UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Relações de Recorrências Lineares de Primeira Ordem – uma proposta para modelar problemas no ensino médio através de fórmulas recursivas

Thiago dos Reis Silva

Instituto de Matemática

Maceió, dezembro de 2024

PROFMAT

Universidade Federal de Alagoas
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Relações de Recorrências Lineares de Primeira Ordem – uma proposta para modelar problemas no ensino médio através de fórmulas recursivas

Thiago dos Reis Silva

Orientador: Prof. Dr. Luis Guillermo Martinez Maza
UFAL

Maceió
dezembro de 2024

Thiago dos Reis Silva

Relações de Recorrências Lineares de Primeira Ordem – uma proposta para modelar problemas no ensino médio através de fórmulas recursivas

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Campus A.C. Simões da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Luis Guillermo Martinez Maza
UFAL

Universidade Federal de Alagoas
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Maceió
dezembro de 2024

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária: Girlaine da Silva Santos – CRB-4 – 1127

S586r Silva, Thiago dos Reis.
Relações de recorrências lineares de primeira ordem: uma proposta para modelar problemas no ensino médio através de fórmulas recursivas / Thiago dos Reis Silva. – 2025.
71 f. : il.

Orientador: Luis Guillermo Martinez Maza.
Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Maceió, 2025.

Bibliografia: f. 65.
Apêndices: f. 66-71.

1. Recorrências. 2. Relação de recorrência. 3. Recorrências lineares. 4. Fórmulas recursivas. 5. Análise combinatória. 6. Recorrências lineares de primeira ordem. I. Título.

CDU: 519.111.1

Thiago dos Reis Silva

Relações de Recorrências Lineares de Primeira Ordem – uma proposta para modelar problemas no ensino médio através de fórmulas recursivas

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Campus A.C. Simões da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Trabalho aprovado. Maceió, 30 de dezembro de 2024:

Prof. Dr. Luis Guillermo Martinez Maza
UFAL

Prof. Dr. Isnaldo Isaac Barbosa
UFAL

Prof. Dr. Alexandre Faissal Brito
UFVJM

Maceió
dezembro de 2024

Dedico esta dissertação

À minha família, pelo amor incondicional, apoio constante e pela compreensão nas horas de ausência.

Aos meus alunos, fonte constante de inspiração, cujas perguntas desafiadoras e paixão pela aprendizagem tornaram este trabalho ainda mais significativo.

Aos meus colegas e mentores, cuja orientação e colaboração enriqueceram minha jornada acadêmica.

E a todos que, de alguma forma, contribuíram para o meu crescimento como educador.

Este trabalho é dedicado a vocês.

Agradecimentos

Dedico este trabalho com profunda gratidão e reconhecimento a todas as pessoas que, de alguma maneira, contribuíram para a concretização deste projeto.

Agradeço primeiramente a Deus, cuja benevolência e força me proporcionaram saúde para superar desafios. Em memória do meu saudoso pai, Antonio Ferreira da Silva, e com imensa gratidão à minha mãe, Maria José Soares dos Reis, pelo apoio incondicional que sempre me impulsionou na busca dos meus objetivos.

À luz do amor e da inspiração que emana de meu filho, Anthony Guilherme, dedico-lhe um capítulo especial, pois sua presença diária é o combustível que me impulsiona a evoluir como ser humano.

Minha gratidão se estende à minha irmã, Suzane Reis, e ao meu sobrinho, Denis Gabriel, pela constante motivação e suporte oferecidos.

À minha dedicada namorada, Erica Lima, expresso minha gratidão pelo constante apoio e compreensão ao longo desta jornada.

Aos colegas de curso e amigos, em especial a Sarah, Henrique, Jamerson, Ariel, Caio, Miguel, Maciel, Adriano, Alyson, Ramon, Herivelton, Waldek e Zeneilton, agradeço pela colaboração e amizade que tornaram essa jornada mais significativa.

Aos amigos fora da universidade, especialmente Gracino Rodrigues, Felipe Félix, Maurício Santos, Jocélio Bernardo, Veronildo Cavalcante e Usiel Galdino, manifesto minha gratidão pelo apoio moral imprescindível.

Aos respeitados professores do curso, em particular ao Isnaldo Isaac, Ediel Azevedo e Viviane de Oliveira, reconheço a importância de sua orientação e apoio em minha formação, tanto acadêmica quanto pessoal.

À instituição de ensino, seus docentes, direção e administração, agradeço pela oportunidade que me foi concedida, abrindo a janela para um horizonte superior, repleto de mérito e ética.

Ao meu orientador, Luis Guillermo, expresso minha profunda gratidão por sua parceria desde os primeiros passos deste trabalho. Sua presença ao longo da graduação e do curso de mestrado, suas horas dedicadas à leitura deste trabalho e suas valiosas intervenções foram fundamentais para sua concretização.

"As investigações científicas revelam novas maneiras com as quais Deus trabalha e nos trazem revelações mais profundas do totalmente desconhecido." (Blaise Pascal (1623 - 1662), Matemático e filósofo francês.)

"Somente um principiante que não sabe nada sobre ciência diria que a ciência descarta a fé. Se você realmente estudar a ciência, ela certamente o levará para mais perto de Deus." (James Clerk Maxwell (1831 - 1879), Físico e matemático escocês.)

Resumo

Este trabalho concentra-se no estudo de sequências numéricas, com uma ênfase particular nas relações de recorrências lineares de primeira ordem. Exploramos como essas relações podem ser aplicadas em diversas áreas da matemática, incluindo a geometria. O principal objetivo é capacitar os alunos a estabelecer conexões significativas entre conceitos matemáticos distintos, promovendo um entendimento mais profundo da teoria das sequências.
A eficácia da nossa abordagem é avaliada através da aplicação de dois testes, um antes e outro após a intervenção. Esses testes evidenciam uma melhoria no desempenho dos alunos na compreensão das sequências numéricas. As aplicações discutidas abrangem tanto o ensino fundamental quanto o ensino médio, com adaptações específicas para cada nível escolar. O foco primordial é o desenvolvimento do raciocínio recursivo e a transição de fórmulas recursivas para fórmulas fechadas, permitindo o cálculo preciso e eficiente de qualquer termo subsequente na sequência. Iniciamos nossa investigação modelando um problema específico, partindo de informações iniciais previamente estabelecidas como pontos de partida. A partir disso, adotamos uma abordagem formal, fundamentada em métodos rigorosos, para demonstrar propriedades relevantes e construir as devidas formalizações e provas. Para evidenciar a aplicação prática do conhecimento desenvolvido, exploramos a resolução de três problemas distintos: a Torre de Hanói, o problema das moedas dispostas em hexágonos regulares e um desafio envolvendo líquidos coloridos organizados em garrafas. Cada um desses exemplos ilustra, de forma concreta, a versatilidade e a profundidade das técnicas abordadas.
É importante notar que a literatura existente frequentemente apresenta apenas esboços superficiais na dedução de fórmulas recursivas, especialmente no contexto de sequências numéricas e outros tipos de sequências. Muitas vezes, o foco está apenas no resultado final, sem aprofundar nos passos e fundamentos subjacentes. Este estudo visa oferecer uma compreensão abrangente do processo de derivação de fórmulas recursivas e como, a partir delas, é possível obter fórmulas fechadas. Ao longo do trabalho, demonstramos como transitar de problemas específicos para sequências numéricas e fórmulas fechadas, fornecendo uma visão detalhada e sistemática desse percurso.

Palavras-chave: Recorrências. Recorrências lineares. Recorrências lineares de primeira ordem. Modelagem. Fórmulas recursivas.

Abstract

This work focuses on the study of numerical sequences, with particular emphasis on first-order linear recurrence relations. We explore how these relations can be applied in various mathematical areas, including geometry. The main goal is to enable students to make meaningful connections between distinct mathematical concepts, fostering a deeper understanding of sequence theory.
The effectiveness of this approach is evaluated through two tests, one administered before and one after the intervention. These tests demonstrate an improvement in students' performance regarding their understanding of numerical sequences. The applications discussed cover both elementary and secondary education, with specific adaptations for each educational level. The primary focus is on developing recursive reasoning and transitioning from recursive formulas to closed formulas, allowing for the precise and efficient calculation of any subsequent term in the sequence.
We began our investigation by modeling a specific problem, starting from initial information established as the foundation. Subsequently, we adopted a formal approach grounded in rigorous methods to demonstrate relevant properties and construct the necessary formalizations and proofs. To illustrate the practical application of the developed knowledge, we explored the resolution of three distinct problems: the Tower of Hanoi, the problem of coins arranged in regular hexagons, and a challenge involving colored liquids organized in bottles. Each of these examples concretely demonstrates the versatility and depth of the techniques addressed.
It is important to note that existing literature often presents only superficial outlines for deriving recursive formulas, especially in the context of numerical and non-numerical sequences. The focus is frequently on the final result without delving into the underlying steps and fundamental ideas. This study aims to offer a comprehensive understanding of the process of deriving recursive formulas and how to obtain closed formulas from them. Throughout the work, we demonstrate how to transition from specific problems to numerical sequences and closed formulas, providing a detailed and systematic view of this process.

Keywords: Recurrences. Linear recurrences. First-order linear recurrences. Modeling. Recursive formulas.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1 Introdução

Neste trabalho, abordaremos as relações de recorrência lineares de primeira ordem, descrevendo sequências numéricas e estabelecendo, sempre que possível, uma lei de formação recursiva. Isto é, apresentaremos uma expressão que descreva todos os elementos da sequência a partir dos elementos anteriores. Esse tema está alinhado com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), um documento normativo essencial para as redes de ensino públicas e privadas (Brasil. Ministério da Educação, 2018). A BNCC serve como referência obrigatória na elaboração de currículos e propostas pedagógicas no Brasil. As competências e habilidades para o ensino fundamental são: **(EF01MA10)** Descrever os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão ou regularidade; **(EF02MA09)** Construir sequências de números naturais em ordem crescente ou decrescente a partir de um número qualquer, utilizando uma regularidade estabelecida; **(EF02MA11)** Descrever os elementos ausentes em sequências repetitivas e em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras; **(EF04MA11)** Identificar regularidades em sequências numéricas compostas por múltiplos de um número natural. Para o ensino médio, destacam-se as seguintes competências e habilidades: **(EM13MAT507)** Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas; **(EM13MAT508)** Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

O pensamento recursivo permeia diversas áreas das ciências, sendo uma abordagem essencial em fenômenos naturais e processos complexos. Além da matemática, o pensamento recursivo é fundamental em campos como física, biologia, engenharia, economia e ciência da computação. Essa abordagem revela-se como uma ferramenta poderosa na resolução de problemas complexos e é uma característica comum em diversas disciplinas científicas. Segundo Pereira (2014, p. 35), “as relações de recorrência permitem modelar diversos fenômenos matemáticos e computacionais de forma sistemática” (PEREIRA, 2014). Da mesma forma, Graham, Knuth e Patashnik (1994, p. 2) afirmam que “a matemática concreta combina ferramentas da matemática contínua e discreta para fornecer uma base sólida para a análise de algoritmos” (GRAHAM RONALD L.; KNUTH, 1994).

A aplicação da abordagem recursiva possibilita a modelagem de problemas envolvendo sequências numéricas. Nosso objetivo é encontrar soluções para essas fórmulas recursivas, determinando uma expressão fechada que represente o termo geral da sequência, isto é, uma expressão que não dependa dos termos anteriores. Isso permitirá calcular qualquer termo da sequência de forma direta, proporcionando uma compreensão mais abrangente e eficiente das propriedades inerentes.

1.1 Motivação

A motivação que fundamenta este trabalho reside na constatação de que, no ensino fundamental e médio, não há uma abordagem sistemática sobre o tema das recursões; quando existe, são apenas breves sugestões ou menções. O conceito frequentemente não recebe a atenção adequada, representando uma lacuna prejudicial para o desenvolvimento do raciocínio recursivo nos alunos, um conhecimento essencial para o aprimoramento do pensamento crítico-matemático.

A ausência de uma abordagem apropriada nesse nível educacional dificulta a compreensão profunda das recorrências, limitando a capacidade dos estudantes de explorar plenamente o potencial do raciocínio recursivo. Esta lacuna educacional torna-se ainda mais significativa ao considerar que o conceito em questão possui aplicações amplas, podendo ser utilizado em áreas aparentemente não relacionadas, como geometria plana, matemática financeira e combinatória.

Este trabalho visa, desse modo, motivar a revisão e o aprimoramento do ensino das recorrências lineares de primeira ordem no ensino médio e, com as devidas adaptações, no ensino fundamental. Ao proporcionar uma compreensão clara do processo de obtenção de fórmulas recursivas e de como elas levam a fórmulas fechadas, busca-se preencher essa lacuna educacional. A abordagem formal e as aplicações práticas apresentadas pretendem equipar os estudantes com as ferramentas necessárias para compreender e aplicar efetivamente esses conceitos, contribuindo para um ensino mais sólido e abrangente.

1.2 Organização do Trabalho

O Capítulo 2 introduz os conceitos que fundamentam o desenvolvimento deste trabalho, proporcionando a base teórica necessária para a sua compreensão.

No Capítulo 3 abordamos três aplicações lúdicas, que colocam em prática os conceitos previamente discutidos.

O Capítulo 4 investiga a metodologia adotada, integrada à análise dos questionários pré e pós-teste, oferecendo uma compreensão mais aprofundada do impacto e implementação deste trabalho em sala de aula, visando resolver ou minimizar lacunas de conhecimento relacionadas ao tema.

O Capítulo 5 dedica-se à discussão dos resultados alcançados, contextualizando as descobertas e examinando suas implicações.

Finalmente, no Capítulo 6, são apresentadas as conclusões deste trabalho, consolidando as descobertas e delineando possíveis direções para pesquisas futuras.

2 Fundamentação Teórica

Neste capítulo, discutiremos conceitos fundamentais que são essenciais para uma compreensão fluida do desenvolvimento deste trabalho. Começaremos com a definição de sequência numérica, incluindo exemplos que ilustram tanto sequências com leis de formação explícitas quanto aquelas sem uma lei definida. Em seguida, abordaremos as relações de recorrência e as sequências definidas recursivamente. Por fim, exploraremos diversas técnicas de solução e um teorema que simplifica algumas soluções mais complexas, que não se enquadram nas técnicas resolutivas usuais.

Toda a nossa base teórica encontra respaldo nas obras das coleções do ProfMat (CARVALHO; MORGADO, 2013), somadas a contribuições valiosas apresentadas por (IEZZI; HAZZAN, 2006) e (HUNTER, 2011). Muitas das questões abordadas foram extraídas dessas fontes ou foram inspiradas por elas. Vale destacar também a presença de questões particularmente interessantes provenientes do banco de questões da OBMEP[1]. Essas referências não apenas enriquecem, mas também complementam nosso conhecimento, proporcionando uma perspectiva mais abrangente sobre as sequências e recorrências lineares.

2.1 Sequências Numéricas

Nesta seção, introduziremos a definição formal de sequência numérica, seguida de exemplos ilustrativos.

De forma simples, uma sequência numérica é uma lista ordenada de números, onde cada elemento é chamado de termo da sequência. Cada termo ocupa uma posição específica na lista, e ao alterar a ordem dos elementos, obtém-se uma sequência distinta. É importante destacar que as sequências numéricas podem ser finitas ou infinitas e podem ou não possuir uma lei de formação definida.

Definição 1: Uma sequência numérica é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n um número real $x(n)$, denominado n-ésimo termo da sequência, denotado por x_n.

É importante ter clareza do significado de cada letra na definição formal de sequência quando interpretada como lista ordenada de números. Para tal, salientamos que $n \in \mathbb{N}$ descreve a posição do número $x_n \in \mathbb{R}$ na lista. A sequência pode ser representada de diferentes formas: $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou simplesmente (x_n).

Exemplo 2.1: A sequência definida por $x_n = 2n$ possui o primeiro termo $x_1 = 2 \cdot 1 = 2$, o segundo termo $x_2 = 2 \cdot 2 = 4$, e assim por diante. Esta sequência corresponde à lista ordenada

[1] <https://www.obmep.org.br/banco.htm>

dos números pares:

$$(2, 4, 6, 8, \dots)$$

Esse exemplo demonstra como, a partir de uma expressão formal, podemos determinar uma sequência numérica específica. Isso nos leva às seguintes perguntas:

1. Toda lista ordenada pode ser gerada a partir de uma expressão formal?
2. É possível determinar a expressão formal de uma sequência conhecendo uma quantidade suficientemente grande de seus termos?

