UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS - UFAL
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

João Luiz Batista dos Santos

DIAGRAMAS NA DIDÁTICA DA MATEMÁTICA E CRIATIVIDADE:
Do raciocínio hipotético à argumentação lógica

Maceió
2024

JOÃO LUIZ BATISTA DOS SANTOS

DIAGRAMAS NA DIDÁTICA DA MATEMÁTICA E CRIATIVIDADE:
Do raciocínio hipotético à argumentação lógica

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) apresentado como requisito parcial para a obtenção do Título de Licenciado em Matemática.
Orientadora: Prof.ª Dr. Lúcia Cristina Silveira Monteiro

Maceió
2024

Catalogação na Fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

S237d Santos, João Luiz Batista dos.
Diagramas na didática da matemática e criatividade : do raciocínio hipotético à argumentação lógica / João Luiz Batista dos Santos. - 2024.
65 f. : il.

Orientadora: Lúcia Cristina Silveira Monteiro.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática : Licenciatura) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2024.

Bibliografia: f. 60-63.
Anexos: f. 64-65.

1. Diagramas. 2. Didática da matemática. 3. Educação Matemática - Filosofia. 4. Problemas abertos. 5. Abdução (Lógica). I. Título.

CDU: 510.6

Folha de Aprovação

JOÃO LUIZ BATISTA DOS SANTOS

DIAGRAMAS NA DIDÁTICA DA MATEMÁTICA E CRIATIVIDADE: DO RACIOCÍNIO HIPOTÉTICO À ARGUMENTAÇÃO LÓGICA

Trabalho de conclusão de curso apresentado à banca examinadora do curso Licenciatura plena em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Banca examinadora:

Documento assinado digitalmente
gov.br LUCIA CRISTINA SILVEIRA MONTEIRO
Data: 11/12/2024 11:58:01-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Orientador: Profa. Drª. Lúcia Cristina Silveira Monteiro
(Universidade Federal de Alagoas)
Data: 04/12/2024
Nota: 10,0

Documento assinado digitalmente
gov.br VIVIANE DE OLIVEIRA SANTOS
Data: 08/12/2024 11:18:13-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Drª. Viviane de Oliveira Santos
(Universidade Federal de Alagoas)
Data: 04/12/2024
Nota: 9,50

Documento assinado digitalmente
gov.br THAYS RAYANA SANTOS DE CARVALHO
Data: 11/12/2024 11:45:35-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Drª. Thays Rayana Santos de Carvalho
(Universidade Federal de Alagoas)
Data: 04/12/2024
Nota: 9,50

Dedico este trabalho aos meus pais, José Luiz Batista da Silva e Maria José dos Santos, por todo o incentivo e apoio oferecido durante minha jornada acadêmica.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por me dar saúde e determinação durante todo o processo para a realização deste trabalho;

Agradeço a todos os professores do curso de modo geral, pelas correções e ensinamentos que me permitiram apresentar uma evolução na formação profissional como matemático e educador ao longo do curso;

Aos meus familiares, pela compreensão e incentivo durante toda essa etapa;

Aos meus amigos e colegas de curso, Arthur Roberthy, José Isaías, Magno Antonio, Mariana Bispo e Pedro Otávio, pelo compartilhamento de conhecimentos, experiências e apoio mútuo;

À minha orientadora, Prof.ª Dr. Lúcia Cristina Silveira Monteiro, pela orientação, paciência, dedicação e valiosas contribuições durante todo o processo de elaboração deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho aborda a relevância dos processos diagramáticos no incentivo ao raciocínio hipotético e sua exploração como metodologia para a didática da matemática. Para o desenvolvimento do trabalho, segue a exposição de uma pesquisa sobre o conceito de abdução, termo este que tem como aproximação o sentido de - raciocínio hipotético. Esse tipo de raciocínio é fundamental para a obra e a metodologia científica proposta por Charles Sanders Peirce e outras pesquisas com base nesse teórico, e, portanto, um conceito fundamental para o desenvolvimento deste trabalho. Na sequência da construção do argumento aqui presente, destacamos a importância da visualização nos métodos para compreensão de conceitos matemáticos e propomos atividades em aulas de matemática por investigação com problemas abertos, utilizando processos em diagramas. Por fim, apresentaremos exemplos encontrados na bibliografia da área da didática da matemática que exploram visualização por diagramas que são problemas abertos e percebemos possibilidades desta abordagem favorecer o desenvolvimento de conceitos iniciados por uma abdução.

Palavras-chave: Diagramas. Didática da Matemática. Filosofia da Educação Matemática. Problemas abertos. Raciocínio abdutivo.

ABSTRACT

This work addresses the relevance of diagrammatic processes in fostering hypothetical reasoning and their exploration as a methodology for mathematics education. To develop this study, a discussion on the concept of abduction is presented, a term closely associated with the idea of hypothetical reasoning. This type of reasoning is fundamental to the work and scientific methodology proposed by Charles Sanders Peirce and other research based on this theorist, making it a key concept for the development of this work. Following the construction of the argument presented here, we highlight the importance of visualization in methods for understanding mathematical concepts and propose activities for mathematics lessons through investigation with open problems, utilizing diagrammatic processes. Finally, we will present examples from the literature in the field of mathematics education that explore visualization through diagrams as open problems, identifying how this approach can foster the development of concepts initiated by abduction.

Keywords: Abductive reasoning. Diagrams. Mathematics Didactics. Open problems. Philosophy of Mathematics Education.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Em busca de alternativa aos métodos tradicionais para o ensino da matemática, que exploram apenas memorização para manipular propriedades de suas estruturas matemáticas formalizadas, este trabalho objetiva explorar a relevância dos raciocínios para a didática da matemática.

O problema central investigado nesta pesquisa é: como os diagramas podem ser incorporados de maneira eficaz na didática da matemática para melhorar a compreensão e estimular o desenvolvimento dos raciocínios em diferentes contextos matemáticos pelos alunos?

Para tentar responder essa pergunta, apresentamos conceitos da filosofia das ciências que envolvem o tema e buscamos exemplificar com fatos encontrados na história da matemática e na didática da matemática. Destacamos a importância dos diagramas para a matemática e a concepção de diagrama na obra de Peirce para o desenvolvimento dos raciocínios em matemática, com destaque para o raciocínio abdutivo.

Para esse enfoque buscaremos apresentar uma proposta metodológica para a didática da matemática que incorpora processos diagramáticos e raciocínio abdutivo, buscando melhorar a compreensão e o desenvolvimento de raciocínios pelos alunos. Os objetivos específicos incluem: trazer o conceito de abdução e sua importância no método científico de Peirce; expor a relevância da visualização e dos diagramas no desenvolvimento do raciocínio abdutivo; analisar a presença e o uso de diagramas na história da Matemática; e propor, por meio de atividades investigativas e problemas abertos, como os processos envolvendo visualização e diagramas podem favorecer o desenvolvimento do raciocínio abdutivo.

Para a construção de uma proposta para a didática da matemática, destacaremos a visualização de diagramas como um caminho para a formulação de problemas abertos e a promoção de raciocínios matemáticos. Neste contexto, introduzimos a noção de processos em diagramas, os quais possuem uma relação direta com os problemas abertos. Ressaltamos, porém, que o conceito de problema aberto será devidamente definido ao longo do trabalho, de modo a esclarecer sua conexão com a utilização de diagramas e as possibilidades que oferecem para a manifestação de raciocínios intrínsecos ao pensamento matemático.

A metodologia empregada nesta pesquisa inicia-se com um levantamento bibliográfico, abrangendo trabalhos sobre diagramas, raciocínio abdutivo e didática da matemática, com foco na teoria de Charles Sanders Peirce e suas conexões com conceitos matemáticos. As fontes foram selecionadas principalmente por meio das plataformas *Google Acadêmico* e *Scielo*.

A partir do estudo detalhado das obras selecionadas, realizamos uma análise crítica e interpretativa para contextualizar as abordagens propostas na didática da matemática. Com base nesse embasamento, identificamos exemplos práticos e elaboramos propostas que buscam responder à questão investigativa, chegando a algumas conclusões e resultados apresentados ao final do trabalho.

Para o desenvolvimento deste trabalho, organizamos os seguintes temas: no capítulo dois, apresentamos a matemática como ciência heurística e abordamos o método científico de Peirce. No capítulo três, discutimos o conceito de abdução, destacando sua conexão com o raciocínio criativo e processos heurísticos. O capítulo quatro enfatiza a relevância da visualização no raciocínio abdutivo, analisando como os diagramas estão diretamente envolvidos nesse processo. Os capítulos cinco e seis tratam de investigar a presença e a evolução dos diagramas ao longo da história da matemática, desde a Grécia Antiga até sua aplicação contemporânea, com foco em problemas abertos e seu papel no favorecimento do raciocínio abdutivo e na didática da matemática. Por fim, no capítulo sete, apresentamos as considerações finais, sintetizando os principais pontos discutidos na pesquisa e trazendo reflexões sobre a preparação docente necessária para incorporar os diagramas no ensino da matemática de forma efetiva.

2. MATEMÁTICA É CIÊNCIA HEURÍSTICA, CIÊNCIA DA DESCOBERTA

Charles Sanders Peirce entende a ciência como uma atividade realizada por pessoas vivas, que está sempre sujeita a modificações e transformações ao longo do tempo. Essa visão evita definições abstratas e fixas e leva Peirce a dividir a ciência em dois tipos: as "Ciências Teóricas" e as "Ciências Práticas". As "Ciências Teóricas" ainda se subdividem em Heurísticas, ou ciências da descoberta, e Sistemáticas, ou ciências da revisão.

Peirce (2008) considera a matemática como ciência Heurística ou da descoberta em que envolve a investigação e entende a lógica como o método dos métodos, de modo que Peirce a partir das explicitações e do trabalho que associava as ideias do silogismo de Aristóteles reconhece a lógica não apenas em sistemas fechados de pensamento, mas também nas investigações humanas em aberto.

Nesse movimento, ao buscarmos compreender os conceitos e características dos diagramas e entender a relação entre os procedimentos diagramáticos e a abdução, nosso objetivo é favorecer a didática e apoiar a produção de conhecimento matemático, encontrando assim um ponto de conexão entre os diagramas e a matemática para Peirce.

Em sua obra principal *Collected Papers*, Peirce traz essa classificação sobre as ciências e o método científico, em que da mesma forma que entende o pensamento diagramático como uma ferramenta heurística com base no que observamos na pesquisa de Montaner (2017), também percebe a matemática como uma ciência de natureza heurística, ou seja, uma ciência da descoberta e que consequentemente envolve investigação. Então, nada nos impede de relacionar uma ferramenta heurística, nesse caso os diagramas, a uma ciência heurística que é a matemática para Peirce.

2.1 O método científico de Peirce

O método científico para Peirce é a forma de entender algo e é constituído da inter-relação entre os raciocínios indutivo, dedutivo e abdutivo, um procedimento que é base para novas descobertas e que, segundo Bacha (1997, p.5), na concepção de Peirce "pode nos levar à verdade, em um longo prazo, um longo percurso, que constitui o processo dinâmico da investigação". Essa investigação para Peirce é essencial para o método científico, já que se investiga com o foco em tentar colocar um fim à dúvida.

2.2 Um método científico para a Didática da Matemática

No entendimento geral, método científico é um processo que direciona por meio de passos, caminhos para novas descobertas e interpretações, como um meio que permite a evolução contínua da ciência para a construção do conhecimento.

Para nos comunicarmos, podemos usar diferentes linguagens como, por exemplo, a oral, a escrita, a visual ou até a visual táctil, linguagem essa em que os diagramas se encaixam sendo compreendidos como um tipo de representação visual que podem sintetizar conhecimentos partindo da observação para a percepção de relações, como gráficos, mapas conceituais, podendo auxiliar numa compreensão mais rápida acerca do conhecimento a qual o diagrama está relacionado. No entanto, o filósofo e estudioso americano Charles Sanders Peirce, considerado o pai da semiótica, traz uma ideia de diagrama que vai além apenas da sintetização de informações, podemos perceber isso na colocação de Montaner (2017) ao analisar as obras de Peirce:

> [...] Em seus textos, Peirce elaborou uma complexa teoria sobre os signos, segundo a qual todo pensamento é expresso por meio de um grafo ou signo, que pode ser de três tipos: ícone, índice ou símbolo. Em seguida, Peirce subdividiu os ícones em imagens, diagramas e metáforas, definindo o diagrama como "um ícone que torna inteligível as relações sobretudo espaciais, entre as partes que constituem um objeto". O raciocínio imaginativo é exercido por meio de diagramas, enquanto o experimental acontece por meio de experimentos (Montaner, 2017, p.8-9, tradução de Lima Paz).

Podemos entender, de acordo com a colocação de Montaner (2017), que Peirce tinha entendimento dos diagramas como representações visuais que facilitam a aprendizagem na compreensão das relações entre diferentes partes de um objeto de estudo. Entretanto, um ponto chama a atenção nesse trecho da obra de Montaner (2017), é a compreensão de Peirce de que o raciocínio imaginativo, exercido por meio de diagramas, está diretamente relacionado ao raciocínio hipotético.

