, o algoritmo pode explorar o espaço de soluções demasiadamente, atrasando a convergência.

A implantação da estratégia de otimização desenvolvida em projetos ou intervenções de dutos rígidos submarinos em vãos livres tem o potencial de reduzir ou mitigar a quantidade de modos de vibração que contribuem para o dano provocado pelas vibrações induzidas por vórtices, considerando o critério *VIV Avoidance* da DNV-RP-F105. Entretanto, essa consideração pode levar a um número muito elevado de suportes, o que pode ser inviável financeiramente e aumentar a quantidade de pontos de concentração de tensão ao longo do duto.

Além disso, por se tratar de um problema que escala de forma exponencial, pode haver a necessidade de muitas simulações numéricas para completar o processo de busca.

Nesse sentido, as sugestões para trabalhos futuros envolvem:

- Estender o modelo numérico para considerar as duas direções de vibração (*in-line* e *cross-flow*), considerando as não linearidades e aplicando um histórico de carregamento realista;
- Implementar elementos para considerar a formulação contínua da base elástica e condição de contorno de truncamento em programas comerciais de elementos finitos amplamente utilizados para a modelagem de dutos em vão livre, como Abaqus® e Ansys®;
- Integrar o processo de otimização a simuladores comerciais;
- Aprimorar o processo de otimização desenvolvido, incorporando técnicas de computação paralela, explorando outras formas de percorrer a árvore de busca do método de ramificar e limitar, como é discutido por Tseng, Wang e Ling (1995), bem como a aplicação de algoritmos de aprendizado de máquina e inteligência artificial. Além disso, sugere-se considerar a forma do modo natural de vibração no processo de otimização, de modo que soluções com maior probabilidade de viabilidade sejam avaliadas com prioridade.
- Desenvolver uma estratégia de otimização com uma restrição menos conservadora, que envolva o cálculo de vida à fadiga no processo, consistindo num cenário mais realista para aplicação na indústria.

REFERÊNCIAS

- AGÊNCIA NACIONAL DO PETRÓLEO, GÁS NATURAL E BIOCOMBUSTÍVEIS. *In: Encarte de consolidação da produção*: Boletim da produção de petróleo e gás natural. [S. l.], 2024. Disponível em: <https://www.gov.br/anp/pt-br/centrais-de-conteudo/publicacoes/boletins-anp/boletins/arquivos-bmppgn/2024/dezembro.pdf>. Acesso em: 16 fev. 2025.
- ANSYS. **Ansys 2024 R2**. Academic Research Mechanical, Release 18.1, Help System, Coupled Field Analysis Guide, ANSYS, Inc. 2024.
- ARORA, J. S. **Introduction to optimum design**. 4. ed. London: Academic Press, 2017. ISBN 978-0-12-800806-5.
- BAI, Q.; BAI, Y. **Subsea Pipeline Design, Analysis, and Installation**. [S. l.]: Gulf Professional Publishing, 2014.
- BAIOCO, J. S.; BLANCO, J. P. I.; JACOVAZZO, B. M.; ALBRECHT, C. H.; LIMA, B. S. L. P.; JACOB, B. P.; CARDOSO, C. O.; ROCHA, D. M. Synthesis and optimization of submarine pipeline routes considering VIV-induced fatigue on free spans. *In: International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*. American Society of Mechanical Engineers, 2013.
- BLEVINS, R. D. **Flow-Induced Vibration**. 2. ed. Malabar, Florida: Krieger Publishing Company, 2001. ISBN 1-57524-183-8.
- COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E.; WITT, R. J. **Concepts and applications of finite element analysis**. 4. ed. Madison: John Wiley & Sons, 2001. ISBN 978-0-471-35605-9.
- DNV. **DNV-RP-F105: Free spanning pipelines**. 2017.
- DNV. **DNV-RP-F114: Pipe-soil interaction for submarine pipelines**. 2017.
- DNV. **DNV-RP-F116: Integrity management of submarine pipeline systems**. 2017.
- BITTENCOURT, M. L.; GUIMARÃES, A. S.; FEIJÓO, R. A. Elementos finitos orientado por objetos. **Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería**, [s. l.], v. 15, p. 343-355, 1999.
- FISH, J.; BELYTSCHKO, T. **A First Course in Finite Elements**. Chippenham: John Wiley & Sons, 2007. ISBN 978-0-470-03580-1.
- FYRILEIV, O; COLLBERG, L. Influence of pressure in pipeline design: effective axial force. *In: International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*. 2005. p. 629-636.
- FYRILEIV, O; MØRK, K. Structural response of pipeline free spans based on beam theory. *In: International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*. 2002. p. 175-183.