Antes de responder a essas questões, vamos analisar alguns exemplos:

Exemplo 2.2: A sequência

$$(2,6,10,14,18,22, \dots)$$

pode ser gerada pela lei de formação dada por

$$x_n = 2 + 4n.$$

Exemplo 2.3: A sequência dos números ímpares

$$(1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots)$$

pode ser gerada pela lei de formação dada por

$$x_n = 2n - 1.$$

Exemplo 2.4: A sequência dos números primos

$$(2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots)$$

Com isso, podemos concluir que nem toda lista ordenada possui uma lei explícita de formação, como observado no exemplo 2.4. A sequência dos números primos, por exemplo, está intimamente ligada a um dos célebres 'sete problemas do milênio'. O Instituto Clay de Matemática oferece um prêmio de um milhão de dólares para quem resolver esse enigma, ou seja, para quem encontrar uma 'fórmula' que descreva de maneira precisa o comportamento desses números. Segundo o Instituto Clay (Clay Mathematics Institute, 2000), os sete problemas do milênio representam desafios matemáticos ainda em aberto, com exceção da Conjectura de Poincaré, que foi resolvida por Grigori Perelman entre 2002 e 2003, tendo sua prova verificada e confirmada pela comunidade matemática em 2006.

2.2 Relações de Recorrências

Nesta seção, apresentaremos formalmente a definição das relações de recorrência, detalhando suas principais características e propriedades. Além disso, serão discutidos exemplos ilustrativos que demonstram a aplicação dessas relações em diferentes contextos, permitindo uma compreensão mais profunda de sua utilidade na modelagem de problemas.

De acordo com (CARVALHO; MORGADO, 2013), podemos definir uma relação de recorrência da seguinte forma:

Definição 2: Uma relação de recorrência é uma regra que define cada termo de uma sequência a partir dos termos anteriores. Em outras palavras, ela expressa como cada novo termo pode ser calculado como uma função dos termos já conhecidos da sequência.

O nome, relação de recorrência, manifesta a necessidade de recorrer a termos anteriores.

Exemplo 2.5: Números de *Primos* Menores que n

$$(0, 0, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4)$$

Note que, para determinar o número de primos menores que n, é suficiente saber se $n-1$ é primo e quantos primos menores que $n-1$ existem. Por outro lado, o fato de ainda não termos um entendimento completo sobre a distribuição dos números primos nos permite concluir que não existe uma relação de recorrência explícita e algébrica que descreva essa sequência.

Exemplo 2.6: Sequência de *Fibonacci*

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots)$$

Note que, a partir do terceiro termo, todos os termos apresentados são dados pela soma dos dois anteriores. Isso nos induz a concluir que os termos dessa sequência obedecem à seguinte relação:

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \quad \text{com} \quad x_1 = 1 \text{ e } x_2 = 1.$$

Exemplo 2.7: Desconto Percentual e Preço com Desconto
Supondo que fizemos uma compra parcelada em n pagamentos de valor fixo x a uma taxa p de juros compostos, a sequência $(x_1, \dots, x_n)$ de valores atualizados, mês a mês, de cada parcela obedece à relação:

$$x_n = \frac{x_{n-1}}{1-p}.$$

Se $x = 900$ e desejarmos antecipar o pagamento da segunda parcela, obtendo o desconto dos juros, ou estender o prazo de quitação, os valores a serem pagos, considerando a taxa $p = 10\%$, serão:

$$(729, 810, 900, 1000, \dots).$$

Caso a taxa p não seja fornecida, mas apenas os termos da sequência, podemos calculá-la como segue:

$$p = 1 - \frac{x_{n-1}}{x_n},$$

ou, equivalentemente,

$$p = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n}.$$

Basta observar a diferença entre os valores consecutivos x_n e x_{n-1} e dividir pelo valor atualizado x_n para determinar a taxa de juros compostos.

Exemplo 2.8: Modelo de Crescimento Populacional Simples

$P_n = (1+r) \cdot P_{n-1}$, com P_0 sendo o quantitativo inicial da população e r a taxa de crescimento.

Se $P_0 = 100$ e $r = 0{,}05$ (5% de crescimento), a sequência gerada será:

$$(100, 105, 110{,}25, 115{,}76, 121{,}55, \dots)$$

Observação: A equação de recorrência sozinha não define uma sequência numérica, sendo necessário um ponto de partida. Por exemplo, na **Sequência de Fibonacci**, além da fórmula de recorrência

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \quad \text{para } n \geq 2,$$

é necessário definir os valores iniciais $x_1 = 1$ e $x_2 = 1$.

2.2.1 Sequências Numéricas Definidas Recursivamente

Sequências numéricas definidas recursivamente são aquelas em que cada termo é determinado a partir de uma igualdade que o relaciona com um ou mais termos anteriores, denominada equação de recorrência. No decorrer do texto, usaremos as expressões "lei de formação", "equação de recorrência"e "fórmula de recorrência"como sinônimos, exceto em casos específicos que exigem distinção.

Por exemplo, são sequências definida recursivamente as descritas nos exemplos 2.6, 2.7 e 2.8.

Por conveniência adotaremos como notação geral para uma relação de recorrência a seguinte forma:

$$x_n = f(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-k})$$

onde:

1. x_n é o termo n-ésimo na sequência;

2. f é uma função que define como o termo x_n depende dos termos anteriores $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_{n-k}$;

3. k é o número de termos anteriores que influenciam o termo x_n.

Sequências definidas por recorrência são amplamente utilizadas na matemática e em áreas afins para modelar padrões naturais, algoritmos iterativos e processos dinâmicos que dependem dos estados anteriores para determinar o próximo estado. Essa abordagem é fundamental para compreender e prever o comportamento de sistemas que evoluem ao longo do tempo de acordo com regras estabelecidas. Dentre os exemplos mais presentes em diversos contextos matemáticos e científicos, destacam-se as renomadas sequências de Fibonacci, as progressões aritméticas e as progressões geométricas. Estas duas últimas, que definiremos a seguir, além de modelarem uma ampla variedade de processos e fenômenos, também são de grande utilidade no estudo das "recorrências lineares de primeira ordem", as quais constituem o objeto de estudo da Seção 2.4 deste texto.

Definição 3: Uma Progressão Aritmética (P.A.) é uma sequência de números em que a diferença entre dois termos consecutivos é sempre constante, chamada de razão (r) da P.A.

A definição recursiva de uma progressão aritmética (P.A.) é dada por:

$$\begin{aligned} x_1 &= a \\ x_{n+1} &= x_n + r, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 1 \end{aligned}$$

Onde:

1. x_1 é o primeiro termo da sequência.

2. r é a razão da P.A., que é a constante somada a cada termo para obter o próximo termo.

Ou seja, para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} - x_n = r$. Em outras palavras, uma P.A. é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é a soma do termo imediatamente anterior com uma constante r dada. Neste caso, se dois termos forem iguais, digamos $x_k = x_{k+p}$, então é possível provar que a razão é nula e, portanto, todos os termos serão iguais. De fato, temos que:

$$\begin{aligned} x_{k+p} - x_{k+p-1} &= r, \\ x_{k+p-1} - x_{k+p-2} &= r, \\ &\vdots \\ x_{k+1} - x_k &= r. \end{aligned}$$

Somando membro a membro, obtém-se $x_{k+p} - x_k = pr$. Logo, $pr = 0$, donde $r = 0$.

Exemplo 2.9: Progressão aritmética de razão 3

$$x_{n+1} = x_n + 3$$

A seguinte questão, adaptada do livro do Professor Elon Lages Lima (LIMA; AL., 2000), exemplifica de forma clara uma aplicação de progressão aritmética.

Exemplo 2.10 O preço de um carro novo é de R140.000,00 e diminui de R 1.000,00 a cada ano de uso. Qual será o preço com 4 anos de uso?

Vamos resolver recursivamente o problema para determinar o preço do carro após 4 anos de uso, onde o preço inicial do carro é de R$ 140.000,00 e diminui R$ 1.000,00 a cada ano.

O preço do carro após 4 anos de uso é dado recursivamente por:

$$\begin{aligned} P_1 &= 140000 \quad \text{(preço inicial)} \\ P_{n+1} &= P_n - 1000 \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 1 \end{aligned}$$

Calculando:

$$\begin{aligned} P_2 &= P_1 - 1000 = 140000 - 1000 = 139000 \\ P_3 &= P_2 - 1000 = 139000 - 1000 = 138000 \\ P_4 &= P_3 - 1000 = 138000 - 1000 = 137000 \\ P_5 &= P_4 - 1000 = 138000 - 1000 = 136000 \end{aligned}$$

Portanto, o preço do carro após 4 anos de uso é de R 137.000,00.

Definição 4: Uma Progressão Geométrica (P.G.) é uma sequência de números em que cada termo é obtido multiplicando o termo anterior por uma constante fixa, chamada razão. A definição recursiva de uma Progressão Geométrica é dada por:

$$\begin{aligned} x_1 &= b \\ x_{n+1} &= q \cdot x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 1 \end{aligned}$$

Onde:

1. x_1 é o primeiro termo da sequência.
2. q é a razão da P.G., que é a constante pela qual cada termo é multiplicado para obter o próximo termo.

Exemplo 2.11: Progressão geométrica de razão 3

$$x_{n+1} = 3x_n$$

Nesse exemplo, se o primeiro termo x_1 é 2 e a razão q é 3, então os termos da P.G. serão:

$$(2, 6, 18, 54, \ldots)$$

Outra questão relevante pode ser destacada no livro do Professor Elon Lages Lima, onde são abordados tópicos significativos relacionados à geometria métrica espacial e à porcentagem (LIMA; AL., 2000).

Exemplo 2.12: Aumentando de 20% o raio da base de um cilindro de base circular e diminuindo de 30% sua altura, de quanto variará seu volume?

Para resolver a questão de como varia o volume de um cilindro de base circular quando o raio da base é aumentado em 20% e a altura é diminuída em 30%, vamos usar a fórmula do volume do cilindro e aplicar as mudanças percentuais. A fórmula do volume de um cilindro é $V = \pi r^2 h$, onde r é o raio da base e h é a altura.

Passo 1: fórmulas iniciais

Vamos definir as variáveis iniciais:

- r_0: raio inicial
- h_0: altura inicial
- V_0: volume inicial

O volume inicial é dado por:

$$V_0 = \pi r_0^2 h_0$$

Passo 2: aplicação das variações percentuais

Vamos aplicar as variações percentuais ao raio e à altura:

- Novo raio r_1 aumentado em 20%:

$$r_1 = r_0 + 0{,}2r_0 = 1{,}2r_0$$

- Nova altura h_1 diminuída em 30%:

$$h_1 = h_0 - 0{,}3h_0 = 0{,}7h_0$$

Passo 3: novo volume do cilindro

O novo volume do cilindro V_1 é dado por:

$$V_1 = \pi r_1^2 h_1$$

Substituindo r_1 e h_1 na fórmula do volume:

$$V_1 = \pi(1{,}2r_0)^2(0{,}7h_0)$$

$$V_1 = \pi(1{,}44r_0^2)(0{,}7h_0)$$

$$V_1 = \pi(1{,}44 \cdot 0{,}7)r_0^2h_0$$

$$V_1 = \pi(1{,}008)r_0^2h_0$$

Passo 4: variação do volume

A variação do volume é a razão entre o novo volume e o volume inicial:

$$\frac{V_1}{V_0} = \frac{\pi(1{,}008)r_0^2h_0}{\pi r_0^2h_0}$$

$$\frac{V_1}{V_0} = 1{,}008$$

Donde $V_1 - V_0 = 0{,}008V_0$, ou seja, o volume aumenta em 0,8%.

2.3 Solução Geral de uma Recorrência

Nesta seção, definiremos a solução geral de uma relação de recorrência e daremos dois exemplos.

Quando se tem uma relação de recorrência, um desafio importante é encontrar uma fórmula fechada para o termo geral da sequência. Em outras palavras, busca-se uma expressão que permita calcular qualquer termo da sequência diretamente, sem a necessidade de utilizar os termos anteriores.

De acordo com (CARVALHO; MORGADO, 2013), podemos definir a solução geral para uma relação de recorrência da seguinte forma:

Definição 5: A solução geral de uma recorrência é uma igualdade (ou fórmula fechada) que descreve x_n em função de n e da(s) condição(ões) inicial(is).

Dessa maneira, a fórmula fechada permite calcular qualquer termo da sequência diretamente, sem a necessidade de recorrer aos termos anteriores. Enquanto que a fórmula recursiva descreve a lei de formação de maneira iterativa, fornecendo uma regra para calcular cada termo com base nos termos anteriores. Embora as fórmulas recursivas sejam práticas para calcular termos consecutivos, elas podem ser ineficientes para termos distantes.

Por exemplo, considerando a sequência (x_n) definida de forma recursiva por

$$x_{n+1} = 2x_n + 4, \quad \text{com} \quad x_1 = 0,$$

pode ser verificado que seus termos serão

$$(0, 4, 12, 28, 60, \ldots).$$

Mas qual seria o valor de x_{100}?

Já no caso da sequência (x_n) definida pela forma fechada:

$$x_n = 19n^2 - n + (-1)^n,$$

pode ser verificado que os seus termos serão

$$(17, 75, 167, 301, \ldots)$$

e que

$$x_{100} = 19 \cdot 100^2 - 100 + (-1)^{100} = 190.000 - 100 + 1 = 189.901.$$

Na próxima seção, exploraremos de forma sistemática o processo de encontrar soluções para as recorrências lineares de primeira ordem.

2.4 Recorrência Linear de Primeira Ordem

Na seção anterior, abordamos as relações de recorrência, discutindo tanto suas formas recursiva quanto fechada. Neste trabalho, focaremos exclusivamente nas recorrências lineares; as recorrências não lineares são conhecidas, mas não serão abordadas.

Esta seção é dedicada à determinação das soluções das recorrências lineares de primeira ordem.

Definição 6: Dizemos que uma recorrência é linear de primeira ordem se ela for definida por:

$$x_{n+1} = f(n)x_n + g(n)$$

onde $f(n)$ e $g(n)$ são funções reais definidas nos números naturais. Se $g(n) = 0$, dizemos que a recorrência é homogênea, caso contrário, ela é não-homogênea.

Segue das definições que toda P.A. é uma recorrência linear de primeira ordem e que toda P.G. é uma recorrência linear de primeira ordem homogênea. A seguir, listamos outros exemplos de recorrências lineares de primeira ordem.

Exemplo 2.13: $x_{n+1} = nx_n$ (linear de primeira ordem homogênea)

Exemplo 2.14: $x_{n+1} = 2x_n - 5$ (linear de primeira ordem não-homogênea)

Exemplo 2.15: Dada a recorrência $x_{n+1} = nx_n$ com $x_1 = 1$, vamos resolver essa equação, isto é, obter sua forma fechada ou explicita.

Vamos começar escrevendo as relações até o n-ésimo caso:

$$x_2 = 1 \cdot x_1$$
$$x_3 = 2 \cdot x_2$$
$$x_4 = 3 \cdot x_3$$
$$\vdots$$
$$x_n = (n-1) \cdot x_{n-1}$$

Daí, multiplicando membro a membro as igualdades acima, obtem-se:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n = 1 \cdot x_1 \cdot 2 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot x_{n-1}$$

É importante destacar que essa multiplicação só é possível porque nenhum dos termos é nulo.

Organizando, temos

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot \ldots \cdot x_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1}$$

Dessa forma, chegamos a

$$x_n = (n-1)! \cdot x_1$$

E como $x_1 = 1$, logo

$$x_n = (n-1)!$$

Esta é a forma fechada para a recorrência $x_{n+1} = n \cdot x_n$ com $x_1 = 1$. Ou seja, dizemos que $x_n = (n-1)!$ é uma solução para a recorrência dada.

O fatorial de um número inteiro positivo n, denotado por "n!", é o produto de todos os números inteiros positivos de 1 até n. Por exemplo, o fatorial de 5 é $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Exemplo 2.16: Dada a sequência (2, 6, 10, 14, ...) iremos achar sua equação de recorrência e em seguida sua forma fechada. Observe que o termo inicial é igual a dois e cada termo posterior é obtido somando-se sempre quatro. Logo podemos escrever

$$x_{n+1} = x_n + 4 \quad \text{com} \quad x_1 = 2$$

O que fizemos foi modelar a sequência de forma recursiva. Agora vamos resolvê-la.