Peirce entende os diagramas em seu funcionamento como representações visuais e com grande relevância em sua teoria semiótica, essa que pode ser entendida como "o estudo ou doutrina dos signos" (Colapietro, 1993, p.178), com o signo como "algo que representa outra coisa" (Colapietro, 1993, p.179), incluindo nesse contexto os diagramas como representações que auxiliam no raciocínio, tornando-o mais visual, criativo e intuitivo. Esses elementos estão inseridos por completo em uma abordagem semiótica, como nos explicita Machado (2008), ao destacar o diagrama como um conceito de grande valor à teoria semiótica, valorizando as relações de ideias no fluxo que configura o movimento dos raciocínios.

3. O CONCEITO DE ABDUÇÃO

Souza (2014) consegue identificar ideias nucleares na obra *Collected Papers* de Peirce a fim de compreender o sentido de abdução em sua obra. A partir da leitura das asserções articuladas e das ideias nucleares apresentadas no quadro[1], Souza (2014) identifica três categorias às quais essas ideias estão relacionadas. Essas categorias abrangem a definição, que esclarece o que é a abdução, as características, que explicitam aspectos específicos da abdução e os procedimentos, que mostram o que a abdução desencadeia, levando à seguinte conclusão:

> Para Peirce (1992), a abdução é, tal como pudemos interpretar, o encadeamento de atividade mental proveniente de uma conexão dos elementos da consciência ou de ideias derivadas de fatos observados (I.N. 37), sendo portando um raciocínio, uma inferência lógica (I.N. 24), de modo que tudo acontecerá segundo um procedimento organizado (I.N. 7) (Souza, 2014, p.81).

Souza (2014) interpreta, segundo a sua análise à obra de Peirce e de acordo com o que foi estudado, que para Peirce a abdução é um ato inferencial, uma hipótese provisória que tem origem na pergunta, trata-se de um tipo de raciocínio completamente diferente dos outros, pois abre novas possibilidades acerca do que pode ser entendido e observado.

Essa concepção de Souza (2014) sobre o que é abdução, segundo Peirce, abre margem para compreendermos a abdução, por ser um tipo de raciocínio que tem origem na pergunta, com capacidade de estar associada a um processo de heurística ou descoberta.

3.1 Abdução e heurística, descoberta

A abdução em Peirce tem como fator as peculiaridades que permitem e a fazem ser um tipo de raciocínio completamente diferente dos outros e é como compreende Souza (2014), nesse sentido, ao analisar as obras de Peirce:

> Assim, inferimos que, para Peirce, a abdução traz características peculiares. Sua particularidade é a de se constituir da interrogação que busca o levantamento de hipóteses, a partir de articulações que quando se revelam em conjecturas o faz de maneira rápida e inesperada como fruto da observação e da experiência que revelam a força do que é percebido (Souza, 2014, p.80).

---

[1] Quadro elaborado por Souza (2014) para a compreensão do conceito de abdução presente na obra de Peirce, pode ser visto na obra de Souza (2014) entre as páginas 53 e 75.

Souza (2014) interpreta com isso e em todo seu estudo que a abdução é como uma inferência na lógica não clássica, relacionada à lógica crítica, nessa avaliação de argumentos que podem conduzir a verdade, e pertencente a lógica trivalente pelo fato de a lógica trivalente considerar três valores de verdade: o verdadeiro, o falso e o que não é verdadeiro nem falso, por ser algo desconhecido ou incerto. Souza (2014) percebe então a incerteza como uma característica da abdução, numa forma de raciocínio que provém da observação de fatos e da experiência daquele que se propõe a investigar, capaz de apresentar ideias e levantar hipóteses admitindo um valor lógico intermediário válido para a investigação, que não pode ser definido nem como verdadeiro, nem como falso, sendo então a abdução uma tarefa investigativa organizada, objetiva e criativa que valoriza o processo de produção do conhecimento.

No tangente à produção de conhecimento, Souza (2014) cita Bicudo (2008) na ideia de que a produção de conhecimento é dinâmica e perspectiva, o que pode trazer essa ideia de incerteza. Como podemos perceber na colocação abaixo:

> A produção do conhecimento, como apresentado por Bicudo (2008, p. 146-147), é uma atividade, é algo dinâmico e perspéctico. Logo, o processo de sua produção tem uma realidade que também é dinâmica e que valoriza o ato criador.
>
> Esse ato criador pode trazer à tona a ideia da incerteza da qual Peirce nos fala. Na produção do conhecimento matemático, por exemplo, a incerteza é importante porque não se têm de início o verdadeiro ou o falso. Há conjecturas ou hipóteses que, mediante a investigação, levam à construção de argumentos e à validação do feito. Essa validação não oferece uma verdade universal, mas contingente. Ou seja, em um determinado contexto, uma hipótese pode ser verdadeira e em outro contexto ela poderá ser falsa (Souza, 2014, p.87).

Com base nisso, compreendemos que na produção de conhecimento matemático a incerteza é vista como um elemento importante, que a ausência inicial da confirmação de algo como verdadeiro ou falso, permite a formulação de conjecturas e hipóteses, que sendo investigadas ajudam nas construções de argumentos e possíveis validações contingentes do objeto de estudo.

Nessa perspectiva, Souza (2014), a partir da análise do trabalho de Peirce, apresenta a abdução como um tipo de raciocínio hipotético que, motivado pela incerteza, produz conjecturas a partir da observação, de maneira semelhante, Bicudo (2008) destaca que a incerteza é uma parte essencial do processo de produção de conhecimento e de novas descobertas. O raciocínio abdutivo, nesse contexto criativo de gerar hipóteses, é o ponto de partida para a heurística, ainda que essas hipóteses, mesmo testadas, possam ou não resultar em fatos concretos.

4. A IMPORTÂNCIA DA VISUALIZAÇÃO PARA O RACIOCÍNIO ABDUTIVO

Nessa linha em que a abdução pode ser compreendida como uma hipótese provisória com origem na pergunta, percebemos sua completa relação com o raciocínio hipotético, tendo como base a formulação de hipóteses e conjecturas na busca por explicações pela incerteza ou falta de informações do fenômeno estudado. O que nos falta entender agora é a relevância da visualização nesse processo envolvendo o raciocínio hipotético, ou seja, como esse elemento auxilia no raciocínio para elaborar hipóteses, partindo então de uma noção geral do que grandes estudiosos compreendem sobre visualização como colocam Vale e Pimentel (2013):

> [...] De acordo com Arcavi (2003), a visualização envolve o produto e o processo de criação, interpretação e reflexão sobre imagens. Para Zimmerman e Cunningham (1991), a visualização é o processo de formar imagens (mentalmente, com papel e lápis ou com apoio da tecnologia) e usar tais imagens eficazmente na descoberta e compreensão matemática. Gutiérrez (1996) caracteriza a visualização como o tipo de atividade que tem por base o recurso a elementos visuais ou espaciais, sejam mentais ou físicos, utilizados na resolução de problemas ou na demonstração de propriedades. A visualização, para Eisenberg e Dreyfus (1989) está associada a representações visuais, isto é, à construção de modelos visuais que refletem a estrutura matemática subjacente, considerando que qualquer conceito matemático pode ser traduzido por um gráfico ou um diagrama (Vale; Pimentel, 2013, p.207-208).

Percebemos então, com base na concepção de diversos autores, a visualização como elemento para criação, interpretação, reflexão, descoberta e compreensão, servindo como ferramenta para a resolução de problemas ou demonstração de propriedades a partir de imagens e representações visuais, com seu uso muito presente em matemática e em diversas áreas relacionadas.

O que nos desperta atenção aqui é a visualização como ferramenta criativa e capaz de influenciar na descoberta e compreensão do que é estudado ou analisado. A conexão com o raciocínio hipotético vem nesse sentido, com ideias que podem vir à tona pela visualização, com a criação de suposições e provas sendo facilitada pela visualização, conforme explicado por Vale e Pimentel (2013). Nessa linha, as autoras detalham como a visualização, junto com seus meios de representação, pode auxiliar o raciocínio, especialmente na área da matemática:

> [...] Digamos que a visualização explica dum modo muito mais claro a generalização feita, que de outro modo, ou não poderia simplesmente ser efetuada por falta de ferramentas matemáticas, ou, efetuada apenas numericamente, converter-se-ia num mero exercício de tentativa e erro e de manipulação simbólica com pouco significado. Esta nossa posição vai de encontro ao que é referido recentemente por Dreyfus, Nardi e Leiken (2012).

> Para estes autores a importância da contribuição das representações visuais na prova em matemática tem vindo a crescer.
> Contudo, tem sido questão central em debate é se uma representação visual pode ser considerada como um adjunto para a prova, como parte integrante da prova ou como prova. Esta questão tem, ao nível da educação, muito a ver com as concepções/perspectivas do professor sobre o papel que a visualização pode desempenhar no raciocínio matemático. Na verdade, os puristas não consideram prova matemática algo que assente completamente na visualização, mas, ainda que não possa ser considerada prova, não deixa de fornecer uma explicação clara da veracidade de uma afirmação, estimulando o pensamento matemático, e ajudando a ver por onde começar para fazer uma prova formal (Vale; Pimentel, 2013, p.209).

Temos com essa citação a ideia de que a visualização facilita a generalização e entendimento de conceitos matemáticos, com capacidade de transmitir de maneira mais clara e intuitiva casos e situações que muitas vezes são considerados complexos em matemática, isso permite o uso da visualização como elemento relevante para provas matemáticas. No entanto, ainda existe uma considerável resistência por parte de alguns matemáticos em aceitar algum tipo de visualização de formas geométricas em meio a uma prova matemática. Muitos entendem é necessária uma formalização baseada no princípio do terceiro excluído, este, que é um princípio da lógica pura que afirma que se uma proposição é falsa, não pode ser verdadeira, e vice-versa. Entendemos que esse tipo de prova é uma interpretação importante para validação de objetos matemáticos, quando colocado sob a perspectiva de uma estrutura matemática rígida. Esse crivo, baseado na prova que utiliza, o princípio do terceiro excluído, tornou-se importante para a matemática formal, porém, entendemos que para os processos de ensino, aprendizagem e avaliação da educação básica, a construção de um pensamento formal é o objetivo final e não o caminho, o método. Mesmo assim, fica compreendido aqui que o que a visualização faz é um processo que pode auxiliar, desenvolver raciocínios para se chegar a uma prova formal, na forma como começar, estimulando o pensamento na geração de ideias e conjecturas.

Na leitura do texto de Vale e Pimentel (2013) fica perceptível a diferença de concepções que vários estudiosos e autores matemáticos tem na ideia de prova, seja no que faz uma prova ser mais formal, com o uso maior do raciocínio dedutivo, ou menos formal, pelo uso maior do raciocínio indutivo, e quais os elementos necessários para ser concebido como tal. No entanto, um dos autores em específico nos faz atentar em sua concepção sobre prova como explicita Vale e Pimentel (2013):

> Dreyfus et al. (2012) consideram que provar inclui uma variedade de aspectos que influenciam o aparecimento da prova e a maneira como esta pode ser concebida por alunos e professores. Estes aspectos abrangem: diferentes representações, incluindo a visual, a verbal e a dinâmica, que podem ser

> utilizadas no decurso da produção de prova; diferentes formas de argumentar matematicamente, tais como argumentos indutivos baseados em exemplos, argumentos genéricos, bem como argumentos produzidos individualmente versus socialmente; diferentes graus de rigor e de detalhe; provas múltiplas, ou seja, provas diferentes para o mesmo enunciado matemático, que podem ser usadas em paralelo ou sequencialmente, por uma única pessoa ou um grupo (Vale; Pimentel, 2013, p.213).

Observamos, com base nessa percepção de Dreyfus *et al*. (2012), que a prova é um processo que engloba diferentes aspectos, dentre eles a visualização, que pode aparecer de diversas maneiras ou jeitos, sendo algo dinâmico, que concebe vários tipos de argumentos e que pode ser composto da união de vários desses aspectos, numa combinação que pode incluir desde representações visuais até verbais. No entanto, devemos saber que antes de provar qualquer caso ou situação, focado essencialmente na matemática, se passa por elaborar uma hipótese ou conjectura que em seguida se é testada através da prova, um matemático por si só não chega sempre em uma tese que imediatamente ao ser testada é comprovada como verdadeira.

Nesse contexto, "de acordo com Harel e Sowder (1998), grande parte do trabalho do matemático é despendido a explorar e a conjeturar, e não a procurar provas" (Vale; Pimentel, 2013, p.212), com isso no entendimento de que conjecturas nada mais são do que hipóteses ou ideias cujo ainda não se sabe a veracidade de tal, lembramos que o raciocínio hipotético, alinhado à abdução, forma a base que estimula o pensamento na geração de hipóteses e conjecturas, tornando-se um alicerce essencial no trabalho do matemático. Vale e Pimentel (2013), com base nessa perspectiva, também relatam que:

> Para além dos dois tipos clássicos de raciocínio, há vários autores (e.g. Radford, 2008; Rivera, 2008) que consideram um outro tipo: o raciocínio abdutivo. A abdução é uma inferência não necessária, uma hipótese explicativa prévia. Apesar de este ser o modo de inferência menos seguro, pois o seu sucesso depende da intuição e do conhecimento prévio, é um tipo de raciocínio com forte referência à descoberta de padrões, pois ele é a porta de entrada no raciocínio indutivo, correspondendo à fase de procura da hipótese preliminar sobre o que têm em comum os dados analisados, assumindo assim uma importância fulcral no avanço duma exploração matemática. De facto, as hipóteses formuladas são apenas plausíveis uma vez que não é utilizado o raciocínio dedutivo, mas é nesta fase abdutiva que intervém fortemente a criatividade na elaboração de novas ideias (Rivera, 2008). Pólya (1954) chama a esta fase inicial da criação matemática raciocínio plausível, defendendo que, antes de se atingir a certeza absoluta, há que passar por uma conjetura plausível, precisando-se do provisório antes de atingir o definitivo, tal como precisamos de andaimes para construir um edifício. Enquanto que a abdução consiste na escolha da hipótese, a indução já envolve a sua testagem. A abdução é o processo que introduz uma nova ideia, a formulação de uma conjetura; a indução corresponde à etapa

> seguinte, a de testar a conjetura em mais dados. Este processo pode ser cíclico até ser construída uma generalização.
> De acordo com Rivera e Becker (2007) o processo de generalização ocorre quando há aceitação de uma forma geral obtida por um processo cíclico de abdução e indução. A indução necessita inicialmente da afirmação abdutiva que é depois sujeita ao teste repetido de confirmação para verificar a sua resistência. Em sintonia com estes autores, Yu (2006) resume de forma clara e concisa as ideias principais destes três tipos de raciocínio, afirmando que a abdução cria, a indução verifica e a dedução explica (Vale; Pimentel, 2013, p.213-214).

