UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ALEXSANDER CLER TAVEIROS SILVA

O MATERIAL CUISENAIRE E O MODELO DE BARRAS DE SINGAPURA COMO RECURSO DIDÁTICO PARA AUXILIAR NO PROCESSO ENSINO-APRENDIZAGEM DE OPERAÇÕES COM FRAÇÕES NO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Maceió - AL
2021

ALEXSANDER CLER TAVEIROS SILVA

O MATERIAL CUISENAIRE E O MODELO DE BARRAS DE SINGAPURA COMO RECURSO DIDÁTICO PARA AUXILIAR NO PROCESSO ENSINO-APRENDIZAGEM DE OPERAÇÕES COM FRAÇÕES NO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado para o Instituto de Matemática
Orientadora: Profa. Dra Cláudia de Oliveira Lozada

Maceió - AL
2021

FOLHA DE CATALOGAÇÃO DA BIBLIOTECA

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

S586m Silva, Alexsander Cler Taveiros.
O material *cuisenaire* e o modelo de barras de Singapura como recurso didático para auxiliar no processo ensino-aprendizagem de operações com frações no 6º ano do ensino fundamental / Alexsander Cler Taveiros Silva. - 2021.
256 f. : il.

Orientadora: Cláudia de Oliveira Lozada.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática : Licenciatura) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2021.

Bibliografia: f. 235-236.
Apêndices: f. 237-256.

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Material didático. 3. Frações. 4. Formação de professores. I. Título.

CDU: 372.851.113

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus pais, minha orientadora e a todos que me ajudaram nessa etapa.

AGRADECIMENTOS

“É preciso agradecer o tempo
Que se fez barulho
Que se fez silêncio
É preciso agradecer as flores
Que se fez poesia
Que se fez essência
É preciso agradecer a sincronicidade
Que se fez presente
Que se faz presente
É preciso agradecer a Deus
Que faz o tempo, as flores, a sincronicidade
É preciso agradecer a vida (..)” (S. Pavarin)

Agradeço a minha família pelo apoio constante e pela oportunidade de poder estudar na Universidade Federal de Alagoas.

Agradeço imensamente à minha orientadora, a Profa Dra Cláudia de Oliveira Lozada, pelo suporte ao longo de todo o processo que percorremos para a pesquisa e escrita deste trabalho, sobretudo, por contribuir para a execução do curso que foi objeto de análise deste trabalho e pelas publicações derivadas de resultados parciais em eventos científicos, compartilhando conhecimentos. Esta pesquisa foi desenvolvida durante o período pandêmico de 2020, com inúmeros desafios surgidos em virtude do novo cenário, sendo estes enfrentados e vencidos, tendo em vista deixar com este trabalho uma contribuição significativa para a formação de professores que ensinam Matemática na Educação Básica e para as práticas docentes relativas ao processo ensino-aprendizagem de frações no Ensino Fundamental.

Agradeço aos professores da banca examinadora, Ediel Azevedo Guerra e Amauri da Silva Barros que se propuseram a contribuir com este trabalho participando da banca examinadora. Destaco o papel do Prof Amauri na divulgação do Modelo de Barras de Singapura nas aulas de projetos integradores no Instituto de Matemática, que foram importantes para lançar um novo olhar sobre as práticas docentes.

Agradeço aos meus professores pela contribuição com a minha formação.

Agradeço aos docentes que contribuíram para esta pesquisa respondendo aos questionários e participando do curso que foi desenvolvido na modalidade remota.

EPÍGRAFE

Até os jovens se cansam e ficam exaustos, e os moços tropeçam e caem; mas aqueles que esperam no SENHOR renovam as suas forças. Voam alto como águias; correm e não ficam exaustos, andam e não se cansam.

Isaías 40:30-31

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo analisar as contribuições do Material Cuisenaire e do Modelo de Barras de Singapura para o ensino de operações com frações no sexto ano do Ensino Fundamental como recursos didáticos potencialmente significativos a serem utilizados pelos professores que ensinam Matemática. Para tanto, realizamos uma pesquisa qualitativa com levantamento bibliográfico e documental e aplicação de um minicurso para professores do Ensino Fundamental sobre o uso do Material Cuisenaire e do Modelo de Barras de Singapura para o ensino de soma e subtração de frações. O referencial teórico buscou caracterizar os recursos didáticos e suas potencialidades, identificar como ocorre o ensino de frações e as dificuldades enfrentadas por professores e alunos, apresentar os diferentes significados de fração, pontuar como os documentos curriculares apresentam o conteúdo de frações e quais conhecimentos docentes são necessários para o ensino de frações. Por sua vez, durante o minicurso foram coletados dados por meio de questionários e atividades, com a finalidade de verificar a aprendizagem dos professores acerca do uso dos materiais para o ensino de soma e subtração de frações. Os resultados demonstraram que a maioria dos professores não teve dificuldade em utilizar os materiais nas operações com frações, afirmando que as representações pictóricas facilitam a aprendizagem da soma e subtração, além de perceberem a importância das frações equivalentes nos processos operatórios. Por sua vez, identificamos que apesar de termos abordado na parte teórica do curso os diferentes significados de fração, ainda prevalece o significado de parte-todo de frações e dificuldades em certos procedimentos matemáticos, indicando que o conhecimento especializado do conteúdo ainda está formação, sobretudo, para aqueles professores que são pedagogos, cujas respostas ao questionário destacam este aspecto. Por fim, os professores ressaltaram que o minicurso foi importante para sua formação e que a maioria utilizaria os recursos para o ensino das operações de soma e subtração em suas aulas. Assim, os resultados da pesquisa comprovaram a hipótese de que os recursos didáticos – Material Cuisenaire e Modelo de Barras de Singapura - de fato podem auxiliar no ensino da soma e subtração de frações, proporcionando uma visualização dos procedimentos que geralmente são ocultados na apresentação tradicional dessas operações.

Palavras-Chave: Ensino de Matemática; Recursos Didáticos; Material Concreto; Operações com Frações; Formação de Professores.

ABSTRACT

This paper aims to analyze the contributions of the Material Cuisenaire and the Singapore Bar Model for teaching operations with fractions in the sixth year of elementary school as potentially significant didactic resources to be used by teachers who teach Mathematics. Therefore, we carried out a qualitative research with bibliographic and documental survey and application of a short course for elementary school teachers on the use of the Cuisenaire Material and the Singapore Bar Model for teaching the addition and subtraction of fractions. The theoretical framework sought to characterize the teaching resources and their potential, identify how the teaching of fractions occurs and the difficulties faced by teachers and students, present the different meanings of fraction, point out how the curriculum documents present the content of fractions and what teaching knowledge is necessary for teaching fractions. In turn, during the short course, data were collected through questionnaires and activities, in order to verify the teachers' learning about the use of materials for teaching the addition and subtraction of fractions. The results showed that most teachers had no difficulty in using the materials in operations with fractions, stating that pictorial representations facilitate the learning of addition and subtraction, in addition to realizing the importance of equivalent fractions in the operative processes. In turn, we identified that despite having addressed in the theoretical part of the course the different meanings of fraction, the meaning of part-whole of fractions still prevails and difficulties in certain mathematical procedures, indicating that specialized knowledge of the content is still in formation, especially , for those teachers who are pedagogues, whose answers to the questionnaire highlight this aspect. Finally, the teachers emphasized that the short course was important for their training and that most would use the resources to teach addition and subtraction operations in their classes. Thus, the research results confirmed the hypothesis that teaching resources - Material Cuisenaire and Singapore Bar Model - can in fact help in teaching the addition and subtraction of fractions, providing a view of the procedures that are usually hidden in the traditional presentation of these operations.

Keywords: Mathematics Teaching; Didactic Resources; Concrete Material; Operations with Fractions; Teacher training.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS E QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

É perceptível que na Educação Básica ainda se apresentam problemas no que diz respeito ao processo ensino-aprendizagem das frações, sendo que os alunos ainda nos anos iniciais do Ensino Fundamental manifestam dificuldades em relação à compreensão da noção de fração e suas operações, dificuldades estas que se estendem para os anos finais do Ensino Fundamental (no caso o 6º ano) quando as operações com frações, como adição e subtração, ocorrem com denominadores diferentes e a “compreensão” da divisão e multiplicação de frações se resumem a procedimentos, sem relação com a representação pictórica, como apontado por Ponte e Quaresma (2011).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), um documento curricular do final da década de 90, já alertava para as dificuldades que os alunos iriam enfrentar em anos posteriores com os números racionais, caso o conteúdo de frações não fosse desenvolvido de modo adequado nos anos iniciais:

> Embora as representações fracionárias e decimais dos números racionais sejam conteúdos desenvolvidos nos ciclos iniciais, o que se constata é que os alunos chegam ao terceiro ciclo sem compreender os diferentes significados associados a esse tipo de número e tampouco os procedimentos de cálculo, em especial, os que envolvem os racionais na forma decimal (BRASIL, 1998, p. 100).

Por outro lado, atentar-se para a forma com que os alunos efetuam os registros (DUVAL, 2003) com suas representações (LESH, POST e BEHR, 1987) podem sinalizar dificuldades em relacionar o conceito trazido pelo objeto matemático em questão, que são as frações. Para tanto, se observarmos a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018), novo documento curricular, o conteúdo de frações é previsto no 4º ano do Ensino Fundamental na unidade temática “Números”, com os objetos de conhecimento números racionais - frações unitárias mais usuais (1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/10 e 1/100) e a habilidade de reconhecer as frações unitárias mais usuais (1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/10 e 1/100) como unidades de medida menores do que uma unidade, utilizando a reta numérica como recurso. No 5º ano, as frações aparecem novamente previstas na unidade temática “Números” nos objetos de conhecimentos que dizem respeito à representação fracionária dos números racionais, operações com números racionais, ordenação, comparação e equivalência de frações e cálculo de porcentagem.

Se o documento curricular, a BNCC (BRASIL, 2018) prevê que os alunos devem aprender essas noções sobre números racionais e frações nos anos iniciais (4º e 5º ano) porque então apresentam dificuldades no 6º ano do Ensino Fundamental quando as frações são retomadas? Lançamos como uma hipótese para tentar responder a essa indagação, a de que as dificuldades manifestadas no 6º ano na compreensão do conteúdo de frações podem decorrer da forma como esse conteúdo é abordado, de modo meramente procedimental e sem material didático concreto, o que certamente prejudica a construção de significado.

Por outro lado, muitas vezes o professor desconsidera os conhecimentos prévios que os alunos trazem, que são elementos ricos para desencadear novas aprendizagens. Tendo em vista a busca por recursos didáticos para melhorar o processo ensino aprendizagem de frações, principalmente em relação à resolução de problemas, este trabalho apresenta os resultados de uma pesquisa que tem por finalidade apresentar o Material Cuisenaire e o Modelo de Barras de Singapura como recursos didáticos potencialmente significativos para auxiliar na compreensão da noção de fração (parte e todo) e suas operações no 6º ano do Ensino Fundamental.

Para tanto, procedemos a uma pesquisa qualitativa com base em um estudo de caso, com revisão de literatura sobre o ensino de frações e o conhecimento especializado para o ensino, bem como sobre as características do Material Cuisenaire e do Modelo de Barras de Singapura para entender melhor como se estruturam e como podem ser utilizados. Juntamente à revisão de literatura, analisamos o Referencial Curricular do Estado de Alagoas (ALAGOAS, 2019) e o que a BNCC (BRASIL, 2018) dispõem sobre o ensino de frações, bem como as competências e as habilidades que se referem ao conteúdo. Em seguida, apresentamos a análise do estudo de caso, realizado por meio de um curso de formação continuada com a proposta de utilização do Material Cuisenaire e do Modelo de Barras de Singapura no ensino da soma e subtração de frações no 6º ano do Ensino Fundamental. Por fim, apresentamos as considerações finais acerca da pesquisa realizada e as contribuições deste estudo.

CAPÍTULO I

TEMA E CARACTERIZAÇÃO DO PROBLEMA DE PESQUISA

Neste capítulo iremos apresentar a gênese da pesquisa, com seus componentes basilares que são o problema de pesquisa e a hipótese de pesquisa. Seguimos, determinando o objetivo geral e os objetivos específicos a serem alcançados no decorrer do trabalho, bem como a justificativa e a relevância para a realização desta pesquisa.

1.1. Delimitação do Tema

Esta pesquisa está inserida na linha de pesquisa de “Formação de Professores que ensinam Matemática” e abordará o tema “Recursos didáticos utilizados no ensino de frações”. Visando restringir o âmbito de análise do tema, o delimitamos de modo que o mesmo tratará da utilização do Material Cuisenaire e o Modelo de Barras de Singapura como recurso didático para auxiliar na resolução de problemas com frações no sexto ano do Ensino Fundamental.

Sendo assim, o título desta pesquisa é “O Material Cuisenaire e o Modelo de Barras de Singapura como recurso didático para auxiliar no processo ensino-aprendizagem de operações com frações no sexto ano do Ensino Fundamental”.

1.2. Objetivo Geral

A presente pesquisa tem como objetivo analisar as contribuições do Material Cuisenaire e do Modelo de Barras de Singapura para o ensino de operações com frações no sexto ano do Ensino Fundamental como recursos didáticos potencialmente significativos a serem utilizados pelos professores que ensinam Matemática.

1.3. Objetivos Específicos

Com este trabalho pretendemos:

- Identificar os diferentes significados da fração.

- Examinar como a Base Nacional Comum Curricular coloca o conteúdo de frações no Ensino Fundamental, identificando as competências e habilidades previstas.

- Realizar uma revisão de literatura sobre o Material Cuisenaire e o Modelo de Barras de Singapura para compreender melhor como se estruturam e como eles podem ser utilizados de modo a contribuir para o ensino de frações.

- Analisar o Material Cuisenaire e o Modelo de Barras de Singapura e como podem ser utilizados na resolução de situações-problema com operações de soma e subtração de frações, considerando a noção de parte de um todo.

- Caracterizar o conhecimento especializado do conteúdo e sua importância para as práticas docentes.

- Elaborar uma sequência didática para o ensino de soma e subtração de frações com o Material Cuisenaire e com o Modelo de Barras de Singapura no 6º ano do Ensino Fundamental.

- Aplicar a sequência para os professores que ensinam Matemática em um curso de formação continuada e identificar a eficácia dos materiais concretos e as dificuldades dos professores com a utilização.

1.4. Problema de Pesquisa

A questão de pesquisa ficou delineada da seguinte forma:

“Quais as contribuições do Material Cuisenaire e do Modelo de Barras de Singapura no ensino de soma e subtração de frações no sexto ano do Ensino Fundamental e as dificuldades encontradas pelos professores em sua utilização?”

Assim, com esta questão pretendemos demonstrar se esses recursos didáticos poderão ou não contribuir para o ensino de frações voltado para as operações de soma e subtração e noção de parte de um todo, identificando as limitações desses recursos didáticos e as possibilidades de adaptação ao contexto escolar brasileiro, além de identificar as dificuldades encontradas pelos professores em sua utilização.

1.5. Hipótese de pesquisa

Em virtude do problema de pesquisa levantado, elegemos a seguinte **hipótese**:

- O Material Cuisenaire e o Modelo de Barras de Singapura por serem materiais concretos proporcionam uma aprendizagem significativa das operações soma e subtração de frações, sendo recursos didáticos eficazes no processo ensino-aprendizagem, uma vez que permitem a manipulação e a visualização das operações envolvidas nas situações-problema.

1.6. Justificativa e Relevância do tema

Ministrando aula sobre o conteúdo de fração em uma escola particular numa turma do sexto ano do Ensino Fundamental, pude perceber que os alunos possuíam grande dificuldade na compreensão do conceito de fração, suas operações e aplicações, principalmente quando havia resolução de problemas contextualizados. Como já dizia Cavalieri (2005, p.31) “o pouco uso das frações no cotidiano é uma das razões pelas quais as crianças sentem dificuldades com as frações, diariamente não são oferecidas oportunidades para que elas se familiarizem com essa ideia”.

Então, busquei ensinar fração para esta turma de um modo atrativo e com o objetivo de fazer com que eles entendessem de forma significativa o conteúdo. Começamos inicialmente usando o Modelo de Barras de Singapura desenhando-as no quadro e repartindo para representar partes de um todo por exemplo, fazendo com que os alunos identificassem o quanto valeria cada um dos quadrados repartidos.

Isso me levou a conhecer os dois recursos didáticos que serão abordados neste trabalho e o desejo de investigá-los, de modo que possam auxiliar no ensino de frações. Sabe-se que esse material tem muita utilidade nos anos iniciais da Educação Básica para ensino das operações envolvendo frações no conjunto dos números naturais, mas acreditamos que também possa ser utilizado nos anos finais e proporcionar ao professor a melhoria de sua prática pedagógica, para que a sua aula seja mais dinâmica e possibilite um melhor aprendizado.

Também percebi que havia professores que tinham dificuldades no ensino de frações e suas operações, tanto professores dos anos iniciais – pedagogos – quanto os licenciados em Matemática, por diversos motivos, relacionados à formação inicial com pouco contato com o conteúdo de frações, desconhecimento de recursos didáticos para ensinar frações, entre outros.

Considerando a experiência que tive e as observações acerca das práticas docentes, pensei em trazer materiais potencialmente significativos para os alunos que acabaram de concluir o 5º ano do Ensino Fundamental – o Material Cuisenaire e Modelo de Barras de Singapura-, buscando identificar como esses recursos também podem ser utilizados para se ensinar frações no 6º ano, considerando-se que há pouquíssima ênfase em seu emprego nos anos iniciais, e desta forma, realizamos o resgate desses materiais concretos e sua importância no processo ensino-aprendizagem da fração e suas operações, principalmente a soma e subtração.

Nesse sentido, decidi direcionar o uso desses recursos didáticos aos professores formados ou em formação, visto que é de grande relevância que os docentes da Educação Básica saibam utilizá-los, para inserirem em suas aulas, proporcionando aos seus alunos um ensino que vai além do ensino tradicional de fração, que por sua vez é repleto de repetição de procedimentos, sendo estes aplicados sem que haja um desenvolvimento adequado dos conceitos e significados que as frações possuem.

A abordagem desses materiais didáticos se faz necessária visto que os professores licenciados em Matemática, em sua graduação, tiveram pouco ou nenhum momento para aprender a utilizar recursos didáticos concretos de forma a promover um processo de ensino-aprendizagem em que os alunos possam se interessar pela aula, pelo conteúdo e terem uma aprendizagem significativa. Isso tem mudado atualmente, com o ensino de metodologias com o uso de materiais concretos presentes na graduação, mas os professores de gerações anteriores, que ainda são em maioria nas salas de aula, precisam dessa atualização em relação às práticas pedagógicas.

CAPÍTULO II

REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo trazemos a fundamentação teórica da pesquisa, que abrange a análise da literatura acerca do ensino de frações, seus significados e o conhecimento matemático para o ensino, bem como uma análise dos documentos curriculares acerca do que propõem para o ensino de frações no Ensino Fundamental, encerrando com uma apresentação do Material Cuisenaire e do Modelo de Barras de Singapura.

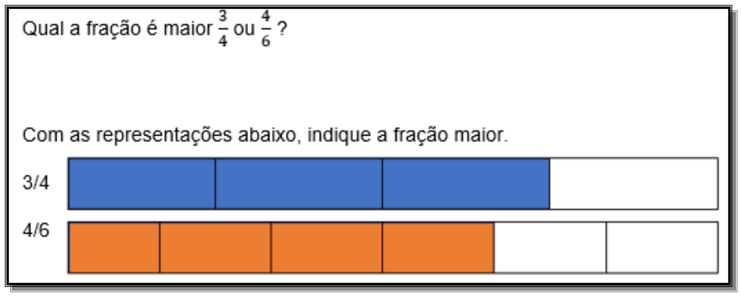
2.1. As dificuldades dos alunos e dos professores relacionadas à compreensão de frações

As dificuldades apresentadas pelos alunos na compreensão da noção de fração no 6º ano do Ensino Fundamental podem decorrer da metodologia empregada pelo professor por meio da ênfase em procedimentos e a escassez de recursos interativos e materiais concretos, pois o aspecto visual e a manipulação dos materiais auxiliam na construção de significado.

Outro ponto a se destacar é fato de que as crianças trazem conhecimento informal para a escola que é importante para a aprendizagem de frações, como colocam Bryant e Nunes (2005). Esses conhecimentos devem ser trabalhados e utilizados para a construção dos diferentes significados de frações. Porém, o que acontece é justamente o contrário disso, pois os professores não procuram explorar esses conhecimentos informais de seus alunos, nem levar os alunos a associarem esses conhecimentos com as frações.

O uso de recursos didáticos no processo do ensino-aprendizagem de frações também é uma alternativa relevante, como coloca Lorenzato (2006) ao afirmar que a utilização de recursos didáticos para o ensino de frações tem se mostrado eficaz, principalmente porque os materiais concretos possibilitam a manipulação e a visualização das representações e operações. Com esses materiais concretos, os alunos podem ter, por exemplo, a noção de ordem das frações, além disso, também a noção das frações que são menores, iguais ou maiores que um inteiro, associando uma representação que inicialmente seria abstrata por meio de uma representação concreta ou pictórica.

Fig. 1 – Representação pictórica da fração



Fonte: O autor (2021)

Na Figura 1, podemos ver um exemplo de duas abordagens de um conceito que deve ser trabalhado nos anos iniciais do Ensino Fundamental e retomado no sexto ano, ficando notório que para a criança é mais fácil compreender a magnitude das duas frações na segunda atividade, já que a representação pictórica feita com as barras nos permite visualizar a diferença entre elas e ordená-las, enquanto que na forma tradicional de abordagem da primeira questão não fica claro identificar qual delas é a maior. Além disso, os alunos podem muitas vezes se confundir, afirmando que a fração 4/6 é a maior, já que os números presentes nessa fração são maiores que os da fração 3/4.

Fizemos uma pesquisa de pré-teste com professores e licenciandos, a maior parte deles cursando Matemática e Pedagogia, para recolher algumas informações para o TCC (Trabalho de Conclusão de Curso), que porventura estão no Capítulo III. Uma das perguntas feitas foi sobre a importância do uso de recursos didáticos concretos para o ensino de frações, sendo que todos os participantes da pesquisa afirmaram ser relevante o uso desses materiais, em contrapartida poucos desses professores disseram que usavam algum material concreto em suas aulas de Matemática.

Uma outra questão que causa dificuldade no processo de ensino-aprendizagem de frações nos anos iniciais e que são levadas para o sexto ano, é a defasagem de conteúdos matemáticos na formação dos professores que ensinam no quarto e quinto ano, que são os pedagogos. Ribeiro (2019) realizou uma pesquisa sobre o ensino de frações no curso de Pedagogia: a autora verificou que alguns docentes desconhecem os diferentes significados de fração ou conhecem parte dos significados sem fazer a diferenciação, que algumas abordagens são feitas de modo superficial em virtude do tempo e que os recursos didáticos utilizados nas abordagens são escassos.

Além disso, Morais (2010) conduziu uma pesquisa sobre as dificuldades das professoras dos anos iniciais do Ensino Fundamental com o ensino de frações. As principais dificuldades levantadas pelo autor foram em relação à comparação entre frações, representação, operações, transformação de fração em número misto.

Para que haja uma melhora significativa no ensino não só de frações, mas de toda a Matemática em geral, é importante que sejam ofertados cursos de formação continuada e especializações em Ensino de Matemática para os professores dos anos iniciais (que são pedagogos), sendo uma oportunidade para que eles compreendam a Matemática, pois a maior parte dos cursos de Pedagogia do Brasil, possui uma grade curricular com carga horária muito baixa em disciplinas voltadas para o ensino de Matemática (SANTOS; KHALHIL: GHEDIN, 2017). Esses cursos são primordiais, pois não se consegue ensinar determinado conceito sem dominá-lo de forma adequada, até mesmo porque os recursos didáticos não serão suficientes sem o domínio formal dos conceitos matemáticos.

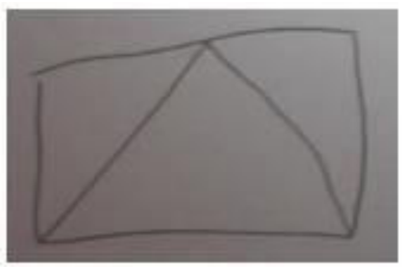
Siebert (2015) conduziu uma pesquisa com professores do 4º e 5º ano do Ensino Fundamental: as professoras apontaram as lacunas na formação inicial referentes a aprender e ensinar Matemática e afirmaram que o curso de formação continuada além de ampliar os conhecimentos específico, curricular e pedagógico de frações, lhes trouxe segurança para ensinar o conteúdo de fração e novas alternativas de recursos didáticos.

Cardoso e Mamede (2017) pesquisaram sobre as dificuldades em ensinar frações a partir de uma pesquisa de campo com quatro professores do Ensino Fundamental 1, denotado por elas como 1° ciclo. As autoras observaram os professores enquanto eles lecionavam no 2° e 3° anos, buscando verificar a forma com que ensinavam os conceitos de representação pictórica de uma fração, localização de uma fração na reta numérica, ordenação de duas frações e, por fim, o conceito de frações equivalentes.

Nessa observação as autoras identificaram que os professores utilizavam o significado de parte-todo com muito mais frequência do que o de quociente, apresentando dificuldades em relação à representação, ordenação e equivalência de frações.

Nas observações das autoras feita sobre os professores em relação a aula de representação pictórica, elas perceberam que os professores não se atentavam às partições feitas pelos alunos no desenho. Podemos destacar um dos problemas no qual o aluno devia dividir um retângulo em três parte iguais, sendo que um dos alunos o partiu em três triângulos, como podemos ver na figura abaixo:

Fig. 2 – Partição de um retângulo feita por um aluno

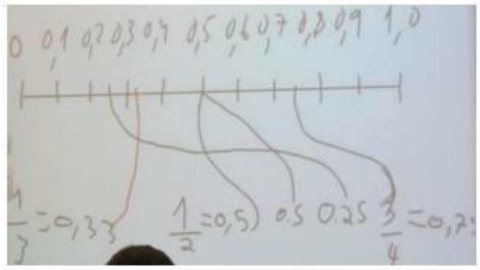


Fonte: Cardoso e Mamede (2017)

O professor aceitou a resposta como certa, não corrigindo devidamente. Isso causa equívocos em relação ao conceito de fração. As autoras recomendam auxiliar na correta representação pictórica e na utilização de uma unidade fixa para a partição. A abordagem à unidade de referência manifesta-se pouco explorada, ainda que se constitua essencial na construção do conceito de fração.

Em relação ao ensino de como encontrar a posição de uma fração na reta numérica, as autoras identificaram que os professores se apropriavam do significado de quociente das frações, mas de forma indevida, visto que para posicionar uma fração na reta eles encontravam a sua representação decimal através da divisão, por exemplo, 3/4 é representado por 0.75 em decimais, a partir disso, eles repartiram a unidade em 10 e localizaram cada um dos decimais que foram encontrados com as frações.

Fig. 3 – Método para representar fração na reta



Fonte: Cardoso e Mamede (2017)

Percebemos que esse procedimento é apenas metódico e não faz referência ao conceito e ao significado que uma fração possui. Os autores apontam a forma com que os professores poderiam ter feito, fazendo o uso dos fundamentos da fração:

> *Porém, dada uma fração* $\frac{a}{b}\ com\ b \neq 0$ *deveria antes utilizar-se a fração* $\frac{1}{b}\ com\ b \neq 0$ 'a' *vezes, para determinar uma distância à origem igual a* $\frac{a}{b}\ com\ b \neq 0$" (CARDOSO; MAMEDE, 2017, p. 2).

O método citado por Cardoso e Mamede (2017) pode ser visto de forma pictórica utilizando o modelo de barras de Singapura, pois ele sugere encontrar a parte 1/b no espaço destinado à unidade dividindo essa unidade em b partes; isso seria semelhante a fazer esta partição em uma barra desenhada, ou seja, parti-la também em b partes. Já na segunda etapa, elas contam "a" vezes o pedaço 1/b encontrado na partição para encontrar a posição da fração a/b, e com a barra seria feito algum tipo de destaque, como pintar as barras selecionadas para de acordo com a quantidade "a".

Em relação ao tema de ordenação de fração, as autoras falam da importância de ser trabalhar a comparação de frações de mesmo numerador e não apenas de mesmo denominador, pois elas afirmam que:

> (...) a seleção de tarefas envolvendo frações com o mesmo denominador pode conduzir a respostas dos alunos que, ainda que corretas, não se traduzem necessariamente numa verdadeira compreensão da ordenação de frações. (CARDOSO; MAMEDE, 2017, p. 3).

Esta relação de ordenação faz com que os alunos se acomodem a comparar apenas os numeradores fazendo uma analogia aos números naturais, pois quanto maior o valor do numerador, maior será a fração, mas ainda assim eles podem não ter a noção da magnitude destas. Além disso, o professor tem uma equivocada conclusão que o aluno entendeu o conceito de ordenação de frações, então para que ele possa ter uma aprendizagem adequada desse conceito, Cardoso e Mamede sugerem que os professores devem:

> (...) selecionar tarefas que envolvam frações de igual numerador, para que seja explorada e discutida a relação inversa entre o valor do denominador e a magnitude da fração, quando o numerador se mantém, própria da ordenação de frações e que é essencial para dominar o conceito de fração. (CARDOSO; MAMEDE, 2017, p. 3).

Nos que diz respeito ao conceito de frações equivalentes, as autoras perceberam duas inconsistências na forma com que os professores ensinavam, dizendo que eles "manifestam algum desconforto" na abordagem desse tema. A primeira inconsistência foi identificada na:

> (...) interpretação quociente, registou-se por vezes uma preferência do professor por respostas dos alunos nas quais a fração apresentada tinha como valor do numerador o número de itens a partilhar e como valor do denominador o número de recipiente. (CARDOSO; MAMEDE, 2017, p. 3).

Para esse conceito foi apresentada uma questão na qual era necessário saber qual a fração representaria a divisão de duas pizzas para seis pessoas. Um dos alunos teve como resposta a fração 1/3, porém o professor não validou a resposta, pois ele só entendeu como resposta certa quando lhe era apresentada a fração 2/6, mostrando que lhe faltava o domínio adequado do sentido de uma fração. (CARDOSO; MAMEDE, 2017).

A segunda inconsistência encontrada pelas autoras foi quanto ao procedimento adotado pelo professor para encontrar frações equivalentes a uma fração dada. Foi dada uma tarefa para os alunos, encontrar frações equivalentes a fração 1/2. As autoras descrevem o procedimento do professor:

> A linguagem utilizada pelo professor (“Em cima [apontando para o numerador] vai de um em um e em baixo [apontando para o denominador] vai de dois em dois”)" (CARDOSO; MAMEDE, 2017, p. 4).

Essa forma de encontrar frações equivalentes conduz o aluno a uma interiorização de procedimentos algébricos, desprovida de uma efetiva compreensão de conceito.

Outro trabalho que retrata a temática das dificuldades no conteúdo de frações é de autoria de Monteiro e Groenwald (2014). Esse trabalho diferentemente do anterior citado, traz as principais dificuldades de uma turma de 19 alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental em conteúdos relacionados as frações, sendo que as deficiências foram identificadas a partir da resolução de testes adaptativos envolvendo os conteúdos, implementados no Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem (SIENA):

> O SIENA é um sistema que possibilita ao professor um planejamento do processo de ensino e aprendizagem de acordo com os conhecimentos dos alunos. Através da aplicação de testes adaptativos, é gerado um mapa individualizado das dificuldades dos alunos, esses testes estão vinculados a sequências didáticas eletrônicas, as quais servem como estudos de recuperação para os alunos que apresentarem dificuldades. (MONTEIRO; GROENWALD, 2014, p. 104)

Para os autores, o ensino e a aprendizagem das frações é um processo complexo para os alunos e uma das formas pela qual podem causar as dificuldades se dá quando estes, de forma intuitiva acabam transferindo as propriedades do conjunto dos números naturais para os fracionários, não assimilando as características singulares dos dois conjuntos.

Essa assimilação provoca erros que os alunos cometem achando que estão fazendo o que é certo, justamente por causa das inconsistências da generalização feita por eles, e dentre as inconsistências citadas por Monteiro e Groenwald (2014) temos que uma fração pode ter uma infinidade de representações, que chamamos de frações equivalentes, já um número natural possui apenas uma representação.

A ordenação de uma fração também fica prejudicada quando é feita essa associação com os números naturais, visto que a relação entre $1/3 < 1/2$ não é óbvia quanto a ordenação $3 > 2$, por exemplo. Outro ponto citado por Monteiro e Groenwald (2014) é que nos naturais é fácil identificar o sucessor e antecessor de um determinado número e isso não é possível no conjunto das frações, visto que entre duas frações é sempre possível encontrar uma outra fração. Uma outra inconsistência relatada pelos autores é que quando se realiza o produto entre dois números naturais que não seja o 1 e 0, sempre o resultado será um outro natural maior que os números utilizados para se efetuar o produto, mas vemos que isso não é lei com as frações:

> A experiência que os alunos têm com os Números Naturais às levam à tendência de ver as frações como um conjunto de dois Números Naturais separados por um traço. Como consequência, acabam utilizando seus conhecimentos de cálculo, regras e algoritmos com os Números Naturais para as frações. (MONTEIRO; GROENWALD, 2014, p. 111)

Podemos ver nesses exemplos o quanto pode ser prejudicial para um aluno na aprendizagem das frações quando ele simplesmente faz essa transferência de propriedades, por este motivo é importante que os professores trabalhem bem o conceito de fração e seus significados para que o aluno não entenda as frações como apenas dois números naturais separados por um traço horizontal, mas saiba diferenciá-las por suas propriedades.

Segundo Monteiro e Groenwald (2014) um modo de incentivar o aprendizado para conteúdo de frações é que elas devem aparecer em outros contextos, não se resumindo apenas ao âmbito escolar, mas em situações-problema, por exemplo, proporcionando aos alunos a realização de atividades que eles possam desenvolver, como nos números naturais, como somar, dividir e ordenar.

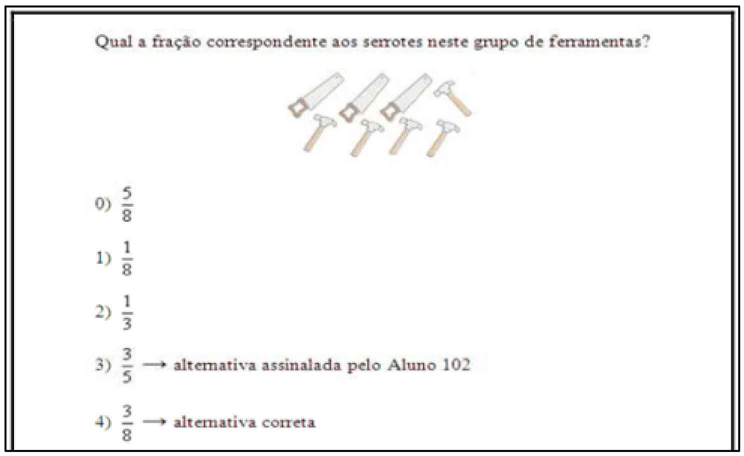
No experimento, os autores pediram para que a professora de Matemática de duas turmas do 7° ano do Ensino Fundamental selecionasse os alunos, sendo que os alunos escolhidos foram aqueles que apresentavam maior dificuldade no conteúdo de frações. Segundo Monteiro e Groenwald (2014) a escolha das turmas do 7º ano se deve a dois aspectos importantes:

> O primeiro que o conteúdo de frações já tinha sido desenvolvido em sala de aula, e o segundo aspecto é que no 7º ano este conteúdo volta ao currículo de Matemática sendo ampliados esses conceitos ao conjunto dos Números Racionais. (MONTEIRO; GROENWALD, 2014, p. 112)

Monteiro e Groenwald (2014) também falam que independente de série escolar é fundamental disponibilizar meios de realizar a inclusão dos alunos com dificuldades no processo de aprendizagem, para que os conteúdos que esses alunos não aprenderam não se acumulem tornando um obstáculo ainda maior. Vamos apresentar a seguir as dificuldades apresentadas pelos alunos nos testes feitos e observados por Monteiro e Groenwald (2014) em cada um dos conteúdos que foram explorados nesses testes, ou seja, o conceito de fração, os tipos de frações, equivalência e simplificação, comparação e, por fim, nas quatro operações, soma, subtração, multiplicação e divisão entre números fracionários.

Monteiro e Groenwald (2014) apontaram que uma das dificuldades foi verificada na representação de frações no significado de parte-todo na forma discreta, onde havia a necessidade de destacar uma determinada quantidade de um conjunto. O correto seria os alunos escreverem como denominador da fração a quantidade referente ao conjunto completo e o numerador a quantidade destacada, mas o que ocorreu foi que muitos deles escreviam o denominador como sendo a quantidade que sobrou do conjunto em questão após ser contada a parte destacada.

Fig. 4 – Atividade de representação de fração



Fonte: Monteiro e Groenwald (2014)

Já em relação ao significado de quociente, Monteiro e Groenwald (2014) perceberam que a dificuldade dos alunos estava no fato de que os alunos não conseguiram entender que uma fração poderia ter o numerador maior que denominador, eles sempre marcavam como resposta uma fração cujo o numerador era menor que o denominador. Essa é uma das consequências do uso excessivo e quase que unânime do significado de parte-todo, pois neste, a fração é usada para representar apenas uma determinada quantidade de um todo, como o próprio nome descreve, e isso nos dará como representações, frações com o numerador sempre menor que o denominador. Com isso, o aluno pode entender que aquela é a única forma de enxergar uma fração, causando lacunas na sua aprendizagem.

Fig. 5 – Atividade do teste

Sabe-se que 6 terrenos de mesmo tamanho serão divididos igualmente entre 5 herdeiros. Como você faria essa divisão? Cada herdeiro ficaria com que parte do terreno?

0) $\frac{5}{6}$ → alternativa assinalada pelo Aluno 106 no primeiro teste

1) $\frac{1}{6}$ → alternativa assinalada pelo Aluno 106 no terceiro teste

2) $\frac{6}{5}$ → alternativa correta

3) $\frac{1}{5}$ → alternativa assinalada pelo Aluno 106 no segundo teste

4) $\frac{5}{2}$

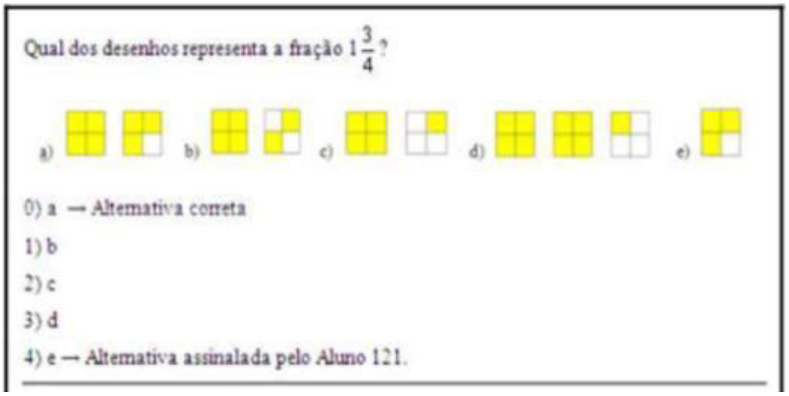
Fonte: Monteiro e Groenwald (2014)

No que diz respeito aos “tipos de frações” que tratam das frações próprias, impróprias e mistas, as dificuldades foram encontradas justamente nas frações impróprias, aquelas cujo o numerador é sempre maior que o denominador, pois Monteiro e Groenwald (2014) identificaram novamente a inversão dos elementos da fração, quando a situação-problema pedia como resposta uma fração imprópria, 4/3 por exemplo, os alunos marcavam como resposta correta a fração 3/4.

Já em relação ao número misto, este é uma fração própria, ou seja, cujo numerador é sempre menor que o denominador, acompanhado de um número inteiro, o qual é muito usado para representar situações de quociente onde há uma distribuição inteira e desta sobra uma quantidade que é menor do que número de partes a serem divididas. Um exemplo que podemos citar é a divisão de 3 pães para 2 pessoas, sendo que cada uma delas ficará com 1 pão e restará 1 outro para ser repartido entre eles, logo essa operação pode ser representada pela fração $1\frac{1}{2}$.

Monteiro e Groenwald (2014) viram que em situações onde eram usadas frações intituladas de números mistos na representação pictórica, os alunos tinham dificuldade em entender que a parte inteira do número estaria representando um desenho completo com todas as partes pintadas e a parte fracionária seria um outro desenho com apenas uma parte dele pintada, como é possível ver na figura a seguir:

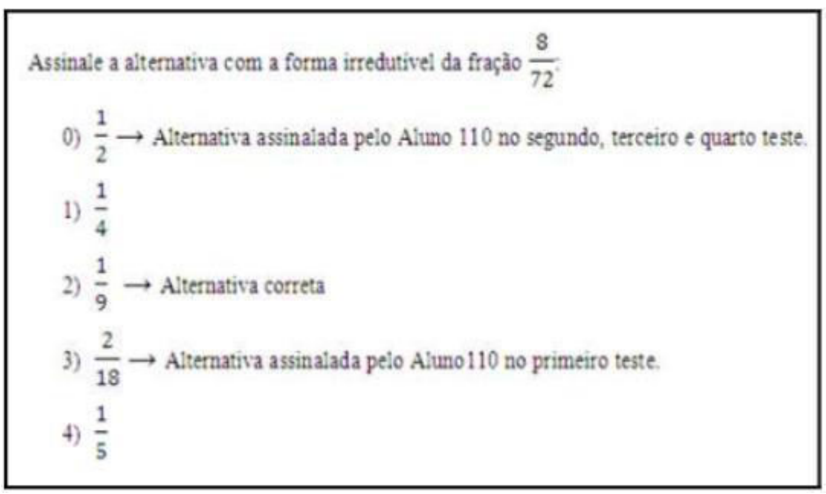
Fig. 6 – Atividade do número misto



Fonte: Monteiro e Groenwald (2014)

No tocante ao conceito de equivalência e fração irredutível, para Monteiro e Groenwald (2014) este foi um dos conceitos que os alunos apresentaram mais dificuldades, como mostra a figura abaixo:

Fig. 7 – Atividade da fração irredutível


Assinale a alternativa com a forma irredutível da fração $\frac{8}{72}$.

0) $\frac{1}{2}$ → Alternativa assinalada pelo Aluno 110 no segundo, terceiro e quarto teste.

1) $\frac{1}{4}$

2) $\frac{1}{9}$ → Alternativa correta

3) $\frac{2}{18}$ → Alternativa assinalada pelo Aluno110 no primeiro teste.

4) $\frac{1}{5}$

Fonte: Monteiro e Groenwald (2014)

Podemos ver que na primeira tentativa o aluno marcou como resposta uma fração equivalente a 8/72, mas ainda não era a irredutível, não é possível perceber se marcou aleatoriamente ou seguiu algum raciocínio para isso, o que podemos perceber é que nos testes subsequentes ele marcou uma segunda alternativa cuja fração não pode ser dita como equivalente à fração em questão.

No teste para analisar as dificuldades dos alunos no tema comparação de frações, Monteiro e Groenwald (2014) tiveram a impressão, em algumas respostas, que os alunos utilizaram a ideia de números naturais e trataram os numeradores e numeradores de modo independente.

Fig. 8 – Atividade de ordem de fração

Assinale a alternativa CORRETA:

0) $\frac{1}{3} > \frac{1}{6}$ → Alternativa correta

1) $\frac{2}{3} = \frac{3}{6}$

2) $\frac{1}{3} = \frac{3}{6}$

3) $\frac{1}{5} < \frac{2}{10}$ → Alternativa assinalada pelo Aluno 102

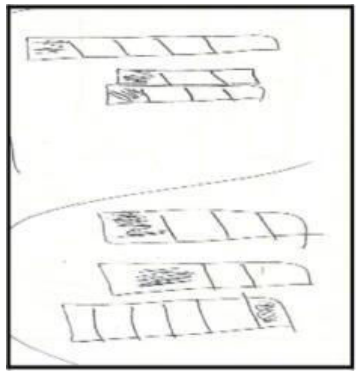
4) $\frac{2}{3} < \frac{2}{6}$

Fonte: Monteiro e Groenwald (2014)

Os alunos comparavam numerador com numerador e denominador com o denominador da outra fração separadamente, mostrando que realmente não tinham aprendido corretamente o fundamento da magnitude de uma fração e que os dois elementos da fração devem ser analisados juntos, pois formam um único número.

Uma ferramenta que pode auxiliar na comparação de duas frações é quando sua representação é feita por meio de barras seccionadas, porém devemos atentar que as barras devem tem rigorosamente o mesmo tamanho para representar o inteiro. Além disso, esta barra deve ser dividida em partes rigorosamente iguais, pois se isso não acontecer, essa ferramenta não será útil para fazer a comparação. Monteiro e Groenwald (2014) perceberam essa dificuldade no desenho das representações:

Fig. 9 – Representação por barra feita por um aluno



Fonte: Monteiro e Groenwald (2014)

No conteúdo de soma e subtração de frações, foi identificado que os alunos cometeram um dos erros mais comuns, pois realizaram as duas operações de forma independente, ou seja, operavam os numeradores e os denominadores separadamente (MONTEIRO; GROENWALD, 2014). Podemos ver claramente essa dificuldade no teste aplicado pelos autores:

Fig. 10 – Atividade de soma e subtração

Resolva e assinale a resposta correta. Qual o resultado de $\frac{3}{4} - \frac{1}{6}$?

0) $\frac{7}{6}$

1) $\frac{2}{6}$

2) $\frac{7}{12}$ → Alternativa correta

3) $\frac{2}{2}$ → Alternativa assinalada pelo Aluno 110

4) $\frac{4}{10}$

Resolva e assinale a resposta correta. Qual o resultado de $\frac{3}{5} + \frac{3}{5}$?

0) $\frac{5}{3}$

1) $\frac{3}{5}$

2) $\frac{6}{10}$ → Alternativa assinalada pelo Aluno 114.

3) $\frac{6}{5}$ → Alternativa correta

4) $\frac{5}{6}$

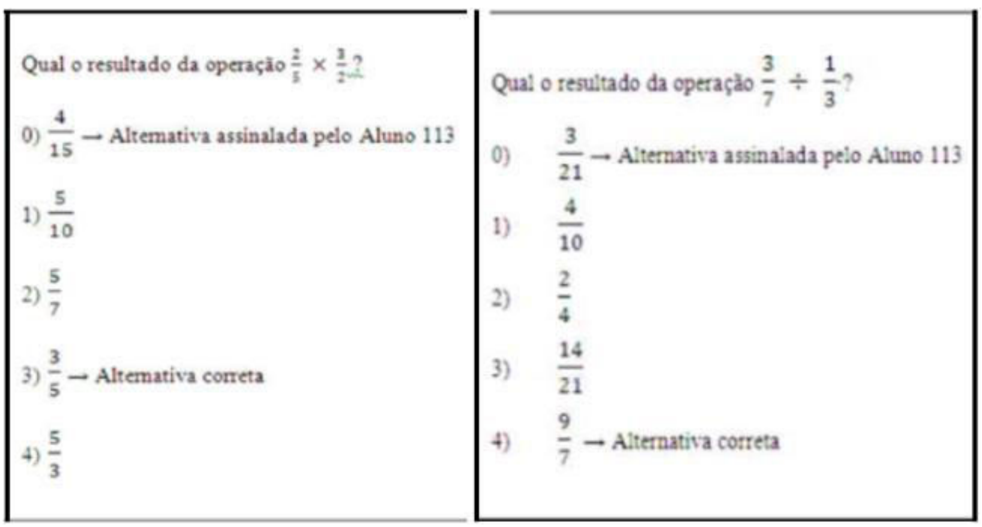
Fonte: Monteiro e Groenwald (2014)

Nessas repostas podemos verificar que na subtração das $\frac{3}{4} - \frac{1}{6}$ os alunos fizeram 3 -1 = 2, que diz respeito a subtração dos numeradores, já para o denominador foi feita a subtração entre os denominadores, 6 – 4 = 2, formando a fração $\frac{2}{2}$. No procedimento da soma, outro aluno utilizou o mesmo princípio, somando os numeradores para formar um novo numerador e somando os denominadores para formar um novo denominador.

Monteiro e Groenwald (2014) colocaram que o motivo pelo qual os alunos apresentaram essa dificuldade é devido a forma de somar números naturais, além disso, no sétimo ano, os alunos já viram qual o procedimento para a multiplicação de frações, que consiste justamente na multiplicação dos numeradores para obter o novo numerador e dos denominadores para obter o denominador, com isso, os alunos acabam generalizando este procedimento para as outras operações por ser mais simples de decorar.

Por fim, nas etapas do teste onde foram aplicadas as operações de multiplicação de frações, Monteiro e Groenwald (2014) perceberam que um dos alunos inverteu os procedimentos que são utilizados nas duas operações, ou seja, ele multiplicou as frações tomando a fração inversa da segunda fração; já na divisão o aluno fez o produto das duas frações sem que antes estivesse encontrado a fração inversa da segunda, como pode ser visto na figura abaixo.

Fig. 11 – Atividade de multiplicação e divisão



Qual o resultado da operação $\frac{2}{5} \times \frac{3}{2}$?

0) $\frac{4}{15}$ → Alternativa assinalada pelo Aluno 113

1) $\frac{5}{10}$

2) $\frac{5}{7}$

3) $\frac{3}{5}$ → Alternativa correta

4) $\frac{5}{3}$

Qual o resultado da operação $\frac{3}{7} \div \frac{1}{3}$?

0) $\frac{3}{21}$ → Alternativa assinalada pelo Aluno 113

1) $\frac{4}{10}$

2) $\frac{2}{4}$

3) $\frac{14}{21}$

4) $\frac{9}{7}$ → Alternativa correta

Fonte: Monteiro e Groenwald (2014)

De modo geral, vemos que de fato existem muitas dificuldades vivenciadas na sala de aula quanto ao conteúdo de frações, sendo estas não atribuídas apenas aos alunos, mas também aos professores, como foi visto no trabalho de Cardoso e Mamede (2017) , que por falta de uma formação que pôde não ter contemplado uma fundamentação adequada dos conceitos e o uso de recursos didáticos para o ensino de frações, acabam transferindo apenas procedimentos e métodos para os alunos e estes podem ser facilmente confundidos ou mal interpretados, causando as dificuldades evidenciadas no trabalho de Monteiro e Groenwald (2014). Passemos para a análise dos documentos curriculares.

2.2 O ensino de frações na BNCC e no Referencial Curricular de Alagoas: dos anos iniciais aos anos finais do Ensino Fundamental

Iremos tratar neste tópico a respeito de como os documentos nos apresentam os conteúdos relacionados às frações. Iremos descrever e analisar os objetos de conhecimento e as habilidades associadas a eles do 4º ao 6º ano do Ensino Fundamental, que são os anos do ensino básico onde os alunos começam e finalizam a aprendizagem de conteúdos associados ao tema, e a partir do 7º ano os conteúdos são voltados para as aplicações com os números fracionários, ou seja, os alunos precisam concluir esses três anos de ensino de frações desenvolvendo as habilidades de manipulação e interpretação correta das frações.

Como foi dito, é a partir do 4º ano do Ensino Fundamental, segundo a BNCC (BRASIL, 2018, p. 290-293), é dado início aos conteúdos específicos de frações, porém é possível identificar que já no 3º ano é encontrado uma menção às frações. No último objeto de conhecimento da unidade temática "Números" vemos a BNCC (BRASIL, 2018) colocando o primeiro contato com frações, tratando sobre os significados de metade, terça parte, quarta parte, quinta parte e décima parte. Junto a esse objeto de conhecimento, temos uma habilidade que os alunos do terceiro ano devem desenvolver: "(EF03MA09) Associar o quociente de uma divisão com resto zero de um número natural por 2, 3, 4, 5 e 10 às ideias de metade, terça, quarta, quinta e décima partes" (BRASIL, 2018, p. 287).

Perceba que nessas diretrizes, as crianças já trabalham com a divisão exata e a partir desse tema é introduzido um novo significado para essa divisão, o conceito de partição, que é justamente o significado de parte-todo onde a terça parte de uma determinada quantia, ou seja, pegar a quantia e dividi-la por 3, tomando uma dessas três partes. Podemos citar um exemplo numérico que poderia facilmente ser introduzido a uma situação problema simples: quando pegamos a quantidade 60 e formos dividir por cada um dos números naturais dispostos na habilidade (EF03MA09) vemos que todas as divisões deixam resto zero, ou seja, são exatas, além disso, seus quocientes são 30, 20, 15, 12 e 6 respectivamente, e a partir desses quocientes podemos definir os significados, tendo que 30 é a metade de 60, também que 20 é a terça parte de 60 e assim por diante com as outras associações. É importante que as crianças saiam deste ano escolar com esses significados bem assimilados para conseguirem dar continuidade no aprendizado das frações.

No 4º ano do Ensino Fundamental a BNCC (BRASIL, 2018) propõe, ainda na unidade temática "Números" o início do ensino dos números racionais, porém muito voltado para os números decimais, como leitura, escrita, comparação e ordenação desses números, além também de aplicações como no sistema monetário (BRASIL, 2018). Em relação às frações, coloca apenas um objeto de conhecimento e sua habilidade, sendo muito semelhante ao que foi apresentado no 3º ano do Ensino Fundamental:

> O objeto de conhecimento "Números racionais: frações unitárias mais usuais (1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/10 e 1/100)" com sua habilidade que é "(EF04MA09) Reconhecer as frações unitárias mais usuais (1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/10 e 1/100) como unidades de medida menores do que uma unidade, utilizando a reta numérica como recurso." (BRASIL, 2018, p. 290-291).

Nesse sentido, vê-se que já trabalhado a ideia de unidade e as frações unitárias como sendo partes menores que essa unidade, dando uma visão geométrica para as frações, com potencialização da compreensão dos alunos, sendo que no ano anterior foi dado apenas o aspecto numérico.

Outro ponto muito importante é que no 3º ano não é apresentada forma da fração, como dois números separados por uma barra na diagonal, ou um número sobre o outro separados por uma barra horizontal, ou seja, a sua representação, mas sim apenas o significado de uma determinada parte enquanto que no 4º ano já se vê essa representação sendo utilizada.

Já no 5º ano do Ensino Fundamental a BNCC (BRASIL, 2018) apresenta uma introdução ao conteúdo de frações que é essencial para que se possa dar continuidade a este conteúdo no 6º ano, tratando de conceitos como, representação, identificação dos elementos de um fração que são o numerador e denominador, significados que são os de divisão e parte-todo, leitura, ordenação, comparação, equivalência, entre outros conceitos. Vejamos a seguir, a tabela com os objetos de conhecimento e suas respectivas habilidades, estes relacionados ao ensino de frações para o 5º ano do Ensino Fundamental:

Quadro 1 – Objetos do conhecimento e habilidades relativas às frações

OBJETO DE CONHECIMENTO	HBILIDADES
Representação fracionária dos números racionais: reconhecimento, significados, leitura e representação na reta numérica	(EF05MA03) Identificar e representar frações (menores e maiores que a unidade), associando-as ao resultado de uma divisão ou à ideia de parte de um todo, utilizando a reta numérica como recurso.
Comparação e ordenação de números racionais na representação decimal e na fracionária utilizando a noção de equivalência	(EF05MA04) Identificar frações equivalentes. (EF05MA05) Comparar e ordenar números racionais positivos (representações fracionária e decimal), relacionando-os a pontos na reta numérica.
Cálculo de porcentagens e representação fracionária	(EF05MA06) Associar as representações 10%, 25%, 50%, 75% e 100% respectivamente à décima parte, quarta parte, metade, três quartos e um inteiro, para calcular porcentagens, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.

Fonte: O autor (2021)

Podemos perceber na habilidade (EF05MA03) que os alunos devem ter a capacidade de identificar os dois principais significados de uma fração, considerando que estes são os principais, pois segundo os estudos de Nunes e Bryant (1997) há um total de 5 significados aos quais uma fração pode ser associada, como veremos no Capítulo 2. Além disso, vemos também, na habilidade (EF05MA04), que os alunos devem saber identificar frações que são ditas equivalentes, e esse conceito é importantíssimo para que se possa aprender a efetuar as operações de soma e subtração entre frações que possuem denominadores diferentes, que por sua vez é um conteúdo trabalhado apenas no sexto ano.

De modo geral, podemos perceber que os conceitos de frações trabalhados no 5º ano são uma base fundamental para que o aluno possa aprender as efetuar as 4 operações com os números fracionários, visto que já aprenderam a operar com os decimais no próprio 5º ano, ou seja, sem a aprendizagem desses conceitos, ou a aprendizagem incompleta deles, os alunos não terão recursos para dar continuidade ao aprendizado que lhe é proposto nos anos subsequentes.

A BNCC (BRASIL, 2018) possui uma delimitação para o conteúdo de frações no 6º ano, determinando que ele seja abordado na unidade temática "Números" conectado ao conteúdo de números racionais, onde se vê, além de conter as frações, o ensino dos números decimais finitos e dízimas periódicas. Ela propõe a utilização da resolução de problemas como uma metodologia a ser usada no ensino do conteúdo, com seguintes objetos de conhecimento:

> Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações; Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números racionais" (BRASIL, 2018, p. 300).

As habilidades que estão associadas a este objeto de conhecimento são estas:

> (EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes. (EF06MA08) Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica. (EF06MA09) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora. (BRASIL, 2018, p. 301).

Na tabela a seguir, apresentamos todos os objetos de conhecimento e as suas respectivas habilidades dispostas pela BNCC (BRASIL, 2018), trazendo uma sequência do que precisa ser abordado na unidade temática de Números no sexto ano do Ensino Fundamental:

Quadro 2 – Objetos do conhecimento do 6º ano do EF

OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Sistema de numeração decimal: características, leitura, escrita e comparação de números naturais e de números racionais representados na forma decimal.	(EF06MA01) Comparar, ordenar, ler e escrever números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, fazendo uso da reta numérica. (EF06MA02) Reconhecer o sistema de numeração decimal, como o que prevaleceu no mundo ocidental, e destacar semelhanças e diferenças com outros sistemas, de modo a sistematizar suas principais características (base, valor posicional e função do zero), utilizando, inclusive, a composição e decomposição de números naturais e números racionais em sua representação decimal.

Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais Divisão euclidiana	(EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.
Fluxograma para determinar a paridade de um número natural Múltiplos e divisores de um número natural Números primos e compostos	(EF06MA04) Construir algoritmo em linguagem natural e representá-lo por fluxograma que indique a resolução de um problema simples (por exemplo, se um número natural qualquer é par). (EF06MA05) Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos “é múltiplo de”, “é divisor de”, “é fator de”, e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000. (EF06MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor.
Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações	(EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes. (EF06MA08) Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica. (EF06MA09) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora. (EF06MA10) Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.
Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números racionais	(EF06MA11) Resolver e elaborar problemas com números racionais positivos na representação decimal, envolvendo as quatro operações fundamentais e a potenciação, por meio de estratégias diversas, utilizando estimativas e arredondamentos para verificar a razoabilidade de respostas, com e sem uso de calculadora.
Aproximação de números para múltiplos de potências de 10	(EF06MA12) Fazer estimativas de quantidades e aproximar números para múltiplos da potência de 10 mais próxima.
Cálculo de porcentagens por meio de estratégias diversas, sem fazer uso da “regra de três”	(EF06MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da “regra de três”, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.

Fonte: O autor (2021)

Podemos observar nessa tabela que a toda a temática “Números” tem os seus conteúdos interligados, de modo que é importante para o aluno ter desenvolvido as primeiras habilidades, para então obter as subsequentes. Com isso, para que o aluno consiga ter uma aprendizagem eficaz dos conteúdos de frações, adquirindo as habilidades que são necessárias, é fundamental que o professor tenha um planejamento adequado, ensinando tudo que é preciso para que se possa começar a tratar sobre frações, como a aprendizagem dos números decimais e suas operações, entender e aplicar o conceito de múltiplos e divisores de um número natural, bem com o conceito de números primos e compostos, sendo esses conhecimentos prévios que tornarão o ensino de frações mais dinâmico e proveitoso, e a BNCC (BRASIL, 2018) estabelece essa sequência de modo otimizado.

Quanto ao Referencial Curricular de Alagoas (ALAGOAS, 2019), em relação ao conteúdo de frações, retoma as diretrizes da BNCC (BRASIL, 2018), esquematizando em uma tabela com o objeto de conhecimento e as habilidades que se encontram na BNCC (BRASIL, 2018). O referencial acrescenta em seu documento a importância do uso do desdobramento didático-pedagógico para o ensino de frações que tem como fundamento a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud e apresenta a seguinte definição:

> Os desdobramentos didáticos pedagógicos (DesDP) são sugestões metodológicas e orientações didáticas voltadas para a matemática escolar e a educação matemática. Possuem como escopo auxiliar o professor na prática pedagógica, favorecendo ao ato pedagógico, ao fazer em sala de aula. (ALAGOAS, 2019, p.486)

Notamos que os documentos oficiais colocam as habilidades e competências que os alunos devem possuir ao finalizar cada etapa do seu aprendizado, porém eles deixam livre para que os professores escolham qual a melhor forma para se alcançar e adquirir tais habilidades e conhecimentos. Isso dá ao professor a responsabilidade e liberdade de escolher a metodologia que se adequa da melhor forma possível a sua realidade de trabalho, observando a estrutura da escola por exemplo, que muitas vezes não possui um laboratório ou materiais manipuláveis suficientes para serem utilizados, e por este motivo encontram dificuldade para promover uma aula diversificada.

Na pesquisa de pré-teste para este trabalho, que está disposta no Capítulo 3, foi feita uma pergunta relativa a utilização de materiais didáticos nas aulas. Alguns afirmaram nunca ter utilizado algum material manipulável em suas aulas, e sobre o motivo, relataram a falta de estrutura da escola em que lecionam, como falta de laboratório, falta de recursos didáticos e de insumos para a confecção de materiais a serem utilizados nas aulas. Por este motivo, grande parte dos docentes optam por utilizar metodologias tradicionais, e a falta de incentivo vindo por parte da gestão da escola também é um fator que interfere no processo de ensino e desmotiva o professor a melhorar a sua prática pedagógica.

Em meio a esses impasses que podem ocorrer para o processo de ensino de frações, o professor pode encontrar alternativas de fácil acesso para promover um ensino diversificado e interativo através da construção de seus recursos didáticos, como jogos de tabuleiro feitos em cartolina e outros recursos didáticos confeccionados com material de baixo custo. Neste trabalho, por exemplo, usaremos materiais como E.V.A e papel cartão para confeccionar os recursos didáticos, como a escala Cuisenaire, que foi confeccionada com E.V.A de gramatura maior, visto que o recurso, que feito originalmente de madeira, tem um custo que pode ser alto para o professor poder oferecer aos seus alunos e que raramente faz parte dos materiais disponíveis na escola.

Assim, no próximo tópico vamos apresentar os diferentes significados de fração estudados pela literatura e que são importantes para a compreensão das diferentes situações-problemas envolvendo frações.

2.3 Os diferentes significados de fração identificados nas pesquisas de Educação Matemática

Os significados de uma fração se referem a contextos, situações e formas com que uma determinada fração é inserida, e dependendo de determinados fatores, uma mesma fração pode ser vista e interpretada de formas distintas. Essa classificação dos significados de fração apresentada por Nunes et al (2003) citada por Merlini (2005) é retomada em um trabalho publicado em 2006 por Campos, Magina e Nunes (2006) e é esta: número, parte-todo, medida, quociente e operador multiplicativo. Iremos a seguir apresentar esses significados:

1) O significado de parte-todo é o conceito que é visto e citado com maior frequência no estudo de frações. Esse significado representa um total dividido em partes (d) iguais sendo algumas (n) dessas partes tomadas, e ao considerar essas partes tomadas com relação ao todo adotado, temos a representação pela fração.

Um grande exemplo desse significado são as frações das fatias de pizza, considerando que uma pizza inteira é dividida em 8 fatias iguais, e que foram tomadas 5 delas, então podemos ver que a fração que representa a quantidade de fatias comidas é 5/8, ou seja, comeram 5 fatias do total de 8.

2) A fração com significado de medida está associada às situações que envolvem quantidades que podem ser medidas pela relação entre duas variáveis de mesma natureza.

Podemos ver neste significado que a fração é acompanhada de um determinado valor que pode ser mensurado a partir de uma medida, como por exemplo, o valor pago pela fração de fatias consumidas, ou a área (valor numérico) associado a uma determinada fração do terreno que será destinada para a garagem da casa.

3) A fração com significado de quociente está relacionada à ideia de divisão entre duas grandezas correspondentes e seu resultado.

Podemos citar o exemplo simples onde se tem 20 pirulitos para serem distribuídos de forma justa entre 10 crianças, e neste contexto a fração 20/10 tem o significado de quociente.

4) A fração com significado de número aparece nas situações matemáticas sem que seja necessário se referir a uma quantidade. Esse tipo significado não precisa necessariamente estar associado a um contexto ou situação, apenas uma fração como número, quando por exemplo, vamos representar a posição de 3/2 numa reta numérica.

5) A fração com significado de operador multiplicativo se refere a um valor escalar aplicado a uma quantidade, e para encontrar esse valor é necessário fazer uma multiplicação da quantidade pela fração. Esse significado pode ser encontrado quando por exemplo, quando é dado um valor de 20 reais em uma pizza e se quer encontrar o valor de 5/3 de pizzas, bastando apenas fazer a multiplicação entre o número 20 pela fração 5/3. Essa ideia também é aplicada ao cálculo de porcentagens quando se calcula, por exemplo, 20% de uma quantidade, ou seja, 2/10 dessa quantidade.

Observando os cinco significados da fração é possível perceber que eles de certa forma estão interligados, mas que se interpretados de modo isolado e equivocado pelos alunos, causará uma lacuna na construção e compreensão do conceito de fração. Deve-se então, entender a importância de que esses alunos aprendam cada um desses significados e possam distinguir entre eles, sabendo como desenvolver cada um dos significados nas situações ou contextos em que uma fração está sendo aplicada.

Em uma de suas pesquisas, Mamede, Nunes e Bryant (2005), buscaram identificar, dentre os dois principais significados, parte-todo e quociente, qual era o mais utilizado no ensino de frações e qual deles geravam resultados mais eficazes em relação à aprendizagem de conceitos como equivalência, ordenação e nomenclatura de frações.