HADKA, D. **Platypus: A Framework for Evolutionary Computing in Python**. Versão 1.4.1. 2024. Software. Disponível em: <https://github.com/Project-Platypus/Platypus>. Acesso em: 16 fev. 2025.

HARRIS, C. R.; MILLMAN, K. J.; VAN DER WALT, S. J.; GOMMERS, R.; VIRTANEN, P.; COUNAPEAU, D.; WIESER, E.; TAYLOR, J.; BERG, S.; SMITH, N. J.; KERN, R.; PICUS, M.; HOYER, S.; VAN KERKWIJK, M. H.; BRETT, M.; HALDANE, A.; FERNÁNDEZ DEL RÍO, J.; WIEBE, M.; PETERSON, P.; GÉRARD-MARCHANT, P.; SHEPPARD, K.; REDDY, T.; WECKESSER, W.; ABBASI, H.; GOHLKE, C.; OLIPHANT, T. E. Array programming with NumPy. **Nature**, v. 585, n. 7825, p. 357-362, 2020.

HETENYI, M. **Beams on elastic foundation: Theory with applications in the fields of civil and mechanical engineering**. London: Oxford University Press, 1946. v. XVI.

HOLLAND, J. H. **Adaptation in Natural and Artificial Systems**. Ann Arbor: University of Michigan Press, 1975.

HUANG, M. W.; ARORA, J. S. Optimal design with discrete variables: some numerical experiments. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 40, n. 1, p. 165-188, 1997.

JENNINGS, Alan. A sparse matrix scheme for the computer analysis of structures. **International Journal of Computer Mathematics**, v. 2, n. 1-4, p. 1-21, 1968.

KOCHENDERFER, M. J.; WHEELER, T. A. **Algorithms for Optimization**. Cambridge: The MIT Press, 2019.

LAND, A. H.; DOIG, A. G. An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems. **Econometrica**, [s. l.], v. 28, n. 3, p. 497-520, 1960.

LIMA, A. J. **Análise de Dutos Submarinos Sujeitos a Vibrações Induzidas por Vórtices**. 2007. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007.

LOPES, R. K. D. **Análise de estruturas sujeitas a vibrações induzidas por vórtices**. 2006. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2006.

LOUREIRO, P. A. **Análise de Vãos Livres em Dutos Rígidos**. 2011. Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado em Engenharia Civil) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.

MAPLE. **Maple 18**. Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc., Waterloo, Ontario. 2018.

MEDVIDOVIC, N.; ROSENBLUM, D. S.; REDMILES, D. F.; ROBBINS, J. E. Modeling software architectures in the unified modeling language. **ACM Transactions on Software Engineering and Methodology (TOSEM)**, v. 11, n. 1, p. 2-57, 2002.

MEISINGSET, H.; HOVE, J.; OLSEN, G. Optimization of pipeline routes. *In: ISOPE International Ocean and Polar Engineering Conference*. ISOPE, 2004.

MORISON, J. R.; JOHNSON, J. W.; SCHAAF, S. A. The force exerted by surface waves on piles. **Journal of Petroleum Technology**, v. 2, n. 05, p. 149-154, 1950.

OLIVEIRA, A. E. C. **Vibração de dutos submarinos com apoio em fundação elástica descontínua**. 2016. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

OPENAI. **ChatGPT**. Versão 4o. San Francisco, 2024. Disponível em: <https://chatgpt.com/>. Acesso em: 17 fev. 2025.

PARK, G. J. **Analytic Methods for Design Practice**. London: Springer Science & Business Media, 2007. ISBN 978-1-84628-472-4.

PEREIRA, A.; BOMFIMSILVA, C.; FRANCO, L.; TARDELLI, L.; EIGBE, U. In-place free span assessment using finite element analysis. *In: International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*. 2008. p. 191-196.