Temos visto nessa linha de pensamento a abdução como a porta de entrada para a indução, à medida que a abdução trabalha no processo de criação, formulando hipóteses e conjecturas, a indução aparece como processo seguinte no teste dessas conjecturas em mais casos, até ser construída uma generalização que depende de uma aceitação de maneira geral, obtida por um processo cíclico de abdução e indução, que em seguida tem sua explicação colocada por meio da dedução, como resume Yu (2006) no trecho acima, esses três raciocínios estão conectados, pois, como propõe a síntese acima, a abdução cria, a indução verifica e a dedução explica.

Compreendido esse juízo geral da relação entre esses diferentes tipos de raciocínio, voltamos a questão principal nesse capítulo, no sentido de entender qual a relação da visualização envolvendo esse tipo de raciocínio hipotético e abdutivo e no contexto matemático de aprendizagem. Dado que já vimos que o raciocínio indutivo e dedutivo tem suas presenças constantes em provas e demonstrações matemáticas, com a visualização sendo elemento que pode estar constantemente nesse processo, e que a abdução, por meio da atividade criativa na geração de novas hipóteses e ideias, é grande parte do trabalho matemático e serve como base para o raciocínio indutivo, podemos, de acordo com Vale e Pimentel (2013), ressaltar que:

> O NCTM (2000) recomenda que os alunos devem usar o raciocínio indutivo para procurar relações matemáticas, através do estudo de padrões. Vários investigadores preconizam o estudo de padrões figurativos de crescimento (e.g. Barbosa, 2011; Orton, Orton & Roper, 1999; Vale & Pimentel, 2010; Pimentel, 2011) como uma das possíveis abordagens para ajudar os estudantes a generalizar e a representar relações. De facto, e de acordo com Lannin et al. (2011) a generalização envolve identificar aspectos comuns entre os casos ou ampliar o raciocínio para além do domínio no qual foi originado, fazendo assim a ponte entre a saída de um mundo de objetos particulares e o tipo de raciocínio que designamos por abdutivo.
> As tarefas com padrões de crescimento em contextos figurativos têm recentemente sido utilizadas nas aulas de matemática, mas nem sempre exploradas de modo a desenvolver um raciocínio adequado, em particular o raciocínio funcional. O nosso objetivo fundamental é que a generalização possa ser feita partindo da análise das figuras, envolvendo raciocínio visual que analisa as características espaciais do padrão. A partir desta constatação desenvolve-se um conjunto de relações numéricas que permitem efetuar uma generalização através do raciocínio funcional. Este processo de

> generalização, embora possa aplicar-se a toda a produção de conhecimento matemático, está em forte ligação com as tarefas de exploração de padrões usadas como veículo para o pensamento algébrico [...] (Vale; Pimentel, 2013, p.214-215).

Nesse sentido, percebemos como a visualização desempenha um papel essencial no desenvolvimento do raciocínio matemático, especialmente ao lidar com padrões figurativos. Essas representações visuais ajudam os estudantes a identificar relações matemáticas e generalizar essas observações. Ao explorar atividades que focam no crescimento de padrões figurativos, é possível incentivar a percepção e a observação de regularidades nos objetos estudados, facilitando o processo de abdução e o raciocínio hipotético. Esse ambiente de descoberta torna-se propício para a formulação de conjecturas, a partir das observações feitas.

Ao observar os padrões e regularidades, os estudantes são levados a fazer generalizações, movendo-se de um raciocínio mais específico para outro mais amplo, estabelecendo conexões entre diferentes formas de pensar. Dessa maneira, a visualização torna-se uma ferramenta poderosa para a aprendizagem significativa.

Nesse contexto, a hermenêutica, conforme discutida nos estudos de Souza (2014), complementa esse processo de interpretação no estudo matemático. Silva (1987) define a hermenêutica como a arte de interpretar e restaurar o pensamento fundamental, destacando a necessidade de distanciamento ao analisar o objeto de estudo para que a interpretação seja imparcial e precisa. Já Garnica (1992), enxerga a hermenêutica como um processo que envolve dizer, explicar e compreender, fundamental na interpretação de símbolos matemáticos, ajudando a revelar seus sentidos ocultos.

Desse modo, assim como a visualização facilita a compreensão de padrões e conceitos, a hermenêutica promove uma interpretação mais profunda dos textos e representações matemáticas, permitindo que, por meio da leitura, reelaboração e representação, se chegue a uma verdadeira compreensão dos significados presentes na matemática.

4.1 A importância da visualização por diagramas para estimular o raciocínio hipotético

Para formular uma proposta para a didática da matemática apresentamos a visualização por diagramas para iniciar o desenvolvimento de raciocínio abdutivo, para investigar conceitos matemáticos utilizando a metodologia científica de Peirce para produzir conhecimento matemático, trazendo questões e exemplos que envolvem como os diagramas podem auxiliar na formulação de hipóteses e novos argumentos em situações matemáticas específicas.

Relembrando um pouco do que foi colocado no presente trabalho, Peirce também foi considerado o pai da semiótica e classificou os signos em sua teoria em ícones, índices e símbolos, com os diagramas classificados como ícones, no sentido de representações que se assemelham visualmente ao objeto.

Com essa classificação dos diagramas, Peirce compreendia que esses elementos tinham a capacidade de mostrar algo através da visualização, mesmo que estivesse escondido, de modo que como vimos com Montaner (2017), o próprio Peirce entende o raciocínio imaginativo sendo exercido por meio de diagramas, destacando a importância da representação visual neste tipo de raciocínio, que nesse caso é o mesmo que o abdutivo, facilitando e instigando a mente para a formulação de hipóteses e novas ideias. Percebemos isso na seguinte colocação de Franco e Borges (2017) em relação à abdução de Peirce:

> A abdução, de acordo com Peirce, é mais proximamente relacionada à iconicidade (Peirce CP 2.96, c.1902). Dessa forma, o raciocínio abdutivo seria o único que origina ideias novas (CP 5.171, 1903). Nesse caso, o raciocínio constrói um diagrama que apenas “sugere” uma conclusão (Franco; Borges, 2017, p.48).

Vemos então a possiblidade da abdução com a iconicidade conforme Peirce e consequentemente aos diagramas, o que nos resta entender é como essa ferramenta heurística, junto com a abdução, pode auxiliar na produção de conhecimento matemático. Para isso, nos voltamos a uma colocação de Souza (2014) em seu trabalho, acerca do ensino da matemática, explicitando o que entendeu na forma como a abdução pode contribuir na produção de conhecimento matemático:

> Tais apontamentos permite-nos compreender que a produção do conhecimento - entendida como trazer à luz o conhecimento - pode ser fruto do método investigativo, iniciando com o raciocínio abdutivo como um ato inferencial, uma hipótese provisória que tem origem na pergunta (ou no ato de questionar), uma maneira de se iniciar esse processo de produção, tal qual compreendemos em Peirce. Isso nos leva à ideia da abdução como um raciocínio que abre possibilidades de uma nova inteligibilidade daquilo que se vê e do que se pode expressar quando elaboramos uma explicação acerca do que é visto. Pelo modo como é definida, são princípios importantes para o desdobramento do processo de conhecimento que a abdução pode possibilitar (Souza, 2014, p.83).

Dessa maneira, Souza (2014) explica o papel que a abdução pode empenhar na construção do conhecimento matemático, podendo orientar o estudo dedutivo ou indutivo que predominam nos conteúdos de matemática, o que possibilita a formalização e a abstração, numa construção do conhecimento motivada pela incerteza, devendo ser incentivada pela abdução, num tipo de raciocínio que valoriza a criatividade e abre as possibilidades na produção de conhecimento.

Desse modo, os docentes podem associar os diagramas como ferramenta heurística aliadas a uma ciência heurística, como é a matemática segundo Peirce, com um processo investigativo permeado pela abdução através da incerteza, num meio que valoriza a formulação de conjecturas através da visualização e permite o surgimento de novas possibilidades, hipóteses e argumentos. Essa incerteza que está associada a dúvida, a pergunta, é um meio de fazer os estudantes construírem seu próprio conhecimento. Incentivar e instigar os alunos por meio da dúvida os faz buscarem respostas para aquilo que estão estudando, o que muitas vezes não resulta numa solução imediata, mas frequentemente a outras perguntas que surgem nesse processo para entender o fenômeno estudado. Bicudo, Esposito e Martins (1997) explicam um pouco essa questão interrogativa na busca por respostas:

> [...] "ter uma interrogação e andar em torno dela, em todos os sentidos, sempre buscando todas as suas dimensões e, andar outra vez e outra ainda, buscando mais sentido, mais dimensões e outra vez". A interrogação se mantém viva porque a compreensão do fenômeno não se esgota nunca (Bicudo; Esposito; Martins, 1997, p.24).

Essa concepção de Bicudo, Esposito e Martins (1997) nos ajuda a entender que mesmo quando acreditamos achar a resposta daquilo que estudamos ou analisamos sempre se abrem novas possibilidades, novas perguntas, novos casos sobre aquilo que acabamos de descobrir ou entender, de forma que num processo contínuo sempre haverá mais elementos a se compreender. À medida que vamos avançando e relacionando isso ao que estamos tentando entender sobre diagramas e a abdução, no processo de produção de conhecimento matemático, essa forma de pensar, no andar pela incerteza, pela dúvida, como coloca Bicudo, Esposito e Martins (1997), nos auxilia a perceber os diagramas como problemas abertos. A definição de Araujo, Oliveira e Veit (2017) nos ajuda a entender o que são problemas abertos:

> Problemas abertos, por definição, não possuem soluções pré-estabelecidas; apresentam estado inicial só parcialmente conhecido; referem-se a um evento do mundo real, com resultados consistentes com a realidade e exigem que os alunos façam julgamentos e elaborem argumentação para defender suas soluções (Araujo; Oliveira; Veit, 2017, p.1).

Nessa linha os problemas abertos, ao serem analisados com o suporte de diagramas, tornam-se catalisadores para o levantamento de conjecturas, com investigações e interpretações variadas, no sentido de encontrarmos diversas possibilidades ou maneiras de se chegar a uma resposta, podendo ser ela igual ou diferente, dependendo da maneira como o estudante interpreta e analisa o objeto de estudo, o que permite a formulação de novas hipóteses e argumentos de acordo com sua observação.

Como já vimos, o processo para entender algo, segundo Peirce, é chamado de método científico, sendo constituído da inter-relação da dedução, da indução e da abdução, com a abdução no entendimento de Peirce como um juízo antecipado e provisório, motivada pela interrogação e que busca o levantamento de hipóteses, revelando conjecturas de maneira rápida e inesperada através da observação e experiência, o que inclui a visualização como também instigadora no raciocínio abdutivo, num processo dinâmico e intuitivo que permite ao indivíduo reinterpretar o mundo, como indica Souza (2014), na análise feita em seu trabalho.

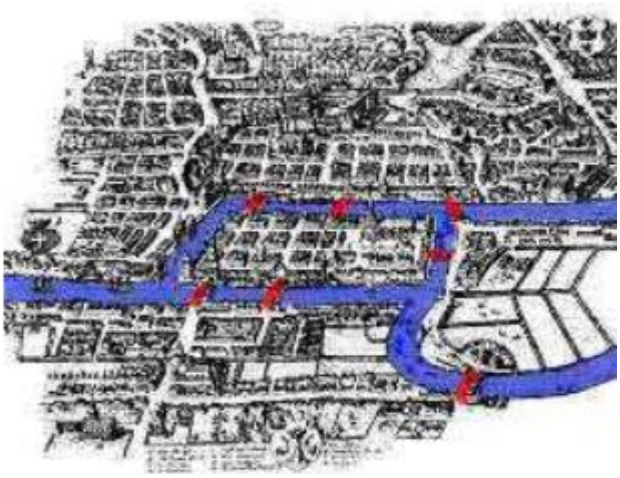
Na docência, podemos perceber que a abdução pode ser compreendida como uma “certeza” que surge da dúvida, como um processo que gera ideias e conjecturas e à medida que o aluno entende como certo em sua investigação, ele pode usar a conjectura ou ideia que acredita ser verídica para realizar testes sobre o que é incerto, a fim de definir se aquilo que pensou faz sentido ou não para o caso em questão. Segundo Souza (2014), apesar de ser um processo falho, a abdução permite essa produção de conhecimento justamente por admitir um valor lógico intermediário válido para investigação, que não pode ser definido nem como verdadeiro, nem como falso, algo incerto, daí vem esse trabalhar com a dúvida ou incerteza no raciocínio abdutivo.