Para fazer essa análise, eles realizaram estudo com oitenta crianças do primeiro ano, entre 6 e 7 anos de idade de uma escola em Braga, Portugal. Buscaram abordar três questões nesse estudo: o primeiro foi verificar como as crianças entendem a equivalência de frações em situações parte-todo e quociente, e além disso, investigar como eles dominam a ordenação das frações em aplicações com os dois significados e ver como as crianças aprendem a representar frações nessas situações.

Antes de desenvolver a metodologia de sua pesquisa, eles ressaltam cada um dos significados, apresentando suas definições, assim como está descrito acima, e em seguida, eles dão um exemplo de como uma mesma fração pode ser interpretada em cada um dos significados:

> Portanto, 2/4 em uma situação parte-todo significa que um todo - por exemplo - um chocolate foi dividido em quatro partes iguais e duas foram tomadas. Em uma situação de quociente, 2/4 significa que 2 itens - por exemplo, dois chocolates - foram compartilhados entre quatro pessoas. (MAMEDE; NUNES; BRYANT, 2005, p. 282)

Percebemos nesse exemplo que a diferença entre os dois significados é sutil e pode confundir os alunos, pois nesse exemplo vemos que a interpretação do denominador é a mesma nos dois casos, sendo identificados como sendo os agentes dessa partição, sendo alterado apenas o sentido dado ao numerador da fração. No significado de parte-todo, haverá sempre uma única unidade, uma barra de chocolate, como no exemplo citado pelos autores, e o numerador representará uma parte tomada desta; já no significado de quociente haverá mais de uma unidade, como as duas barras de chocolate do exemplo, e o numerador representará esse total de unidades.

Para as ideias de ordenação de frações, os autores estabelecem que, "(1) para o mesmo denominador, quanto maior o numerador, maior a fração (por exemplo, 2/4 <3/4); (2) para o mesmo numerador, quanto maior o denominador, menor a fração (por exemplo, 3/2> 3/4)" (MAMEDE, NUNES; BRYANT, 2005, p. 282).

Em seguida, eles explicam que a primeira relação a ser estabelecida é mais simples que a segunda, pois na segunda os alunos devem pensar em uma relação inversa entre o denominador e a quantidade representada pela fração. Assim, é relevante saber em que condições as crianças entendem essas relações entre numerador, denominador e quantidade.

Posteriormente os autores ainda trazem uma hipótese que se baseia em outros trabalhos feitos como Streefland (1993; 1997) e Nunes (2004), onde eles dizem que o desempenho das crianças em situações quocientes será melhor do que em situações parte-todo e que os procedimentos das crianças serão diferentes entre as situações, porque as situações de quociente podem ser analisadas por meio de correspondências mais naturalmente do que as situações parte-todo.

Para poder chegar a uma conclusão em sua pesquisa, Mamede, Nunes e Bryant (2005) elaboraram situações-problema escritas colocadas em cartilhas com ilustrações, para serem respondidas pelas 80 crianças selecionadas, que tinham entre 6 e 7 anos de idade. As questões eram separadas entre os três conceitos de frações, equivalência, ordenação e nomenclatura, e eram elaboradas com uma mesma ilustração, contendo algumas modificações para atender cada um dos dois significados, parte-todo e quociente.

Após a aplicação das questões com as devidas metodologias, os autores puderam constatar, com dados quantitativos "que o desempenho das crianças quando os problemas são apresentados a elas em situações de quociente é significativamente melhor do que quando os problemas são apresentados em situações parte-todo." (MAMEDE, NUNES; BRYANT, 2005, p. 285)

De modo mais específico, eles perceberam que a capacidade das crianças de resolver problemas de equivalência de frações e ordenação de frações é melhor em situações de quociente do que em situações de parte-todo. Já em relação ao conceito de nomenclatura de uma fração, os dados mostraram uma mudança não expressiva para os autores, de modo que não se percebeu uma melhora na capacidade dos alunos quando a questão era associada a um dos significados.

Depois das observações e análise dos dados obtidos pela pesquisa, Mamede, Nunes e Bryant (2005, p. 287) concluíram que:

> Os níveis de sucesso no desempenho das crianças na equivalência e ordem das frações por meio de situações quocientes corroboram a ideia de que as crianças possuem algum conhecimento informal da lógica das frações, ou seja, as crianças têm algum conhecimento da lógica das frações que foi desenvolvida em sua vida cotidiana, sem instrução na escola.

Apesar disso, os autores dizem que as práticas de ensino tradicionais usam situações parte-todo e não situações quocientes para introduzir o conceito de frações, ou seja, é preciso repensar a forma com que se deve introduzir o conteúdo, de modo com que os alunos tenham um melhor desempenho na sua aprendizagem. Para tanto, veremos no próximo tópico a questão do conhecimento matemático do professor e suas implicações para a prática docente.

2.4 O conhecimento matemático para o ensino de frações com base nos trabalhos de Ball e colaboradores

Vamos apresentar nesse tópico uma parte dos estudos feitos por Silva, Pietropaolo e Pinheiro (2016). Este artigo busca identificar conhecimentos profissionais de professores que lecionam Matemática para os anos iniciais do Ensino Fundamental a respeito das frações e seu ensino a partir da análise das respostas dadas a um questionário.

O que vamos nos atentar nesse trabalho são os estudos de Ball, Thames e Phelps (2008), que discutem a base de conhecimentos de professores para o ensino de Matemática, que por sua vez foi iniciado tendo como referência os estudos de Shulman (1986, 1987), que é uma a reflexão sobre as questões relativas aos conhecimentos necessários ao professor para que este possa exercer seu papel, a docência, de forma a atingir os objetivos de ensino.

Em artigo de 1986, Shulman analisava que, nos Estados Unidos, nos processos de avaliação de professores e nos estudos sobre os conhecimentos necessários à docência, não se discutiam questões que envolviam as explicações do professor sobre o ensino de determinados conteúdos e sobre fontes de analogias, metáforas, exemplos e reinterpretações do docente. Esses estudos indicavam, tampouco, que as estratégias pedagógicas podem ser seriamente comprometidas quando o professor não apresenta pleno domínio do conteúdo que vai ensinar.

Essa falta de aprofundamento citada fez com que Shulman (1986) apontasse três tipos de conhecimentos que os docentes deveriam possuir, e são eles: conhecimento pedagógico do conteúdo, conhecimento do currículo e conhecimento do conteúdo (apud SILVA, PIETROPAOLO, PINHEIRO, 2016).

Posteriormente, Ball, Thames e Phelps (2008), depois de se mostrarem não satisfeitos com o tardio avanço dessa teoria que eles consideravam importante para o desenvolvimento da profissão docente, se propuseram a aprimorar esses estudos ampliando os tipos de conhecimentos, agora para e ensino da Matemática.

Para isso, os pesquisadores perceberam que era necessário particionar o **conhecimento pedagógico do conteúdo** em outros dois tipos, que foram chamados de: conhecimento do conteúdo e ensino; conhecimento do conteúdo e estudante. Eles também estabeleceram que fosse incorporado nessa categoria o que foi chamado por Shulman (1986, 1987) de conhecimento do currículo, chamando de conhecimento do conteúdo e do currículo.

Em relação ao que foi chamado por Shulman (1986) de *conhecimento pedagógico do conteúdo* nos estudos de Ball, Thames e Phelps (2008) foi feita uma outra divisão, agora em outros três tipos, e estes foram chamados: *conhecimento horizontal do conteúdo, conhecimento comum do conteúdo e conhecimento especializado* (apud SILVA, PIETROPAOLO, PINHEIRO, 2016).

Sintetizando, com as mudanças feitas com o avanço da teoria, podemos formar a seguinte tabela:

Quadro 3 – Conhecimento matemático para o ensino

Segundo Shulman (1986, 1987)	*Segundo Ball, Thames e Phelps* (2008)
Conhecimento pedagógico do conteúdo.	Conhecimento do conteúdo e ensino.
	Conhecimento do conteúdo e estudante.
Conhecimento do currículo.	Conhecimento do conteúdo e currículo.
Conhecimento do conteúdo.	Conhecimento horizontal do conteúdo.
	Conhecimento comum do conteúdo.
	Conhecimento especializado do conteúdo.

Fonte: O autor (2021) a partir do trabalho de Ball, Thames e Phelps (2008)

Vamos agora tratar cada uma das categorias que foram subdivididas segundo Ball, Thames e Phelps (2008), apresentando o que define cada um dos tipos de conhecimento na ordem em que são colocados no trabalho de Silva, Pietropaolo e Pinheiro (2016).

A categoria mais básica segundo os autores é o *conhecimento comum do conteúdo* que por sua vez é um conhecimento necessário para os professores, mas não é exclusivo deles, visto que se trada de um conhecimento que todas as pessoas que concluíram a Educação Básica deveriam ter. Para o contexto do conteúdo de frações, seria por exemplo a compreensão dos diferentes significados da fração e sua utilização para resolver problemas, ou seja, esse conhecimento é necessário para o professor, mas não é suficiente para garantir que ele consiga ensinar, pois esse conhecimento ainda é superficial e não contempla, por exemplo, metodologias de ensino ou formas de se promover a aprendizagem do aluno. Podemos dizer que essa categoria de conhecimento seria o que devemos buscar nos alunos.

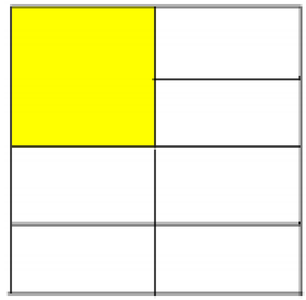
Já o *conhecimento especializado do conteúdo* é um tipo de conhecimento sobre Matemática único na tarefa de ensinar, ou seja, ele não pode ser aplicado a nenhuma outra atividade do cotidiano ou profissional em qualquer outro ramo à não ser a profissão docente.

Nesse tipo de conhecimento vemos a presença da forma pedagógica de se pensar Matemática, envolvendo por exemplo, a explicação de um determinado procedimento, como o que é feito para somar e subtrair frações, a apresentação de uma justificativa para cada um dos procedimentos adotados como os algoritmos da soma e subtração, multiplicação e divisão de frações. Além disso, envolve o professor saber fazer uma análise do que pode facilitar e dificultar uma tarefa de modo geral e conseguir identificar os erros dos alunos; podemos encontrar num professor que possui esse conhecimento a habilidade de formular questões que lhes permitam relacionar os conhecimentos matemáticos prévios dos seus alunos com o conteúdo novo que será ensinado.

De modo geral, vemos que há uma grande relação entre o *conhecimento específico do conteúdo* com as situações práticas das quais os professores vivenciam em sala de aula, por este motivo essa categoria é complementar a primeira e tão importante para a profissão docente.

O *conhecimento do conteúdo e dos estudantes* por sua vez se refere ao quanto o professor conhece seus alunos, suas dificuldades e como pode proceder para motivá-los e torná-los interessados na aprendizagem; é também ter a habilidade de antecipar o pensamento dos estudantes e saber o que pode causar complicações na apreensão de determinado conteúdo. O professor deve ter familiaridade com a forma de raciocinar dos alunos quando em contato com determinados conteúdos de Matemática, prevendo possíveis erros, e um exemplo dado por Silva, Pietropaolo e Pinheiro (2016) é quando os alunos têm dificuldade na representação de fração a partir de uma figura particionada, onde eles podem não fazer a conservação de toda a área da figura quando forem representar o denominador da fração, como vemos na figura abaixo:

Fig. 12 – Representação da fração 2/8



Fonte: Silva, Pietropaolo e Pinheiro (2016)

Utilizando a ideia acima, os autores relatam que o aluno pode representar essa partição com parte amarela como sendo 1/7 em vez de 2/8, ou seja, eliminando do todo a parte que foi tomada e o professor precisa estar preparado para a possibilidade desse tipo de resposta.

Os autores ainda citam uma relação entre esse conhecimento e o *conhecimento do conteúdo e do ensino*, que de fato existe e um conhecimento complementa o outro:

> Acreditamos que o fato de o professor ser possuidor desse conhecimento favorecerá sua intervenção. Nesse sentido, reputamos que o *conhecimento do conteúdo e do estudante* está intrinsecamente ligado ao *conhecimento do conteúdo e do ensino*, próxima categoria. (SILVA, PIETROPAOLO, PINHEIRO, 2016, p. 122)

Assim, o professor que é capaz de entender as dificuldades que seus alunos podem ter em um determinado processo de aprendizagem poderá de fato buscar formas de combater essas deficiências e promover uma aprendizagem mais eficiente e significativa através de um ensino especializado para seus alunos.

Diante dessa ligação entre os conhecimentos citados, os autores definem o *conhecimento do conteúdo e do ensino* desta forma:

> O conhecimento do conteúdo e do ensino diz respeito ao repertório do professor utilizado no planejamento do ensino, ou seja, envolve as possíveis escolhas sobre como introduzir uma temática, qual sequência adotar para desenvolver sua compreensão, que abordagens, representações e métodos melhor se adéquam ao ensino de determinada situação, avaliar vantagens e desvantagens de certas abordagens e representações, além de eleger métodos e procedimentos que se adéquam melhor a cada situação. Assim, por exemplo, se considerarmos a dificuldade detectada anteriormente, o professor poderá decidir sobre qual intervenção propor. Além disso, ele também poderá decidir qual significado utilizar para introduzir as frações, como articular os diferentes significados. (SILVA, PIETROPAOLO, PINHEIRO, 2016, p. 123)

Pensando então na dificuldade identificada por Silva, Pietropaolo e Pinheiro (2016), o professor poderá decidir de que forma ele irá intervir, podendo por exemplo selecionar um dos significados de fração apontados por Campos, Magina e Nunes (2006) que melhor se adeque ao problema proposto.

Por fim, temos o *conhecimento do conteúdo e currículo* que trata da habilidade de relacionar o "conhecimento do conteúdo com a forma como ele é apresentado em orientações curriculares ou materiais instrucionais" (BALL apud SILVA, PIETROPAOLO, PINHEIRO, 2016, p. 123). Voltado para o ensino dos números naturais, nessa categoria o professor conheceria as habilidades e competências presentes na BNCC (BRASIL, 2018) que estão e relacionadas ao ensino de frações para o Ensino Fundamental, bem como os parâmetros curriculares do Estado em que leciona.

Após, apresentarmos os componentes do conhecimento matemático para o ensino, analisaremos no próximo tópico como os livros didáticos do 6º ano do Ensino Fundamental apresentam o conteúdo de frações.

2.5 O ensino de frações nos livros didáticos do Ensino Fundamental: uma análise de como o conteúdo é abordado

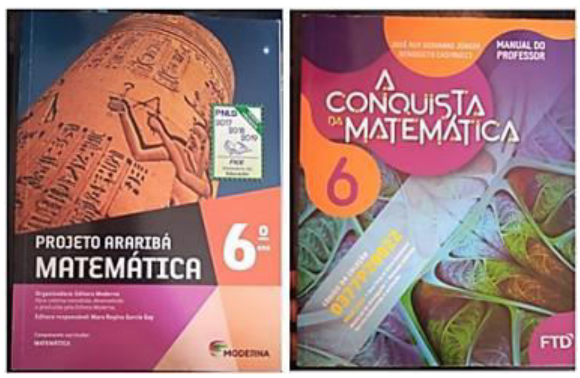
Sabemos que o livro didático é uma ferramenta essencial no processo de ensino de frações, bem como em toda a Matemática, e um bom livro didático pode de fato auxiliar o professor nesse processo, da mesma forma ao aluno, que poderá potencializar seu aprendizado com um bom livro didático.

Por este motivo, vamos fazer a análise de dois livros didáticos do sexto ano do Ensino Fundamental adotados pela rede pública de ensino, para verificarmos de que forma eles dispõem os conteúdos de frações, mais precisamente, iremos fazer a análise de quatro temas de frações dispostos em cada um dos livros separadamente. Primeiro vamos verificar a forma com que eles apresentam o conceito de frações, seja iniciando com um problema ou já abordando o conteúdo, como a nomenclatura dos elementos de uma fração, e também iremos fazer a análise de quais significados de fração, descritos por Mamede, Nunes e Bryant (2005) são abordados pelos livros.

Após isso, iremos analisar de que forma os livros trabalham o conceito de frações equivalentes, que é o conceito fundamental para que se possa iniciar o ensino das operações de soma e subtração de frações. Por fim, iremos ver de que forma os livros tratam essas duas operações, se apresentam por situação-problema para introduzir as operações ou de forma tradicional, se eles usam o método do MMC para encontrar o denominador comum e de que maneira eles justificam o uso desse método, ou seja, vamos analisar como eles apresentam cada etapa das duas operações, que é o enfoque deste trabalho de conclusão de curso.

Em relação aos livros didáticos de Matemática a serem analisados, um deles, o do lado esquerdo, é da Editora Moderna e está na sua 4ª edição, do ano de 2014. Já o segundo livro, no lado direito, é da Editora FTD, também na sua 4ª edição, do ano de 2018. Vamos agora fazer primeiramente a análise do primeiro livro citado, da Editora Moderna, de 2014.

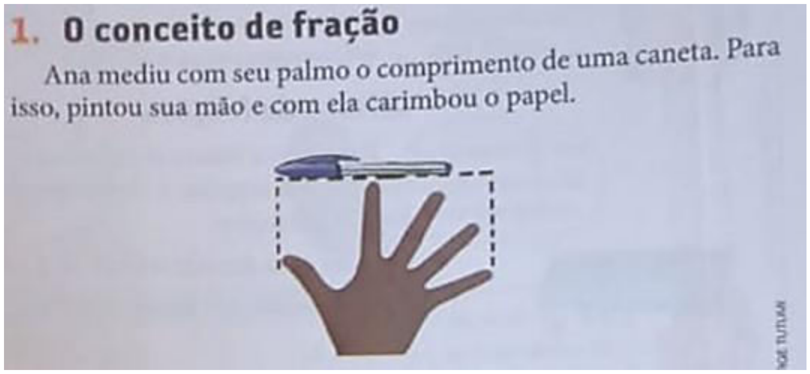
Fig. 13 – Livros didáticos analisados



Fonte: Editoras Moderna e FTD

Para dar início ao conteúdo de frações, o livro apresenta uma situação para dar de exemplo, onde é feita a comparação do tamanho de uma caneta com o palmo da mão de uma criança, o que muitas vezes é uma prática natural de medir o tamanho usando o palmo como unidade de medida, porém ela percebe que o palmo tem um tamanho maior que a caneta e é a partir dessa situação que o livro começa a introduzir o conceito de fração.

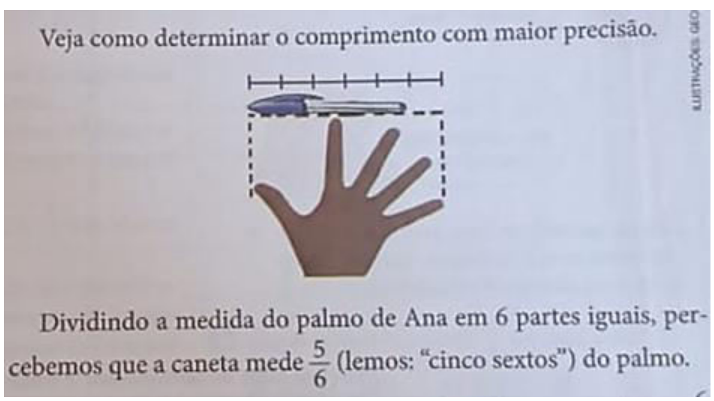
Fig. 14 – O conceito de fração



Fonte: Editora Moderna

Percebemos que a comparação só pode ser feita quando há uma partição do comprimento do palmo da criança, que foi feito em 6 partes, tomando esse comprimento como sendo o todo ou inteiro, sendo o tamanho da caneta ocupado por 5 dessas seis partes, daí segue o comprimento da caneta como sendo a fração 5/6 do palmo.

Fig. 15 – A situação-problema com fração



Fonte: Editora Moderna

A partir dessa apresentação, o livro segue com descrição da nomenclatura dos elementos de cada fração, numerador e denominador, bem como a definição de cada um destes dois:

Fig. 16 – Definição de numerador e denominador

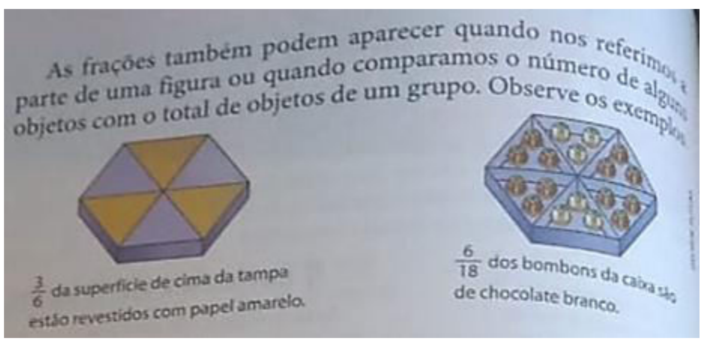
O palmo, nesse caso, é o **todo** ou o **inteiro** e é representado por $\frac{6}{6}$ (lemos: "seis sextos"). O comprimento da caneta é parte de 1 inteiro e foi representado pela fração $\frac{5}{6}$.

Em uma fração, o **denominador** é o número abaixo do traço e representa a quantidade de partes iguais em que o todo foi dividido. Já o número acima do traço, o **numerador**, indica a quantidade de partes consideradas do todo.

Fonte: Editora Moderna

Por fim, aborda outros dois exemplos onde podem ser aplicados o conceito de fração, como pode ser visto na figura abaixo e, em seguida, o livro descreve como se dá a leitura das frações por meio de uma tabela e dispõe questões para que seja feita a prática desta parte do conteúdo.

Fig. 17 – Outra situação-problema



Fonte: Editora Moderna

Na apresentação do conceito de fração, podemos verificar que os autores do livro se preocuparam em introduzi-lo com uma situação do cotidiano, não se detendo apenas a parte teórica já de início, porém, vemos que o exemplo expressa apenas um dos significados de fração, o de parte-todo. Além disso, esse significado é repetido nas outras duas situações apresentadas, não sendo colocado o outro significado fundamental, o de quociente, que segundo os textos de Mamede, Nunes e Bryant (2005) é o que produz um melhor aprendizado em relação ao conceito de fração. Seria interessante que o livro introduzisse o conteúdo mostrando dois exemplos, um para cada significado.

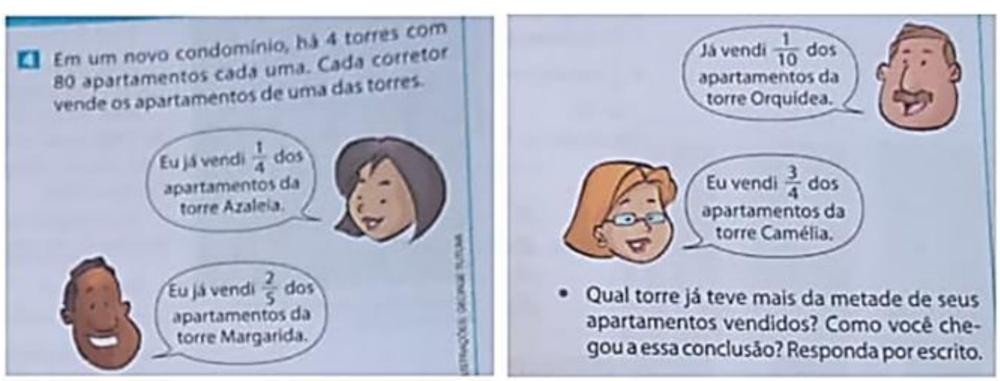
Outro ponto que pode ser destacado diz respeito a pouca explicação do livro quanto ao uso da primeira fração escrita, 5/6, onde está escrito: "Dividindo a medida do palmo de Ana em 6 partes, percebemos que a caneta mede 5/6 ... do palmo". Veja que nessa frase, a medida da caneta já é representada por uma fração sem que antes haja uma justificativa, como destacar a quantidade de partes, a caneta ocupa em relação às seis ocupadas pela medida do palmo.

O enunciado seria melhor explicado se estivesse escrito como a seguir: "Dividindo a medida do palmo de Ana em 6 partes, percebemos que a caneta '*tem a medida de 5 dessas 6 partes, e por este motivo dizemos que a caneta'* mede 5/6 ... do palmo". Com essa explicação, é possível entender que do total de seis partes do palmo de Ana, a caneta ocupa apenas 5 deles, por isso seu comprimento é representado por 5/6 desse palmo.

Ainda no tocante ao conceito de fração, um dos exemplos apresentados posteriormente, visto na figura 17, é possível notar que no exemplo onde são colocados os bombons organizados numa caixa que é dividida em seis partes, poderia ser utilizado para apresentar o significado de quociente (divisão), modificando a situação para um exemplo em que havia 18 bombons, dispostos inicialmente fora da caixa, para serem repartidos igualmente entre os 6 espaços da dela, mostrando assim que a divisão entre 18 e 6 pode ser representada pela fração 18/6.

Dentre as questões dispostas pelo livro para este primeiro conteúdo, podemos destacar duas delas que apresentaram aspectos importantes quanto ao conceito de frações.

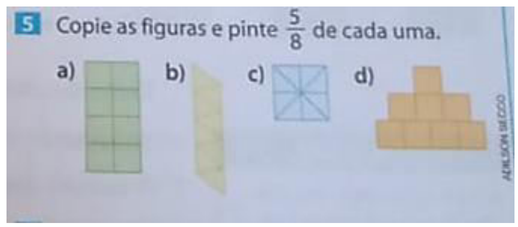
Fig. 18 – Situação-problema envolvendo fração



Fonte: Editora Moderna

Uma delas, na figura acima, por meio de uma situação-problema caracterizada como uma pergunta aberta, busca verificar se os alunos têm a noção da magnitude das frações colocadas mesmo que não tenha sido trabalhada a comparação de frações. Isso é muito importante para o entendimento correto do conceito de fração, pois se o aluno compreende que a fração 1/2 representa uma quantidade maior que a fração 2/5, mostra que ele entendeu o conceito e não trata os elementos das frações de forma separada.

Fig. 19 – Exercício sobre representação de fração



Fonte: Editora Moderna

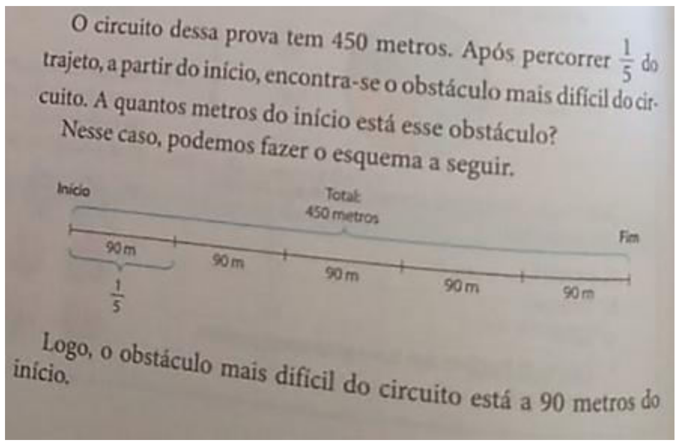
A segunda questão a ser destacada proporciona ao aluno um momento de criação e interação dinâmica com as frações, utilizando cada uma das imagens da questão, na qual é pedido para que os alunos desenhem no caderno e destaquem uma fração do total de partes de cada desenho. Ressaltamos a importância que o professor deve ter nesses momentos, pois deve ficar claro para o aluno que ele deve fazer o desenho de forma que todas as partições tenham o mesmo tamanho, caso contrário, não haverá o correto entendimento do conceito trabalhado.

Logo após a primeira lista de questões, o livro apresenta cinco situações que envolvem fração e tratam de outros exemplos que podem ser vistos no cotidiano dos alunos ou fazem parte de um ambiente de realidade. Dentre eles, podemos identificar que três se tratam de exemplos nos quais é utilizado o significado de operador multiplicativo e nos outros dois exemplos foram abordados os significados de quociente e novamente o significado de parte-todo.

Podemos perceber que não foram apresentadas situações nas quais a fração é vista como um número, como encontrar a posição de uma fração na reta numérica, ou em situações com o significado de medida. É natural o livro não trabalhar situações de medida até o momento da análise, visto que Campos, Magina e Nunes (2006, p. 127) dizem que o significado de medida está associado “(...) a probabilidade de um evento ocorrer é a medida pelo quociente número de casos favoráveis divido pelo número de casos possíveis.” Também não foi possível encontrar neste livro a abordagem de fração como significado de número.

Destacaremos uma das situações apresentadas no livro que faz a utilização do significado de fração como operador multiplicativo: em um circuito de 450 metros, partindo do início, após 1/5 desse circuito está posto o obstáculo mais difícil. A questão procura saber a que distância do início dele está esse obstáculo, como pode ser visto na figura a seguir:

Fig. 20 – Aplicação do significado de operador multiplicativo


O circuito dessa prova tem 450 metros. Após percorrer $\frac{1}{5}$ do trajeto, a partir do início, encontra-se o obstáculo mais difícil do circuito. A quantos metros do início está esse obstáculo?

Nesse caso, podemos fazer o esquema a seguir.

Logo, o obstáculo mais difícil do circuito está a 90 metros do início.

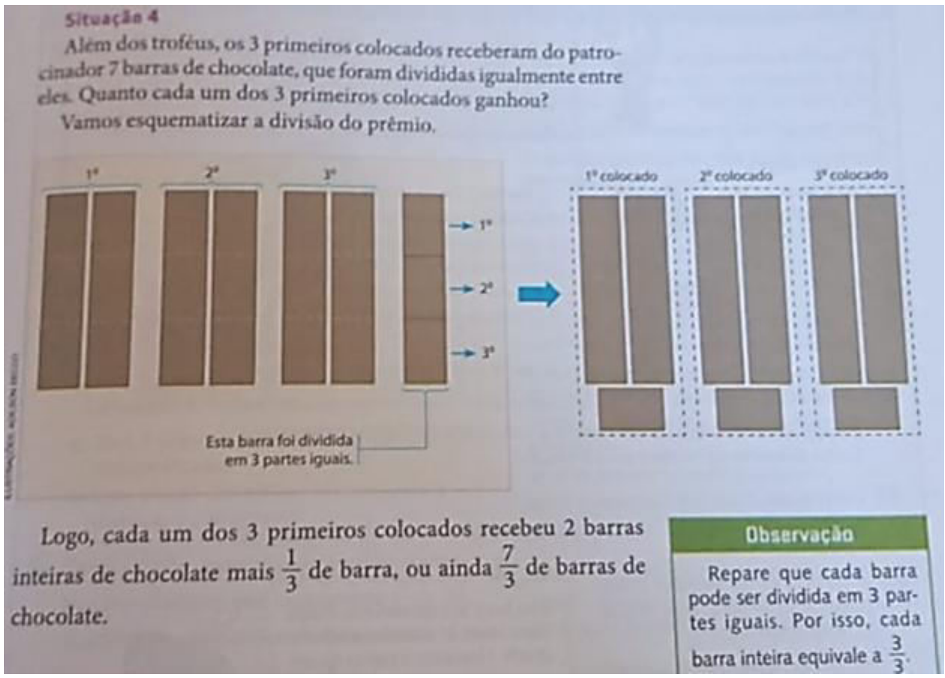
Fonte: Editora Moderna

Podemos classificar a fração utilizada nessa situação como operador multiplicativo justamente pelo fato de que para encontrar o valor associado a ela, que é 90 metros, é preciso, mesmo que de forma intuitiva, efetuar a multiplicação entre a fração 1/5 e o comprimento total do circuito, de 450 metro. Mas, o que caracteriza esse significado é a forma com que é empregado o raciocínio para encontrar o quanto em valor, em metros, neste exemplo, a fração representa, não se tratando do seu valor numérico em si, mas do valor que está associado a ela.

É possível perceber que este significado está intimamente associado ao de parte-todo, pois para resolver essa questão, é preciso entender que o todo, 450 metros de circuito, precisa ser repartido em 5 medidas de comprimentos iguais, sendo que na primeira delas haverá o obstáculo mais difícil, ou seja, do todo, 5 partes com 90 metros cada, para selecionar uma dessas. Porém, eles são classificados de forma diferente pelo fato de que no significado de operador multiplicativo a fração está sendo associada um valor que não representa sua magnitude, diferentemente do significado de parte-todo.

Não analisaremos a situação do significado de parte-todo, pois é descrito de forma semelhante ao primeiro exemplo tratado no início do livro. Em seguida, temos a situação em que a fração tem o significado de quociente, e neste exemplo, pretende-se dividir 7 barras de chocolate para 3 pessoas, como é possível ver na figura a seguir:

Fig. 21 – Aplicação do significado de quociente


Situação 4

Além dos troféus, os 3 primeiros colocados receberam do patrocinador 7 barras de chocolate, que foram divididas igualmente entre eles. Quanto cada um dos 3 primeiros colocados ganhou?

Vamos esquematizar a divisão do prêmio.

Logo, cada um dos 3 primeiros colocados recebeu 2 barras inteiras de chocolate mais $\frac{1}{3}$ de barra, ou ainda $\frac{7}{3}$ de barras de chocolate.

Observação

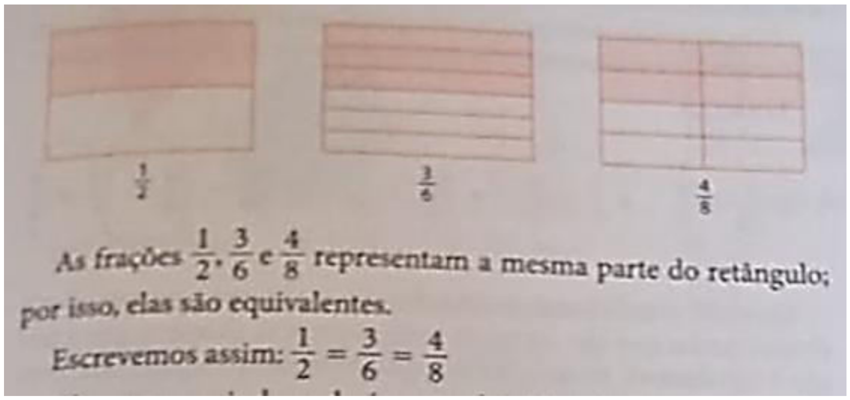
Repare que cada barra pode ser dividida em 3 partes iguais. Por isso, cada barra inteira equivale a $\frac{3}{3}$.

Fonte: Editora Moderna

Podemos classificar a fração desse exemplo como o significado de quociente por se tratar de uma divisão entre duas grandezas: a quantidade de barras de chocolate, que foram 7, e o número de pessoas a serem distribuídas as barras, 3, logo essa operação pode ser representada pela fração 7/3, sendo possível perceber que esse significado é mais intuitivo em relação aos outros, pois segundo ele faz parte dos conhecimentos informais sobre frações que os alunos possuem, como tratam Mamede, Nunes e Bryant (2005).

Em relação ao conteúdo de frações equivalentes, o livro inicia a apresentação do tema com um texto dizendo que existem frações com elementos, numerador e denominador distintos, mas que representam a mesma quantidade; em seguida exemplifica esse fato utilizando partição de um retângulo, sendo o primeiro deles é dividido em duas partes iguais e uma delas é destacada, representando a fração ½. Em outra imagem, vemos um mesmo retângulo agora com seis partes iguais e três delas destacadas, formando a fração 3/6 e, por fim, ou terceiro com 8 partes iguais e 4 delas tomadas, formando a fração 4/8.

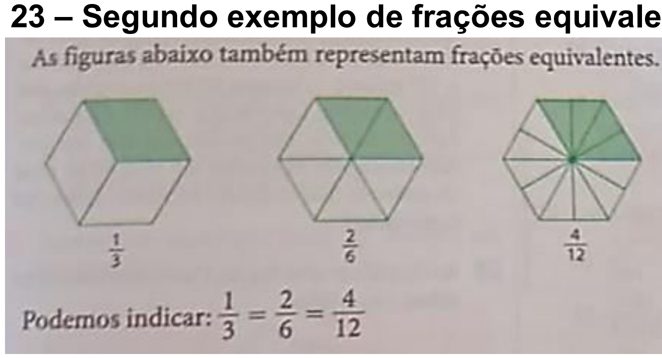
Fig. 22 – Frações equivalentes



Fonte: Editora Moderna

O objetivo dessas partições é fazer com que o aluno perceba que mesmo o inteiro sendo repartido, a quantidade tomada, em destaque, tem o mesmo tamanho, as mesmas proporções, mostrando assim que elas têm o mesmo resultado, mesma magnitude, consequentemente elas são consideradas iguais. Após aplicar o exemplo, o livro apresenta uma definição de frações equivalentes: “Frações que representam o mesmo valor em relação a uma unidade são frações equivalentes.” A apresentação é finalizada com mais um exemplo de frações equivalentes utilizando agora a partição de um hexágono:

Fig. 23 – Segundo exemplo de frações equivalentes



Fonte: Editora Moderna

Podemos perceber que a introdução foi bem apresentada pelo livro, por meio da visualização da representação da equivalência, pois a utilização de recursos pictóricos ajuda no melhor entendimento pelos alunos. É possível notar a presença unânime do significado de parte-todo para introduzir esse conceito, sendo que isso pode deixar o aluno limitado a uma única forma de ver a fração e, para tanto, seria importante para essa introdução aplicar um exemplo onde houvesse o significado de quociente, pois o aluno perceberia como se dão as frações equivalentes nesse caso.

Destacamos aqui um exemplo que poderia ser aplicado para introduzir frações equivalentes usando o significado de quociente:

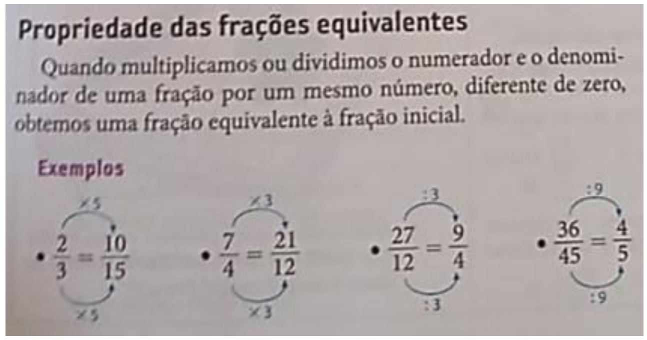
João decidiu fazer uma festinha com seus amigos para comemorar seu aniversário. Querendo deixar tudo bem organizado, ele calculou que 9 brigadeiros seriam divididos para 3 amigos, ou seja, cada convidado ficaria com 9/3 dos brigadeiros, então ele continuou a conta e viu para que cada convidado ficasse com mesma quantidade da conta anterior teria que fazer 18 brigadeiros para dividir com os 6 amigos, formando a fração 18/6 e, por fim, 27 brigadeiros para 9 amigos, formando a fração 27/9.

Fig. 24 – Ilustração da situação-problema

Fonte: O autor (2021)

Neste exemplo, percebemos que em todas as contas feitas por João, seus amigos ficarão com 3 brigadeiros cada, ou seja, o resultado das frações, 9/3, 18/6 e 27/9 possuem o mesmo valor e assim são ditas iguais. Logo, temos que elas são equivalentes e, assim $\frac{9}{3} = \frac{18}{6} = \frac{27}{9} = 3$. Depois da apresentação de frações equivalentes, o livro descreve o procedimento adotado para que, a partir de uma fração, seja possível encontrar frações equivalentes a fração inicial:

Fig. 25 – Procedimento para encontrar frações equivalentes


Propriedade das frações equivalentes

Quando multiplicamos ou dividimos o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número, diferente de zero, obtemos uma fração equivalente à fração inicial.

Exemplos

- $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$ ($\times 5$)
- $\frac{7}{4} = \frac{21}{12}$ ($\times 3$)
- $\frac{27}{12} = \frac{9}{4}$ ($:3$)
- $\frac{36}{45} = \frac{4}{5}$ ($:9$)

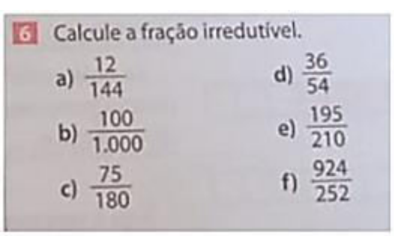
Fonte: Editora Moderna

O livro dá continuidade falando sobre fração irredutível, com a definição e exemplos práticos, apenas com frações, usando o procedimento apresentado anteriormente para encontrar essas frações a partir da simplificação. O livro explica previamente que quando dividirmos o numerador e denominador de uma fração por um número que seja divisor destes, estamos fazendo uma simplificação dessa fração.

Analisando a parte em que o livro trata de como encontrar frações equivalentes a uma inicial, bem como da simplificação e fração irredutível, vemos que ele não apresenta esses conceitos utilizando algum mecanismo de visualização pictórica, porém, é notável que isso não interfere no entendimento do conteúdo de frações equivalentes em geral, visto que ele foi bem introduzido por conter este o recurso da visualização.

Analisando as questões que foram dispostas pelo livro logo após ter apresentado o conteúdo de frações equivalentes, vemos que foram dispostas 7 questões, dentre elas, apenas duas tratam exclusivamente de frações equivalentes em geral, uma delas sobre fração irredutível e outra para verificar se as frações são equivalentes ou não.

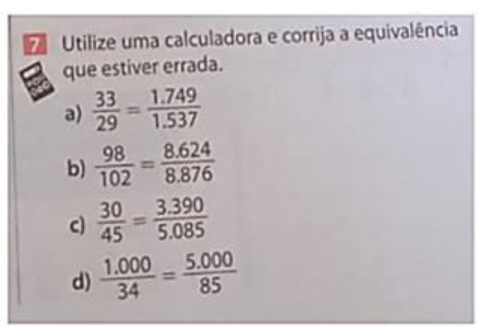
Fig. 26 – Questões de frações equivalentes


6 Calcule a fração irredutível.

a) $\frac{12}{144}$ d) $\frac{36}{54}$

b) $\frac{100}{1.000}$ e) $\frac{195}{210}$

c) $\frac{75}{180}$ f) $\frac{924}{252}$


7 Utilize uma calculadora e corrija a equivalência que estiver errada.

a) $\frac{33}{29} = \frac{1.749}{1.537}$

b) $\frac{98}{102} = \frac{8.624}{8.876}$

c) $\frac{30}{45} = \frac{3.390}{5.085}$

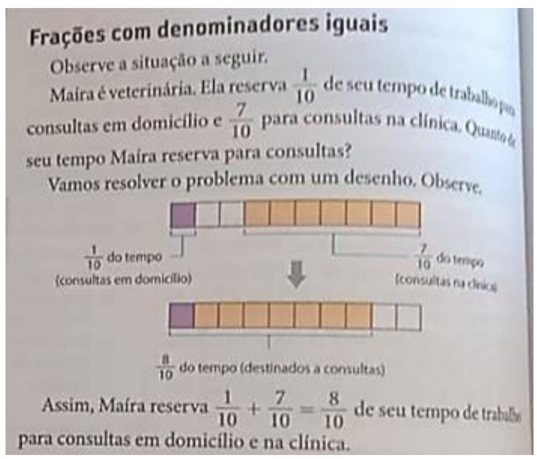
d) $\frac{1.000}{34} = \frac{5.000}{85}$

Fonte: Editora Moderna

Um ponto negativo é que essas duas questões são tradicionais, promovendo apenas a prática dos procedimentos, sem que isso seja feito por meio de uma situação-problema ou por recursos pictóricos, como os que foram utilizados para introduzir o conteúdo.

Para introduzir o conteúdo de soma e subtração com frações o livro inicia com um exemplo prático, por meio de uma situação real, utilizando inicialmente frações de mesmo denominador para realizar as operações. O livro usa mais uma vez apenas o significado de parte-todo no seu exemplo e representa as frações usando barras seccionadas com algumas das partes destacadas para representar as frações, como é possível verificar na figura a seguir:

Fig. 27 – Soma de frações com mesmo denominador



Frações com denominadores iguais

Observe a situação a seguir.

Maira é veterinária. Ela reserva $\frac{1}{10}$ de seu tempo de trabalho para consultas em domicílio e $\frac{7}{10}$ para consultas na clínica. Quanto de seu tempo Maira reserva para consultas?

Vamos resolver o problema com um desenho. Observe.

Assim, Maira reserva $\frac{1}{10} + \frac{7}{10} = \frac{8}{10}$ de seu tempo de trabalho para consultas em domicílio e na clínica.

Fonte: Editora Moderna

Para exemplificar a operação de subtração, o livro dá continuidade ao exemplo utilizado para a soma e, assim, introduz a forma como deve ser efetuada a subtração entre duas frações de mesmo denominador:

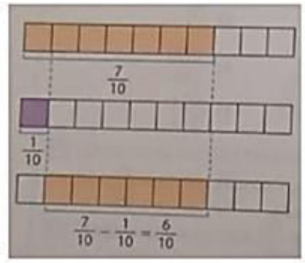
Fig. 28 – Subtração de frações com mesmo denominador

Se quisermos saber que fração indica quanto tempo a mais da reserva para consultas na clínica do que para consultas em domicílio, fazemos:

$$\frac{7}{10} - \frac{1}{10} = \frac{6}{10}$$

Veja a representação ao lado.

Portanto, para consultas na clínica, Maíra dedica $\frac{6}{10}$ de tempo a mais do que para consultas em domicílio.

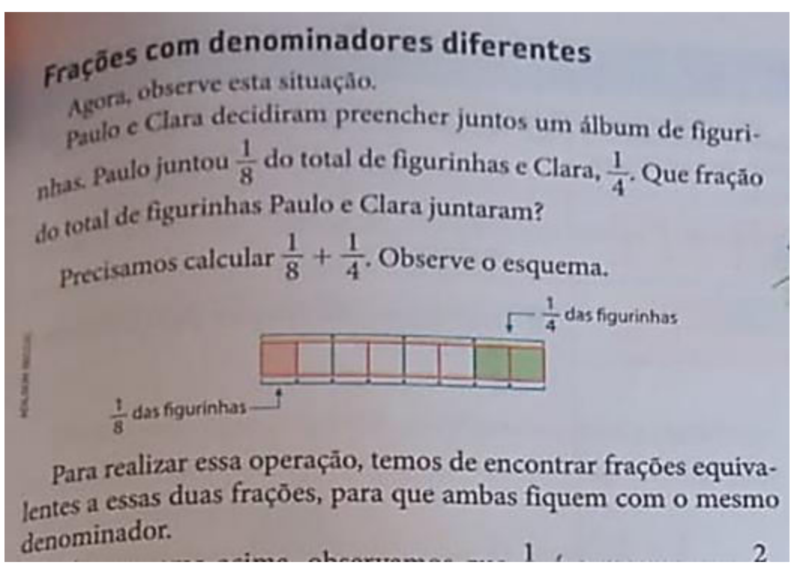


Fonte: Editora Moderna

Em seguida o livro descreve o procedimento que deve ser adotado para se efetuar as duas operações: *"Para calcular a soma ou a diferença de duas frações com denominadores iguais, somamos ou subtraímos os numeradores, conforme a operação desejada, e conservamos os denominadores.".* Por fim, o livro traz mais um exemplo de cada operação apresentada, desta vez sem a utilização de uma situação real, apenas para que os alunos fixem a forma com que as operações são feitas.

Logo após apresentar a soma com frações de mesmo denominador, o livro apresenta mais um exemplo contextualizado com uma situação do cotidiano dos alunos, agora contendo duas frações com denominador distintos, porém um deles sendo múltiplo do outro, para explicar como se dá a soma com esse tipo de fração.

Fig. 29 – Explicação da soma de frações com denominadores distintos


Frações com denominadores diferentes

Agora, observe esta situação.

Paulo e Clara decidiram preencher juntos um álbum de figurinhas. Paulo juntou $\frac{1}{8}$ do total de figurinhas e Clara, $\frac{1}{4}$. Que fração do total de figurinhas Paulo e Clara juntaram?

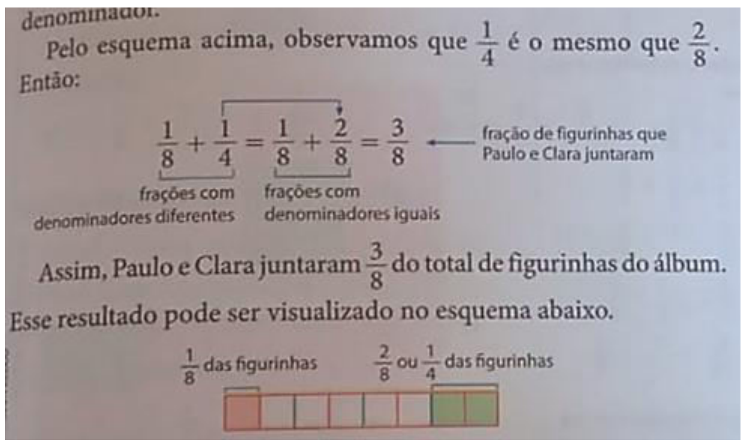
Precisamos calcular $\frac{1}{8} + \frac{1}{4}$. Observe o esquema.

Para realizar essa operação, temos de encontrar frações equivalentes a essas duas frações, para que ambas fiquem com o mesmo denominador.

Fonte: Editora Moderna

Depois de apresentar o exemplo e o “esquema” feito na representação por meio das barras seccionadas, o livro explica que para realizar a operação, é preciso encontrar as frações equivalentes as da questão de forma que as duas tenham o mesmo denominador, para que a partir de então, seja possível somá-las de fato, utilizando a mesma ideia apresentada anteriormente, somando os numeradores e conservando, repetindo, o denominador comum:

Fig. 30 – Continuação da explicação da soma de frações com denominadores distintos



denominador.

Pelo esquema acima, observamos que $\frac{1}{4}$ é o mesmo que $\frac{2}{8}$.

Então:

$$\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{4}}_{\text{frações com denominadores diferentes}}=\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{2}{8}}_{\text{frações com denominadores iguais}}=\frac{3}{8} \longleftarrow \text{fração de figurinhas que Paulo e Clara juntaram}$$

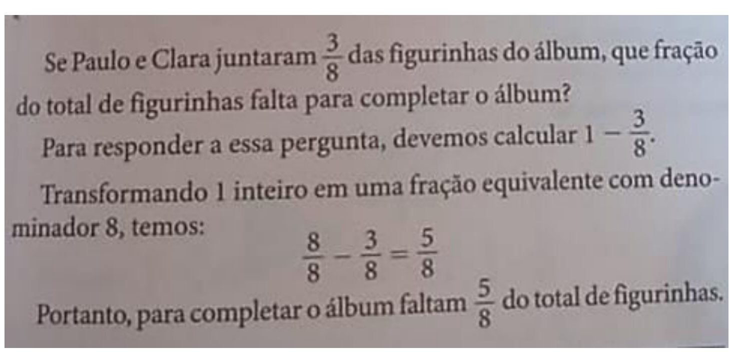
Assim, Paulo e Clara juntaram $\frac{3}{8}$ do total de figurinhas do álbum.

Esse resultado pode ser visualizado no esquema abaixo.

Fonte: Editora Moderna

Para a subtração, como o processo é muito semelhante, o livro apresenta a operação dando novamente continuidade ao exemplo utilizado para a soma, porém agora com subtração entre a unidade, 1, e uma fração:

Fig. 31– Explicação da subtração de frações com denominadores distintos



Se Paulo e Clara juntaram $\frac{3}{8}$ das figurinhas do álbum, que fração do total de figurinhas falta para completar o álbum?

Para responder a essa pergunta, devemos calcular $1-\frac{3}{8}$.

Transformando 1 inteiro em uma fração equivalente com denominador 8, temos:

$$\frac{8}{8}-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$$

Portanto, para completar o álbum faltam $\frac{5}{8}$ do total de figurinhas.

Fonte: Editora Moderna

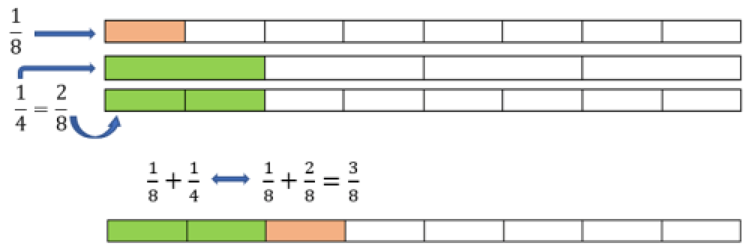
Finalizando a apresentação das duas operações, o livro descreve como realizar a soma ou subtração, agora com denominadores distintos: *"Para calcular a soma ou a diferença de duas frações com denominadores diferentes, encontramos frações equivalentes às iniciais, com um mesmo denominador, e então, efetuamos a operação desejada"*. Da mesma forma, o livro dispõe dois exemplos numéricos para fixar o modo de efetuar cada uma dessas operações.

Fazendo uma análise do livro podemos pontuar alguns aspectos que contribuem para o ensino de frações: o primeiro deles é a utilização de situações do cotidiano para apresentar as duas operações. Sabemos que o seu primeiro contato é fundamental e precisa ser bem explicado para que o aluno possa dissociar o modo com que se opera números inteiros da forma com que se opera as frações, porém não apenas saber que são formas distintas, mas compreender o motivo pelo qual a soma e subtração são distintas quando comparamos os números inteiros e fracionários, que por sua vez pertencem ao conjunto dos racionais. Com exemplos do cotidiano e a representação pictórica essa diferença fica mais clara, e a partir disso o aluno entende que os elementos da fração não devem ser operados de forma isolada.

Outro ponto fundamental foi a cautela que o livro teve em primeiro mostrar como são feitas as operações com frações de mesmo denominador, para depois apresentar a forma de operar com frações de denominadores diferentes. Essa forma de apresentar o conteúdo organiza o conhecimento para o entendimento dos alunos, visto que é preciso utilizar a ideia de como operar com frações de mesmo denominador para somar e subtrair com denominadores distintos, partindo do pressuposto que só é possível somar e subtrair frações que possuam o mesmo denominador, e caso elas não sejam assim, será preciso encontrar frações equivalentes a elas de forma que essa observação seja atendida.

Um ponto que pode ser um pouco confuso pode ser visto na forma com que o livro representa como é feita a soma com denominadores diferentes por meio da barra seccionada (figura 29). Nela percebe-se que há uma partição em 8 e outra partição sobrescrita a essa, em 4 partes. Isso pode confundir o aluno e caso não seja muito bem explicado pode causar dificuldade na sua aprendizagem. Uma forma simples que poderia facilitar a visualização das duas frações seria fazer por meio de duas barras distintas de mesmo comprimento, como pode ser visto a seguir:

Fig. 32– Explicação da soma com outra forma de representação



Fonte: Editora Moderna

Com a representação das frações sendo feita por uma barra, cada aluno consegue identificar melhor a magnitude de cada fração, e pela forma que é apresentado fica perceptível que em cada parte da representação 1/4 equivale a duas partes da representação 1/8, assim, se constrói uma nova barra para a representação 1/4 preservando o tamanho da parte destacada, em verde; com isso fica mais evidente que 1/4 = 2/8 e, por fim, para fazer a soma basta juntar as partes coloridas de mesmo tamanho.

Um ponto que pode ser percebido ainda na parte de soma e subtração de frações com denominadores distintos foi que o livro apresentou este conteúdo usando apenas denominadores múltiplos, em que apenas uma das frações precisaria ser modificada para uma equivalente com o mesmo denominador da outra, faltando apresentar um exemplo com outras combinações de denominadores, com números primos entre si por exemplo.

Essa falta de aplicação para os mais variados casos limita o conhecimento do aluno, pois ele pode entender que para encontrar o denominador comum será necessário apenas alterar uma das frações, o que não é suficiente para grande parte dos casos, e isso causará uma imensa dificuldade em realizar as operações. Por este motivo é importante apresentar todos os casos possíveis para os denominadores.

O último ponto a ser destacado nessa apresentação é que o livro não dá continuidade ao conteúdo mostrando uma forma de encontrar frações equivalentes às iniciais com o denominador comum, como, por exemplo, o método do MMC.

O livro apenas coloca que para somar ou subtrair frações precisaria ter o mesmo denominador, caso não tivesse, teria que se encontrar frações equivalentes que atendessem esse critério, não mostrando como proceder para este fim, ou seja, o livro deixou livre para que o aluno buscasse, por tentativa e erro, encontrar essas frações equivalentes, sendo que no capítulo anterior ele apresenta todo o conteúdo de MMC.

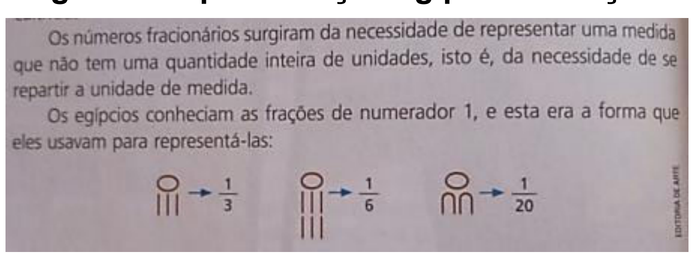
É importante ressaltar que o mero ensino do método do MMC de forma isolada não garante que o aluno tenha compreendido corretamente como efetuar as duas operações em questão, mas é importante para dar continuidade à apresentação que foi feita neste livro, e serviria como uma ferramenta para articular o conhecimento teórico que o livro dispôs. Agora vamos para a análise do segundo livro didático da Editora FTD no próximo tópico.

2.5.1 Análise do segundo livro didático

Vamos agora fazer a descrição dos quatro temas pré-determinados para o ensino de frações no livro didático do sexto ano “A Conquista da Matemática” editado pela FTD em 2018, analisando a forma com que eles tratam esses temas, que são eles, o conceito de fração, significados de uma fração abordados no livro, como ele apresenta o tema de frações equivalentes e, por fim, como ele apresenta as operações de soma e subtração com frações.

O livro inicia a apresentação do conceito de fração com um contexto histórico, antes de falar sobre o conceito em si, mostrando como a fração surgiu para o povo do Egito de acordo com a necessidade de medir terrenos que não tinham a unidade de medida usada por eles, ou seja, tinham, por exemplo, 4 unidades e um pouco da quinta unidade sem completá-la. O livro ainda trouxe a forma com que os egípcios representavam as frações:

Fig. 33 – Representação egípcia de fração

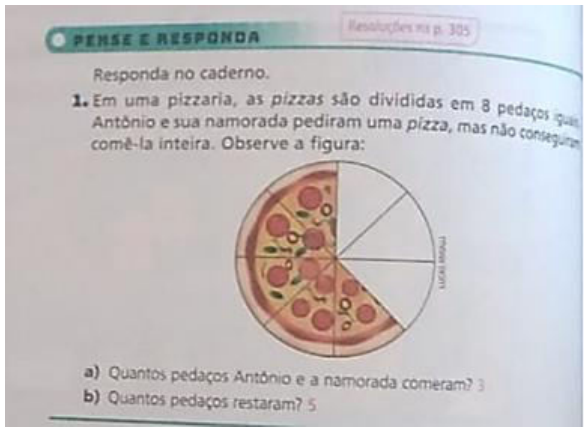

Os números fracionários surgiram da necessidade de representar uma medida que não tem uma quantidade inteira de unidades, isto é, da necessidade de se repartir a unidade de medida.

Os egípcios conheciam as frações de numerador 1, e esta era a forma que eles usavam para representá-las:

Fonte: Editora FTD

Em seguida, o livro coloca uma situação-problema envolvendo o significado de parte-todo para que os alunos respondam com seus conhecimentos prévios, sem que o conhecimento de frações seja necessário para solucionar essa situação:

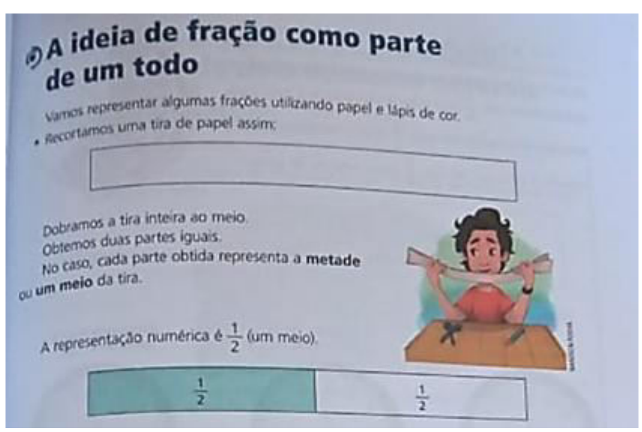
Fig. 34 – Desafio prévio



Fonte: Editora FTD

Após a introdução com um contexto histórico, o livro começa a apresentar o conceito de fração, e esse tema foi dividido em duas partes que foram intituladas de *“A ideia de fração como parte de um todo”* e *“A ideia de fração como resultado da divisão de dois números naturais”*, logo vemos que este trabalhou os dois significados que devem ser apresentados em relação ao conceito de fração, como determina a BNCC (BRASIL, 2018):

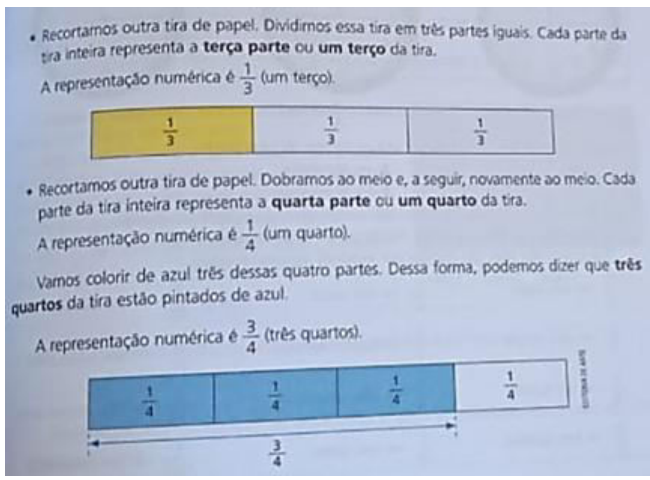
Fig. 35 – Ideia de fração com o significado parte-todo



Fonte: Editora FTD

O livro apresenta a ideia de fração com o significado de parte-todo a partir da aplicação de uma atividade que proporciona a manipulação de objetos concretos, utilizando tiras de papel do mesmo tamanho para representar o todo e fazendo dobras para dividir essas tiras em partes iguais. Com isso algumas dessas partes demarcadas pelas dobras eram pintadas com lápis de cor para representar a parte destacada e, em seguida, o livro determina que o número total de partes da tira equivale ao denominador da fração e as partes destacadas o seu numerador, mas sem utilizar a nomenclatura desses dois elementos:

Fig. 36 – Explicação do conceito de fração pelo significado parte-todo



- Recortamos outra tira de papel. Dividimos essa tira em três partes iguais. Cada parte da tira inteira representa a **terça parte** ou **um terço** da tira.

  A representação numérica é $\frac{1}{3}$ (um terço).

- Recortamos outra tira de papel. Dobramos ao meio e, a seguir, novamente ao meio. Cada parte da tira inteira representa a **quarta parte** ou **um quarto** da tira.

  A representação numérica é $\frac{1}{4}$ (um quarto).

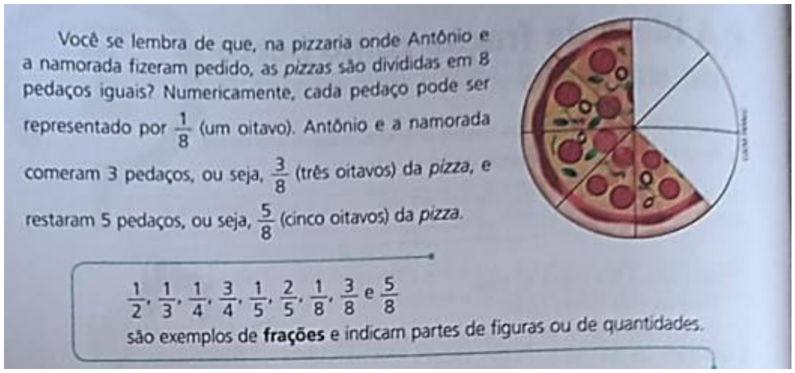
  Vamos colorir de azul três dessas quatro partes. Dessa forma, podemos dizer que **três quartos** da tira estão pintados de azul.

  A representação numérica é $\frac{3}{4}$ (três quartos).

Fonte: Editora FTD

Com essa atividade é introduzido o conceito de fração pelo significado de parte-todo. A continuidade da apresentação da ideia é dada pela retomada da situação-problema colocada antes da apresentação do conteúdo, agora sendo aplicado o conhecimento do conceito de fração que foi apresentado, afirmando que a parte da pizza consumida é representada pela fração 3/8, enquanto que a parte que sobrou foi 5/8. Junto a isso, o livro coloca exemplo de frações que representam "*parte de figuras ou de quantidades*":

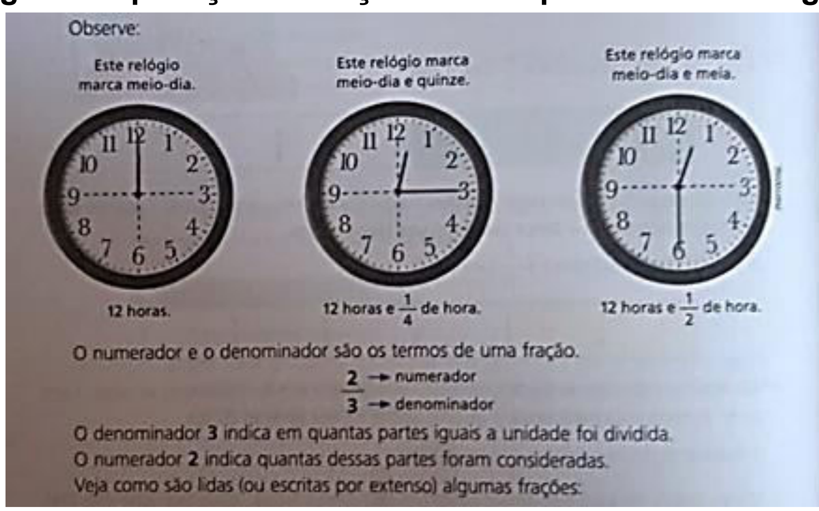
Fig. 37 – Explicação do desafio da figura 34



Fonte: Editora FTD

O livro ainda coloca outro exemplo, agora utilizando os ponteiros do relógio para determinar algumas frações:

Fig. 38 – Aplicação de fração com os ponteiros do relógio



Fonte: Editora FTD

Por fim, ele apresenta os elementos de uma fração com sua nomenclatura, numerador de denominador e, em seguida, são dispostos a forma como algumas frações são lidas, como “um meio” e “dois quintos”, por exemplo.