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + 4 \\ x_3 &= x_2 + 4 \\ x_4 &= x_3 + 4 \\ &\vdots \\ x_n &= x_{n-1} + 4 \end{aligned}$$

Daí, somando membro a membro as igualdades acima, chegamos a:

$$x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_n = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + 4 + 4 + 4 + \ldots + 4$$

Como cada termo de x_2 a x_{n-1} aparece em cada lado da igualdade, podemos somar e subtrair de forma a anular cada termo, ou seja, cancelamos os termos iguais. Além disso, temos $(n-1)$ termos de 4. Logo,

$$x_n = x_1 + (n-1) \cdot 4$$

Como $x_1 = 2$, então

$$x_n = 2 + (n-1) \cdot 4, \quad \text{com} \quad n \geq 1.$$

Esta é a fórmula fechada que expressa o n-ésimo termo x_n desta progressão aritmética em função do primeiro termo x_1 e da razão r. Agora podemos facilmente determinar qualquer termo da P.A. sem a necessidade de conhecer os termos anteriores. Por exemplo, o cálculo do 150º termo pode ser feito da seguinte maneira: $x_{150} = 2 + (150-1) \cdot 4 = 2 + 149 \cdot 4 = 2 + 596 = 598$. Portanto, o 150º termo é igual a 598.

De modo geral, podemos determinar o termo geral de uma **progressão aritmética (P.A.)** definida recursivamente, aplicando a mesmas estratégia usada no **exemplo 2.16**.

Seja $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ uma sequência que representa uma P.A. de razão r. A relação entre os termos consecutivos pode ser expressa pela equação de recorrência:

$$x_{n+1} = x_n + r$$

Sabemos que:

$$x_2 = x_1 + r$$

$$x_3 = x_2 + r$$

$$x_4 = x_3 + r$$

$$\vdots$$

$$x_n = x_{n-1} + r$$

Generalizando, para o n-ésimo termo, temos:

$$x_n = x_1 + (n-1) \cdot r.$$

Essa é a **fórmula fechada** que permite calcular diretamente qualquer termo da P.A., sem a necessidade de conhecer os anteriores.

Seguindo a mesma estratégia deste exemplo, podemos provar a seguinte proposição:

Proposição 1: Uma solução para a recorrência

$$x_{n+1} = x_n + g(n)$$

é dada por

$$x_n = x_1 + g(1) + g(2) + \cdots + g(n-1).$$

Demonstração:

Se $x_{n+1} = x_n + g(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então:

$$x_2 = x_1 + g(1)$$

$$x_3 = x_2 + g(2)$$

$$\vdots$$

$$x_{n+1} = x_{n-1} + g(n-2)$$

$$x_n = x_{n-1} + g(n-1)$$

Somando membro a membro as igualdades acima, obtemos:

$$x_2 + x_3 + \cdots + x_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + g(1) + \cdots + g(n-1)$$

Donde:

$$x_n = x_1 + g(1) + \cdots + g(n-1)$$

Exemplo 2.17: Soma dos ângulos internos de um polígono convexo

Começamos com o caso mais simples, que é um triângulo. Um triângulo tem três lados e três ângulos internos, portanto denotaremos por S_3.

$$S_3 = 180^\circ$$

Para um polígono de n lados, então S_n é a soma dos seus ângulos internos. Se o polígono convexo tem $n + 1$, então a soma dos seus ângulos internos é:

$$S_{n+1} = S_n + 180^\circ$$

Vamos achar a solução fechada, então escrevemos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
S_3 &= 180^\circ\\
S_4 &= S_3 + 180^\circ\\
S_5 &= S_4 + 180^\circ\\
S_6 &= S_5 + 180^\circ\\
&\vdots\\
S_{n-1} &= S_{n-2} + 180^\circ\\
S_n &= S_{n-1} + 180^\circ
\end{aligned}$$

Somando ambos os lados da equação, chegamos a:

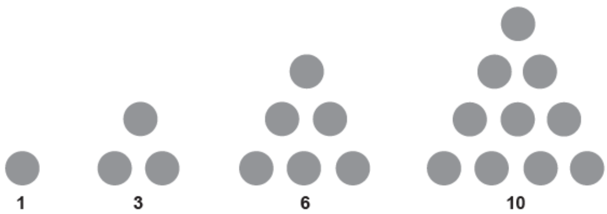
$$S_3 + S_4 + S_5 + S_6 + \ldots + S_n = S_3 + S_4 + S_5 + S_6 + \ldots + S_{n-1} + 180^\circ + 180^\circ + \ldots + 180^\circ$$

Como temos $n - 2$ termos de 180°, logo chegamos na seguinte solução fechada:

$$S_n = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

Exemplo 2.18: Problema adaptado da Obmep - sequência de bolinhas

Figura 1 – Sequência de bolinhas



Fonte: Banco de questões OBMEP

Lúcia notou que cada número da sequência

$$(1, 3, 6, 10, \ldots)$$

pode ser modelado por meio de um conjunto de bolinhas que, dispostas convenientemente, formam um triângulo, conforme ilustra a figura 1.

Seguindo o mesmo padrão, quantas bolinhas terá o triângulo associado ao décimo termo dessa sequência numérica?

Vamos modelar o problema recursivamente e em seguida achar a solução fechada.
Note que podemos escrever seus termos como:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 3 \\ x_3 &= 6 \\ x_4 &= 10 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Note que a sequência é dada pela quantidade anterior e o número da posição atual, logo:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, \\ x_2 &= x_1 + 2, \\ x_3 &= x_2 + 3, \\ x_4 &= x_3 + 4, \\ &\vdots \\ x_n &= x_{n-1} + n. \end{aligned}$$

O que fizemos foi modelar o problema de forma recursiva. Agora, a Proposição 1 garante a seguinte solução:

$$x_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n.$$

Isto é, a solução corresponde à soma de todos os números naturais de 1 até n. No caso específico em questão, como $n = 10$, a soma resulta em 55 bolinhas.

Para o caso geral, ou seja, a soma de 1 até n, apresentaremos a solução no exemplo seguinte.

Exemplo 2.19: Soma dos n primeiros números naturais
Considere a sequência $(1, 2, 3, 4, 5, ..., n)$, portanto uma sequência finita de números naturais em

que o primeiro termo é 1 e o n-ésimo termo é n. Vamos achar a forma fechada para soma de 1 até n (a soma dos n primeiros termos de uma P.A. de razão 1), isto é, $1 + 2 + 3 + ... + n$.

Vamos dar o resultado para $1 + 2 + 3 + ... + n$ sem ir somando termo a termo, o que seria muito cansativo e nada produtivo.

Chamamos de S_n o resultado da soma. Podemos escrever S_n de duas maneiras.

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

$$S_n = n + (n - 1) + (n - 2) + \cdots + 1$$

Se somarmos essas duas expressões, obtemos:

$$2S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n + n + (n - 1) + (n - 2) + \cdots + 1$$

logo,

$$2S_n = (1 + n) + (2 + (n - 1)) + (3 + (n - 2)) + \cdots + ((n - 1) + 2) + (n + 1)$$

Podemos reorganizar os termos desta expressão, obtendo:

$$2S_n = (1 + n) + (2 + (n - 1)) + (3 + (n - 2)) + \cdots + ((n - 1) + 2) + (n + 1)$$

Como há n termos iguais a $(1 + n)$ nesta expressão, logo,

$$2S_n = n(n + 1)$$

dividindo ambos os lados por 2, obtemos:

$$S_n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

Esta é a fórmula para a soma dos n primeiros números naturais. Podemos usá-la para calcular a soma de qualquer sequência de números naturais.

> O resultado mencionado é atribuído ao matemático alemão Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855). Acredita-se que o problema tenha sido proposto por seu professor quando Gauss tinha apenas 10 anos de idade. O desafio consistia em calcular a soma de todos os números naturais de 1 a 100. Utilizando o método descrito anteriormente, Gauss prontamente encontrou a resposta, que é 5050. Sua habilidade em resolver o problema com eficiência e precisão demonstrou seu notável talento matemático desde uma idade tão jovem.

Exemplo 2.20: Soma dos n termos de uma P.A. de razão r

Dada uma progressão aritmética (P.A.) de razão r, temos os termos:

$$x_2 = x_1 + r, \quad x_3 = x_1 + 2r, \quad x_4 = x_1 + 3r, \quad \dots, \quad x_n = x_1 + (n-1)r.$$

A soma dos primeiros n termos da P.A., denotada por S_n, pode ser expressa como:

$$S_n = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n.$$

Pela **Proposição 1**, obtemos a seguinte igualdade:

$$S_{n+1} = x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1} = S_n + x_{n+1}.$$

Além disso, podemos expressar S_n em termos do primeiro termo x_1 e da razão r:

$$S_n = S_1 + (x_1 + r) + (x_1 + 2r) + \cdots + \big(x_1 + (n-1)r\big).$$

Simplificando, temos:

$$S_n = S_1 + (n-1)x_1 + \frac{(n-1)n}{2}r.$$

Finalmente, como $S_1 = x_1$, a expressão se reduz a:

$$S_n = nx_1 + \frac{(n-1)n}{2}r.$$

Outra forma de expressar esta soma é:

$$S_n = \frac{n[2x_1 + (n-1)r]}{2} = \frac{n(x_1 + x_n)}{2}.$$

Exemplo 2.21: Termo geral de uma P.G.
Vamos achar o termo geral da P.G. aplicando a mesma estratégia adotada no exemplo 15..

$$\begin{aligned} x_2 &= qx_1 \\ x_3 &= qx_2 \\ x_4 &= qx_3 \\ &\vdots \\ x_n &= qx_{n-1} \end{aligned}$$

logo,

$$x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot \ldots \cdot x_n = q \cdot q \cdot q \cdot \ldots \cdot q \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1}$$

Portanto,

$$x_n = x_1 \cdot q^{(n-1)}$$

Exemplo 2.22: Dada a sequência $(1, 2, 4, 8, 16, 32, ...)$, vamos achar a equação de recorrência e em seguida sua forma fechada.

Note que o primeiro termo é dado por $x_1 = 1$. Além disso, a razão entre dois termos consecutivos é:

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = 2,$$

o que nos permite escrever a relação recursiva:

$$x_n = 2x_{n-1}.$$

O termo geral dessa P.G. pode ser expresso pela fórmula:

$$x_n = x_1 \cdot q^{n-1},$$

Substituindo os valores dados $x_1 = 1$ e $q = 2$, obtemos:

$$x_n = 2^{n-1}.$$

Exemplo 2.23: Soma dos n termos de uma P.G. finita

Consideremos uma progressão geométrica (P.G.) (x_n) de razão q e definamos

$$S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

Então,

$$S_{n+1} = S_n + x_{n+1} = S_n + x_1 q^n.$$

Logo, pela **Proposição 1**, temos que

$$\begin{aligned} S_n &= S_1 + \left[x_1 q + x_1 q^2 + \cdots + x_1 q^{n-1}\right] \\ &= x_1 + x_1 \left[q + q^2 + \cdots + q^{n-1}\right] \\ &= x_1 \left[1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}\right] \\ &= x_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}. \end{aligned}$$

Exemplo 2.24: Recorrência linear de primeira ordem não-homogênea

Considere a recorrência $x_{n+1} = 2x_n - 5$.

Note que a recorrência é não-homogênea e tem uma constante diferente de 1 multiplicando o termo x_n.

$$
\begin{aligned}
x_2 &= 2x_1 - 5 \\
x_3 &= 2x_2 - 5 \\
x_4 &= 2x_3 - 5 \\
&\vdots \\
x_{n-2} &= 2x_{n-3} - 5 \\
x_{n-1} &= 2x_{n-2} - 5 \\
x_n &= 2x_{n-1} - 5
\end{aligned}
$$

Aqui há um desafio adicional: além de termos uma constante multiplicando os termos $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$, também temos a soma de $(n-1)$ termos iguais a 5. No entanto, podemos resolver isso com uma abordagem cuidadosa.

Para simplificar o processo, multiplicamos por 2 o termo x_{n-1} do lado esquerdo da igualdade. Isso nos permite cancelar o termo x_{n-1} do lado direito, enquanto o termo $2x_{n-2}$ se transforma em $2 \cdot 2x_{n-2}$ ou $2^2 x_{n-2}$. Procedemos de baixo para cima, garantindo que cancelamos os termos de ambos os lados da equação até que reste apenas x_n no lado esquerdo. É importante notar que não há prejuízo em realizar essas operações, pois cada lado da igualdade é multiplicado por um valor não nulo constante. Dessa maneira, chegamos a:

$$
\begin{aligned}
2^{n-2}x_2 &= 2^{n-1}x_1 - 2^{n-2} \cdot 5 \\
2^{n-3}x_3 &= 2^{n-2}x_2 - 2^{n-3} \cdot 5 \\
&\vdots \\
2^2 x_{n-2} &= 2^3 x_{n-3} - 2^2 \cdot 5 \\
2x_{n-1} &= 2^2 x_{n-2} - 2 \cdot 5 \\
x_n &= 2x_{n-1} - 5
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
x_n &= 2^{n-1}x_1 - 2^{n-2} \cdot 5 - 2^{n-3} \cdot 5 - \ldots - 2^2 \cdot 5 - 2 \cdot 5 - 5 \\
&= 2^{n-1}x_1 - (2^{n-2} \cdot 5 + 2^{n-3} \cdot 5 + \ldots + 2^2 \cdot 5 + 2 \cdot 5 + 5) \\
&= 2^{n-1}x_1 - 5 \cdot (2^{n-2} + 2^{n-3} + \ldots + 2^2 + 2 + 1)
\end{aligned}
$$

Colocamos o 5 em evidência e notamos que a soma dentro dos parênteses é uma progressão geométrica. Aplicamos a fórmula da soma de uma P.G finita. Como o primeiro termo é 1, a razão é 2 e o número de termos é $(n-1)$, temos:

$$\begin{aligned} x_n &= 2^{n-1}x_1 - 5 \cdot \left(\frac{2^{n-1}-1}{2-1}\right) \\ &= 2^{n-1}x_1 - 5 \cdot (2^{n-1}-1) \\ &= 2^{n-1}x_1 - 5 \cdot 2^{n-1} + 5 \\ &= 2^{n-1}x_1 - 2^n + 5 \end{aligned}$$

Note que o termo x_1 não foi dado, mas pode ser escolhido livremente para definir a sequência.

A seguir, demonstraremos um teorema que permite reduzir ou transformar uma recorrência linear de primeira ordem não homogênea para a forma $x_{n+1} = x_n + f(n)$.

De acordo com (CARVALHO; MORGADO, 2013), temos o seguinte teorema:

Teorema 1: Se a_n é uma solução não-nula da recorrência $x_{n+1} = f(n)x_n$, então a substituição $x_n = a_n y_n$ transforma a recorrência $x_{n+1} = f(n)x_n + g(n)$ em

$$y_{n+1} = y_n + \frac{g(n)}{f(n)a_n}$$

Demonstração:

A substituição $x_n = a_n y_n$ transforma a equação

$$x_{n+1} = f(n)x_n + g(n)$$

em

$$a_{n+1}y_{n+1} = f(n)a_n y_n + g(n).$$

Como a_n é uma solução não-nula da equação homogênea associada, isto é,

$$a_{n+1} = f(n)a_n,$$

podemos reescrever a equação como

$$f(n)a_n y_{n+1} = f(n)a_n y_n + g(n).$$

Dividindo ambos os lados por $f(n)a_n$ (supondo $f(n)a_n \neq 0$), obtemos

$$y_{n+1} = y_n + \frac{g(n)}{f(n)a_n}.$$

O teorema fornece uma solução particular para a recorrência, desconsiderando inicialmente a parte não homogênea. Em seguida, estabelece uma relação entre essa solução particular e a solução geral da recorrência completa. No entanto, o teorema não garante a existência de uma solução para a parte homogênea. Caso ela exista, podemos utilizar essa abordagem para simplificar o cálculo da solução geral.

Solução para a Recorrência $x_{n+1} = f(n)x_n$

Encontrar uma solução explícita para uma recorrência da forma $x_{n+1} = f(n)x_n$ nem sempre é viável, pois isso depende da forma da função $f(n)$ e da estrutura da equação. O **Teorema 1** oferece um método para abordar recorrências não-homogêneas do tipo $x_{n+1} = f(n)x_n + g(n)$, usando a substituição $x_n = a_n y_n$ para transformar a equação original em uma forma mais simples. Contudo, a aplicabilidade desse método depende de certas condições, e nem sempre é possível encontrar uma solução explícita.

$$\text{Se } x_{n+1} = f(n)x_n \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}, \text{ então}$$
$$\begin{aligned} x_2 &= f(1)x_1, \\ x_3 &= f(2)x_2, \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= f(n-2)x_{n-2}, \\ x_n &= f(n-1)x_{n-1}. \end{aligned}$$

Tomando a multiplicação dos termos em ambos os membros, temos:

$$x_2 x_3 \cdots x_n = x_1 f(1) x_1 f(2) x_2 \cdots f(n-1) x_{n-1}.$$

Donde:

$$x_n = x_1 f(1) f(2) \cdots f(n-1).$$

Em particular, se $f(n) = q$, então:

$$x_n = x_1 q^{n-1}.$$

Exemplo 2.25: Achar a solução para a recorrência $x_{n+1} = 5x_n - 1$, com $x_1 = 3$.