Um exemplo de como a abdução, com o auxílio dos diagramas e da visualização, foi base para produzir uma das teorias mais usadas em diversas áreas, principalmente nas relacionadas a tecnologia, é o problema das pontes de Königsberg, resolvido por Leonard Euler. Contextualizando a situação temos que:

> No século XVIII a população de Königsberg perguntava se era possível atravessar as sete pontes sem passar duas vezes por qualquer uma delas. Nos dias ensolarados de domingo os habitantes tentavam encontrar uma maneira de atravessar as sete pontes sem passar duas vezes pelo mesmo lugar, e as tentativas eram sempre em vão. Apesar de que, muitos deles, acreditavam ser possível encontrar tal caminho. Em 1736, na Academia de Ciências Russa de São Petersburgo, Leonard Euler provou que não era possível fazer tal caminho (Pontes, 2019, p.23).

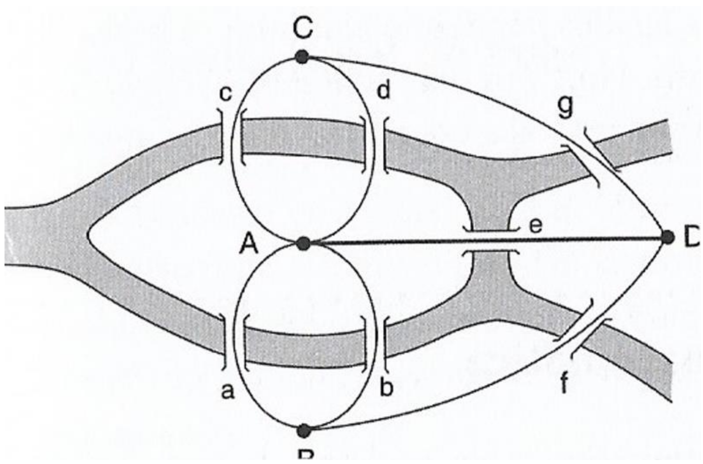
Nesse caso, Euler utilizou da visualização para resolver esse problema a partir da ideia que teve, de uma maneira a qual representou os lugares conectados pelas pontes como vértices e as pontes que ligavam estes terrenos como arestas, a partir daí analisou sua hipótese e explicou através desse caso, com um diagrama de vértices e arestas, que não era possível realizar esse caminho de passar por todos os lugares atravessando cada ponte apenas uma vez. As imagens abaixo representam a localização das pontes e o diagrama que Euler utilizou para resolver o problema, que após esse caso passaria a ser conhecido como um tipo de diagrama específico, identificado como grafo.

Figura 1: As sete pontes de Königsberg.



Fonte: https://www.mat.uc.pt/~alma/escolas/pontes/

Figura 2: Diagrama utilizado por Euler na resolução do problema das pontes de Königsberg.



Fonte: https://matematicasimplificada.com/pontes-de-konigsberg-leonhard-euler-grafo-solucao/

A solução de Euler foi baseada ao visualizar e perceber que Königsberg, pelo fato de ter quatro ilhas, cada uma com um número ímpar de pontes, o faz tomar isso como base para demonstrar que não existia um caminho que cobrisse todas as pontes apenas uma vez, independentemente de onde o indivíduo estivesse, indicando ser necessário um número par de pontes, ao chegar ou sair de cada ilha, para que fosse possível passar uma única vez por cada uma delas, atravessando por todos os locais ou ilhas da cidade. A maneira como Euler resolveu esse problema foi justamente a base para o surgimento de uma das grandes teorias matemáticas, a Teoria dos Grafos, que como já colocamos aqui, podem ser compreendidos como um tipo específico de diagrama, como colocado por Scheinerman (2003):

> A palavra Grafo tem vários significados. Em linguagem não matemática, refere-se a um método de representação de uma ideia ou conceito, por meio de uma ilustração ou por escrito. Tanto em matemática como na linguagem corrente, costuma referir-se a um diagrama usado para exibir o relacionamento entre duas grandezas (Scheinerman, 2003, p.381).

O interessante a ser percebido nesse caso é justamente compreender o como Euler utiliza abdução no processo de observação da situação, usando diagramas para tentar provar sua hipótese. Relembramos aqui, que o raciocínio abdutivo surge de forma antecipada e provisória, motivado pela interrogação ou incerteza na busca por levantamento de hipóteses, Euler utiliza um caso incerto, em que ninguém havia conseguido provar ainda que aquela situação era verdadeira ou falsa, faz testes, formula hipóteses, realiza inferências, para depois conseguir provar sua teoria utilizando o diagrama como elemento, servindo-o como base para o exercício do raciocínio abdutivo.

Voltando a questão da docência e a produção de conhecimento matemático, é possível entender com esse caso de Euler, como esse meio de pensar motivado pela dúvida auxilia na busca por respostas, casos que envolvem diretamente a investigação e um processo de descobertas, isso é um exemplo de caso a ser abordado, no intuito de atrair e chamar a atenção dos estudantes, voltando a matemática por meio de situações investigativas como colocado por Pontes (2018):

> As pesquisas nas áreas de Educação Matemática, com destaque no processo de ensino e aprendizagem de matemática, demonstram que o indivíduo aprendiz quando envolvido em situações que atiçam sua curiosidade, ele aprende na ação, pois se sente atraído e motivado para novas descobertas (Pontes, 2018, p.164).

Uma das maneiras de trabalhar estes tipos de situações, com o intuito de motivar os estudantes a produzirem por si só seu próprio conhecimento, com casos que atiçam essa curiosidade, é justamente através dos diagramas, as representações visuais que os diagramas apresentam podem auxiliar na forma de tornar conceitos abstratos mais tangíveis e acessíveis, incentivando dessa forma uma exploração ativa e o pensamento criativo, esse tipo de pensamento, que também está associado diretamente a abdução, está presente em ambientes motivados pela curiosidade e investigação, com os estudantes sendo incentivados a trabalhar a matemática de forma mais ativa e com um maior protagonismo.

O docente também pode utilizar dos diagramas para trabalhar as relações presentes em álgebra e geometria, por exemplo, uma das frases que mais ouvimos falar é “uma imagem vale mais do que mil palavras”, essa frase se encaixa perfeitamente no contexto a qual estamos abordando com os diagramas, muitas vezes as dificuldades que os alunos apresentam para compreender uma relação ou fórmula matemática quando apresentada apenas de forma algébrica é bem maior do que quando o docente utiliza exemplos que permitem a visualização da relação pela imagem e observação, o que permite ao estudante compreender melhor o que está sendo mostrado, como um facilitador nesse processo. Um dos autores que fundamenta o que explicitamos aqui é Fischbein (1987), quando coloca que:

> Representações visuais não somente auxiliam na organização da informação em representações como constituem um importante fator de globalização. Por outro lado, a concretude de imagens visuais é um fator essencial para a criação de um sentimento de auto evidência e imediatez. Uma imagem visual não somente organiza os dados em estruturas significativas, mas é também um fator importante para orientar o desenvolvimento de uma solução analítica; representações visuais são essenciais dispositivos antecipatórios (Fischbein, 1987, p.104, tradução nossa).

Essa colocação de Fischbein endossa nossos argumentos anteriores ao explicitar a conexão entre o visual e consequentemente os diagramas e a abdução, quando temos as representações visuais como um fator fundamental para a criação de um sentimento de auto evidência, sendo essenciais dispositivos antecipatórios. Como a abdução é um juízo antecipado e provisório, que possibilita a formulação de hipóteses e ideias que surgem de forma imprevisível, fica perceptível que os diagramas permitem e facilitam a abdução, como um processo, que através dessa visualização, ajuda e agiliza a formação do entendimento e a geração de hipóteses, característica essa essencial do raciocínio abdutivo.

4.2 Complementaridade entre a geometria e a aritmética na Didática da Matemática

Visto a ideia central de como a abdução e a visualização estão relacionadas, numa situação que propicia benefícios na produção de conhecimento matemático e no processo de ensino-aprendizagem, pretendemos seguir numa mesma linhagem, com o foco em como a visualização contribui na construção de conexões que abrangem a aritmética e a geometria numa relação de complementaridade.

Iniciamos lembrando que a aritmética é uma área da matemática que lida com os números e as operações entre eles, sendo considerada a "ciência dos números" e a geometria é o ramo da matemática centrado no estudo das figuras e sólidos presentes na natureza, com diferentes formas, tamanhos e constituído de elementos para sua comunicação, como pontos, vértices e retas, nesse seguimento, quando abordamos a geometria, quase que imediatamente associamos esse ramo da matemática a visualização, mas por que isso? Como já colocado a geometria estuda as formas presentes na natureza, no nosso mundo ou meio, consequentemente a geometria está em tudo ao nosso redor, é um processo de constante visualização que ao ser abordado no ensino de matemática explicita uma grande diversidade de formas de ser apresentado, podendo ser relacionado ao contexto visual e observável de cada indivíduo. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) auxiliam nesse entendimento sobre a geometria como colocado abaixo:

> A Geometria é um campo fértil para se trabalhar com situações-problema /.../ O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades, etc. (Brasil, 1998, p.51).

Desse modo, fica claro com o exposto que a geometria além de poder ser trabalhada de diferentes formas também está conectada diretamente aos números e medidas, afinal formas e figuras geométricas apresentam relações numéricas de diversas maneiras, seja através de área, perímetro, tamanho, com comprimento e largura, em casos de figuras com duas dimensões, entre outras situações. É dessa forma que fica perceptível a conexão da aritmética com a geometria, com os números e o que os envolve estando embutidos, direta ou indiretamente, na geometria. Cabe, então, a nós compreendermos como e de quais maneiras essa complementaridade entre esses dois ramos, através da visualização, pode trazer pontos positivos no processo de ensino-aprendizagem e na descoberta de relações matemáticas

Essa complementaridade podemos entender como um princípio que, segundo Simas Junior (2019, p.25), “refere-se originalmente a conceitos que, aparentemente distintos e contraditórios, se complementam para identificar e descrever determinados fenômenos ou situações”, ou seja, no envolvente a matemática ramos e áreas de estudo, mesmo que diferentes, apresentam ligações que permitem identificar e desenvolver o estudo de distintos casos e situações em contextos matemáticos. Um dos primeiros e principais pesquisadores a estudar esse fenômeno da complementaridade, voltado à matemática em geral, foi Michael Friedrich Otte, com uma visão profunda sobre como a complementaridade é necessária na prática matemática. Nesse sentido, Monteiro (2019) nos auxilia a entender como Otte compreendia a complementaridade e sua relação nos ramos da matemática:

> Otte (2003) resume o conceito de complementaridade como perseguir e explicar um fenômeno universal ou geral em suas manifestações particulares, e cita a complementaridade entre aritmética e geometria (OTTE, 1990) como uma primeira visualização da ideia de complementaridade na Matemática (Monteiro, 2019, p.693).

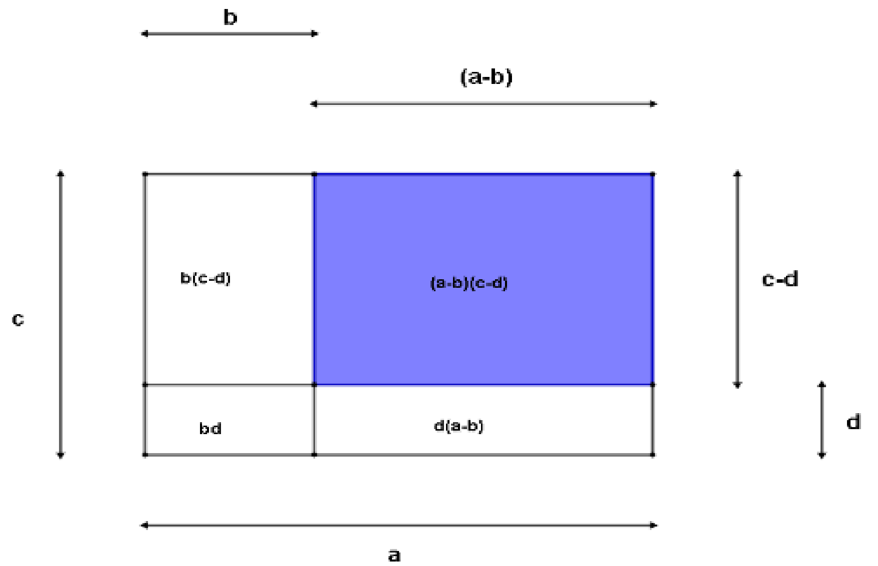
Essa percepção de Otte, na relação entre aritmética e geometria como primeira visualização da complementaridade na matemática, muito provavelmente tenha sido levada justamente pela presença de conceitos e elementos que estão embutidos de uma área em outra, mesmo que distintas, conforme já discutido anteriormente a aritmética pode estar presente, por exemplo, nos cálculos de operações numéricas que envolvem a geometria como medidas de altura, comprimento e largura, cálculo de áreas e volumes, já numa situação contrária, a geometria por meio da visualização pode permitir e facilitar a compreensão de conceitos que envolvem a aritmética.