Percebemos até o momento desta descrição que o segundo livro introduziu bem o conceito de fração, e vemos nele a preocupação de apresentar os dois significados pertinentes a este conceito, o de parte-todo e o de quociente, sendo que essas duas abordagens permitem que os alunos tenham um conhecimento amplificado do conceito de fração.

A introdução do conteúdo por meio do contexto histórico permite que o aluno enxergue a utilidade do tema, permitindo o entendimento de que as frações surgiram por um motivo e não foram criadas “do nada”, o que é uma ideia muito falada pelos alunos para os conteúdos da Matemática e o contexto histórico pode justificar para eles o motivo do tema ser estudado.

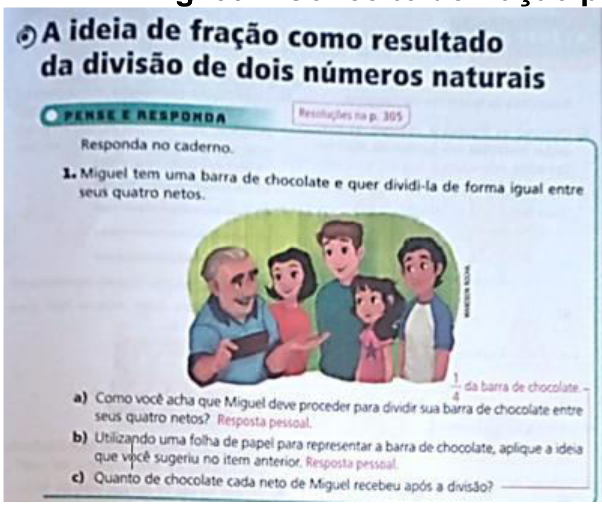
Podemos ressaltar a forma com que o livro apresenta inicialmente a ideia de fração como parte de um todo, por meio da manipulação e visualização disposta pela atividade das dobras na tira de papel. Essa metodologia proporciona uma aprendizagem dinâmica para o aluno, além disso, explicou bem como chegou em cada uma das frações escritas, dizendo que parte da barra desenhada no livro repartida em 4 partes, por exemplo, representa 1/4 e que a parte da barra representada por 3/4 equivale a soma de três partes da tira, ou seja, 1/4 + 1/4 + 1/4 = 3/4. Assim, essa ideia justifica o motivo pelo qual só é possível somar frações com mesmo denominador.

O terceiro aspecto a ser destacado nessa parte do livro diz respeito a forma com que ele retoma a situação-problema proposta antes de falar sobre o conceito de fração, fazendo com que o aluno veja a questão de uma forma diferente do que visto antes. Além disso, este exemplo, assim como o dos ponteiros do relógio, apresenta para os alunos onde uma fração pode ser vista no seu dia a dia, o que também é fundamental para dar sentido ao aluno em seu aprendizado.

De modo geral, a apresentação do conceito de fração na ideia de partes de um todo foi muito bem apresentada neste segundo livro, por ter explorado bem o conceito sem prolongar o tema por muitas páginas, usando apenas duas para dispor toda a ideia, não contando com a página em que foi apresentado o contexto histórico, visto que não se trada da ideia de partes em um todo especificamente.

Já para apresentar o conceito de fração por meio do significado de quociente, o livro traz uma situação-problema simples, na qual a finalidade é dividir uma barra de chocolate entre quatro pessoas:

Fig. 39 – Conceito de fração pelo significado de quociente



A ideia de fração como resultado da divisão de dois números naturais

PENSE E RESPONDA — Resoluções na p. 305

Responda no caderno.

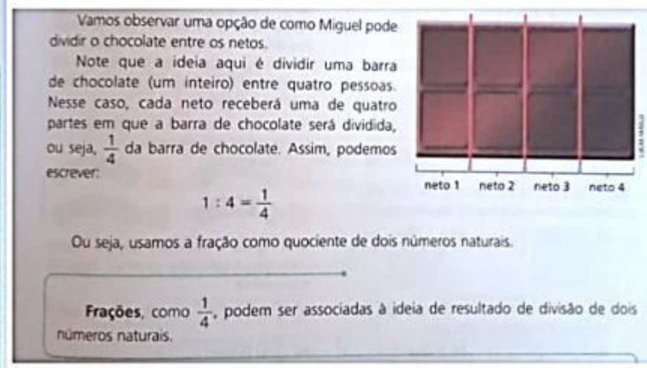
1. Miguel tem uma barra de chocolate e quer dividi-la de forma igual entre seus quatro netos.

$\frac{1}{4}$ da barra de chocolate.

a) Como você acha que Miguel deve proceder para dividir sua barra de chocolate entre seus quatro netos? Resposta pessoal.

b) Utilizando uma folha de papel para representar a barra de chocolate, aplique a ideia que você sugeriu no item anterior. Resposta pessoal.

c) Quanto de chocolate cada neto de Miguel recebeu após a divisão?



Vamos observar uma opção de como Miguel pode dividir o chocolate entre os netos.

Note que a ideia aqui é dividir uma barra de chocolate (um inteiro) entre quatro pessoas. Nesse caso, cada neto receberá uma de quatro partes em que a barra de chocolate será dividida, ou seja, $\frac{1}{4}$ da barra de chocolate. Assim, podemos escrever:

$$1 : 4 = \frac{1}{4}$$

Ou seja, usamos a fração como quociente de dois números naturais.

Frações, como $\frac{1}{4}$, podem ser associadas à ideia de resultado de divisão de dois números naturais.

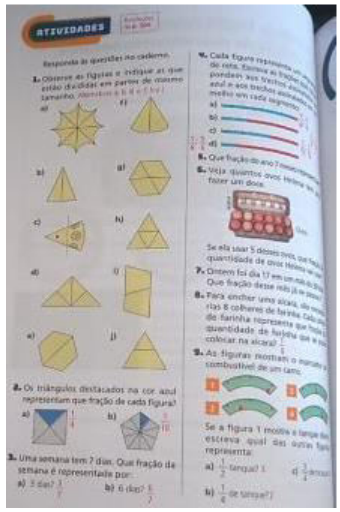
Fonte: Editora FTD

O livro explica uma das formas da divisão ser feita, mas seu objetivo é mostrar que a operação $1 \div 4$ pode ser representada pela fração $\frac{1}{4}$, ou seja, fazer o aluno entender que a fração também pode ser vista como o resultado da divisão entre dois números naturais, assim ele finaliza a apresentação de todo o conceito de fração.

Na segunda parte da conceituação, podemos perceber a forma simples que o significado de quociente traz para uma fração: este por sua vez não foi trabalhado com mais de um exemplo, pois não havia necessidade diante da simplicidade que há quando a fração é usada para representar uma divisão.

Ao final do tema, o livro coloca 9 questões para que os alunos revejam o conteúdo trabalhado até então, e nelas, apesar do livro ter abordado sobre duas ideias de fração, foi possível perceber que todas as questões continham apenas frações com o significado de parte-todo, o que dificulta um pouco a prática dos alunos em relação ao uso de frações com o significado de quociente. Isso inviabiliza principalmente a identificação por parte do aluno de qual significado está sendo empregado em cada questão, o que é muito importante para que se possa ter um domínio maior do conceito de fração.

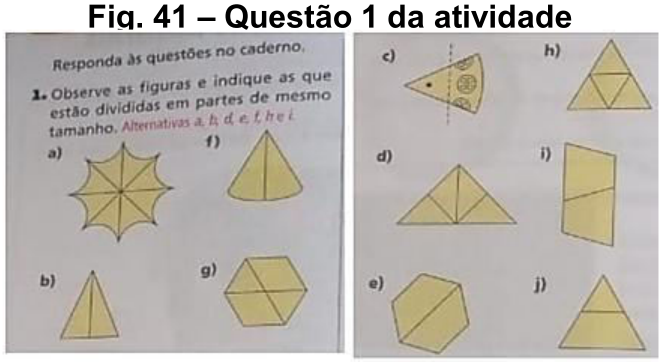
Fig. 40 – Atividades pós apresentação do conceito de fração



Fonte: Editora FTD

Falando das questões em si, podemos perceber que o livro se preocupou em dispor questões que tivessem um contexto do dia a dia e não apenas questões com representação de figuras. Já em relação as questões com desenhos, podemos destacar a primeira pergunta, na qual o livro pede para identificar, dentre as figuras, aquelas que estavam divididas em partes iguais, e essa identificação é fundamental para aluno, pois uma figura que esteja dividida em partes desiguais não poderá ser representada corretamente. Isso é imprescindível para que o aluno consiga distinguir entre figuras divididas em partes iguais e desiguais.

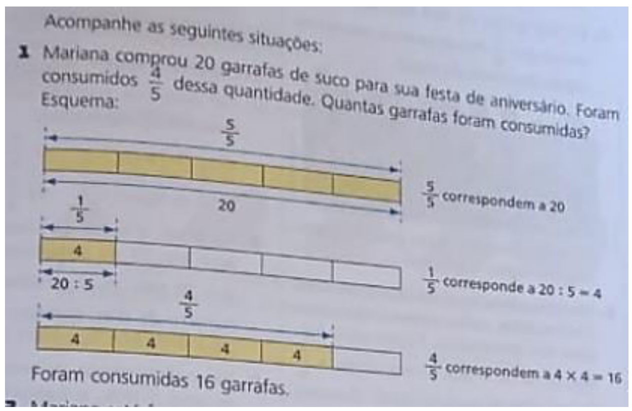
Fig. 41 – Questão 1 da atividade



Fonte: Editora FTD

Após ser trabalhado conceito de fração, o livro separa uma parte para trabalhar apenas situações-problema com frações, dispondo três questões com diferentes formas de serem resolvidas e todas continham o significado de fração como operador multiplicativo, e não foi possível, até então, encontrar o significado de número sendo utilizado:

Fig. 42 – Resolução da situação-problema primeiro caso

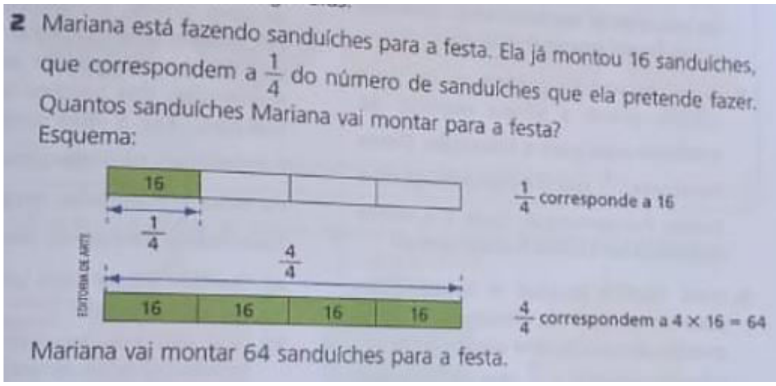


Fonte: Editora FTD

Podemos destacar na primeira situação-problema a forma com que o livro esquematiza os desenhos das barras para representar cada etapa da resolução, associando o número 20 à fração 5/5 e que para encontrar o valor que represente uma das partes, 1/5, seria preciso dividir o 20 por 5, encontrando o 4 como representante da fração unitária, sendo que essa forma organizada do raciocínio traz mais sentindo ao motivo de se estar dividindo.

Quando é encontrada a fração unitária, 1/5, fica ainda mais intuitivo o modo de encontrar o valor que representa a fração 4/5, que é resultado da soma repetida de 1/5 por 4, que é equivalente a fazer a operação de multiplicação $4 \times \frac{1}{5}$. De maneira geral, a esquematização que o segundo livro trouxe ajuda no melhor entendimento do procedimento:

Fig. 43 – Resolução da situação-problema segundo caso



2 Mariana está fazendo sanduíches para a festa. Ela já montou 16 sanduíches, que correspondem a $\frac{1}{4}$ do número de sanduíches que ela pretende fazer. Quantos sanduíches Mariana vai montar para a festa?

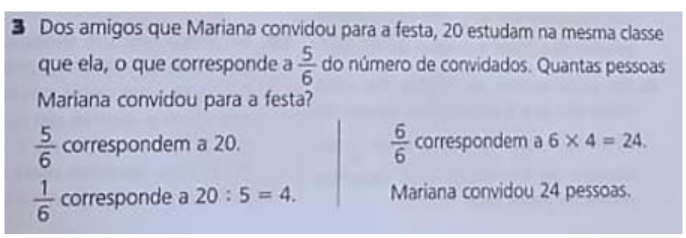
Esquema:

Mariana vai montar 64 sanduíches para a festa.

Fonte: Editora FTD

Destacamos agora a segunda situação-problema proposta por este livro, que utiliza a barra de forma inversa, onde se sabe, a princípio, o valor representado por uma das partes do inteiro, 1/4, que equivale a 16, e a partir desse valor busca-se encontrar quanto ao todo, ou seja, 4/4. Mais uma vez a forma com que o livro esquematiza a relação das partes das barras com o valor que ela representa contribui para que o aluno possa entender que para encontrar o valor total basta multiplicar 16 por 4, encontrando assim, 64 sanduíches como resultado:

Fig. 44 – Resolução da situação-problema terceiro caso



3 Dos amigos que Mariana convidou para a festa, 20 estudam na mesma classe que ela, o que corresponde a $\frac{5}{6}$ do número de convidados. Quantas pessoas Mariana convidou para a festa?

$\frac{5}{6}$ correspondem a 20.

$\frac{1}{6}$ corresponde a $20 : 5 = 4$.

$\frac{6}{6}$ correspondem a $6 \times 4 = 24$.

Mariana convidou 24 pessoas.

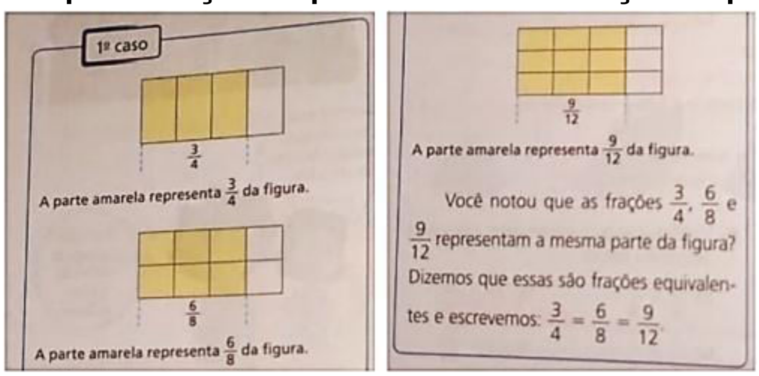
Fonte: Editora FTD

Já na terceira situação-problema o livro não dispõe de um esquema de barras, mas responde à questão por meio da associação com a visualização mental que decorrerá da forma com que as duas outras questões foram apresentadas.

Podemos destacar desta parte do livro, a propositura de atividades com uma quantidade de casos distintos, três modos diferentes de abordar a mesma ideia, e essa flexibilização é fundamental para o aprendizado do aluno, pois este não fica limitado a responder apenas um tipo de abordagem, preparando-o para outras formas em que o significado de operador multiplicativo pode ser empregado. Este tipo de variação estimula também o melhor entendimento por parte do conceito de fração.

Já em relação à apresentação do conceito de frações equivalentes, o segundo livro também introduz o conteúdo utilizando a ideia de partes de um todo, tomando como ferramenta para a explicação do tema uma barra partida inicialmente com algumas de suas partes destacada com uma cor, e posteriormente essas partes do inteiro sofrem sucessivas partições; porém, o tamanho geral da parte colorida em si é preservado, encontrando frações com elementos maiores de forma proporcional como pode ser visto no recorte abaixo:

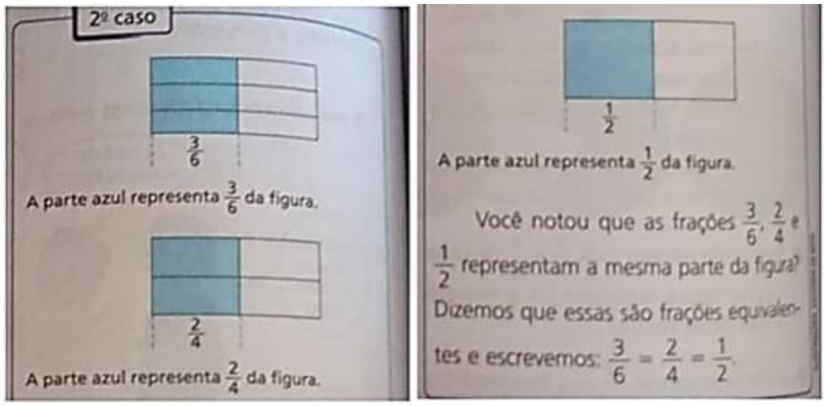
Fig. 45 – Apresentação do primeiro caso de frações equivalentes



Fonte: Editora FTD

O diferencial desta apresentação em relação a que foi feita no primeiro livro é que neste é tratado do caso inverso, onde a barra possui inicialmente uma quantidade de partições e posteriormente elas vão diminuído, mas ainda assim preservando o tamanho geral da parte selecionada, denotado por *"porção"* pelo livro, encontrando agora frações com elementos menores, também de forma proporcional. Vejamos no seguinte recorte:

Fig. 46 – Apresentação do segundo caso de frações equivalentes

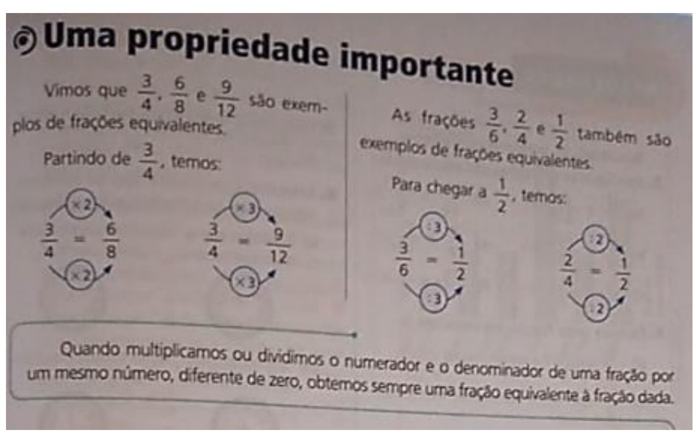


Fonte: Editora FTD

Depois de mostrar esses dois casos, o livro escreve uma definição para as frações equivalentes, dizendo que *“Duas ou mais frações que representam a mesma porção da unidade são chamadas de frações equivalentes.”*.

Dando continuidade ao tema, na parte intitulada pelo segundo livro como “*Uma propriedade importante*” ele apresenta como é possível encontrar outras frações equivalentes a partir de uma inicial, com dois exemplos, usando a multiplicação ou a divisão dos seus elementos por um mesmo número natural, contanto que não seja o zero, e depois o livro redige a forma com que foi feita para encontrar as frações equivalentes:

Fig. 47 – Apresentação de como encontrar frações equivalentes

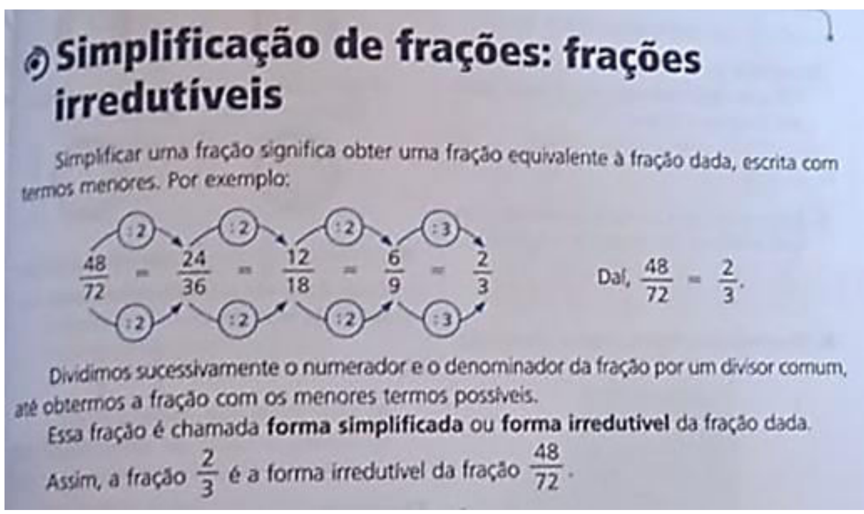


Fonte: Editora FTD

É interessante notar que o livro retoma as frações que foram encontradas nos exemplos usados para apresentar o tema, mostrando como foi possível perceber a equivalência entre elas usando essa propriedade.

Posteriormente o livro traz a definição de uma fração irredutível e o modo de encontrá-la, e neste momento é apresentado dois modos de encontrar uma fração na forma irredutível, ou simplificada: a primeira é pela sucessão de divisões do numerador de denominador por números primos que possam dividir os dois simultaneamente até que os elementos da fração sejam primos entre si, ou seja, apenas o número 1 divide-os. Já a segunda forma é a partir do cálculo do MDC entre o numerador e denominador da fração, para a partir daí, fazer a divisão desses elementos pelo resultado do MDC e já encontrar a fração na forma irredutível:

Fig. 48 – Simplificação de frações e fração irredutível



Simplificação de frações: frações irredutíveis

Simplificar uma fração significa obter uma fração equivalente à fração dada, escrita com termos menores. Por exemplo:

$$\frac{48}{72} = \frac{24}{36} = \frac{12}{18} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Daí, $\frac{48}{72} = \frac{2}{3}$.

Dividimos sucessivamente o numerador e o denominador da fração por um divisor comum, até obtermos a fração com os menores termos possíveis.

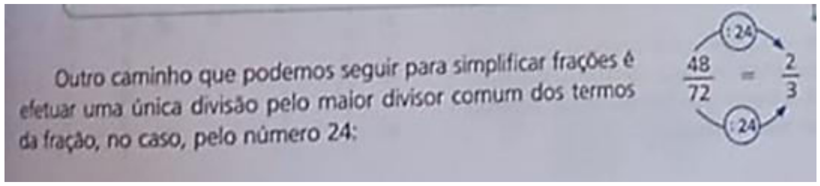
Essa fração é chamada **forma simplificada** ou **forma irredutível** da fração dada.

Assim, a fração $\frac{2}{3}$ é a forma irredutível da fração $\frac{48}{72}$.

Fonte: Editora FTD

Mais uma vez vemos este segundo livro promovendo uma variedade nas formas de realizar alguma atividade, mostrando os dois casos possíveis para encontrar uma fração simplificada, principalmente por utilizar um conteúdo que já foi trabalhado em sala de aula, o MDC, máximo divisor comum, porém usado no conteúdo de números naturais:

Fig. 49 – Como encontrar a fração irredutível pelo MMC

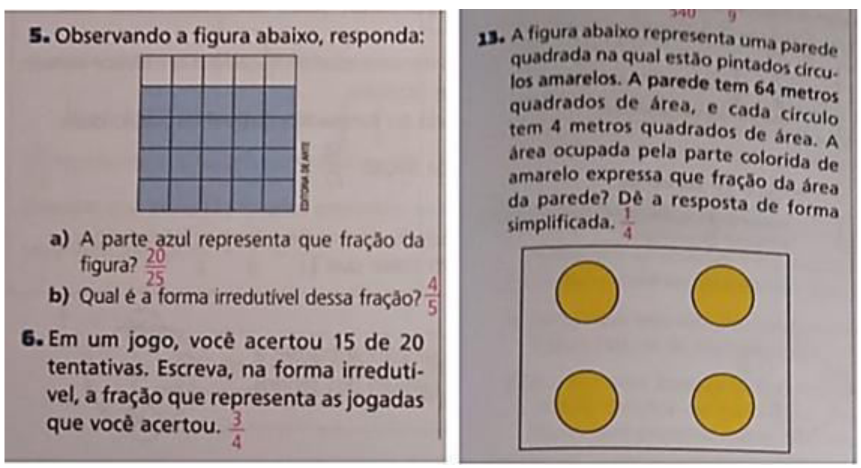

Outro caminho que podemos seguir para simplificar frações é efetuar uma única divisão pelo maior divisor comum dos termos da fração, no caso, pelo número 24:

$$\frac{48}{72} \underset{:24}{\overset{:24}{=}} \frac{2}{3}$$

Fonte: Editora FTD

Após apresentar todo o conceito de fração equivalente, o livro dispôs um novo conjunto de atividade, agora com 15 questões, e dessas, 8 são questões que utilizam uma metodologia diferente da tradicional, com situações-problema ou uso da metodologia de barras:

Fig. 50 – Atividade pós apresentação de frações equivalentes


5. Observando a figura abaixo, responda:

a) A parte azul representa que fração da figura? $\frac{20}{25}$

b) Qual é a forma irredutível dessa fração? $\frac{4}{5}$

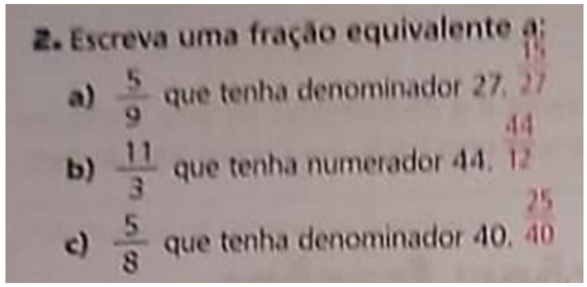
6. Em um jogo, você acertou 15 de 20 tentativas. Escreva, na forma irredutível, a fração que representa as jogadas que você acertou. $\frac{3}{4}$

13. A figura abaixo representa uma parede quadrada na qual estão pintados círculos amarelos. A parede tem 64 metros quadrados de área, e cada círculo tem 4 metros quadrados de área. A área ocupada pela parte colorida de amarelo expressa que fração da área da parede? Dê a resposta de forma simplificada. $\frac{1}{4}$

Fonte: Editora FTD

Um grande diferencial desse conjunto de questões, em relação ao que foi disposto pelo primeiro livro logo após ter apresentado este conteúdo, é que todas as 15 questões são voltadas para o conceito de fração equivalente, trabalhando a sua ideia, o procedimento para encontrar outras frações, bem como a fração irredutível. Podemos perceber que o grande número de questões não tornou a atividade excessivamente repetitiva, pois o livro abordou uma variação de formas em que este conteúdo pode ser trabalhado. Podemos destacar a questão em que, dada uma fração, é pedido para que seja encontrado uma equivalente a ela que possua um denominador ou numerador em outro item, especifico, predeterminado pela questão:

Fig. 51 – Exercício de fração equivalente



2. Escreva uma fração equivalente a:

a) $\frac{5}{9}$ que tenha denominador 27. $\frac{15}{27}$

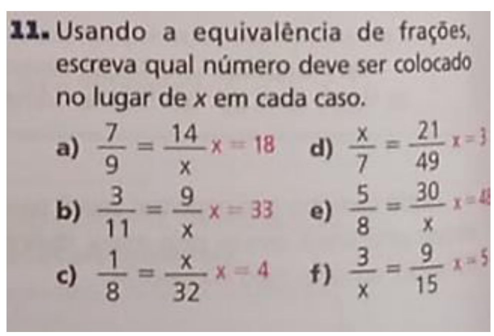
b) $\frac{11}{3}$ que tenha numerador 44. $\frac{44}{12}$

c) $\frac{5}{8}$ que tenha denominador 40. $\frac{25}{40}$

Fonte: Editora FTD

Outra questão que destacamos foi a 11, que pede para que seja encontrado o valor de um dos elementos em um par de frações equivalentes. Para que isso seja feito, o aluno precisa ter entendido bem que o valor multiplicado ou dividido no numerador será o mesmo do denominador e vice-versa, ou seja, são questões que não se resumem em apenas propor questões tradicionais, que pedem para encontrar, por exemplo, 5 frações equivalentes a uma dada ou encontrar a fração irredutível de uma fração:

Fig. 52 – Questão com Álgebra



11. Usando a equivalência de frações, escreva qual número deve ser colocado no lugar de *x* em cada caso.

a) $\frac{7}{9} = \frac{14}{x}$ x = 18

b) $\frac{3}{11} = \frac{9}{x}$ x = 33

c) $\frac{1}{8} = \frac{x}{32}$ x = 4

d) $\frac{x}{7} = \frac{21}{49}$ x = 3

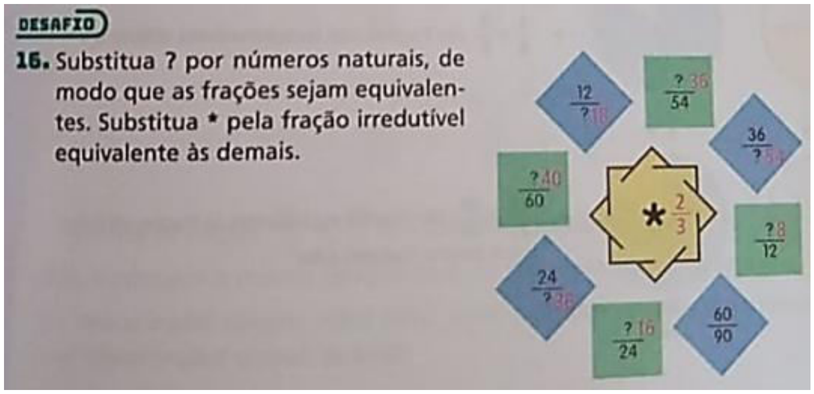
e) $\frac{5}{8} = \frac{30}{x}$ x = 4

f) $\frac{3}{x} = \frac{9}{15}$ x = 5

Fonte: Editora FTD

Uma sugestão a questão 11 seria colocar um quadro em branco ou alguma imagem, no lugar do “x”, que fizesse o aluno entender que tem um número “escondido” a ser descoberto, seria uma forma mais didática para se trabalhar esse tipo de questão, pois deve-se considerar que o aluno do sexto ano ainda não estudou equação ou expressões algébricas, por isso não consegue associar de imediato que o “x” está na posição para representar um número desconhecido:

Fig. 53 – Desafio com frações equivalentes

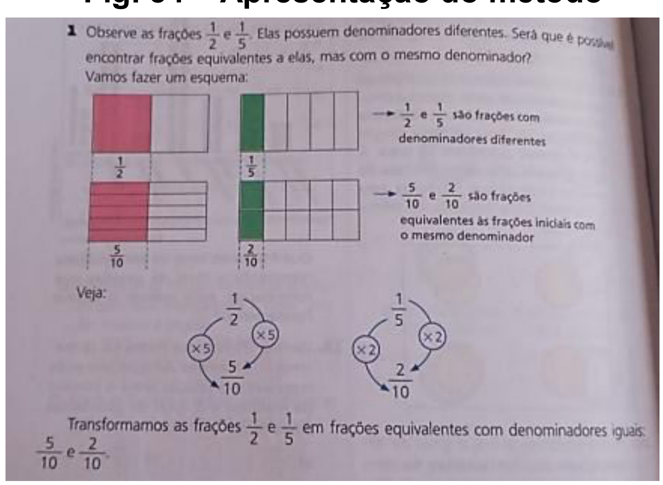


Fonte: Editora FTD

Vamos agora destacar uma parte que é de grande relevância para o objetivo da análise dos dois livros, que justamente é verificar qual, ou quais formas ele apresenta o conteúdo de soma e subtração de frações. Esse destaque se dá pelo fato de não encontrarmos a abordagem no primeiro livro, mas apenas neste segundo.

Após ter introduzido o conteúdo de equivalência entre frações, o natural é que o livro comece a introduzir as duas operações iniciais, assim como pôde ser visto no primeiro livro analisado, porém este segundo dispõe uma parte destinada exclusivamente para apresentar formas de encontrar frações equivalentes a duas iniciais, estas possuindo o mesmo denominador, e o livro chamou este tema de *"Reduzindo duas frações ao mesmo denominador".*

Fig. 54 – Apresentação do método

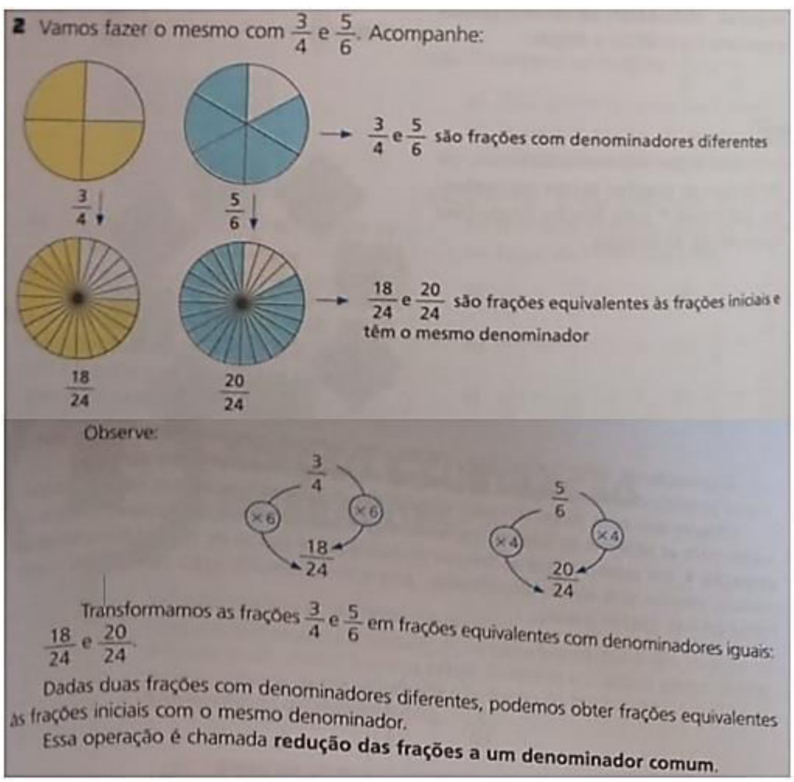


Fonte: Editora FTD

Podemos perceber na figura acima que o livro iniciou a apresentação dessa parte com um exemplo para ser observado, fazendo a representação das duas frações com denominadores diferentes pelo método de barras, tendo elas sofrido uma nova partição, como pode ser visto no segundo par de barras, de modo que agora as duas barras estão cada uma com 10 partes, ou seja, possuem o denominador 10; já seu numerador está de acordo com as novas partes contidas no espaço colorido, que é mesmo tanto antes como depois da nova partição.

Com essa modificação foi possível encontrar frações equivalentes às iniciais que possuíssem o mesmo denominador. O livro apresenta um segundo exemplo a ser observado, com o mesmo objetivo do anterior, mas com uma peculiaridade, este exemplo foi entre as frações 3/4 e 5/6.

Fig. 55 – Segundo exemplo da apresentação do método



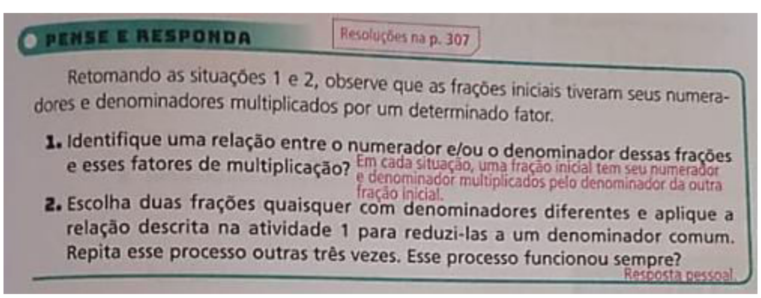
Fonte: Editora FTD

Depois de apresentar os dois exemplos, o livro descreve que é possível encontrar, com duas frações de denominadores diferentes, frações equivalentes a essas possuindo o mesmo denominador e chama essa operação de *“redução das frações a um denominador comum”.* Até o momento não vimos a apresentação de alguma técnica para se encontrar essas frações com o mesmo denominador, mas o objetivo do livro com esses dois exemplos a serem observados, foi fazer com que o aluno notasse que para encontrar essas frações, bastava multiplicar os elementos da primeira fração pelo denominador da segunda, e o mesmo se faz com a segunda fração, multiplicando-se seus elementos pelo denominador da primeira.

Como podemos observar, esse procedimento foi feito nos dois exemplos, em que as frações eram 1/2 e 1/5, multiplicou-se os elementos de 1/2, ou seja, 1 e 2, por 5, que é o denominador de 1/5, encontrando a fração 5/10. Já com 1/5, de forma análoga, multiplicou-se seus elementos por 2, encontrando a fração 2/10, e esse é o procedimento adotado pelo livro para encontrar frações equivalentes com denominador comum dadas quaisquer frações iniciais.

Para que o aluno consiga fazer essa observação, o livro deixou uma caixa com duas perguntas intitulada de *“Pense e responda”*; nela a primeira pergunta incentiva o aluno a encontrar uma relação entre os dois exemplos apresentados:

Fig. 56 – Atividade de investigação



PENSE E RESPONDA — Resoluções na p. 307

Retomando as situações 1 e 2, observe que as frações iniciais tiveram seus numeradores e denominadores multiplicados por um determinado fator.

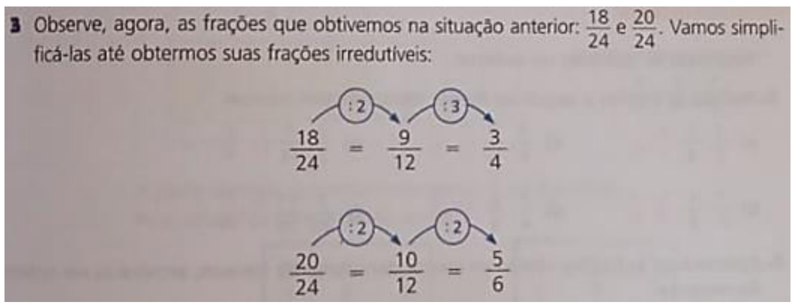
1. Identifique uma relação entre o numerador e/ou o denominador dessas frações e esses fatores de multiplicação? Em cada situação, uma fração inicial tem seu numerador e denominador multiplicados pelo denominador da outra fração inicial.
2. Escolha duas frações quaisquer com denominadores diferentes e aplique a relação descrita na atividade 1 para reduzi-las a um denominador comum. Repita esse processo outras três vezes. Esse processo funcionou sempre? Resposta pessoal.

Fonte: Editora FTD

Para essas duas perguntas serem respondidas, o professor precisa estar atento aos seus alunos, fazendo com eles encontrem a relação a ser observada nos dois exemplos por conta própria, como uma atividade de investigação, ajudando-os caso seja necessário, mas sem dar a resposta para os alunos.

Após considerarem que o aluno conseguiu entender o raciocínio do procedimento feito nos dois exemplos, o livro coloca um terceiro, porém ainda baseado no segundo exemplo, no qual as frações equivalentes foram 18/24 e 20/24. Neste exemplo, o livro quer que o aluno entenda que em alguns casos, depois das frações equivalentes serem encontradas, é possível simplificá-las através da divisão dos seus elementos por um mesmo número natural, de modo que sejam encontradas outras frações equivalentes que ainda possuam um denominador em comum, agora menor que o anterior.

Fig. 57 – Encontrando o MDC



3 Observe, agora, as frações que obtivemos na situação anterior: $\frac{18}{24}$ e $\frac{20}{24}$. Vamos simplificá-las até obtermos suas frações irredutíveis:

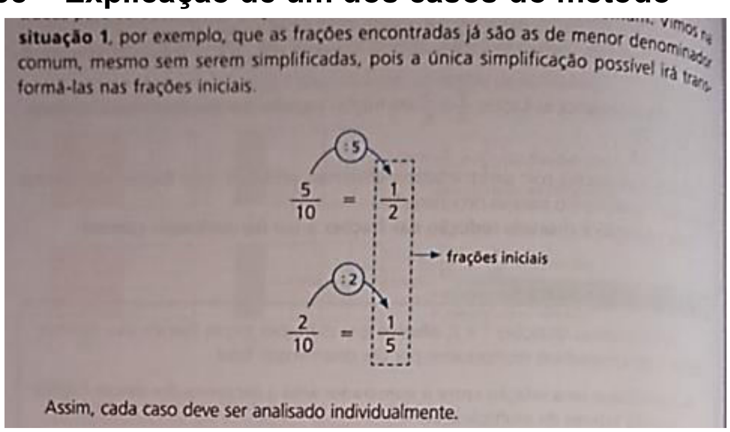
$$\frac{18}{24} \xrightarrow{:2} \frac{9}{12} \xrightarrow{:3} \frac{3}{4}$$

$$\frac{20}{24} \xrightarrow{:2} \frac{10}{12} \xrightarrow{:2} \frac{5}{6}$$

Fonte: Editora FTD

O livro chama essa continuação do procedimento de *“redução das frações ao menor denominador comum”;* além disso, coloca que nem sempre essa continuação do procedimento será necessária, pois há frações que, quando encontradas as equivalentes com o denominador comum, o denominador já é o menor possível. Em seguida, explica essa afirmação utilizando a continuação no primeiro exemplo, com as frações equivalentes 5/10 e 2/10:

Fig. 58 – Explicação de um dos casos do método



situação 1, por exemplo, que as frações encontradas já são as de menor denominador comum, mesmo sem serem simplificadas, pois a única simplificação possível irá transformá-las nas frações iniciais.

$$\frac{5}{10} \xrightarrow{:5} \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{10} \xrightarrow{:2} \frac{1}{5}$$

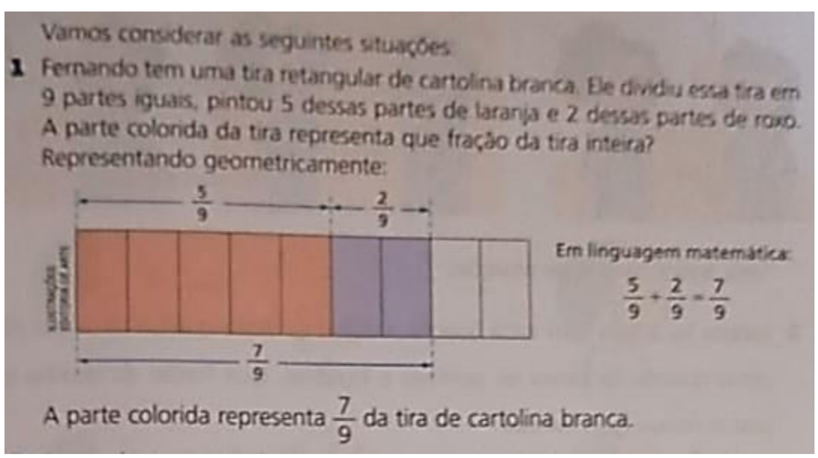
Assim, cada caso deve ser analisado individualmente.

Fonte: Editora FTD

Destacamos a importância desse conteúdo ter sido apresentado, principalmente antes de ser iniciado o ensino de soma e subtração de frações, pois se trata de um procedimento indispensável para que as operações sejam efetuadas, porque após realizá-lo, basta apenas operar, somar ou subtrair com os numeradores e preservar o denominador comum encontrado. Podemos ressaltar também a forma com que ele foi apresentado no livro, promovendo um ambiente de investigação para os alunos com uma aprendizagem consistente, pois nela o aluno se torna ativo no processo de aprendizagem, não apenas recebendo conhecimento, mas construindo o seu conhecimento.

Outro ponto a ser destacado, nessa parte do segundo livro, foi novamente a preocupação de apresentar os variados casos possíveis para um conceito, proporcionando uma aprendizagem abrangente, pois se trata de um conhecimento que não se restringe um determinado caso. Analisando agora a forma com que o livro introduz o ensino de soma e subtração de frações, percebemos que ele começa o tema com duas situações-problema, uma para cada operação. A princípio foram utilizadas situações onde as operações eram feitas com frações de mesmo denominador:

Fig. 59 – Soma de frações com mesmo denominador


Vamos considerar as seguintes situações.

1 Fernando tem uma tira retangular de cartolina branca. Ele dividiu essa tira em 9 partes iguais, pintou 5 dessas partes de laranja e 2 dessas partes de roxo. A parte colorida da tira representa que fração da tira inteira?

Representando geometricamente:

Em linguagem matemática:

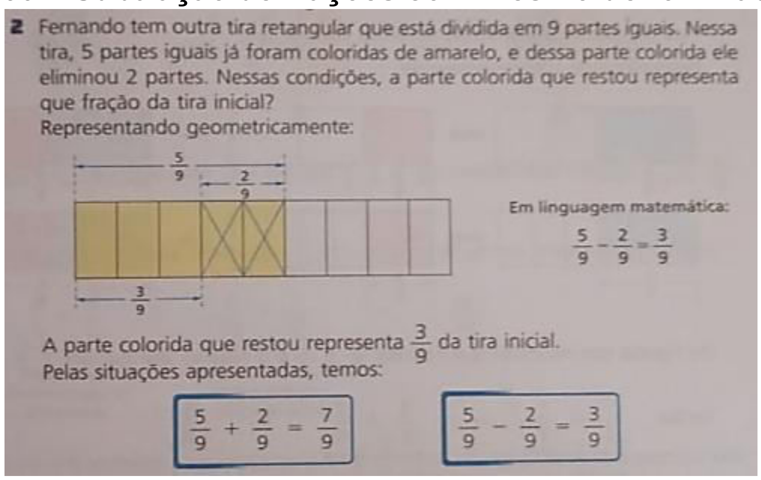
$\frac{5}{9} + \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$

A parte colorida representa $\frac{7}{9}$ da tira de cartolina branca.

Fonte: Editora FTD

A ideia é simples e a forma com que a representação dessa soma é feita facilita a compreensão do aluno, de modo que fica intuitivo notar que 5/9 + 2/9 = 7/9. Já para a subtração, como pode ser visto na próxima figura, a representação parece ser a mesma, mas o esquema de setas indicando o quanto foi tirado da parte trazendo destaque, assim como o uso do “x” traçado pelas diagonais facilitam o entendimento que aquelas partes precisam ser tiradas, e o que restar depois dessa remoção será o resultado da subtração, ou seja, 5/9 – 2/9 = 3/9.

Fig. 60 – Subtração de frações com mesmo denominador


2 Fernando tem outra tira retangular que está dividida em 9 partes iguais. Nessa tira, 5 partes iguais já foram coloridas de amarelo, e dessa parte colorida ele eliminou 2 partes. Nessas condições, a parte colorida que restou representa que fração da tira inicial?

Representando geometricamente:

Em linguagem matemática:

$\frac{5}{9} - \frac{2}{9} = \frac{3}{9}$

A parte colorida que restou representa $\frac{3}{9}$ da tira inicial.

Pelas situações apresentadas, temos:

$\boxed{\frac{5}{9} + \frac{2}{9} = \frac{7}{9}}$ $\boxed{\frac{5}{9} - \frac{2}{9} = \frac{3}{9}}$

Fonte: Editora FTD

Com essa forma de abordar esse caso das duas operações, usando o método de barras, é possível explicar para o aluno o motivo pelo qual, para somar ou subtrair frações com mesmo denominador basta operar com os numeradores e preservar o denominador comum, sem que essa informação seja simplesmente transmitida para o aluno sem nenhuma explicação do porquê proceder dessa forma.

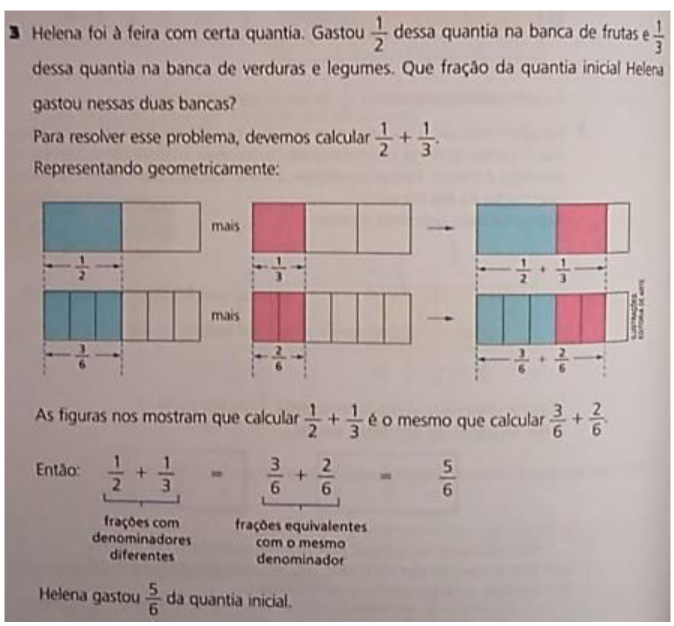
Antes de dispor exemplos para as duas operações com denominadores distintos, o livro apresenta um pequeno trecho em quadrinhos, e nele há duas meninas que conversam justamente sobre esse tema:

Fig. 61 – Quadrinhos sobre como operar frações com denominadores distintos

Fonte: Editora FTD

Após a leitura do quadrinho, o livro coloca outros quatro exemplos, dois para cada operação, agora com frações de denominadores distintos. Para efetuar as operações o livro utiliza o que foi ensinado no item anterior "*redução das frações ao menor denominador comum",* como uma das meninas afirmou no quadrinho, para depois efetuar a operação do mesmo modo que foi feito nos dois exemplos acima, com frações de mesmo denominador. Destacamos apenas uma dessas questões, de forma aleatória, já que nas outras a ideia é semelhante:

Fig. 62 – Exemplo da soma com denominadores distintos


3 Helena foi à feira com certa quantia. Gastou $\frac{1}{2}$ dessa quantia na banca de frutas e $\frac{1}{3}$ dessa quantia na banca de verduras e legumes. Que fração da quantia inicial Helena gastou nessas duas bancas?

Para resolver esse problema, devemos calcular $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.

Representando geometricamente:

As figuras nos mostram que calcular $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ é o mesmo que calcular $\frac{3}{6} + \frac{2}{6}$.

Então: $\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}_{\text{frações com denominadores diferentes}} = \underbrace{\frac{3}{6} + \frac{2}{6}}_{\text{frações equivalentes com o mesmo denominador}} = \frac{5}{6}$

Helena gastou $\frac{5}{6}$ da quantia inicial.

Fonte: Editora FTD

De maneira geral, vemos que a forma com que o livro apresentou o tema de soma e subtração, separando em duas etapas, fez com que a aprendizagem do conteúdo ficasse mais simples e intuitiva; outra vantagem da aplicação feita pelo segundo livro é que em todas as etapas da soma e subtração, ele utiliza os princípios e fundamentos que foram construídos desde o início do conteúdo de frações, com a apresentação do seu conceito.

Podemos ver isso, por exemplo, na forma com que ele explica como encontrar frações equivalentes com mesmo denominador através do conceito de fração e sua magnitude, ou seja, podemos perceber que quando os conteúdos são bem introduzidos desde o início, os próximos temas serão ensinados e entendidos de forma simples e eficaz, promovendo mais aprendizado do que quando é ensinado por processos decorativos, sem a explicação do motivo deles serem utilizados.

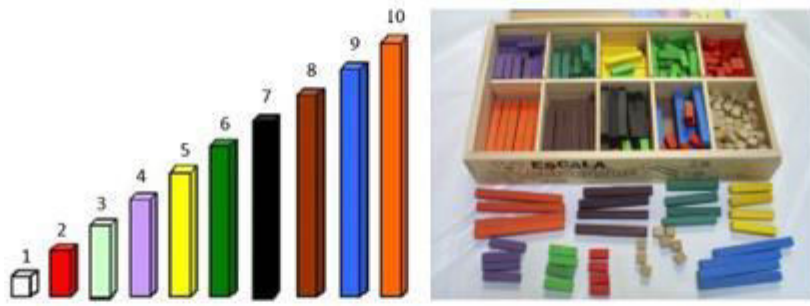
Com esse último tema, finalizamos a análise do segundo livro didático. Tomando em consideração a descrição e análise dos dois livros didáticos destacados aqui, percebe-se em relação à trajetória sequencial dos conteúdos, desde do conceito de fração até a apresentação do procedimento soma e subtração com frações, que o segundo livro teve uma melhor articulação em relação ao primeiro. Nos próximos tópicos iremos apresentar os dois materiais didáticos, focos deste trabalho.

2.6 O Material Cuisenaire: características e operacionalidade para o ensino de frações e operações

A escala Cuisenaire é um material didático concreto que consiste em um conjunto de 10 barras de madeira, no formato de prismas retos de base quadrada, de tamanhos diferentes pintados cada um de uma cor. A menor das barras mede 1 cm e a maior tem 10 cm, sendo as outras barras acrescidas de um em um centímetro. Esse material concreto foi criado pelo professor belga Émile Georges Cuisenaire Hottelet para o ensino de conceitos básicos de Matemática. Veremos como pode ser utilizado no ensino de frações, principalmente nos conceitos de soma e subtração com frações, passando por algumas definições e conceitos que são necessários para realizar as operações mencionadas.

A ilustração abaixo apresenta as cores e a correspondência com os números naturais das barras da escala Cuisenaire:

Fig. 63 – Material Cuisenaire



Fonte: O autor (2021)

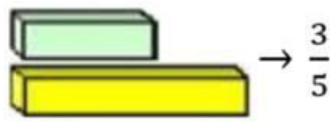
Como já dito, as barras de Cuisenaire são feitas de madeira no material original, porém elas podem ser confeccionadas de acordo com a demanda e as condições ao qual o professor está inserido, e uma sugestão de material para a confecção é o E.V.A de gramatura maior, pois esse material é de fácil acesso na maioria das escolas, de baixo custo e que apresenta maior resistência em relação aos emborrachados simples e outros materiais como cartolina. Veja na figura abaixo o material Cuisenaire feito com E.V.A:

Fig. 64 – Material Cuisenaire feito com E. V. A

Fonte: O autor (2021)

O primeiro passo que precisa ser estabelecido para o uso da escala Cuisenaire para ensinar a soma e subtração de frações é saber como representar uma fração por meio do material. Silva, Lozada e Viana (2020) apresentam um método para ser feita essa representação que por sua vez, diferente dos números naturais, precisarão ser identificadas por duas barras de Cuisenaire, uma, a superior, para o numerador e a outra, a inferior, para o denominador da fração, como vemos abaixo:

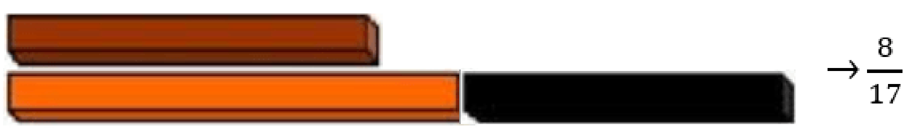
Fig. 65 – Representação de fração com as barras de Cuisenaire



Fonte: O autor (2021)

No exemplo acima, vemos que a barra superior é a de 3 unidades e a inferior à de 5 unidades, representando assim a fração 3/5, e a partir dessa representação adotada podemos verificar as operacionalidades do material para o ensino de frações. A mesma representação é usada para outras frações também, e caso haja a necessidade de representar frações com o numerador ou denominador maiores que 10, que é o tamanho em unidades da maior barra, basta juntarmos a barra laranja, de dez unidades, com a barra que represente a quantidade que falta:

Fig. 66 – Representação de fração com denominador maior que 10

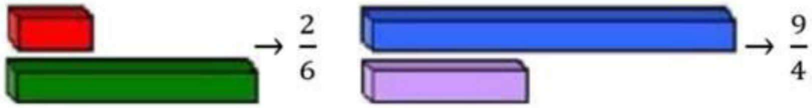


Fonte: O autor (2021)

Na representação acima vemos como essa aparente limitação pode ser resolvida já que o denominador 17 não possui uma barra com o número de unidades suficientes para fazer a representação, e isso também pode ser feito com o numerador, caso necessário.

Agora que já foi visto como se deve representar uma fração com o material, podemos apresentar os conceitos de frações próprias e impróprias também usando as barras de Cuisenaire; essa definição é trabalhada a partir de várias representações nas quais os alunos perceberam que próprias sempre têm o numerador menor que o denominador, ao contrário das impróprias, que por sua vez sempre terão o numerador maior que o denominador. Vejamos na figura duas representações, uma para o exemplo de fração própria e outra de imprópria:

Fig. 67 – Fração própria e imprópria



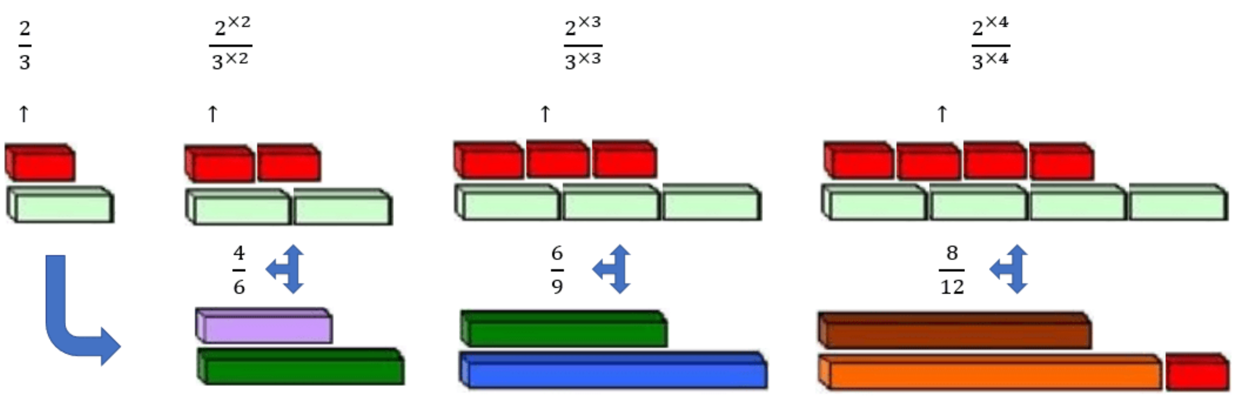
Fonte: O autor (2021)

É possível notar que trabalhar esses dois conceitos de frações com o material Cuisenaire auxilia no entendimento dos alunos, já que as representações feitas com as barras os permitem visualizar a diferença entre os dois tipos de frações, tornando a identificação intuitiva, o que pode não ocorrer quando se tem apenas a definição e as frações, sem uma representação visual.

As barras de Cuisenaire podem ser usadas também para trabalhar o conceito de trações equivalentes, assim como as definições de frações próprias e impróprias, é articulado de forma bem simples e intuitiva, a partir da representação de uma fração irredutível por exemplo, sabemos que para encontrar a classe de equivalência formada por outras frações basta partir da multiplicação do numerador e denominador dessa fração por um número natural.

Isso é feito também com as barras de Cuisenaire, a partir de uma representação, podemos repetir a barra do numerador e do denominador para formar assim as frações equivalentes, e a figura abaixo ilustra como esse procedimento pode ser feito:

Fig. 68 – Representação de fração equivalente com Cuisenaire



Fonte: O autor (2021)

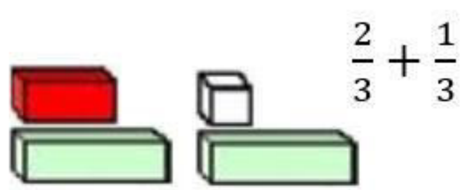
Como podemos ver na figura, foram encontradas três frações equivalentes a fração 2/3 a partir da simples repetição de barras de duas unidades para o numerador e de três unidades para o denominador, de modo que cada vez que é adicionada uma barra para cada um desses conjuntos de barras, se encontra uma nova fração equivalente. Notamos também que as frações formadas pelas barras da parte de baixo da figura são as mesmas frações da representação acima delas, sendo alteradas apenas as barras, substituindo as repetidas, vermelhas e verde-claro, por uma única barra, (caso fosse possível) que representasse o mesmo valor que as repetidas representavam.

Com essa ideia, podemos trabalhar o conceito de frações equivalentes com materiais concretos, o que promove uma aprendizagem mais atrativa e eficiente, estabelecendo a relação de proporção entre as frações equivalentes encontradas, de modo que quando o seu numerador aumenta, o seu denominador também deve aumentar na mesma proporção.

Depois de tratarmos sobre a representação de fração e o conceito de frações equivalentes com a escala Cuisenaire, podemos agora atualizar esse material concreto para efetuar as operações de soma e subtração de frações, finalizando assim o que nos foi proposto. Para operar com as barras, devemos nos atentar a algumas etapas que são delimitadas para uma melhor compreensão dos procedimentos a serem tomados. Vamos aqui efetuar a princípio a soma entre as frações 2/3 + 1/3 com o objetivo de apresentar como essa operação pode ser feita com o material Cuisenaire.

A primeira etapa está na representação das frações, que deve ser feita da mesma forma que foi apresentado acima, vejamos:

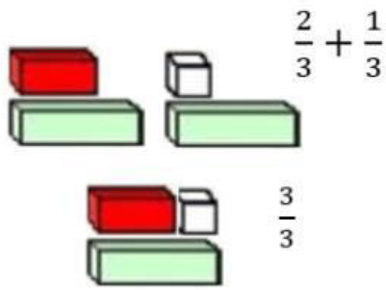
Fig. 69 – Primeiro passo da soma de frações com mesmo denominador



Fonte: O autor (2021)

Após a representação, podemos perceber que as cores das barras dos denominadores são as mesmas, bem como os seus tamanhos, que são de 3 unidades, sendo assim, basta que repetir, pegar uma nova barra de 3 unidades, juntar as duas barras dos numeradores das frações, como na figura a seguir:

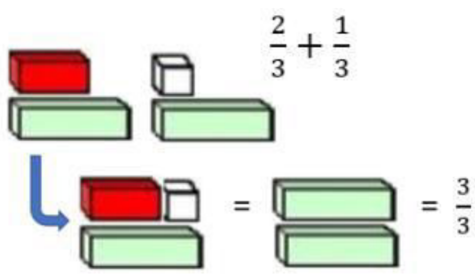
Fig. 70 – Segundo passo da soma de frações



Fonte: O autor (2021)

Agora que a operação foi feita, vemos que as barras dos numeradores das frações, de 1 e 2 unidades, formam uma nova barra correspondente a soma entre elas, de 3 unidades, e a próxima etapa consiste em substituir essas duas barras por uma única que represente o valor da soma:

Fig. 71 – Terceiro passo da soma de frações com substituição de peças

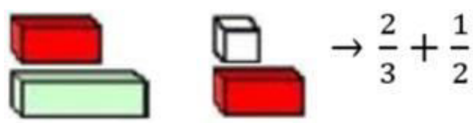


Fonte: O autor (2021)

Notamos que essa operação resultou em uma fração com numerador igual ao denominador, logo temos a unidade como resultado, já que todo número não nulo dividido por ele mesmo resulta em 1. Essa operação foi feita com denominadores iguais para que se pudesse perceber que quando isso acontece, basta operar, ou seja, somar ou subtrair, e neste caso, seria uma adição com os numeradores, apenas repetindo o denominador comum.

Veremos como proceder para uma soma ou subtração com denominadores diferentes. Para trabalharmos esse caso, vamos fazer uma soma entre as frações 2/3 + 1/2, e o procedimento é semelhante ao citado acima, com a soma de denominadores iguais, acrescentando apenas o fato de que será necessário, antes de efetuar a operação, encontrar as frações equivalentes às primeiras com a observação de terem o mesmo denominador; depois desse procedimento, será necessário apenas repetir o denominador comum encontrado e juntar as barras dos numeradores das frações equivalentes, somando os valores dessas barras, semelhantemente ao procedimento do primeiro exemplo. Vamos agora às etapas para efetuar a operação, a primeira é a representação das frações:

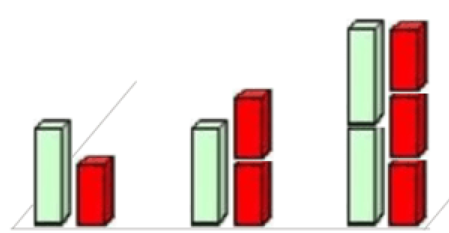
Fig. 72 – Soma de frações com denominadores distintos



Fonte: O autor (2021)

Feitas as representações, percebemos que não será possível repetir os denominadores pois não são iguais, então vamos encontrar uma fração equivalente a 2/3 e outra fração equivalente a 1/2 que possuam o mesmo denominador. Para isso, precisamos pegar algumas barras dos denominadores das frações, ou seja, barras de 3 e de 2 unidades, formando duas colunas alinhadas com essas barras até que elas tenham o mesmo tamanho, e com isso encontraremos um denominador comum entre as frações:

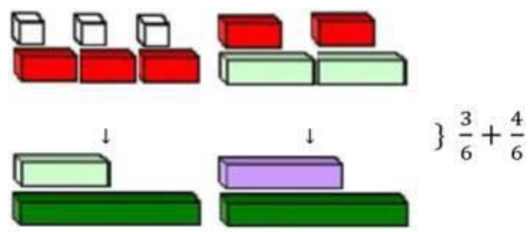
Fig. 73 – Método para encontrar o denominador comum



Fonte: O autor (2021)

Como podemos ver na figura acima, o procedimento consiste em acrescentar barras nas torres, uma barra por vez, começando pela torre que estiver com o menor tamanho; depois de alcançarem alturas iguais, vamos agora ver quantas barras foram acrescentadas em cada uma das torres, para que possamos enfim formar as frações equivalentes. Nesse caso ,foram necessárias duas barras de 3 unidades, uma a mais que o denominador da fração original, e na outra torre foi preciso três barras de 2 unidades, duas a mais, logo vamos formar as frações equivalentes adicionando ao numerador de fração a mesma quantidade de barras acrescentadas ao denominador, assim como é ilustrado na figura a seguir:

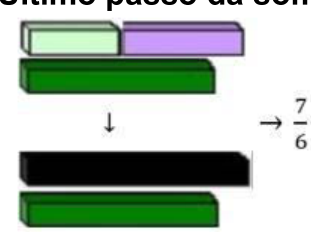
Fig. 74 – Substituição de barras de Cuisenaire



Fonte: O autor (2021)

Depois de feitas todas as modificações, basta fazer as substituições devidas das barras repetidas por uma que tenha o mesmo valor em unidades, como na parte inferior da figura acima, em que vemos agora a fração 2/6 que é equivalente a 1/2, e a fração 4/6 que é equivalente a 2/3; além disso, elas têm o mesmo denominador, o número seis, portanto, para finalizar a soma, é preciso apenas proceder como no primeiro exemplo, repetindo a barra do denominador e juntando as duas barras dos numeradores das frações equivalentes encontradas:

Fig. 75 – Último passo da soma

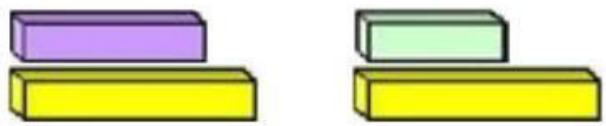


Fonte: O autor (2021)

Com essa tapa finalizada, vemos o resultado da soma dessas frações, 7/6, e assim concluímos todas as etapas para a efetuar a soma entre duas frações. O procedimento para a subtração é muito semelhante a este, apenas com a observação que, depois de encontradas as frações equivalentes com o mesmo denominador, caso necessário, ao invés de juntamos, através da soma as barras do denominador, vamos subtraí-las, e teremos como resultado a diferença entre os tamanhos das barras. Acompanhe esse exemplo com frações de mesmo denominador:

Fig. 76 – Subtração de fração com barras de Cuisenaire

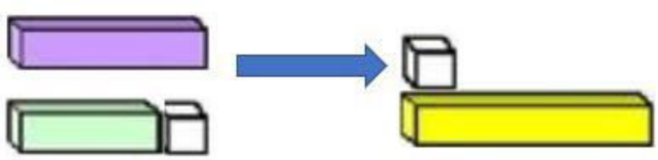
$\frac{4}{5} - \frac{3}{5}$



Fonte: O autor (2021)

Para que a subtração fique mais intuitiva, vamos pegar as barras do numerador, e colocá-las uma acima da outra, a positiva acima da negativa para então completar com outra barra de tamanho equivalente, até que as duas barras tenham o mesmo tamanho, a barra que foi usada para esse feito vai representar o valor da diferença entre os numeradores, e assim formaremos a nova fração:

Fig. 77 – Encontrando o numerador a partir do que falta entre os numeradores



$\frac{1}{5}$

Fonte: O autor (2021)

Nesse exemplo vemos que a diferença entre as barras dos numeradores, de 4 e 3 unidades resultou numa barra de uma unidade, e com isso, temos como resultado da subtração a fração 1/5, como visto na figura acima. Com esse último exemplo, concluímos o método usado por Silva, Lozada e Viana (2020) para ensinar a soma e subtração com as barras da escala Cuisenaire.