Observe que sem a aplicação do **Teorema 1** teríamos algumas dificuldades. Vamos achar a solução a_n para $x_{n+1} = 5x_n$.

Segue do **Exemplo 2.21** que $x_n = 5^{n-1}$ é uma solução.

Substituindo $x_n = 5^{n-1}y_n$, segue do Teorema 1 que:

$$y_{n+1} = y_n - 5^{-n}.$$

Agora, pela Proposição 1, temos que

$$y_n = y_1 - \left(5^{-1} + 5^{-2} + 5^{-3} + \cdots + 5^{-(n-1)}\right).$$

Como temos a soma dos termos de uma progressão geométrica finita, podemos usar a fórmula para a soma de uma P.G. finita. A soma da progressão geométrica S_n é dada por:

$$S_n = \frac{x_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}.$$

onde $x_1 = 5^{-1}$ e $q = 5^{-1}$.

Assim, a soma dos termos da progressão geométrica até o $(n-1)$-ésimo termo é:

$$y_n = y_1 - \frac{5^{-1}\left((5^{-1})^{n-1} - 1\right)}{5^{-1} - 1}.$$

Agora, simplificando o denominador $5^{-1} - 1 = -\frac{4}{5}$, obtemos:

$$y_n = y_1 - \frac{5^{-1}\left(\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} - 1\right)}{-\frac{4}{5}}.$$

Multiplicando o numerador e o denominador por -5 para eliminar o denominador negativo:

$$y_n = y_1 + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} - 1}{4}.$$

Portanto, a solução de y_n é dada por:

$$y_n = y_1 + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} - 1}{4}.$$

Como $x_1 = 3$, substituímos na expressão $x_1 = 5^{1-1}y_1$, o que resulta em $y_1 = 3$. Logo,

$$y_n = 3 + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} - 1}{4}.$$

Finalmente, substituímos y_n na expressão de $x_n = 5^{n-1}y_n$, resultando na solução geral para x_n:

$$x_n = 5^{n-1}\left(3 + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} - 1}{4}\right).$$

Exemplo 2.26: Determinar a solução da recorrência $x_{n+1} = 3x_n + 3^n$, com $x_1 = 2$.

Para resolver a recorrência, aplicaremos o **Teorema 1**. Inicialmente, determinamos a solução da parte homogênea, ou seja, $x_{n+1} = 3x_n$.

A solução da parte homogênea é dada por:

$$x_n = 3^{n-1}.$$

Esta solução é característica de uma progressão geométrica de razão 3, conforme apresentado no **Exemplo 2.21**.

Agora, aplicamos a substituição $x_n = 3^{n-1}y_n$ na recorrência original:

$$3^n y_{n+1} = 3^n y_n + 3^n.$$

Dividindo ambos os lados por 3^n, temos:

$$y_{n+1} = y_n + 1.$$

A relação $y_{n+1} = y_n + 1$ descreve uma progressão aritmética de razão 1. A solução geral para y_n é:

$$y_n = y_1 + (n - 1).$$

Sabendo que $x_1 = 2$, substituímos na expressão $x_1 = 3^{1-1}y_1$, o que resulta em $y_1 = 2$. Logo,

$$y_n = 2 + (n - 1) = n + 1.$$

Substituímos y_n na expressão $x_n = 3^{n-1}y_n$ para obter a solução geral:

$$x_n = 3^{n-1}(n + 1).$$

A solução geral da recorrência é:

$$x_n = (n + 1) \cdot 3^{n-1}.$$

Exemplo 2.27: Modelagem de População de Bactérias

Suponha que a população inicial de bactérias seja de 100 indivíduos, e a cada hora, a população dobra devido à alta taxa de reprodução das bactérias.

A recorrência que modela o crescimento da população de bactérias é:

$$b_{n+1} = 2 \cdot b_n$$

com a condição inicial:

$$b_0 = 100$$

Esta recorrência descreve que a cada hora, o número de bactérias é multiplicado por 2, refletindo um crescimento exponencial da população.

Para encontrar a solução fechada, observamos o padrão de crescimento:

$$\begin{aligned}
b_0 &= 100 \\
b_1 &= 2 \cdot b_0 = 2 \cdot 100 = 200 \\
b_2 &= 2 \cdot b_1 = 2 \cdot 200 = 400 \\
b_3 &= 2 \cdot b_2 = 2 \cdot 400 = 800 \\
&\vdots \\
b_n &= 2 \cdot b_{n-1}
\end{aligned}$$

Aplicando as técnicas anteriores, chegamos a:

$$b_n = 100 \cdot 2^n$$

Neste ponto, estabelecemos uma sólida base para avançarmos em direção a aplicações que envolvem sequências numéricas, progressões aritméticas e geométricas, problemas de geometria, matemática financeira e as Recorrências Lineares de Primeira Ordem. No entanto, é importante ressaltar que este é apenas o começo de uma jornada mais abrangente no estudo das recorrências lineares. Existem ainda muitos aspectos a serem explorados e aprofundados nesse campo fascinante da matemática, que continuará a enriquecer nosso entendimento e nossa capacidade de resolver uma variedade de problemas.

No próximo capítulo, exploraremos três aplicações práticas das recorrências lineares de primeira ordem: a Torre de Hanói, com estratégias recursivas para mover discos; a formação de hexágonos regulares com moedas; e o jogo das garrafas coloridas, inspirado no *Water Sort Puzzle*, que organiza líquidos de cores diferentes com o mínimo de movimentos. Este último será proposto como uma atividade lúdica para introduzir ou reforçar o conceito de recorrências.

3 Aplicações

Neste capítulo, discutiremos três aplicações das recorrências lineares de primeira ordem. Na primeira seção, analisaremos o problema da Torre de Hanói, um problema clássico que é frequentemente usado para ilustrar conceitos de recursão. Na segunda seção, consideraremos um problema com moedas que, quando justapostas, formam um hexágono. É um problema muito interessante que também pode ser resolvido usando recorrências lineares de primeira ordem. Finalmente, na terceira seção, analisaremos um problema inspirado em tendências recentes de jogos eletrônicos, que envolve a mistura de cores em garrafas. O objetivo é determinar o número mínimo de movimentos necessários para que cada garrafa contenha apenas uma cor.

3.1 Problema da Torre de Hanói

A lenda da torre de Hanói (SILVA, 2015) conta a história de um templo hindu, localizado no centro do mundo. Nesse templo, havia três hastes de diamante, e em uma delas havia 64 discos de ouro, dispostos em ordem decrescente, do maior para o menor.

Segundo a lenda, o deus Brahma encarregou os monges do templo de transferir os discos para outra haste, seguindo as seguintes regras:

- apenas um disco pode ser movido de cada vez
- um disco maior nunca pode ser colocado sobre um disco menor

Os monges foram informados de que, quando todos os discos fossem transferidos para a haste correta, o templo desmoronaria e o mundo acabaria.

Figura 2 – Torre de Hanói

Fonte: Dados do autor

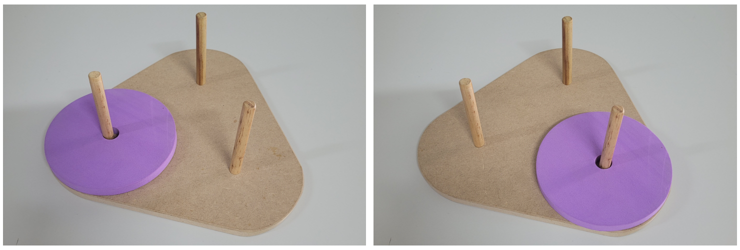
Solução recursiva

Inicialmente observe que não importa em qual haste (torre ou pino) vamos colocar todos os discos. Lembre-se também que nenhum disco menor poderá ficar por baixo de um maior (diâmetro maior), além disso só podemos movimentar um disco por vez e estaremos buscando o número mínimo de movimentos. O que vamos fazer é modelar o problema recursivamente, isto é, achar uma relação de recorrência e em seguida achar sua forma fechada.

Casos Iniciais

1. Com um disco fazemos apenas um movimento, observe:

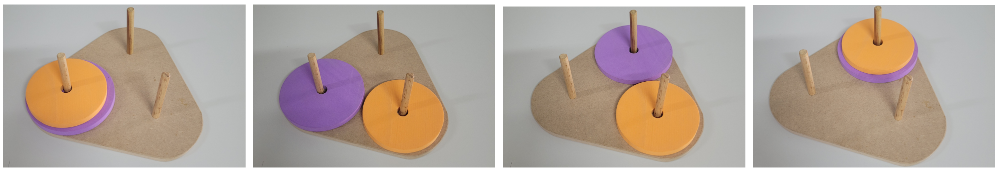
Figura 3 – Movimento com 1 disco



Fonte: Dados do autor

2. Com dois discos fazemos três movimentos, observe:

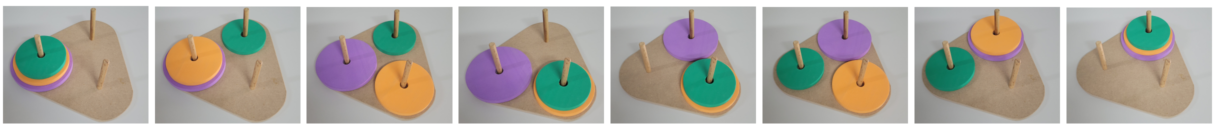
Figura 4 – Movimentos com 2 discos



Fonte: Dados do autor

3. Com três discos fazemos sete movimentos, observe:

Figura 5 – Movimentos com 3 discos



Fonte: Dados do autor

É importante, a partir desse momento, construirmos uma tabela para cada caso.

Tabela 1 – Tabela de movimentos mínimos para casos de 1 a 3 discos

Quantidade de discos (peças)	Quantidade mínimas de movimentos
1	1
2	3
3	7

Fonte: Dados do autor

Vamos agora imaginar o caso em que se tem quatro discos. Observe que com três peças fazemos no mínimo sete movimentos, mas como ainda temos mais um disco falta agora movimentar esse disco para outra haste. Logo que fizermos esse movimentos com o quarto disco ainda precisaremos de mais sete movimentos. Logo o total de movimentos será de 7 + 1 + 7, totalizando quinze movimentos, no mínimo. Preenchendo a tabela 2, temos:

Tabela 2 – Tabela de movimentos mínimos para casos de 1 a 4 discos

Quantidade de discos (peças)	Quantidade mínimas de movimentos
1	1
2	3
3	7
4	15

Fonte: Dados do autor

Agora vamos analisar o caso em que haja cinco discos. Utilizando a ideia de recorrência, perceba que para movimentar quatro discos precisamos de quinze movimentos, pelo menos. Como temos mais um disco, logo vamos precisar de 15 + 1 + 15 movimentos. Portanto, nossa tabela 3 fica assim:

Tabela 3 – Tabela de movimentos mínimos para casos de 1 a 5 discos

Quantidade de discos	Quantidade mínimas de movimentos
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31

Fonte: Dados do autor

Analisando o caso em que temos n discos:
Observe que com $n - 1$ discos fazemos no mínimo x_{n-1} movimentos. Como sobrou um disco ainda precisaremos de mais um movimento e em seguida precisamos movimentar os $n - 1$ discos, que representamos por x_{n-1}.

Modelando o problema, concluímos que para movimentar n discos a equação de recorrência fica:

$$x_n = 2x_{n-1} + 1, \quad \text{com} \quad x_1 = 1.$$

Usando a fórmula recursiva

Vamos fazer os cálculos utilizando a equação de recorrência $x_n = 2x_{n-1} + 1, x_1 = 1$:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 1 \\
x_2 &= 2x_1 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \\
x_3 &= 2x_2 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7 \\
x_4 &= 2x_3 + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15 \\
x_5 &= 2x_4 + 1 = 2 \cdot 15 + 1 = 31 \\
x_6 &= 2x_5 + 1 = 2 \cdot 31 + 1 = 63
\end{aligned}$$

Observe que x_{n-1} representa o termo anterior e também uma quantidade mínima para movimentar $n-1$ discos. Construindo a tabela com a fórmula recursiva, temos:

Tabela 4 – Tabela de movimentos mínimos calculados com a fórmula recursiva

Fórmula recursiva ($x_n = 2x_{n-1} + 1$)	Quantidade mínimas de movimentos
x_1	1
x_2	3
x_3	7
x_4	15
x_5	31
x_6	63

Fonte: Dados do autor

Solução fechada

Agora, aplicando a **Proposição 1** e o **Teorema 1**, podemos transformar a recorrência original $x_{n+1} = 2x_n + 1$ com a substituição $x_n = a_n y_n$, onde $a_n = 2^{n-1}$. Substituímos na fórmula do teorema:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{g(n)}{f(n)a_n}.$$

Nesse caso, $f(n) = 2$, $g(n) = 1$, e $a_n = 2^{n-1}$, então:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2 \cdot 2^{n-1}} = y_n + \frac{1}{2^n}.$$

Pela **Proposição 1**, temos que:

$$y_n = y_1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Essa expressão corresponde à soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica.

Utilizando o resultado do **Exemplo 2.23**, a soma S_n dos n primeiros termos dessa progressão é dada por:

$$S_n = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} - 1 \right)}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Adicionando o termo inicial y_1 à soma S_n, obtemos:

$$y_n = y_1 + S_n = y_1 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Substituindo y_n na expressão para x_n, temos:

$$x_n = a_n y_n = 2^{n-1} \cdot \left(y_1 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right) = 2^{n-1} y_1 + 2^{n-1} - \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}} = 2^{n-1} y_1 + 2^{n-1} - 1.$$

Para determinar o valor de y_1, utilizamos a condição inicial $x_1 = 1$:

$$x_1 = a_1 y_1 = 2^0 \cdot y_1 = 1 \implies y_1 = 1.$$

Substituindo $y_1 = 1$ na expressão para x_n, obtemos:

$$x_n = 2^{n-1} \cdot 1 + 2^{n-1} - 1 = 2^n - 1.$$

Portanto, a solução da recorrência é:

$$x_n = 2^n - 1.$$

Construindo a tabela com a fórmula fechada, obtemos os seguintes resultados:

Tabela 5 – Tabela de movimentos mínimos calculados com a fórmula fechada

Fórmula fechada ($2^n - 1$)	Quantidade mínimas de movimentos
$2^1 - 1$	1
$2^2 - 1$	3
$2^3 - 1$	7
$2^4 - 1$	15
.	.
.	.
.	.
$2^{64} - 1$	18.446.744.073.709.551.615

Fonte: Dados do autor

Jogo On-line da Torre de Hanói

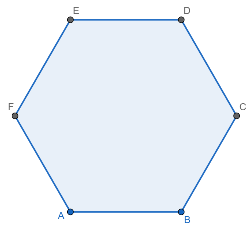
Há uma possibilidade de jogar online a Torre de Hanói através do site *somatematica.com.br*[1]. É uma brincadeira bastante divertida em que qualquer um pode testar na prática tudo que fizemos até agora a respeito da Torre de Hanói.

[1] <https://www.somatematica.com.br/jogos/hanoi/>

3.2 Problema das Moedas em Hexágonos Regulares

Imagine um conjunto de moedas com diâmetros iguais, pode ser moedas de um real, por exemplo. O problema em questão envolve dispor essas moedas em um tabuleiro de maneira a criar hexágonos. A primeira moeda é posicionada no centro do tabuleiro, e as moedas subsequentes são dispostas ao seu redor, configurando assim a geometria de um hexágono. Essa aplicação pode ser encontrada na obra de (HUNTER, 2011).

Figura 6 – Hexágono regular



Fonte: Dados do autor

Um hexágono é uma figura plana composta por seis lados. Quando é regular, todos os seus lados possuem a mesma medida, ou seja, são congruentes. Assim, um hexágono regular é uma figura plana com seis lados de igual comprimento.

Solução recursiva

Observe a figura abaixo:

Figura 7 – Hexágono regular formado por 7 moedas

Fonte: Dados do autor

Nesse caso, temos um hexágono formado por sete moedas e que tem duas moedas em cada lado. Observe a figura 8:

Figura 8 – Hexágono regular formado por 19 moedas

Fonte: Dados do autor

Note que temos agora um hexágono cujo lado tem três moedas e que é formado por dezenove moedas.

É importante, como nos exemplos anteriores, fazermos uma tabela para organizarmos os dados.