De modo geral, fica claro a complementaridade que Otte destaca, nessa busca de explicar fenômenos universais em suas manifestações particulares e como a aritmética e a geometria se encaixam nessa abordagem, com uma diversidade e versatilidade considerável de relações e conexões que podem ser estabelecidas entre essas áreas.

5. A PROVA DE DIOFANTO (-) X (-) = (+)

A Prova de Diofanto é um dos casos em que encontramos diretamente essa ligação entre aritmética e geometria. Segundo Hillesheim e Moretti (2016), esta prova é um exemplo claro da geometria como apoio da aritmética, provando uma das propriedades aritméticas no envolvente ao produto entre números negativos. Esse contexto, no que tange à educação matemática, é um dos que gera grande dúvida nos alunos em geral, pois, como é possível que o produto entre dois números negativos resulte em um número positivo? Pois bem, o grande matemático grego Diofanto de Alexandria menciona em seu livro *Aritmética* que “menos multiplicado com menos é mais” (Diofanto, 2007, p.22) e a Prova de Diofanto demonstra isso de uma forma bem interessante, utilizando a geometria como meio.

Figura 3: O diagrama geométrico com o retângulo como polígono base para a Prova de Diofanto.



Fonte: Garbi (2010, p.124).

O diagrama geométrico acima exposto é base para a demonstração dessa propriedade aritmética. A maneira como a Prova de Diofanto utiliza da geometria, com a visualização do retângulo maior, nesse caso, o de lados *a* e *c*, e subdivide esse retângulo em quatro retângulos menores, usando a aritmética através dos conceitos de medidas, representando as letras na situação como se fossem valores numéricos, para a partir disso usar do conceito de área, que é essencial nessa demonstração, na medida em que a área do retângulo maior, de valor *ac*, nada mais é do que a soma das áreas dos quatro retângulos menores contidos no retângulo maior.

A ideia central no uso da área de um retângulo maior, formado pela composição de áreas de retângulos menores, aparece de forma a gerar segmentos de menor tamanho que representam os lados desses retângulos, com medidas indicadas pela subtração do lado *a* por segmentos menores e, respectivamente, do lado *c*. Isso faz surgir o sinal negativo para calcular a área desses retângulos de menor tamanho e, a partir da propriedade distributiva da multiplicação, que está presente para o cálculo da área de três dos quatro retângulos menores, é possível isolar o produto entre os dois valores negativos e assim provar a propriedade, como explicitamos abaixo:

$$(a - b)(c - d) + b(c - d) + d(a - b) + bd = ac \tag{1}$$

$$(a - b)(c - d) + bc - bd + ad - bd + bd = ac \tag{2}$$

$$(a - b)(c - d) + bc - bd + ad = ac \tag{3}$$

$$ac - ad - bc + (-b)(-d) + bc - bd + ad = ac \tag{4}$$

$$ac - ad - bc + bc + (-b)(-d) + ad - ac = bd \tag{5}$$

$$(-b)(-d) = bd \tag{6}$$

Entendemos, no primeiro membro da igualdade, que a área de cada um dos 4 retângulos somadas resultará na área do retângulo maior, que tem valor *ac*, de modo que podemos constatar no segundo membro da linha 1 da igualdade. Em seguida, na linha 2, trabalhamos a propriedade distributiva da multiplicação nos termos *b (c – d)* e *d (a – b)*, a qual, segundo Garbi (2010), Euclides já havia conseguido provar que o resultado dessa relação era *bc – bd* e *da – db*, respectivamente. Avançando na linha 3, excluímos os termos – *bd* e + *bd* por serem termos de mesmo valor absoluto, mas com sinais opostos, o que resulta numa anulação desses termos. Por conseguinte, na linha 4, é realizada a propriedade distributiva da multiplicação entre os termos *(a – b) (c – d)* presentes no primeiro membro. Em seguida, na linha 5, isola-se o termo – *bd*, passando-o para o segundo membro como *bd*, e traz-se o termo *ac* para o primeiro membro, que, com a mudança de sinal, passa a ser – *ac*. Por fim, na linha 6, anulam-se todos os termos com valores absolutos iguais, mas com sinais opostos, de forma a ficar apenas, no primeiro membro, o produto *(-b) (-d)* e, no segundo membro da igualdade, o termo *bd*, o que prova assim que o produto entre dois números negativos de fato resulta num valor positivo, destacando que *b* e *d* são ambos valores positivos por representarem medidas de lados dos retângulos. Garbi (2010) atenta sobre como todas essas regras de sinais, na Prova de Diofanto, são tratados em alguns livros de matemática:

> Alguns livros de Matemática dizem que a regra dos sinais é uma convenção, não um teorema. Isso precisa ser recebido com cuidado e bem entendido: trata-se de uma convenção que somos obrigados a estabelecer se quisermos a propriedade distributiva do produto em relação à soma valha também para números negativos e essa é a essência da prova de Diofanto (Garbi, 2010, p.125).

Garbi (2010), a partir dessa observação, ressalta que, mais do que uma simples imposição arbitrária, a regra dos sinais é uma base necessária para manter a consistência lógica e estrutural das operações matemáticas, especialmente no âmbito da aritmética. Essa essência, explorada na Prova de Diofanto, evidencia como a matemática se organiza em torno de relações e propriedades que devem ser coerentes em seus diversos ramos.

Nesse sentido, o interessante a se perceber na Prova de Diofanto é como a representação visual tem a capacidade de facilitar a compreensão e aprendizagem da relação dos conceitos aritméticos com a intuição geométrica, que no caso específico, lida com a intuição da conservação da área total, mesmo quando decomposta em áreas menores, com a geometria, a aritmética e a álgebra presentes, numa relação de três ramos diferentes da matemática para provar uma propriedade aritmética.

Utilizando uma linguagem semiótica, a partir do uso de símbolos e representações para transmitir uma ideia, ao decorrer do processo é possível transitar de uma representação matemática a outra, com a geometria inicialmente para observar e perceber a relação, a aritmética na forma de representação das medidas e, numa transformação final, para uma representação algébrica, com as letras como incógnitas para exprimir uma relação de igualdade através de uma equação. De maneira que o uso dessas diversas representações, num processo de inter-relação entre o visual pela geometria e as linguagens aritmética e algébrica, demonstra como esse tipo de relação pode ser eficaz na comunicação de ideias consideradas complexas e abstratas na matemática.

5.1 Diagramas pitagóricos: a visualização em uma prova oculta do “Teorema de Pitágoras”

Antes de discutirmos o tópico central deste capítulo, é importante nos atentarmos ao que será abordado sobre o “Teorema de Pitágoras”. Para isso, faremos uma contextualização desse teorema com base na história da matemática, considerando a colocação de Roque (2012) sobre sua real origem:

> O enunciado mais famoso associado ao nome de Pitágoras é o teorema que estabelece uma relação entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo: “O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos”. Hoje se sabe que essa relação era conhecida por diversos povos mais antigos do que os gregos e pode ter sido um saber comum na época de Pitágoras. No entanto, não é nosso objetivo mostrar que os pitagóricos não foram os primeiros na história a estabelecer tal relação. O objetivo é investigar de que modo esse resultado podia intervir na matemática praticada pelos pitagóricos, com as características anteriormente descritas. A demonstração desse teorema, encontrada nos Elementos de Euclides, faz uso de resultados que eram desconhecidos na época da escola pitagórica (ver Capítulo 3). Não se conhece nenhuma prova do teorema geométrico que tenha sido fornecida por um pitagórico e parece pouco provável que ela exista (Roque, 2012, p.122).

A exposição de Roque (2012) nos mostra que, embora o teorema seja amplamente associado a Pitágoras, ou aos pitagóricos, sua origem remonta a civilizações mais antigas. Isso não tira a relevância dos pitagóricos, que contribuíram para a difusão e o aprofundamento de ideias matemáticas, especialmente com uma abordagem mais filosófica e com foco na aritmética. Nesse sentido, Roque (2012) destaca que os pitagóricos estavam mais preocupados com as relações harmônicas e os fundamentos filosóficos da matemática do que com demonstrações formais, como as presentes na obra de Euclides. Roque (2012) discute, com base na visão de outros autores, como esse teorema era tratado pelos pitagóricos:

> Burkert afirma que o teorema “de Pitágoras” era um resultado mais aritmético que geométrico. Quando falamos de aritmética nos referimos ao estudo de padrões numéricos que estavam no cerne da matemática pitagórica e que dizem respeito aos números figurados. Não deve ter havido um teorema geométrico sobre o triângulo retângulo demonstrado pelos pitagóricos, e sim um estudo das chamadas triplas pitagóricas. O problema das triplas pitagóricas é fornecer triplas constando de dois números quadrados e um terceiro número quadrado que seja a soma dos dois primeiros. Essas triplas são constituídas por números inteiros que podem ser associados às medidas dos lados de um triângulo retângulo (Roque, 2012, p.122).

Com isso, percebemos que o chamado "Teorema de Pitágoras" era tratado pelos pitagóricos de maneira mais aritmética do que geométrica, focando no estudo das triplas pitagóricas e nos padrões numéricos que caracterizavam a matemática trabalhada por eles. Esse enfoque reforça a ideia de que os pitagóricos não estavam interessados em uma demonstração formal do teorema, mas sim em explorar as relações numéricas associadas aos números figurados.

Para fins de simplicidade e contextualização histórica, nos referiremos ao teorema de Pitágoras como “Teorema do Triângulo Retângulo”, enfatizando seu foco principal na relação entre os lados desse tipo específico de figura geométrica.

Nessa abordagem sobre visualização e a complementaridade entre aritmética e geometria, percebemos o quanto a união e ligação entre elementos e linguagens diferentes pode auxiliar na compreensão de diversas relações matemáticas, é como nos explica Monteiro (2021, p.163), “modificar e combinar com outras ideias são caminhos com muitas possibilidades para a apreensão daquilo que se pretende compreender”. Ligando isso à educação matemática, entendemos que não existe uma única forma de se abordar um conteúdo ou apresentar um teorema ou relação matemática ao estudante, as diferentes maneiras de se conectar a matemática a contextos, situações e o uso de diferentes linguagens para apresentá-la é o que a permite a matemática ser tão versátil e flexível em sua forma de perceber e representar conceitos.

Os diagramas pitagóricos são uma dessas formas interessantes de apresentar um dos teoremas mais conhecidos da matemática, usando da visualização com diferentes formas de representação, com a capacidade de enriquecer e facilitar a compreensão em um tipo de prova que passa primeiro pela observação e consegue apresentar essa importante relação geométrica de maneira intuitiva. Monteiro (2021) nos detalha a relevância desses diagramas no processo de ensino-aprendizagem:

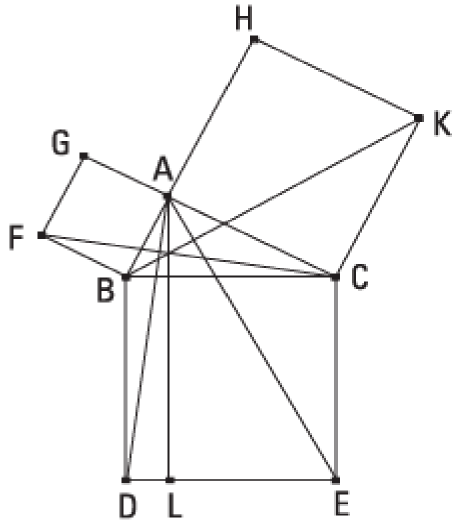
> [...] Sugerimos, pois, explorar processos em diagramas pitagóricos para promover interpretações da recíproca dessa igualdade. Essa preocupação aqui merece destaque, pois em avaliações diagnósticas durante formações de professores de Matemática é comum deparar com estudantes que não têm consistência conceitual nem formal para afirmar a recíproca do Teorema de Pitágoras. Acreditamos que um dos motivos para a presença dessa lacuna está na abordagem tradicional, muitas vezes sem diagrama, sem triângulos retângulos, sem atribuição de significados, sem a história dos conceitos intrínsecos ao tema, ou seja, o ato de apresentar sentido sem referência ou referência sem sentido deixa vácuo (Monteiro, 2021, p.169-170).

Essa colocação de Monteiro (2021) nos deixa claro que a abordagem do conteúdo sem referências, conexões ou estabelecimento de significados com o que está sendo apresentado apenas gera um vazio ou uma lacuna no processo de aprendizagem. O “Teorema de Pitágoras” é muitas vezes apresentado em uma metodologia tradicional, que foca no verbal e nas representações algébricas, sem relacioná-lo ao visual ou ao diagramático, esquecendo-se, frequentemente, que o teorema em questão está diretamente ligado à geometria, e que a geometria está intrinsicamente conectada à observação e à visualização.

É difícil se abordar geometria sem associar a visualização em um dos, se não o principal teorema geométrico, a qual tratamos nesse item. Representá-lo apenas em um contexto expositivo, dialogado ou escrito, como uma relação de medidas em “o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos”, ou, “$a^2 = b^2 + c^2$”, é empobrecer e restringir a vastidão de contextos, significados e representações que são possíveis de apresentar com esse teorema.

Nessa linha, o grande matemático Euclides traz, em sua obra *Os Elementos*, várias provas formais para diversos teoremas. Na proposição I-47 de seu livro, encontramos que “nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto” (Roque, 2012, p.174). Essa proposição trata justamente do suposto teorema “de Pitágoras”, ou Teorema do Triângulo Retângulo, com o diagrama geométrico presente no trabalho de Euclides para demonstrar a relação, em que usa do contexto de áreas de quadrados dispostos adjacentes a cada um dos lados do triângulo retângulo, com lados de medidas equivalentes a cada um dos lados do triângulo, numa relação de “ver para perceber”, em que a representação visual auxilia na compreensão do teorema.