2.6.1 Discussão sobre as limitações de uma forma de ensinar operações com frações usando Cuisenaire: o método de Santos

Vamos agora apresentar a abordagem que é relatada por Santos (2020). Primeiro o autor apresenta uma tabela na qual relaciona cor com a fração (2020, p. 4), como podemos ver logo abaixo:

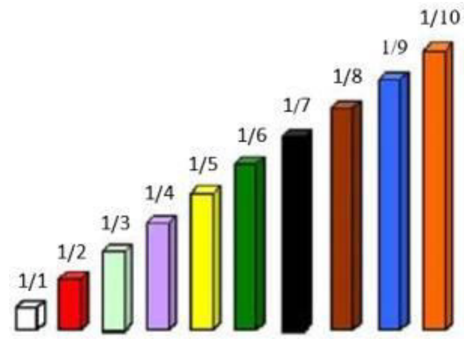
Tabela 1 – Tabela de representação da fração

Cor	Fração	Cor	Fração
Branca	1/1	Verde Escuro	1/6
Vermelha	1/2	Preta	1/7
Verde claro	1/3	Marrom	1/8
Rosa	1/4	Azul	1/9
Amarela	1/5	Laranja	1/10

Fonte: Santos (2020)

Como podemos ver na figura, cada uma das barras do material representa uma única determinada fração que por sua vez terá sempre o numerador 1 e cujo o valor em unidades dessa barra vai determinar o valor do denominador desta fração, por exemplo uma barra vermelha, que tem o tamanho de duas unidades, vai representar a fração 1/2, já a amarela, que tem cinco unidades vai representar a fração 1/5, e assim por diante, conseguindo representar com essas barras, frações que sejam de no máximo denominador dez:

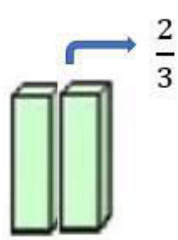
Fig. 78 – Representação da fração com a barra



Fonte: O autor (2021)

Uma observação a ser feita é que caso seja necessário representar uma fração com um numerador maior que um, como a fração 2/3 por exemplo deve-se colocar lado a lado duas barras de 1/3, ou seja, a barra verde-claro de três unidades. Podemos perceber então que a representação usada nesta abordagem depende de duas variáveis, o tamanho das barras para determinar o denominador e a quantidade dessas barras, que por sua vez determinam o denominador da fração:

Fig. 79 – Representação de uma fração

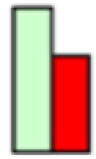


Fonte: O autor (2021)

Depois de apresentar a tabela acima com as associações das barras coloridas com as frações, Santos (2020) já inicia a apresentação dos procedimentos a serem seguidos para a realização das operações de soma e subtração. Vejamos o exemplo fornecido pelo autor (2020, p.5), que representa a soma de 1/3+1/2:

Fig. 80 – Soma de frações

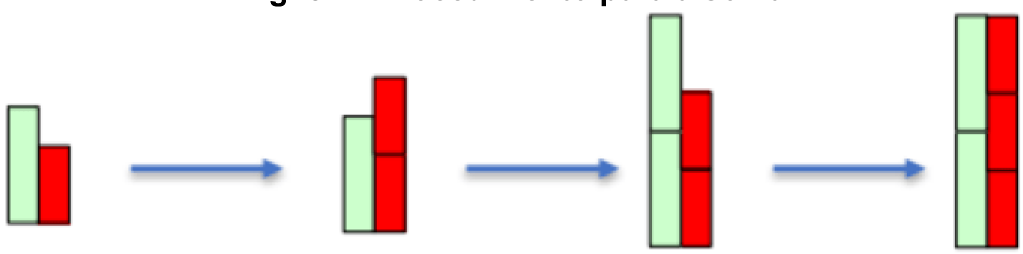
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=$$



Fonte: Santos (2020)

Santos (2020, p. 5) coloca que a ideia da soma de frações consiste na igualdade das alturas das colunas e para isso basta acrescentar peças semelhantes nas duas colunas até que fiquem com a mesma altura, como o autor demonstra abaixo:

Fig. 81 – Procedimento para a soma



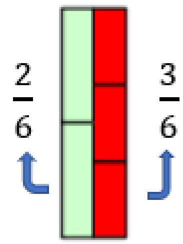
Fonte: Santos (2020)

Após ser alcançado o objetivo, de obter o mesmo tamanho nas colunas, Santos (2020) afirma que a operação da soma já foi realizada, bastando agora identificar os seus componentes; o denominador da fração que foi resultado da operação é representado pelo tamanho, em unidades, da torre formada pelas duas colunas, que nesse caso são seis, já o numerador da fração é encontrado ao contar o total de barras usadas para fazer a torre, que neste caso são cinco, duas verdes-claros e três vermelhas, com o resultado do somatório é 5/6.

Essas seis unidades do denominador correspondem a encontrar o mínimo múltiplo comum, cujo o procedimento usual é calculado pela decomposição simultânea, já pelo método de Santos (2020) corresponde em tornar as colunas comuns, ou seja, do mesmo tamanho, que no caso corresponde a 6, resultado este encontrado ao se calcular o mínimo múltiplo comum entre 3 e 2, que são os respectivos denominadores das frações a serem operadas.

Santos (2020) prossegue a fundamentação dos procedimentos tomados, explicando que o próximo passo é determinar frações equivalentes a 1/3 e 1/2. Pelo procedimento usual, encontramos os valores de 2/6 e 3/6, respectivamente como frações equivalentes e que se relacionam com 2 barras verde-claro (representando 1/3 e equivalente a 2/6) e 3 barras vermelhas (representando 1/2 e equivalente a 3/6). Como as frações equivalentes contém o mesmo denominador é só efetuar a soma:

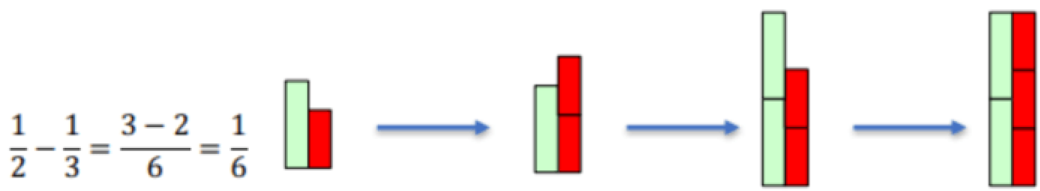
Fig. 82 – Finalização da soma



Fonte: O autor (2021)

O processo de subtração é similar ao de adição, bastando apenas subtrair a quantidade de barras de cores diferentes, como mostra Santos (2020, p. 8):

Fig. 83 – Subtração com frações

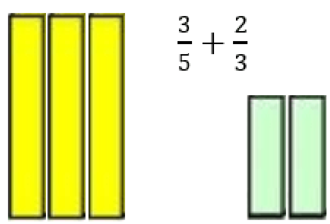


Fonte: Santos (2020)

No exemplo acima, Santos (2020) explica que depois de ser feita a torre com as colunas de mesmo tamanho, o próximo passo é identificar quantas barras têm na coluna que representa a fração positiva, e para este caso são as vermelhas, contendo três barras, e desse valor, subtrair o valor que é representado pelas barras da fração negativa, que são as verde-claro, contendo duas barras, logo três menos dois resulta em um, por isso a o resultado da fração é 1/6.

Vamos agora para um exemplo da soma de frações cujos numeradores são diferentes da unidade, para verificarmos então como o procedimento de Santos (2020) seria utilizado para este caso. Vejamos como proceder para efetuar a operação $\frac{3}{5} + \frac{2}{3}$. O primeiro passo, como já mencionado, é representar essas frações, como cada barra sozinha representa uma fração com numerador um e denominador equivalente ao número de unidades daquela barra. Então, devemos pegar mais barras, para representar um numerador maior, como já foi estabelecido, o número de barras será equivalente ao valor do numerador da fração, logo, devemos selecionar três barras amarelas, de cinco unidades, pois cada uma delas representa a fração 1/5. Além disso, sabemos, pelos exemplos anteriores, que só será possível efetuar as operações, seja soma ou subtração, caso os denominadores sejam iguais, assim, três barras amarelas equivalem a 1/5 + 1/5 + 1/5 = (1+1+1)/5 = 3/5,e analogamente, vamos precisar de duas barras verde-claro para representar a fração 2/3, assim como é visto na figura a seguir:

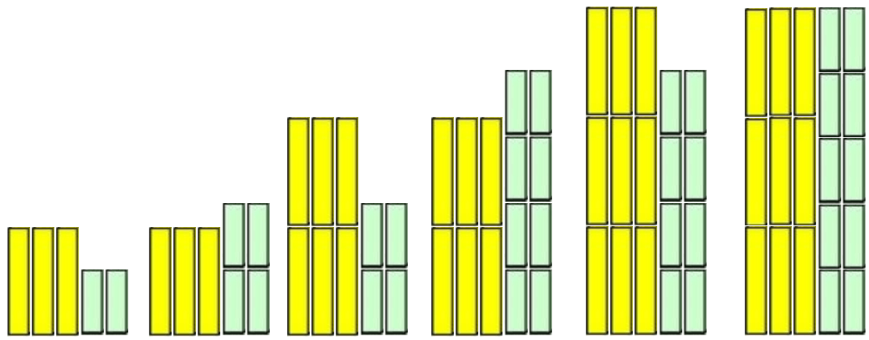
Fig. 84 – Soma com frações com barras amarelas



Fonte: O autor (2021)

Depois de representadas as frações, vamos efetuar a soma pelo mesmo processo usado para apenas as duas barras, porém ele deve ser feito em todas as cinco barras presentes na representação, ou seja, deverá ser acrescentado barras da mesma cor acima da outra até que todas elas tenham um mesmo tamanho, formando agora não uma “torre”, mas sim uma “parede” de barras com todas as colunas de alturas iguais, como mostrado abaixo:

Fig. 85 – Procedimento da soma



Fonte: O autor (2021)

Agora que todas as cinco colunas têm o tamanho, basta verificar que tamanho é esse, que para ser o denominador da fração neste exemplo, a parede terá altura de 15 unidades, ou seja, o denominador da soma entre as frações é 15; após isso, devemos contar quantas barras de cada cor foram usadas para formar essa parede, e então somá-las. Neste exemplo foram 9 barras amarelas e 10 barras verde-claro, totalizando 19 barras. Portanto, teremos como resultado da operação 3/5 + 2/3, a fração 19/15 e assim finalizamos o exemplo de como realizar uma soma com frações cujo os numeradores são maiores que a unidade, utilizando as barras de Cuisenaire segundo o método de Santos (2020).

O procedimento para se efetuar a subtração entre frações de numeradores maiores que 1 com as barras de Cuisenaire usando o método de Santos (2020) é muito semelhante ao procedimento da soma, bastando no último passo, depois de todas as colunas estarem do mesmo tamanho, verificar a diferença entre o número de barras de cores diferentes. Caso seja feita a operação de subtração entre as frações usadas anteriormente, 2/3 – 3/5, teríamos como resultado a fração 1/6, visto que aproveitando o procedimento feito na imagem acima, há 10 barras verde-claro e 9 barras amarelas.

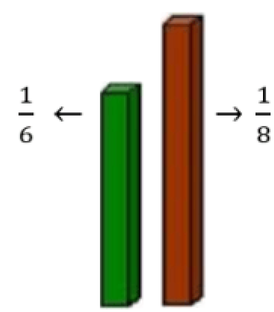
2.6.1.1 Limitações do método de Santos

No decorrer dos nossos estudos, testes, apresentações em eventos e comparações com outros métodos para a soma e subtração de frações com as barras da escala Cuisenaire, foram percebidas algumas limitações no método utilizado por

Santos (2020), limitações essas que podem interferir de forma negativa para a aprendizagem das noções de frações por parte dos alunos, e estas que por sua vez, são essenciais como habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos em relação ao conteúdo de frações. Vamos agora listar as limitações encontradas nesse método.

A primeira limitação encontrada no método usado por Santos (2020) é em relação à noção do tamanho e da ordem das frações unitárias. De todas as limitações, essa é a perceptível e a que pode prejudicar e distorcer os conceitos de frações, pois podemos perceber que ao usar o valor em unidades das barras de Cuisenaire para representar frações com o denominador equivalente a esse número de unidades, provoca no entendimento do aluno do sexto ano, que ainda não possui ampla afinidade com o conteúdo, uma ideia de ordem de frações que é inversa ao que realmente tais frações representam. Por exemplo, quando representamos as frações 1/6 e 1/8 com as barras, o aluno verá a barra de oito unidades maior que a barra de 6 unidades, e isso intuitivamente o fará pensar que a fração 1/8 é maior que a fração 1/6, o que não é verdade.

Fig. 86 – Frações unitárias



Fonte: O autor (2021)

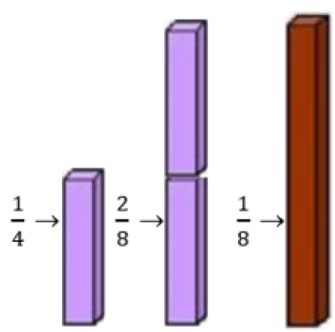
Essa limitação foi mencionada por um ouvinte em uma de nossas apresentações, em ele relatou que isso confundiria os alunos quando fosse necessário fazer uma comparação para determinar a maior fração por exemplo, o que de fato vai acontecer.

Outra limitação no método usado com as barras de Cuisenaire por Santos (2020) é que a representação de frações próprias e impróprias pode confundir o aluno se for observada apenas de forma visual, sem recorrer a algumas contas, pois não permite uma visualização clara o suficiente das frações para que se possa distinguir visualmente se a barra ou um determinado número de barras, representa uma fração própria ou imprópria.

Para que possa fazer essa distinção, o aluno terá, após ver a representação, que contar quantas barras esta tem e se esse número excede ou não o valor do tamanho em unidades das barras contadas, ou seja, o objetivo de se trabalhar com o concreto não foi alcançado em sua totalidade, já que o objetivo é apresentar o conceito de forma visual. Porém com uso das barras nesse método, a apresentação se tornou uma relação abstrata entre a quantidade de barras e o tamanho delas. Além disso, essa forma de identificação das frações próprias e impróprias não é mencionada no trabalho de Santos (2020), mas decorre da forma inicial de representação adotada no método.

A terceira limitação encontrada se refere à substituição de algumas peças por uma que tenha o mesmo tamanho das outras juntas, e caso isso seja feito, haverá uma perda para a representação da fração desejada, pois o numerador é sempre baseado na quantidade de peças. Ou seja, não pode ser feita uma reorganização da fração com outras peças sem que isso mude o valor dessas frações.

Fig. 87 – Frações diferentes com o mesmo tamanho

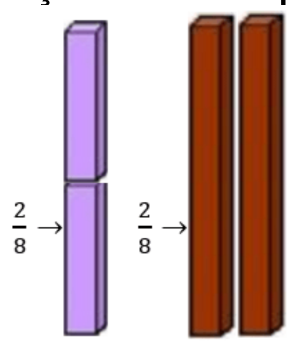


Fonte: O autor (2021)

Um exemplo disso é quando vamos representar frações equivalentes, como na figura acima, em que vemos que a fração 2/8, representada como uma fração equivalente a 1/4, tem duas barras roxas para indicar o numerador, uma acima da outra indicando tamanho de oito unidades, para o denominador de número 8. Porém, se trocarmos essas duas barras roxas por uma única de marrom, de oito unidades, vamos mudar a representação de que antes era de 2/8 para 1/8, pois agora há apenas uma barra, e isso pode ser um ponto negativo no âmbito que visualmente a imagem é semelhante, pelo tamanho por exemplo, porém representam frações diferentes o que pode causar certa confusão e o aluno não compreender.

A quarta limitação que foi identificada que se remete à abordagem feita por Santos (2020), é o fato de que existe mais de uma forma de representar uma mesma fração, e isso pode ser confuso para o aluno na representação, pois essas formas não são intuitivas quanto à percepção de que elas representam a mesma fração. Vamos utilizar o exemplo da figura acima para mostrar um dos casos que pode ocorrer; nela vemos a fração 2/8 que foi representada por duas barras roxas a partir da representação da fração equivalente a ela, 1/4, que é representada por apenas uma barra roxa, porém, a mesma fração, 2/8, pode ser representada com duas barras marrons, de oito unidades, uma do lado da outra, como vemos na figura a seguir:

Fig. 88 - Representações diferentes para uma mesma fração

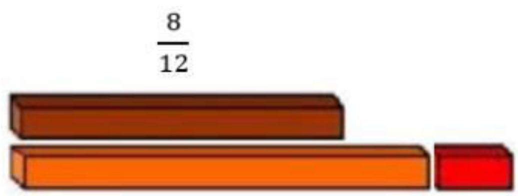


Fonte: O autor (2021)

Isso acontece justamente pelo fato de que esse formato de representação está baseado na relação de quantidade de peças e o tamanho da coluna que elas formam, uma relação consideravelmente abstrata para alunos do sexto ano.

A quinta limitação está no caso de representar e realizar as operações com frações que tenham o denominador maior que 10, já que as barras de Cuisenaire se limitam nos tamanhos de uma a dez unidades, e outras formas de abordagens feitas com esse material, como a apresentada por Silva, Lozada e Viana (2020) podem contemplar a representação de frações com denominadores maiores que 10, a partir da junção de uma peça de 10 unidades com a(s) outra(s) necessária(s) para completar o valor da fração. Isso pode ocorrer justamente pelo fato de que, tanto o valor do numerador quanto o do denominador da fração estão associados ao tamanho das barras, e não ao tamanho e à quantidade, como na figura a seguir:

Fig. 89 - Representação de fração com denominador maior que dez pela abordagem de Silva, Lozada e Viana (2020)



Fonte: Silva, Lozada e Viana (2020)

Nessa figura, que é um exemplo da representação de uma fração feita usando o método de Silva, Lozada e Viana (2020), vemos que a barra de cima representa o numerador, que é determinado pelo seu tamanho, e as barras de baixo representam o denominador, que por sua vez também é determinado pelo tamanho das duas juntas, e essa representação não perde o sentido caso seja acrescentada outras barras, mais de uma, no numerador ou denominador, pois eles estão bem definidos, de modo que sempre as barras de cima são as do numerador e as de baixo as do denominador.

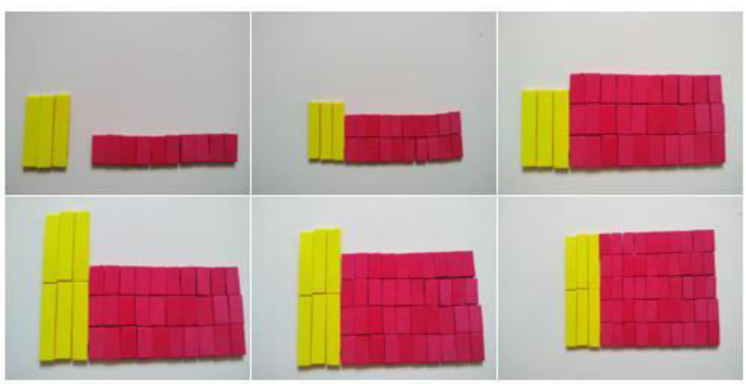
Porém, se formos utilizar essa forma de juntar barras para representar denominadores maiores que 10 no método de Santos (2020) vamos entrar em uma confusão, justamente pelo fato de que o seu numerador sempre está associado a quantidade de barras colocadas na representação, logo se quisermos por exemplo representar a fração 1/12 deveríamos colocar uma barra laranja, de 10 unidades, e outra vermelha, de 2 unidades, então teríamos duas peças para representar 1/12. Porém, como o numerador é representado pelo número de barras, logo não haverá como duas barras representarem o numerador 1, tornando assim essa abordagem limitada para este caso.

A sexta limitação está no fato de quando o procedimento adotado por Santos (2020) para a soma e subtração é concluído, ele não apresenta uma nova representação da fração que seja resultado da operação, tendo que verificar apenas o tamanho da coluna formada e a quantidade total de peças, no caso da soma ou a diferença entre as peças de cores e tamanhos distintos; para o caso da subtração, isso torna o procedimento das operações um tanto abstrato e com pouca visualização, já que é importante para o entendimento completo do aluno que ele veja com o material a fração que mostra o resultado, não se detendo em apenas contar as barras e escrever o resultado numa folha.

A sétima e última limitação encontrada depois de analisar a utilização desse método em vários casos, se refere ao fato de que existem representações que exigem um número muito grande de barras, o que pode ser um impasse na hora da utilização em escolas onde há poucos recursos para a compra ou confecção do material, pois a representação e as operações com frações de numeradores grandes, como 10 por exemplo, ficam um pouco exaustiva precisando de muitas peças, ou seja, o procedimento só é melhor aproveitado com as operações entre frações com número muito pequeno, como 3 ou 4.

Vejamos na figura o exemplo da soma das frações 10/2 e 3/5:

Fig. 90 - Soma de frações com numeradores grandes



Fonte: O autor (2021)

Podemos ver nessa figura a grande quantidade de barras vermelhas, 50 barras, que foram utilizadas para a finalização da operação, e isso exige que se tenha muito material disponível para conseguir realizar as operações com frações de números um pouco maiores, sendo que os kits vendidos com barras de madeira tem apenas 54 barras vermelhas, e essas barras são as que ficam em segundo lugar na quantidade peças, as outras têm quantidades menores, o que pode ser mais limitante quando for preciso fazer as operações.

2.7 O modelo de Barras de Singapura: características, operacionalidade e adaptações para o ensino de frações e operações no contexto educacional brasileiro

O Modelo de Barras de Singapura consiste na representação geométrica por meio do desenho de barras seccionadas que têm o objetivo de representar quantidades numéricas, utilizado na resolução de situações-problema nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Através do uso contínuo do Modelo de Barras, os alunos de Singapura aprendem conceitos e adquirem habilidades de identificar os dados e apresentar o que se pede para a solução de um problema, de forma que a representação pictórica auxilia na elaboração da estratégia para solução do problema, como por exemplo, a escolha de operações corretas para a situação.

Baldin (2014) citado por Dotti (2016, p.11) aponta as principais características da Matemática de Singapura:

> Abordagem de aprendizagem: Concreto → Pictórico → Abstrato; Estímulo ao processo de pensamento ativo, comunicação de ideias matemáticas e resolução de problemas; Desenvolvimento de fundamentos que os alunos necessitarão para a matemática mais avançada; Ênfase no exercício mental dos conceitos de matemática por meio da abordagem pelo modelo pictórico.

Na Matemática de Singapura, a resolução de problemas é o destaque, como podemos ver na figura abaixo:

Fig. 91 - Pentágono ilustrativo da base da Matemática de Singapura

Fonte: Abreu, Dinis e Nogueira (2018, p. 69)

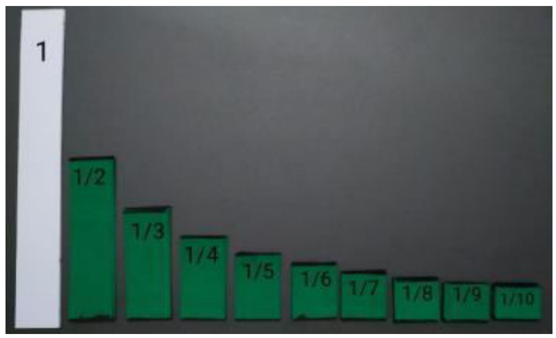
Abreu, Dinis e Nogueira (2018) explicam que a base que sustenta esse pentágono está nas teorias de Bruner, Dienes e Skemp que tratam respectivamente de representação do conhecimento, utilização de materiais didáticos para o processo ensino-aprendizagem e conexões e relações matemáticas e, daí, está inserido o Modelo de Barras. Os resultados dos alunos de Singapura em avaliações internacionais têm demonstrado a eficácia do Modelo de Barras, que foca no desenvolvimento de habilidades matemáticas.

Com relação ao conteúdo de frações, o Modelo de Barras tem por finalidade conseguir representar soluções de problemas que aparentemente só poderiam ser resolvidos usando os princípios de introdução à Álgebra, como por meio de equações do primeiro grau com uma incógnita, apesar desse conteúdo ser trabalhado com os alunos apenas no ano posterior, ou seja, no sétimo ano do Ensino Fundamental, em que já se é possível por meio do Modelo de Barras resolver tais problemas.

Para o ensino das operações de soma e subtração com essa metodologia, foi desenvolvido um material concreto que se adequa melhor ao ensino brasileiro, visto que os materiais concretos se mostraram eficientes nos estudos pesquisados. Mas, como é constituído o material? A adaptação do modelo de barras, que geralmente é feito por meio de desenhos na folha de resolução de uma determinada situação-problema, será apresentada de forma manipulável, promovendo assim uma experiência intensa e concreta para os alunos do sexto ano, podendo ser usado também para os anos iniciais do Ensino Fundamental.

Esse material consiste em conjunto de barras feitas de papel cartão com tamanhos que variam entre 1 inteiro e 1/10 desse inteiro, como na figura abaixo:

Fig. 92 - Protótipo do modelo de barras



Fonte: O autor (2021)

As proporções dessas barras são tomadas com base na barra que representa o inteiro, que por sua vez tem o comprimento de uma folha A4, de 29.5 cm e na largura de 4.0 cm para poder proporcionar um melhor manuseio e observação, principalmente nas barras menores, que representam 1/7, 1/8, 1/9 e 1/10. Com esses parâmetros obtemos a seguinte tabela com as dimensões das barras:

Fig. 93 - Dimensões das barras do protótipo

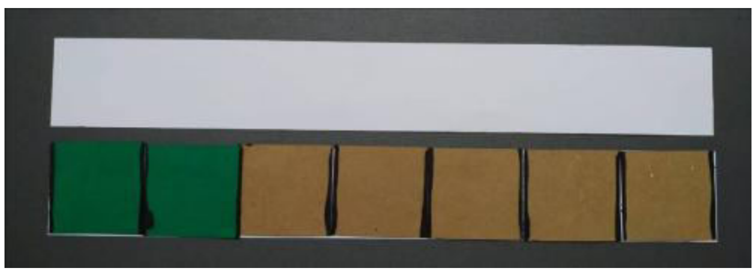
Barras	Altura	Comprimento
1	4cm	29,5cm
1/2	4cm	14,75cm
1/3	4cm	9,83cm
1/4	4cm	7,37m
1/5	4cm	5,90cm
1/6	4cm	4,91cm
1/7	4cm	4,21cm
1/8	4cm	3,68cm
1/9	4cm	3,27cm
1/10	4cm	2,95cm

Fonte: O autor (2021)

Como podemos representar as frações usando as barras?

Primeiro, devemos fazer a representação nos baseando na maior barra, da unidade, colocando as barras das partes sobre ela até que seja toda coberta; é importante lembrar que o papel cartão tem duas cores, uma em cada lado, onde um deles é colorido, por exemplo verde ou azul, e o outro lado tem cor marrom, cor de papelão, vamos utilizar essas duas cores ao nosso favor. A princípio vamos colocar todas as barras das partes que queremos representar viradas para a cor marrom, e ela representará o denominador, que é o total partes do inteiro. Para representar o numerador vamos apenas virar a quantidade selecionada das partes para ficar com a cor colorida, assim a representação é finalizada. Vejamos um exemplo dessa representação com a fração 2/7:

Fig. 94 - Representação da fração 2/7



Fonte: O autor (2021)

Agora como **representar e encontrar frações equivalentes** a uma determinada fração com as Barras?

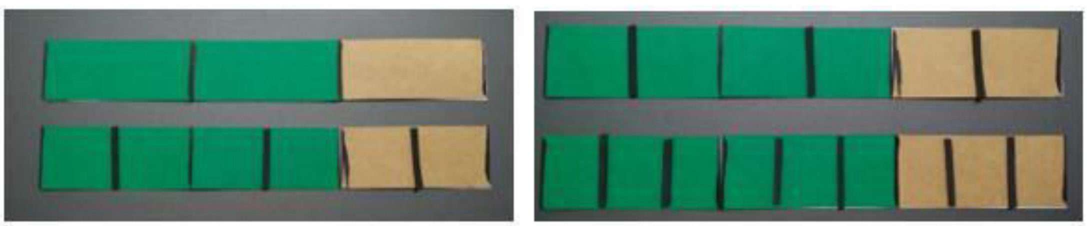
Para encontrarmos frações equivalentes a uma dada fração já representada pela régua do modelo de barras, vamos utilizar alguns pedaços de E.V.A na cor preta, para repartir as partes da representação da fração, assim estaremos aumentando proporcionalmente, ou seja, multiplicando o numerador e denominador da fração por um número natural, sem alterar o seu resultado, já que as partes coloridas da fração não se alterarão.

Fig. 95 - Barras finas de 4cm de altura

Fonte: O autor (2021)

Caso não tenha E.V.A, podem ser usados palitos de dentes ou de fósforo contanto que estejam pintados na cor preta, simulando assim as linhas que partem a barras. Veja o exemplo abaixo com a fração 2/3:

Fig. 96 - Representação de fração equivalente



Fonte: O autor (2021)

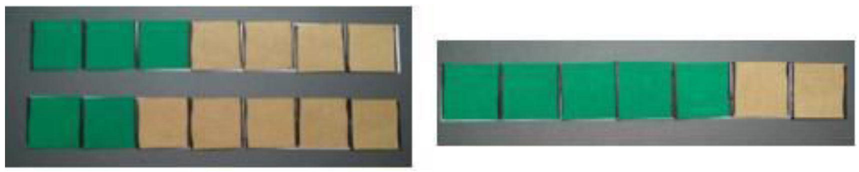
Vejamos então como **somar e subtrair frações usando as barras.**

Antes de instruirmos os alunos a somar e subtrair frações com as réguas do modelo ade barras de Singapura, é preciso ensiná-los que a forma de realizar essas operações são bem semelhantes, explicando justamente que para elas sejam feitas, antes é preciso que seus denominadores sejam iguais, isso acontecendo, basta repetir esse denominador e operar com os numeradores; se a operação for soma, vamos somá-los, caso seja a operação de subtração, vamos subtraí-los, tirando a quantidade de barras negativas das barras positivas. Se porventura os seus denominadores não forem iguais, vamos torná-los, usando as frações equivalentes. Vamos agora aprender a realizar essas duas operações usando o modelo de barras de Singapura.

Agora vamos ver como podemos **somar e subtrair frações com denominadores iguais.**

Como já escrito, para operar frações de mesmo denominador, por exemplo 3/7 + 2/7, vamos pegar uma nova régua repartida em 7 partes e marcá-las de acordo com a quantidade dos numeradores das frações a serem somadas, que são 3 e 2 totalizando 5 partes e formando assim a fração 5/7, como na figura abaixo:

Fig. 97 - soma com mesmo denominador



Fonte: O autor (2021)

Mas, também é possível **somar e subtrair frações com denominadores múltiplos**, como veremos.

Para aprendermos a somar ou subtrair frações com denominadores múltiplos, vamos a um exemplo de subtração: 4/6 – 1/2, para esse caso, vamos separar a operação em três passos.

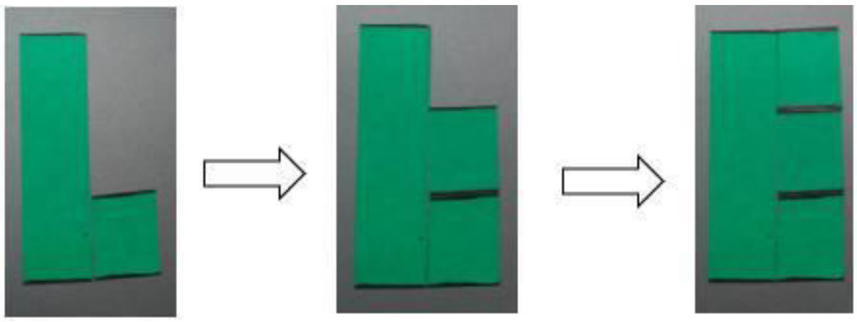
Fig. 98 - Subtração de frações com o protótipo

Fonte: O autor (2021)

Passo 1: Vamos pegar as barras que representam as partes de cada fração, nesse exemplo, barras de 1/6 e as de 1/2, para coloca-las lado a lado, adicionando as barras uma acima da outra até que que elas fiquem do mesmo tamanho, como é feito na figura abaixo:

Fig. 99 - Torre de M.M.C

.

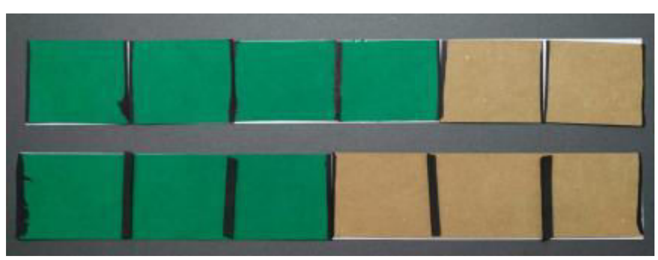


Fonte: O autor (2021)

Neste exemplo, precisamos apenas adicionar barras de tamanho 1/6, ficando com três na alinhadas, já a barra de 1/2 não precisou ser alterada, e isso acontece justamente pelo fato da fração 1/2 ser múltipla da fração 1/6.

Passo 2: Agora vamos observar quantas barras possuem cada torre, para podermos repartir com os pedaços de E.V.A preto, as barras da outra fração, a quantidade de vezes referente ao número de barras repetidas. Neste exemplo, foram necessários três barras de 1/6 e apenas uma barra de 1/2, logo, voltando as frações, isso indica que é preciso repartir com o E.V.A as barras de 1/2 da representação em três partes, já as barras de 1/6 não precisarão ser repartidas, já que, nas torres, há apenas uma barra de 1/2, como na figura abaixo:

Fig.100 - Partições das barras para o denominador comum



Fonte: O autor (2021)

Passo 3: Com essas partições feitas, podemos agora perceber que as duas frações possuem o mesmo denominador, sendo agora 1/2 = 3/6; com isso podemos fazer facilmente a operação 4/6 – 3/6 = 1/6, repetindo o denominador e subtraindo os numeradores, como na figura a seguir:

Fig.101 - Resultado da subtração

Fonte: O autor (2021)

E como podemos **somar ou subtrair frações com denominadores não múltiplos?**

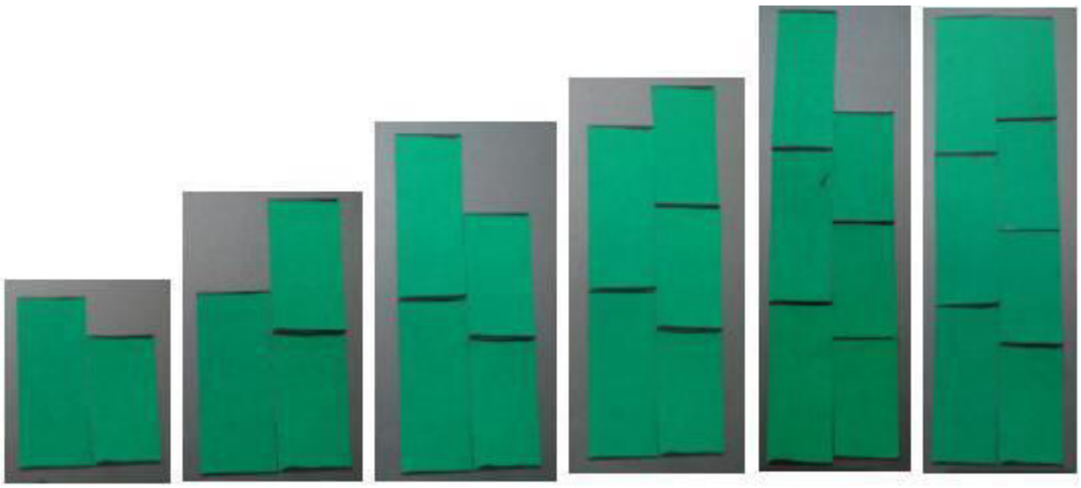
Para somar ou subtrair frações com denominadores não múltiplos, procederemos de forma muito semelhante, e para mostrar isso, vamos a um outro exemplo, agora 2/3 + 1/4, e para darmos início, vamos representar a frações.

Fig.102 - Representação das frações 2/3 e 1/4

Fonte: O autor (2021)

Passo 1: De forma análoga ao primeiro passo do exemplo anterior, vamos pegar as barras que representam as partições de cada fração; nesse exemplo, barras de 1/3 e as de 1/4, para colocá-las lado a lado, adicionando as barras uma acima da outra até que elas formem duas torres do mesmo tamanho, como é feito na figura abaixo:

Fig.103 – Método para o encontrar o denominador comum



Fonte: O autor (2021)

Passo 2: Agora vamos verificar a quantidade de barras de cada torre, para podermos repartir com os pedaços de E.V.A preto as barras da outra fração, a quantidade de vezes referente ao número de barras repetidas. Neste exemplo, foram necessárias quatro barras de 1/4 e três barras de 1/3, logo, voltando às frações, isso indica que é preciso repartir com o E.V.A as barras de 1/3 da representação em quatro partes, já as barras de 1/4 deverão ser repartidas e três partes, como na figura abaixo:

Fig. 104 - Barras repartidas com E.V.A.

Fonte: O autor (2021)

Observação: Essa é a diferença entre soma de frações múltiplas e não múltiplas, pois na segunda, as duas barras são acrescentadas, até que as torres tenham o mesmo tamanho, já na primeira, basta acrescentar apenas em uma delas até chegar no tamanho da outra. É possível perceber que isso acontece naturalmente.

Passo 3: Agora que foram repartidas, vimos que elas têm o mesmo denominador, que 12, com isso temos agora que 1/4 = 3/12 e que 2/3 = 8/12, logo a operação 1/4 + 2/3 é o mesmo que operar 3/12 + 8/12. Bastando agora repetir o denominador e somar os numeradores, formando a fração 11/12, como na figura abaixo:

Fig.105 - Resultado da soma

Fonte: O autor (2021)

Por fim, veremos como **é a representação de frações impróprias com o modelo de barras de Singapura.** Agora que sabemos efetuar a soma entre frações, podemos representar as frações cujo numerador é maior que o denominador, as chamadas frações impróprias, que por sua vez representam um número maior que um inteiro. Vamos ao exemplo da fração 5/3, a qual podemos perceber que essa fração é o resultado de uma soma entre as frações 3/3 e 2/3, logo para representarmos a fração 5/3, vamos usar a representação dessas duas frações com modelo de barras de Singapura e juntá-las, como na figura abaixo. Nela as barras brancas, de um inteiro, foram colocadas apenas para não causar confusão de visualização, já que pela figura não é possível perceber que se tratam de duas barras de unidade, podendo ser confundida com a representação da fração 5/6, deixando claro que isso não acontece na manipulação presencial, já que fica notório a diferença de tamanhos, das duas representações.

Fig. 106 - Representação de uma fração imprópria

Fonte: O autor (2021)

Passemos ao Capítulo 3, com a apresentação da pesquisa qualitativa que foi realizada por meio de um minicurso.

CAPÍTULO III

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

3.1 Caracterização do objeto e delineamento da pesquisa: metodologia de pesquisa e procedimentos para coleta de dados e análise

A pesquisa se caracteriza como qualitativa (LUDKE; ANDRÉ, 1986) baseada em um estudo de caso (YIN, 2010), voltada para a utilização, por professores que ensinam Matemática na Educação Básica, dos dois recursos didáticos propostos, o Material Cuisenaire e o Modelo de Barras de Singapura, para o ensino do conteúdo de soma e subtração de frações, com denominadores comuns, múltiplos e não múltiplos.

Buscamos com essa pesquisa verificar como os professores trabalham o tema proposto, se de forma tradicional ou fazendo o uso de algum recurso didático, e além disso, buscamos identificar qual é o nível de conhecimento que esses professores possuem em relação às frações, como seus conceitos, explicação de procedimentos e definições, ou seja, se possuem o conhecimento do conteúdo. Desejamos analisar também se estes professores possuem o conhecimento especializado do conteúdo segundo o que Ball, Thames e Phelps (2008) trataram em seu trabalho e que foi citado no segundo capítulo deste trabalho, e que é necessário para ensinar o conceito de fração e suas operações.

Outro ponto a ser identificado nos professores que participaram da pesquisa diz respeito a forma com que eles enxergam a fração, qual dos cinco significados apresentados por Nunes et al (2003) e citados neste trabalho é o mais abordado por eles e se após da aplicação dessa pesquisa houve uma mudança em relação à predominância de um desses significados.

Para obtermos os dados necessários para as análises citadas acima, a pesquisa foi feita por meio de recursos digitais e remotos em decorrência da situação pandêmica que se fez presente durante todo processo de efetivação deste trabalho, que foi o ano de 2020. A princípio fizemos um pré-teste por meio de um questionário digital feito na plataforma do Google Driver, chamada de Google Forms, para termos informações sobre os perfis dos docentes participantes.

Posteriormente, a continuidade da pesquisa se deu pela aplicação do minicurso, cujo objetivo foi apresentar aos professores os conceitos de frações, os seus significados, bem como as aplicações destes. Também foi apresentado no minicurso ministrado de forma remota por meio da ferramenta Google Meet, os dois recursos didáticos tratados neste trabalho, com o objetivo de oferecer aos docentes a oportunidade de aprenderem a utilizar tanto as barras da escala Cuisenaire, como o protótipo para o modelo de barras de Singapura desenvolvido nesse trabalho no ensino de frações, com o intuito final de efetuarem as operações de soma e subtração com estes materiais.

Para coletarmos os dados dos participantes do minicurso, foram utilizados outros quatro questionários digitais dispostos pela mesma ferramenta no qual o pré-teste foi feito, o primeiro deles, questionário a priori, foi aplicado no ato da inscrição para o minicurso, os dois subsequentes foram aplicados no decorrer do minicurso, mais precisamente no final da apresentação de cada um dos recursos didáticos. Por fim, após termos finalizado todas as apresentações, foi disposto o último questionário, a posteriori, para coletarmos informações como as referentes ao nível de mudança quanto ao significado de frações, bem como recolher as informações dos docentes quanto à utilização desses materiais, se de fato podem ou não contribuir para o ensino de frações, especialmente se eles podem ser úteis para o ensino de soma e subtração dessa representação dos números racionais.

3.2 A pesquisa qualitativa: o curso de extensão

Foi realizado um curso de extensão para aplicação dos estudos que foram feitos no decorrer das pesquisas do TCC, para poder apresentar os recursos didáticos aos professores, como confeccionar os protótipos e como utilizá-los para se ensinar aos alunos do sexto ano do Ensino Fundamental a somar a subtrair frações utilizando os recursos didáticos manipuláveis, tanto com a escala Cuisenaire como o protótipo feito de papel cartão do modelo de barras de Singapura.

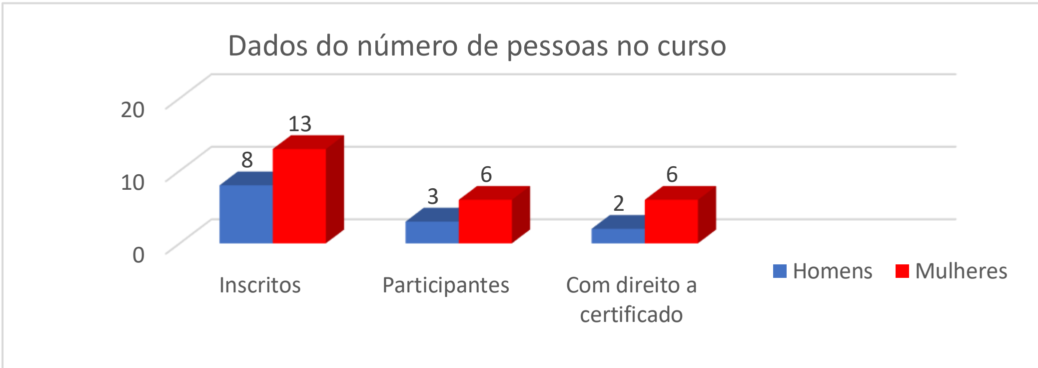
Este curso de extensão foi criado e disposto através do Sistema Integrado de Gestão das Atividades Acadêmicas, o SIGAA UFAL, com a disponibilização do certificado de participação para os que atingissem no mínimo 75% da presença no curso, que por sua vez teve a duração de oito horas, sendo aplicado em um único dia, na data de 05 de dezembro de 2020 em dois períodos, das 8h às 12h e das 13h às 18h, com 4 listas de presença, duas pela manhã e duas no período da tarde.

A aplicação do curso foi feita por completo de forma online e remota devido ao contexto social de pandemia vivido mundialmente, e foram utilizados recursos virtuais para a apresentação do curso, a interação com os participantes foi feita por meio de vídeo conferência e para a coleta dos dados foram utilizados questionários online.

Foram ofertadas 100 vagas no curso, com o pré-requisito que fossem graduados ou estivessem cursando Licenciatura em Matemática ou Pedagogia ou outros cursos correlatos. E apesar de ser voltada para aprimorar o ensino de frações, não era necessário estar exercendo a profissão docente para se inscrever, já que é muito importante oferecer aos futuros professores a oportunidade de aprender novas metodologias e ensinar de forma lúdica.

Devido aos tempos vividos já mencionados e o fato de ser fim de ano e todos estarem exaustos e esgotados, foram feitas apenas 21 inscrições para o curso, que por sua vez foi intitulado de “ENSINO DE FRAÇÕES PARA O ENSINO FUNDAMENTAL COM MATERIAL CUISINAIRE E MODELO DE BARRAS DE SINGAPURA” e teve o período de inscrição do dia 27 de novembro até o dia 04 de dezembro de 2020, um dia antes da aplicação do curso, e do total de inscrições, 8 dessas inscrições foram feitas por homens e 13 por mulheres. Desse total de inscritos, apenas 9 participantes compareceram no dia da apresentação do curso e 8 inscritos atingiram a carga horária suficiente para ter direito ao certificado de participação. Vejamos o gráfico abaixo que mostra a quantidade de participantes em cada etapa do curso, desde a inscrição e até aos que tiveram direito ao certificado:

Fig. 107 – Número de participantes do curso



Fonte: O autor (2021)

Podemos ver neste gráfico que o número de mulheres sempre foi maior que o número de homens, isso nos faz inferir que elas têm mais interesse em aprender novas metodologias lúdicas ao invés de se atrelar apenas ao tradicional, e mesmo havendo desistência entre as mulheres, o percentual ainda é menor que o dos homens.

3.2.1 Aplicação do Pré-teste: resultados e percepções sobre a visão dos professores e futuros professores sobre o ensino de fração

Antes de ser disponibilizada a inscrição para o minicurso no qual os dados deste trabalho foram coletados, foi realizada uma pesquisa com estudantes formados ou em formação nos cursos de Licenciatura em Matemática e Pedagogia, atuantes ou não na profissão. A finalidade foi avaliar a questão que diz respeito aos recursos didáticos que são objeto de estudo deste trabalho, buscando verificar questões sobre o uso de recursos didáticos diversos na sala de aula, como materiais manipuláveis, livros didáticos, uso de situações-problema para trabalhar os conteúdos de Matemática, entre outros pontos fundamentais para que se pudesse traçar o perfil dos que participaram da pesquisa.

O objetivo principal da pesquisa foi colher informações sobre o conhecimento do Material Cuisenaire e do Modelo de Barras de Singapura, se os participantes já ouviram falar nesses materiais, se já viram a sua utilização em algum conteúdo matemático e se já haviam utilizado alguma vez. Junto a isso, foi feito um teste com algumas situações-problema para verificar o nível de conhecimento dos participantes com relação ao conteúdo de frações, os seus significados, que foram identificados por Campos, Magina e Nunes (2006), bem como nas operações de soma e subtração com os números fracionários, com questões de múltipla escolha e questões abertas pedindo para que fossem respondidas da forma que esses professores ou futuros professores ensinariam aos alunos de uma turma do sexto ano do Ensino Fundamental, avaliando assim a didática deles e como eles transmitem o conhecimento que possuem.

Devido aos momentos de isolamento social no período da aplicação, a pesquisa foi realizada de forma online com o auxílio de recursos digitais, como o questionário que pode ser facilmente preenchido e enviado pela internet. Participaram da pesquisa 43 pessoas, sendo boa parte do gênero feminino, com 67,4% dos que responderam, sendo o número exato de 29 mulheres, e tivemos a participação de 14 homens na pesquisa, representando 32,6% do total.

Outra informação relevante é de que que a maior parte desses 43 participantes são jovens na faixa etária de 18 a 25 anos, representando 39,5% do total, sendo a mesma porcentagem de 27,9% para as faixas de 26 a 36 anos e a de 36 a 50 anos de idade, com apenas 4,7% deles com idade maior que 50 anos. Das pessoas que responderam à pesquisa, grande parte leciona nos anos finais do Ensino Fundamental 2, com 46,5%. Isso mostra o interesse pelo desenvolvimento de suas habilidades para o ensino de frações no sexto ano do Ensino Fundamental, já que esse é o nosso objeto de pesquisa, porém a distribuição do restante dos participantes mostrou que professores atuantes em outras faixas do Ensino Fundamental também se mostraram atraídos pelo ensino de frações por meio de recursos didáticos, sendo bem dividido entre os anos iniciais do Ensino Fundamental, Ensino Médio e até o Ensino Superior, ressaltando mais uma vez a importância de melhorar o currículo e desenvolver novos conhecimentos para diversificar o ensino. Havia também professores que lecionavam no ensino técnico e na E.J.A. que responderam ao questionário.

Apesar do teste ter sido disponibilizado para todos que se interessassem pelo tema, como licenciados e licenciandos nos Cursos de Matemática, Pedagogia ou até em outros cursos, como Física e Química, foi possível notar que o Curso de Matemática prevaleceu nessa pesquisa, sendo a maior parte dos participantes que ainda estão na licenciatura, com o percentual de 37,2%. Isso mostra o interesse dos futuros professores em buscar novas alternativas de promover um ensino atrativo, com o uso de recursos didáticos manipuláveis, para assim desenvolverem e promoverem um ensino de Matemática mais significativo. Seguidos de 30,2% dos participantes já formados em Matemática o que nos leva a entender que mesmo esses professores sendo já considerados profissionais têm o entendimento de que é preciso estar em uma formação constante e contínua, para se atualizarem das novas didáticas ou até o aperfeiçoamento das metodologias estudadas anteriormente.

Podemos tirar algumas outras conclusões ainda utilizando esses parâmetros sobre a formação acadêmica dos que fizeram parte da pesquisa, voltados justamente para os graduados e graduandos do curso de Pedagogia, em que as porcentagens se invertem com relação ao curso de Matemática, pois tiveram mais participantes já formados nesse curso, com 11,6% do total, e apenas 7% de todos os participantes ainda não haviam concluído o curso. Isso nos mostra, em geral, o pouco interesse dos pedagogos (do grupo pesquisado) em buscar novas alternativas para se ensinar frações, talvez por não estarem habituados com os conteúdos de Matemática e se sentirem incapazes de aprender novas metodologias, se contentando apenas ao que já conhecem.

Ainda é possível ter uma outra análise tomando como base apenas os participantes que se inscreveram que são do curso de Pedagogia, concluintes ou não, que por sua vez também se invertem em relação ao curso de Licenciatura em Matemática, já podemos ver um interesse maior dos alunos que já concluíram o curso do que os que ainda estão cursando a faculdade. Isso mostra que esses graduados reconhecem que precisam aprender mais sobre os conceitos de frações e como os apresentar para seus alunos de forma que eles se interessem e aprendam o que for disposto, buscando desenvolver aquilo que não foi aprendido ou pouco aprendido na graduação, ou seja, com a prática do dia a dia da profissão eles encontraram a necessidade e a motivação para desenvolver essas habilidades. Em contrapartida, os graduandos não tiveram o interesse com a mesma intensidade, talvez por acharem que o que estão aprendendo já seja o suficiente para se ensinar os conceitos matemáticos.

Nessa pesquisa também foi feita a pergunta sobre a frequência com que os professores utilizavam o livro didático em suas aulas, com isso foram obtidas as seguintes porcentagens com relação às alternativas dispostas: “Quase sempre” foi a mais respondida, com 48,8%, seguidas de, “Sempre” com 30,2%, “Raramente” com 16,3% e “Nunca” com 4,7%. Isso nos mostra que os professores atuais valorizam os livros didáticos que as escolas oferecem, o que é muito importante, já que esses trazem uma grande quantidade de significados e contextos que fazem parte de cada conteúdo matemático, em específico o conteúdo de frações, principalmente os livros do ensino público, com muitos exemplos e situações que se rementem ao cotidiano dos alunos. Mas, é importante ressaltar que o livro didático não é o único recurso didático a ser utilizado pelos professores nas aulas, sendo necessário buscar outros para diversificar as aulas e auxiliem os alunos a desenvolverem outras habilidades e competências.

Outra pergunta feita foi sobre a frequência do uso de materiais didáticos manipuláveis nas aulas, e nessa indagação obtivemos um resultado distinto, porém a alternativa “Quase sempre” ainda foi a mais selecionada, agora com 55,8%, porém ela segue de uma resposta que remete a uma má realidade sobre esse assunto, pois 27,9% dos participantes responderam que raramente usam materiais manipuláveis, e apenas 11,6% responderam que sempre fazem o uso desse recurso. A utilização de materiais manipuláveis é de suma importância para a aprendizagem dos alunos.

Foi levantada outra pauta nessa pesquisa, sobre o uso de situações-problema durante as aulas de Matemática, e do total de participantes, 51,2% responderam “quase sempre”, seguidos de 32,6% que responderam “sempre” utilizar situações-problema. Sobre a utilização de recursos didáticos digitais, demos duas alternativas, sim ou não, e 72,1% dos professores disseram que já utilizaram esse recurso didático, o que é muito interessante, principalmente nos tempos atuais no qual os alunos passam muito tempo em meio a aparelhos digitais, levar esse recurso para a sala de aula vai auxiliar no processo mais eficiente do ensino e aprendizagem.

Pedimos para que os participantes escrevessem qual ou quais dos recursos didáticos eles já utilizaram na sala de aula, e os mais utilizados foram o projetor, televisão, vídeo aulas e filmes. Mas, também muitos deles disseram usar o Geogebra, jogos digitais, como os de raciocínio lógico e de xadrez, planilhas, livros digitais; outra ferramenta citada foi o celular, e nesse tempo de aulas remotas, os recursos digitais de vídeo conferência e testes online também foram muito utilizados, e os citados pelos participantes foram OneNote, MicrosoftForms, Google Forms, Google ClassRoom e o Google Meet, ferramentas fundamentais para trazer mais praticidade para o ensino remoto.

Recolhemos também as respostas dos 27,9% dos professorem que disseram não ter utilizado recursos digitais em suas aulas, e algumas respostas relatavam a falta de internet de qualidade na escola, falta de laboratório ativo, falta de equipamentos nas salas de laboratório, de modo geral, as respostas nos levam a entender que escolas onde esses professores lecionam não possuem estrutura e ferramentas que deem ao professor a possibilidade interagiram com seus alunos por meios digitais. Isso gera nesse docente um desânimo e desinteresse em conhecer esses recursos e como eles podem ser usados nas suas aulas. É importante que os gestores das escolas públicas busquem, nas formas cabíveis, trazer os recursos digitais para suas escolas, assim como o laboratório de materiais manipuláveis.

3.2.1.1 Dados sobre o conteúdo de frações e os recursos didáticos da pesquisa

Nesta pesquisa foram feitas duas perguntas, que foram: “Você conhece o material Cuisenaire?” e “Você conhece o modelo de barras de Singapura?”.

As respostas foram um tanto impressionantes, de modo que apenas 20,9% disseram conhecer o material Cuisenaire e 11,6% conhecem o modelo de barras de Singapura. Inferimos que seja reflexo da formação que os graduados e graduandos em Matemática e Pedagogia possuem, com defasagens em relação ao ensino de Matemática, já que eles formam a grande parte dos participantes da pesquisa. Numa formação que não explora materiais concretos, é compreensível a falta de conhecimento sobre o método de barras de Singapura, já que é algo que a pouco tempo tem sido estudado pelos brasileiros, porém, o material Cuisenaire é muito antigo e bastante útil para o ensino das operações básicas, como a soma e subtração nos anos iniciais do Ensino Fundamental, esperava-se que esse recurso fosse mais conhecido.

Fizemos uma pergunta que buscava saber a opinião dos participantes com relação ao motivo pelo qual os alunos têm dificuldades em compreender os conceitos de frações e suas operações, mais do que os outros conteúdos de Matemática. Essa pergunta foi aberta, e tivemos como resposta mais frequente, “Porque não é bem trabalhado na base”.

Uma ótima base matemática é importante para que se possa dar continuidade ao aprendizado, pois como a própria denominação diz, “base” é o que fornece sustentação para que ser possa erguer algo sólido e firme. Outra resposta muito frequente foi “Poucos exercícios com objetos manipuláveis e situações-problema” e “Falta de prática e de visualização das aplicações de frações no dia a dia”, ressaltando assim a importância e a potencialidade de se trabalhar frações com os materiais concretos e com situações-problema que façam parte do cotidiano dos alunos.

Foram recolhidas repostas que falam sobre a falta da realização correta das etapas de aprendizagem por parte dos professores como as respostas “Na minha visão seria a forma como ela é ministrada pelo professor e principalmente o trabalho de conceituação dos fatores de uma fração antes de cair em cima dos números em si”.

A resposta que mais nos chama a atenção e nos preocupa com relação não apenas ao ensino de frações, mas sim ao da Matemática em geral, é aquela que fala “porque na nossa sociedade já é tida a cultura de que Matemática é difícil”. Esse pensamento prejudica muito o processo de ensino-aprendizagem de qualquer conceito matemático, visto que muitos alunos já vão para a escola com essa “Cultura” que foi formada ao longo da vida da sociedade, e é preciso descontruir essa ideia pejorativa, com um novo jeito de se ensinar Matemática, por meio de metodologias e recursos que trazem a Matemática para a realidade dos alunos e da sociedade, que é onde ela verdadeiramente está inserida, ao invés de tentar levar seus alunos para um mundo abstrato e procedimental.

Esse tipo fechado de se ensinar Matemática faz com que as aulas se tornem muitas vezes sem sentido, sem propósito, justamente por serem repletas de “macetes” no lugar do processo teórico do raciocínio para se saber o motivo do procedimento ser feito. Isso pode ser visto em uma das respostas “As frações, apesar de conseguirmos trabalhá-las com material concreto, muitas vezes são ensinadas com uso de macetes e não com a teoria, o que acaba gerando um esquecimento por parte dos estudantes das "fórmulas" que são usadas no ensino (ex: "divide pelo de baixo e multiplica pelo de cima" etc)”

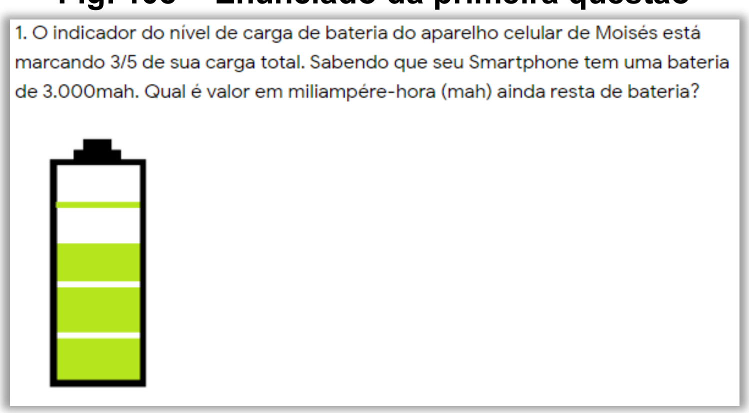
Foi feito o questionamento sobre a importância de se trabalhar frações com materiais concretos, e a resposta foi unânime, todos os participantes marcaram a alternativa que dizia ser fundamental que o ensino de frações tenha o uso de recursos didáticos manipuláveis para que se tenha um ensino mais eficaz.

3.2.1.2 Teste sobre os conhecimentos de frações

Nessa etapa do pré-teste foram colocadas situações-problema envolvendo os conceitos relacionados ao conteúdo de frações, para que se pudesse verificar o nível de conhecimento dos participantes sobre o conteúdo. Foram elaboradas 4 questões, sendo 3 delas de múltipla escolha e uma questão aberta com a ressalva de que os participantes deveriam respondê-la da forma que explicaria para seus alunos, e essa abordagem nos permite analisar como ele trabalhariam o conceito de fração que lhes apresentado na situação-problema.

A primeira questão tinha por objetivo identificar a capacidade dos participantes de entender o que se passava na situação-problema para encontrar uma forma de se resolver, verificando suas habilidades em interpretar situações de parte de um todo, juntamente com significado de operador multiplicativo, já que umas das formas para resolver a questão era por meio da multiplicação da fração pelo todo. Segue todo o enunciado da questão:

Fig. 108 - Enunciado da primeira questão



Fonte: O autor (2021)

A questão foi de múltipla escolha, e ela teve 86% de acerto, com a reposta 1800 mah, sendo ainda que 7% marcaram a resposta contrária, 1200 mah, ao que se pedia, marcando a resposta referente a quantidade de bateria consumida, porém a pergunta pedia para informar a quantidade de bateria restante, que foi representada pela fração de 3/5 do total.

Isso mostra que essa porcentagem dos participantes ainda precisa desenvolver mais a capacidade de interpretar corretamente a questão, mesmo tendo conhecimento do conteúdo. Os outros 7% marcaram as alternativas aleatórias, o que nos leva a entender que eles não apresentavam as habilidades necessárias para resolver a questão.

Na segunda questão foi proposta para verificar as habilidades dos participantes, a correta interpretação da situação-problema, a representação de frações de uma determinada ocorrência do cotidiano e estabelecimento da relação de equivalência entre frações, ou seja, verificar se eles têm noção de fração equivalente, o que é muito importante no estudo das frações para que se possa comparar e operar a soma e subtração com os números fracionários. A seguir, temos o enunciado da questão:

Fig. 109 - Enunciado da segunda questão

Fonte: O autor (2021)

A habilidade de representação é necessária para identificar qual a fração representa a quantidade de chocolate restante, sendo que Lara comeu duas colunas das sete. Importante se atentar que nessa questão foi pedido o que restou, e não o que foi tomado para comer.

A habilidade da representação de frações equivalentes é encontrada na parte em que o enunciado pede para representar a quantidade restante com relação ao número de tablets de chocolate (quadradinhos).

Nessa situação o número de acerto caiu quase que pela metade, com a porcentagem de 44,2% dos participantes que acertaram a questão, marcando a alternativa 5/7 e 20/28, pois, sendo duas colunas consumidas por Lara, sobraram cinco das sete, e cada coluna havia 4 tablets de chocolate, ou seja, sobraram vinte do total de 28 tablets.

A segunda resposta mais marcada foi "2/7 e 5/7", com 23,3%. Esses valores têm relação com o problema, mas não se referem ao que foi pedido, pois 2/7 representa a porção da barra consumida e 5/7 representa a quantidade que sobrou; mais uma vez vemos que alguns participantes tiveram dificuldade em interpretar a questão para fazer o que foi pedido.

A terceira resposta a ser mais selecionada foi a "2/7 e 20/28" com 20,9% que por sua vez representam a quantidade consumida e a quantidade que sobrou com relação aos tablets. Mais uma vez com um possível equívoco de interpretação.

O restante dos participantes marcou alternativas aleatórias, não manifestando habilidades para resolver a situação-problema.

A terceira questão teve por objetivo analisar as habilidades dos participantes em identificar que a questão tinha o objetivo de somar as frações e se eles sabiam efetuar essa soma da forma correta; além disso, buscou verificar também se os participantes entendiam o conceito de frações próprias, identificando se aquela fração representa um número menor que um inteiro.

A seguir podemos ver a questão:

Fig. 110 - Enunciado da terceira questão.

3) Flávio e Alexandre compraram um refrigerante litros, Flávio bebeu 2/3 do refrigerante, já Alexandre bebeu 1/4 dele. Sabendo disso, responda: Qual número em forma de fração, representa a quantidade que os dois beberam? Ainda sobrou refrigerante?

- 3/7. Não
- 2/12. Sim
- 11/12. Sim
- 7/3. Sim
- 12/12. Não

Fonte: O autor (2021)

Neste teste tivemos 72,1% de acerto, que marcaram na resposta "11/12. Sim", ou seja, esses participantes têm as habilidades de interpretação, soma de frações e a noção de fração menor que um inteiro.