Tabela 6 – Tabela da formação do hexágono regular com 19 moedas

Moedas em cada lado	Total de moedas
2	7
3	19

Fonte: Dados do autor

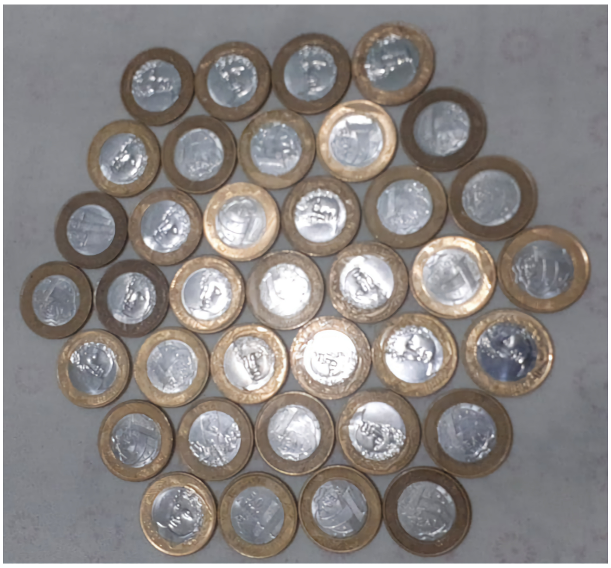
Agora, podemos tentar formar um hexágono regular usando quatro moedas de lado.

Note que usamos trinta e sete moedas.

Preenchendo a tabela, temos:

Podemos, convenientemente, considerar que uma única moeda forma um hexágono. Para construir o próximo hexágono, de lado dois, necessitamos de 7 moedas; já para o hexá-

Figura 9 – Hexágono regular formado por 37 moedas



Fonte: Dados do autor

Tabela 7 – Tabela da formação do hexágono regular com 37 moedas

Moedas em cada lado	Total de moedas
2	7
3	19
4	37
.	.
.	.
.	.

Fonte: Dados do autor

gono de lado três, são requeridas 19 moedas e, por fim, para o hexágono de lado quatro, 37 moedas.

Considerando a sequência:

$$(1, 7, 19, 37, \ldots)$$

Assim, note que a sequência pode ser dada por:

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = x_1 + 6 \cdot 1 = 1 + 6 = 7$$

$$x_3 = x_2 + 6 \cdot 2 = 7 + 12 = 19$$

$$x_4 = x_3 + 6 \cdot 3 = 19 + 18 = 37$$

Dessa forma, podemos escrever a relação de recorrência da forma:

$$x_n = x_{n-1} + 6 \cdot (n-1), \quad \text{com} \quad x_1 = 1. \quad \text{Sendo } n \text{ o número de moedas em cada lado.}$$

Solução fechada

Dada a recorrência:

$$x_n = x_{n-1} + 6 \cdot (n-1),$$

ou ainda,

$$x_{n+1} = x_n + 6 \cdot n,$$

com a condição inicial $x_1 = 1$, aplicamos a **Proposição 1**, que nos fornece a solução na forma:

$$x_n = x_1 + g(1) + g(2) + g(3) + \cdots + g(n-1).$$

Substituindo $g(k) = 6 \cdot k$, obtemos:

$$x_n = 1 + 6 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + \cdots + 6 \cdot (n-1).$$

Colocando o fator 6 em evidência:

$$x_n = 1 + 6 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)).$$

Sabemos que a soma dos primeiros $n-1$ termos da progressão aritmética de razão 1 é dada por:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \frac{(n-1) \cdot n}{2}.$$

Substituindo essa expressão:

$$x_n = 1 + 6 \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{2} = 1 + 3n \cdot (n-1).$$

Sendo x_n o número total de moedas e n a quantidade de moedas em cada lado.

Tabela 8 – Tabela da quantidade de moedas com a fórmula fechada

Fórmula fechada $(1 + 3n \cdot (n-1))$	Quantidade total de moedas
$1 + 3 \cdot 1 \cdot (1-1)$	1
$1 + 3 \cdot 2 \cdot (2-1)$	7
$1 + 3 \cdot 3 \cdot (3-1)$	19
$1 + 3 \cdot 4 \cdot (4-1)$	37
$1 + 3 \cdot 5 \cdot (5-1)$	61
$1 + 3 \cdot 6 \cdot (6-1)$	91
.	.
.	.
.	.

Fonte: Dados do autor

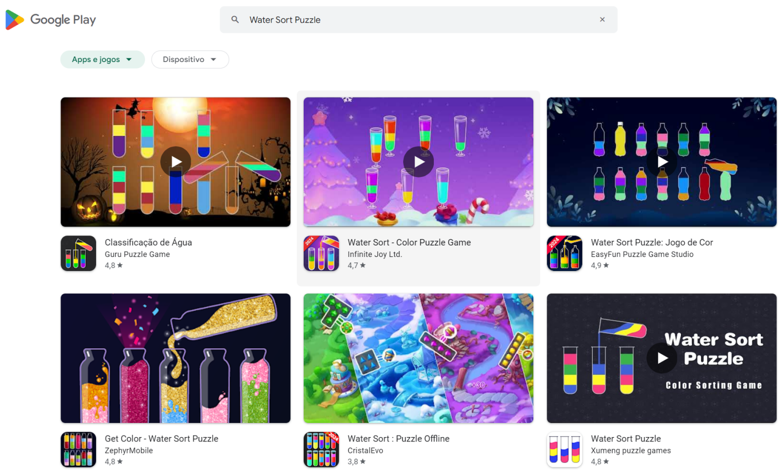
3.3 Desafio das Garrafas Coloridas

Nesta seção, propomos uma aplicação didática de mais um problema que pode ser explorado por meio de recorrências, utilizando um jogo com garrafas contendo líquidos coloridos. O desafio consiste em realizar o menor número possível de transferências de líquidos para que cada garrafa fique completamente preenchida com líquido de apenas uma cor. Essa proposta conecta conceitos matemáticos abstratos a uma atividade prática, inspirada em jogos populares disponíveis em smartphones, tablets e computadores. Trata-se de uma excelente oportunidade para estimular o espírito investigativo dos alunos, tornando o aprendizado da matemática mais lúdico e interativo.

Aplicação Pedagógica em Sala de Aula

A proposta consiste em utilizar este jogo como uma atividade lúdica para introduzir ou reforçar o conceito de recorrência entre os alunos. O jogo, inspirado no quebra-cabeça conhecido como *Water Sort Puzzle* encontrado no *Google Play*, em que o objetivo é organizar os líquidos de modo que cada garrafa contenha apenas uma cor, utilizando o mínimo de transferências ou *movimentos* possíveis.

Figura 10 – Water Sort Puzzle



Fonte: Google Play

Para garantir que o problema seja bem definido e não aleatório, vamos começar estabelecendo as seguintes condições:

1. **Número de Garrafas e Cores**:
    - O número de garrafas é igual ao número de cores mais duas unidades.

$$G = C + 2$$

2. **Conteúdo das Garrafas**:
   - Inicia-se com duas garrafas vazias e as restantes com exatamente 4 blocos líquidos coloridos.
3. **Limitação de Blocos por Cor**:
   - Cada garrafa pode conter até 3 blocos de uma mesma cor, mas em uma ordem específica.
4. **Condição de Término do Jogo**:
   - O jogo termina quando duas garrafas estão vazias e todas as demais estão completamente preenchidas com líquidos de uma mesma cor.

Antes de começarmos a jogar, vamos analisar as diferentes maneiras de organizar as cores dentro de cada garrafa e investigar se a disposição inicial das cores influencia no número total de transferências necessários para atingir o objetivo do jogo. Para facilitar a comunicação, vamos nomear as cores por $C_1, C_2, \ldots, C_n$ e as garrafas por $G_1, G_2, \ldots, G_{n+2}$. Convencionamos também que a ordem esquerda-direita na descrição simbólica das cores corresponde à leitura de cima para baixo no preenchimento das garrafas. Por fim, admitimos que blocos agrupados de mesma cor podem ser transferidos em uma única ação.

Caso: Duas Cores

Iniciaremos organizando as cores nas garrafas G_1 e G_2 da seguinte forma:

- G_1: $C_1C_1C_2C_2$
- G_2: $C_1C_1C_2C_2$
- G_3: vazia
- G_4: vazia

Transferências Considerando Agrupamento

1. Transferir os dois blocos C_1C_1 da G_1 para a G_3 (1 transferência, pois os blocos estão agrupados).
2. Transferir os dois blocos C_1C_1 da G_2 para a G_3 (1 transferência, pois os blocos estão agrupados).
3. Transferir o bloco C_2 restante da G_2 para a G_1 (1 transferência).
   ou
4. Transferir o bloco C_2 restante da G_1 para a G_2 (1 transferência).

Portanto, com essa disposição inicial descrita acima, são necessários **3 transferências** para finalizar o jogo.

Caso: Duas Cores

Iniciaremos organizando as cores nas garrafas da seguinte forma:

- G_1: $C_1C_1C_2C_2$
- G_2: $C_2C_2C_1C_1$
- G_3: vazia
- G_4: vazia

Transferências Considerando Agrupamento

1. Transferir os dois blocos C_1C_1 da G_1 para a G_3 (1 transferência).
2. Transferir os dois blocos C_2C_2 da G_2 para a G_1 (1 transferência).
3. Transferir o bloco C_1 restante da G_2 para a G_3 (1 transferência).
   ou
4. Transferir o bloco C_2 restante da G_3 para a G_2 (1 transferência).

Verifica-se então que iniciando com as duas cores distribuídas em dois blocos, ainda que numa disposição inicial diferente, são necessários **3 transferências** para para finalizar o jogo.

Caso: Duas Cores Alternadas

Iniciaremos organizando as cores nas garrafas da seguinte forma:

- G_1: $C_1C_2C_1C_2$
- G_2: $C_1C_2C_1C_2$
- G_3: vazia
- G_4: vazia

Transferências Considerando Agrupamento

1. Transferir o bloco C_1 da G_1 para a G_3 (1 transferência).
2. Transferir o bloco C_1 da G_2 para a G_3 (1 transferência).
3. Transferir o bloco C_2 da G_1 para a G_4 (1 transferência).

4. Transferir o bloco C_2 da G_2 para a G_4 (1 transferência).
5. Transferir o bloco C_1 da G_1 para a G_3 (1 transferência).
6. Transferir o bloco C_1 da G_2 para a G_3 (1 transferência).
7. Transferir o bloco C_2 da G_1 para a G_4 (1 transferência).
8. Transferir o bloco C_2 da G_2 para a G_4 (1 transferência).

Com essa disposição inicial, são necessários **8 transferências** para finalizar o jogo. É possível provar que esse número de ações é mínimo para este caso.

Caso: Duas Cores com Blocos Alternados numa Garrafa e Agrupados em Outra

Iniciaremos organizando as cores nas garrafas da seguinte forma:

- G_1: $C_1C_2C_1C_2$
- G_2: $C_1C_1C_2C_2$
- G_3: vazia
- G_4: vazia

Transferências Considerando Agrupamento

1. Transferir o bloco C_1 da G_1 para a G_3 (1 transferência).
2. Transferir os blocos C_1 da G_2 para a G_3 (1 transferência).
3. Transferir o bloco C_2 da G_1 para a G_2 (1 transferência).
4. Transferir o bloco C_1 da G_1 para a G_3 (1 transferência).
5. Transferir o bloco C_2 da G_1 para a G_2 (1 transferência).

Com essa disposição inicial, são necessários **5 transferências** para agrupar cada cor numa única garrafa, sendo este o número mínimo de ações para este caso.

Caso: Duas Cores Alternadas

Iniciaremos organizando as cores nas garrafas da seguinte forma:

- G_1: $C_1C_2C_1C_2$
- G_2: $C_2C_1C_2C_1$
- G_3: vazia
- G_4: vazia

Transferências Considerando Agrupamento

1. Transferir o bloco C_1 da G_1 para a G_3 (1 transferência).
2. Transferir o bloco C_2 da G_2 para a G_4 (1 transferência).
3. Transferir o bloco C_2 da G_1 para a G_4 (1 transferência).
4. Transferir o bloco C_1 da G_2 para a G_3 (1 transferência).
5. Transferir o bloco C_1 da G_1 para a G_3 (1 transferência).
6. Transferir o bloco C_2 da G_2 para a G_4 (1 transferência).
7. Transferir o bloco C_2 da G_1 para a G_4 (1 transferência).
8. Transferir o bloco C_1 da G_2 para a G_3 (1 transferência).

Com essa disposição inicial, novamente são necessários **8 transferências** para agrupar cada cor numa única garrafa, minimizando o número de ações.

Conclusão

Em resumo, o número mínimo de transferências varia conforme a disposição inicial das cores nas garrafas. Diante disso, propomos fixar um padrão para a disposição das cores, de modo que o número mínimo de transferências como função do número de cores esteja bem definido.

Número Mínimo de Transferências

Atendendo à orientação da conclusão imediatamente anterior e com base nos resultados obtidos nos casos com duas cores, faremos uma primeira discussão sobre o número mínimo de transferências (x_n) no jogo, fixando a seguinte condição:

1. Todas as cores são distribuídas em 2 blocos em garrafas distintas

Aplicação para o Caso de 2 Cores

- G_1: $C_1C_1C_2C_2$ (2 blocos de C_1 e 2 blocos de C_2 agrupados).
- G_2: $C_2C_2C_1C_1$ (2 blocos de C_1 e 2 blocos de C_2 agrupados).
- G_3: vazia.
- G_4: vazia.

Transferências Considerando Agrupamento

1. Transferir os 2 blocos de C_1 da G_1 para a G_3 (1 transferência).
2. Transferir os 2 blocos de C_2 da G_2 para a G_1 (1 transferência).
3. Transferir os 2 blocos de C_1 restante da G_2 para a G_3 (1 transferência).
   ou
4. Transferir os 2 blocos de C_1 restante da G_3 para a G_2 (1 transferência).

Temos aqui **3 transferências**.

Aplicação para o Caso de 3 Cores

- G_1: $C_1C_1C_2C_2$.
- G_2: $C_2C_2C_3C_3$.
- G_3: $C_3C_3C_1C_1$.
- G_4: vazia.
- G_5: vazia.

Transferências Considerando Agrupamento

1. Transferir os 2 blocos de C_1 da G_1 para a G_4 (1 transferência).
2. Transferir os 2 blocos de C_2 da G_2 para a G_1 (1 transferência).
3. Transferir os 2 blocos de C_3 da G_3 para a G_2 (1 transferência).
4. Transferir os 2 blocos de C_1 da G_3 para a G_4 (1 transferência).
   ou
5. Transferir os 2 blocos de C_1 da G_4 para a G_3 (1 transferência).

Nesse caso, temos **4 transferências** para organizar todas as cores.

Aplicação para o Caso de 4 Cores

- G_1: $C_1C_1C_2C_2$.
- G_2: $C_2C_2C_3C_3$.
- G_3: $C_3C_3C_4C_4$.
- G_4: $C_4C_4C_1C_1$.

- G_5: vazia.
- G_6: vazia.

Transferências Considerando Agrupamento

1. Transferir os 2 blocos de C_1 da G_1 para a G_5 (1 transferência).
2. Transferir os 2 blocos de C_2 da G_2 para a G_1 (1 transferência).
3. Transferir os 2 blocos de C_3 da G_3 para a G_2 (1 transferência).
4. Transferir os 2 blocos de C_4 da G_4 para a G_3 (1 transferência).
5. Transferir os 2 blocos de C_1 da G_5 para a G_4 (1 transferência).
   ou
6. Transferir os 2 blocos de C_1 da G_4 para a G_5 (1 transferência).

Nesse caso, temos **5 transferências** para organizar todas as cores.

Aplicação para o Caso de 5 Cores

- G_1: $C_1C_1C_2C_2$
- G_2: $C_2C_2C_3C_3$
- G_3: $C_3C_3C_4C_4$
- G_4: $C_4C_4C_5C_5$
- G_5: $C_5C_5C_1C_1$
- G_6: vazia.
- G_7: vazia.

Transferências Considerando Agrupamento

1. Transferir os 2 blocos de C_1 da G_1 para a G_6 (1 transferência).
2. Transferir os 2 blocos de C_2 da G_2 para a G_1 (1 transferência).
3. Transferir os 2 blocos de C_3 da G_3 para a G_1 (1 transferência).
4. Transferir os 2 blocos de C_4 da G_4 para a G_3 (1 transferência).
5. Transferir os blocos de C_5 da G_5 para a G_4 (1 transferência).
6. Transferir os bloco de C_1 da G_6 para a G_5 (1 transferência).

Com essa disposição inicial, são necessários **6 transferências** para organizar todas as cores.