Figura 4: O diagrama pitagórico presente na obra de Euclides na demonstração do Teorema do Triângulo Retângulo.

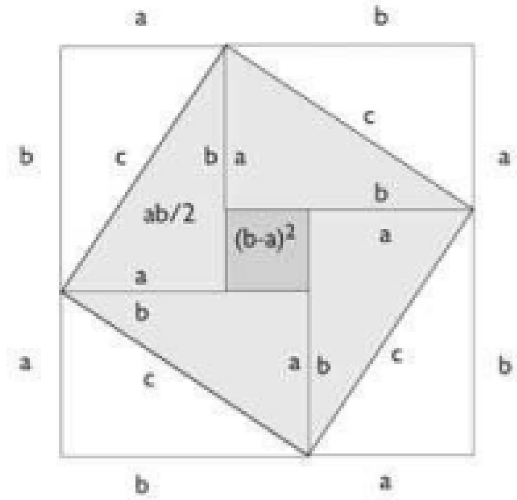


Fonte: Euclides (2009, p.133).

Este exemplo é um dentre vários outros, de como este teorema pode ser percebido pela visualização através de diagramas, mostrando como a complementaridade está presente nesse processo, num meio de transição de uma linguagem ou meio de comunicação para outro, que se inicia com a visualização pelo diagrama geométrico, transita pelos conceitos numéricos da aritmética para a representação de medidas e chega, por fim, à linguagem algébrica como meio de generalização da aritmética. Euclides percorre todos esses processos na prova do Teorema do Triângulo Retângulo, mesmo que não esteja explícito todo esse percurso, pois o foco neste tópico está em mostrar como a visualização é tangente a tantos casos diferentes em provas e demonstrações matemáticas, sendo o Teorema do Triângulo Retângulo um deles.

Podemos observar abaixo, com outro diagrama, diferente do utilizado por Euclides, que também busca provar esse teorema.

Figura 5: Adaptação de diagrama chinês da prova do Teorema do Triângulo Retângulo



Fonte: Inácio (2012, p.2).

Esse caso, com o diagrama pitagórico visualizado acima, passa por entender, quando observamos os elementos na cor cinza primeiramente, que o lado de medida *c* do quadrado cinza é também medida da hipotenusa dos 4 triângulos retângulos congruentes presentes no interior desse quadrado com catetos com medidas *a* e *b*. A prova do teorema, nessa situação, está relacionada à compreensão de que a área do quadrado cinza pode ser representada também como a composição das áreas de todos os polígonos presentes em seu interior. Desse modo, temos:

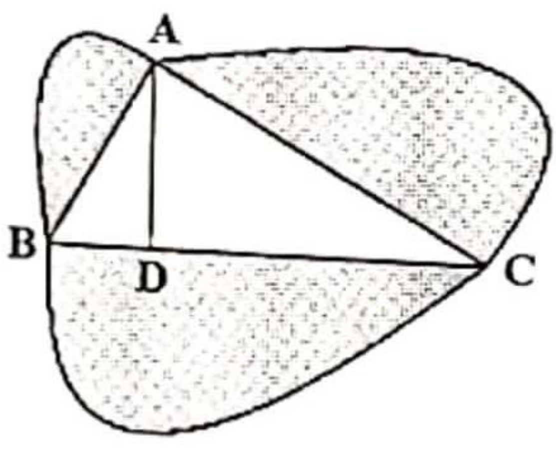
$$c^2 = 4 * ab/2 + (b-a)^2 \quad (1)$$
$$c^2 = 4 * ab/2 + b^2 - 2ab + a^2 \quad (2)$$
$$c^2 = 2ab + b^2 - 2ab + a^2 \quad (3)$$
$$c^2 = b^2 + a^2 \quad (4)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (5)$$

Como podemos perceber, ao procedermos para uma representação algébrica e usarmos o conceito de área para apresentar essa relação através de uma igualdade, fica explicito no processo que, ao anularmos os termos com os valores absolutos iguais, porém com sinais diferentes o que resta é justamente a conclusão do Teorema do Triângulo Retângulo, representado algebricamente pela igualdade na linha 5, com *c* como medida da hipotenusa do triângulo retângulo e os lados *a* e *b* representando os catetos desse triângulo. De maneira muito semelhante, seria feito caso tomássemos o quadrado maior de interior branco como base, com a mudança de que teríamos agora um quadrado de lado *a* + *b*, sendo composto pelo quadrado cinza e por mais triângulos retângulos, com uma divisão maior de elementos para o cálculo das áreas que compõem o quadrado maior, mas que chegaria a mesma conclusão do caso anterior.

Todos esses procedimentos indicam a presença de uma construção de um diagrama com base em outro, em um processo de criação, o que nos faz pensar que, da mesma forma que podemos partir da visualização, passar pela aritmética e entender a forma algébrica, conhecendo e compreendendo todo o processo, podemos também iniciar com a generalização algébrica para construir a representação visual transitando pela representação aritmética.

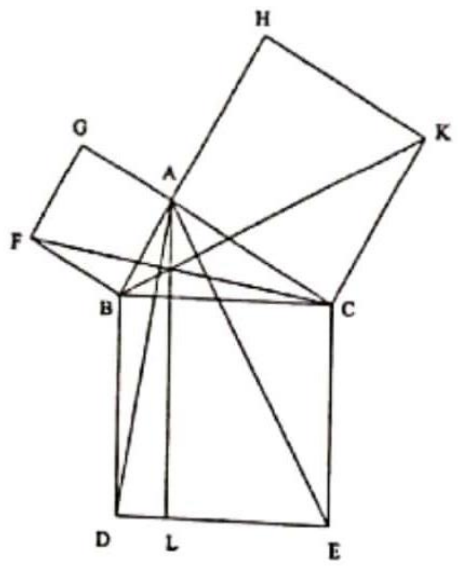
De fato, existem diversas formas de construir e trabalhar com diagramas pitagóricos, com a possibilidade de encontrar maneiras de utilizar essas ferramentas e motivar diferentes tipos de raciocínios. Os exemplos a seguir, presentes na obra de Otte (2012), nos indicam essas relações:

Figura 5.1: Diagrama pitagórico com a capacidade de instigar raciocínio indutivo.



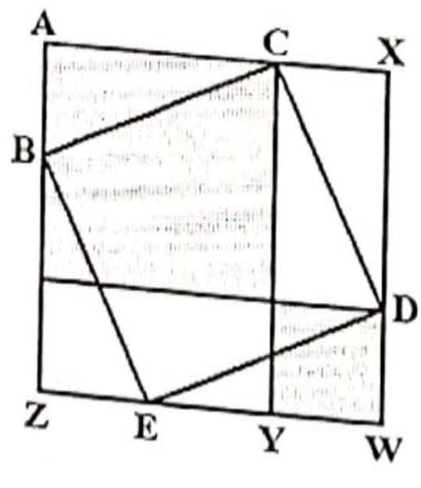
Fonte: Otte (2012, p. 34).

Figura 5.2: Diagrama pitagórico com a capacidade de instigar raciocínio dedutivo.



Fonte: Otte (2012, p. 34).

Figura 5.3: Diagrama pitagórico com a capacidade de instigar raciocínio abdutivo.



Fonte: Otte (2012, p. 35).

As representações dos diagramas pitagóricos das figuras 5.1, 5.2 e 5.3 nos mostram uma outra forma de perceber o “Teorema de Pitágoras”. No que se refere à figura 5.1, o diagrama pitagórico presente na obra de Otte (2012) traz uma prova que envolve a indução como uma forma de teste ou verificação, sendo um pouco mais complexa que os outros diagramas pitagóricos já expostos no trabalho. Esse diagrama exige uma compreensão mais profunda do conceito de “área”, indo além de uma simples observação e passando pela necessidade de entender como essas diferentes partes, com áreas delimitadas por curvas, se relacionam com o triângulo retângulo.

A distinção com a figura 5.2 vem do fato de o diagrama exposto ser o mesmo presente na obra de Euclides e, consequentemente, o mais conhecido dos diagramas pitagóricos, utilizado como base diversas vezes para explicar e provar o teorema do Triângulo Retângulo, ele une segmentos dos vértices do triângulo base com os vértices dos quadrados adjacentes aos lados do triângulo retângulo, usando os ângulos como elementos-base para a prova, em tipo de diagrama que permite perceber a relação geométrica presente no triângulo retângulo de forma mais simples, ou seja, um diagrama com foco no raciocínio dedutivo, fundamentado na explicação.

Sequencialmente, temos a figura 5.3, com um diagrama pitagórico semelhante a um quebra-cabeça geométrico, apresentando peças compostas por triângulos retângulos de diversos tamanhos. Esse diagrama é um bom exemplo de uma categoria de diagramas que podem e devem ser explorados como quebra-cabeças, com um tipo de prova mais manipulativa para representar a relação do teorema, com combinações interessantes e baseadas na disposição dessas peças, em uma abordagem que fomenta justamente o raciocínio abdutivo, favorecendo a formulação de hipóteses, ideias e a criatividade.

Essa diversidade de casos e situações, com formas de pensar diferentes motivadas por meio de figuras, é justamente o que Monteiro (2021) destaca na abordagem com os diagramas, mostrando como esses elementos auxiliam na busca da complementaridade entre diferentes tipos de raciocínio, estimulando o pensar de forma diferente, dando espaço para compreender e interpretar os processos matemáticos de maneiras distintas.

Nessa linha, o interessante a se perceber em todos esses casos, é como nos explica Monteiro (2021, p.169), “os diagramas pitagóricos, quando percebidos em um processo, mostram-se muito fluentes, ou seja, representam um caminho para a abordagem semiótica na Didática da Matemática”. Essa passagem, colocada por Monteiro (2021), nos traz a ideia de como os diagramas pitagóricos facilitam a compreensão do “Teorema de Pitágoras” e, quando bem utilizados em um procedimento para a aprendizagem matemática, constata-se a importância da sua percepção em um processo que vai além de uma simples visualização, envolvendo a interpretação de diversos símbolos e conceitos matemáticos aliados as relações geométricas embutidas e, muitas vezes, veladas que estão sendo representadas. É nesse sentido, que os diagramas podem ser vistos como um caminho para a abordagem semiótica na didática da matemática, permitindo uma compreensão mais profunda dos conceitos e elementos matemáticos permeados por sua utilização.

Nesse movimento, envolvido nessa ideia de raciocínio diagramático e seu uso no processo de ensino, com base na compreensão de Peirce, Farias (2008, p.7) coloca que esse tipo de raciocínio teria "portanto, como principais vantagens, a possibilidade de revelar verdades 'novas', não-aparentes em uma simples listagem das relações apresentadas por um problema, e a capacidade de conduzir a conclusões testáveis, corretas e necessárias", ou seja, como podemos perceber nos exemplos aqui colocados, conseguimos observar formas diferentes de se chegar a conclusões, com os diagramas envolvidos em uma abordagem criativa no teste de relações matemáticas. Esse é um dos pontos essenciais que é necessário compreender, a fim de levar aos estudantes uma abordagem diagramática que favoreça a aprendizagem.

Finalizamos esse tópico no entendimento de como os diagramas pitagóricos são ferramentas valiosas para uma abordagem semiótica na matemática, visando favorecer o processo de ensino-aprendizagem quando aplicados de maneira adequada, com esse método a partir de representações visuais, facilitando a compreensão de conceitos matemáticos abstratos e com a capacidade de promover uma aprendizagem mais significativa aos estudantes.

6. DIAGRAMAS NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Os diagramas estiveram presentes na evolução e construção dos conceitos e estudos matemáticos ao longo de toda a história, desempenhando um papel significativo e contribuindo através da visualização para a compreensão dos processos complexos da matemática.

A presença dos diagramas pode ser perceptível desde o início dos tempos, mas sua utilização com foco em facilitar a compreensão de conceitos matemáticos vem muito presente a partir da Grécia Antiga, através de matemáticos como Euclides, Tales e Platão, que usavam esses elementos como auxílio para demonstrar teoremas e ilustrar teses. Em consequência, o uso dos diagramas passa de geração em geração, desde estudiosos do Renascimento e Idade Moderna até os tempos atuais, como um elemento essencial nos estudos em diversas áreas matemáticas. Nessa linha, a colocação de Barbosa (2023) exemplifica, utilizando a geometria na Grécia Antiga, como a visualização e, consequentemente, os diagramas já eram elementos presentes na matemática praticada pelos estudiosos gregos:

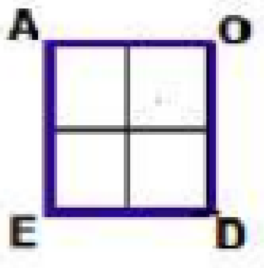
> Em tempo, a geometria praticada pelos gregos era uma técnica híbrida que relacionava a visão ao pensamento discursivo. Basta verificar no Mênon a presença dos pronomes demonstrativos na passagem em questão: “estas linhas”, “este lado”, “linhas iguais como esta”, “cada linha dessa superfície”, etc. (Platão, 2009, p. 55). O texto de Platão descreve uma atividade dinâmica em que as figuras estão sendo desenhadas no decorrer do diálogo. A mesma tradição, porém, sem a espontaneidade dialógica, encontra-se também nos Elementos, de Euclides (2009), em que cada uma das proposições é acompanhada por um diagrama (Barbosa, 2023, p.10).