A segunda resposta mais selecionada foi "7/3 - Sim" com 11,6%. Essa alternativa foi disponível para verificar se os participantes tinham uma ideia errada sobra a soma de frações, como a soma dos numeradores para se obter um numerador e a soma dos denominadores para se obter um novo denominador, e ainda inverter as posições. Talvez essa fosse a resposta que pudesse ser menos selecionada, justamente por se tratar de forma de operar bem errada, e ainda no decorrer da resposta "Sim" fica evidente que essa porcentagem dos participantes não tem o conhecimento de frações próprias e impróprias, visto que 7/3 representa um número maior que um inteiro e nesse contexto, significa que eles teriam tomado dois refrigerantes e 1/3 de outro.

Na quarta e última situação-problema do teste, deixamos a questão aberta para que os participantes escrevessem suas respostas, porém não apenas apresentando os resultados, mas sim respondendo como se estivessem ensinando aos alunos do sexto ano do Ensino Fundamental, ou seja, esperava-se que eles utilizassem os conhecimentos matemáticos que os alunos costumam possuir ou que estão aprendendo. Segue abaixo o enunciado da questão:

Fig. 111 - Quarta questão do teste

4) De uma cesta de laranjas, deu-se 2/5 a uma pessoa e 1/3 da cesta a outra, e ainda sobraram 12 laranjas. Quantas laranjas havia na cesta e quantas cada uma das pessoas ficou? (Responda esta pergunta simulando estar numa sala de aula ensinando aos seus alunos do sexto ano do ensino fundamental).

Fonte: O autor (2021)

Todos os participantes responderam a questão, sendo que apenas 28% acertaram a questão por completo, alguns apenas escreveram as respostas e outros responderam como foi pedido, mostrando cada procedimento e como responderiam para seus alunos. Vamos adiante mostrar algumas dessas resoluções, que apesar de estarem corretas, algumas não poderiam ser apresentadas para os alunos do sexto ano do Ensino Fundamental, visto que sua resolução foi feita com o uso de equações do primeiro grau, que é um conteúdo que começa a ser introduzido apenas no sétimo ano. Destacamos de antemão que nenhum dos participantes usou algum material manipulável ou disse que usaria para encontrar a solução para o problema, todos realizaram apenas procedimentos tradicionais, sejam eles algébricos ou aritméticos.

Vejamos a seguir uma figura com uma resolução muito bem explicada pelo autor, usando equação do primeiro grau:

Fig. 112 - Uma resolução da quarta questão do teste usando equação

O objetivo da questão é saber quantas laranjas tínhamos no total e quantas cada pessoa ficou, como não sabemos o total de laranjas iremos utilizar uma variável qualquer e apelidá-la de "X", pessoal uma variável é pode ser um número qualquer ou de uma outra maneira: um número que ainda não foi conhecido, no nosso caso é o número total de laranjas.
Seguindo o enunciado da questão: Iremos ter a variável X(que é o total de laranjas) subtraída de (2/5)*X(lê-se dois quintos de X) e (1/3)*X(lê-se um terço de X) igual a 12, pois a questão explica que no momento em que retiramos essas determinadas quantias de laranjas irá sobrar 12 laranjas, quando manipularmos essa expressão teremos como resultado: 4x = 180 e x = 45.
Pessoal se a variável "X" é o número total de laranjas temos então que 45 é a quantidade de laranjas na certa. A primeira pessoal ficou com (2/5)*X(dois quintos de "X") então efetuando as operações temos que ela ficou com um total de 18 laranja e a segunda ficou com (1/3)*X(um terço de "X") então realizando as operações temos que ela ficou com 15 laranjas, resolvendo assim o que a questão pedia.

Fonte: O autor (2021)

Podemos ver nessa solução a presença do uso de frações com o significado de parte-todo e operador multiplicativo, na qual encontramos uma fração de um total, e isso mostra que o participante tem domínio sobre a interpretação da questão, encontrando todos os valores pedidos e explicando bem cada passo até chegar nos resultados. Porém, a forma com que essa resolução é apresentada não pode ser aplicada para a turma em questão, o sexto ano do Ensino Fundamental, mas se aplicaria muito bem para as turmas do oitavo por exemplo, que já estudam os princípios de equações desde o sétimo ano e por isso se se tornam mais hábeis a compreender a resolução.

Vamos apresentar agora uma resolução feita por um dos participantes que pode ser aplicada usando princípios aritméticos para se chegar aos resultados desejados:

Fig. 113 - Uma resolução da quarta questão do teste usando Aritmética

Vamos somar as frações para saber qual o a fração total que representa a retirada, assim 2/5+1/3 = 11/15, logo se após retirarmos 11/15 de laranja sobram 12 laranjas, então isso equivale a 4/15.
assim 12 dividido por 4 = 3, multiplicando por 15, nós temos 45 laranjas no total.

Fonte: O autor (2021)

Essa resolução é um dos exemplos em que foram usados princípios aritméticos, de soma de frações para se chegar à solução, e é possível notar que essa resposta não está completa, já que ainda faltam o número de laranjas dado à primeira pessoa, que foi de 18 equivalentes a 2/5 do total, e as 15 laranjas destinadas à segunda pessoa, que equivale a 1/3 do mesmo total. Pensamos ainda que a segunda parte poderia ser explicada de forma mais clara, já que o autor simplesmente dividiu as 12 laranjas restantes por 4 e o resultado multiplicou por 15.

Ele poderia ter explicado que como os resultados das duas frações tomadas foi 11/15, logo o que faltava para completar toda a cesta eram 4/15, já que 11/15 + 4/15 é igual a 15/15 que representa toda a cesta de laranjas. Logo, vemos que as 12 laranjas representam 4/15, e para descobrirmos cada valor pedido, precisamos primeiro encontrar quantas laranjas há em 1/15 da cesta, para isso basta dividir as 12 laranjas por 4, encontrando 3 laranjas. Agora sabemos que em 1/15 da cesta há 3 laranjas e com essa informação nós podemos encontrar quantas laranjas havia em toda a cesta, que nesse caso são 15/15 da cesta, bastando apenas multiplicar o valor de 1/5 por quinze, ou seja, 3 vezes 15, totalizando 45 laranjas.

Para encontrar a quantidade dada para a primeira pessoa, 2/5 que é igual 6/15, basta multiplicar a quantidade de 1/5 por seis, ou seja, 3 vezes 6 que resultam e 18 laranjas; o mesmo é feito para encontrar a quantidade de laranjas dadas para a segunda pessoa, 1/3 que equivale a 5/15, multiplicando 3 por 5, encontramos que a segunda pessoa ficou com 15 laranjas, essa seria uma resposta utilizando princípios da Aritmética mais completa para ser apresentada aos alunos do sexto ano do Ensino Fundamental.

Todos os outros 72% dos participantes responderam errado ou não se propuseram a responder, alguns dizendo que não sabiam como responder, outros dizendo que não ensinam a essa turma, o que não justifica a falta de conhecimento sobre como encontrar a solução para o problema, e outros dando sugestões de como fazer, mas sem apresentar resultados, talvez por que não entenderam que era preciso não apenas dizer como fariam, mas sim fazer como fariam. Segue um exemplo desse tipo de resposta: ”iniciar com o desenho das cestas, fazendo a comparação... na sequência, dar continuidade com as sugestões e interações deles.”

Uma das respostas dos participantes nos chamou a atenção pelo fato de que, como alguns outros, ele também não conseguiu interpretar a questão corretamente, pensando que as frações se referiam a uma laranja e não ao cesto da fruta. Devido esse equívoco de interpretação, ele não respondeu à pergunta, e além disso, se mostrou crítico, dizendo que o problema não foi elaborado de forma coerente. Veja a seguir a resposta desse participante:

Fig. 114 - Crítica à quarta questão do teste

Não considero este um bom problema a ser trabalhado considerando que 4/15 (o restante) não representa um número inteiro de laranjas. Trabalhar com grandezas discretas e propondo um problema em que a laranja precisa ser dividida em 15 partes carece de sentido.

Fonte: O autor (2021)

Outro erro de interpretação que pôde ser visto em algumas respostas foi com relação à fração separada para a segunda pessoa do problema. O enunciado da questão diz “De uma cesta de laranjas, deu-se 2/5 a uma pessoa e **1/3 da cesta a outra**, e ainda sobraram 12 laranjas”, porém a interpretação tomada por alguns participantes é a que foi dada 1/3 do restante da cesta, ou seja, após ter tirado 2/5 dela, do que restou, foi tirado 1/3 para a segunda pessoa, mas não é isso que diz o enunciado, pois na frase “1/3 da cesta a outra” ele se refere a 1/3 da mesma quantidade anterior.

Esse erro interpretação mudou todo o resultado dos valores que deveriam ser encontrados, já que para encontrar essa fração dada à segunda pessoa, deveria ser feita uma multiplicação de frações, entre a fração que representa a quantidade de laranjas que sobrou após a primeira parte ter sido retirada, que é de 3/5 pela fração que será destinada à segunda pessoa, que foi 1/3, totalizando 3/15 que é igual a 1/5 do total de laranjas. Os participantes que assim entenderam a questão responderam, em partes, de forma correta para essa interpretação, mostrando que sabiam utilizar princípios de equações do primeiro grau, porém lhes faltaram atenção para interpretar corretamente a situação-problema.

Fig. 115 - Resposta com erro de interpretação, quarta questão do teste

30 larajas na cesta
-primeira pessoa com 12 e a outra com 18.
Explicação:2/5 do total ficou com uma pessoa e 1/3 do resto ficou com a segunda pessoa,sendo assim,5/5 é a fracão que representa o total de laranja,mas desse total foram retirado 2/5 para uma pessoa sobrando 3/5 e do que sobrou foram retiradas 1/3 para a outra pessoa,ficando esta com 1/5 do resto. Então temos que subtrair os (3/5-1/5)=2/5 de resto.
Então vamos fazer uma regrinha de três pois 2/5——12
5/5——X
X=30 laranjas.
Para saber quanto cada pessoa ficou vamos escolher a fração da primeira pessoa 2/5×30=12 laranjas e depois subtrair do total de laranjas para saber com quantas a segunda pessoa ira ficar 30-12=18 laranjas.

Fonte: O autor (2021)

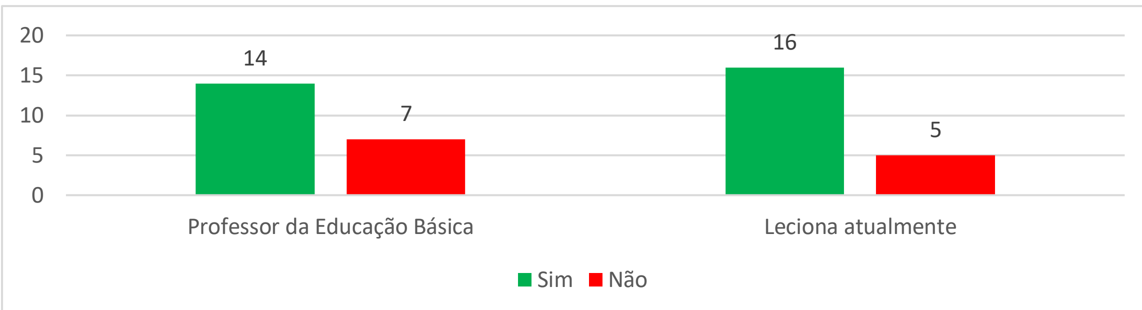
3.2.2 Aplicação do Curso de Extensão: questionário a priori, teste de verificação de aprendizagem (questionário durante o curso) e a posteriori e dinâmica do curso

Apresentaremos a seguir a descrição e análise das partes que compuseram o curso de extensão.

3.2.2.1 Análise do questionário a priori

Para poder participar do curso realizado online, o professor ou futuro professor teve que realizar uma inscrição e os participantes foram convocados para responder ao questionário para que pudéssemos ter uma análise de qual é o perfil geral da turma que se inscreveu no curso. Segue o gráfico que se refere a quantidade de participantes que já são professores e dos quais lecionam na Educação Básica:

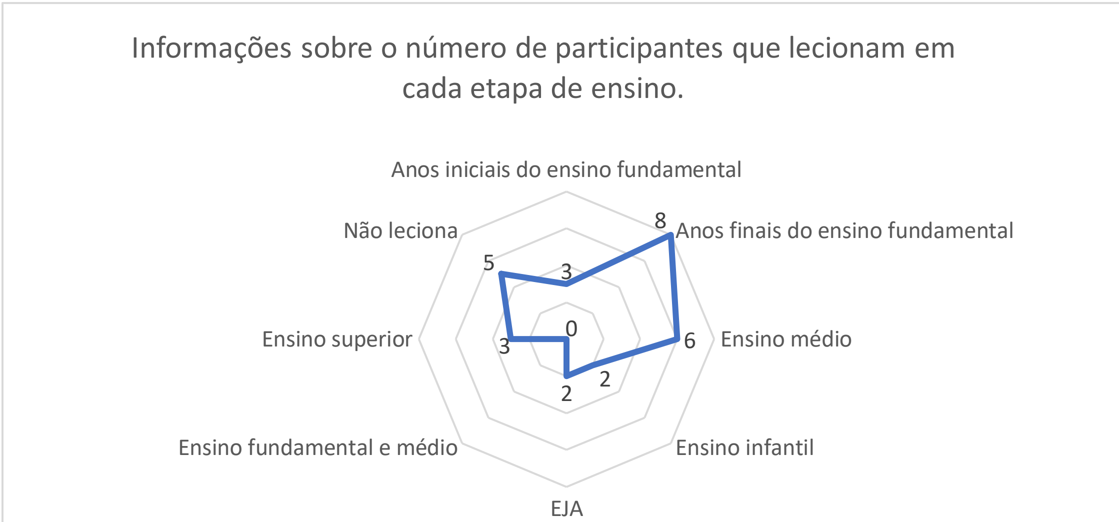
Fig. 116 - Número de participantes que lecionam



Fonte: O autor (2021)

Nesse gráfico é possível ver que o interesse maior pela aprendizagem de metodologias lúdicas é vista nos professores já atuantes do que os futuros professores; podemos observar também que de todos os participantes, dois deles não lecionam na Educação Básica, podendo lecionar apenas no Ensino Superior, sendo que esse interesse maior por parte dos docentes se dá devido à observação da necessidade de apresentar aos seus alunos ensino diversificado, isso porque suas experiências docentes fazem entender que não é possível promover um aprendizado eficiente e significativo trabalhando frações apenas da forma tradicional.

Fig. 117 - Participantes que lecionam em cada etapa

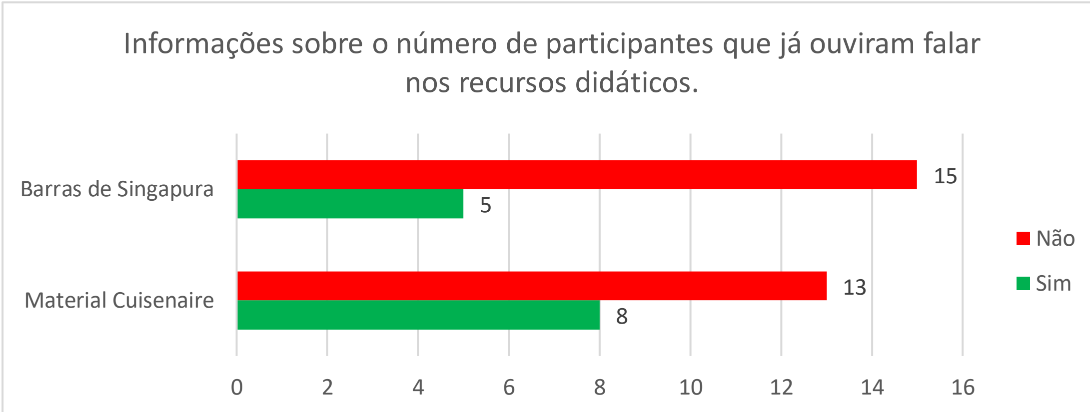


Fonte: O autor (2021)

Este gráfico acima mostra onde cada um dos participantes que são professores lecionam, eles poderiam marcar mais de uma alternativa se fosse o caso. Podemos perceber que os maiores interessados são os professores dos anos finais do ensino fundamental, visto que o curso visa ajudar principalmente essa demanda de professores, por se tratar de um recurso para o sexto ano.

Porém, vemos também o grande interesse pelos professores do Ensino Médio, e notamos que esses professores não lecionam no Ensino Fundamental também, caso contrário, seria justificável o seu interesse em aprender mais sobre os recursos didáticos apresentados no curso para auxiliar a uma parte dos seus alunos. Mas, podemos ver no gráfico de radar que não há na pesquisa professores que lecionam no Ensino Médio e Fundamental ao mesmo tempo, ou seja, esses professores mesmo apenas ensinando os três últimos anos do ensino básico, buscam aprender novas metodologias, em contrapartida vemos que poucos professores do total, apenas 3, lecionam nos anos iniciais, do primeiro ao quinto ano, mostrando um menor interesse até em relação aos participantes que não são professores ainda. Esse dado da pesquisa mostra um dos possíveis motivos pelo qual as crianças dos anos iniciais apresentam deficiências quando se refere ao conteúdo de frações.

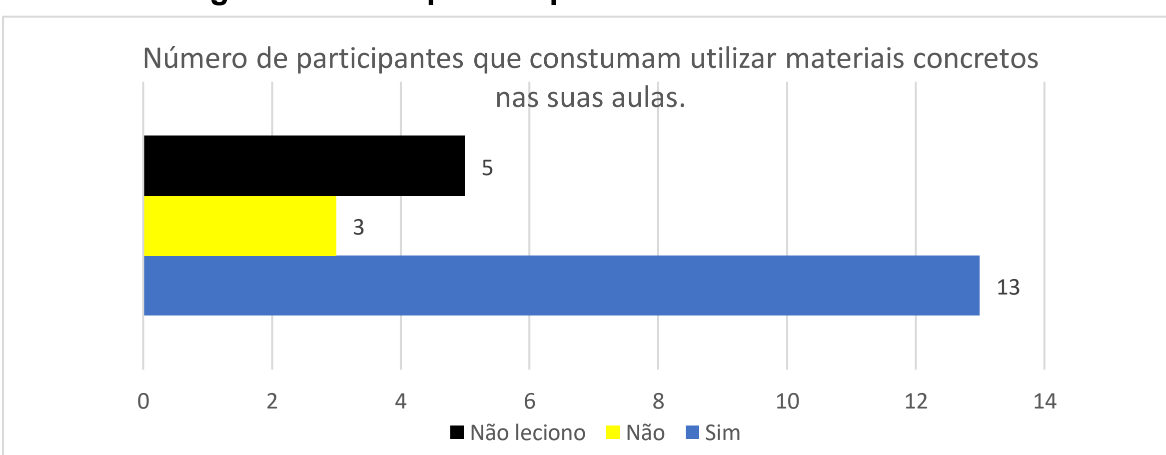
Fig. 118 - Participantes que já viram os recursos didáticos



Fonte: O autor (2021)

Outra informação tirada no questionário foi sobre o conhecimento dos recursos didáticos que foram apresentados no minicurso, e podemos ver que grande parte dos participantes não conheciam os materiais. É natural que a quantidade de professores que conhecem a escala Cuisenaire seja maior que o do modelo de barras de Singapura, visto que o segundo tem seus estudos mais recentes que o primeiro, mas ainda assim o pouco conhecimento dos materiais mostra uma deficiência na formação acadêmica com relação ao uso dos recursos didáticos manipuláveis, que deveria fazer parte da formação desses docentes.

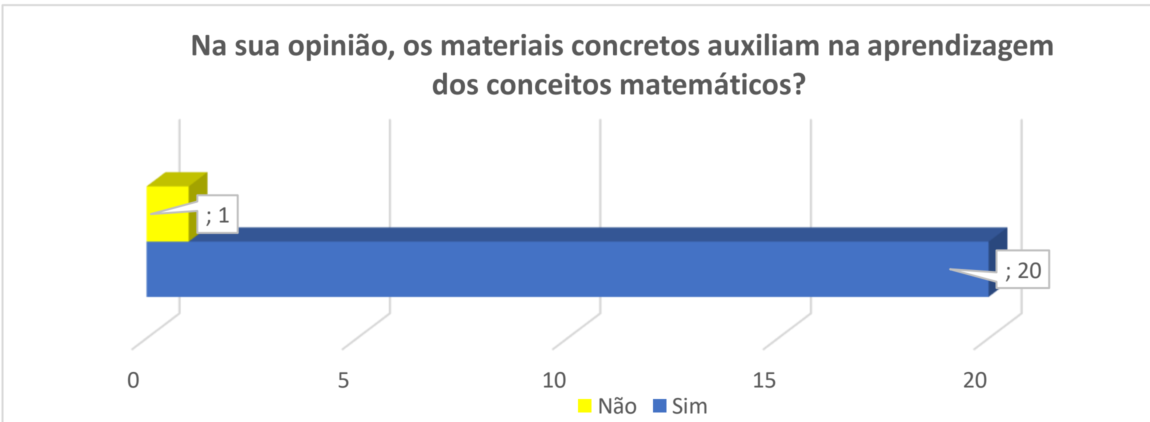
Fig. 119 - Participantes que usam materiais concretos



Fonte: O autor (2021)

O gráfico acima nos traz uma informação muito relevante sobre o contexto de utilização de materiais concretos, pois quase todos os professores afirmaram utilizar algum recurso didático manipulável em suas aulas, ainda assim, buscam aprender sobre novos recursos, agora voltados para o ensino de frações.

Fig.120 - Pergunta 1



Fonte: O autor (2021)

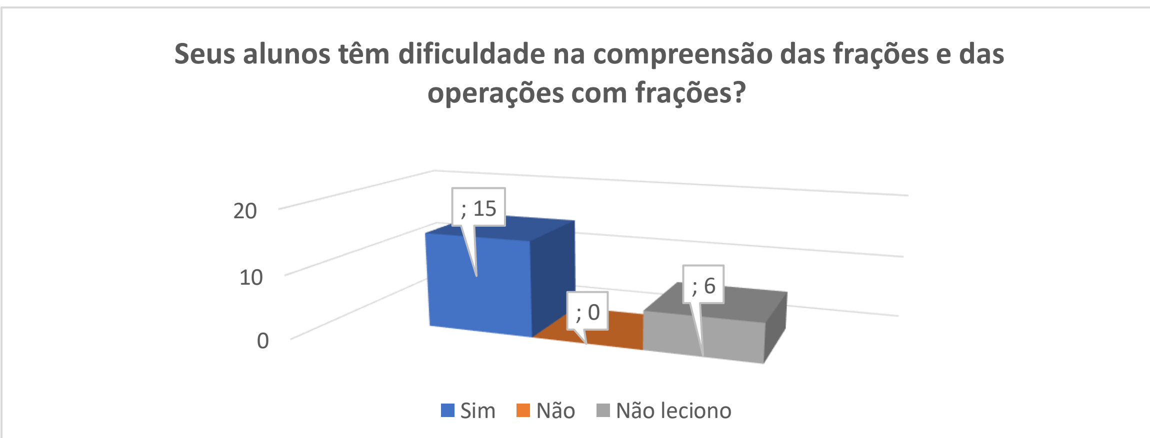
Outra resposta muito interessante é vista no gráfico acima, pois quase todos os participantes afirmaram considerar importante o uso de materiais concretos e que eles auxiliam na aprendizagem de frações, porém esse único participante que não considera acredita a otimização da aprendizagem com os materiais concretos pode nos mostrar um espelho da comunidade de professores, pois há um percentual ainda que não acha útil o uso dos recursos didáticos concretos, pelo contrário, acreditam ser “perda de tempo” ensinar dessa forma, e optam pelo método tradicional.

Isso acontece por muitos motivos, mas o principal deles é a formação que muitas das vezes é voltada apenas para os processos formais das demonstrações de uma Matemática pura, e que quando se ensina fora desse processo, não se está ensinando corretamente, por não “provar” os procedimentos, porém, nem sempre se faz necessário uma demonstração escrita, com contas e processos ditados numa folha de papel para que esta seja validada.

Mas ainda assim, felizmente os nossos professores estão mudando seus conceitos sobre ensinar Matemática, buscando constantemente deixar de lado o ensino tradicional e indo em busca de gerar conhecimento a partir das experiências de seus alunos com o seu dia a dia e com a manipulação de objetos de forma objetiva para alcançar uma aprendizagem eficiente.

Outro assunto que teve opinião unânime foi a questão do primeiro teste que se encontra no gráfico abaixo: todos os professores que trabalham com frações em suas turmas afirmaram que seus alunos possuem dificuldade em compreender as operações com frações, e isso é um fato que precisa ter mais atenção por parte dos professores, como reduzir essas deficiências que os alunos apresentam.

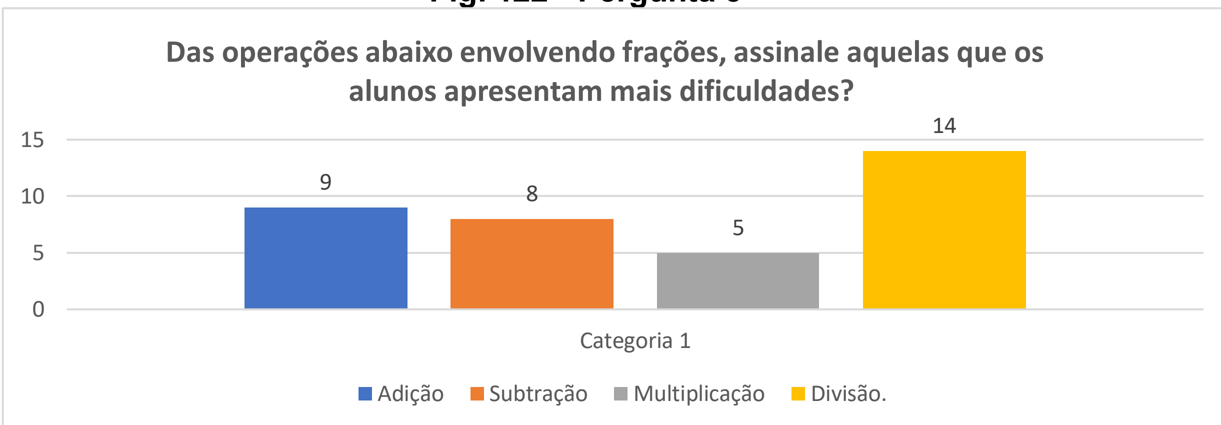
Fig. 121 - Pergunta 2



Fonte: O autor (2021)

Dentre as quatro operações básicas com frações, as operações que mais apresentam dificuldade por parte dos alunos são, em primeiro lugar, divisão e em seguida a soma e subtração. Isso se dá devido a forma com que essas operações são ensinadas, por meio de procedimentos decorativos ou até frases prontas, como por exemplo, “repete a primeira e multiplica pelo inverso da segunda”, que é uma frase muito usada para se dizer como é feita a divisão entre duas frações. Esses procedimentos muitas vezes são passados sem que haja uma explicação, fundamentação do motivo pelo qual isso deve ser feito. Para se realizar a soma ou subtração de frações por exemplo, o natural é se ensinar fazendo o mmc entre os denominadores e depois usar o resultado para ser dividido pelo denominador de cada fração e depois multiplicado pelo seu numerador, um processo muito longo que muitas das vezes poderia ser evitado caso os alunos tivessem noção do motivo pelo qual eles tem que realizá-los.

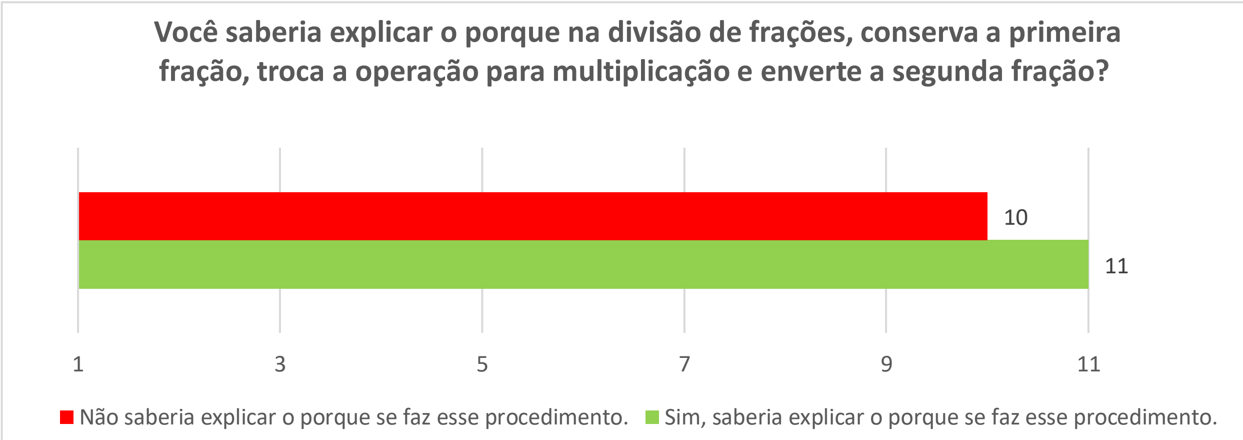
Fig. 122 - Pergunta 3



Fonte: O autor (2021)

Não estou afirmando que esses procedimentos são falhos e não servem para aprendizagem das operações, mas que sem a explicação do porque eles são feitos, deixam de ser procedimentos para uma aprendizagem rápida e fácil, para se tornar confusa e até denotada como “sem sentido” pelos alunos. Esse é um fato que precisa ser mudado no ensino das operações com frações, em especial a divisão, pois os alunos passam de um ano para outro, do Ensino Fundamental para o Ensino Médio e muitos deles levam essa deficiência para o Ensino Superior. O gráfico abaixo é uma prova para isso, pois quase a metade dos participantes afirmaram não saber como explicar o motivo da divisão de frações ser feita com o procedimento citado acima.

Fig. 123 – Pergunta 4



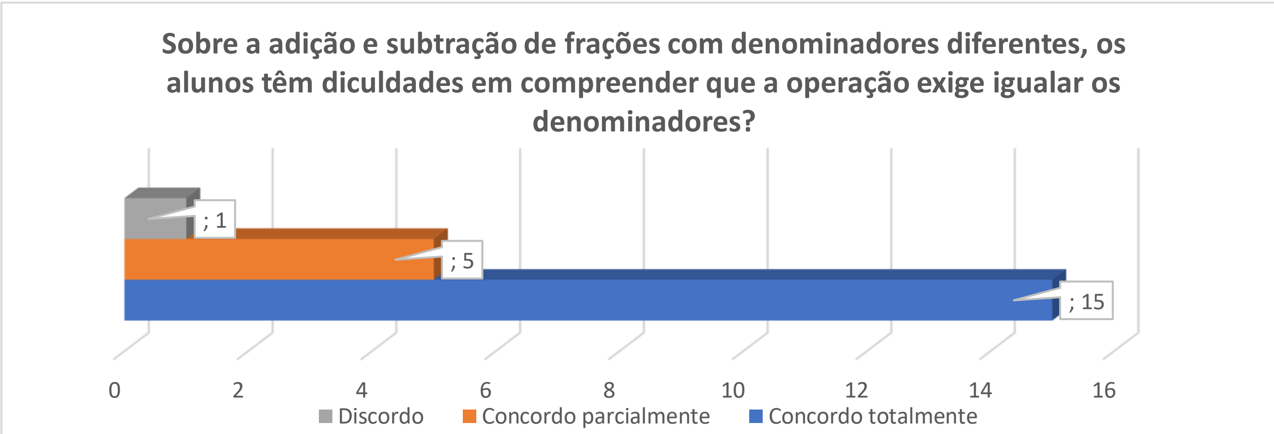
Fonte: O autor (2021)

No exemplo do procedimento da divisão de frações, é preciso que os alunos já conheçam os conceitos de frações equivalentes e o de fração inversa, com esses dois conceitos bem entendidos pelos alunos, o procedimento para divisão com frações fica coerente e estratégico.

Uma confusão de procedimentos muito comum em sala de aula é que os alunos querem somar ou subtrair frações da mesma forma que se multiplica frações, numerador com numerador e denominador com denominador. Sabemos o quanto é equivocado pensar dessa forma, mas para os alunos, que por sua vez não aprenderam os conceitos das operações é algo que pode fazer sentido, e por esse motivo deve ser de altíssima importância que o fundamento seja dado antes dos procedimentos, pois assim os alunos entenderão o motivo de cada procedimento ser diferente um do outro, e o motivo pelo qual a subtração tem o mesmo procedimento da soma.

Outra vantagem de se ensinar os conceitos de forma adequada é que se dá a liberdade ao seu aluno de achar uma forma, a melhor para ele de se efetuar as operações, através do conhecimento matemático que ele possui.

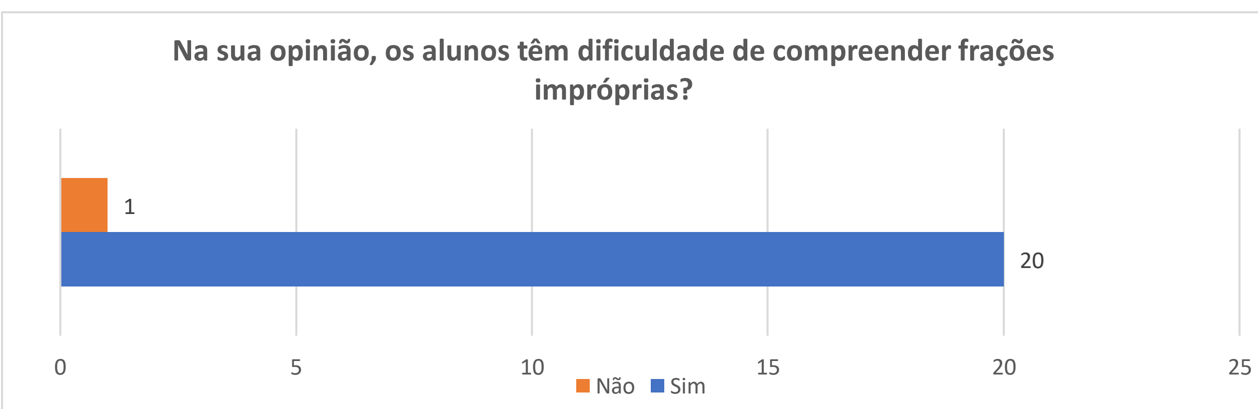
Fig. 124 - Pergunta 5



Fonte: O autor (2021)

O gráfico acima retrata um dos conceitos fundamentais para a soma e subtração com frações, o fato de que é preciso igualar os denominadores para se realizar essas operações, e apenas um dos participantes afirmou que os alunos não possuem dificuldade em compreender esse conceito, mas todos os outros concordaram parcialmente ou totalmente com a afirmação. Outro conceito que os alunos apresentam deficiência segundo os participantes é o de frações impróprias, aquelas usadas para representar parte de um inteiro e sempre tem o seu numerador menor que o denominador. Isso deve ocorrer por causa da não abordagem, ou da abordagem inadequada e incompleta desses conceitos.

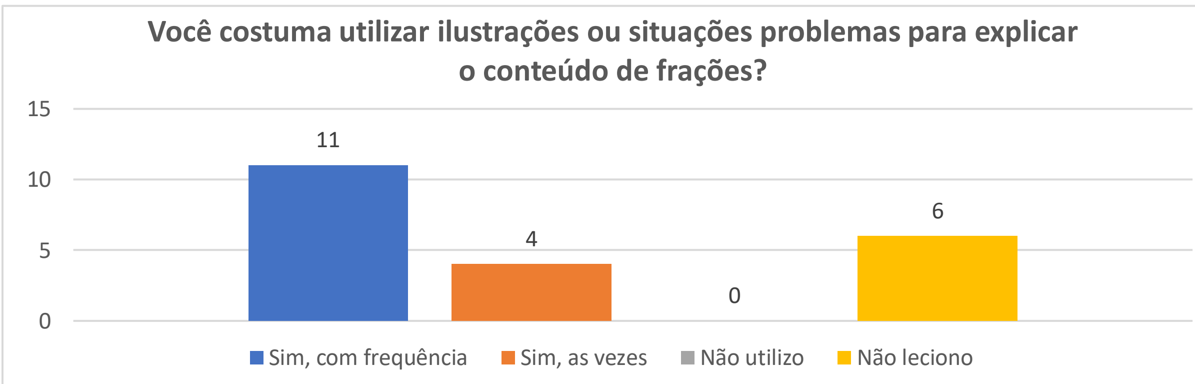
Fig. 125 - Pergunta 6



Fonte: O autor (2021)

Os gráficos abaixo trazem os apontamentos dos inscritos para o curso com relação à utilização de ilustrações e situações-problema para o ensino de frações. Podemos ver que todos os participantes que ensinam frações já utilizaram alguma ilustração ou situação-problema para auxiliar no ensino de frações e a maior parte deles afirmaram usar com frequência. Aqui ficou claro a importância da representação pictórica e da contextualização no ensino de frações.

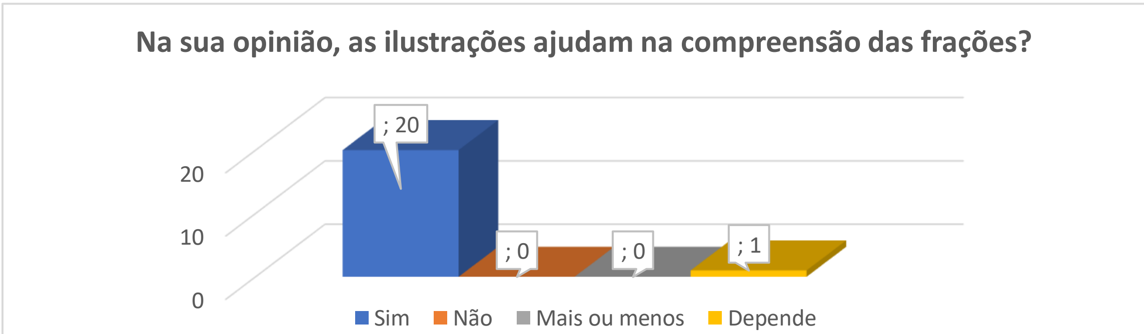
Fig. 126 - Pergunta 7



Fonte: O autor (2021)

Ainda com relação ao uso de ilustrações, podemos ver mais uma evidência da importância do uso desse recurso para ensinar frações, onde 20, dos 21 participantes, afirmaram que apresentar as frações por meio de exemplos do dia a dia, ilustrações que estão mais próximas do cotidiano dos alunos e situações-problema que estimulem o seu raciocínio ajudam na compreensão das frações, como visto no gráfico a seguir:

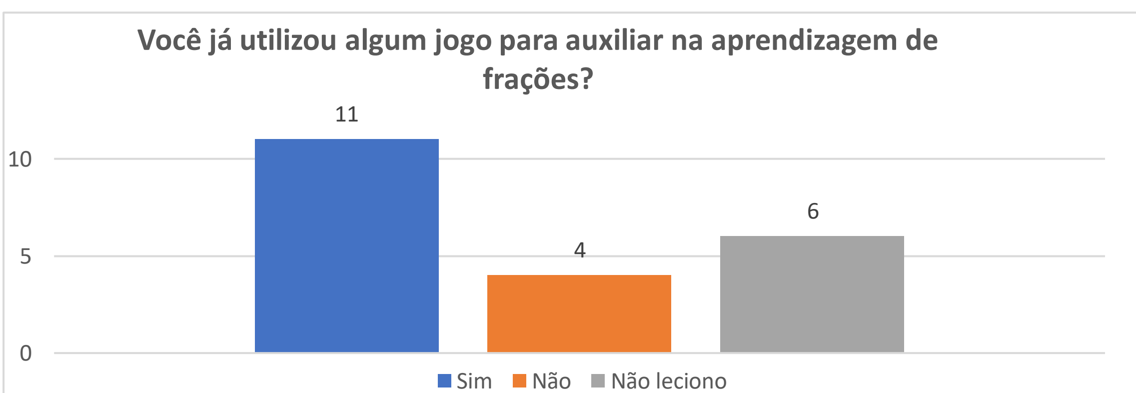
Fig. 127 - Pergunta 8



Fonte: O autor (2021)

Uma outra alternativa metodológica muito usada para o ensino dos conteúdos de Matemática e que pode ser usada para nos conceitos de frações é a utilização de jogos educativos. Aqui tivemos uma variação de decréscimos com relação aos outros recursos, mas ainda assim a maior parte dos participantes afirmaram já terem usado algum jogo para ensinar algum conceito de fração. Vejamos que a pergunta e as alternativas são diferentes, pois o termo "já utilizou" se refere pelo menos uma vez durante alguma aula, e quanto as outras perguntas se referiam à frequência de utilização:

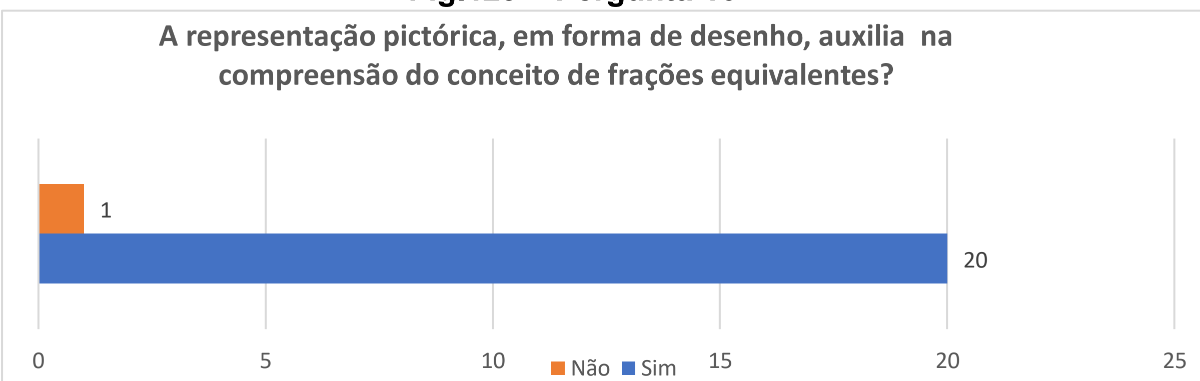
Figura 128 - Pergunta 9



Fonte: O autor (2021)

Ensinar conceitos de frações por meio de representações pictóricas também mostrou ser uma alternativa de grande utilidade, visto que mais uma vez 20 dos 21 participantes afirmaram que esse recurso auxilia no ensino do conceito de frações equivalentes, que muitas vezes confunde os alunos, pois é um conceito em que as frações a princípio são diferentes, mas representam uma mesma quantidade. Se essa definição não for introduzida da forma adequada, pode causar equívocos na compreensão do conceito, pois o aluno pode até conseguir identificar algumas frações equivalentes por ter memorizado, mas não terá entendido o fundamento que as fazem equivalentes.

Fig.129 – Pergunta 10



Fonte: O autor (2021)

Todos os dados da pesquisa foram tirados do teste a priori, como já mencionado, utilizando opções de múltipla escolha, com exceção da última questão que foi aberta e se tratou sobre o motivo dos alunos terem dificuldade nos conceitos e nas operações com frações. Buscou-se com essa questão obter a opinião escrita dos profissionais que possuem experiências diárias com a Educação e podem identificar na prática o porquê dessas dificuldades ocorrerem.

Foram analisadas todas as respostas para poder observar e identificar quais os fatores mais mencionados na opinião dos professores, e o fator mais escrito foi o fato da forma com que a aula de frações é dada, com a falta da base conceitual do conteúdo, onde os professores muitas das vezes já apresentam as técnicas das operações sem fazer uma introdução concisa do conceúto. Dez participantes mencionaram esse fator em suas respostas, e vamos ressaltar algumas das respostas a seguir:

“Os alunos trazem diversos vazios conceituais de conteúdos mais básicos. Além disso, é ensinado uma série de procedimentos como numa receita e não o real significado. Dessa forma, muitos alunos esquecem quando passa o tempo.”

“Em alguns casos, os alunos não compreenderam a ideia de fração e já iniciam os processos de cálculo.”

As duas respostas representam uma situação que ocorre com frequência na sala de aula, os professores mal finalizam um conteúdo ou parte dele e já passam para outro conteúdo ou a próxima etapa. Isso é muito prejudicial ao ensino da Matemática, visto que, como já mencionado, os conteúdos matemáticos são distribuídos de forma que um complementa o outro e se o primeiro não for bem compreendido comprometerá o próximo e isso pode causar deficiências constantes e contínuas.

A resposta de outro participante pode nos trazer um dos motivos pelo qual isso acontece, sendo o pouco tempo direcionado para determinado conteúdo que exigem mais aulas, como o de frações por exemplo:

“... Outro ponto que acho que vale ressaltar é que muitas vezes o conteúdo de frações acaba sendo mal administrado em relação ao tempo. Como exemplo disso, cito um fato que me ocorreu, onde me deram somente três semanas para trabalhar todo o conteúdo de frações para minhas turmas do sexto ano em três semanas. Eu discordo disso. O conteúdo é extenso e envolve muitas particularidades para ser visto em tão pouco tempo.”

A segunda resposta que teve mais frequência se refere à dificuldade dos alunos já vindas do ensino dos anos iniciais:

“Acredito que a dificuldade acontece pelo fato de ter estudado apenas a teoria nas séries iniciais.”

Todas as outras a respostas vistas se remetiam ao pouco uso de materiais concretos, falta de contextualização e outros escreveram sobre a falta de compreensão por parte dos alunos em alguns conceitos como, MMC, simplificação, falta de prática com exercícios.

3.2.2.2 Descrição das etapas do curso

O curso foi dividido em duas seções de aprendizagem: a primeira delas foi voltada para a parte teórica, onde foram apresentadas as pesquisas sobre o ensino de frações bem como os seus significados, questões curriculares e as dificuldades enfrentadas pelos professores para ensiná-las.

A segunda seção foi um pouco mais extensa, destinada às atividades práticas onde foram feitas as apresentações dos materiais concretos, tanto a escala Cuisenaire como o protótipo desenvolvido para o modelo de barras de Singapura. A finalidade foi que os professores ou futuros docentes pudessem ter contato virtual com o material, pudessem fazer o seu próprio protótipo e também entender como eles seriam usados para realizar as operações de soma e subtração de frações, para então fazerem as atividades de verificação da aprendizagem.

Vamos agora fazer uma descrição mais aprofundada de cada uma das etapas da aplicação do curso.

Na primeira etapa do curso – apresentada pela coordenadora do curso - foi apresentado o referencial teórico, citando trabalhos sobre frações, como o de Campos, Magina e Nunes (2006), que fala sobre os significados de uma fração e a forma como uma fração é vista em cada situação muda o seu significado, que se não for atribuído da forma correta gerará erros. O significado mais utilizado pelos professores é o de parte todo, conforme já apontado neste trabalho.

Após esse momento, foi apresentado como a fração é vista segundo a BNCC (BRASIL, 2018), tantos nos anos iniciais do Ensino Fundamental, em específico no quarto e quinto ano, e depois no sexto ano. Foi levantado o questionamento sobre a formação dos pedagogos em relação aos números racionais, se essa formação é capaz de ensinar de forma adequada com o objetivo de desenvolver nos alunos as habilidades citadas na BNCC (BRASIL, 2018).

Logo em seguida, foram apresentados de forma detalhada cada um dos cinco significados de uma fração dando a definição de cada um deles e mostrando exemplos de situações em que cada um desses significados são vistos.

Foi apresentado significado de operador multiplicativo, colocando-se uma situação-problema para que os participantes pudessem responder no momento e colocarem as respostas no Chat. Não tivemos como gravar o bloco de mensagens para ter imagens das respostas, mas pedimos para que os participantes colocassem a resposta final e escrevessem brevemente o comentário de como resolveram. A questão foi a seguinte: “Pedro tinha uma coleção de 30 soldadinhos de chumbo e deu a seu amigo 2/3 dessa coleção. Com quantos soldadinhos Pedro ficou?”

Fig. 130 - Apresentação do significado de operador multiplicativo

Fonte: O autor (2021)

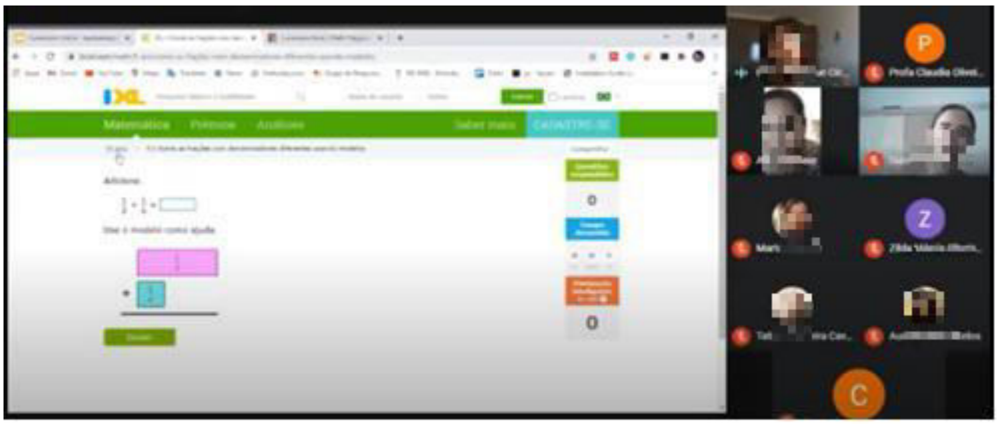
Grande parte dos participantes respondeu corretamente, com respostas como “10; 10 soldadinhos, Pedro ficou com 10”, mas ainda tiveram dois alunos que responderam 20 como resposta para questão, mostrando uma certa falta de atenção na interpretação da situação-problema, pois o valor 20 encontrado por eles realmente representa 2/3 de 30, e essa fração dos soldadinhos foram dadas ao amigo de Pedro. O que a questão estava pedindo foi justamente quantos soldadinhos continuaram com Pedro, e para encontrar esse valor bastaria fazer a subtração do total de 30, com a parte dada para o amigo, que foram 20, ficando assim Pedro com 10 soldadinhos.

Foi pedido para que um dos participantes abrisse o áudio para poder relatar como fez a questão: a participante falou “Eu coloquei assim, 30 vezes 2 dá 60 e 60 dividido por 3 dá 20, aí Pedro ficou com 20”. Depois a mesma aluna percebeu que ainda faltava mais uma etapa para concluir e encontrar a solução do problema, que só é percebido por meio da interpretação correta da situação-problema.

Logo após isso, outra participante apresentou sua resolução apenas acrescentando no que a primeira havia feito dizendo: “Os 20 representam os soldadinhos dados ao amigo de Pedro, como ele tinha 30 antes, então ficou com 10”.

Após todos os significados terem sido explicados e exemplificados pela professora ministrante do curso e apontadas as dificuldades enfrentadas pelos professores com o ensino de frações, passou-se para outro monitor do curso apresentar a escala Cuisenaire de forma virtual, utilizando um site chamado IXL que tem questões interativas de frações. Além disso, foi utilizando o simulador de Cuisenaire, um outro site, que é usado para fazer as barras do material de acordo com o número de unidades da barra que se deseja.

Fig. 131 - Apresentação dos recursos digitais, site IXL



Fonte: O autor (2021)

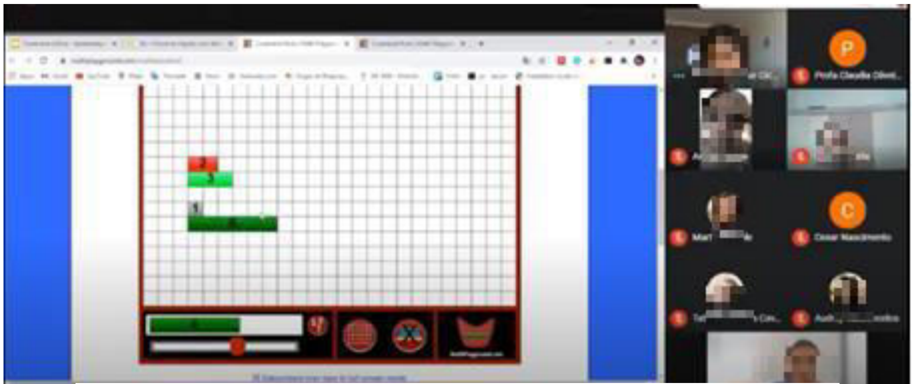
O monitor explicou como utilizar o site, que abrange questões de todos os conteúdos matemáticos dos anos letivos que o usuário desejar, navegou pelo site espelhando a tela do seu computador para que os participantes se familiarizassem com o site, sendo que o link não foi liberado de imediato, pois o site é pago e só libera até 10 minutos de uso diário de forma gratuita.

Em seguida, apresentou o simulador de Cuisenaire, navegando pelo site, mostrando para os alunos como fazer as barras no simulador e já mostrando como seria a representação de uma fração utilizando essas barras, com a de cima representando o numerador e a barra de baixo representando o denominador da fração.

Utilizando situações mais simples, ele ensinou a partir do simulador de Cuisenaire, como realizar a soma com frações através de um exemplo que foi retirado do primeiro site, 2/3 + 1/6, e depois disponibilizou os links para que os participantes praticassem.

Ele passou por todas as etapas do procedimento para realização da soma de frações, sendo a primeira delas a representação das duas frações, como pode ser visto na figura a seguir:

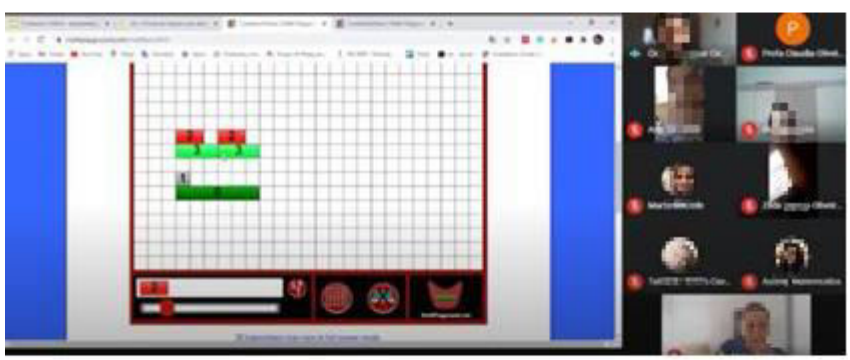
Fig. 132 - Apresentação dos recursos digitais, simulador de Cuisenaire, passo 1



Fonte: O autor (2021)

A segunda etapa, que é justamente quando vamos encontrar as frações equivalentes às primeiras, sendo essas de mesmo denominador, e para isso, ele precisou apenas acrescentar mais uma barra de 3 unidades no denominador das barras que representam a fração 2/3, e por consequência, foi necessário acrescentar uma barra de duas unidades no numerador dessa mesma fração, encontrando uma fração equivalente a 2/3 que tem denominador 6, a fração 4/6, tornando agora a operação 4/6 + 1/6.

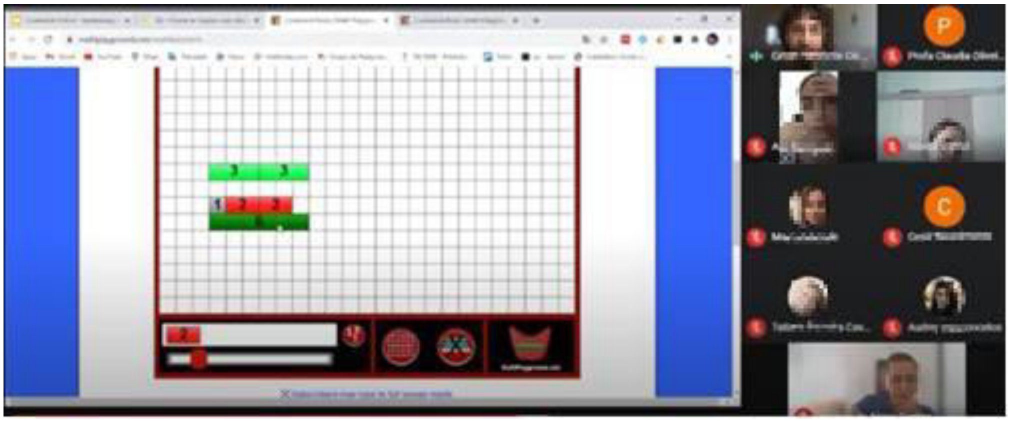
Fig. 133 - Apresentação dos recursos digitais, simulador de Cuisenaire, passo 2



Fonte: O autor (2021)

Na terceira e última etapa, já com os denominadores comuns, foi necessário apenas somar as unidades das barras dos numeradores das duas frações, arrastando essas barras de uma representação para a outra, formando a fração 5/6, como é visto na figura a seguir:

Fig. 134 - Apresentação dos recursos digitais, simulador de Cuisenaire, passo 3



Fonte: O autor (2021)

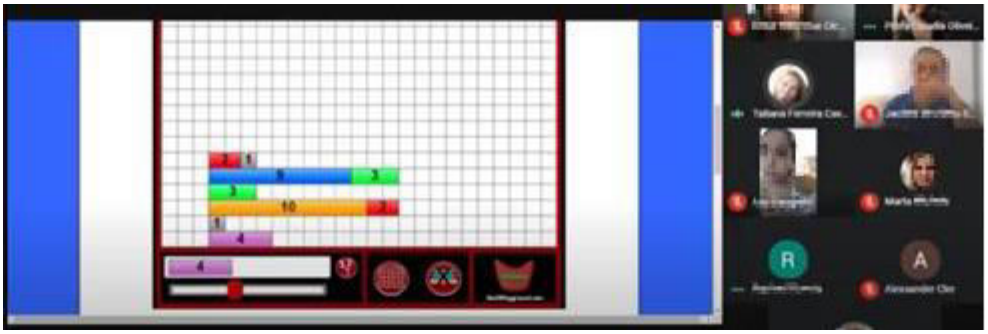
Após apresentar o simulador e ensinar como a operação de soma é feita, o monitor pediu para que os participantes somassem 1/3 com 2/9, sempre com frações cujos denominadores são múltiplos. Foi dado um tempo para que pudessem responder.

Uma das participantes teve dificuldade com uso do simulador por estar na sala remota por meio do celular, mas ela tinha acesso ao computador e conseguiu resolver esse problema; após um tempo foi percebido que o problema do uso em um smartphone seria resolvido quando o site fosse utilizado com o aparelho no modo “Paisagem”, ou seja, virado na horizontal, pois assim a imagem do site ficava no mesmo formato do computador.

Outra participante disse que colocou as barras, mas não lembrou como faria a operação, então o monitor deu a ideia de como seria, partindo do princípio de tornar as barrinhas do denominador do mesmo tamanho.

Depois do tempo estimado, foi pedido que um dos participantes espelhasse a tela do seu computador para mostrar como manipulou as barrinhas de Cuisenaire para efetuar a soma. Uma participante concordou em mostrar como procedeu mesmo não tendo certeza de que estava correto. Vejamos a imagem abaixo:

Fig. 135 – resposta de um participante



Fonte: O autor (2021)

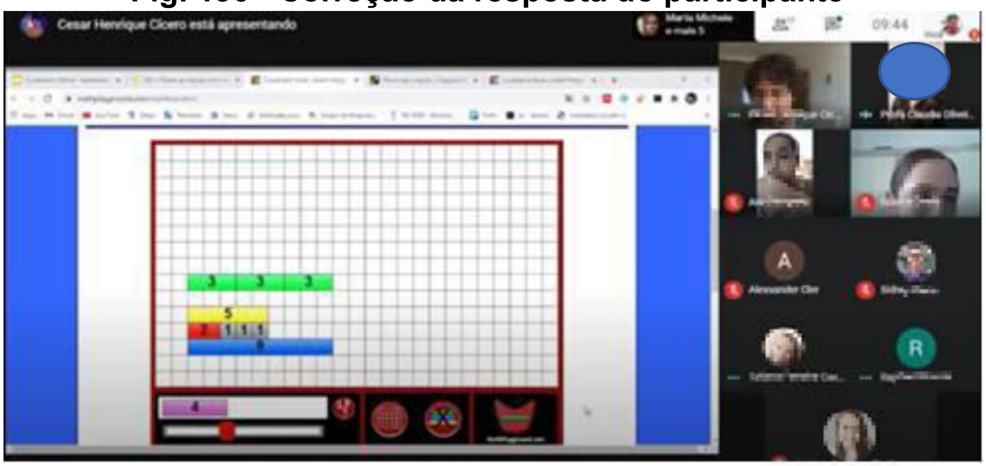
Podemos tirar algumas conclusões com essa imagem e com explicação que ela deu para chegar nesse resultado: a participante disse que para somar as frações 1/3 e 2/9 juntou as barras da parte “inteira” que ficou como sendo as barras dos numeradores, e depois fez o mesmo procedimento com as barras do denominador, formando a fração 3/12 (três doze avos). Depois ela substituiu as barras de duas e uma unidade, por uma de três unidades e depois a de 9 e 3 por outras de 10 e 2 unidades, por fim afirmou que essa fração estava muito grande e decidiu simplificá-la por 3, formando então a fração 1/4, concluindo a soma.

Antes de relatar o que o que houve após esse momento, podemos fazer uma breve leitura da resposta da participante: é perceptível que ela entendeu como manipular as barras pelo simulador, pois conseguiu fazer as representações das frações bem como as substituições das barras sem alterar os termos da fração em questão; outro ponto muito visível é o fato dela conhecer o princípio de fração equivalente, por ter feito a simplificação da forma correta, mudando 3/12 por 1/4, ou seja, mostrou ter um certo domínio sobre o que estava fazendo. Porém, o conceito errado de como se somar duas frações, onde se soma numerador com numerador e denominador com denominador, mostra uma lacuna quanto a sua formação docente em relação ao conteúdo de frações como um todo, mostrando o que foi citado pelos autores nos capítulos anteriores pôde ser comprovado com esse experimento.

Para que a participante pudesse efetuar a operação corretamente lhe bastava saber que para uma soma e subtração de frações serem feitas, é necessário que os denominadores sejam iguais, para então repetir esse denominador e realizar a operação apenas com os numeradores, seja ela uma soma ou subtração, e caso os denominadores não fossem iguais, seria preciso encontrar, neste caso, uma fração que fosse equivalente ao 1/3 com o denominador 9, e isso ela conseguiria fazer, como foi constatado na própria resolução.

O monitor corrigiu a questão, resolvendo para que os participantes comparassem com suas respostas, explicando cada passo a ser feito com o simulador de Cuisenaire, como na imagem a seguir:

Fig. 136 - Correção da resposta do participante

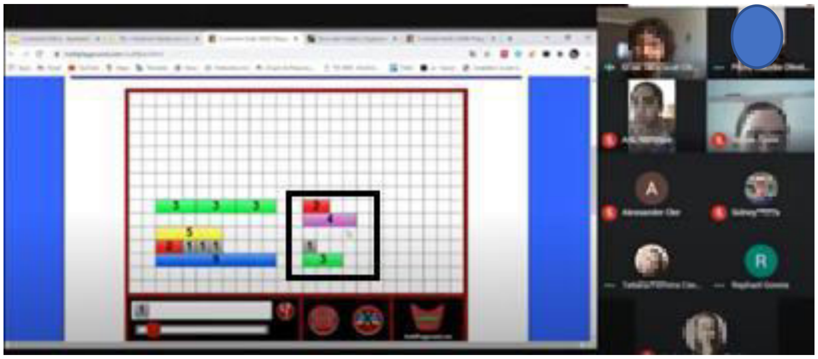


Fonte: O autor (2021)

Com as respostas dos participantes nessa questão podemos perceber que suas maiores dificuldades não se davam em utilizar o material, mesmo que muitos deles ainda não tivessem tido contato com o recurso didático, mas suas dificuldades foram em relação aos conceitos que são fundamentais para soma e subtração de frações, bem como utilizá-los para efetuar as operações.

Um dos participantes, graduando em Licenciatura em Matemática, percebeu que o monitor estava utilizando apenas frações com denominadores múltiplos como exemplo para as operações, então ele questionou se o recurso didático também serviria para somar ou subtrair frações com os denominadores primos entre si. O monitor explicou como seria feita uma soma com denominadores não múltiplos, com exemplo 2/4 e 1/3.

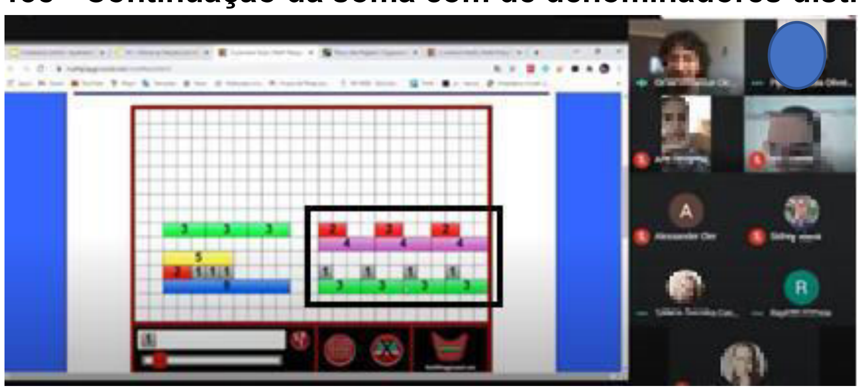
Fig. 137 - Nova operação no simulador com denominadores



Fonte: O autor (2021)

O monitor começou fazendo a representação das frações em questão, que pode ser vista logo acima, no canto direito da imagem; depois ele fez o mesmo procedimento dos exemplos anteriores acrescentando às barras dos denominadores outras, uma por uma até que elas tivessem o mesmo tamanho, calculando o mmc entre os denominadores. Depois disso, ele colocou nos numeradores a mesma quantidade que utilizou nos denominadores de cada fração, e com isso a operação passou de 2/4 + 1/3 para 3/12 + 4/12, que são as frações equivalentes às primeiras e tendo o mesmo denominador.