PETROBRAS. *In: Complexo de Energias Boaventura da Petrobras vai ofertar 21 milhões de m³ de gás natural*. [S. l.], 2024. Disponível em: <https://agencia.petrobras.com.br/w/negocio/complexo-de-energias-boaventura-da-petrobras-vai-ofertar-21-milhoes-de-m-de-gas-natural#:~:text=A%20Petrobras%20inaugurou%2C%20nesta%20sexta,sal%20da%20Bacia%20de%20Santos>. Acesso em: 16 fev. 2025.

PETROBRAS. *In: Rota 3*. [S. l.], 2022. Disponível em: <https://comunicabaciadesantos.petrobras.com.br/empreendimentos/rota-3>. Acesso em: 16 fev. 2025.

PINTO, A. R. F.; MARTARELLI, N. J.; NAGANO, M. S. Algoritmo Genético: Principais Gaps, Trade-offs e Perspectivas para Futuras Pesquisas. **Trends in Computational and Applied Mathematics**, v. 23, n. 3, p. 413-438, 2022.

RANGEL, R. L.; MARTHA, L. F. LESM—An object-oriented MATLAB program for structural analysis of linear element models. **Computer Applications in Engineering Education**, v. 27, n. 3, p. 553-571, 2019.

RIBEIRO, R. M. **Comparação entre metodologias para recomendação de vão livre admissível em dutos rígidos submarinos**. 2017. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

ROCHA, D. M.; CARDOSO, C. O.; BORGES, R. G.; BAIOCO, J. S.; COUTINHO, D. C. S.; ALBRECHT, C. H.; JACOB, B. P. Optimization of submarine pipeline routes considering slope stability. *In: Offshore Technology Conference*. OTC, 2015.

SANTOS, C. M. P. M. **Análise de Estruturas Esbeltas Offshore Sujeitas a Vibrações Induzidas Por Vórtices (VIV)**. 2005. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2005.

SILVA, W. M. **Modelagem e implementação de uma ferramenta computacional integrada para análise de fadiga em dutos submarinos em vão-livre**. 2021. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Centro de Tecnologia, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2021.

SINGH, R. H.; MAURYA, S.; TRIPATHI, T.; NARULA, T.; SRIVASTAV, G. Movie Recommendation System Using Cosine Similarity and KNN. **International Journal of Engineering and Advanced Technology**, v. 9, ed. 5, p. 556-559, 2020.

SMITH, M. **ABAQUS/Standard User's Manual**, Version 6.9. Providence, RI: Dassault Systèmes Simulia Corp, 2009.

SOLLUND, H.; VEDELD, K.; HELLESLAND, J.; FYRILEIV, O. Dynamic response of multi-span offshore pipelines. **Marine Structures**. v. 39, p. 174-197, 2014.

SPARKS, C. P. The Influence of Tension, Pressure and Weight on Pipe and Riser Deformations and Stresses. **Journal of Energy Resources Technology**, [s. l.], v. 106, ed. 1, 1984.

STOLPE, M. Truss optimization with discrete design variables: a critical review. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 53, p. 349-374, 2016.

SUMER, B. M.; FREDSE, J. **Hydrodynamics around cylindrical structures**. [S. l.]: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2006. v. 26. ISBN 981-270-039-0.

TSENG, C. H.; WANG, L. W.; LING, S. F. Enhancing branch-and-bound method for structural optimization. **Journal of Structural Engineering**, v. 121, n. 5, p. 831-837, 1995.

VALENÇA, J. P. V. **Estudo paramétrico sobre vida à fadiga de dutos em vãos livres submetidos à VIV**. 2020. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Centro de Tecnologia, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2020.

VEDELD, K.; SOLLUND, H.; FYRILEIV, O. Free Span Design Development: Experience with the New Revision of DNVGL-RP-F105. *In*: **International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering**. American Society of Mechanical Engineers, 2018.