Nesse sentido, apresentaremos nesse trabalho um interessante exemplo exposto nos Diálogos de Platão, na Grécia Antiga, com o uso dos diagramas e que faz surgir naquela época uma grande descoberta para a história da matemática. Usamos da pesquisa de Barros e De Sá (2021) para contextualizar o caso:

> Na época da escola de Platão, como já foi citado, houve um tratamento mais direto quanto ao uso dos números irracionais, os trabalhos de Eudoxo e Teodoro, citados anteriormente, comprovam este fato. Em um trecho dos Diálogos de Platão é descrito uma situação que também evidencia este entendimento, onde Sócrates desenhou um quadrado de “dois pés” de lado, conforme a figura a seguir, e pede a um escravo de Menon que lhe mostre um quadrado com o dobro da área (Barros; De Sá, 2021, p.145).

A discussão exposta nesse caso, entre Sócrates e o escravo de Menon, para descobrir como encontrar o lado de um quadrado cuja área seja o dobro da área do quadrado inicial, se inicia de imediato com um diagrama desenhado por Sócrates para representar um quadrado de lado “dois pés”. O interessante, nesse caso, é que a cada passo na resolução dessa questão, os diagramas estão presentes, com a obra de Platão expondo uma figura após a outra como forma de auxílio para a visualização da situação e o melhor entendimento do caso. O primeiro dos diagramas desenhados por Sócrates para introduzir o problema é semelhante ao exposto abaixo.

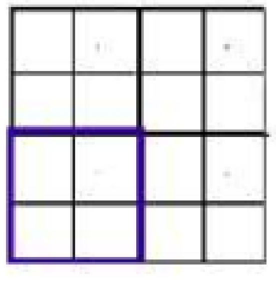
Figura 6: Diagrama para exemplificação de um quadrado de lado 2 pés.



Fonte: Pommer (2012, p.19).

Como segue no trabalho de Barros e De Sá (2021), a conversa entre Sócrates e o escravo continua, de modo que o escravo toma como primeira hipótese que, simplesmente duplicando o lado do quadrado, também se teria o dobro da área do quadrado inicial, ou seja, de um quadrado de lado 2 pés passaria para um quadrado de lado 4 pés. Entretanto, ficou perceptível no diálogo com Sócrates que a área do novo quadrado, comparado ao quadrado inicial, havia quadruplicado, chegando à conclusão que a área havia aumentado bem mais do que foi solicitado, como fica explícito na figura abaixo.

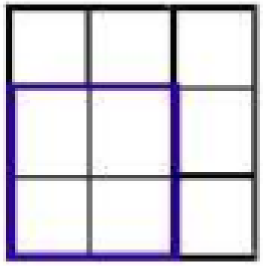
Figura 6.1: Diagrama exemplificando o quadrado de área quadruplicada resultado da primeira hipótese do escravo de Menon.



Fonte: Pommer (2012, p.19).

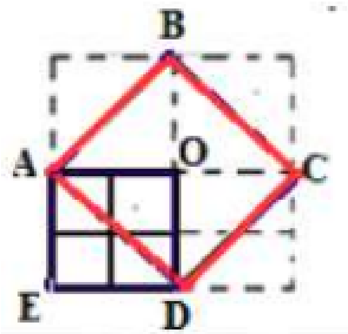
Em sequência, o escravo sugeriu a Sócrates que o quadrado deveria ter lado medindo 3 pés, o que, no final, novamente não resolvia o problema. Nesse sentido, Sócrates, ao perceber a dificuldade do escravo, o conduz na compreensão da solução do problema, com as figuras tangentes a todo esse processo.

Figura 6.2: Diagrama expondo o quadrado medindo 3 pés sugerido pelo escravo de Menon para resolver o problema.



Fonte: Pommer (2012, p.19).

Figura 6.3: Diagrama representando a solução induzida por Sócrates ao escravo para o problema de encontrar o lado do quadrado de área duplicada.



Fonte: Pommer (2012, p.19).

A figura 6.3 mostra, através de um diagrama, como Sócrates usa a diagonal do quadrado inicial, com lado medindo 2 pés, para construir o quadrado de área duplicada, como explica Pommer (2012) na colocação abaixo:

> A narrativa de Sócrates, presente nos Diálogos de Platão, ilustra a cultura típica dos gregos clássicos. Ao ser traçada a diagonal do quadrado inicial, o triângulo ADO resultante, retângulo e isósceles, possui metade da área do quadrado original. A construção proposta é composta de quatro triângulos retângulo e isósceles, equivalentes entre si. Então, a área do quadrado é equivalente ao quádruplo do triângulo ADO (Pommer, 2012, p.20).

O diagrama representado na figura 6.3 mostra que o triângulo formado pelos vértices A, D e O é um triângulo retângulo isósceles, que representa metade da área do quadrado inicial. Nessa linha, Sócrates usa do fato que, se a diagonal divide o quadrado em duas partes iguais e de áreas com a mesma medida, exemplificando, tomando como base que a área do quadrado mede um valor *x*, quando se divide ele em 2 por meio de uma de suas diagonais, cada triângulo retângulo formado passará a ter como valor de sua área *x/2*. Logo, se o objetivo é formar um quadrado de área duplicada, comparado ao quadrado de origem, queremos encontrar então um quadrado de área medindo *2x*, temos que esse valor é o mesmo que quatro vezes a área do triângulo retângulo isósceles de valor *x/2*, ou seja, se unirmos 4 triângulos retângulos desse tipo, sem sobreposição de um triângulo em relação ao outro, formamos um quadrado com a área duplicada em relação ao quadrado de origem, e esse novo quadrado terá como lado a diagonal do primeiro quadrado.

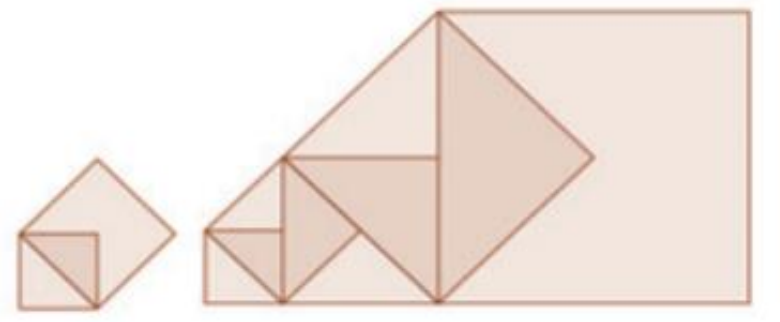
Essa visão intuitiva, com base nessa abordagem diagramática, permitiu a Sócrates não só mostrar como solucionar o problema, mas também contribuir no sentido de facilitar a compreensão através das construções geométricas e sua relação com a aritmética. As discussões geradas nesse contexto foram primordiais, na época, para algo que não se tinha uma noção ou ideia de sua existência, especificamente os números irracionais, como explicam Barros e De Sá (2021):

> O diálogo apresentado mostra um dos primeiros indícios da manipulação dos números irracionais pelos gregos, por meio de uma articulação entre a Aritmética e a Geometria, representando, com isso, uma superação superficial da tensão que estes números causaram na época dos pitagóricos com a descoberta da existência dos segmentos incomensuráveis pelos pitagóricos (Barros; De Sá, 2021, p.146).

Barros e De Sá (2021) também trazem que não se sabe, de fato, o que os pitagóricos realizaram a partir disso para mostrar que a medida obtida da diagonal do quadrado não era uma razão de dois inteiros, ou seja, um número racional. Entretanto, Lorin e Rezende (2013) explicam que, a partir dos fragmentos deixados pelos pitagóricos, é possível pressupor algumas formas de como esses antigos matemáticos conseguiram demonstrar tal feito. Por nosso foco não ser nesse tópico, não iremos, nesse sentido, adentrar detalhadamente em uma abordagem sobre as possibilidades de como os gregos antigos conseguiram mostrar essa relação para provar que o lado do quadrado era um número irracional.

O que nos interessa, neste trabalho, é como os diagramas foram essenciais para observar relações através das construções geométricas e como, através da visualização, de modo semelhante ao presente na obra de Platão, desenhando cada passo do diálogo entre Sócrates e o escravo até chegar à solução, é possível compreender melhor a natureza das figuras geométricas e a relação entre suas medidas. A figura abaixo exemplifica essa relação geométrica do dobro da área do quadrado de forma sequencial e como o lado de cada quadrado tem, como medida, a diagonal do quadrado anterior.

Figura 7: Diagrama como experimento mental para mostrar como dobrar a área de um quadrado sequencialmente.



Fonte: Monteiro (2019, p.701).

Finalizamos este tópico concluindo que os diagramas representam elementos importantes na história da matemática, não só facilitando a resolução de problemas complexos, como o aqui exposto sobre o dobro da área do quadrado, mas também servindo como base para o surgimento de novas teorias e concepções, fazendo parte, a partir de uma visualização geométrica, do surgimento da ideia dos números irracionais, conectando áreas diferentes da matemática e permitindo, por meio da observação, a visualização de relações abstratas de maneira concreta, contribuindo assim, através de seu uso, para a progressão do conhecimento matemático e sua aplicação em diversas áreas do saber humano.

6.1 Diagramas como problemas abertos em Matemática

Abordaremos, neste tópico, exemplos de como os diagramas podem ser aplicados em contextos ou situações envolvendo problemas abertos, esses, importantes para a didática da matemática, principalmente nos tempos atuais.

Segundo Araújo, Oliveira e Veit (2017), problemas abertos são aqueles sem soluções pré-definidas, baseados em eventos reais, que exigem julgamentos e argumentação por parte dos alunos, permitindo envolver a realidade na matemática, como um tipo de problema que não apenas ajuda a encontrar respostas iguais usando estratégias diferentes, mas também possibilita chegar em soluções diversas a partir de seu uso.

Nessa linha, se faz necessário compreender como o uso dos problemas abertos podem ser um caminho interessante na produção de conhecimento matemático e como os diagramas podem estar associados e presentes através desses problemas. Com isso, iniciamos com a colocação de Allevato e Vieira (2016), que nos explicam o quanto os problemas abertos vêm ganhando cada vez mais espaço no processo de ensino e como seu uso motiva a um trabalho mais explorativo e investigativo por parte do aluno:

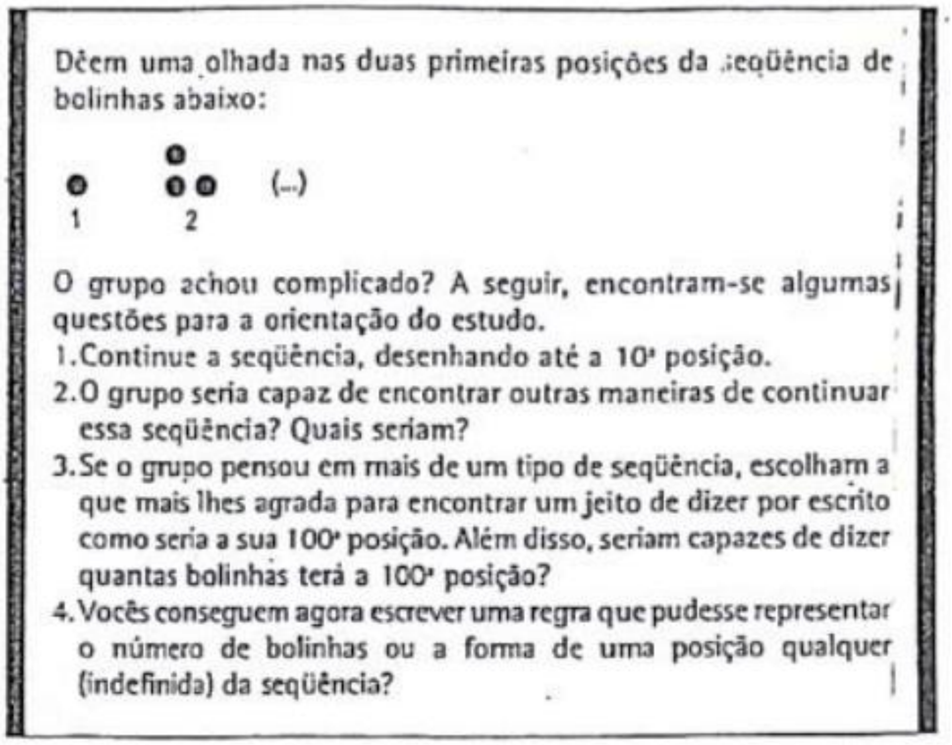
> Atualmente, tem sido fortemente recomendado o trabalho com problemas abertos, que correspondem a situações em que o aluno necessita elaborar diversas formas de resolução, podendo empregar diferentes mecanismos (Bustamante, Ribeiro & Navarro, 2015). Contrapondo-se aos chamados problemas fechados — em que tanto a situação inicial, como o processo de resolução, como o objetivo final (resposta) do problema é pré-determinado —, nos problemas abertos, o processo de resolução é aberto ou o final é aberto ou a formulação de novos problemas é aberta. São problemas que partem de enunciados menos estruturados, permitem a formulação de diversos tipos de questões e possibilitam a realização de explorações em diferentes direções. Assim, os problemas abertos podem ser propostos como desencadeadores de processos de investigação matemática pelos alunos (Allevato; Vieira, 2016, p.121-122).