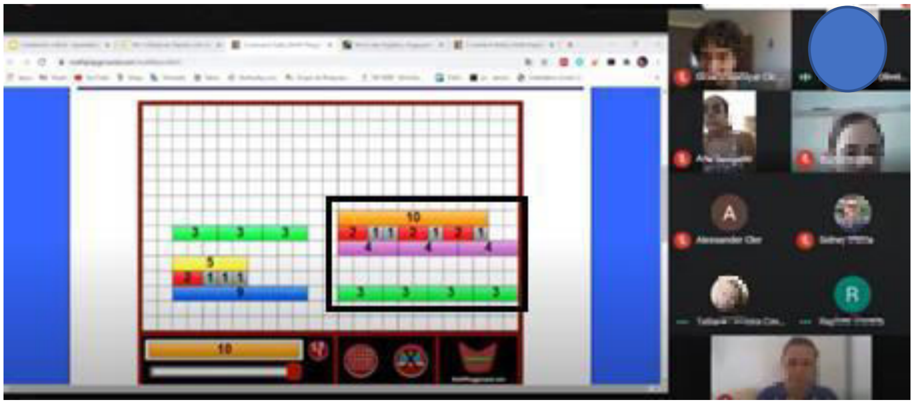
Fig. 138 - Continuação da soma com de denominadores distintos



Fonte: O autor (2021)

E por último, o monitor juntou todas as barras dos numeradores para encontrar o resultado da soma, que por sua vez deu 10/12.

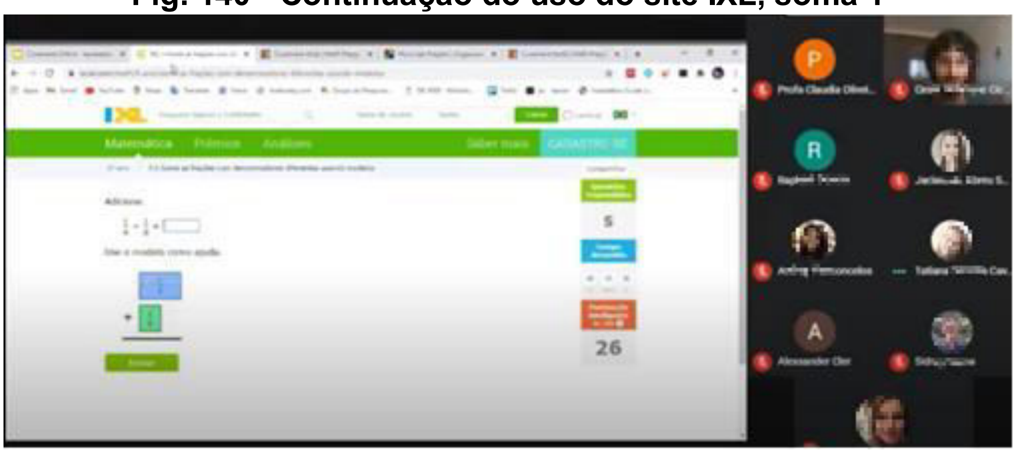
Fig. 139- Finalização da operação de soma



Fonte: O autor (2021)

Nos últimos momentos da participação de monitor, ele retomou a apresentação do site IXL para fazer a soma de frações usando outro método para realizar a operação. Esse método é o disponibilizado pelo próprio site e consiste na representação de uma fração por meio de uma única barrinha de tamanho único, baseado no tamanho e um inteiro, de modo que se a fração for 1/2 a sua barra terá o tamanho da metade da barra de um inteiro, e a 1/4 terá o tamanho da metade da barra de 1/2, sempre nesse raciocínio.

Fig. 140 - Continuação do uso do site IXL, soma 1



Fonte: O autor (2021)

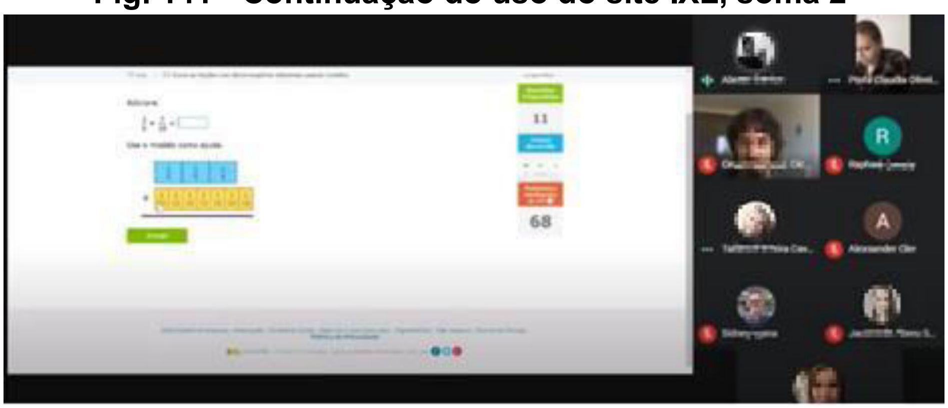
Ele mostrou como fazer a soma entre frações utilizando a ideia das barras que o site propôs, somou as frações 1/2 e 1/4, que são representadas na imagem acima, e explicou que este método nos permite somar as frações mentalmente, apenas analisando os tamanhos das barras.

O monitor observou que a barra de 1/4 tem a metade do tamanho da barra 1/2, logo ele argumentou que é possível representar 1/2 com duas barras da representação de 1/4, e com isso, teremos agora 2/4 + 1/4 = ¾, pois havia três barras da representação de 1/4 e assim ele concluiu a operação. Essa representação se assemelha com modelo de barras de Singapura, o que diferencia do recurso que utilizamos de Singapura é que nesse método do site aparecem apenas as barras, ou a barra referente à parte selecionada. Já na partição das barras utilizando o método de Singapura, o restante da barra, que completa o inteiro, permanece na comparação de uma com outra diferente, geralmente branca ou neutra indicando que aquela parte não foi selecionada.

Após essa apresentação de como responder utilizando o método proposto pelo site, foi pedido para que um dos participantes compartilhassem a tela do seu computador para responder uma questão proposta pelo site; as questões são dispostas aleatoriamente, logo os participantes não respondem uma mesma questão.

Um dos participantes aceitou participar desse momento de interação e respondeu à questão da figura a seguir, soma entre as frações 3/5 e 7/10.

Fig. 141 - Continuação do uso do site IXL, soma 2



Fonte: O autor (2021)

Ele explicou que identificou na figura das duas representações que as barras de 1/10 (amarelas) tem a metade do tamanho das barras de 1/5 (azuis), com isso ele observou que as barras de 1/5 tem o mesmo tamanho de duas barras de 1/10, como são 3 barras 1/5. Elas terão o mesmo tamanho de 6 barras de 1/10, juntando com as outras

7 barras de 1/10 da representação, e teremos o total de 13 barras de 1/10, ou seja, a soma tem como resultado a fração 13/10.

Ainda havia participante que não entendia como o procedimento era feito. Ela relatou que conseguiu fazer a conta no papel, de forma tradicional, utilizando MMC entre os denominadores, porém não compreendeu como poderia associar os bloquinhos da figura acima de forma que pudesse realizar a soma, então o monitor explicou outras vezes para poder tirar o máximo de dúvidas dos participantes e finalizou sua participação no curso.

Após o momento da participação do monitor, a coordenadora do curso fez sua segunda participação, apresentando mais uma seção teórica, falando sobre o ensino de Matemática em Singapura, relatando, a princípio, a estrutura da Educação Matemática e do currículo da matéria nessa cidade-Estado pequena, porém muito desenvolvida, que tem como aspectos o cálculo mental e os modelos pictóricos.

Fig. 142 - Apresentação da teoria, modelo de barras

Fonte: O autor (2021)

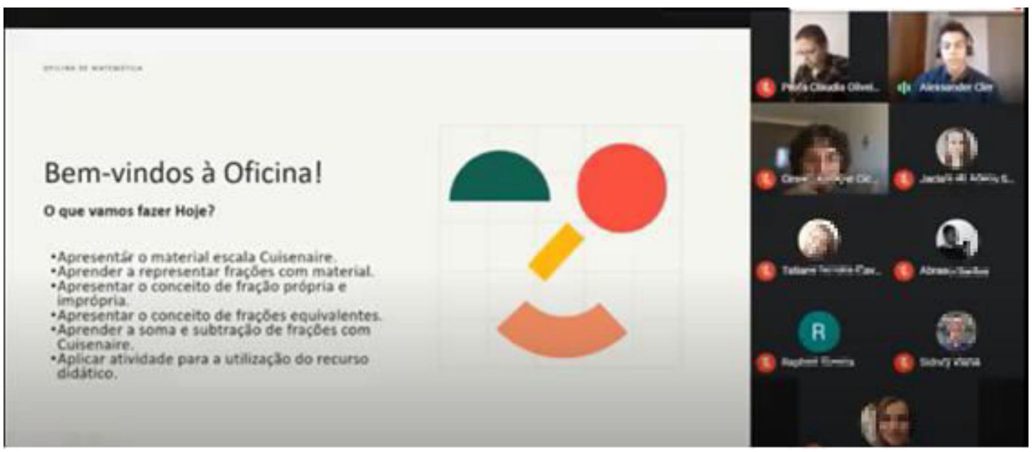
Ela concluiu sua apresentação falando sobre o Modelos de barras de Singapura, que se caracteriza como uma ferramenta alternativa da Matemática de Singapura. Ela falou como esse recurso é utilizado no país, que desde o ensino infantil os alunos já são habituados a ver a Matemática de forma pictórica, principalmente nas operacionalidades.

Concluída as apresentações teóricas foi dado início a participação do autor deste TCC, denominada pela metodologia como observação participante (LUDKE; ANDRÉ, 1986), que implica na interação entre pesquisador e pesquisado, para analisar o contexto, identificando suas características e aspectos que precisam ser mudados.

Nessa parte do curso, ainda pela manhã, iniciamos a apresentação da metodologia usada com o material Cuisenaire, bem como conceitos de frações que serão citados a seguir, com o objetivo final de fazer com que os participantes terminassem essa parte do curso com a habilidade de realizar a soma e subtração com frações usando as barras de Cuisenaire. Vamos agora descrever cada uma das etapas desse momento curso, desde a apresentação até a última operação de subtração realizada pelos participantes.

De início, falamos resumidamente do que seria apresentado sobre a metodologia que se utiliza da escala Cuisenaire, e esse primeiro momento da etapa toda a apresentação dos conceitos foi feita por meio de slide, com pequenas pausas para mostrar na prática aos participantes conceitos como frações equivalentes com o material, também para que eles mostrassem seus momentos de interação com o material.

Fig. 143 - Início da apresentação do recurso didático Cuisenaire

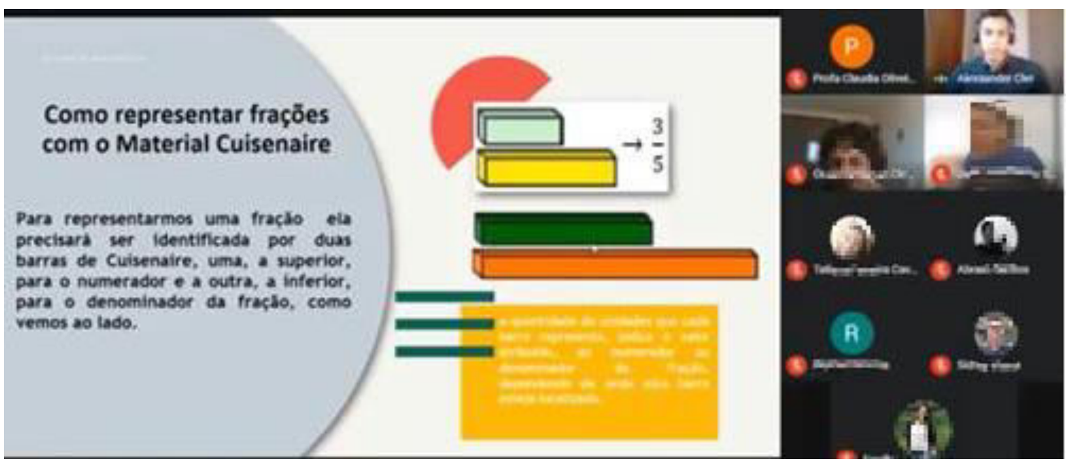


Fonte: O autor (2021)

Depois desse momento de apresentação do que seria abordado nessa etapa, foi dado um tempo para que os participantes recortassem seu material (molde) que por sua vez foi feito em Word e enviado para que eles pudessem apenas recortar a folha, formando as barras, para colarem num outro material mais resistente, como papelão ou o próprio E.V.A. Caso não fosse possível, eles poderiam usar apenas os papéis recortados, e alguns dos participantes não tinham algum material mais resistente e utilizaram as impressões da folha. Ressaltamos para eles que mesmo sendo possível, para professores manusear o material apenas no formato de papel, seria importante que quando fossem aplicar esse recurso didático em suas aulas eles utilizassem materiais resistentes, pois caso fosse usado apenas o papel os alunos poderiam danificá-lo amassando, molhando e até rasgando, justamente por serem frágeis.

Após eles cortarem, eu apresentei o material original para eles, que é feito de madeira, mostrando aspectos como as unidades, cores utilizadas e as aplicações das barrinhas de Cuisenaire no ensino de Matemática, como na soma e subtração de números naturais. Em seguida, foi mostrado como esse recurso didático pode ser usado para representar as frações, com a barra acima representando o valor do numerador e a barra de baixo o valor de denominador, como já foi mostrado pelo monitor em sua participação.

Fig. 144 - Representação de fração com Cuisenaire



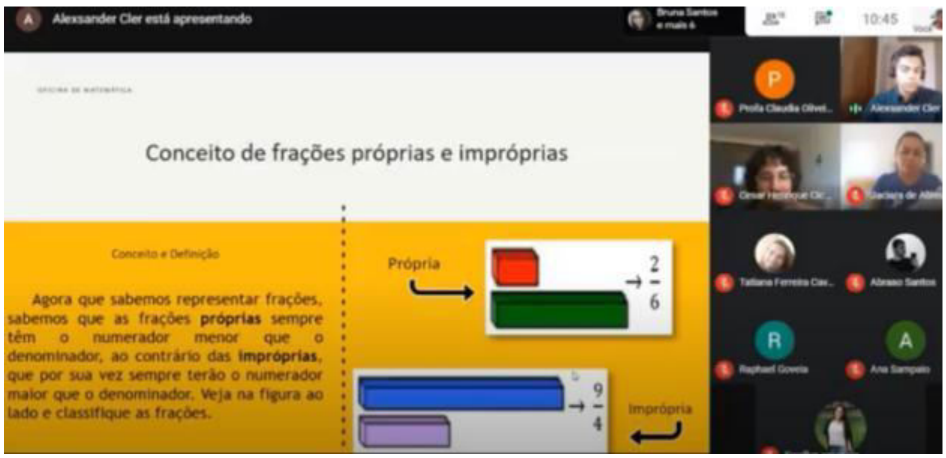
Fonte: O autor (2021)

Nesse momento, após ser mostrado o exemplo de como representar uma fração com as barras foi pedido para que os participantes dissessem qual fração as barrinhas verde e laranja estavam representando. Todos os participantes responderam corretamente relatando, seja abrindo o áudio para falar ou escrevendo no chat, eles disseram ser 6/10 a fração que seria a representação das barras citadas, já que a barra verde tem seis unidades e a laranja tem 10.

Em seguida, foi falado sobre frações próprias e impróprias, o que caracteriza e diferencia um tipo de fração da outra e como a identificação desses conceitos era mais intuitivo e visual quando representadas com as barras, de modo que só pela definição, sem precisar identificar previamente qual fração estava sendo representada pelas barras, já é possível dizer se a tal representação é de uma fração própria ou imprópria.

Também foi pedido para que os participantes identificassem pela imagem qual das frações era própria e qual seria a imprópria. Os participantes disseram que representação de cima seria a própria e a de baixo a imprópria, mostrando que entenderam como o material pode representar os tipos de frações citadas.

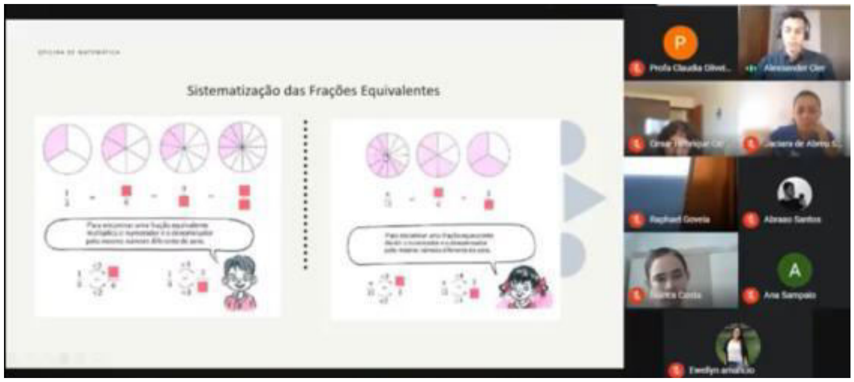
Fig. 145 - Conceito de fração própria e imprópria



Fonte: O autor (2021)

Em seguida, foi tratado o conceito de frações equivalentes; a princípio falamos sobre o conceito e si, sem associá-lo com o material concreto, mostrando a definição e dando exemplos de frações equivalentes usando os setores circulares, com uma fração dele pintada para representar o numerador e o total de setores do círculo para representar o denominador, assim, dando as frações o significado de parte-todo. Depois cada setor do círculo era repartido, com por exemplo em duas partes, simulando a multiplicação do numerador e denominador por dois e assim por diante para encontrarmos as outras frações equivalentes. Também apresentamos o processo inverso para encontrar frações equivalentes com valores menores usando a divisão por um número natural que seja divisor dos dois números, valores da fração.

Fig. 146 - Sistematização de frações equivalentes



Fonte: O autor (2021)

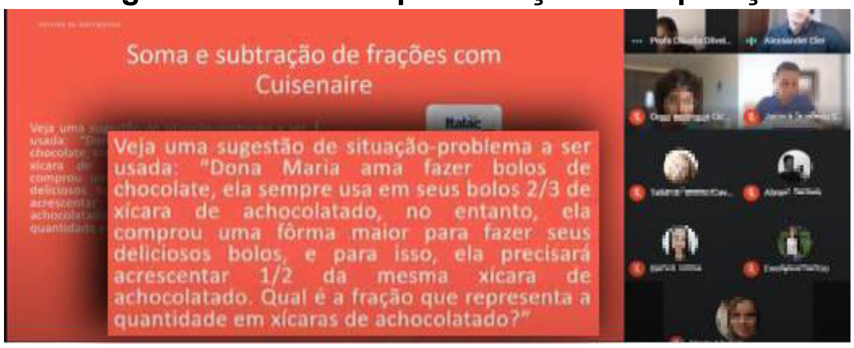
Para concluir a apresentação das frações equivalentes, foi dito como poderia ser feita a representação dessas frações, bem como encontrá-las, utilizando as barras de Cuisenaire, relatando que esse procedimento foi anteriormente apresentado pelo monitor quando utilizou o simulador de Cuisenaire.

Em seguida, foi pedido para que um dos participantes espelhasse a tela do seu computador para mostrar como eles podem encontrar as frações equivalentes com o material, porém foi percebido que para uma participação mais coletiva era interessante pedir para que os participantes, com a câmera ligada mostrassem as peças que seriam usadas para representar uma algumas frações equivalentes a fração 1/2, sem precisar manuseá-las em uma mesa, pois eles estavam acompanhando a aula com notebook ou computador, e com isso, não teriam como modificar a posição da câmera para mostrar uma mesa ou alguma superfície plana.

Alguns participantes representaram a fração 2/4 como equivalente a 1/2, mostrando a barrinha vermelha para numerador e a lilás (ou rosa, pois a impressora imprimiu uma com aproximada) para o denominador, então foi pedido que eles mostrassem outra fração equivalente e eles mostraram a representação da fração 4/8, com a barra de cor lilás agora para o numerador e a marrom para o denominador.

Com esses dois resultados apresentados pelos participantes eu notei que eles estavam sempre pegando a fração equivalente encontrada e multiplicando o numerador e denominador por dois, por este motivo pedi para eles representarem uma fração equivalente a essas já mostradas, com a condição de que ela tivesse o denominador 6; uma das participantes, mostrou da mesma forma uma barra azul claro, de 3 unidades, e a verde, de 6 unidades. Porém, essa resposta não foi tão imediata quanto às outras respostas, isso porque para que eles encontrassem essa fração era necessário identificar por qual número o denominador anterior, 2, deveria ser multiplicado para encontrar o denominador 6, e depois que esse valor é encontrado será possível encontrar a fração equivalente.

Fig. 147 - Início da apresentação das operações

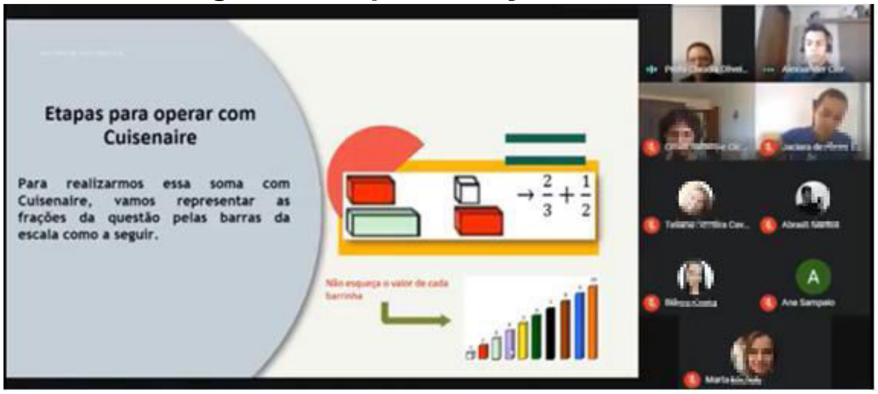


Fonte: O autor (2021)

Chegado ao fim dessa etapa da apresentação, foi iniciado o passo a passo de como realizar a operação de soma de frações com o Cuisenaire. Foi apresentada uma situação-problema para que pudéssemos estimular os participantes, que são professores ou futuros docentes, a utilizarem em suas aulas, questões que envolvam situações do dia a dia dos alunos, assim eles se sentem mais entusiasmados a encontrar as soluções, visto que esse tipo de questão oferece um sentido de se estudar Matemática.

Depois da leitura atenta da questão, os participantes identificaram que para resolvê-la era preciso somar as duas frações 1/2 e 2/3, então logo demos início aos passos para efetuar a operação, sendo o primeiro deles a representação das frações. Todos passos do procedimento foram primeiro apresentados para os participantes, e então foi solicitado para eles reproduzissem com seus materiais.

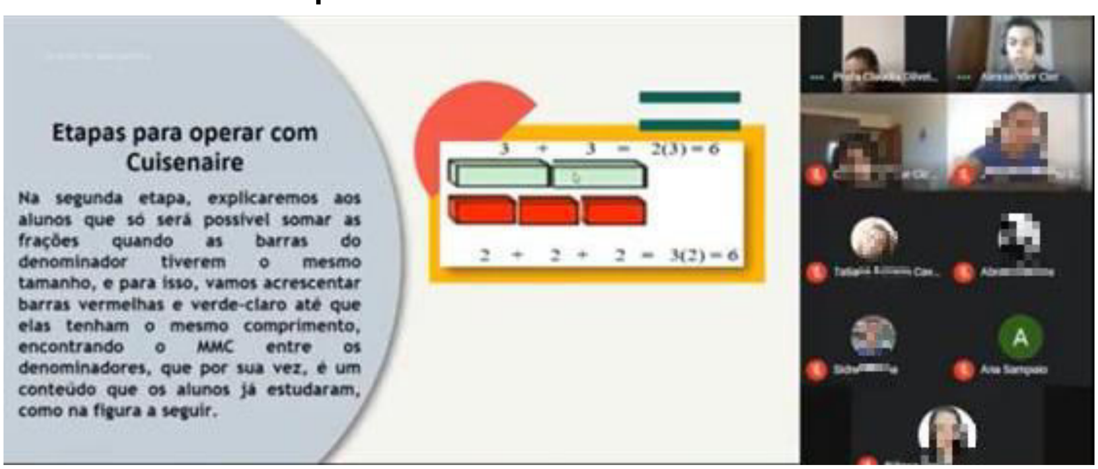
Fig. 148 - Representação da soma



Fonte: O autor (2021)

Depois da representação, foi mostrado o segundo passo, que era fazer o MMC entre os denominadores usando as barrinhas, mas antes disso foi argumentado sobre o motivo pelo qual o MMC deve ser encontrado, justamente pelo fato de que só é possível somar ou subtrair frações quando os denominadores das frações a serem operadas são iguais, pois só assim estaríamos juntando partes de mesma natureza, de mesmo tamanho. Então, foi apresentado a forma com que encontramos o denominador comum, feito por meio do alinhamento das barras que representam os denominadores de cada fração, até que essas alcançassem o mesmo tamanho, como na imagem do slide abaixo:

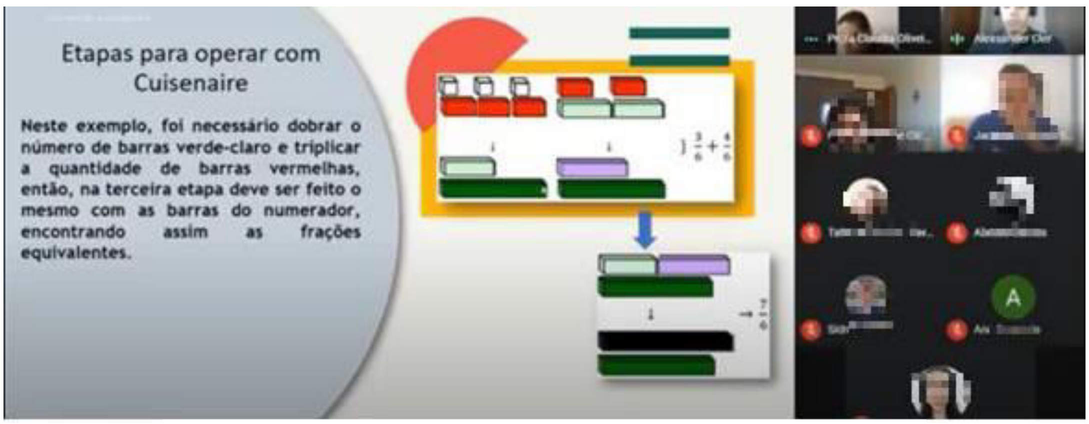
Fig. 149 - Procedimento para encontrar o denominador comum com Cuisenaire



Fonte: O autor (2021)

Em seguida, foi disposto o terceiro e quarto passo, que são: escrever as frações equivalentes às duas primeiras, usando para isso o denominador comum encontrado do segundo passo, e o último passo que é fazer as substituições das barrinhas repetidas por uma única barra que tenha o mesmo valor do somatório das repetidas, para então poder juntar as barras dos numeradores e, assim encontrar a fração da operação. Com isso foi finalizada a apresentação de como efetuar a soma de duas frações utilizando as barras de Cuisenaire.

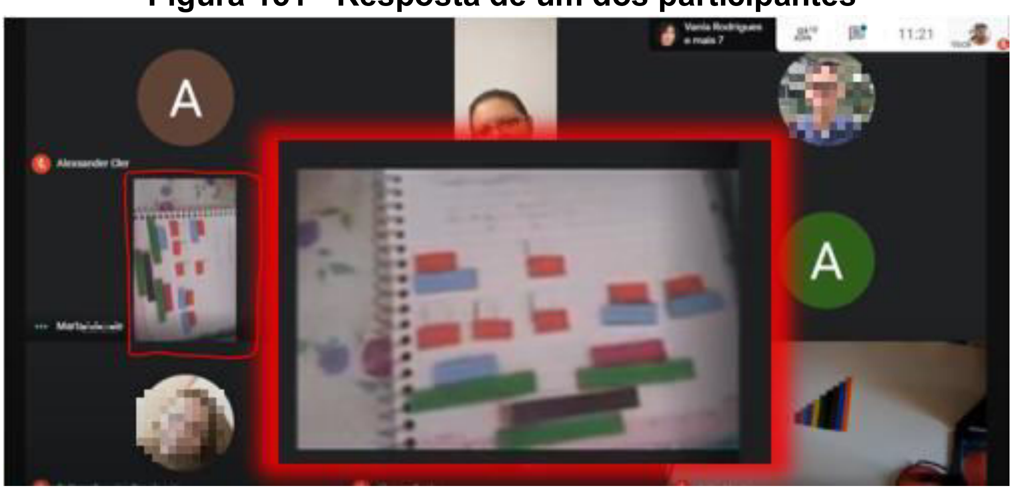
Fig. 150 - Encontrando as frações equivalentes com denominador comum



Fonte: O autor (2021)

Em seguida, como foi citado acima, foi pedido para que eles realizassem a soma entre as frações 1/2 e 2/3 com os seus materiais, ou seja, reproduzissem a operação apresentada.

Figura 151 - Resposta de um dos participantes

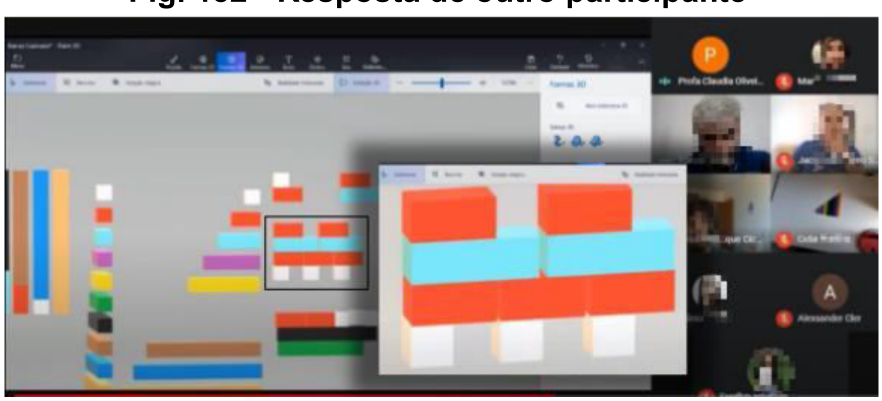


Fonte: O autor (2021)

Uma participante conseguiu fazer a representação, utilizou os argumentos adequados, fazendo as representações, encontrando as frações equivalentes e somando as barras do denominador, explicando cada procedimento feito. Uma outra participante não conseguiu entender a primeira representação, afirmou que sentiu dificuldade na parte que é preciso substituir as barras repetidas, ou seja, ela não conseguia entender com as três barrinhas brancas seriam substituídas pela barra azul-claro e as duas vermelhas pela rosa. Então, a primeira participante explicou novamente como fez as representações e os passos para encontrar as frações equivalentes, e a segunda participante disse que havia melhorado a compreensão, mas ainda precisava entender melhor, afirmando que não “era boa em Matemática”, mas estava se esforçando para aprender e então poder ensinar seus futuros alunos, e esta participante é do curso de Pedagogia.

Um dos participantes fez a representação utilizando uma ferramenta digital, o Paint 3D, pois ele disse que não conseguiu cortar corretamente as barrinhas na folha, e para não ficar sem participar ele preferiu utilizar o computador. A forma com que ele fez a operação também foi assertiva, utilizou os argumentos corretos, explicando como realizou cada procedimento. Podemos perceber na imagem abaixo como ele fez as representações, o jeito com que ele uniu o procedimento do MMC e de encontrar as frações equivalentes em apenas um desenho, colocando as barras vermelhas do numerador da fração equivalente a 2/3 acima e as barras brancas do numerador da fração equivalente a 1/2 na parte de baixo. Mesmo assim esse ajuste das posições das barras não afetou o seu raciocínio quanto à identificação de quais delas estavam representando o numerador e quais o denominador.

Fig. 152 - Resposta de outro participante

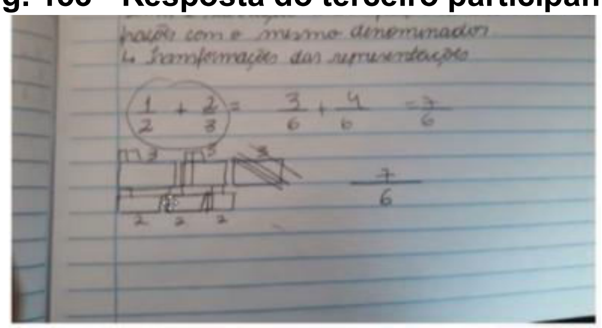


Fonte: O autor (2021)

Podemos ver nessa apresentação uma outra ferramenta digital que pode ser usada pelos alunos que tem acesso aos recursos digitais, como uma alternativa até para utilização nas aulas remotas, que se tornaram uma realidade, visto que a vantagem que esse recurso tem em relação ao simulador de Cuisenaire é que ele não precisa de internet para ser usado, pois é um programa de computador. Além disso, essas barras não estão prontas, isso requer que os alunos construam suas barras no programa, isso faz com eles tenham um momento de oficina, aprofundando-se nos conceitos de unidade. O participante disse que ele mesmo criou as barrinhas, começando por blocos no formato cúbico e adotou esse bloco como a unidade, em seguida ele agrupou dois desses blocos para formar a barra de duas unidades, agrupou três blocos para formar uma barra de três unidades e assim por diante, para formar cada uma das barras da Escala Cuisenaire.

Vamos agora mostrar a participação de outra participante do curso: por não ter conseguido imprimir os papéis dispostos com as formas das barras, ela fez a resolução com o caderno, desenhando as representações das duas frações com lápis e papel como vemos na imagem:

Fig. 153 - Resposta do terceiro participante



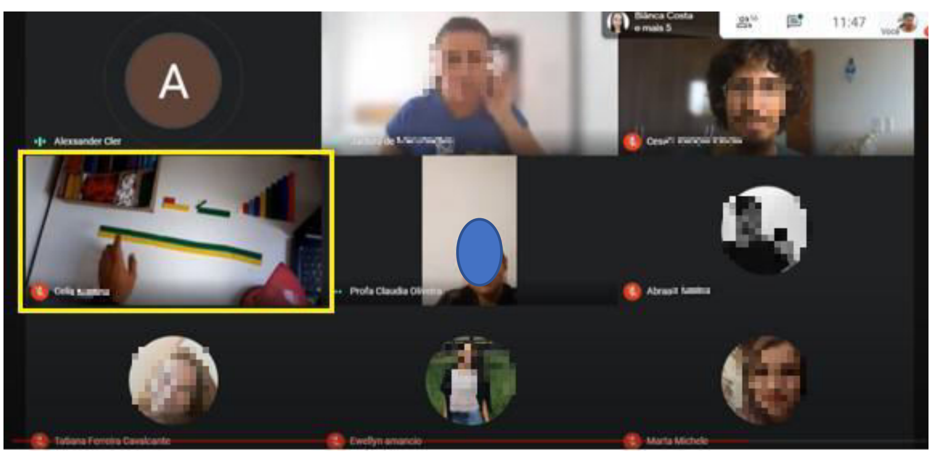
Fonte: O autor (2021)

Podemos ver nesse desenho que a participante tentou aproximar o tamanho dos seus retângulos com as dimensões das unidades, mas a falta de precisão do desenho fez com que ela desenhasse uma barra a mais, logo depois ela percebeu que errou e por isso riscou a última barra de cima. É possível ver também que ela não desenhou as barras do numerador corretamente, colocando apenas barras pequenas, uma para o numerador 1 e duas para o numerador 2, e isso foi o suficiente para ela entender o que eles significavam, ou seja, ela associou os numeradores a uma quantidade e não ao tamanho da barra. Também é muito interessante de ver como o raciocínio dela foi diferente dos demais participantes, mesmo assim ela obteve o mesmo resultado, compreendendo os conceitos necessários para fazer a operação. Ela relatou que ficou muito feliz por ter conseguido fazer somar a frações, mais ainda por ter entendido como fazer e o por que era preciso fazer o MMC entre os denominadores, pois apenas utilizava o procedimento sem saber o motivo de usá-lo.

Depois da apresentação da soma de frações, falamos como realizar a subtração com o material, relatando que o procedimento era muito semelhante, passando pela representação das frações, calculando o MMC entre os denominadores pelo método mostrado na soma e encontrado as frações equivalentes que tenham o mesmo denominador, e o que muda é apenas o último passo, que ao invés de juntar as barras dos numeradores permite ver a diferença entre eles.

Em seguida, com um exemplo, fizemos uma operação de subtração com o material para o melhor entendimento dos participantes, pedindo para que sugerissem uma fração para a subtração e foi dada a fração 2/5 – 1/6.

Fig. 154 - Exemplo de subtração de frações com Cuisenaire, encontrando denominador comum

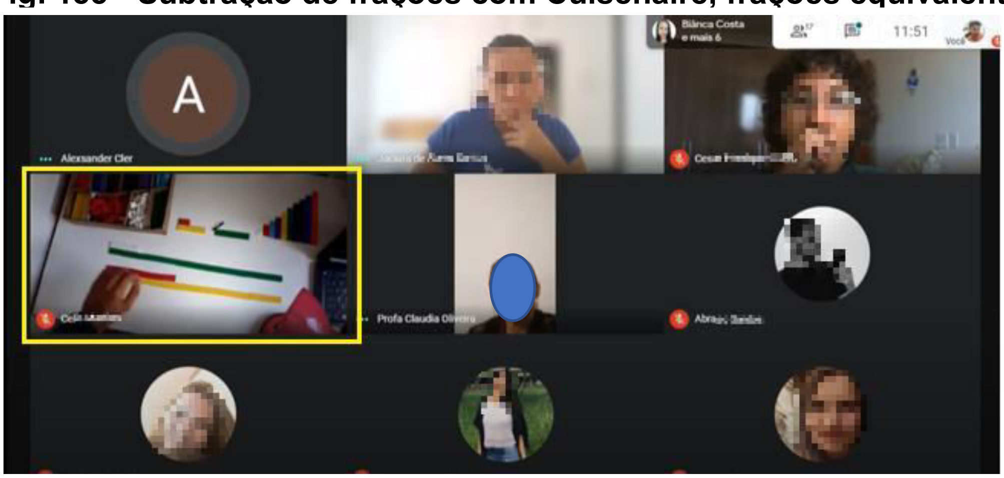


Fonte: O autor (2021)

Então fizemos a representação das duas frações, e para determinar qual delas era a negativa colocamos uma tira de E.V.A no numerador da fração e partimos para encontrar o MMC entre os denominadores, colocando barra por barra até que elas, juntas, tivessem o mesmo tamanho. Os participantes ficaram surpresos com o tamanho dessa barra e perguntaram o por que isso aconteceu, então explicamos que o fato dos números serem primos entre si, ou seja, não possuírem outro divisor comum além do trivial, a unidade, contribuiu para um MMC grande, pois se fossemos fazer da forma tradicional teríamos que dividir por 5 e depois por 6, para multiplicar os valores encontrados e assim encontrar o MMC = 30, que é justamente o valor encontrado na soma de todas as 5 barras de seis unidades e as 6 barras de cinco unidades.

Dando sequência a resolução, juntos identificamos quantas barras de cada cor foram necessárias para encontrarmos o denominador comum 30, para então repetirmos essa mesma quantidade com as barras de cada numerador das frações e assim encontrarmos as frações equivalentes. Como já citado, foram 6 barras amarelas e 5 barras verdes, consequentemente foram colocadas 6 barras vermelhas acima das amarelas e 5 barras brancas acima das verdes, formando assim as frações 12/30 que é equivalente a 2/5 e 5/30 equivalente a 1/6, assim a nova representação da subtração foi 12/30 – 5/30.

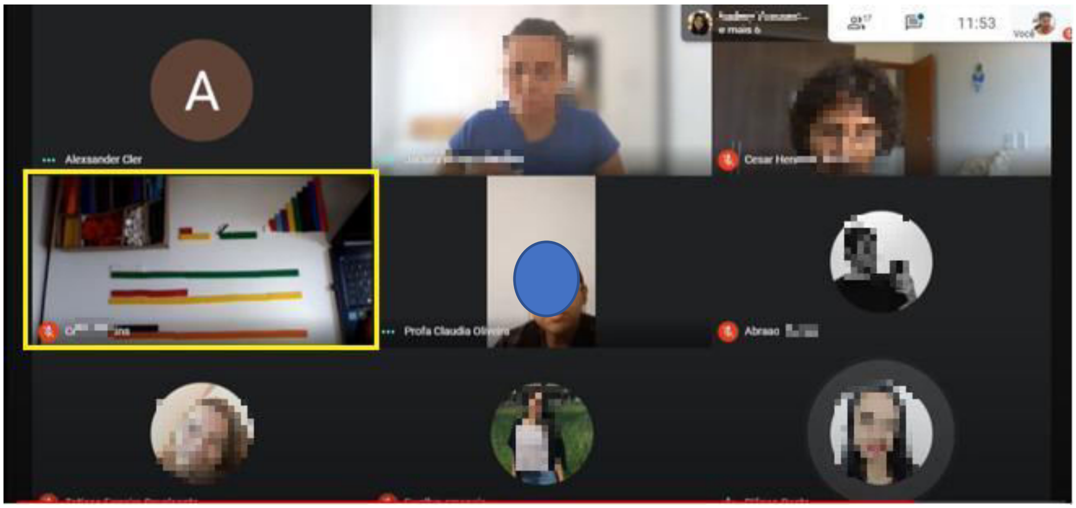
Fig. 155 - Subtração de frações com Cuisenaire, frações equivalentes



Fonte: O autor (2021)

A partir disso foi feita apenas a verificação da diferença entre as barras para encontrarmos o valor da subtração entre os numeradores 12 -5 = 7, e então foi feita a representação da fração 7/30 que foi o resultado dessa operação. Além disso, foi feita a substituição das barras que estavam formando o denominador das frações por três barras laranjas, de 10 unidades, logo a representação foi formada por uma barra preta e abaixo dela as três barras laranjas. Com isso finalizamos a apresentação, e abrimos um tempo para esclarecer as dúvidas dos participantes.

Fig. 156 - Finalização da subtração

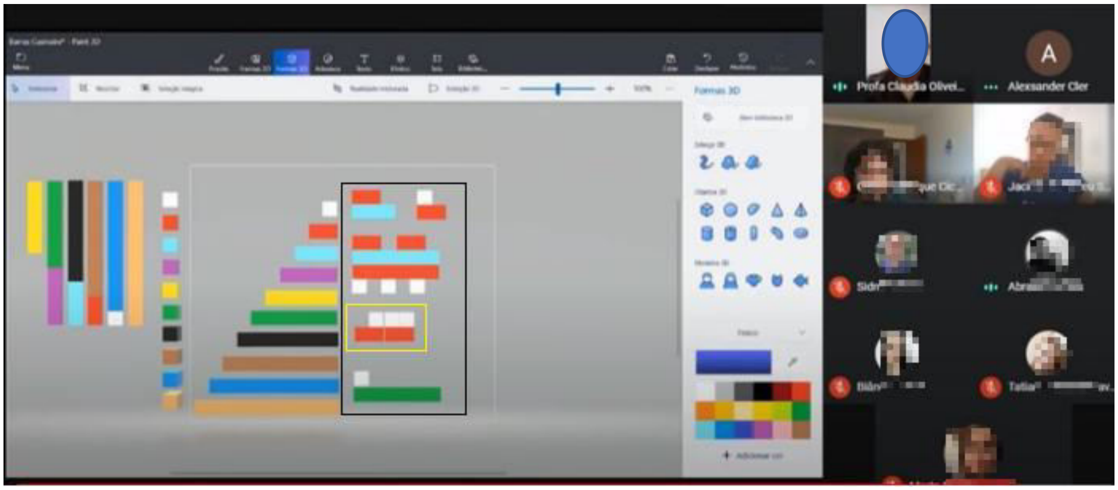


Fonte: O autor (2021)

Uma das participantes pediu para falarmos sobre as substituições das barras na representação do resultado da subtração, pois ela não havia entendido o por que fizemos essas mudanças, então relatamos que fizemos isso para termos uma melhor e mais rápida identificação da fração, visto que ela tem que ser representada com o mínimo de barras possíveis. Colocando três barras de 10 unidades no denominador fica mais fácil de somar as unidades e chegar no denominador 30, e a barra laranja é a maior, isso significa que serão menos barras para alcançar o valor do denominador.

Depois desse momento foi pedido para que os participantes fizessem a operação 2/3 – 1/2, e colocamos a operação com esses números de forma proposital, pois já havíamos feito a operação de soma com essas frações e o objetivo era verificar se eles conseguiam identificar as semelhanças e a diferença entre a soma e a subtração. Um deles apresentou no paint 3D novamente.

Fig. 157 -Resposta de um participante feita no paint 3D

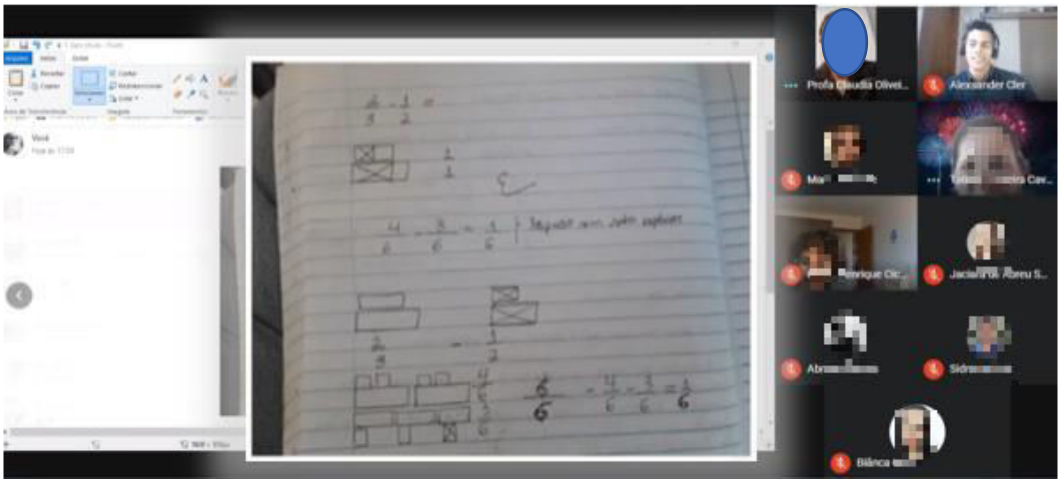


Fonte: O autor (2021)

Ele relatou que fez o mesmo procedimento que usou no início de quando usou as mesmas frações, ou seja, ele representou, encontrou o denominador comum e as frações equivalente de forma análoga, porém para encontrar o numerador da fração resultado da subtração, o participante pegou as barras dos numeradores, vermelhas e brancas, colocando uma acima da outra para identificar a diferença dentre elas, vendo quantas barras era preciso para que os dois conjuntos tivessem o mesmo tamanho. Nisso ele percebeu que se colocasse uma barra branca seria o suficiente, encontrando assim a diferença entre os numeradores, por fim ele fez a representação completa da fração com uma barra de branca, de uma unidade, para o numerador e uma barra verde, de seis unidades para o denominador, formando assim a fração 1/6.

Separamos outra resposta, de uma participante que fez representação desenhando no caderno: ela relatou ter dificuldade quando mudou da operação de soma para a subtração e que queria subtrair os denominadores também, ou seja, fazer subtração de numerador por numerador e denominador por denominador, mas depois ela disse que percebeu que esse não era o caminho correto e partiu para realizar a operação como foi explicado, sempre com o objetivo de tornar os denominadores iguais.

Fig. 158 - Resposta do segundo participante feita no caderno



Fonte: O autor (2021)

Por último foi passada a lista de presença para que os participantes pudessem assinar, e então, foi dado o intervalo de almoço, das 12h às 13h30 para que após esse intervalo os participantes voltassem para darmos continuidade ao curso, com a apresentação do segundo material didático, o protótipo do modelo de barras de Singapura.

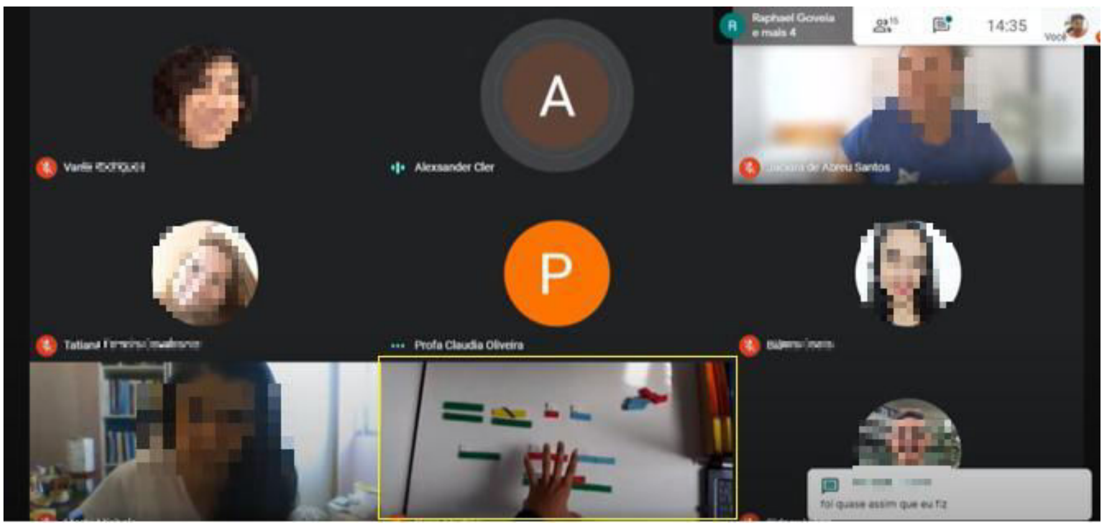
Foi colocada a atividade para a verificação do aprendizado quanto ao uso do material Cuisenaire para o que foi ensinado no primeiro momento do curso. Essa atividade foi disponibilizada para os participantes através da ferramenta do google chamada Forms, como questionário de atividades contendo três questões baseadas em uma situação-problema dada no formulário.

Foi pedido para que os participantes respondessem usando o material, na medida do possível, fosse por desenho ou pelo paint 3D, isso além do material recortado que foi disponibilizado, e tirassem foto das suas resoluções e colocassem no espaço disposto no formulário.

Explicamos como utilizar da forma correta o formulário, e para que não houvesse dúvida, foi dado 20 minutos para que eles respondessem e enviassem as questões. Fiquei à disposição dos participantes para tirar dúvidas com relação ao entendimento da situação-problema do formulário. Depois que os participantes responderam as questões da verificação, resolvemos juntos com os eles as questões para que verificassem o que acertaram ou erraram e então pudessem corrigir e assim assimilar melhor os conceitos.

Vamos fazer a análise das respostas obtidas em um outro tópico desse trabalho, de forma mais detalhada, com o objetivo de verificar se os participantes conseguiriam aplicar o material concreto nas suas turmas. Todos entenderam o resultado da primeira questão e disseram que fizeram da mesma forma. A segunda questão foi bem entendida pelos participantes também assim como a terceira.

Fig. 159 - Correção da questão de subtração



Fonte: O autor (2021)

Depois de finalizada a apresentação da resolução das questões, foi aberto aos participantes um tempo para que eles discutissem sobre as suas formas de fazer as questões.

Um deles disse que a forma que encontrou para encontrar o valor restante do terreno seria justamente verificar qual barrinha completaria o numerador da fração que foi resultado da soma, 5/6, ou seja, faltava apenas uma barra de uma unidade, formando a fração 1/6.

Outra participante relatou que pensou como no primeiro raciocínio relatado, porém ela afirmou que não saberia como explicar aos seus alunos, de forma que eles entendessem, como responder dessa forma, então ela disse que preferiu encontrar o resultado fazendo a subtração da fração total, 6/6 com a fração do terreno dos outros dois irmãos juntos, que foi 5/6, e disse que é mais nítido de se explicar o raciocínio de que o valor restante é o total menos o que já foi destinado ou selecionado.

Com a finalização da interação para falarmos da resolução das questões do teste, foi dado início a apresentação do segundo material concreto do trabalho, o protótipo baseado no modelo de barras de Singapura que também tem por objetivo trabalhar a soma e subtração de frações.

Primeiro foi apresentado o que seria feito nessa próxima etapa do curso, relatando cada um dos momentos que seriam trabalhados, desde a apresentação do material e sua utilização até a última etapa com a atividade de verificação da aprendizagem.

Fig. 160 - Início da apresentação do modelo de barras de Singapura.

Fonte: O autor (2021)

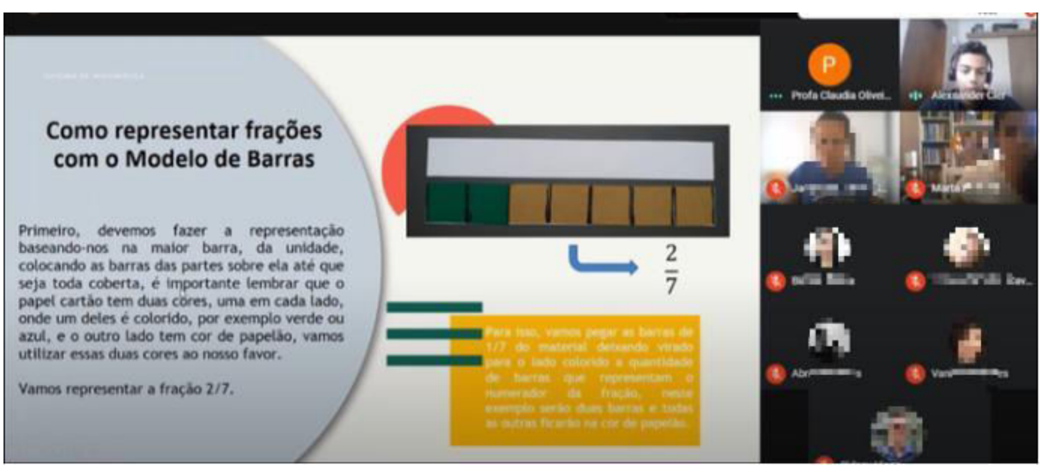
Em seguida, apresentamos o material concreto explicando que se tratava de um protótipo do modelo de barras que por sua vez é uma metodologia pictórica e não concreta, dizendo como funcionava o material, o que significava cada uma das barras verdes que são pedaços de uma barra inteira, que é representada pela barra branca, falamos também sobre as frações representadas por cada barra do protótipo, dimensões do material e com que tipo de papel ele foi confeccionado, que no caso foi papel cartão.

Fig. 161 - Apresentação do protótipo desenvolvido

Fonte: O autor (2021)

A seguir foi dito como fazer a representação de uma fração com o protótipo, sendo o numerador ilustrado pelas partes verdes e o denominador sendo o total de partes colocadas acima da barra de um inteiro. Temos uma dessas barras brancas acima das barras da representação para que seja possível ter a noção que de que as 7 barras da imagem formam um inteiro, pois virtualmente não é perceptível que a barra branca de um inteiro esteja abaixo das 7 barras de 1/7, e só será possível identificar com a própria manipulação.

Fig. 162 - Representação de fração com o protótipo



Fonte: O autor (2021)

Após falarmos sobre a representação, apresentamos o conceito de frações equivalentes, mas dessa vez e não explicamos esse conceito, visto que os participantes já tinham visto o conteúdo na apresentação do material Cuisenaire, então falamos apenas como representar frações equivalentes a partir de uma determinada fração com o protótipo, utilizando os pedaços de E.V.A de cor preta para fazer as partições das barras da representação da fração dada, como é possível perceber a imagem abaixo retirada da apresentação do curso:

Fig. 163 - Como representar frações equivalentes com o protótipo

Fonte: O autor (2021)

Com esses dois pontos do protótipo trabalhados com os participantes, foi pedido para que eles representassem a fração 3/5 com o material que também foi disposto previamente para que eles pudessem fazer o recorte; em seguida foi pedido para que eles representassem duas frações equivalentes a 3/5, para verificar se eles haviam entendido como utilizar o material até o momento. Um dos participantes abriu a tela para mostrar como fez:

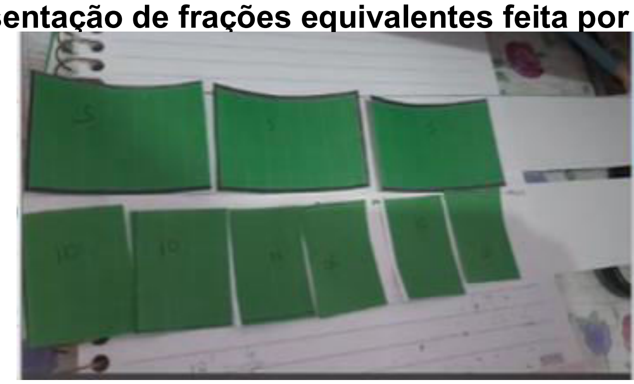
Fig. 164 - Representação de frações equivalentes feita por um participante

Fonte: O autor (2021)

Ela relatou que tentou fazer os desenhos o mais parecido possível com as barras, o mais próximo de terem o mesmo tamanho. A participante desenhou 5 quadrados para o denominador e pintou 3 deles para o numerador e assim representou a fração 3/5, depois pegou cada um dos quadradinhos e repartiu em duas partes, contou e viu que agora havia 10 partes e que 6 delas estavam pintadas encontrando a fração equivalente 6/10.

Em seguida, ela voltou à primeira representação, partindo cada um dos quadradinhos em 3 partes, porém dessa vez contou o numerador de forma equivocada, pois descreveu a representação das barras como sendo 12/15, porém o correto seria ter agora 9 partes pintadas, ou seja, a fração 9/15. Então, tentou fazer uma terceira representação de uma fração equivalente a 3/5, repartindo cada uma das barras agora em 4 partes. Nesse momento é possível perceber que a representação já perde suas características devido ao pequeno tamanho das representações que dificultaram as partições.

Fig. 165 - Representação de frações equivalentes feita por outro participante



Fonte: O autor (2021)

A representação dessa participante ressalta a dificuldade que os alunos podem apresentar quando forem fazer representações pictóricas, pois se os desenhos das barras não ficarem do tamanho adequado para fazer as partições necessárias, sem que haja um espaço muito curto entre as linhas do desenho que separam as partes, e as outras representações não ficarem desenhadas o mais próximo possível da primeira, isso com relação ao tamanho da unidade, o aprendizado do aluno pode ficar comprometido visto que as equivalências não vão ficar claras nos desenhos e assim o aluno vai ter que pensar de forma abstrata para encontrar as frações equivalentes por não vê-las desenhadas corretamente no papel.

Separamos aqui uma outra resposta em que a participante fez a representação usando o material disposto para impressão caso eles não conseguissem confeccionar com os materiais que o protótipo foi desenvolvido. Nessa imagem vemos duas representações, a de cima a fração 3/5 e a de baixo a 6/10, e percebemos que a barra de um inteiro está visível nas duas representações, isso porque ela não usou as outras barras, agora virada no lado oposto ao verde para completar as representações, da forma que está não fica evidente o denominador das frações representadas, pois apenas as partes do numerador estão destacadas e o restante do inteiro está sem partição.

Desse exemplo surge a importância de, sempre que possível, utilizar o material original desenvolvido ou se for utilizar outra forma, uma adaptação, é importante verificar se ela conseguirá ser feita da mesma forma que o modelo original. Pensamos em usar o papel cartão justamente por ele ter cores diferentes em cada lado da folha, assim seria possível identificar as partes que estão representando o numerador e o total de partes que foi repartido, visto que todas essas partes juntas sobrepõem a barra de um inteiro, e dessa forma fica visível a representação da fração desejada.

Uma terceira participação foi separada para podemos analisar como ela foi feita, nessa resposta podemos ver algo diferente: a participante do curso deixou um espaço em branco entre as partes que representam o numerador 6, além disso, ela usou pedaços de papel na cor verde, como uma fita fina, para fazer a divisória das partes brancas para representar os outros pedaços da representação, que não fazem parte do numerador, com isso ela formou a fração 6/10.

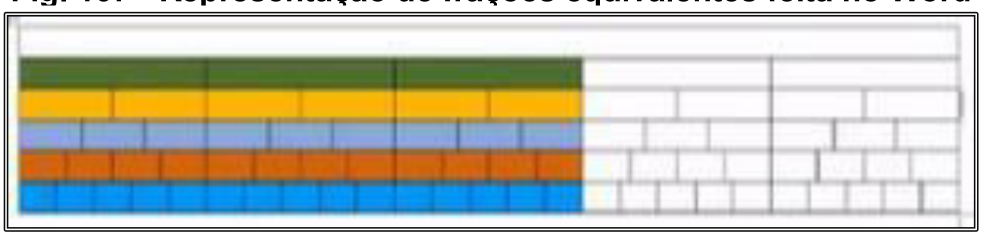
Fig. 166 - Representação da fração 6/10 feita por um terceiro participante

Fonte: O autor (2021)

Na forma com que a participante fez a representação podemos identificar a fração 6/10, porém ela ainda não pode ser usada para ensinar os alunos, pois é possível ver que as partes verdes que identificam o numerador têm tamanhos diferentes, umas delas são mais largas que outras, isso pode confundir o aluno na questão de perceber que todas essas partes representam um pedaço de 1/10 da barrinha branca de um inteiro. Além disso, os pedaços pequenos na cor verde, que agora são usadas para separar as parte brancas, podem fazer com que o aluno pense que esses pedaços são outras barrinhas do numerador.

Uma última resposta separada foi de um participante que fez as representações das frações usando a ferramenta digital, Word da Microsoft, e ele disse que usou o item "tabela" desse programa, como podemos ver na imagem recortada da sua apresentação de tela:

Fig. 167 - Representação de frações equivalentes feita no Word

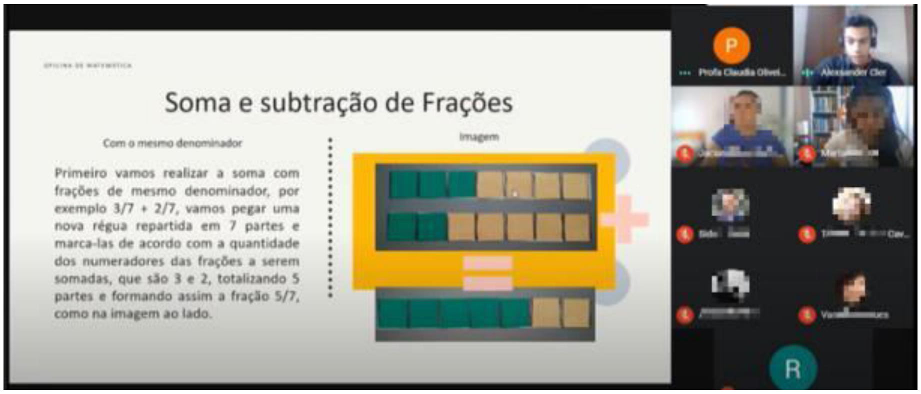


Fonte: O autor (2021)

Podemos ver que ele fez a barra de um inteiro e em seguida fez a representação da fração 3/5 e abaixo, das frações 6/10, 9/15, 12/20 e 15/25. O participante relatou que para fazer essas representações ele fez primeiro as barras inteiras, e para formar a fração 3/5 com essa barra inteira por exemplo, ele selecionou essa barra inteira e nisso abriu uma tela de edição, com isso ele repartiu a barra inteira e 5 partes e, a partir disso clicou em três dessas cinco e selecionou a opção de cor para poder pintar de verde, procedendo de forma semelhante para fazer a representação das frações equivalentes.

Depois desse momento de socialização e participação dos ouvintes do curso e de termos tirados suas dúvidas quanto ao uso do material, demos início a apresentação de como somar e subtrair frações com o nosso protótipo do modelo de barras de Singapura. Tratamos primeiramente da soma de frações já com denominadores comuns, somando as frações 3/7 e 2/7, para que os participantes percebessem a ideia de contagem entre as partes verdes, que representam os numeradores.

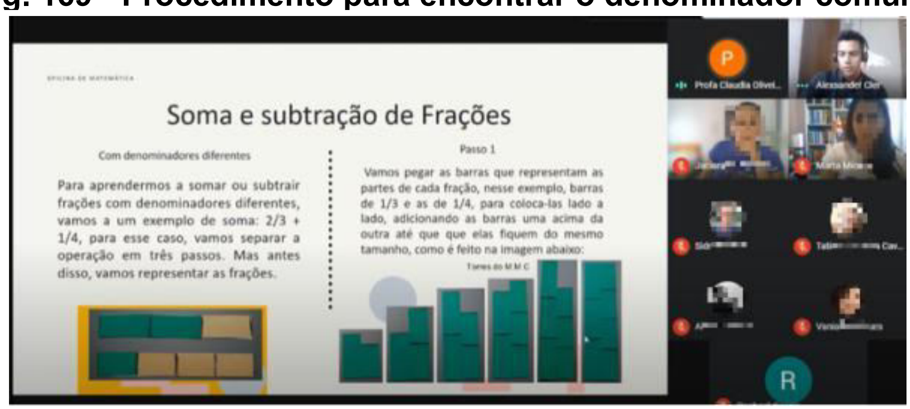
Fig. 168 - Soma e subtração de frações com o protótipo



Fonte: O autor (2021)

Depois foi tratado a soma com denominadores diferentes, fazendo a operação 2/3 + 1/4, mostrando todas as etapas para efetuar soma. Explicamos a semelhança e as diferenças entre os procedimentos das etapas dos dois materiais concretos dispostos no curso, e isso foi preciso porque o procedimento para calcularmos o MMC entre os denominadores segue da mesma forma que o procedimento usado na escala Cuisenaire, colocando as partes das frações utilizadas para a representação uma ao lado da outra, formando duas torres, e acrescentando uma parte acima da outra até que elas tivessem o mesmo tamanho, com é possível ver na imagem.

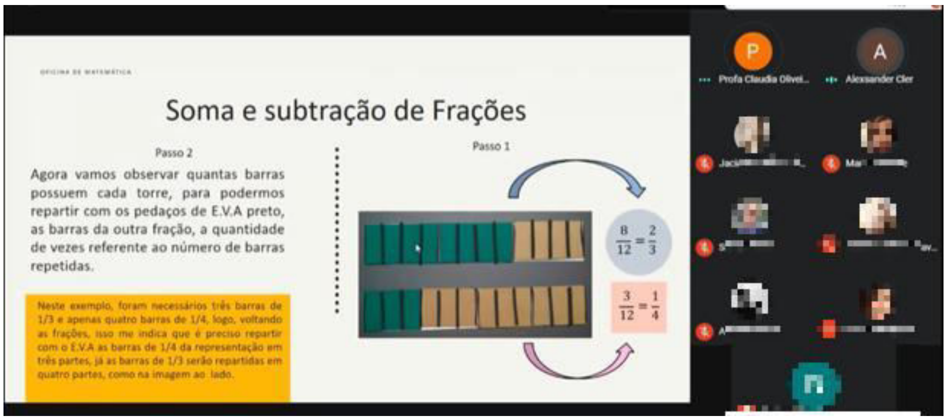
Fig. 169 - Procedimento para encontrar o denominador comum



Fonte: O autor (2021)

Em seguida, explicamos como encontrar as frações equivalentes com o mesmo denominador a partir do MMC calculado, usando os pedaços de E.V.A preto para fazer as partições das peças e assim formar as frações 8/12 e 3/12, para então efetuarmos a soma entre os numeradores das duas frações e termos como resultado da soma a fração 11/12.