Os exemplos anteriores sugerem que a condição 1 estabelece uma relação biunívoca entre o número de cores e o número de transferências necessárias para finalizar o jogo, $(n+1)$. No entanto, o exemplo a seguir demonstra que essa condição, por si só, não é suficiente.

Aplicação para o Caso de 5 Cores

- G_1: $C_1C_1C_2C_2$
- G_2: $C_2C_2C_1C_1$
- G_3: $C_3C_3C_4C_4$
- G_4: $C_4C_4C_5C_5$
- G_5: $C_5C_5C_3C_3$
- G_6: vazia.
- G_7: vazia.

Transferências Considerando Agrupamento

1. Transferir os 2 blocos de C_1 da G_1 para a G_6 (1 transferência).
2. Transferir os 2 blocos de C_2 da G_2 para a G_1 (1 transferência).
3. Transferir os 2 blocos de C_1 da G_6 para a G_2 (1 transferência).
4. Transferir os 2 blocos de C_3 da G_3 para a G_6 (1 transferência).
5. Transferir os 2 blocos de C_4 da G_4 para a G_3 (1 transferência).
6. Transferir os blocos de C_5 da G_5 para a G_4 (1 transferência).
7. Transferir os 2 bloco de C_3 da G_6 para a G_5 (1 transferência).

Com essa disposição inicial, são necessários **7 transferências** para organizar todas as cores.

Quando as cores C_1 e C_2 estão dispostas nas garrafas G_1 e G_2, o jogo se comporta de forma independente em relação às demais cores nas demais garrafas. Nesse caso, para as 2 cores presentes nas garrafas G_1 e G_2, ocorrem 3 transferências, calculadas como 2 (número de cores) + 1. Para as demais cores (C_3, C_4 e C_5), o total de transferências é 4, também equivalente ao número de cores mais 1. No cenário geral, o número total de transferências é 7, resultado exclusivamente da alteração na disposição inicial. Esse comportamento evidencia a necessidade de uma regra adicional.

Com base na regularidade observada nos resultados dos casos analisados acima, propomos a seguinte generalização:

Generalizações

De modo geral, iniciando com n cores distintas $C_1, \ldots, C_n$, estando cada uma delas distribuída em dois blocos e denotando por x_n o número mínimo de ações para concluir o jogo, então temos a seguinte:

Proposição 2: Supondo que $k < n$, então k cores ocupam, no mínimo, $k + 1$ garrafas. Sob a condição 1, em que o jogo inicia com um bloco de cada cor na parte superior de uma única garrafa, temos $x_n = n + 1$.

Demonstração:
Sem perda de generalidade, podemos supor a seguinte distribuição inicial:

$$\begin{aligned} G_1 &: C_1C_1C_2C_2 \\ G_2 &: C_2C_2C_3C_3 \\ G_3 &: C_3C_3C_4C_4 \\ &\vdots \\ G_{n-1} &: C_{n-1}C_{n-1}C_nC_n \\ G_n &: C_nC_nC_1C_1 \end{aligned}$$

Neste caso, transferimos o bloco C_1C_1 para a garrafa G_{n+1}. Em seguida, transferimos C_2C_2 de G_2 para G_1, depois transferimos C_3C_3 de G_3 para G_2, e assim sucessivamente, até chegarmos a transferir o bloco C_nC_n de G_n para G_{n-1}. Por fim, transferimos o bloco C_1C_1 de G_n para G_{n+1}. Desta maneira, totalizamos exatamente $n + 1$ ações.

Para provar que este número de ações é mínimo, basta notar que, pelo menos um bloco de cada cor deve ser transferido, garantindo n ações. Por outro lado, a cor com a qual iniciam-se as transferências deverá ter um bloco transferido para uma garrafa vazia, logo serão necessárias duas ações para juntar seus dois blocos. Isto garante pelo menos $n + 1$ ações.

Na intenção de mostrar um tipo de recorrência neste jogo, apresentamos o seguinte teorema:

Teorema 2: Seja $k < n - 1$. Na condição **1** e, supondo que k cores ocupam exatamente k garrafas, então o número mínimo de transferências para separar as cores é

$$x_{n,k} = x_{n-k} + x_k$$

Demonstração:

Basta notar que sob esta condição, na verdade temos dois jogos independentes ambos regidos pelas condições da **Proposição 2**, um envolvendo k cores e outro envolvendo $n - k$ cores.

Observação: Aplicando a **Proposição 2** e o **Teorema 2** temos que

$$x_{n,k} = x_{n-k} + x_k = (n - k + 1) + (k + 1) = n + 2 = (n - 1) + 2 + 1 = x_{n-1,k} + 1$$

Conclusão

Podemos concluir que, ao adotar a regra de que cores — o máximo possível dentro de uma garrafa — o número mínimo de transferências para organizar todas as cores será igual ao número de garrafas menos 1, ou, de maneira análoga, ao número de cores mais 1. Essa abordagem otimiza o processo, permitindo que grandes blocos de cores sejam movidos de uma só vez, o que reduz o número total de transferências. Assim, a regra do agrupamento se mostra uma solução eficiente e generalizável para diversos cenários, garantindo um cálculo mais ágil e preciso do número mínimo de transferências necessárias no jogo. Vale ressaltar que, nesta configuração, não utilizamos todas as garrafas disponíveis.

Ao explorar esse jogo em sala de aula, os alunos poderão perceber como pequenas mudanças no problema, como a adição de uma cor, impactam diretamente o número de transferências necessárias. No entanto, ao fixarmos a forma de disposição das cores, concluímos que o número mínimo de transferências é exatamente igual ao número de cores mais um. Sem essa regra, especialmente a que agrupa as cores em blocos, as soluções seriam muito mais diversificadas e complexas. Essa atividade não apenas reforça o entendimento das recorrências matemáticas, mas também estimula o raciocínio lógico e a habilidade de planejar estrategicamente.

Além disso, ao explorar o contexto histórico das recorrências, podemos mostrar aos alunos como esse conceito tem sido aplicado ao longo dos séculos em diversas áreas da ciência e tecnologia. Essa abordagem integrada e contextualizada promove uma aprendizagem mais significativa, revelando a relevância e a beleza da matemática na compreensão e resolução de problemas do mundo real.

Sugestão de Implementação

Os professores podem implementar essa atividade em sala de aula utilizando materiais simples, como copos plásticos coloridos ou software educativo que simule o jogo. Uma discussão posterior sobre as estratégias utilizadas e a matemática envolvida pode ajudar a solidificar o aprendizado, tornando o conceito de recorrência mais acessível e interessante para os alunos. Dessa forma, ao transformar um conceito abstrato em uma experiência prática e contextualizada, os professores podem não apenas ensinar recorrências, mas também inspirar seus alunos a apreciar e explorar o mundo matemático ao seu redor.

4 Metodologia

Neste capítulo, vamos detalhar a metodologia usada nesta dissertação de mestrado: as relações de recorrências lineares de primeira ordem, apresentadas como uma proposta para modelar problemas no ensino médio por meio de fórmulas recursivas, dentro do contexto da sala de aula. Inicialmente, os alunos foram submetidos a um questionário elaborado com o objetivo de avaliar o grau de familiaridade com sequências numéricas, fórmulas dadas recursivamente e recorrências lineares de primeira ordem. O questionário foi aplicado em duas etapas: antes da implementação da proposta e em uma data subsequente às aulas. Vale ressaltar que a pesquisa envolveu exclusivamente turmas do 1º ano do ensino médio, embora as turmas do 8º ano do ensino fundamental tenham participado da proposta, adaptada para aprimorar a compreensão dos conceitos matemáticos relacionados a sequências numéricas e relações de recorrências lineares de primeira ordem.

4.1 Introdução

Partindo sempre de situações problemáticas específicas, analisando padrões e generalizando-os por meio de métodos recursivos, nossa proposta teve sua base em uma revisão meticulosa da literatura, explorando conceitos essenciais como sequências numéricas, relações de recorrências lineares, técnicas de resolução e a distinção entre abordagens recursivas e formas fechadas. Durante a aplicação prática desta metodologia, dois desafios se destacaram: a resolução do problema da Torre de Hanói e a abordagem de um problema menos conhecido que envolve a disposição de moedas para formar hexágonos regulares. Os resultados obtidos ressaltaram a eficácia da abordagem, evidenciando melhorias substanciais no envolvimento e desempenho dos alunos no desenvolvimento do raciocínio recursivo para a solução de problemas matemáticos.

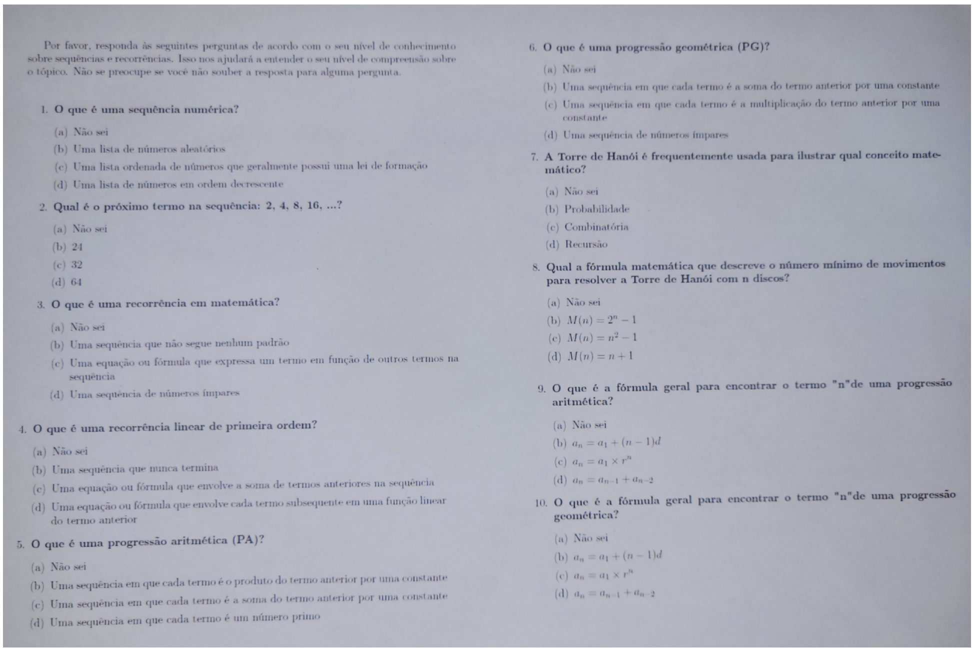
As aulas foram realizadas na Escola Estadual Miran Marroquim, onde sou docente efetivo desde 12 de abril de 2022, lecionando em turmas do ensino fundamental, médio e Educação de Jovens e Adultos (EJA). A instituição está localizada no bairro do Jacintinho, em Maceió, Estado de Alagoas. Segundo os dados do Censo Escolar 2022 do INEP, a escola conta com 1467 alunos matriculados e 84 professores nos três turnos, abrangendo as etapas do ensino fundamental, médio e Educação de Jovens e Adultos (EJA).

4.2 Coleta e Tratamento de Dados

O questionário, composto por perguntas de 1 a 10 e alternativas de a a d, aplicado antes do início das aulas, desempenhou a função de um pré-teste, possibilitando a identificação de algumas dificuldades em conceitos fundamentais que, por si só, evidenciaram lacunas de conhecimento entre os alunos. Vale ressaltar que o questionário foi exclusivamente destinado às turmas do 1º ano do ensino médio, especificamente nas turmas 1T01 e 1T02, no dia 18 de setembro de 2023. A segunda aplicação do mesmo questionário ocorreu em 04 de dezembro de 2023, servindo como pós-teste com o objetivo de avaliar a eficácia da proposta e verificar se esta foi capaz de minimizar ou resolver as lacunas de conhecimento sobre o tema, além de mensurar a contribuição da proposta para tal progresso.

O questionário foi formatado em orientação paisagem (horizontal), sendo impresso em uma folha A4, conforme ilustrado na figura abaixo:

Figura 11 – Folha impressa do questionário


Por favor, responda às seguintes perguntas de acordo com o seu nível de conhecimento sobre sequências e recorrências. Isso nos ajudará a entender o seu nível de compreensão sobre o tópico. Não se preocupe se você não souber a resposta para alguma pergunta.

1. **O que é uma sequência numérica?**
   (a) Não sei
   (b) Uma lista de números aleatórios
   (c) Uma lista ordenada de números que geralmente possui uma lei de formação
   (d) Uma lista de números em ordem decrescente
2. **Qual é o próximo termo na sequência: 2, 4, 8, 16, ...?**
   (a) Não sei
   (b) 24
   (c) 32
   (d) 64
3. **O que é uma recorrência em matemática?**
   (a) Não sei
   (b) Uma sequência que não segue nenhum padrão
   (c) Uma equação ou fórmula que expressa um termo em função de outros termos na sequência
   (d) Uma sequência de números ímpares
4. **O que é uma recorrência linear de primeira ordem?**
   (a) Não sei
   (b) Uma sequência que nunca termina
   (c) Uma equação ou fórmula que envolve a soma de termos anteriores na sequência
   (d) Uma equação ou fórmula que envolve cada termo subsequente em uma função linear do termo anterior
5. **O que é uma progressão aritmética (PA)?**
   (a) Não sei
   (b) Uma sequência em que cada termo é o produto do termo anterior por uma constante
   (c) Uma sequência em que cada termo é a soma do termo anterior por uma constante
   (d) Uma sequência em que cada termo é um número primo
6. **O que é uma progressão geométrica (PG)?**
   (a) Não sei
   (b) Uma sequência em que cada termo é a soma do termo anterior por uma constante
   (c) Uma sequência em que cada termo é a multiplicação do termo anterior por uma constante
   (d) Uma sequência de números ímpares
7. **A Torre de Hanói é frequentemente usada para ilustrar qual conceito matemático?**
   (a) Não sei
   (b) Probabilidade
   (c) Combinatória
   (d) Recursão
8. **Qual a fórmula matemática que descreve o número mínimo de movimentos para resolver a Torre de Hanói com n discos?**
   (a) Não sei
   (b) $M(n) = 2^n - 1$
   (c) $M(n) = n^2 - 1$
   (d) $M(n) = n + 1$
9. **O que é a fórmula geral para encontrar o termo "n"de uma progressão aritmética?**
   (a) Não sei
   (b) $a_n = a_1 + (n-1)d$
   (c) $a_n = a_1 \times r^n$
   (d) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$
10. **O que é a fórmula geral para encontrar o termo "n"de uma progressão geométrica?**
    (a) Não sei
    (b) $a_n = a_1 + (n-1)d$
    (c) $a_n = a_1 \times r^n$
    (d) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

Fonte: Dados do autor

Para uma análise mais fácil e mais rápida dos dados as respostas foram transferidas para um formulário do Google Forms® e nomeados como 1T01 - pré-teste; 1T02 - pré-teste; 1T01 - pós-teste e 1T02 - pós-teste, conforme ilustra a figura 12:

Figura 12 – Formulário do Google

Fonte: Dados do autor

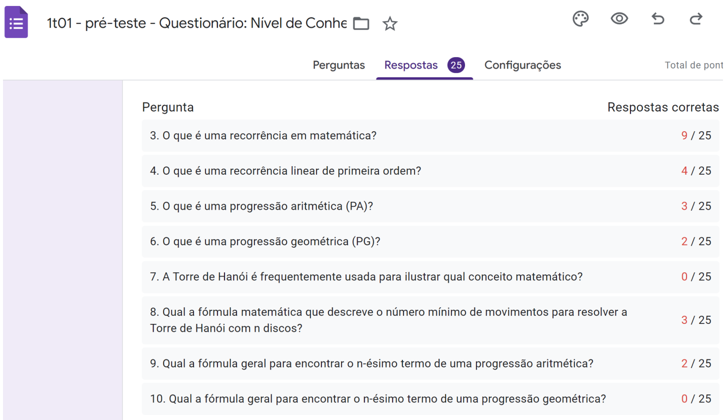
4.2.1 Análise dos Dados

No pré-teste tivemos 25 alunos participantes na turma 1T01 e 22 alunos na turma 1T02, já no pós-teste tivemos também 25 alunos participantes na turma 1T01, mas apenas 17 alunos na turma 1T02.

Vamos analisar as questões com maior percentual de erros para ambas as turmas.