VIRTANEN, P.; GOMMERS, R.; OLIPHANT, T. E.; HABERLAND, M.; REDDY, T.; COURNAPEAU, D.; BUROVSKI, E.; PETERSON, P.; WECKESSER, W.; BRIGHT, J.; VAN DER WALT, S. J.; BRETT, M.; WILSON, J.; MILLMAN, K. J.; MAYOROV, N.; NELSON, A. R. J.; JONES, E.; KERN, R.; LARSON, E.; CAREY, C. J.; POLAT, İ.; FENG, Y.; MOORE, E. W.; VANDERPLAS, J.; LAXALDE, D.; PERKTOLD, J.; CIMRMAN, R.; HENRIKSEN, I.; QUINTERO, E. A.; HARRIS, C. R.; ARCHIBALD, A. M.; RIBEIRO, A. H.; PEDREGOSA, F.; VAN MULBREGT, P. SciPy 1.0: fundamental algorithms for scientific computing in Python. **Nature Methods**, v. 17, n. 3, p. 261-272, 2020.

APÊNDICE A – Folha de trabalho do Maple® contendo deduções acerca da formulação dos elementos implementados

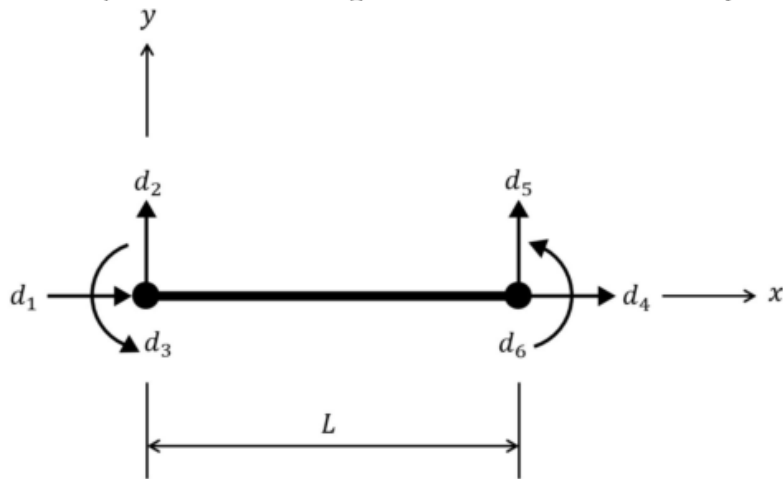
Universidade Federal de Alagoas
 Centro de Tecnologia
 Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil
 Aluno: Matheus Amancio Miranda
 Orientador: Prof. Dr. Eduardo Nobre Lages
 Coorientador: Prof. Dr. Adeildo Soares Ramos Júnior

Apêndice A

restart :

with(Student[VectorCalculus]) :

A.1 Dedução das matrizes de rigidez e de massa do elemento de pórtico plano



Funções de interpolação do elemento no sistema de coordenadas local (figura acima)

$$\xi := \frac{x}{L} :$$

$$N1 := 1 - \xi :$$

$$N4 := \xi :$$

$$N2 := 1 - 3 \cdot \xi^2 + 2 \cdot \xi^3 :$$

$$N3 := L \cdot (\xi - 2 \cdot \xi^2 + \xi^3) :$$

$$N5 := 3 \cdot \xi^2 - 2 \cdot \xi^3 :$$

$$N6 := L \cdot (-\xi^2 + \xi^3) :$$

Interpolação dos deslocamentos longitudinal e transversal de um ponto situado no eixo da barra

$$u := N1 \cdot d1(t) + N4 \cdot d4(t) :$$

$$v := N2 \cdot d2(t) + N3 \cdot d3(t) + N5 \cdot d5(t) + N6 \cdot d6(t) :$$

Deslocamentos longitudinal e transversal de um ponto qualquer da barra

$$uP := u - y \cdot \text{diff}(v, x) :$$

$$vP := v :$$

Deformação específica longitudinal de um ponto qualquer da barra

$$\varepsilon xP := \text{diff}(uP, x) :$$

Energia específica de deformação de um ponto qualquer da barra

$$UeP := \frac{1}{2} \cdot E \cdot (\varepsilon xP)^2 :$$

Energia de deformação da barra

$$U := \text{int} \left((UeP - \text{coeff}(UeP, y) \cdot y - \text{coeff}(UeP, y, 2) \cdot y^2) \cdot A + \text{coeff}(UeP, y, 2) \cdot I_{zz}, x=0..L \right) :$$