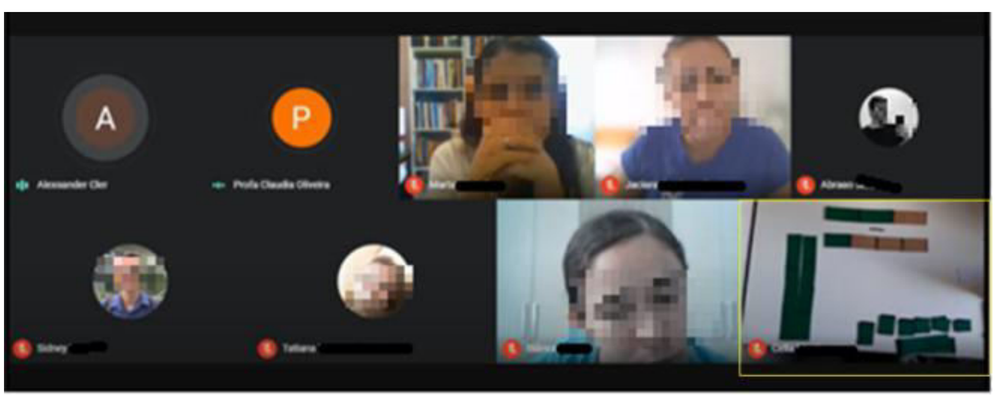
Fig. 170 - Frações equivalentes com o denominador comum



Fonte: O autor (2021)

Após falar da soma de frações utilizando o slide, mostramos aos participantes, na prática, como seria feita a subtração de frações com o protótipo: 2/3 – 1/4.

Fig. 171 - Explicação para a subtração de frações



Fonte: O autor (2021)

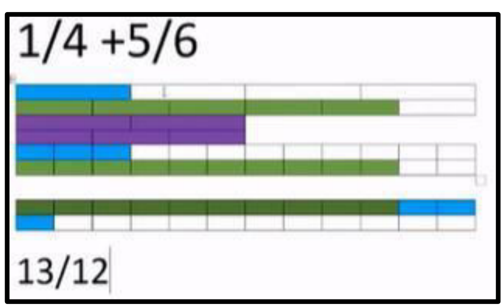
Depois de explicar o procedimento para a subtração, tratando as diferenças dele com o da soma, destinamos um tempo para a interação dos participantes com os seus materiais, sejam eles concretos, como proposto, pictórico ou digitais, como as alternativas que os participantes utilizaram de forma espontânea, que podem ser usados como adaptação da aplicação feita por nós.

Foi pedido para que os participantes fizessem a soma entre os números 1/4 e 5/6, foi dado um tempo para que eles pudessem entender e efetuar a soma para então apresentarem seus resultados, e nessa operação tratamos também o conceito de frações impróprias e como elas são representadas com o protótipo do modelo de barras.

Umas das participantes escreveu no chat a solução da soma como sendo “1 e 1/12” em seguida colocou “que é equivale a 13/12”, depois abriu o áudio dizendo que seria “um inteiro e doze avos”. Ela disse que não pode mostrar pois estava desenhando e a câmera do seu computador estava ruim, só poderia compartilhar imagem pelo celular que já havia descarregado com o tempo do curso. Porém, ela descreveu como fez para encontrar esse resultado: “Eu fiz aqui na folha, aí coloquei e dividi os quadrinhos aí sobrou um e peguei os 12 quadrinhos, desci e pintei 1 e então foi quando eu coloquei um inteiro e um doze avos.”

Outro participante usou as barras feitas no Word: “Eu separei em cores diferentes, a azul para 1/4 e a verde para 5/6, depois eu percebi que em um momento as partições se encontram, colocando duas barras de 1/4 e três barras de 1/6 que estão aqui em roxo, então eu fiz as partições como foi explicado e encontrei as frações equivalentes com denominador 12, aí só fiz somar as partes verdes e azuis e vi que dava uma fração imprópria.”

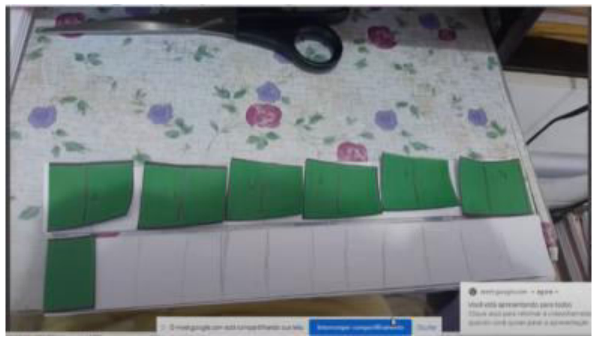
Fig. 172 - Representação da soma feita por um participante no Word



Fonte: O autor (2021)

Uma outra participante mostrou sua resolução, e na imagem abaixo, podemos ver apenas o resultado da operação, e ela falou: “a ideia foi a mesma, eu rascunhei com o lápis rapidinho e ficou um inteiro e 1/12 avos que equivale a 13/12.”

Fig. 173 - Representação do resultado da soma pedida, feita com recorte no papel



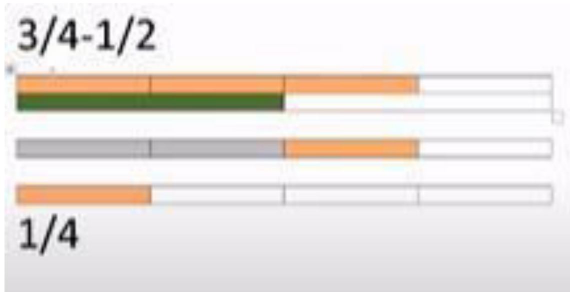
Fonte: O autor (2021)

Podemos ver nessa representação da fração 13/12 que a participante fez as partições das barras verdes desenhando com lápis, além disso, as partes da segunda barra de um inteiro também foram feitas com lápis. Essa pode ser uma alternativa usada sim, mas se formos pensar em um material que será guardado para ser usado outras vezes, esse ato de fazer as separações com lápis vai desgastar o material com o tempo, pois se formos representar outra fração com as mesmas barras, em outro momento, teríamos que apagar as linhas feitas para fazer outras. Por esse motivo, sugerimos usar algo que pudesse ser removido facilmente, como um palito de dente ou até mesmo pedaços menores do emborrachado, assim seria muito mais fácil de remover as partições e utilizar novamente os materiais sem desgastá-lo.

Uma das participantes disse que não conseguiu fazer pois os desenhos dela não ficavam de tamanhos proporcionais para que pudesse tirar algum resultado a partir do desenho. Ela relatou que sentiu falta de ter tido acesso aos recortes disponibilizados, pois ela relatou que se estivesse trabalhando com a manipulação teria aprendido melhor e de forma mais eficiente. Após todos os participantes terem feito a operação de soma, foi pedido para que os participantes fizessem a subtração entre a frações 3/4 e 1/2. Separamos aqui algumas respostas para que possamos analisar.

Um dos participantes respondeu usando a função tabela do Word. A imagem abaixo foi recortada da sua apresentação: “Eu fiz sobrepondo uma fração na outra, o tamanho da fração 1/2 em cima da representação de 3/4 e depois eu tirei das partes coloridas de 3/4 a parte referente ao tamanho de 1/2, e sobrou uma parte pintada apenas, formando a fração 1/4.”

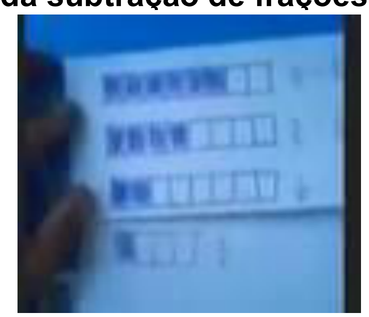
Fig. 174 - Representação da subtração de frações feita no Word



Fonte: O autor (2021)

Podemos ver nessa resolução que o participante entendeu com se deve usar o recurso didático, a ideia da sobreposição das barras para verificar a diferença entre os tamanhos das partes coloridas foi executada da forma correta. Outro participante mostrou sua resolução, infelizmente a imagem não ficou boa, de modo que não é possível identificar as frações que ele escreve do lado das barras. Isso aconteceu por que ele abriu a câmera do seu celular para mostrar o resultado, o que faz a qualidade da imagem ser bem inferior se comparado a um espelhamento de tela, mas transcrevemos a explicação dele para que possa ser analisada juntamente com os desenhos das barras.

Fig. 175 - Representação da subtração de frações feita com desenho em A4

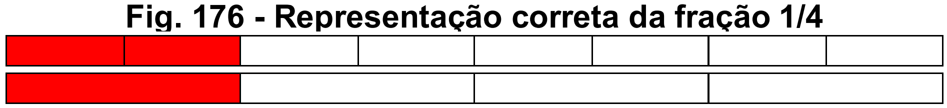


Fonte: O autor (2021)

O participante deu a seguinte explicação: “Então, primeiro eu encontrei a fração equivalente a 3/4 que 6/8, depois a fração equivalente a 1/2 que foi 4/8 e efetuei a subtração que deu 2/8, posteriormente eu só fiz a redução para 1/4, simplifiquei.” Com a explicação dele, conseguimos identificar qual fração está sendo representada em cada uma das barras na imagem. Podemos perceber também que ele encontrou as frações equivalentes usando um denominador comum diferente do que seria usado calculando o MMC entre os números 2 e 4, que por sua vez é o próprio 4, mesmo assim o participante conseguiu responder corretamente à questão.

Podemos ressaltar ainda uma observação que pode ser discutida a respeito das últimas duas barras que o participante desenha: a de cima representa a fração 2/8 e a de baixo a fração 1/4, e ele disse que elas são equivalentes, e não está errado, porém podemos ver que a representação da fração 1/4 tem a barra do inteiro menor que as demais, e foi repartida pela metade. Para essa resolução essa representação está errada, visto que a barra inteira deveria permanecer sempre do mesmo tamanho, e não pode ser alterada. A representação que deveria ser feita teria que ter o mesmo tamanho das demais, agora repartida em apenas 4 partes e uma delas pintada, e isso mostraria de forma mais intuitiva que as frações 1/4 e 2/8 são de fato equivalentes, como na imagem abaixo.

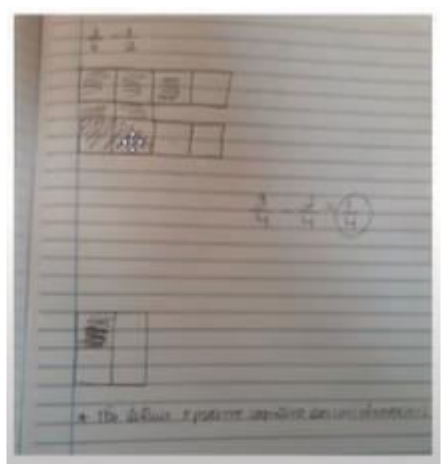
Fig. 176 - Representação correta da fração 1/4



Fonte: O autor (2021)

Por último, separamos a resposta de uma participante que também respondeu por desenho, como podemos ver na imagem a seguir:

Fig. 177 - Representação da subtração de frações feita por um terceiro participante



Fonte: O autor (2021)

A participante que apresentou essa resolução disse que fez as representações das duas frações e depois repartiu as partes da fração 1/2 em dois pedaços cada uma, formando a fração 2/4, mas disse que depois disso não conseguiu concluir a subtração usando o desenho, então foi escrever as frações encontradas para fazer a subtração, pois afirmou ter mais segurança dessa forma e achou a fração 1/4 como resultado.

Explicamos todo o procedimento que ela mesmo fez, para que ela percebesse que estava certa até onde fez e depois dissemos o que ela poderia ter feito para concluir a operação, desenhando agora uma nova barra com apenas uma parte, das quatro, pintadas, ela se surpreendeu por ter feito corretamente até onde fez, e afirmou ter sido pura intuição.

Depois desse momento de socialização dos resultados de alguns participantes, para encerrar toda a parte de apresentação e atividades com o protótipo, colocamos o link do formulário para que os alunos respondessem o teste de verificação de aprendizagem. O teste contemplou três perguntas cujas respostas foram analisadas com detalhe em outro item desse trabalho, e essas respostas serviram para avaliar o quanto eles conseguiram assimilar a forma de usar o protótipo do modelo de barras de Singapura bem como as variações apresentadas pelos participantes do curso, para então ver se ele pode realmente contribuir para o processo de ensino e aprendizagem de frações no sexto ano do Ensino Fundamental.

Depois que os participantes responderam ao questionário, para finalizar o curso, a última etapa foi dirigida pela coordenadora do curso, que fez a sistematização de tudo que foi visto, sobre o conhecimento matemático para o ensino, além disso, fez uma breve revisão do que foi apresentado nos materiais concretos. Por fim, ela fez as considerações finais e agradecimentos para então chegarmos efetivamente ao fim do curso.

3.2.2.3 Análise dos testes de verificação da aprendizagem

Durante a aplicação do curso, mais precisamente ao final da apresentação completa de cada um dos materiais didáticos concretos, foi colocada para os participantes uma atividade básica, disposta pela ferramenta chamada Forms, da Google, onde eles deveriam responder 3 questões baseadas em uma situação-problema dada no início do formulário.

Os participantes deveriam responder às questões usando o recurso didático apresentado imediatamente antes, seja ele na forma que dispomos para, ou seja, com os recortes, com o material original, caso tivessem, ou na forma com que eles poderiam fazer no momento, por desenho ou ferramentas digitais, como foi visto durante os momentos de socialização nas apresentações do curso.

O objetivo dessas atividades é verificar o nível de aprendizado dos docentes quanto o uso dos dois recursos didáticos dispostos no curso para o ensino dos conceitos de frações trabalhado nas apresentações como os de frações próprias, impróprias e frações equivalentes e se eles eram capazes de realizar as operações de soma e subtração com os materiais, o Cuisenaire e o protótipo baseado no modelo de barras de Singapura.

3.2.2.3.1 Análise do teste para verificar o uso do Material Cuisenaire para as operações com frações

Vamos agora apresentar a situação-problema e as três questões que foram elaboradas para o teste, verificando em seguida as respostas dos participantes, juntamente com a análise de seu aprendizado quanto ao nível de cada questão, sendo que este coincide com o número que a questão está representando, ou seja, o nível 1 de aprendizado será verificado na primeira questão, o nível 2 na segunda questão e por fim, o nível 3 será verificado na terceira questão do teste.

No nível 1 de aprendizado, o participante mostra ter domínio inicial sobre o material, conseguindo representar frações com o Cuisenaire, no nível 2 ele já mostra ter um maior domínio sobre o material, porém ainda parcial, sabendo encontrar frações equivalentes através do cálculo do MMC com as barras, também mostra ter domínio de como somar as frações com o Cuisenaire. Por último, no nível 3 o participante mostra que tem total domínio sobre o recurso didático, sendo capaz de interpretar o problema e identificar que ele pode ser resolvido com uma subtração de frações ou através do ato de completar as barras, entendendo que o numerador igual ao denominador representa o todo, um inteiro.

Não colocaremos todas as soluções neste documento, mas destacaremos algumas delas, fazendo os devidos apontamentos e verificando se elas alcançaram o nível que a questão exigia. Segue a primeira situação-problema:

Fig. 178 – Situação-problema para o do material Cuisenaire

Dada a situação a seguir, responda as questões abaixo: Os irmãos Antônio, Bento e Celso eram proprietários de um terreno, de modo que Antônio tinha a posse de metade do terreno e Bento tinha a posse de 1/3 do terreno, cabendo a Celso o restante do terreno.

Descrição (opcional)

Fonte: O autor (2021)

Na questão acima, vemos a situação-problema que se refere ao 6º ano. Com base na situação apresentada para os participantes, foi dada a seguinte questão:

Fig. 179 - Questão 1 da situação-problema para o do material Cuisenaire

1) Represente com o recurso didático indicado - Cuisenaire, as duas frações visíveis na situação, 1/2 e 1/3. (envie a resposta com uma imagem) *

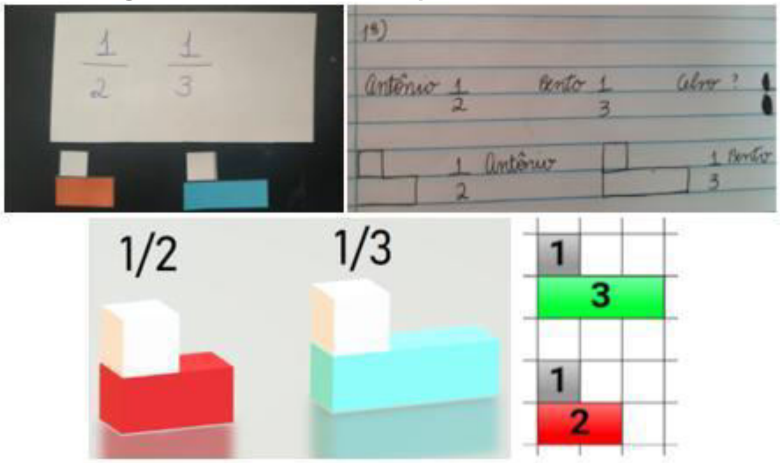
Adicionar arquivo

Fonte: O autor (2021)

A questão de nível 1 consiste apenas em verificar se os participantes sabem usar as barras de Cuisenaire para representas frações, e vejamos aqui algumas respostas dos professores.

Vemos abaixo a imagem do recorte das respostas de alguns dos participantes. Separamos aqui as formas variadas que eles representaram as frações, seja por desenho, recorte dispostos por nós e pelas duas ferramentas digitais que vimos na apresentação, o simulador de Cuisenaire e o Paint 3D. Esses participantes responderam corretamente, representando as duas frações pedidas utilizando as barras corretas, passando pelo primeiro nível da nossa análise.

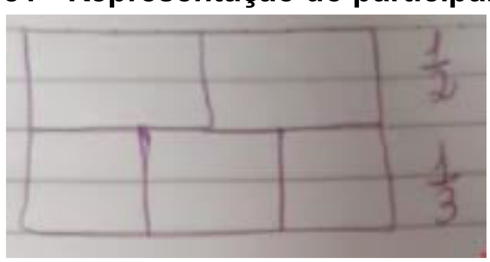
Fig. 180 - Representações dos participantes



Fonte: O autor (2021)

Tivemos apenas uma resposta a qual o participante “**A”** representou as frações como se estivesse representando na forma que vimos no modelo de barras de Singapura:

Fig. 181 - Representação do participante A



Fonte: O autor (2021)

Vemos que mesmo sendo uma representação parcialmente coerente com a ideia de parte todo, que é muito explorada nas barras de Singapura, para que essa forma de representar as frações estivesse correta, a parte que indica o numerador de cada fração deveria estar pintada ou marcada de alguma forma, pois como se encontra vemos apenas um inteiro repartido em duas partes acima, e repartido em três partes abaixo, não trazendo nenhum significado para o desenho em relação às frações.

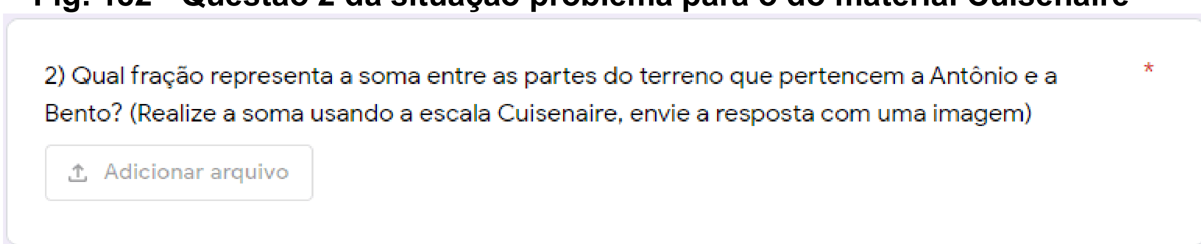
Essa representação mostra que o participante **“A”** não conseguiu atingir o nível 1, que é o mais básico para o uso da escala Cuisenaire com a finalidade de ensinar frações. Isso pode ter ocorrido devido a não ter conseguido fazer os recortes para poder acompanhar as apresentações do curso e por estar acompanhado o curso pelo smartphone, que não permitia o uso correto do simulador de Cuisenaire que seria a única ferramenta digital disponível, visto que o Paint 3D é compatível apenas com computadores.

Isso mostra a importância de dispor dos materiais concretos para a aprendizagem, infelizmente o meio que nos era possível para ministrar o curso nesse tempo de pandemia, não nos permitiu ter total controle sobre os participantes, mesmo os avisando no ato da inscrição e por e-mail com antecedência sobre a necessidade de estarem com os recortes para o dia do curso, muitos deles deixaram para última hora, imprimindo durante o curso, os que tinham impressora em casa, nos pedindo um tempo que demos para que eles recortassem o material.

No geral conseguimos o resultado de que 7 a cada 8 participantes alcançaram o nível 1 quanto ao uso das barras de Cuisenaire, isso nos dá um percentual de 87,5% dos participantes que tiram resultado satisfatório.

Vejamos agora a segunda questão do teste, ainda baseada na situação-problema:

Fig. 182 - Questão 2 da situação problema para o do material Cuisenaire



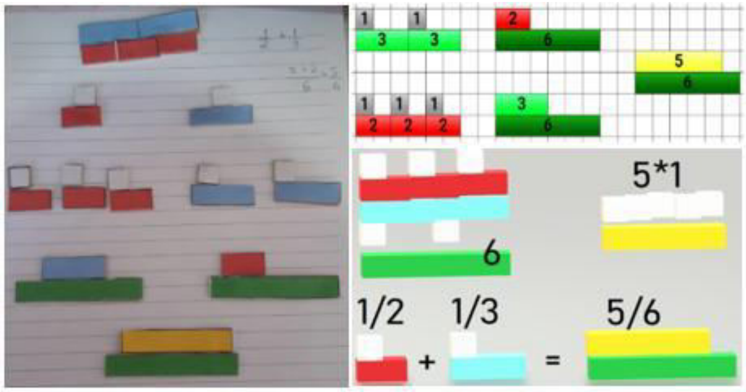
2) Qual fração representa a soma entre as partes do terreno que pertencem a Antônio e a Bento? (Realize a soma usando a escala Cuisenaire, envie a resposta com uma imagem) *

Adicionar arquivo

Fonte: O autor (2021)

Já com as representações das frações feita na primeira questão, essa agora tem o objetivo de saber se os participantes conseguiram somar frações usando as barras e analisar como eles fizeram essa operação, verificando quais deles conseguiram alcançar o nível 2 quanto ao uso do material concreto.

Fig. 183 - Respostas da questão 2



Fonte: O autor (2021)

Na imagem acima vemos alguns recortes de respostas que os participantes enviaram. Nessas soluções, os participantes mostraram ter o nível 2 quanto ao domínio do recurso didático para somar frações, e é possível perceber que eles fizeram cada etapa do procedimento de forma correta, porém não da mesma forma, como sendo um mero procedimento sem que houvesse o entendimento do motivo pelo qual o ele é feito.

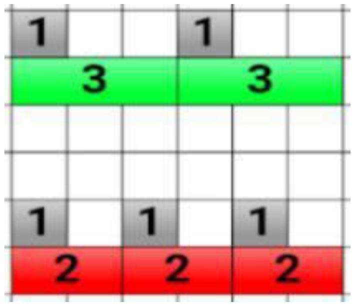
Essas diferenças são vistas na etapa em que se deve encontrar o denominador comum para formar as frações equivalentes, pois nas três soluções colocadas na imagem os participantes encontram as mesmas frações, porém de formas distintas. No recorte da solução feita com as barras concretas, o participante encontrou o denominador comum usando outras barras, além das que estavam sendo usadas para representar as próprias frações, como é possível ver logo acima das frações representadas com as barras, para depois encontrar as frações equivalentes.

Fig. 184 - Procedimento para encontrar o denominador comum

Fonte: O autor (2021)

Já na imagem onde a solução é feita no simulador de Cuisenaire, vemos que isso não foi necessário, visto que o participante precisou apenas ir acrescentando barras ao denominador até que os dois denominadores estivessem com o mesmo tamanho, e em seguida ele só acrescentou ao numerador de cada fração a mesma quantidade de barras que havia colocado no denominador, encontrando também as frações equivalentes com denominadores comuns, e percebemos que ele fez isso sem alterar a forma com que a fração é representada.

Fig. 185 – Resolução de participante

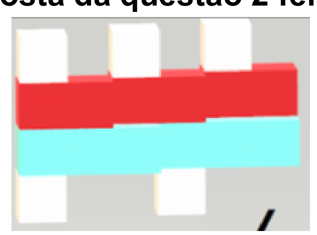


Fonte: O autor (2021)

Mesmo sem ter calculado o MMC à parte, o participante conseguiu perceber que as frações eram equivalentes por causa da malha quadriculada do simulador que facilita visualização, identificando facilmente que os denominadores têm o mesmo tamanho.

É possível ver na solução feita usando o Paint 3D, que o participante encontrou as frações equivalentes de uma forma semelhante à segunda forma aqui apresentada, feita no simulador, com uma peculiaridade muito interessante, mudando as posições das barras do numerador e denominador da fração 1/3 para poder juntar os denominadores e assim encontrar o denominador comum, acrescentando barras até que tivessem o mesmo tamanho, assim ele encontrou as frações 3/6 e 2/6, sendo a segunda representada de “cabeça para baixo”, mas essa modificação não afetou a sua compreensão para encontrar o resultado da soma.

Fig. 186 - Reposta da questão 2 feita no Paint 3D

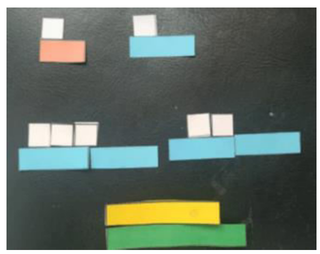


Fonte: O autor (2021)

Apesar da modificação não ter interferido na solução desse professor, ela pode confundir seus alunos, pois para a representação das frações, a ordem das posições das barras importa, e o aluno pode associar a essa modificação à fração inversa, nesse caso ao invés de estar representando a fração 1/3, eles poderiam associar à representação da fração 3/1, ou seja, gera uma ambiguidade.

Tivemos uma resolução na qual o participante fez todos os procedimentos para realizar a soma das frações, porém usou duas barras azuis para encontrar a fração equivalente 3/6, sendo que no procedimento deveria usar três barras vermelhas, mesmo com esse erro, a operação está correta, e ela chegou ao resultado 5/6, isso porque duas barras azuis totalizam 6 unidades que forma a barra verde, o mesmo acontece quando juntamos três barras vermelhas.

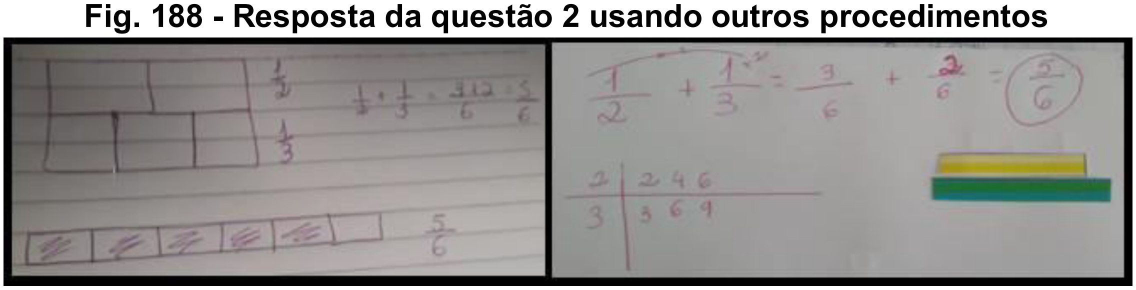
Fig. 187 - Resposta inconsistente da questão 2



Fonte: O autor (2021)

De toda forma não podemos considerar que esse participante não atingiu o nível 2, pois essa troca de barras pode confundir os alunos, e o procedimento onde é feito o MMC entre os denominadores não pode ser feito corretamente, pois o objetivo de adicionar barras até que elas tenham o mesmo tamanho fica prejudicado, pois as próprias barras já são iguais. Separamos aqui duas resoluções cujo os participantes não utilizaram o procedimento adotado pelo material, mas responderam da forma tradicional, escrevendo as frações no papel.

Fig. 188 - Resposta da questão 2 usando outros procedimentos



Fonte: O autor (2021)

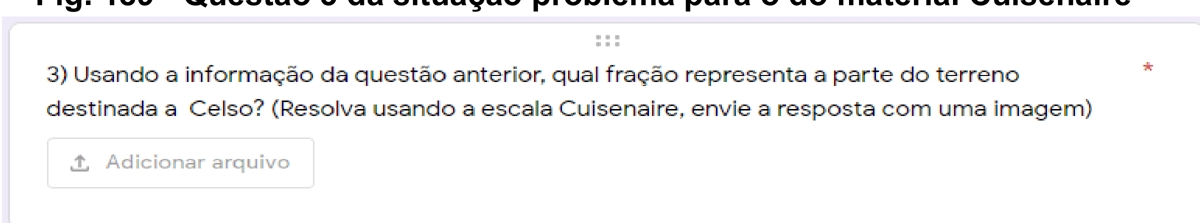
Na imagem da esquerda vemos a continuação da resposta do participante **"A",** e que por não ter conseguido representar as frações de acordo com a forma que é representada com as barras de Cuisenaire, ele também não conseguiu fazer a soma usando o recurso didático, operando as frações de forma tradicional. Os cálculos feitos por ele não deixam claro a forma com que ele encontrou a denominador comum 6, mas ele aparenta ter usado a expressão $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a.d+c.d}{b.d}$, que também é conhecida como "multiplicar cruzado" para encontrar o numerador e multiplicar os denominadores para encontrar o novo denominador. Por fim, ele finalizou sua operação com a representação pictórica da fração 5/6, fazendo seis barras e pintando 5 delas, o que caracteriza uma representação feita com o modelo de barras de Singapura e não com as barras de Cuisenaire.

Já na imagem à direita vemos que o participante, que chamaremos de **"B",** também fez a operação da forma tradicional, porém nós conseguimos identificar a forma com que ele achou o denominador comum, fazendo uma sequência dos múltiplos de cada denominador, com isso ele encontrou o número 6, e por fim, finalizou encontrando a fração 5/6 e representando com as barras de Cuisenaire recortadas, mostrando que conseguiu atingir o nível 1, porém não atingiu o nível 2, assim como o participante **"A".**

Com a segunda pergunta da nossa situação vimos que todos os participantes mostraram ter domínio sobre os procedimentos de como somar frações, pois em todas as soluções encontramos a fração 5/6 como resultado da soma, o que já era de se esperar visto que são professores já atuantes ou em formação, porém apenas 5 dos 8 participantes conseguiram responder a questão corretamente usando o material Cuisenaire, seja por desenho, com ferramentas digitais ou com os recortes, ou seja, 62,5% dos participantes atingiram o nível 2 quanto ao uso do material para somar e subtrair frações.

Vamos agora analisar as respostas da terceira e última questão do teste para o uso das barras de Cuisenaire, que por sua vez está escrita na imagem a seguir:

Fig. 189 - Questão 3 da situação problema para o do material Cuisenaire


3) Usando a informação da questão anterior, qual fração representa a parte do terreno destinada a Celso? (Resolva usando a escala Cuisenaire, envie a resposta com uma imagem) *

Adicionar arquivo

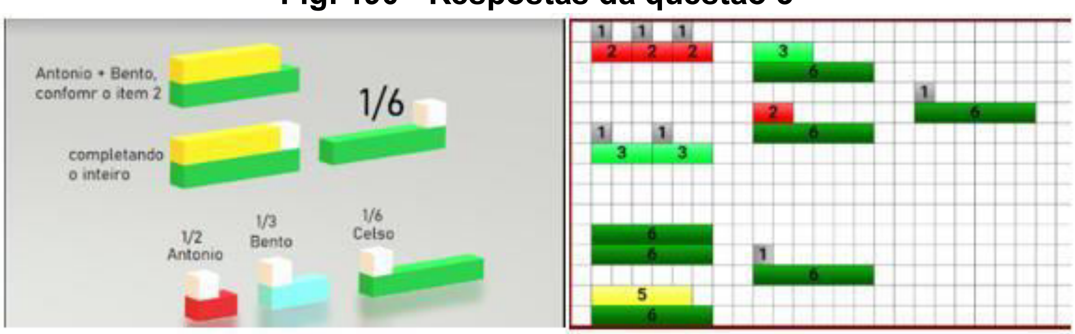
Fonte: O autor (2021)

O objetivo dessa questão é verificar a capacidade do participante de interpretar o problema, identificando a forma com que ele pode ser resolvido, respondendo a esta questão corretamente utilizando as barras de Cuisenaire e o participante atingirá o nível 3 de domínio do material didático para o ensino de frações.

Depois da correta análise da questão, espera-se que os participantes identifiquem que ela poderia ser resolvida com uma subtração entre a fração que representa todo o terreno que pode ser vista como 6/6 e a fração que representa as duas partes destinadas aos irmãos de Celso já foi encontrada, que é 5/6. Representar todo o terreno pela fração 6/6, significar dizer que o terreno foi repartido em 6 partes e todas elas foram tomadas, pois 6/6 = 1. Essa representação é estratégica, pois a fração que será subtraída também tem o denominador 6, bastando apenas repeti-los e efetuar a subtração entre os denominadores 6 e 5, restando a fração 1/6, que é a parcela do terreno destinada a Celso.

Uma segunda análise que os participantes poderiam ter da questão, que é bem semelhante à primeira, partiria do entendimento do resultado que representa as partes dos terrenos dois irmãos juntos, que é 5/6, entendendo que isso significa dizer que o terreno foi repartido em 6 partes e dessas, 5 são dos dois irmãos de Celso; a partir disso, a parcela que resta do terreno é apenas uma das seis, ou seja, 1/6. Vamos agora ver como os participantes responderam, se usaram algumas das duas ideias e como eles as interpretaram usando as barras de Cuisenaire.

Fig. 190 - Respostas da questão 3

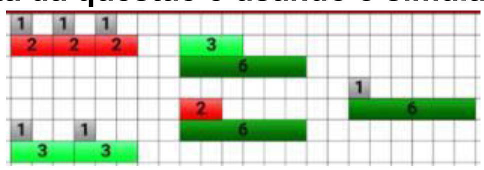


Fonte: O autor (2021)

Na imagem acima vemos as duas resoluções de participantes que alcançaram o nível 3 de domínio do material concreto para o ensino de frações, e fazendo a análise de cada uma delas, podemos ver que o participante que respondeu usando o Paint 3D utilizou o segundo raciocínio escrito acima. Percebemos que ele enunciou o que cada representação significa e completando a fração 5/6 com uma barra branca para torná-la um inteiro, ele percebeu que todas as partes do terreno estavam contempladas, chegando à conclusão que a fração do terreno destinada à Celso é 1/6.

Na resolução feita no simulador de Cuisenaire, o participante começou com uma interpretação errada da questão, que seria fazer a subtração entre as frações do terreno destinada a Antônio e Bento, ou seja,1/2 – 1/3, porém coincidentemente a resposta dessa interpretação é a mesma encontrada na interpretação correta da questão, dando ambas 1/6, como já visto.

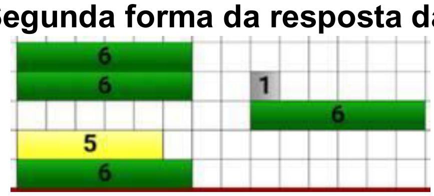
Fig. 191 - Resposta da questão 3 usando o simulador de Cuisenaire



Fonte: O autor (2021)

Depois ele percebe que cometeu um erro de interpretação, e corrigiu sua resolução, que foi feita nas três últimas frações representadas na imagem, e outra interpretação que podemos ter da resposta é que ele pode ter realmente tomado como certa a sua primeira resolução e fez a segunda apenas para confirmar que a primeira, da parte de cima de imagem, estava correta.

Fig. 192 - Segunda forma da resposta da questão 3

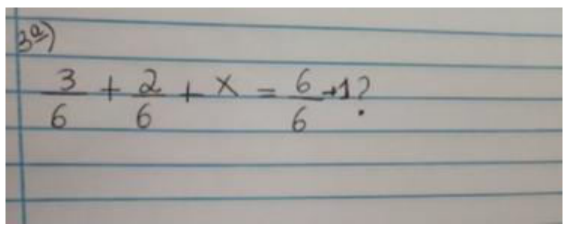


Fonte: O autor (2021)

Depois de analisarmos essas duas possibilidades apontadas, chegamos à conclusão que o participante realmente percebeu que estava errado, se corrigiu fazendo uma nova subtração, agora entre as frações 6/6 e 5/6, utilizando o primeiro raciocínio apresentado aqui, percebendo que se for tirado de todo o terreno a parte destinada a Antônio e Bento, sobraria a parte do terreno de Celso. Chegamos a essa conclusão pelo fato dele ter usado o mesmo raciocínio nos dois casos, que foi a subtração entre frações, se a segunda resolução fosse uma tentativa de verificar a primeira, ele faria a verificação de outra forma e utilizando as mesmas frações para isso, mas vimos que na segunda parte ele usou duas frações distintas das primeiras.

Vamos analisar algumas respostas de participantes que não alcançaram o terceiro nível, para entendermos o motivo deles não terem conseguido utilizar o recurso didático para responder a última questão, ou se eles responderam utilizando algum procedimento para encontrar o valor da questão.

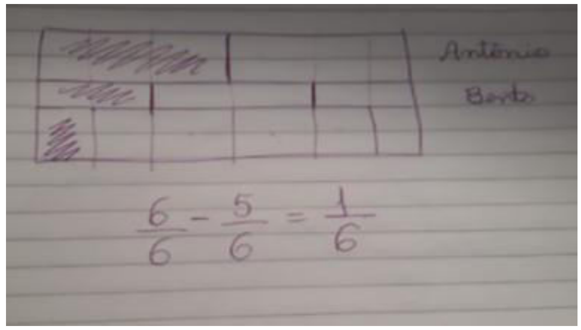
Fig. 193 - Equação para responder à questão 3



Fonte: O autor (2021)

Nessa imagem podemos ver que o participante utilizou uma equação do primeiro grau para representar o problema. Nela vemos que o seu raciocínio foi semelhante ao segundo, visto que o "X" representa justamente o valor que representa a parte do terreno para Celso, porém ele não desenvolveu a equação para encontrar o valor de X, e se ele continuasse a resolução, aplicando os princípios de equivalência, ele veria que para encontrar o valor e X bastaria realizar a subtração entre as frações 6/6 e 5/6, e a partir daí ele poderia usar o material didático para efetuar a subtração. Porém não seria uma solução que poderia ser apresentada para o sexto ano do Ensino Fundamental, pois o primeiro contato com as equações só é feito no sétimo, como é vista na BNCC (BRASIL, 2018): Linguagem algébrica - variável e incógnita; Equivalência de expressões algébricas - identificação da regularidade de uma sequência numérica; Equações polinomiais do 1º grau.

Fig. 194 - Resposta da questão 3 usando o modelo de barras em desenho



Fonte: O autor (2021)

Essa resposta foi apresentada pelo participante **"A",** que estamos acompanhando com destaque desde o início da nossa análise, justamente pela forma com que ele representou as duas frações na primeira questão, usando a forma do modelo de barras de Singapura, particionando as barras em 6 partes e pintando as que eram necessárias para representar o numerador. Nessa solução ele ainda usou a mesma forma de representar, e pela imagem é possível ver a fração 3/6 acima e no meio a fração 2/6, com barras de altura um pouco menor e o resultado da subtração dessas duas frações logo abaixo, ou seja, ele não conseguiu interpretar corretamente a questão, fazendo a subtração entre frações as frações erradas. Porém, quando vamos ver as frações que ele escreve, ele fez a subtração entre as frações corretas, mostrando que sabe resolver problemas de subtração de frações, mas não consegue representar essa resolução com um recurso didático.

O participante **"A"** foi o único que não conseguiu alcançar nenhum dos níveis de domínio do material Cuisenaire mesmo se fôssemos avaliar quanto à forma com que ele respondeu a questões, veríamos que ele soube apenas representar as primeiras frações, 1/2 e 1/3, e posteriormente as suas equivalentes, 3/6 e 2/6 respectivamente, mas não utilizou corretamente essas representações para operação de soma na segunda questão, e todos os outros participantes conseguiram alcançar pelo menos um dos níveis.

Quanto às outras respostas, não tivemos resultados suficientes para serem analisados, visto que nelas os participantes apenas representaram a fração que foi solução para a questão, ou até mesmo mandaram uma imagem em branco, para conseguir enviar as suas outras respostas, pois o formulário só poderia ser enviado depois que as três questões tivessem algum arquivo enviado, seja uma foto ou algum documento com a resolução.

De todas as respostas, em apenas duas vimos que os participantes alcançaram o nível 3, ou seja, 2 dos 8 participantes conseguiram entender completamente como usar a escala Cuisenaire para somar e subtrair frações; isso nos diz que 75% não conseguiram utilizar em sua totalidade o material, mesmo eles sabendo os procedimentos e "fórmulas" para somar ou subtrair frações da forma tradicional.

Com todos as respostas analisadas, obtivemos as seguintes informações quanto à quantidade de participantes que alcançaram cada um dos 3 níveis:

Tabela 2 - Porcentagem quanto aos níveis de habilidade na utilização do Material Cuisenaire

	Nº de participantes do total de 8.	**Porcentagem em relação ao nº total.**	**Porcentagem em relação ao nível anterior.**
Alcançaram o Nível 1.	7	87,5%	87,5%
Alcançaram o Nível 2.	5	62,5%	71,43%
Alcançaram o Nível 3.	2	25%	40%

Fonte: O autor (2021)

3.2.2.3.2 Análise do teste para verificar uso do modelo de barras de Singapura para as operações com frações

Após a apresentação do segundo recurso didático, para verificarmos a aprendizagem dos participantes no que se refere ao uso do modelo de barras de Singapura no ensino de frações, seja por representação pictórica, por meio de recursos digitais ou utilizando o protótipo desenvolvido, em específico para as operações de soma e subtração, elaboramos e disponibilizamos aos participantes três perguntas baseadas em uma situação-problema, da mesma forma com que foi feito no teste da escala Cuisenaire, onde cada uma das questões irão avaliar uma habilidade específica que é necessária para que se possa operar utilizando esse recurso didático e cada questão corresponde a um nível de habilidade quanto ao domínio do material. Vejamos a seguir a situação-problema disposta na ferramenta do Google, chamada Forms:

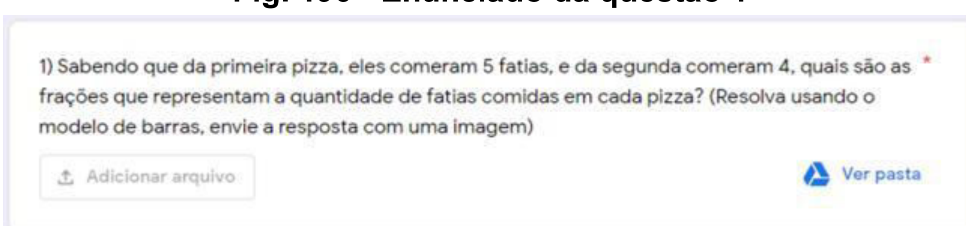
Fig. 195 – Situação-problema


Dada a situação a seguir, responda as questões abaixo: Um grupo de amigos comprou duas pizzas para fazerem um lanche, a primeira repartida em 8 pedaços e a segunda e 6, como na imagem a seguir.

Fonte: O autor (2021)

Baseado nesse enunciado as três perguntas foram elaboradas, as respostas deveriam ser enviadas como imagem para que pudéssemos analisar, apenas 6 participantes responderam ao teste, visto que possivelmente já estavam exaustos e a falta de conexão estável fez alguns professores que participavam do curso saírem durante a sua segunda parte. Vejamos a primeira pergunta do teste a seguir:

Fig. 196 - Enunciado da questão 1


1) Sabendo que da primeira pizza, eles comeram 5 fatias, e da segunda comeram 4, quais são as frações que representam a quantidade de fatias comidas em cada pizza? (Resolva usando o modelo de barras, envie a resposta com uma imagem) *

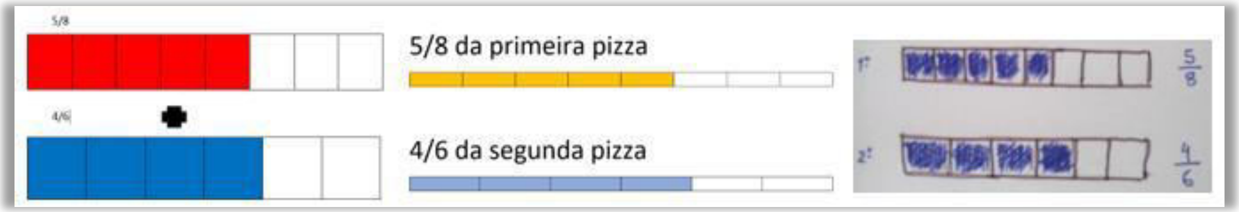
Adicionar arquivo

Ver pasta

Fonte: O autor (2021)

Como podemos ver no enunciado, a primeira questão tem o objetivo de verificar se os participantes conseguem representar frações com o modelo de barras de Singapura, em específico as frações 5/8 e 4/6, logo, assim como no teste das barras de Cuisenaire, o nível 1 de domínio diz respeito ao domínio do material para a representação de frações, de sorte que os participantes que representarem corretamente as duas frações da pergunta atingiram o nível 1. Vamos analisar agora as repostas feitas nessa primeira pergunta.

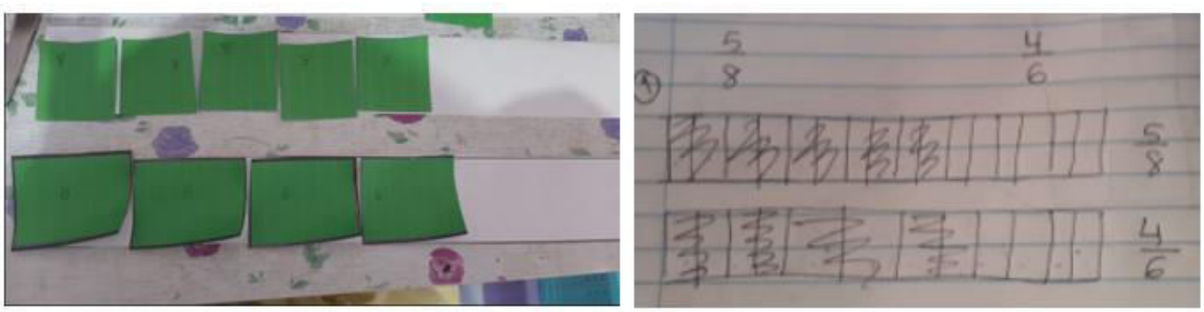
Fig. 197 - Respostas da questão 1, representação usando o modelo de barras



Fonte: O autor (2021)

Na imagem acima vemos três respostas que foram feitas com recursos pictóricos. Esses participantes representaram corretamente as duas frações, com as duas barras inteiras do mesmo tamanho e repartidas de acordo com o denominador de cada fração e as partições pintadas de acordo com o numerador delas. O interessante dessa representação é que nela podemos perceber qual fração é maior, que neste caso é a 4/6, pois em todas as três imagens vemos que o tamanho da união das barras pintadas é maior nessa fração em relação a fração 5/8. Esses participantes conseguiram atingir o nível 1 por terem representado corretamente as frações usando o modelo de barras de Singapura.

Fig. 198 - Outras representações das frações da questão 1



Fonte: O autor (2021)

Nessa outra imagem podemos ver duas respostas que outros participantes que mostraram ter domínio sobre a representação de frações com as barras de Singapura, não conseguiram responder e representar em sua totalidade as frações pedidas na questão. Na resposta recortada ao lado esquerdo da imagem vemos que o participante optou por usar os recortes que disponibilizamos para que eles imprimissem caso não tivessem feito o material com o papel cartão no qual o nosso protótipo foi feito, e ao fazer as representações, o participante colocou uma barra de um inteiro em cada representação e acima delas as barras referentes ao numerador de cada fração, ou seja, 5 barras de 1/8 para representar 5/8 e 4 barras 1/6 para representar 4/6, porém ele não completou o restante da barra inteira com barras de outra cor ou até as mesmas barras verdes, viradas ao contrário para o lado branco do papel.

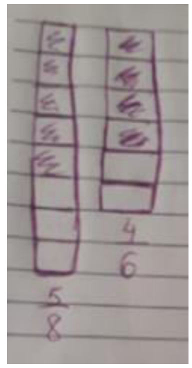
Sem as barras complementares a representação fica incompleta, de modo que o aluno, quando visualiza essas duas representações, não conseguirá identificar exatamente em quantas partes a barra do inteiro foi repartida, pois ele verá apenas as partes do numerador na cor verde e restante da barra lisa, sem partição. Outra forma de separar o restante do inteiro, caso não houvesse mais barras, seria utilizar palitos ou pedaços finos de E.V.A, assim ficaria clara que o inteiro foi partido em 8 partes em uma das frações e em 6 na outra.

Na resposta do lado direito da imagem vimos que o participante fez as duas barras do mesmo tamanho, porém ele as partiu numa quantidade dobrada em relação ao valor de cada denominador, ou seja, na fração 5/8 ele partiu as barras em 16 pedaços e riscou 10 deles, representando a fração 10/16 que é equivalente a 5/8, e prosseguiu de forma análoga na outra fração, formando a fração 8/12 que é equivalente a fração 4/6.

A princípio não se tem motivo para ele fazer essas representações, visto que foi pedido para representar apenas as frações 5/8 e 4/6, porém as representações mostram que ele sabe usar as barras, com a exceção de ter umas maiores que outras, por causa de desenho mal feito. Esses dois fatores atrapalhariam uma aula caso fossem apresentados para alunos de sexto ano, pois as partições não correspondem às frações e o tamanho de algumas partes desajeitadamente diferentes distorcem o sentido de “dividir em partes iguais”, já que visivelmente não são do mesmo tamanho.

Outra representação que foi enviada nesse teste, que está na imagem logo abaixo desse parágrafo, o participante mostrou não ter compreendido como representar corretamente as frações usando o modelo de barras de Singapura, pois ele usou tamanhos diferentes de um inteiro em cada representação, em contrapartida as partições das duas representações tiveram o mesmo tamanho.

Fig. 199 - Representação incorreta das frações 5/8 e 4/6

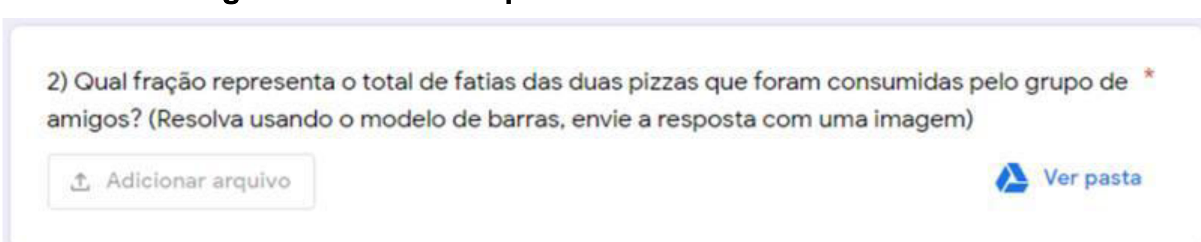


Fonte: O autor (2021)

Observe que nessa representação o tamanho da união das partes pintadas em cada fração nos faz deduzir que a fração 5/8 é maior que fração 4/6, o que sabemos não ser verdade, como foi visto nas primeiras representações analisadas. Essa representação não pode ser usada na sala de aula, pois distorce totalmente a forma correta de representar uma fração.

Depois da análise das respostas obtidas na primeira pergunta, podemos ter duas informações com relação ao nível 1 de uso do modelo de barras de Singapura: uma com relação à compreensão por parte dos participantes de como representar frações, tendo 5 dos 6 participantes, ou seja 83,33%, que obtiveram essa compreensão, porém apenas 3 deles que equivalem a 50%, conseguiram representar de forma clara o suficiente para poder fazer com que o seu aluno entenda o que ele quis representar. Como o objetivo desse teste é verificar a habilidade dos professores em utilizar o material em sua sala de aula, concluímos que 50% dos participantes atingiram o nível 1.

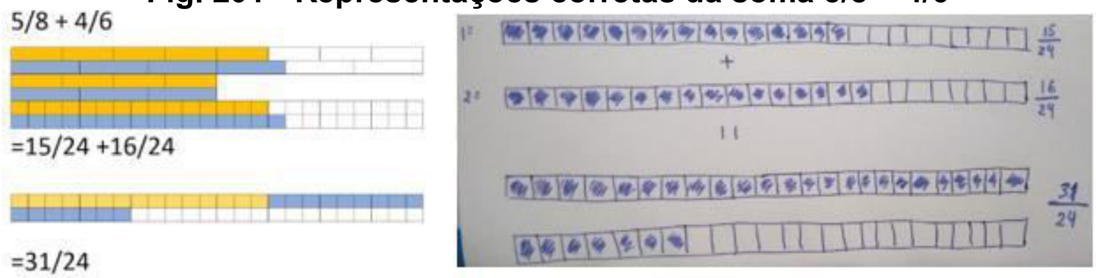
Fig. 200 - Questão 2 para o uso do modelo de barras



Fonte: O autor (2021)

Na segunda pergunta do nosso teste buscamos verificar se os participantes são capazes de efetuar a soma das duas frações, 5/8 e 4/6 utilizando o modelo das barras de Singapura ao ponto de ser claro o suficiente para que seus alunos possam entender sua resolução, e com isso, o participante atinge o nível 2 de uso do material didático para o ensino de frações. Vamos analisar as respostas dos participantes para obtermos os dados sobre a porcentagem dos que atingiram este nível.

Fig. 201 - Representações corretas da soma 5/8 + 4/6



Fonte: O autor (2021)

Na imagem acima vemos duas respostas satisfatórias, nelas os participantes mostraram saber utilizar as barras de Singapura para somar frações, atingindo o nível 2 de domínio da metodologia. Vamos analisar as semelhanças e diferenças nas resoluções.

Na resolução da esquerda, feita na ferramenta Word, por meio de tabela, vemos que o participante seguiu todas as etapas do procedimento apresentado no curso, nas duas primeiras barras vemos as representações das frações a serem somadas, em seguida vemos outras duas barras menores do mesmo tamanho, e elas foram feitas justamente para que ele pudesse encontrar o denominador comum, usando o método explicado no curso. Nas duas penúltimas barras vemos as duas frações que são equivalentes as primeiras com o mesmo denominador e por fim temos união das partes pintadas das duas frações, percebendo que nessa representação há duas barras de um inteiro e em uma delas todas as partes estão pintadas, isso porque a união das partes pintadas resulta em uma fração imprópria, com o numerador maior que o denominador. Com essa representação podemos perceber claramente que a fração 31/24 é maior que um inteiro, podendo ser vista como 24/24, que é a primeira barra inteira, mais 7/24, que é representada pela última barra, também como todas as 24 partes da barra de cima foi pintada e podemos dizer que 31/24 = 1 + 7/24.

A segunda resposta, no lado direito da imagem, temos uma resolução muito semelhante a primeira analisada, o que podemos observar de diferença é que o participante não deixou claro como encontrou as frações equivalentes, fazendo apenas a representação delas. Outra observação que decorre da representação a ser feita por desenho é que as representações das frações 5/8 e 4/6 feita na primeira imagem das respostas da questão 1 têm o tamanho da barra inteira bem menor que o tamanho das barras inteiras das suas respectivas frações equivalentes. Acreditamos que por este motivo o participante optou por não colocar na resolução da soma, e isso é natural de acontecer quando se faz um desenho ou utiliza um material concreto, pois neles temos uma quantidade limite de partições sem que as partes não fiquem muito pequenas, atrapalhando a visualização; por este motivo é importante já fazer barras grandes de um inteiro, para que então ela possa ser repartida o máximo possível.

Fig. 202 - Terceira representação da soma 5/8 + 4/6.

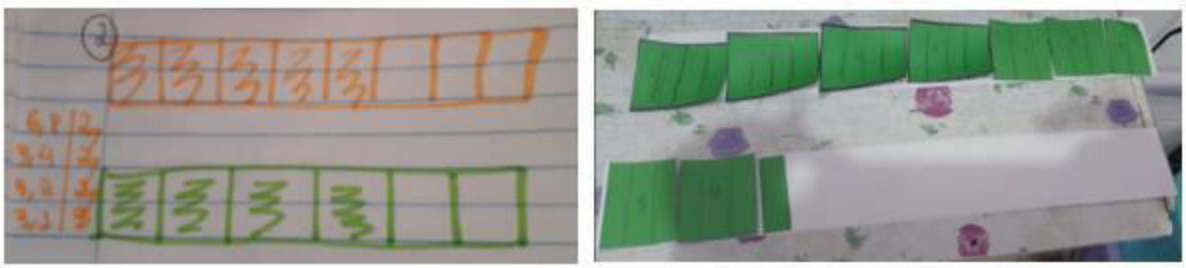
Fonte: O autor (2021)

Temos uma terceira resposta satisfatória destacada na imagem acima: o interessante é que ela foi feita pela única participante que não conseguiu representar as frações 5/8 e 4/6 corretamente, como vimos na figura 170 esse participantes representou as frações equivalentes corretamente, sem que uma delas tivesse a barra inteira maior que a outra, em seguida ele procedeu da mesma forma que os outros participantes, juntando as partes riscadas e formando a fração 31/24, veja que na sua resposta ele preferiu escrever o número misto $1\frac{7}{24}$.

Uma última observação que podemos fazer nessa representação é que o motivo dela ter o mesmo denominador pode ter influenciado no fato das barras inteira terem o mesmo tamanho, pois quando isso não aconteceu, ou seja, no caso da representação de 5/8 e 4/6, quando os denominadores eram diferentes, o tamanho das barras inteiras era diferente.

Dos outros três participantes, dois deles não responderam de forma que podemos verificar se eles atingiram o segundo nível, e um dos participantes não enviou resposta, apenas uma folha em branco.

Fig. 203 - Respostas incompletas das frações 5/8 e 4/6



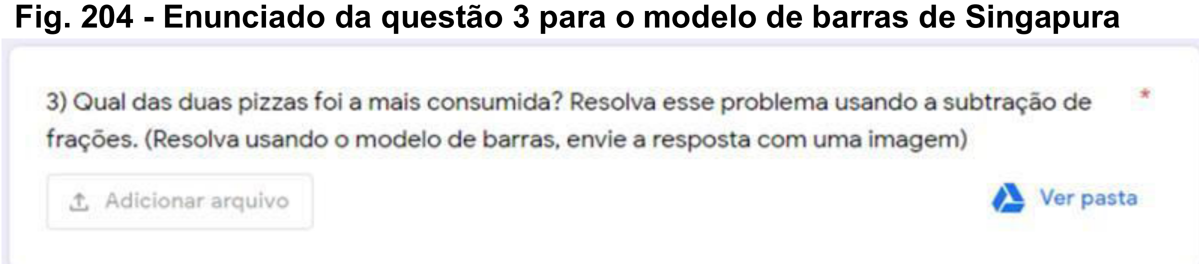
Fonte: O autor (2021)

Na resposta à esquerda da figura, vemos vamos que o participante representou as frações a serem somadas e para encontrar o denominador comum ele utilizou o procedimento do MMC tradicional, mas não concluiu a resolução, encontrado as frações equivalentes e somando-as, talvez justamente por ter feito as barras muito pequenas, sendo complicado partir novamente cada uma das partes em 3, e a outra em 4.

Já na resposta a direita o participante fez apenas a representação do resultado da soma, sem deixar claro como ele chegou a este resultado, se por meios tradicionais, com as contas no papel, ou se usou de fato o recurso didático, portanto não temos como definir se ele atingiu ou não o segundo nível de domínio do material.

Concluímos então que 3 dos 6, que equivale a 50% dos participantes, atingiram o nível 2 de uso do modelo de barras de Singapura para somar frações, sendo que apenas um dele utilizou todas etapas apresentadas no curso.

Fig. 204 - Enunciado da questão 3 para o modelo de barras de Singapura



3) Qual das duas pizzas foi a mais consumida? Resolva esse problema usando a subtração de frações. (Resolva usando o modelo de barras, envie a resposta com uma imagem) *

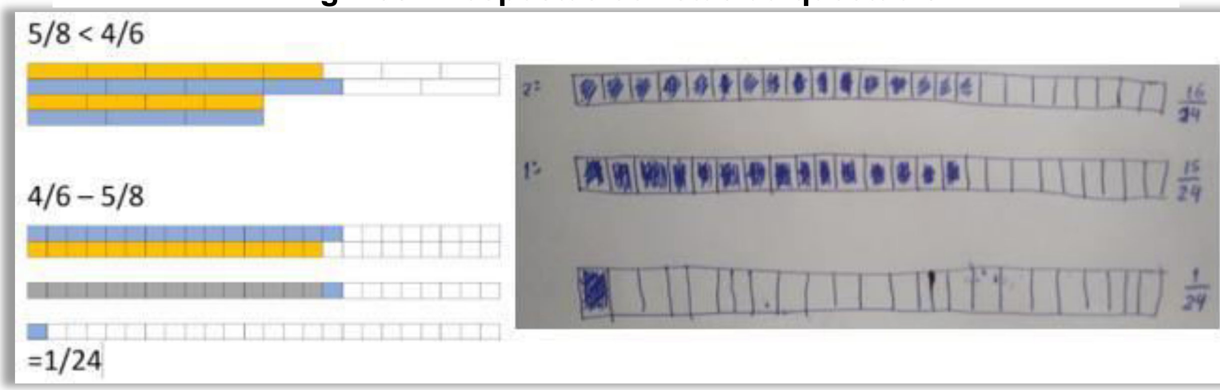
Adicionar arquivo

Ver pasta

Fonte: O autor (2021)

Na pergunta 3 do nosso teste buscamos verificar se os participantes conseguiam subtrair frações usando o modelo de barras de Singapura, os participantes que conseguissem identificar qual das pizzas foi mais consumida, indicando a fração que diferencia a quantidade consumida entre as duas pizzas atingirá o nível 3 de uso do material didático. Vejamos abaixo as respostas obtidas no teste:

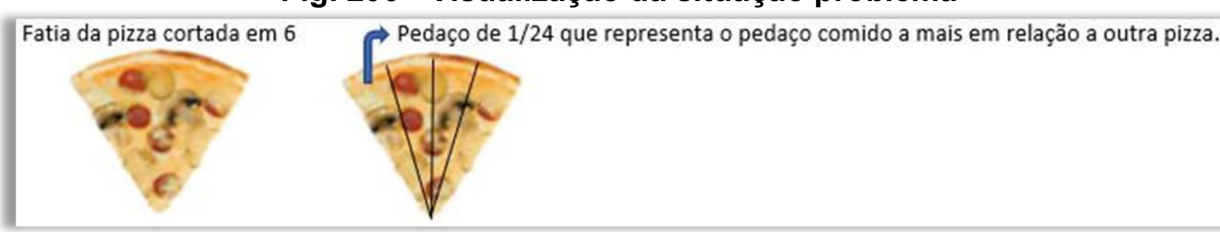
Fig. 205 - Respostas corretas da questão 3



Fonte: O autor (2021)

Na imagem acima temos as respostas de dois participantes, perceba que pela forma de representação eles são os mesmos que vêm acertando desde da primeira pergunta. Na resposta da esquerda vemos que o participante ao fazer a representação das duas frações ele já percebeu que a fração 4/6 é maior que 5/8, ou seja, a pizza cortada em 6 fatias foi a mais consumida, em seguida fez todo o procedimento de repartição para encontrar o denominador comum e a partir disso encontrar a fração que representa essa diferença, resultando na fração 1/24, interpretando esse valor para o nosso problema seria como se a pegasse uma fatia da pizza que foi cortada em 6, estivesse partido essa fatia em 4 pedaços e comido uma dessas partes.

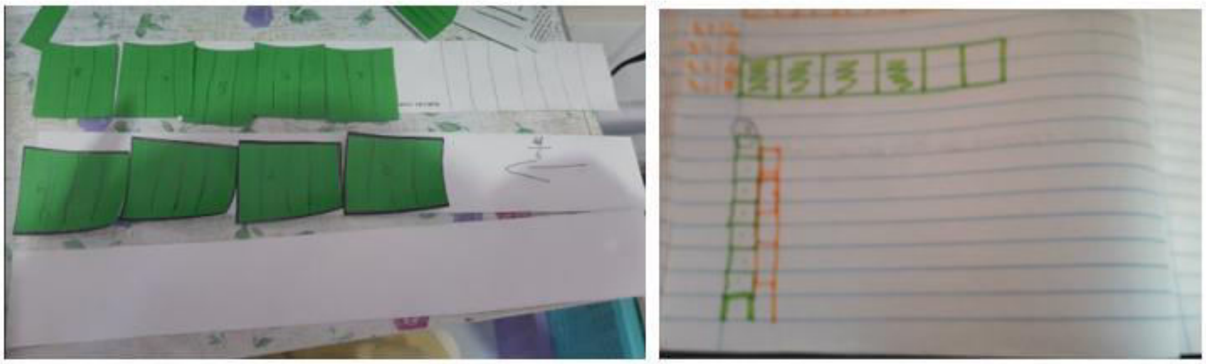
Fig. 206 - Visualização da situação problema



Fonte: O autor (2021)

Na resposta da direita vemos que o participante já partiu das frações com o mesmo denominador, aproveitando o que foi feito na pergunta anterior, em seguida ele encontrou a diferença das quantidades das barras pintadas, também encontrando 1/24 como resposta.

Fig. 207 - Respostas incompletas da questão 3



Fonte: O autor (2021)

Essas foram outras respostas enviadas por mais dois participantes, na resposta da esquerda vemos que a participante, usando o recorte, representou as duas frações já com os mesmos denominadores e indicou com a seta que a 16/24 é a maior, porém ela não fez a representação da diferença entre as duas frações e para isso bastava que ele identificasse o pedaço que representa a diferença e fazer uma nova representação com ela. Na resposta a direita vemos algo semelhante, porém não uma representação clara das frações ou alguma relação entre elas com as barras desenhadas na vertical.