Observe as figuras 13 e 14:

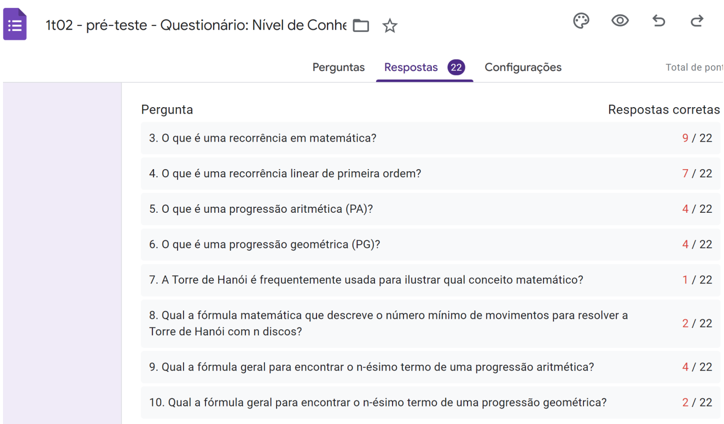
Figura 13 – Perguntas erradas com frequência - 1T01



Pergunta	Respostas corretas
3. O que é uma recorrência em matemática?	9 / 25
4. O que é uma recorrência linear de primeira ordem?	4 / 25
5. O que é uma progressão aritmética (PA)?	3 / 25
6. O que é uma progressão geométrica (PG)?	2 / 25
7. A Torre de Hanói é frequentemente usada para ilustrar qual conceito matemático?	0 / 25
8. Qual a fórmula matemática que descreve o número mínimo de movimentos para resolver a Torre de Hanói com n discos?	3 / 25
9. Qual a fórmula geral para encontrar o n-ésimo termo de uma progressão aritmética?	2 / 25
10. Qual a fórmula geral para encontrar o n-ésimo termo de uma progressão geométrica?	0 / 25

Fonte: Dados do autor

Figura 14 – Perguntas erradas com frequência - 1T02



Pergunta	Respostas corretas
3. O que é uma recorrência em matemática?	9 / 22
4. O que é uma recorrência linear de primeira ordem?	7 / 22
5. O que é uma progressão aritmética (PA)?	4 / 22
6. O que é uma progressão geométrica (PG)?	4 / 22
7. A Torre de Hanói é frequentemente usada para ilustrar qual conceito matemático?	1 / 22
8. Qual a fórmula matemática que descreve o número mínimo de movimentos para resolver a Torre de Hanói com n discos?	2 / 22
9. Qual a fórmula geral para encontrar o n-ésimo termo de uma progressão aritmética?	4 / 22
10. Qual a fórmula geral para encontrar o n-ésimo termo de uma progressão geométrica?	2 / 22

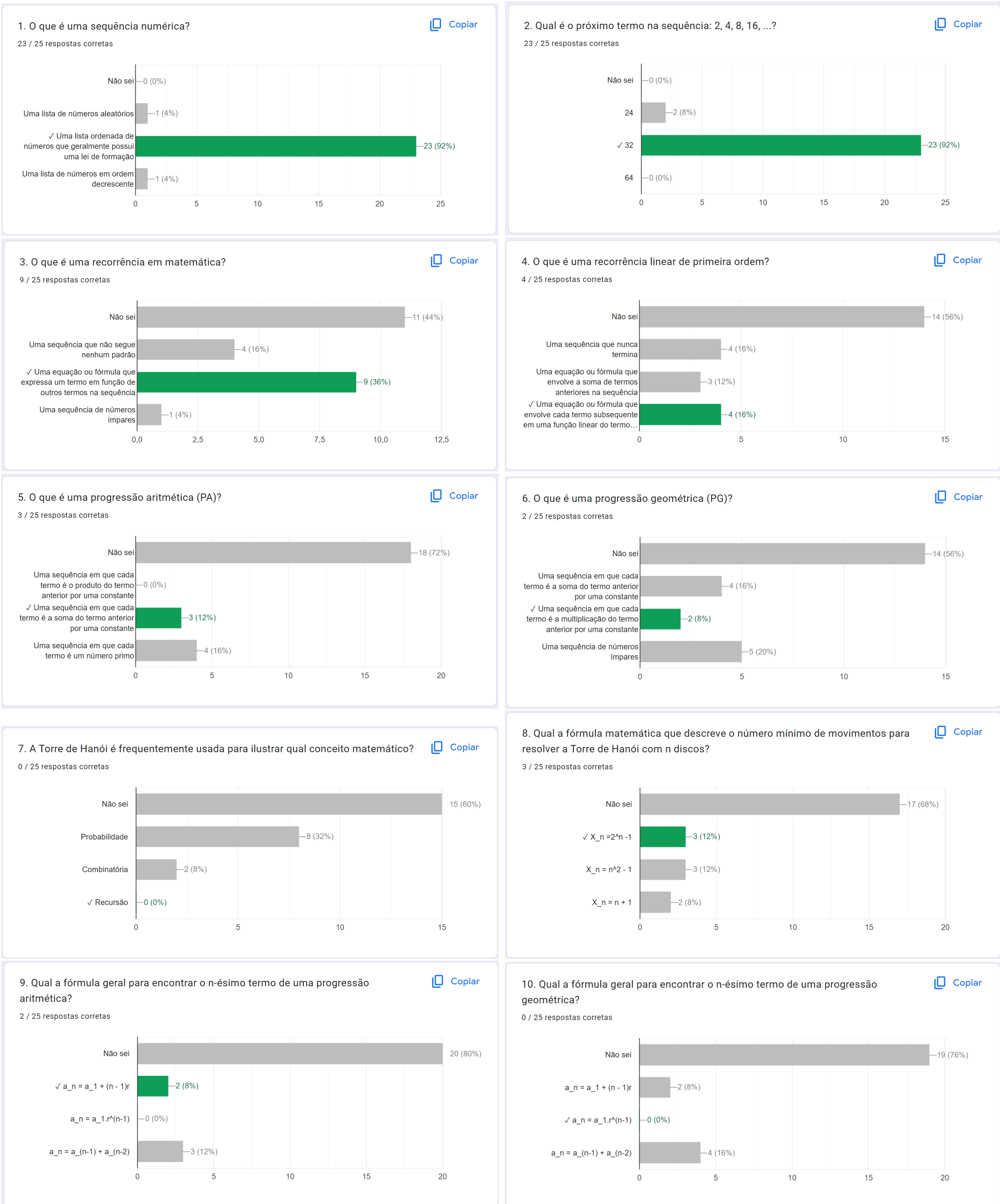
Fonte: Dados do autor

Observa-se que as questões 7, 9 e 10 registraram o menor índice de acertos entre os alunos da turma 1T01. Por outro lado, na turma 1T02, as questões 7, 8 e 10 foram as menos respondidas corretamente. O baixo desempenho nessas questões pode ser atribuído a três fatores principais: a falta de familiaridade com os conceitos de recursão e progressões, que muitas vezes são confundidos com outros tópicos; a dificuldade em manipular fórmulas, especialmente as de progressões aritméticas (P.A.) e geométricas (P.G.), que envolvem operações matemáticas desafiadoras; e a insuficiência de prática na aplicação desses conceitos, o que dificulta a resolução de problemas.

4.2.1.1 Análise dos Dados das Turmas 1T01 e 1T02 - pré-teste

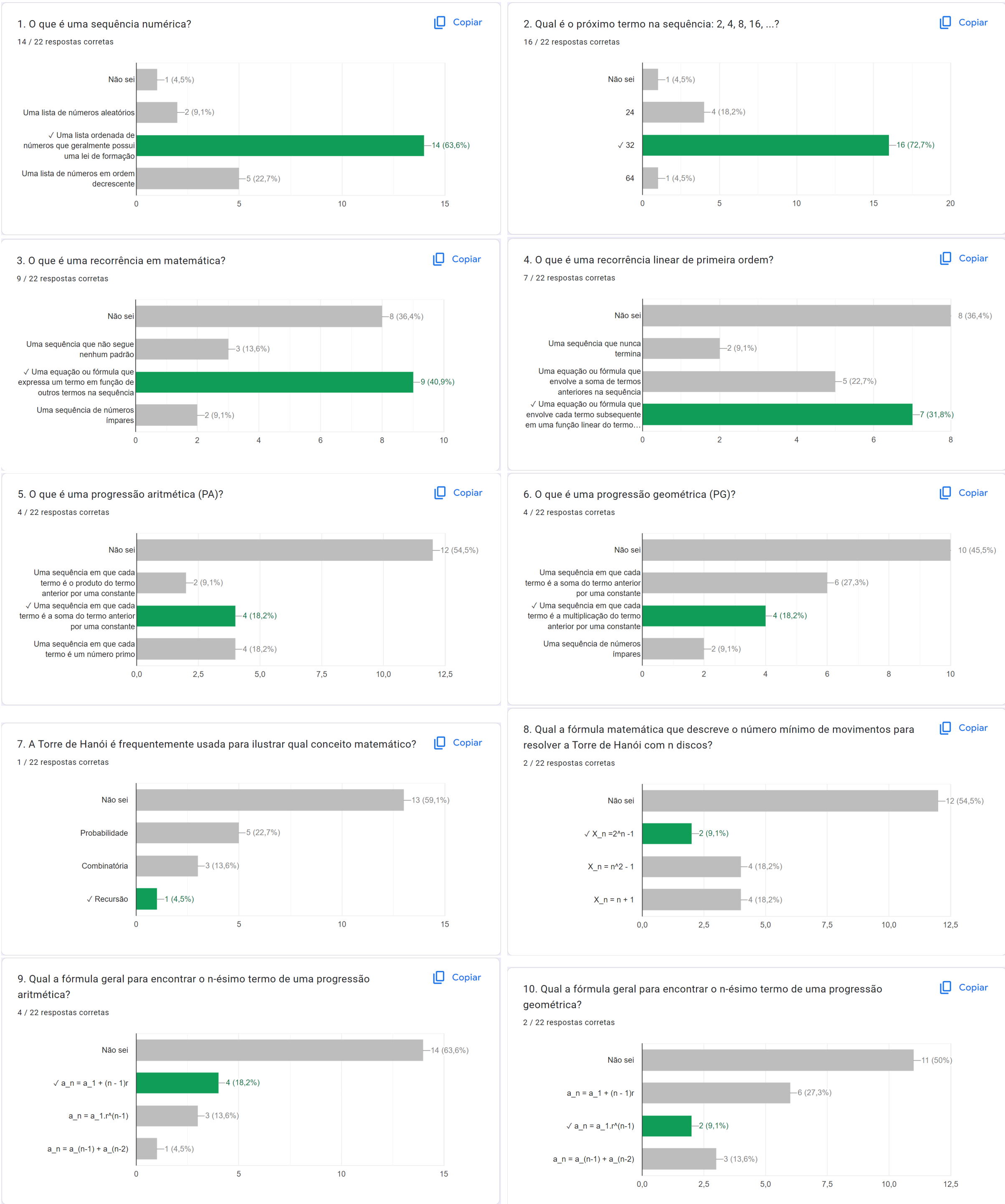
Observe as figuras abaixo com as 10 questões de ambas as turmas:

Figura 15 – Questões 1 a 10 - 1T01 - pré-teste



Fonte: Dados do autor

Figura 16 – Questões 1 a 10 - 1T02 - pré-teste

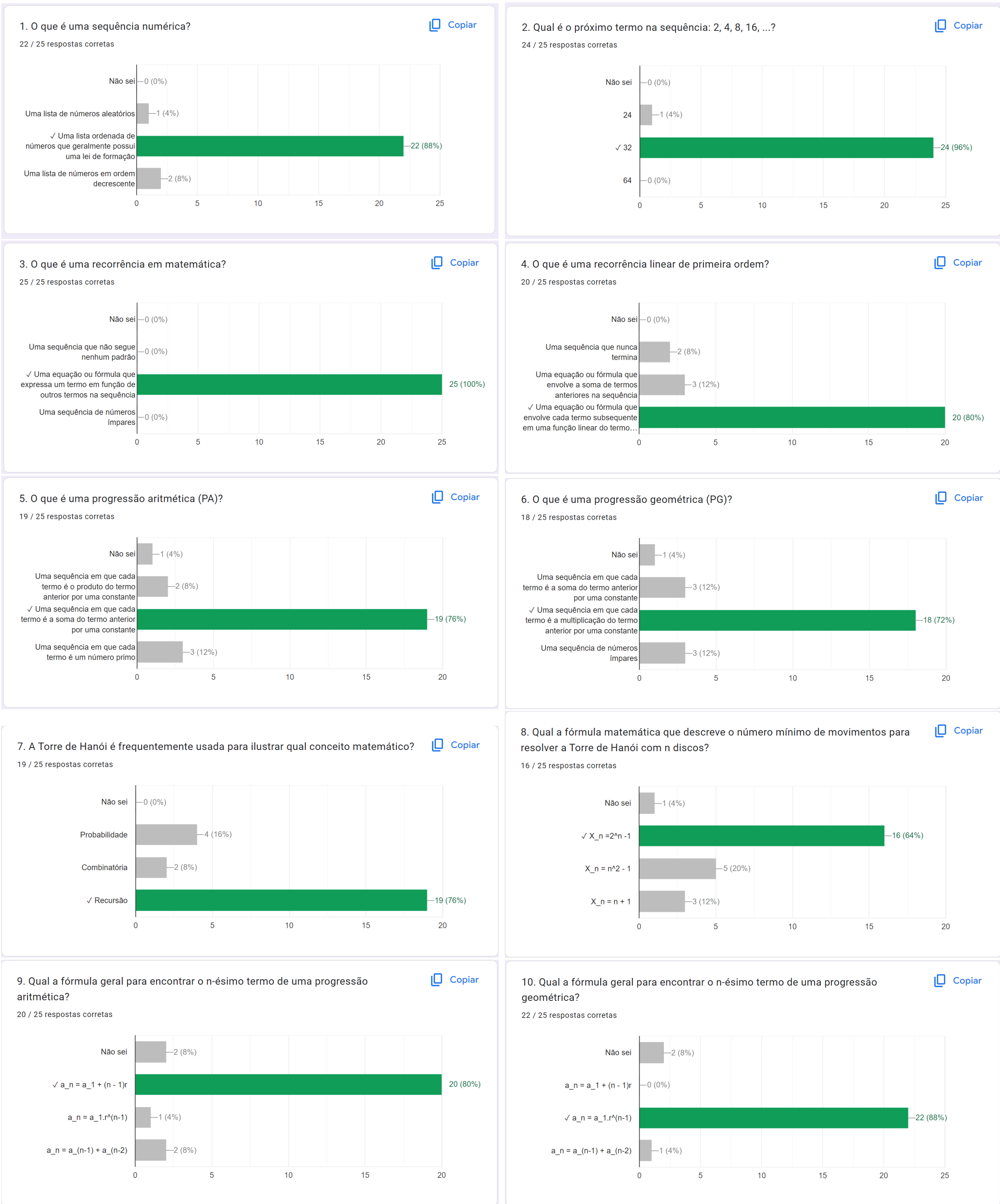


Fonte: Dados do autor

4.2.1.2 Análise dos Dados das Turmas 1T01 e 1T02 - pós-teste

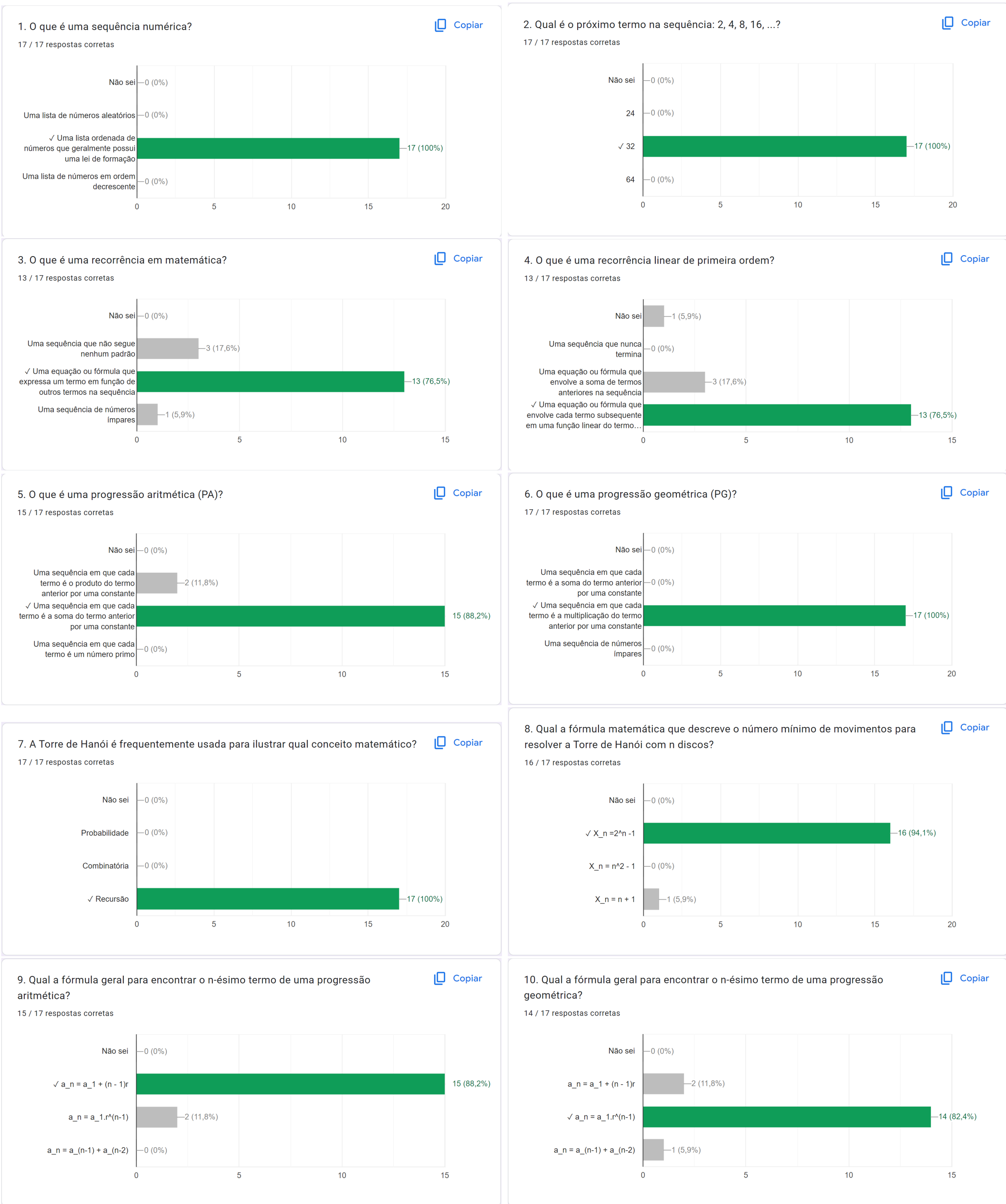
Observe as figuras abaixo com as 10 questões de ambas as turmas:

Figura 17 – Questões 1 a 10 - 1T01 - pós-teste



Fonte: Dados do autor

Figura 18 – Questões 1 a 10 - 1T02 - pós-teste



Fonte: Dados do autor

5 Resultados

Este capítulo visa apresentar e analisar os resultados provenientes das aulas ministradas. Após a aplicação do questionário e a implementação da proposta, este segmento constitui a fase de divulgação das descobertas. Aqui, serão minuciosamente detalhadas as principais constatações e padrões identificados no conjunto de dados, proporcionando uma visão aprofundada sobre os aspectos abordados no escopo do trabalho. Especial atenção será dedicada ao exame do quantitativo de acertos e erros tanto no pré-teste quanto no pós-teste, oferecendo uma análise substancial das mudanças observadas após a intervenção proposta.

5.1 Discussão

Inicialmente, cabe ressaltar que as turmas com as quais interagi - ou seja, o 8º ano do ensino fundamental (turmas 1, 2 e 3) e o 1º ano do ensino médio (turmas 1 e 2) - estavam plenamente cientes de que as atividades propostas integravam um projeto vinculado à minha dissertação de mestrado. Contudo, a extensão na qual essa informação influenciou o comportamento dos alunos não foi objeto de avaliação sistemática.

A ausência de uma avaliação objetiva para mensurar tal influência não é considerada uma limitação metodológica nesta pesquisa. Pelo contrário, sugere que o escopo deste trabalho não incluía essa análise específica. No entanto, essa lacuna ressalta a oportunidade para futuras investigações, que poderiam explorar o uso de instrumentos de avaliação apropriados para discernir o impacto do contexto acadêmico no comportamento dos alunos.

É relevante notar que, embora não tenha sido aplicado nenhum questionário às turmas do 8º ano do ensino fundamental, os depoimentos escritos à mão fornecidos pelos alunos ofereceram valiosas perspectivas sobre a relevância das aulas propostas, suas dificuldades percebidas e, naturalmente, como essas atividades contribuíram para o entendimento de temas como sequências numéricas, relações de recorrências lineares e o problema da Torre de Hanói. Essa abordagem qualitativa enriquece a compreensão do impacto pedagógico da proposta, destacando a importância de considerar tanto os resultados quantitativos quanto os relatos subjetivos dos alunos em futuras pesquisas educacionais.

Ao analisar os gráficos ilustrados nas Figuras 14 a 17, apresentadas no Capítulo 4, nota-se que, embora a meta de precisão de 100% não tenha sido universalmente alcançada em todas as questões, registra-se um aumento expressivo na porcentagem de respostas corretas para a grande maioria delas. Tal fenômeno indica que, mesmo não tendo eliminado por completo as deficiências de conhecimento, a estratégia metodológica adotada teve um impacto substancial em mitigar essas lacunas entre os alunos. Essa observação aponta para um aprofundamento na compreensão dos conteúdos abordados durante o estudo, evidenciando que a abordagem utilizada foi bem-sucedida na sua aplicação.

No pré-teste, destaca-se que as questões 7, 9 e 10 para a turma 1T01 apresentaram baixos índices de acertos, registrando respectivamente 0%, 8% e 0%. Entretanto, após a intervenção proposta, observou-se uma notável melhoria, com essas mesmas questões alcançando índices de acertos de 76%, 80% e 88% para a mesma turma. Este contraste destaca o impacto positivo das aulas na assimilação do conteúdo pelos alunos, evidenciando uma significativa evolução nos resultados.

Na turma 1T02, no pré-teste, identificaram-se as questões com as taxas de acertos mais baixas, concentrando-se nas questões 7, 8 e 10, com percentuais de acerto de 4,5%, 9,1% e 9,1%, respectivamente. Contudo, após a aplicação das aulas, notou-se uma transformação notável nesse conjunto específico de perguntas, alcançando índices de 100%, 94% e 82,4%, respectivamente. Essa significativa melhoria evidencia o impacto positivo das aulas na compreensão e desempenho dos alunos, representando um avanço substancial em relação ao estágio inicial do pré-teste.

6 Conclusão

Ao longo do desenvolvimento deste trabalho, enfatizamos a necessidade crucial de estabelecer um método científico-matemático sistemático para a modelagem de problemas. O ponto de partida reside na formulação recursiva do problema, destacando a essencialidade do entendimento de sequências para a organização dos dados e dedução de fórmulas fechadas. Tornou-se evidente que a compreensão do processo de organização de informações, aliada à adesão a etapas estruturadas, são elementos indispensáveis para o sucesso na resolução de problemas. Assim, a modelagem de qualquer problema em um contexto científico-matemático exige, primordialmente, uma abordagem meticulosa e a sistematização criteriosa das etapas envolvidas.

É fundamental ressaltar que não há uma única abordagem universal para a resolução de problemas, independentemente de sua natureza intrínseca. No entanto, existem métodos mais adequados para lidar com distintas categorias de problemas. A aplicação que trata da disposição de moedas formando hexágonos regulares inovou ao introduzir um palpite para a concepção da equação recursiva. É relevante destacar que todas as fórmulas fechadas, em futuras investigações, devem passar por verificação pelo princípio da indução finita, consolidando, assim, a validade das proposições. Este processo de validação, por meio de raciocínio lógico e técnicas de demonstração, é uma prática comum, especialmente no âmbito da matemática, embora sua aplicabilidade não se restrinja exclusivamente a essa disciplina.

Diante de qualquer afirmação, seja ela uma fórmula ou um teorema, a necessidade de sua demonstração impera, utilizando todos os recursos disponíveis, contribuindo para a robustez e credibilidade da solução apresentada.

Adicionalmente, a aplicação do jogo **‘Desafio das Garrafas Coloridas’**, inspirado no jogo *Water Sort Puzzle* encontrado no Google Play, foi uma porta aberta e uma contribuição muito rica para a exploração de diversos problemas semelhantes e sua resolução através das recorrências lineares de primeira ordem. Tal abordagem proporciona um ambiente prático para a construção e validação de modelos matemáticos, destacando-se como um recurso didático inovador e interdisciplinar. A riqueza dessa aplicação transcende o aspecto lúdico, promovendo um campo fértil para novas descobertas e investigações matemáticas.

Referências

Brasil. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular: Matemática**. 2018. Brasília. Tipo de documento: Relatório. Citado na página 12.

CARVALHO, P. C. P.; MORGADO, A. C. **Matemática discreta**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. (Coleção PROFMAT). Citado 4 vezes nas páginas 14, 16, 21 e 32.

Clay Mathematics Institute. **Millennium Problems**. Cambridge, MA: Clay Mathematics Institute, 2000. Acesso em: 30 nov. 2024. Disponível em: <https://www.claymath.org/millennium-problems>https://www.claymath.org/millennium-problems. Citado na página 15.

GRAHAM RONALD L.; KNUTH, D. E. P. O. **Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science**. 2. ed. Reading, MA: Addison-Wesley, 1994. Citado na página 12.

HUNTER, D. J. **Fundamentos da matemática discreta**. Rio de Janeiro: LTC, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 42.

IEZZI, G.; HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática Elementar: Sequências, Matrizes, Determinantes e Sistemas. Vol. 4**. São Paulo: Editora Atual, 2006. Citado na página 14.

LIMA, E. L.; AL. et. **A Matemática do Ensino Médio - vol. 2**. 3ª edição. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2000. (Coleção do Professor de Matemática). Citado 2 vezes nas páginas 19 e 20.

PEREIRA, M. V. **Recorrências - problemas e aplicações**. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática)) — Universidade de Brasília, Brasília, 2014. Acesso em: 30 nov. 2024. Disponível em: <https://profmat-sbm.org.br/dissertacoes/>https://profmat-sbm.org.br/dissertacoes/. Citado na página 12.

SILVA, N. H. D. Torre de hanói e a lenda do fim do mundo. In: **XXIX Feira Catarinense de Matemática**. [S.l.: s.n.], 2015. Citado na página 37.

Apêndices

APÊNDICE A – Questionário

Por favor, responda às seguintes perguntas de acordo com o seu nível de conhecimento sobre sequências e recorrências. Isso nos ajudará a entender o seu nível de compreensão sobre o tópico. Não se preocupe se você não souber a resposta para alguma pergunta.

1. **O que é uma sequência numérica?**
   a) Não sei
   b) Uma lista de números aleatórios
   c) Uma lista ordenada de números que geralmente possui uma lei de formação
   d) Uma lista de números em ordem decrescente
2. **Qual é o próximo termo na sequência: 2, 4, 8, 16, ...?**
   a) Não sei
   b) 24
   c) 32
   d) 64
3. **O que é uma recorrência em matemática?**
   a) Não sei
   b) Uma sequência que não segue nenhum padrão
   c) Uma equação ou fórmula que expressa um termo em função de outros termos na sequência
   d) Uma sequência de números ímpares
4. **O que é uma recorrência linear de primeira ordem?**
   a) Não sei
   b) Uma sequência que nunca termina
   c) Uma equação ou fórmula que envolve a soma de termos anteriores na sequência
   d) Uma equação ou fórmula que envolve cada termo subsequente em uma função linear do termo anterior
5. **O que é uma progressão aritmética (PA)?**

a) Não sei
b) Uma sequência em que cada termo é o produto do termo anterior por uma constante
c) Uma sequência em que cada termo é a soma do termo anterior por uma constante
d) Uma sequência em que cada termo é um número primo

6. **O que é uma progressão geométrica (PG)?**

   a) Não sei
   b) Uma sequência em que cada termo é a soma do termo anterior por uma constante
   c) Uma sequência em que cada termo é a multiplicação do termo anterior por uma constante
   d) Uma sequência de números ímpares

7. **A Torre de Hanói é frequentemente usada para ilustrar qual conceito matemático?**

   a) Não sei
   b) Probabilidade
   c) Combinatória
   d) Recursão

8. **Qual a fórmula matemática que descreve o número mínimo de movimentos para resolver a Torre de Hanói com n discos?**

   a) Não sei
   b) $M(n) = 2^n - 1$
   c) $M(n) = n^2 - 1$
   d) $M(n) = n + 1$

9. **Qual a fórmula geral para encontrar o n-ésimo termo de uma progressão aritmética?**

   a) Não sei
   b) $a_n = a_1 + (n - 1)r$
   c) $a_n = a_1 \times r^{(n-1)}$
   d) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

10. **Qual a fórmula geral para encontrar o n-ésimo termo de uma progressão geométrica?**

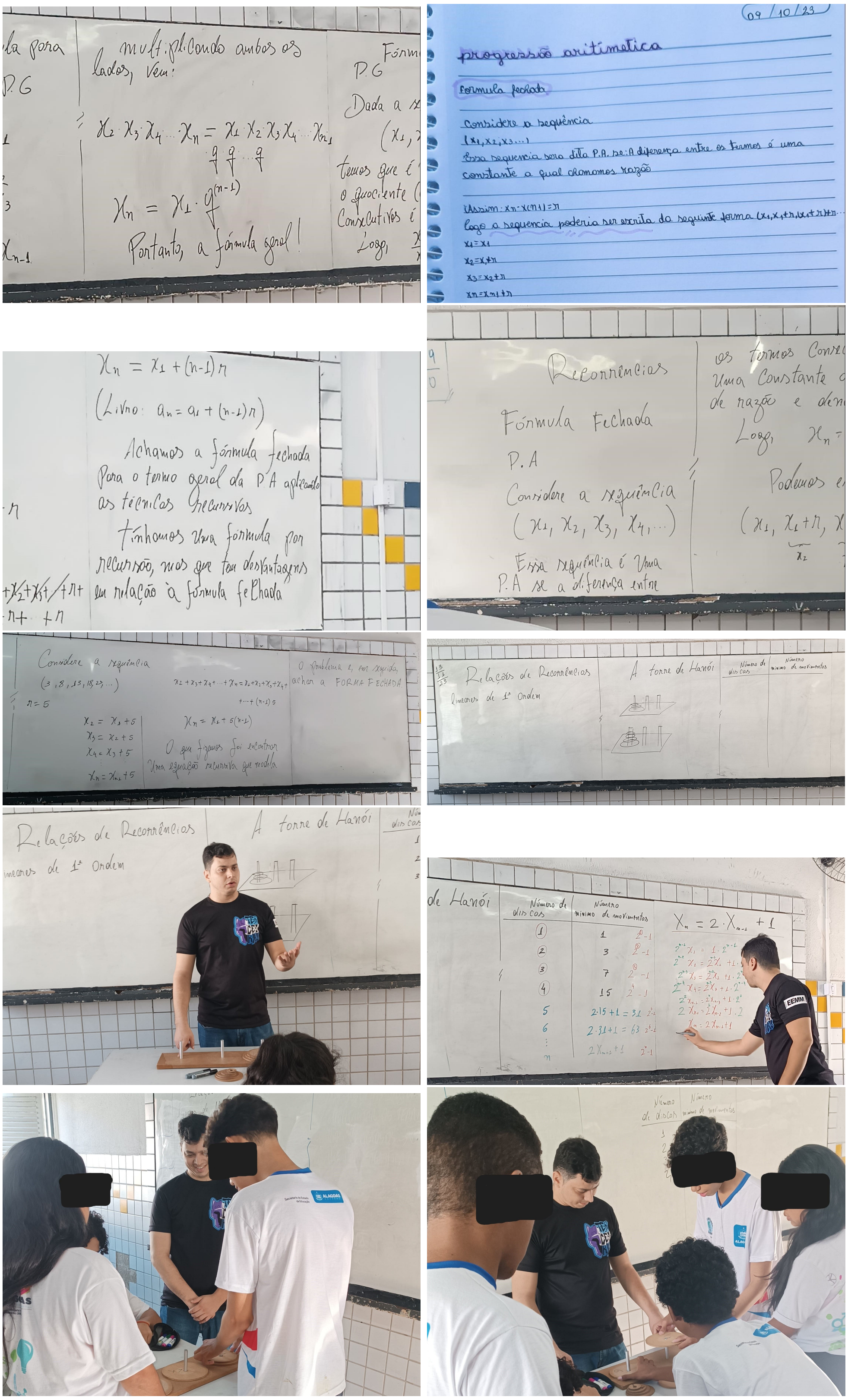
    a) Não sei
    b) $a_n = a_1 + (n - 1)r$
    c) $a_n = a_1 \times r^{(n-1)}$
    d) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

APÊNDICE B – Aulas Teóricas e Práticas

Figura 19 – Aulas Teóricas e Práticas - 8º ano fundamental

Fonte: Dados do autor

Figura 20 – Aulas Teóricas e Práticas - 1T01 e 1T02



Fonte: Dados do autor