Matriz de rigidez do elemento

$$K := \text{Hessian}(\text{subs}(d1(t) = d1, d2(t) = 2, d3(t) = d3, d4(t) = d4, d5(t) = d5, d6(t) = d6, U), [d1, d2, d3, d4, d5, d6])$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4EI_{zz}}{L} & 0 & -\frac{6EI_{zz}}{L^2} & \frac{2EI_{zz}}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_{zz}}{L^2} & 0 & \frac{12EI_{zz}}{L^3} & -\frac{6EI_{zz}}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{2EI_{zz}}{L} & 0 & -\frac{6EI_{zz}}{L^2} & \frac{4EI_{zz}}{L} \end{bmatrix}$$

Velocidades longitudinal e transversal de um ponto qualquer da barra

$$duPdt := \text{diff}(uP, t) :$$

$$dvPdt := \text{diff}(vP, t) :$$

Energia cinética específica de um ponto qualquer da barra

$$T0 := \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (duPdt^2 + dvPdt^2) :$$

Energia cinética da barra

$$T := \text{simplify}(\text{int}((T0 - \text{coeff}(T0, y) \cdot y - \text{coeff}(T0, y, 2) \cdot y^2) \cdot A + \text{coeff}(T0, y, 2) \cdot I_{zz}, x=0..L)) :$$

Matriz de massa do elemento

$$M := \text{simplify}(\text{Hessian}(\text{subs}(\text{diff}(d1(t), t) = v1, \text{diff}(d2(t), t) = v2, \text{diff}(d3(t), t) = v3, \text{diff}(d4(t), t) = v4, \text{diff}(d5(t), t) = v5, \text{diff}(d6(t), t) = v6, T), [v1, v2, v3, v4, v5, v6]))$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \rho LA, 0, 0, \frac{1}{6} \rho LA, 0, 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
& \left[0, \frac{1}{35} \frac{\rho (13 A L^2 + 42 I_{zz})}{L}, \frac{1}{210} \rho (11 A L^2 + 21 I_{zz}), 0, \frac{3}{70} \frac{\rho (3 A L^2 - 28 I_{zz})}{L}, \right. \\
& \left. - \frac{1}{420} \rho (13 A L^2 - 42 I_{zz}) \right], \\
& \left[0, \frac{1}{210} \rho (11 A L^2 + 21 I_{zz}), \frac{1}{105} \rho L (A L^2 + 14 I_{zz}), 0, \frac{1}{420} \rho (13 A L^2 - 42 I_{zz}), \right. \\
& \left. - \frac{1}{420} \rho L (3 A L^2 + 14 I_{zz}) \right], \\
& \left[\frac{1}{6} \rho L A, 0, 0, \frac{1}{3} \rho L A, 0, 0 \right], \\
& \left[0, \frac{3}{70} \frac{\rho (3 A L^2 - 28 I_{zz})}{L}, \frac{1}{420} \rho (13 A L^2 - 42 I_{zz}), 0, \frac{1}{35} \frac{\rho (13 A L^2 + 42 I_{zz})}{L}, \right. \\
& \left. - \frac{1}{210} \rho (11 A L^2 + 21 I_{zz}) \right], \\
& \left[0, -\frac{1}{420} \rho (13 A L^2 - 42 I_{zz}), -\frac{1}{420} \rho L (3 A L^2 + 14 I_{zz}), 0, -\frac{1}{210} \rho (11 A L^2 + 21 I_{zz}), \right. \\
& \left. \frac{1}{105} \rho L (A L^2 + 14 I_{zz}) \right] \Bigg]
\end{aligned}$$

Matriz de massa do elemento desconsiderando a inércia rotatória

$$subs(I_{zz} = 0, M) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \rho L A & 0 & 0 & \frac{1}{6} \rho L A & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13}{35} \rho L A & \frac{11}{210} \rho L^2 A & 0 & \frac{9}{70} \rho L A & -\frac{13}{420} \rho L^2 A \\ 0 & \frac{11}{210} \rho L^2 A & \frac{1}{105} \rho L^3 A & 0 & \frac{13}{420} \rho L^2 A & -\frac{1}{140} \rho L^3 A \\ \frac{1}{6} \rho L A & 0 & 0 & \frac{1}{3} \rho L A & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{70} \rho L A & \frac{13}{420} \rho L^2 A & 0 & \frac{13}{35} \rho L A & -\frac{11}{210} \rho L^2 A \\ 0 & -\frac{13}{420} \rho L^2 A & -\frac{1}{140} \rho L^3 A & 0 & -\frac{11}{210} \rho L^2 A & \frac{1}{105} \rho L^3 A \end{bmatrix}$$