Os outros participantes não enviaram uma resposta que possa ser analisada, com isso, tivemos que apenas 2, dos 6 participantes, ou seja, 33,33% conseguiram atingir o terceiro nível de uso das barras de Singapura, realizando a subtração entre as frações.

No final de toda a análise deste segundo teste, com objetivo de verificar o quanto os participantes conseguiram aprender a utilizar o modelo de barras durante o curso, tivemos os seguintes resultados, organizado na tabela a seguir.

Tabela 3- Porcentagem quanto aos níveis de habilidade na utilização do modelo de barras

	Nº de participantes do total de 6.	**Porcentagem em relação ao nº total.**	**Porcentagem em relação ao nível anterior.**
Alcançaram o Nível 1.	3	50%	50%
Alcançaram o Nível 2.	3	50%	100%
Alcançaram o Nível 3.	2	33,33%	66,66%

Fonte: O autor (2021)

3.2.2.3.3 Descrição e análise de questionário a posteriori do curso

Após a finalização de todas as atividades feita no minicurso, foi disposto para os participantes o último questionário, este contendo 26 questões variadas entre múltipla escolha e questões abertas, com o objetivo de obtermos um feedback dos professores que se dispuseram a participar do curso, para vermos suas opiniões quanto ao uso dos materiais didáticos para os ensino de frações, além disso, buscamos avaliar algumas ideias e o nível de domínio que esses professores possuem em relação aos conteúdos que compõem o tema frações e para verificarmos seu conhecimento geral sobre frações, como os significados, ondem de duas frações entre outros.

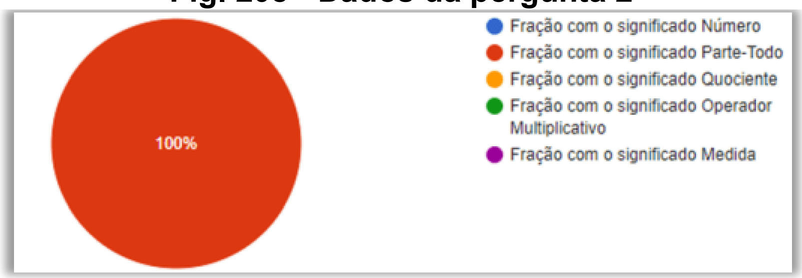
Assim como no teste aplicado para o uso do modelo de barras de Singapura, nesse último questionário tivemos seis respostas, visto que alguns participantes desconectaram da videoconferência por motivos próprios, após enviarem o questionário respondido, os participantes concluíram oficialmente o minicurso, com direito ao certificado emitido pelo SIGAA.

Neste tópico vamos fazer a descrição do questionário final, dispondo as perguntas e as respostas dos participantes, também será feita a análise das respostas para que possamos ter uma visão geral dos perfis dos participantes.

Na primeira pergunta buscamos verificar qual o significado de fraçao que mais predomina entre os participantes, foi feita a pergunta *"O que é 3/7? Explique." e nela tivemos respostas como, "De um todo de sete partes eu tomo 3 partes" e "Uma fração própria, lida como: três sétimos e significa que 3 partes de um total de 7 foram* *"concluídas", ou "consumidas", ou algo do tipo.”*. Todas as respostas fazem menção ao significado de partes de um todo mostrando que esse significado é o mais tratado na sala de aula.

A segunda pergunta do questionário ressalta essa predominância do significado parte-todo, a pergunta foi *“De acordo com a resposta que você colocou na questão 1, a sua visão de fração está relacionada à:”* Temos um gráfico fornecido pelo Google Forms que mostra apenas sendo marcada a opção “Fração com significado Parte-Todo”

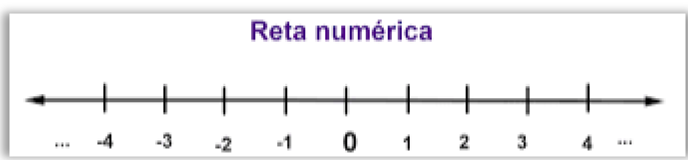
Fig. 208 - Dados da pergunta 2



Fonte: O autor (2021)

A terceira questão tem por objetivo verificar nos participantes a noção de tamanhos numérico de uma fração através da posição de um número fracionário entre dois números inteiros, *“Observe a reta numérica e responda entre quais números se localiza 3/4.”* Foi colocada uma reta numérica para melhor visualização dos participantes.

Fig. 209 - Reta numérica da pergunta 3



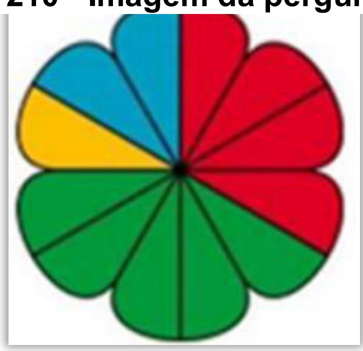
Fonte: O autor (2021)

Deixamos essa pergunta aberta justamente para ver ser os participantes saberiam responder corretamente sem a ajuda de alternativas, dentre os 6 participantes, 4 deles responderam que 3/4 estão entre 0 e 1 respondendo corretamente, os outros dois participantes responderam “entre 3 e 4”, perceba que os dois erraram porém deram a mesma resposta, isso pode ter acontecido justamente pela única forma com que eles veem a fração, associando as partes como sendo unidades, logo 3/4 é visto por eles como “3 unidades, das 4, foram tomadas”, o que pôde ter interferido da interpretação, que o correto de deveria ser “uma unidade foi partida em 4 partes e 3 delas foi tomada”.

A quarta pergunta foi feita para avaliar ser os participantes sabem ordenar frações com o mesmo denominador, *“Qual das frações é maior: 4/5 ou 2/5?”* nela todos os participantes responderam 4/5 como sendo a maior, já na quinta questão colocamos frações com denominadores diferentes, “Qual das frações é maior: 1/6 ou 1/3?” e nessa questão tivemos 5 acertos e 1 acerto, mostrando que há uma certa dificuldade quando se trata frações com denominadores diferentes.

A questão seis foi disposta para ver se os participantes realmente conseguiriam representar frações usando a ideia de parte-todo, que como vimos foi o único significado utilizado por eles para descrever uma fração própria. *“De acordo com a imagem a seguir, determine as frações correspondentes às partes amarela, azul, vermelha e verde.”*

Fig. 210 - Imagem da pergunta 6



Fonte: O autor (2021)

Essa pergunta foi aberta e nela todos os seis participantes responderam corretamente, retiramos uma das respostas “amarelo- 1/12 azul- 2/12 vermelho- 4/12 verde - 5/12”, isso mostra mais uma vez a predominância do significado de parte-todo é e vidente nesses participantes e isso se reflete na sala de aula, onde os seus aluno possuem grande habilidade de representar frações por esse significado, porém quando uma fração é colocada em outro contexto, como quociente ou valor numérico ele não apresentam o mesmo desempenho.

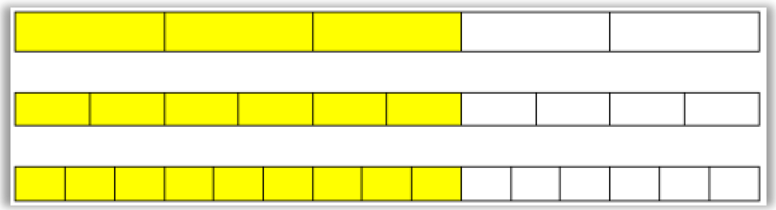
Com a sétima pergunta *“O que representam o numerador e o denominador de uma fração?”*, que por sua vez teve o objetivo de verificar a visão dos professores em relação aos elementos de uma fração, mais uma vez vemos a unanimidade do significado de parte-todo para definir esses dois elementos, todos os participantes responderam de forma semelhante a resposta retirada a seguir, “O Denominador é o valor que representa a quantidade de vezes que um "todo" foi dividido igualmente, enquanto que o numerador é o valor de quantas destas partes serão consideradas.”

Vamos analisar agora as respostas da oitava pergunta do formulário, *“O que são frações equivalentes?”* que também foi uma questão aberta, tivemos respostas semelhantes, como “Frações que se equivalem entre si. Elas representam a mesma parte.” e “representa a mesma parte do todo” que foram respostas associadas ao significado de parte-todo, pois elas falam das frações representarem a mesma parte, tivemos uma resposta que fala a respeito do significado de quociente, “Frações cujo o resultado decimal é igual.”, nessa resposta vemos necessidade de fazer a divisão entre o numerador e o denominador para verificar se elas são de fato equivalentes, já na outra era preciso fazer uma representação pictórica para verificar a equivalência.

Nas respostas dos outros participantes vemos que eles possuem o entendimento do que seriam frações equivalentes, mas não conseguiram expressar seu conceito corretamente em sua totalidade. Uma das respostas foi “Frações iguais” essa definição não está errada, porém é vaga a partir do fato do que não se sabe o que esse participante quis dizer, pois frações iguais podem ser interpretadas como aquelas que têm o mesmo numerador e denominador.

Outra reposta que pode ser mal interpretada é, “Frações que podem ter valores numéricos distintos, porém representam a mesma divisão de um objeto.” Nessa resposta podemos ter dois momentos de ambiguidade, o primeiro deles é quando o participante fala sobre valor numérico distinto, pode estar se tratando dos numerador e denominador de cada fração, que realmente são diferentes, porém eles aumentam ou diminuem proporcionalmente, acredito que esse seja o entendimento que o participante quis passar para o leitor, mas podemos também interpretar “... valores numéricos distintos, ...” como um número que é resultado da divisão entre o numerador e o denominador de cada fração, esse valor numérico, que pode ser inteiro ou decimal, sempre deve ser o mesmo em frações equivalentes. A segunda parte da resposta que pode causar mais de um entendimento é “..., porém representam a mesma divisão de um objeto.” Pois quando ele fala em mesma divisão do objeto podemos entender que esse participante se refere a quantidade de partes que o objeto foi dividido, ou seja, ele está afirmando que um mesmo objeto com partido com frações equivalentes é divido em partes iguais e sabemos que isso não acontece, o que poderia melhorar a resposta desse participante seria ele substituir o termo “divisão” por “porção selecionada” ou “porção tomada”, ficaria assim: “porém representam a mesma porção tomada do objeto”. Dessa forma, ele estaria se referindo a parte total tomada com mais clareza, onde nas frações equivalentes sempre é a mesma.

Fig. 211 - Representação das frações equivalente 3/5, 6/10 e 9/15



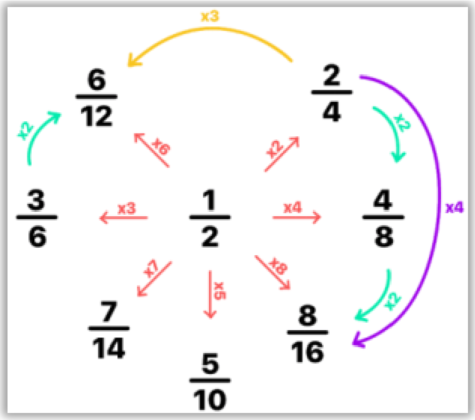
Fonte: O autor (2021)

Como vemos na imagem acima, temos a representação por barras de Singapura de três frações equivalentes, elas têm diferenças de divisão do inteiro, que nesse caso seria a barra toda, uma é dividida em 5 partes, a do meio em 10 partes e a última em 15 partes, porém a porção tomada em cada uma delas é a mesma sendo ela a parte pintada em amarelo.

No geral, apesar de conseguirmos perceber que os participantes têm uma certa noção no conceito de frações equivalentes, vemos que apenas metade dos deles conseguiram expressar de corretamente este conceito, como estamos trabalhando com professores, esse resultado pode ser preocupante no ponto de vista do ensino.

Ainda falando sobre frações equivalentes, temos a pergunta 9 que diz: *“Você consegue explicar o ciclo de obtenção de frações equivalentes da figura a seguir?”*

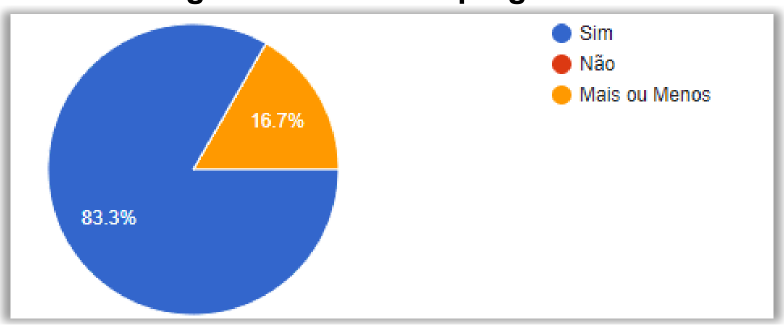
Fig. 212 – Imagem da pergunta 9



Fonte: O autor (2021)

Essa pergunta foi fechada, veja abaixo o gráfico com os dados da questão.

Fig. 213 - Dados da pergunta 9

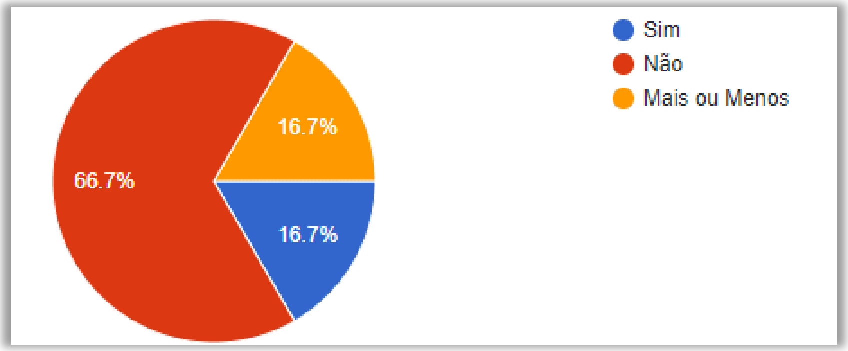


Fonte: O autor (2021)

Veja que nessa pergunta tivemos um resultado maior em porcentagem com relação a pergunta anterior, sendo que elas são basicamente o mesmo questionamento acrescentando a aplicação do conceito e partir dela 5 dos 6 participantes afirmaram que conseguiriam explicar o procedimento para se encontrar as frações equivalentes dada uma fração qualquer.

A próxima pergunta se trata de uma opinião dos participantes sobre sua experiencia com o material Cuisenaire, e pergunta 10 diz *“Você teve dificuldades na compreensão das operações com frações usando o material Cuisenaire?”* veja o gráfico de porcentagem de cada opção marcada.

Fig. 214 - Dados da pergunta 10



Fonte: O autor (2021)

O percentual de 66,7% nos diz que 4 dos 6 participantes afirmaram não tem dificuldade em compreender as operações com material, esse dado pode ser considerado positivo visto que grande parte dos professores de modo geral não conheciam o recurso didático ou nunca tinham trabalhado frações com ele, nisso seria natural ter uma porcentagem maior de dificuldade, o que não ocorreu.

Na pergunta temos a opinião dos participantes em relação ao uso do modelo de barras de Singapura para as operações com frações, nessa pergunta tivemos um resultado distinto com relação ao material Cuisenaire, 50% dos participantes marcaram “mais ou menos” para fato de terem dificuldade na compreensão do uso do recurso, apenas 16,7% deles, que equivale a um participante, afirmou não sentir dificuldade no uso das barras de Singapura e 33,3% marcaram “sim” tendo dificuldade. Esses dados podem ter ocorrido devido diversos fatores, como por exemplo ele ter sido apresentado no segundo momento do curso, onde os participantes já estavam cansados pelo tempo a frente ao computador, também por não terem conseguido fazer o protótipo como sugerido e não conseguirem transpor o a mesma ideia para do modelo de barras para os recursos digitais que poderiam ser usados e que por ventura foi utilizado por um dos participantes.

Outro fator também que pode ter dificultado a compreensão de parte dos professores foi uma singularidade no procedimento para encontrar as frações equivalentes para que as operações, soma ou subtração, pudessem ser feitas, por esse procedimento ser inicialmente semelhante ao utilizado para se encontrar as frações equivalentes com o material Cuisenaire, mas que na última etapa desse procedimento há uma inversão de ações, isso pode ter dificultado a utilização do modelo de barras em relação ao material Cuisenaire.

Nas questões 12 e 13 perguntamos sobre eles terem tido dificuldade na compreensão da soma e subtração com frações de denominadores diferentes utilizando os materiais didáticos, tivemos como resposta que 66,7% dos participantes disseram não ter dificuldade quando utilizaram o material Cuisenaire, já em relação ao modelo de barras de Singapura 50% deles disseram também não ter dificuldade, nesses dados vemos que o melhor aproveitamento na compreensão se deu no uso do material Cuisenaire.

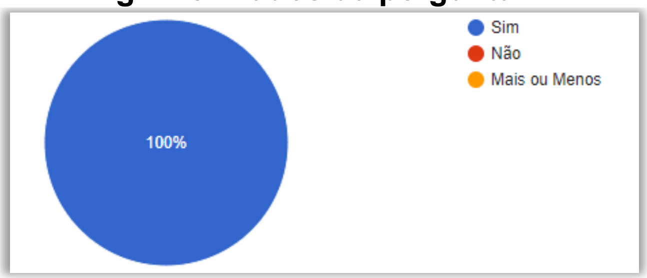
Na pergunta 14 questionamos aos participantes sobre a potencialidade dos recursos didáticos, *“Sobre a potencialidade didática e metodológica dos materiais Cuisenaire e Barras de Singapura para o ensino e aprendizagem de operações com frações (soma e subtração) você considera que são materiais eficazes numa avaliação de:”* obtivemos resultados interessantes visto que as opções eram “Excelente, Ótimo, Bom, Regular e Ruim”. Com isso, tivemos 50% marcados com “Excelente”, 33,3% com “Ótimo” e 16,7% com “Bom” mostrando que os recursos didáticos podem de fato ser utilizados para operações com frações que promoveram uma experiência satisfatória de aprendizagem.

Depois buscamos as opiniões dos participantes quanto as representações pictóricas e a aprendizagem de frações. *“Na sua opinião, as representações pictóricas com material concreto facilitam a aprendizagem das operações com frações, como a soma e subtração?”* Dispomos nessa pergunta as opções, Sim, Não e Mais ou menos, nelas tivemos que 83,3% dos professores afirmaram que os desenhos de fato ajudam na aprendizagem das frações, enquanto que o restante dos professores, 16.7%, marcaram “Mais ou menos”.

Perguntamos também, na questão 16, sobre os participantes já terem conhecimento dos métodos de somar e subtrair frações usando os dois recursos didáticos apresentados no minicurso, a resposta foi surpreendente visto que apenas 16.7% já havia conhecido esse procedimento antes da aplicação do minicurso e o restante dos professores, 83.3% nunca tiveram ciência da metodologia. Esse dado mostra a lacuna na formação dos docentes quanto ao uso de recursos didáticos, pois se construiu a ideia de que os materiais concretos só são bem aproveitados nos anos iniciais do ensino fundamental, restando para os anos finais apenas o ensino tradicional ou com outras metodologias que não fazem o uso de materiais concretos ou representações pictóricas.

Buscamos também, na questão 17, verificar nos participantes a ideia de frações equivalentes para as operações de soma e subtração com frações *“Você conseguiu perceber a importância da equivalência para a soma e subtração de frações com o Cuisenaire?”.* Podemos ver o resultado no gráfico a seguir:

Fig. 215- Dados da pergunta 17



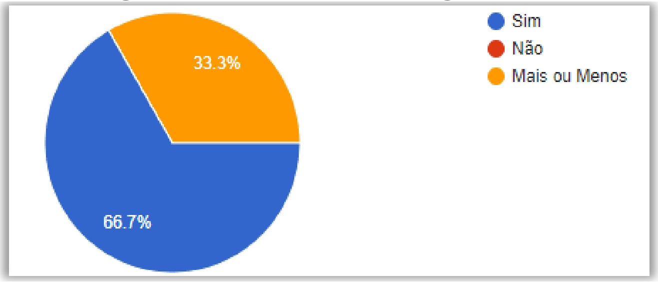
Fonte: O autor (2021)

Todos os professores afirmaram conseguir perceber a importância da equivalência entre frações quando trabalhada com o material Cuisenaire, pois o próprio método deixa claro a necessidade de as barras dos denominadores serem iguais para dar continuidade a operação.

Semelhante a pergunta 17, a 19 buscou a opinião dos participantes no seguinte questionamento “*Você conseguiu compreender por meio do uso do material Cuisenaire o que significa "tirar o mmc" em operações de soma e subtração de frações com denominadores diferentes?”.* Mais uma vez todos os docentes afirmaram ter compreendido o motivo de se tirar o MMC quando fizeram a operação com o Cuisenaire.

Voltando, agora para a questão 18 que não havia sido descrita, fizemos a seguinte pergunta: *“Você conseguiu perceber a mudança de representações pictóricas ao longo do processo de soma e subtração de frações com Cuisenaire?”* Vejamos os dados no gráfico.

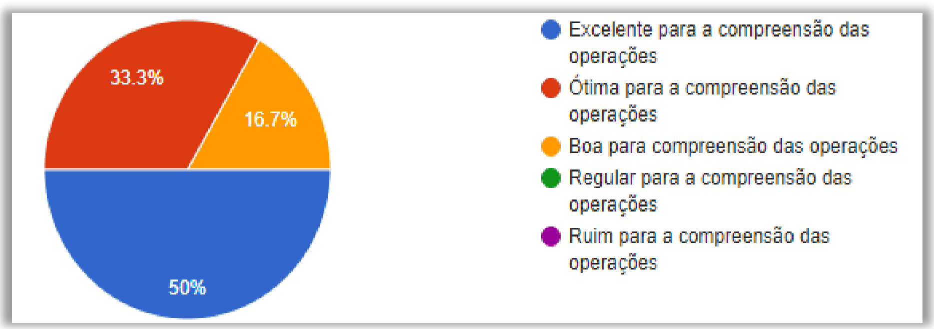
Fig. 216 - Dados da pergunta 18



Fonte: O autor (2021)

A próxima pergunta, a questão 20, buscou ver a opinião dos professores quanto ao uso da metodologia através dos recursos digitais que foram utilizados no curso, como o simulador de Cuisenaire, o Paint3D e a ferramenta de tabela do Word, sendo os dois últimos apresentados por um professor participante do curso por alegar não ter conseguido acesso ao material disponibilizado para o minicurso. Vejamos os dados no gráfico a seguir.

Fig. 217 - Dados da pergunta 20



Fonte: O autor (2021)

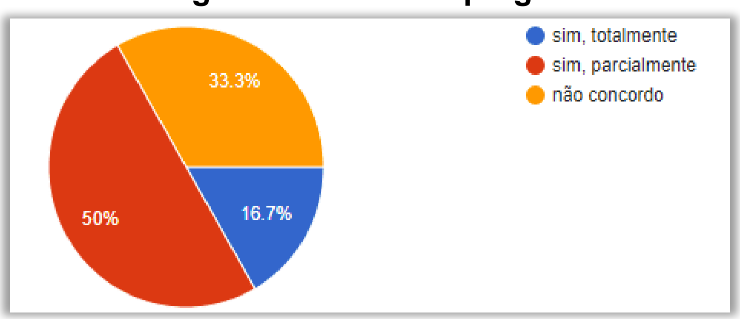
Nesses dados podemos ver o quão é importante a interação digital nas aulas de matemática, em particular para a operações de soma e subtração com frações, visto que hoje a utilização de meios digitais para o dia a dia se tornou algo frequente ao ponto de ser uma necessidade, com os alunos não é diferente, pois muitos deles passam maior parte do tempo em seus aparelhos eletrônicos e inseri-los nas aulas significa deter a atenção e o interesse dos alunos para uma aprendizagem significativa.

As perguntas 21 e 22 do questionário final tiveram as mesmas porcentagens nas respostas, são elas *“Sobre a utilização do simulador de Cuisenaire para as operações, você conseguiu compreender o uso e efetuar as operações?”* e *“Você utilizaria esses materiais (Cuisenaire concreto e digital e barras de Singapura) para o ensino de* *operações com frações - soma e subtração?"* respectivamente. Na questão 21 demos a opções Sim, Não e Mais ou menos, já na 22 foram as opções, sim, não e talvez. Nas duas perguntas tivemos a opção "Sim" com 83.3% e o restante dos participantes marcaram "mais ou menos" e "talvez". Isso mostra que os recursos didáticos puderam ser bem aproveitados no curso e que realmente podem contribuir de forma eficaz para o ensino de fações, sendo uma opção didática para ser utilizada dentro da sala de aula.

A próxima questão vai retratar os conhecimentos dos participantes, que são professores ou futuros, em relação ao seu nível de compreensão do conceito de fração a pergunta 23 do formulário foi "*Você tem dificuldade em associar a representação mental, simbólica (números) e pictórica (desenho) das operações com frações?".* Para essa pergunta 1/3 dos participantes afirmaram ainda ter dificuldade sobre nessa associação, por este motivo é tão importante se trabalhar uma formação continuada com para os professores já formados e garantir que os que estão em formação tenham acesso a uma formação que prepare-os de fato para a profissão docente, pois o que se ver é uma formação que ainda carece desse suporte, que por se tratar conceitos tão básicos e primários são deixados de lado.

Na pergunta 24 tivemos o seguinte enunciado: *"É mais fácil desenhar as operações com frações (fazer a representação pictórica no papel) do que usar o material concreto Cuisenaire e Barras de Singapura. Você concorda com essa afirmação?"*. As opiniões dos participantes foram esquematizadas no gráfico a seguir:

Fig. 218 - Dados da pergunta 24



Fonte: O autor (2021)

Podemos perceber que no geral a maior parte deles preferem utilizar a representação pictórica do que o material concreto, isso pode acontecer pelo fato que o desenho é um recurso mais acessível em relação aos recursos didáticos concretos, pelo custo de tê-los para uma turma inteira ou até pelo trabalho de mobilizar os alunos para a confecção do recurso com materiais acessíveis como o E.V.A por exemplo. Em contrapartida vimos na análise dos testes feitos durante o minicurso que os participantes cometiam erros no desenho que comprometiam o entendimento adequado da representação que queriam fazer, esse é um erro que não será visto quando há a utilização do material concreto.

Na penúltima pergunta buscamos verificar, nas opiniões dos participantes, se eles se sentiam capazes de explicar os procedimentos feito as operações de soma e subtração com frações utilizando os dois recursos didáticos, demos as opções “sim”, “não” e “mais ou menos” para indicar que eles poderiam ter um pequena dificuldade no momento da explicação, 50% deles marcaram “sim”, afirmando que conseguiriam explicar e os outros 50% marcaram “mais ou menos” afirmando que precisaram de algum apoio, como um exemplo já feito, para então poderem explicar com mais clareza. Podemos ver nesses dados que o minicurso teve utilidade para todos os participantes, podemos afirmar isso pois nenhum deles afirmou que não conseguiriam explicar os procedimentos para as operações com os materiais.

Por fim, a última pergunta do formulário foi aberta e teve como objetivo receber as opiniões de forma escrita sobre o aproveitamento dos professores em relação as apresentações dos materiais feitas no minicurso, a pergunta teve o seguinte enunciado: *“Escreva suas percepções sobre a metodologia empregada para o ensino de frações com a utilização do material concreto Cuisenaire e Barras de Singapura (se você conseguiu manipular, realizar as operações, entre outros aspectos) e se o curso ajudou você a compreender melhor soma e subtração de frações.”.* Como apenas seis participantes concluíram o curso até a última etapa, que foi justamente a aplicação desse formulário nós dispomos as suas opiniões na integra para então verificarmos se de fato esse momento de aprendizado para os professores foi produtivo e se contribuiu para os seus conhecimentos pedagógicos.

A resposta de cada participante “Pn” com $n \in N/\ 1 \leq n \leq 6$ está listada abaixo na ordem em que eles enviaram o formulário, logo, P1 foi o primeiro participante a envia-lo, P2 o segundo e assim por diante.

P1: “Ajudou demais. Percebi o quanto é complexo não saber como o meu aluno (a) Pensa! Seria maravilhoso um curso nesse tema! Material manipulável e o seu uso no ensino e aprendizagem da matemática!”

P2: “O curso foi extremamente importante para o aperfeiçoamento da nossa prática. Parabéns a todos os envolvidos!”

P3: “Eu tive um breve contato com estes materiais anteriormente no curso, licenciatura em matemática, porém, não havia aprofundado o uso e aplicações. O curso foi excelente para aparar as arestas que restaram para as operações de adição e subtração. O próximo campo que preciso rever é o de divisão e multiplicação de frações.”

P4: “Gostei muito. Achei mais fácil a utilização do Cuisenaire, porém também consegui utilizar o método por Barras de Singapura. São métodos que com certeza irei utilizar na sala de aula.”

P5: “Foi excelente só não consegui na barra de Singapura e ajudou muito esse curso.”

P6: “A metodologia é muito interessante, porém minha limitação matemática me atrapalha bastante.”

Podemos concluir, pelas respostas dos participantes que a iniciativa de prepararmos um minicurso para a aplicação e explicação de como utilizar cada um dos materiais foi de grande importância para eles, serviu de fato para ampliar seus conhecimentos sobre os materiais concretos. Perceba na respostas do participante P1 que ele relata o fato de sentir falta de um curso completo, seja na graduação ou em uma especialização, para ensinar professores a utilizar da forma corretas os materiais concretos que vimos nas escolas, pois por não saberem ao certo como utiliza-los o professores optam pelo ensino tradicional ou quando vão fazer uso deles sem o conhecimento prévio acabam não obtendo o resultado que buscavam ter no processo de ensino e aprendizagem.

3.2.3 Resultados obtidos com a aplicação do curso: a ressignificação dos conhecimentos dos professores sobre fração, as operações de soma e subtração e a categorização dos conhecimentos

Para que se possa ter uma visão precisa quanto os resultados obtidos com aplicação do minicurso, é preciso que antes seja determinado um perfil geral dos participantes que contribuíram com o pré-teste, assim como para o teste a priori, feito no ato da inscrição, analisando suas respostas para identificar as características gerais desses docentes, como eles enxergam o ensino de fração, de que forma eles ministram suas aulas deste conteúdo, quais suas opiniões sobre o uso de materiais manipuláveis para o ensino de frações, quais as suas dificuldades, caso haja, no conteúdo, e por fim se eles possuem apenas o conhecimento do conteúdo ou se têm o conhecimento especializado do conteúdo, que segundo Ball, Thames e Phelps (2008) é um tipo de conhecimento sobre Matemática único na tarefa de ensinar.

Tomando como base as informações contidas na descrição e análise do pré-teste, podemos criar um perfil dos professores em relação as suas opiniões quanto à forma de que o conteúdo de frações é ensinado e como eles acham que deveria ser. Neste perfil, as aulas do conteúdo de frações são feitas de forma tradicional, com procedimentos e fórmulas para explicar temas como as quatro operações por exemplo, sem que haja uma conceituação e fundamentação adequada desses números, como a apresentação de seus significados, por exemplo, e a explicação do motivo pelo qual duas frações devem ter o mesmo denominador para serem somadas ou subtraídas.

Já em relação ao modo com que as frações podem ser ensinadas, com o objetivo de minimizar as dificuldades dos alunos, o perfil construído de forma unanime, baseado nas respostas dos participantes, afirma que os materiais concretos, recursos manipuláveis e ilustrações, podem de fato ser uma ferramenta que promova um processo de ensino e aprendizagem eficaz para o conteúdo de frações, apesar dessa afirmação ser predominante no perfil, esse professor tem pouco conhecimento dos recursos didáticos trabalhados nesta pesquisa.

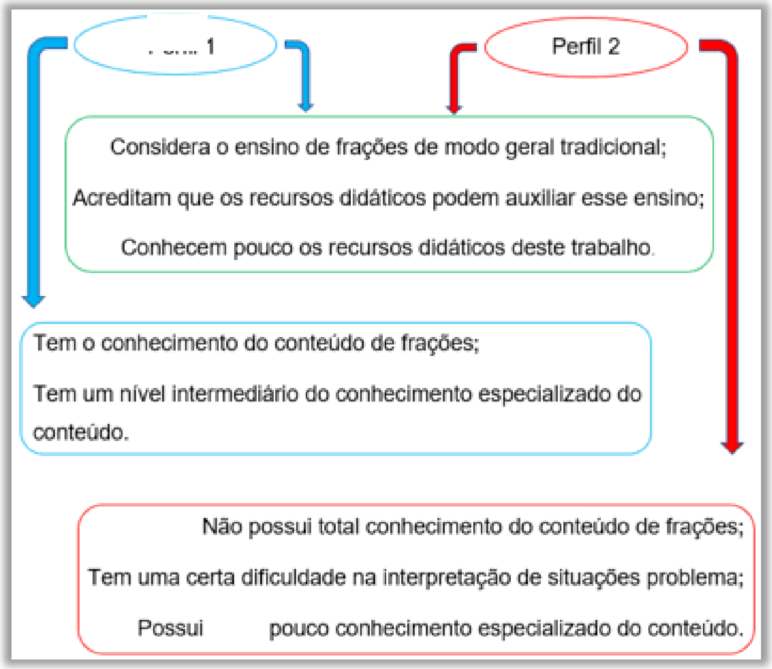
Verificando as repostas do contidas nas quatro situações-problema dispostas no pré-teste, podemos construir dois perfis gerais distintos para os docentes. O primeiro perfil, mais predominante, diz respeito a um professor que possui o conhecimento do conteúdo, ou seja, sabe de forma natural e com pouco esforço responder situações-problema relacionadas ao conteúdo de frações, além disso, consegue as interpretar corretamente para obter o resultado satisfatório.

Porém, esse é um professor que ainda possui seu conhecimento especializado do conteúdo em formação, e podemos evidenciar este fato nas repostas da quarta situação-problema, contidas nas figuras 97 e 98: nelas vimos que apesar das respostas estarem corretas, um dos professores respondeu usando um conteúdo que os alunos do sexto ano ainda não teriam tido contato, que são as equações, ou seja, mostra que ele não está atento a metodologia que pode aplicar para ensinar seus alunos a resolver esse tipo de questão. Já na segunda resposta podemos perceber o domínio do conteúdo por parte do professor, mas ele não explicou por exemplo como seria feita soma, ou como multiplicar um número inteiro por uma fração.

O segundo perfil dos docentes que podemos identificar, com pouca predominância, mas ainda em proporções consideráveis partindo do fato que tratam de professores e de estudantes em formação, é o do professor que tem pouco domínio do conteúdo de frações, sendo evidenciado pelas respostas inconsistentes encontradas nas quatro situações-problema do pré-teste. Além disso, de um professor com dificuldade de interpretação dessas questões, que os fizeram encontrar como soluções respostas que mostraram essa deficiência na correta interpretação do problema. Como consequência disso, eles também não tiveram o conhecimento especializado do conteúdo, mostrando assim que o recurso didático que deve ser base para o professor é o conhecimento do conteúdo que ele vai ensinar, sem ele, não há metodologia ou recurso didático que promova uma aprendizagem eficaz.

Observando os dados obtidos no questionário a priori, percebemos o reforço dos perfis observados no pré-teste, ele é reforçado principalmente no contexto sobre as opiniões dos professores em relação em como se dá ensino de frações e como eles acreditam ser uma alternativa relevante para o ensino de frações, se tratando justamente do ensino por materiais concretos, ilustrações, jogos didáticos e metodologias que promovam a interação por parte dos alunos com o conteúdo de frações. Com a observação conjunta desses dois questionários, construímos os seguintes perfis de professores um pouco antes de participarem do minicurso.

Fig. 219 - Perfis dos professores antes do minicurso



Fonte: O autor (2021)

3.2.3.1 Perfis do professor durante e o fim da aplicação do minicurso

Agora que já temos os perfis dos professores que participaram da pesquisa antes da aplicação do curso, podemos comparar com o desempenho desses professores após a apresentação dos dois recursos didáticos, juntamente com suas respostas aos questionários após a finalização do curso, para evidenciarmos a mudança desses professores, e se de fato o curso foi proveitoso para eles. Além disso, o propósito é verificar as suas conclusões sobre a forma com que os materiais didáticos, o modelo de barras de Singapura e o material Cuisenaire foram usados para ensinar a somar e subtrair frações, se podem ou não contribuir para o processo de ensino e aprendizagem dessa representação dos números racionais.

Durante as apresentações dos materiais didáticos, foi constantemente pedido para que os participantes contribuíssem na apresentação respondendo questões práticas, para verificar se eles conseguiram entender a forma de representar frações, encontrar frações equivalentes e efetuar a operações com os recursos didáticos. Nesses momentos de interação, podemos perceber que, de maneira geral, os professores que já possuíam o conhecimento do conteúdo, ou seja, sabiam os procedimentos feitos para representar frações equivalentes e efetuar as operações, não tiveram dificuldade de conseguir entender e aplicar as etapas dos recursos didáticos, conseguindo até mesmo usar recursos digitais para simular o uso do recurso concreto por não terem tido acesso ao material.

Em contrapartida, vemos que ainda havia alguns participantes que não possuíam total domínio do conteúdo; esses docentes por sua vez, tiveram um pouco mais de dificuldade em utilizar os recursos didáticos, mas ainda assim conseguiram entender as etapas que compõem a forma de usar esses materiais. Outro ponto que pode ser notado foi que esses docentes transferiam suas dificuldades no conteúdo de frações para o uso dos materiais.

Essas pequenas inconsistências no uso do material didático resultaram que no final da análise do questionário para o uso do material Cuisenaire, 25% dos participantes conseguiram concluir, com suas respostas todas as três etapas para somar e subtrair frações. Apesar desse dado parecer pouco, ele foi considerado tendo como base as respostas que foram bem explicadas, com todos os passos explícitos, mas grande parte dos professores responderam de forma que ficou claro seu conhecimento quanto ao uso do material, mas não mostraram ter ainda como explicar esse procedimento para seus alunos, visto que para grande parte deles era a primeira vez que estavam usando a metodologia apresentada no curso.

O mesmo aconteceu na aplicação do questionário durante o curso para ter respondido com o modelo de barras de Singapura, professores que tinham domínio das frações conseguiram assimilar seus conhecimentos nas etapas do recurso didático, já aqueles que não tinham o total domínio, transferiram suas dificuldades para o uso das barras. Outro ponto importante a ser considerado é que todos os participantes conseguiam interpretar corretamente o que as situações-problema apresentadas nos dois questionários, havendo assim uma melhora em relação aos erros de interpretação que tiveram antes do curso.

Já em ralação o nível de satisfação dos professores na forma de ensinar frações com recursos didáticos apresentados no curso, os dados dos questionários a posteriori nos mostraram que de fato eles podem contribuir de forma significativa para o ensino de soma e subtração de frações. Outro resultado que pode ser comprovado com as respostas desses questionários é que houve um aumento na quantidade de professores que melhoraram seu conhecimento especializado do conteúdo de frações, e isso pode ser visto por exemplo no gráfico.

Outro ponto observado foi que os participantes que apresentavam alguma dificuldade no conteúdo de frações, como equivalência, conseguiram entender melhor e tirar suas dúvidas durante a explicação das etapas do uso de cada recurso didático, sendo isso evidenciado no gráfico, além da resposta obtida na pergunta 19 deste questionário, onde todos os professores afirmaram ter entendido o motivo de ser feito o MMC entre o denominadores para poder somar ou subtrair frações, mostrando que o nível de conhecimento do conteúdo dos participantes foi aumentado consideravelmente após a aplicação do curso.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Partindo do princípio que a pesquisa foi voltada para a formação de professores que ensinam Matemática, abordando como tema geral os recursos didáticos utilizados no ensino de frações, para delimitar o tema trabalhado, a pesquisa teve por objetivo geral analisar as contribuições do Material Cuisenaire e do Modelo de Barras de Singapura para o ensino de soma e subtração de frações para alunos das turmas de sexto ano do Ensino Fundamental. Junto a isso, foi feita uma revisão de literatura sobre esses recursos didáticos, para que pudéssemos ter uma visão de como eles são aplicados na Educação de modo geral e como eles podem ser usados como ferramenta para operar frações, assim como identificar suas limitações e até onde poderiam ser utilizados.

Além disso, foram citados trabalhos que se referem as teorias do ensino de frações, dos seus significados, quais são os mais utilizados em sala de aula e quais contribuem de forma a promover um ensino mais consistente deste conteúdo. Também foi feita uma pesquisa nos documentos que direcionam a Educação no âmbito nacional e estadual, com a finalidade entender como esses documentos dispõem a forma com que o conteúdo de frações precisa ser ensinado. Por fim, foi aplicado o minicurso, voltado para os professores e alunos de Licenciatura para apresentá-los os recursos didáticos e como eles podem ser utilizados no ensino de frações, com o objetivo de promover para esses docentes e futuros professores a oportunidade de aprender uma metodologia alternativa para lecionar o conteúdo em questão.

Nesse minicurso, um dos principais objetivos, além contribuir para a formação dos docentes que participaram, foi de recolher a suas opiniões sobre a utilidade dos recursos didáticos apresentados, se eles de fato podem ou não contribuir para o ensino de frações, especialmente na soma e subtração desses números. Com as respostas dos professores nos questionários e durante o curso, foi possível perceber que sim, eles são uma ferramenta didática que ajuda neste processo, visto que eles proporcionam ao aluno o contato palpável com as frações, em os discentes podem manipular o material e entender cada procedimento e as etapas para se operar com os números fracionários.

Tanto o Material Cuisenaire, quanto o Modelo de Barras de Singapura contribuíram para que aluno entendesse o conceito de frações a partir das representações que são feitas com o material, e além disso, o conceito de frações equivalentes fica mais claro quando as barras de Cuisenaire são utilizadas, pois a ideia de que para encontrar essas frações, dada uma, basta multiplicar o numerador e o denominador da fração dada por um número natural não nulo, visto que a princípio alunos do sexto ano ainda não estudaram números inteiros, esse procedimento é facilmente associado quando a fração é representada pelas barras do Material Cuisenaire, sendo este fundamental para que as operações de soma e subtração sejam efetuadas.

Já em relação ao Modelo de Barras de Singapura, pôde ser observado que ele contribui para a melhor compreensão dos dois principais significados de fração, os que estão diretamente ligados ao conceito/definição de fração, como podemos ver no significado de parte-todo por exemplo. Além disso, o conceito de frações equivalentes também pode ser melhor compreendido quando esse recurso didático é utilizado, contribuindo assim para as operações com frações, visto que o aluno consegue visualizar a junção das partes quais destacadas, no caso da soma, assim como a diferença na quantidade dessas partes, no caso da subtração.

Com essas observações, pode-se comprovar a hipótese de que o Material Cuisenaire e o Modelo de Barras de Singapura proporcionam uma aprendizagem significativa das operações soma e subtração de frações, sendo recursos didáticos eficazes no processo ensino-aprendizagem, uma vez que permitem a manipulação e a visualização das operações envolvidas nas situações-problema.

Foi possível observar também, durante todo o processo pelo qual este trabalho passou, que os dois recursos didáticos, como qualquer material concreto, possuem algumas limitações na sua utilização. Em relação ao Material Cuisenaire, assim como no Modelo de Barras de Singapura, foi possível constatar que a representação de frações com numeradores e denominadores grandes, como por exemplo 23/35, pode ficar comprometida.

No Material Cuisenaire, pode acontecer de não ter barras ou até mesmo espaço o suficiente para fazer esse tipo de representação, já com Modelo de Barras de Singapura, se tratando do protótipo desenvolvido para adaptar o recurso pictórico para um recurso concreto, a limitação fica mais aparente, pois as barras das partições possuem no máximo denominador 10, e seria cansativo tanto para o professor quanto para aluno, usar os pedaços de E.V.A preto para repartir, por exemplo, as partes que representam 1/5 sete vezes para encontrar o denominador 35. Mesmo isso sendo feito, os espaços que representariam 1/35 seriam muito pequenos, quase que imperceptíveis, e o mesmo aconteceria se fosse usado o modelo de barras na forma pictórica.

Essa pequena dificuldade em manipular esse material, fez com que boa parte dos professores optassem por utilizar o Modelo de Barras de Singapura por meio do desenho, seja ele feito numa folha de papel ou em recursos digitais, como foi evidenciado nas interações feitas durante o minicurso.

Por decorrência do momento de inatividade presencial em que as escolas públicas se encontram, este trabalho foi feito de forma remota e voltado para os professores, com isso, uma sugestão para as próximas pesquisas a serem feitas com esse tema, seria poder apresentar a metodologia desenvolvida com esses recursos didáticos em sala de aula, fazendo as devidas adaptações para o meio digital, visto que atualmente os alunos interagem com muita frequência com as tecnologias digitais, utilizando ferramentas como as que foram vistas no minicurso: simulador de Cuisenaire, Paint 3D e as tabelas do Word.

A finalidade é analisar se elas podem contribuir para o ensino de frações de forma mais efetiva que sua versão atual concreta, investigando se as limitações encontradas nos materiais concretos podem ser ou não superadas com essas tecnologias digitais, indo mais além, para verificar se esses dois recursos adaptados podem ser usados para efetuar as operações com frações, multiplicação e divisão, e em caso afirmativo, como essas operações poderiam ser feitas com esses materiais de forma a contribuir para o seu processo de ensino e aprendizagem.

Por fim, como produtos gerados a partir do minicurso, foram gravados dois vídeos que estão hospedados no Canal do Grupo Matedtec no YouTube que abordam a soma e subtração de frações com os materiais que foram confeccionados para a pesquisa desenvolvida no TCC, o Material Cuisenaire e o Modelo de Barras de Singapura.

5. REFERÊNCIAS

ABREU, J.; DINIS, R.; TEIXEIRA, R. C. Experiências na construção e gestão de materiais pedagógicos inspirados no método de Singapura na educação pré-escolar e no 1º ciclo do ensino básico. **Jornal das Primeiras Matemáticas**, n. 11, p. 65–106, 2018.

ALAGOAS (Estado). **Referencial curricular de Alagoas.** Secretaria Estadual de Educação: Alagoas, 2019.

BRASIL. **Base nacional comum curricular.** MEC: Brasília, 2018.

CAMPOS, T.; MAGINA, S.; NUNES, T. O professor polivalente e a fração: conceitos e estratégias de ensino. **Educação Matemática Pesquisa**, v.8, n.1, p.125-136, 2006.

CARDOSO, P.; MAMEDE, E. **Dificuldades em ensinar frações no 1.º Ciclo do Ensino Básico.** Disponível em: http://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/52502/1/Rev%20%26%20Educ%20Mat%202017.pdf. Acesso em: 20 jun. 2021.

CAVALIERI, L. **O Ensino das Frações.** (Monografia da especialização em Ensino de Matemática). Umuarama – PR, Universidade Paranaense, 2005.

DOTTI, T. G. P. **Um estudo do modelo de barras nos livros didáticos da Matemática de Singapura:** fundamentação da álgebra no ensino fundamental I ciclo. Disponível em: https://www.dm.ufscar.br/dm/index.php/component/attachments/download/2304. Acesso em: 20 set. 2020.

GAY. M. R. G. **Projeto Araribá:** matemática. São Paulo: Editora Moderna, 2014. p. 145-158.

GIOVANNI. J. R.; CASTRUCCI. B. **A conquista da matemática.** São Paulo: Editora FTD, 2018. p. 132-154.

MAMEDE, E.; NUNES, T.; BRYANT, P. **The equivalence and ordering of fractions in part whole and quotient situations.** Disponível em: https://www.emis.de/proceedings/PME29/PME29RRPapers/PME29Vol3MamedeEtAl.pdf. Acesso em: 16 nov. 2020.

MERLINI, V. L. **O conceito de fração em seus diferentes significados:** um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental. 2005. 238 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

MONTEIRO, A; GROENWALD, C. Dificuldades na aprendizagem de frações: reflexões a partir de uma experiência utilizando testes adaptativos. **ALEXANDRIA, Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v.7, n.2, p.103-135, novembro 2014.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática.** Porto Alegre: Artes Médicas,1997.
______. **Números racionales y cantidades intensivas:** retos y comprensión para el conocimiento implícito de los alunos. Disponível em: https://revistas.um.es/analesps/article/view/42771. Acesso em: 20 nov. 2020.

OLIVEIRA. C, BURLAMAQUI. M. **Material Cuisenaire:** noção de fração. Disponível em <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=15637>. Acesso em: 20 nov. 2020.

RIBEIRO, M. S. **O ensino de fração em cursos de licenciatura em pedagogia:** um estudo em duas IFES. 2019. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2019.

SILVA, A. F. G.; PIETROPAOLO, R.C.; PINHEIRO, M. G. C. **Conhecimento matemático para o ensino das frações:** um estudo desenvolvido com professores dos anos iniciais. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/313414997_Conhecimento_matematico_para_o_ensino_das_fracoes_um_estudo_desenvolvido_com_professores_dos_anos_iniciais. Acesso em: 20 nov. 2020.

SILVA, A. C. T.; LOZADA, C.O.; VIANA, S. L.S. **O material Cuisenaire e o modelo de barras de Singapura como recursos didáticos para o ensino de frações no sexto ano do ensino fundamental.** In: ENCONTRO CAJAZEIRENSE DE MATEMÁTICA, 7, 2020, Cajazeiras. **Anais...**Cajazeiras: IFPB, 2020. p. 1-10.

SANTOS, W. S. Adição e subtração de frações: uma nova técnica utilizando as barras de Cuisenaire. In: ENCONTRO CAJAZEIRENSE DE MATEMÁTICA, 7, 2020, Cajazeiras. **Anais...**Cajazeiras: IFPB, 2020. p. 1-10.

SANTOS, E. O.; KALHIL, J. B.; GHEDIN, E. **A formação matemática no curso de pedagogia: o que revelam as matrizes curriculares.** Disponível em: https://periodicoscientificos.ufmt.br/ojs/index.php/reamec/article/download/5304/3499/16892. Acesso em: 20 nov. 2020.

YIN, R. K. **Estudo de caso:** planejamento e métodos. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2010.

6. APÊNDICES

APÊNDICE A – Questionário de pré-teste

E-mail *

Qual é sua faixa etária? *

- 18 a 25 anos
- 26 a 36 anos
- 36 a 50 anos
- Maior de 50 anos.

Qual o seu gênero?

- Masculino
- Feminino
- Outro

Em qual nível de ensino você leciona? Marque mais de um se necessário.

- [ ] Ensino fundamental 1.
- [ ] Ensino fundamental 2.
- [ ] Ensino médio.
- [ ] Ensino Técnico.
- [ ] Ensino superior.
- [ ] E.J.A

Em qual dos itens você se enquadra para a afirmação a seguir: Eu leciono em... (Marque mais de um se necessário). *

- [ ] Escola particular.
- [ ] Escola pública municipal.
- [ ] Escola pública estadual.
- [ ] Não leciono

Qual é a sua formação acadêmica? *

- Licenciado em Matemática
- Licenciando em Matemática
- Licenciado em Pedagogia
- Licenciando em Pedagogia
- Licenciado em outro curso.
- Licenciando em outro curso.
- Outra graduação

Com que frequência você usa o livro didático em suas aulas? *

- Sempre
- Quase sempre
- Raramente
- Nunca

Com que frequência você usa algum material didático manipulável em suas aulas? *

- Sempre
- Quase sempre
- Raramente
- Nunca

Com que frequência você trabalha situações problemas nos assuntos ministrados em suas aulas? *

- Sempre
- Quase sempre
- Raramente
- Nunca

Você já utilizou algum recurso didático digital nas suas aulas? *

- Sim
- Não

Se sua resposta para a pergunta anterior foi sim, diga qual, se não, escreva o motivo. *

Você conhece o material Cuisenaire? *

- Sim
- Não

Você conhece o método de barras de Singapura? *

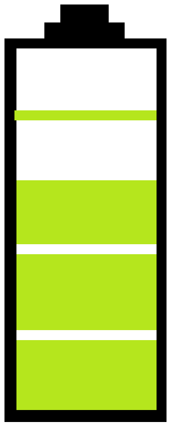
- Sim
- Não

Na sua opinião, porque os alunos têm dificuldades para compreender fração e as operações com frações? *

Você considera importante o uso de materiais concretos no ensino de frações? *

- Sim
- Não

1. O indicador do nível de carga de bateria do aparelho celular de Moisés está marcando 3/5 de sua carga total. Sabendo que seu Smartphone tem uma bateria de 3.000mah. Qual é valor em miliampére-hora (mah) ainda resta de bateria? *



( ) 600Mah

( ) 500Mah

( ) 2000Mah

( ) 1800Mah

( ) 1200Mah

2. Lara comeu duas das sete colunas da sua barra de chocolate, qual fração representa a quantidade de colunas que restaram em relação a barra inteira? E qual é a fração que representa a quantidade de tabletes (quadradinhos) de chocolate que restaram ainda em relação a barra inteira? *

( ) 2/7 e 8/28

( ) 5/7 e 20/28

( ) 2/7 e 20/28

( ) 5/7 e 8/28

( ) 2/7 e 5/7

3) Flávio e Alexandre compraram um refrigerante litros, Flávio bebeu 2/3 do refrigerante, já Alexandre bebeu 1/4 dele. Sabendo disso, responda: Qual número em forma de fração, representa a quantidade que os dois beberam? Ainda sobrou refrigerante? *

( ) 3/7. Não

( ) 2/12. Sim

( ) 11/12. Sim

( ) 7/3. Sim

( ) 12/12. Não

4) De uma cesta de laranjas, deu-se 2/5 a uma pessoa e 1/3 da cesta a outra, e ainda sobraram 12 laranjas. Quantas laranjas havia na cesta e quantas cada uma das pessoas ficou? (Responda esta pergunta simulando estar numa sala de aula ensinando aos seus alunos do sexto ano do ensino fundamental). *

5) Baseado nos seus conhecimentos sobre o conteúdo de fração, escreva a definição e de qual, ou quais, forma(as), você enxerga a fração? *

APÊNDICE B – Questionário a priori

Perguntas do Questionário

Você é professor da Educação Básica?

a)sim
b)não

Você leciona atualmente?

a)sim
b)não

Se você leciona, para qual nível de ensino?

a)anos iniciais do Ensino Fundamental
b)anos finais do Ensino Fundamental
c)ensino médio
d)educação infantil
e)eja
f)ensino fundamental e médio
g)ensino superior
h)não leciono atualmente

Você já ouviu falar sobre o material Cuisenaire?

a)sim
b)não

Você já ouviu falar do modelo de barras de Singapura?

a)sim
b)não

Você costuma utilizar material concreto manipulável em suas aulas?

a)sim

b)não

c)não leciono no momento

Na sua opinião, os materiais concretos auxiliam na aprendizagem dos conceitos matemáticos?

a)sim

b)não

Seus alunos têm dificuldades na compreensão das frações e das operações com frações?

a)sim

b)não

c)não leciono no momento

Você costuma utilizar ilustrações e situações-problemas para explicar o conteúdo de frações?

a)sim, com frequência

b)sim, às vezes

c)não utilizo

d)não leciono no momento

Na sua opinião, as ilustrações ajudam na compreensão das frações?

a)sim

b)não

c)mais ou menos

d)depende

Você já utilizou algum jogo para auxiliar na aprendizagem de frações?

a)sim

b)não

c)não leciono no momento

Na sua opinião, os alunos têm dificuldade de compreender frações impróprias?

a)sim

b)não

Das operações abaixo envolvendo frações, assinale aquela que os alunos apresentam mais dificuldades:

a)adição

b)subtração

c)multiplicação

d)divisão

Sobre adição e subtração de frações com denominadores diferentes, os alunos têm dificuldades em compreender que a operação exige igualar os denominadores?

a)concordo parcialmente com a afirmação

b)concordo totalmente com a afirmação

c)discordo

A representação pictórica, em forma de desenho, auxilia na compreensão do conceito de frações equivalentes?

a)sim

b)não

Você saberia explicar porque na divisão de frações, conserva a primeira fração troca a operação para multiplicação e inverte a segunda fração?

a)sim, saberia explicar o porquê se faz esse procedimento
b)não saberia explicar o porquê se faz esse procedimento

Na sua opinião, justifique porque os alunos apresentam tanta dificuldade na compreensão das frações e das operações.

Resposta Dissertativa

APÊNDICE C – Questionário de verificação de aprendizagem (Material Cuisenaire)

Nome: *

Email *

Dada a situação a seguir, responda as questões abaixo: Os irmãos Antônio, Bento e Celso eram proprietários de um terreno, de modo que Antônio tinha a posse de metade do terreno e Bento tinha a posse de 1/3 do terreno, cabendo a Celso o restante do terreno.

1) Represente com o recurso didático indicado - Cuisenaire, as duas frações visíveis na situação, 1/2 e 1/3. (envie a resposta com uma imagem) *

2) Qual fração representa a soma entre as partes do terreno que pertencem a Antônio e a Bento? (Realize a soma usando a escala Cuisenaire, envie a resposta com uma imagem) *

3) Usando a informação da questão anterior, qual fração representa a parte do terreno destinada a Celso? (Resolva usando a escala Cuisenaire, envie a resposta com uma imagem) *

APÊNDICE D – Questionário de verificação de aprendizagem (Modelo de Barras)

Nome Completo: *

Emai:*

Dada a situação a seguir, responda as questões abaixo: Um grupo de amigos comprou duas pizzas para fazerem um lanche, a primeira repartida em 8 pedaços e a segunda e 6, como na imagem a seguir.

1) Sabendo que da primeira pizza, eles comeram 5 fatias, e da segunda comeram 4, quais são as frações que representam a quantidade de fatias comidas em cada pizza? (Resolva usando o modelo de barras, envie a resposta com uma imagem) *

2) Qual fração representa o total de fatias das duas pizzas que foram consumidas pelo grupo de amigos? (Resolva usando o modelo de barras, envie a resposta com uma imagem) *

3) Qual das duas pizzas foi a mais consumida? Resolva esse problema usando a subtração de frações. (Resolva usando o modelo de barras, envie a resposta com uma imagem) *

APÊNDICE E – Questionário a posteriori

Nome completo: *

E-mail: *

1. O que é 3/7? Explique. *

2. De acordo com a resposta que você colocou na questão 1, a sua visão de fração está relacionada à:

- Fração com o significado Número
- Fração com o significado Parte-Todo
- Fração com o significado Quociente
- Fração com o significado Operador Multiplicativo
- Fração com o significado Medida

3. Observe a reta numérica e responda entre quais números se localiza 3/4. *

4. Qual das frações é maior: 4/5 ou 2/5? *

- 4/5
- 2/5

5. Qual das frações é maior: 1/6 ou 1/3? *

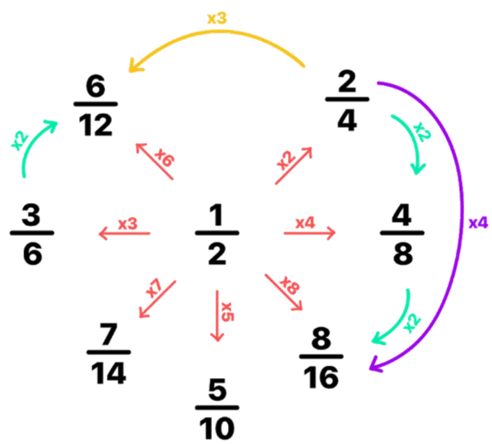
- 1/6
- 1/3

6. De acordo com a imagem a seguir, determine as frações correspondentes às partes amarela, azul, vermelha e verde. *

7. O que representam o numerador e o denominador de uma fração? *

8. O que são frações equivalentes? *

9. Você consegue explicar o ciclo de obtenção de frações equivalentes da figura a seguir? *



- [ ] Sim
- [ ] Não
- [ ] Mais ou Menos

10. Você teve dificuldades na compreensão das operações com frações usando o material Cuisenaire?

Sim

Não

Mais ou Menos

11. Você teve dificuldades na compreensão das operações com frações usando as Barras de Singapura?

Sim

Não

Mais ou Menos

12. Você teve dificuldades de compreender a soma e subtração de frações com denominadores diferentes com o Cuisenaire? *

Sim

Não

13. Você teve dificuldades de compreender a soma e subtração de frações com denominadores diferentes com o Barras de Singapura?

Sim

Não

14. Sobre a potencialidade didática e metodológica dos materiais Cuisenaire e Barras de Singapura para o ensino e aprendizagem de operações com frações (soma e subtração) você considera que são materiais eficazes numa avaliação de: *

Excelente

Ótimo

Bom

Regular

Ruim

15. Na sua opinião, as representações pictóricas com material concreto facilitam a aprendizagem das operações com frações, como a soma e subtração? *

- Sim
- Não
- Mais ou menos

16. Você já conhecia o método de soma e subtração de frações com Cuisenaire e Barras de Singapura? *

- Sim
- Não
- Mais ou menos

17. Você conseguiu perceber a importância da equivalência para a soma e subtração de frações com o Cuisenaire? *

- Sim
- Não
- Mais ou menos

18. Você conseguiu perceber a mudança de representações pictóricas ao longo do processo de soma e subtração de frações com Cuisenaire? *

- Sim
- Não
- Mais ou menos

19. Você conseguiu compreender por meio do uso do material Cuisenaire o que significa "tirar o mmc" em operações de soma e subtração de frações com denominadores diferentes? *

- Sim
- Não
- Mais ou menos

20. Sobre a interação para soma e subtração com o material digital, você considerou:

- Excelente para a compreensão das
- operações Ótima para a compreensão das
- operações Boa para compreensão das
- operações Regular para a compreensão das
- operações Ruim para a compreensão das

  operações

21. Sobre a utilização do simulador de Cuisenaire para as operações, você conseguiu compreender o uso e efetuar as operações? *

- Sim
- Não

22. Você utilizaria esses materiais (Cuisenaire concreto e digital e barras de Singapura) para o ensino de operações com frações - soma e subtração? *

- Sim
- Não
- Talvez

23. Você tem dificuldade em associar a representação mental, simbólica (números) e pictórica (desenho) das operações com frações? *

- Sim
- Não
- Mais ou menos

24. É mais fácil desenhar as operações com frações (fazer a representação pictórica no papel) do que usar o material concreto

Cuisenaire e Barras de Singapura. Você concorda com essa afirmação?
*

- sim, totalmente
- sim, parcialmente
- não concordo

25. Você consegue explicar os procedimentos matemáticos e manipulações com o material concreto utilizados na resolução das operações com frações?
*

- Sim
- Não
- Mais ou menos

26. Escreva suas percepções sobre a metodologia empregada para o ensino de frações com a utilização do material concreto Cuisenaire e Barras de Singapura (se você conseguiu manipular, realizar as operações, entre outros aspectos) e se o curso ajudou você a compreender melhor soma e subtração de frações. *

APÊNDICE F – PRODUTOS EDUCACIONAIS GERADOS A PARTIR DO CURSO

Vídeos explicativos sobre o uso do Material Cuisenaire e Modelo de Barras de Singapura hospedados no Canal do YouTube do Grupo Matedtec

Kit com Material Cuisenaire confeccionado com E. V. A e Protótipo Manipulável do Modelo de Barras de Singapura

APÊNDICE G – T.L.C.E.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Termo de Esclarecimento Livre e Esclarecido (T.L.C.E.)

INSTITUIÇÃO DE VÍNCULO DO PESQUISADOR: Instituto de Matemática – IM/UFAL

Pesquisador responsável: **ALEXSANDER CLER TAVEIROS SILVA**

Orientadora: Profa Dra Claudia de Oliveira Lozada

Você está sendo convidado(a) a participar de uma pesquisa científica, sendo que as informações sobre o mesmo estão descritas nos itens que se seguem. É importante que você leia esse documento com atenção e, em caso de qualquer dúvida ou informação que não entenda, peça ao pesquisador responsável pelo estudo que explique a você. É importante também que saiba que você pode retirar o seu consentimento a qualquer momento, sem ter que dar maiores explicações, não implicando em qualquer prejuízo a você. Você está sendo convidado(a) a participar como voluntário (a) da pesquisa **O MATERIAL CUISENAIRE E O MODELO DE BARRAS DE SINGAPURA COMO RECURSO DIDÁTICO PARA AUXILIAR NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM FRAÇÕES NO SEXTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL,** decorrente do Trabalho de Conclusão de Curso do acadêmico do Curso de Licenciatura em Matemática (Instituto de Matemática – Universidade Federal de Alagoas), Alexsander Cler Taveiros Silva, que tem por objetivo verificar a efetividade do material concreto Cuisinaire e Barras de Singapura com as operações de soma e subtração de frações no 6º ano do Ensino Fundamental. O estudo se destina a contribuir para a melhoria do processo ensino-aprendizagem de Matemática no Ensino Fundamental e sua importância é fornecer metodologias inovadoras para a prática docente em Matemática. A coleta de dados será realizada por meio de questionários a priori e a posteriori, avaliações intermediárias e sequência didática, sendo coletados no período de 05 de dezembro de 2020, durante o curso de extensão **ENSINO DE FRAÇÕES PARA O ENSINO FUNDAMENTAL COM MATERIAL CUISINAIRE E MODELO DE BARRAS DE SINGAPURA.**

A seguir, as informações sobre a pesquisa:

- Esta pesquisa está em conformidade com as normas do Comitê de Ética e Pesquisa.
- Esta pesquisa não oferece riscos à sua saúde física e/ou mental do (a) participante, assegurando-se a sua dignidade.
- É garantida a liberdade da retirada de consentimento a qualquer momento e deixar de participar do estudo, sem qualquer prejuízo ou penalidade.

- Não há despesas pessoais para o (a) participante em qualquer fase do estudo. Também não há compensação financeira relacionada à participação.
- Serão mantidos em sigilo a identidade dos participantes da pesquisa.
- Serão realizados registros fotográficos e de vídeo durante a aplicação das atividades referentes à pesquisa, sem prejuízo à sua imagem e sem gerar direitos conexos, respeitando-se à preservação de sua identidade.
- Os resultados desta pesquisa comporão o Trabalho de Conclusão de Curso também serão publicados em artigos científicos e apresentados em eventos científicos, preservando-se a identidade do participante.

TERMO DE ACEITE

Eu,____, declaro que dei meu consentimento para participar desta pesquisa.

Assinatura do (a) participante:________________________________

Telefone de contato:____

CIDADE/ESTADO, ___________ de ________________________________ de _______.