A.2 Dedução das matrizes de rigidez das bases elástica discreta e contínua

Base elástica discreta

Energia de deformação

$$UBED := \frac{ka \cdot \left(\frac{L}{2}\right) \cdot (d1^2 + d4^2)}{2} + \frac{kt \cdot \left(\frac{L}{2}\right) \cdot (d2^2 + d5^2)}{2} :$$

Matriz de rigidez da base elástica discreta

$$KBED := \text{Hessian}(UBED, [d1, d2, d3, d4, d5, d6]) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} ka L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} kt L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} ka L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} kt L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Base elástica contínua

Energia de deformação da base elástica contínua

$$UBEC := \text{int}\left(\frac{1}{2} \cdot (ka \cdot u^2 + kt \cdot v^2), x=0..L\right) :$$

Matriz de rigidez da base elástica contínua

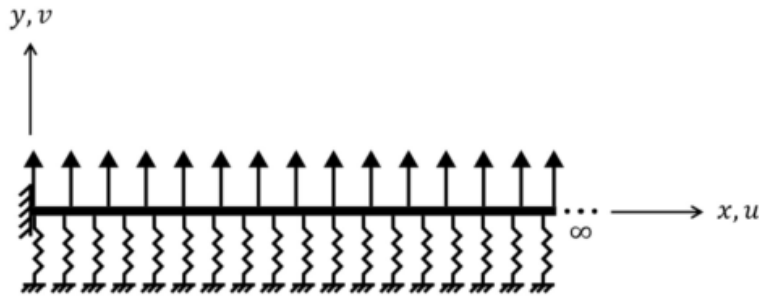
$$KBEC := \text{Hessian}(\text{subs}(d1(t)=d1, d2(t)=d2, d3(t)=d3, d4(t)=d4, d5(t)=d5, d6(t)=d6, \\ UBE), [d1, d2, d3, d4, d5, d6])$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} ka L & 0 & 0 & \frac{1}{6} ka L & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13}{35} kt L & \frac{11}{210} kt L^2 & 0 & \frac{9}{70} kt L & -\frac{13}{420} kt L^2 \\ 0 & \frac{11}{210} kt L^2 & \frac{1}{105} kt L^3 & 0 & \frac{13}{420} kt L^2 & -\frac{1}{140} kt L^3 \\ \frac{1}{6} ka L & 0 & 0 & \frac{1}{3} ka L & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{70} kt L & \frac{13}{420} kt L^2 & 0 & \frac{13}{35} kt L & -\frac{11}{210} kt L^2 \\ 0 & -\frac{13}{420} kt L^2 & -\frac{1}{140} kt L^3 & 0 & -\frac{11}{210} kt L^2 & \frac{1}{105} kt L^3 \end{bmatrix}$$

A.3 Dedução das matrizes de massa e de rigidez e das forças nodais equivalentes do elemento de truncamento

restart :

with(Student[VectorCalculus]) :



assume($EA > 0, EI > 0, ka > 0, kt > 0, \rho a > 0, \rho t > 0$) :

Obtenção da solução para os deslocamentos longitudinal e transversal

$uTRU := dsolve(\{EA \cdot diff(u(x), x\$2) = ka \cdot u(x), u(0) = u0, u(\infty) = 0\}, u(x)) :$

$vTRU := dsolve(\{EI \cdot diff(v(x), x\$4) = -kt \cdot v(x), v(0) = v0, D(v)(0) = \theta0, v(\infty) = 0, D(v)(\infty) = 0\}, v(x)) :$

Energia de deformação

$$UTRU := \int \left(\frac{EA}{2} \cdot diff(rhs(uTRU), x)^2 + \frac{EI}{2} \cdot diff(rhs(vTRU), x\$2)^2 + \frac{ka \cdot rhs(uTRU)^2}{2} + \frac{kt \cdot rhs(vTRU)^2}{2}, x=0 .. \infty \right) :$$

Matriz de rigidez

$KTRU := simplify(Hessian(UTRU, [u0, v0, \theta0])) =$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{ka} \sqrt{EA} & 0 & 0 \\ 0 & EI^{1/4} kt^{3/4} \sqrt{2} & \sqrt{kt} \sqrt{EI} \\ 0 & \sqrt{kt} \sqrt{EI} & EI^{3/4} kt^{1/4} \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Energia cinética

$$TTRU := \int \left(\frac{\rho a}{2} \cdot rhs(uTRU)^2 + \frac{\rho t}{2} \cdot rhs(vTRU)^2, x=0 .. \infty \right) :$$

Matriz de massa

$MTRU := simplify(Hessian(TTRU, [u0, v0, \theta0])) =$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{\rho \alpha \sqrt{EA}}{\sqrt{ka}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \frac{EI^{1/4} \rho \sqrt{2}}{kt^{1/4}} & \frac{1}{2} \frac{\sqrt{EI} \rho}{\sqrt{kt}} \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{\sqrt{EI} \rho}{\sqrt{kt}} & \frac{1}{4} \frac{EI^{3/4} \rho \sqrt{2}}{kt^{3/4}} \end{bmatrix}$$

Dedução das forças nodais equivalentes considerando uma carga distribuída uniformemente ao longo da barra (e. g., peso próprio submerso)

restart :

with(Student[VectorCalculus]) :

assume(EA > 0, EI > 0, kt > 0)

*sv := dsolve({EI·diff(v(x), x\$4) = -kt·v(x) - q, v(0) = 0, D(v)(0) = 0, v(∞) = 0, D(v)(∞) = 0},
v(x)) :*

M := EI·diff(rhs(sv), x\$2) :

simplify(subs(x = 0, M)) = $-\frac{\sqrt{EI} q}{\sqrt{kt}}$

V := EI·diff(rhs(sv), x\$3) :

simplify(subs(x = 0, V)) = $\frac{EI^{1/4} q \sqrt{2}}{kt^{1/4}}$

APÊNDICE B – Exemplo do arquivo de entrada do programa computacional desenvolvido

```

{
  "NAME": "Exemplo",
  "DESCRIPTION": "Caso de exemplo",
  "CROSS_SECTION": {
    "OUTSIDE_DIAMETER": 0.27305,
    "WALL_THICKNESS": 0.0127
  },
  "MATERIAL": {
    "YOUNG_MODULUS": 206000000000.0,
    "POISSON_RATIO": 0.29,
    "DENSITY": 7850,
    "WATER_DENSITY": 1025,
    "CONTENT_DENSITY": 200,
    "SOIL_DENSITY": 1500
  },
  "BOUNDARY_ENDS": "FIXED",
  "REFERENCE_ELEMENT_LENGTH": 0.25,
  "SECTIONS": [
    {
      "LENGTH": 4,
      "TYPE": "SPAN",
      "VERTICAL_STIFFNESS": 0,
      "AXIAL_STIFFNESS": 0,
      "COST": 1
    }
  ],
  "SOIL_SPRING_MODELING": "CONTINUOUS",
  "INERTIA_COEFFICIENTS": {
    "AXIAL": 0.1,
    "TRANSVERSAL": 1.0
  },
  "INITIAL_POSITION": 0.0,
  "USE_ROTATORY_INERTIA": true,
  "AXIAL_FORCE": 100E3,
  "SUPPORTS_POSITIONS": [2]
}

```

Nome do caso

Descrição do caso

Dados geométricos

Dados ambientais e dos materiais

Tipo de condição de contorno das extremidades

Comprimento base do elemento para geração da malha

Dados dos trechos (ombros e vãos). Note que o vão possui um campo para informar o custo utilizado no módulo de otimização

Tipo da modelagem do solo

Coefficientes de inércia

Posição inicial do duto (útil para gráficos)

Indicador para considerar ou não a inércia rotatória

Força axial (positiva em tração)

Lista de posições de suportes

APÊNDICE C – Diagrama de classes do programa computacional desenvolvido