A colocação de Allevato e Vieira (2016) expõe, de maneira direta, como o trabalho com os problemas abertos possibilita uma diversificação e criatividade maior na busca por respostas, como um estilo de problema que não delimita o estudante a apenas uma forma de pensar e encontrar a solução e é justamente isso que permite aos problemas abertos estarem associados a procedimentos investigativos e criativos em busca de respostas. George Pólya (1945), sendo um dos principais estudiosos matemáticos nessa área de resolução de problemas, afirma que a criatividade é uma característica inata dos indivíduos, mas os professores têm a responsabilidade de estimular o pensamento criativo matemático dos alunos, e os problemas abertos, nesse contexto, aparecem como um dessas formas de estimular o pensamento criativo nos estudantes.

O ponto de presença dos diagramas, nesse sentido, está no fato de serem elementos que, segundo Montaner (2017), na concepção e compreensão de Peirce, são elementos-base para o exercício do raciocínio imaginativo. Assim, considerando que os docentes devem estimular a criatividade, investigação e exploração nas atividades dos estudantes, unir os problemas abertos aos diagramas pode ser uma estratégia eficaz para promover o desenvolvimento do pensamento criativo e investigativo dos alunos, ao mesmo tempo em que proporciona um ambiente de aprendizagem mais dinâmico e estimulante.

Nesse sentido, apresentaremos dois contextos diferentes de aplicação dos diagramas em problemas abertos, um desses casos envolve as diferentes representações para se chegar a uma mesma resposta, enquanto o outro explora diferentes maneiras de ver o problema, chegando a respostas também distintas. Em ambos os casos, os processos diagramáticos tangem os passos e auxiliam no melhor entendimento de cada problema, sendo os dois casos apresentados em um problema envolvendo a questão de sequência numérica, que será melhor detalhado a seguir.

Figura 8: Imagem explicando através de diagrama o problema a ser explorado pelos estudantes.


Dêem uma olhada nas duas primeiras posições da seqüência de bolinhas abaixo:

1 2 (...)

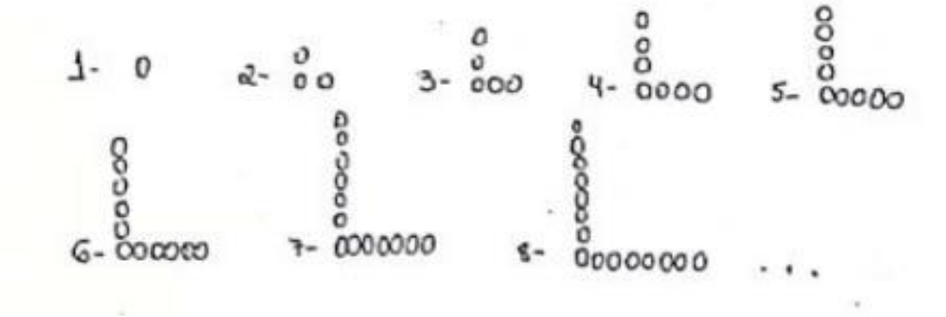
O grupo achou complicado? A seguir, encontram-se algumas questões para a orientação do estudo.

1. Continue a seqüência, desenhando até a 10ª posição.
2. O grupo seria capaz de encontrar outras maneiras de continuar essa seqüência? Quais seriam?
3. Se o grupo pensou em mais de um tipo de seqüência, escolham a que mais lhes agrada para encontrar um jeito de dizer por escrito como seria a sua 100ª posição. Além disso, seriam capazes de dizer quantas bolinhas terá a 100ª posição?
4. Vocês conseguem agora escrever uma regra que pudesse representar o número de bolinhas ou a forma de uma posição qualquer (indefinida) da seqüência?

Fonte: Fernandes (2004, p.235).

A tarefa exposta no trabalho de pesquisa de Fernandes (2004), baseia-se em uma atividade em grupo feita em sala de aula com os estudantes, na qual, observando a imagem acima, representando um diagrama de sequência numérica, cada grupo identificava, à sua maneira, os próximos termos da sequência e estabelecia uma regra para encontrar termos muito adiante, como o 100º termo, por exemplo. Além disso, os grupos redigiam a forma como pensaram para encontrar os termos seguintes, incluindo desenhos de diagramas que demonstravam visualmente as ideias que tiveram para representar a sequência, sendo que o diagrama mais frequente, usado pela maioria dos grupos, foi o seguinte:

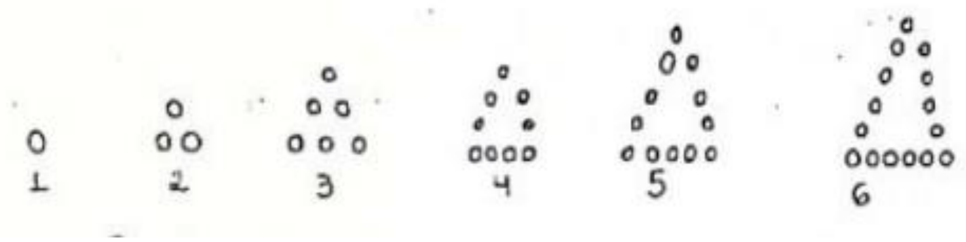
Figura 8.1: Diagrama mais desenhado pelos grupos para representar a sequência numérica.



Fonte: Fernandes (2004, p.236).

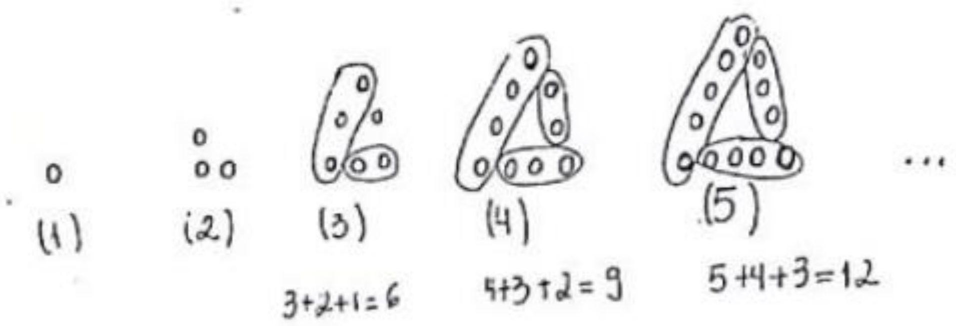
Nessa primeira situação, Fernandes (2004) percebeu que, apesar de a maioria dos grupos utilizar o mesmo diagrama para representar essa sequência numérica, a forma com que cada grupo redigiu e explicou o pensamento para a elaboração do diagrama na identificação da sequência foi bem distinta. Isso já nos traz a compreensão do problema aberto na maneira em que, mesmo encontrando a mesma resposta ou diagrama para a representação da sequência, os grupos verbalizaram o que entenderam e encontraram no caso de maneiras diferentes. Fernandes (2004) ainda coloca mais alguns exemplos interessantes em seu trabalho, expostos por outros grupos, como vemos abaixo:

Figura 8.2: Diagrama desenhado por um dos grupos para representar a sequência numérica.



Fonte: Fernandes (2004, p.236).

Figura 8.3: Diagrama desenhado pelos autores do trabalho de pesquisa para demonstrar o raciocínio do grupo que desenhou o diagrama 8.2.



Fonte: Fernandes (2004, p.237).

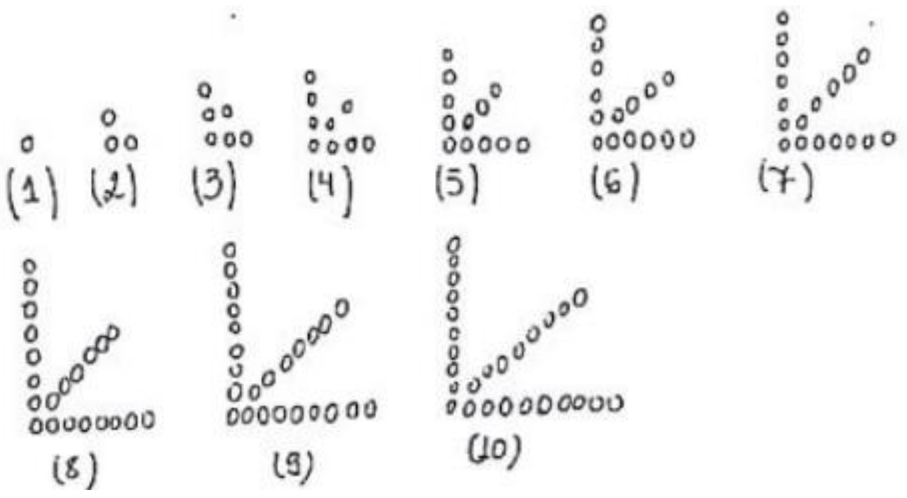
Temos na figura 8.2, retirada do trabalho de Fernandes (2004), uma ideia bem distinta apresentada por um dos grupos para uma representação numérica da sequência de diagramas, o diagrama que a figura 8.2 representa, desenhado por esse grupo, tem através dos triângulos dispostos com as bolinhas a quantidade de elementos de acordo com a posição da figura em si. A distinção está no fato de não ser uma progressão aritmética, como a sequência elaborada pela maioria dos outros grupos, de modo que, se observarmos bem, a cada posição da sequência numérica, o triângulo desenhado apresenta nos seus três lados uma mesma quantidade de bolinhas. Um exemplo é o triângulo que representa o quarto termo da sequência, ele apresenta quatro bolinhas nos dois lados laterais do triângulo e quatro bolinhas também em sua base, destacando que na conexão dos lados dois a dois de cada um dos triângulos, o que seria o vértice, vai existir uma bolinha em comum, o que faz com que no momento da contagem de bolinhas, por exemplo, não se possa simplesmente multiplicar o termo referente a sequência por três, que é o número de lados do triângulo.

No tangente à contagem da sequência montada por esse grupo, representada na figura 8.3 elaborada por Fernandes (2004) e pelos coautores de seu trabalho como conjectura, tentando interpretar a regra “diminuir os números” proposta por esse grupo de estudantes. Na elaboração desse diagrama, é possível observar na figura 8.3 que, a partir do terceiro termo dessa sequência, a contagem de bolinhas no diagrama passa pela soma do número que representa sua posição na sequência com seus dois antecessores. Como exemplo, o 3º termo tem como total de bolinhas a soma “3 + 2 + 1”, formando um total de 6 bolinhas, já o 4º termo é representado pela soma “4 + 3 + 2”, totalizando 9 bolinhas, e assim por diante. Dessa forma, seria possível identificar quantas bolinhas haveriam no 100º termo da sequência, bastando somar 100 com seus dois antecessores.

Fernandes (2004) conclui que, embora fosse um grupo de estudantes com dificuldades na disciplina, o que de fato o surpreendeu foi que eles conseguiram, mesmo de maneira incompleta, construir uma forma generalizada para calcular o número de bolinhas em uma posição qualquer da sequência elaborada.

Este exemplo nos mostra um caso em que as respostas para o centésimo termo da sequência e a quantidade de bolinhas por termo divergem entre os grupos, demonstrando que não há uma resposta definitiva na sequência montada através dos diagramas. Isso evidencia a natureza do problema aberto, em que as respostas podem ser diversas e igualmente válidas, pois os diagramas e sequências são construídos de maneiras diferentes por cada grupo. É essa diversidade de abordagens que estimula a criatividade, como visto em outro grupo que elaborou uma sequência criativa, conforme observado no trabalho de Fernandes (2004).

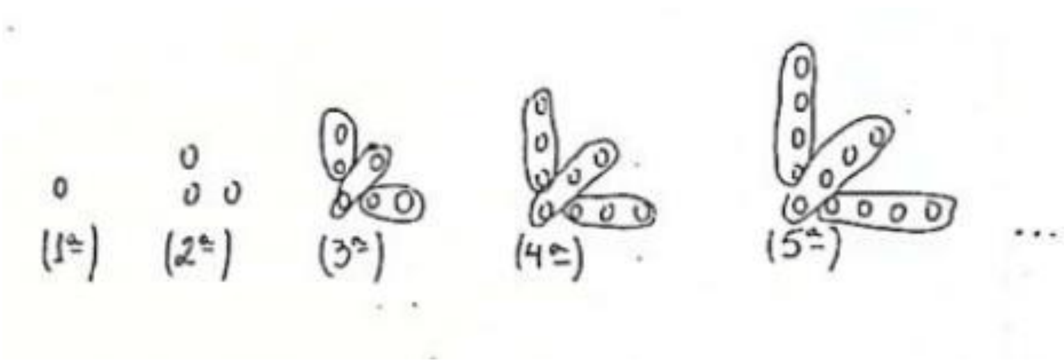
Figura 8.4: Diagrama desenhado por um dos grupos para representar a sequência numérica solicitada.



Fonte: Fernandes (2004, p.237).

A figura 8.4 representa uma sequência muito semelhante à do grupo que desenhou a figura 8.2, e ambos os diagramas, apesar de terem uma composição diferente nas bolinhas usadas para representar cada sequência, permitem perceber que a quantidade de bolinhas representadas é a mesma em cada termo da sequência desenhada. Fernandes (2004) explica que a diferença entre as sequências elaboradas por esses grupos está na forma como desenharam e na representação algébrica que cada grupo utiliza para expressar um termo qualquer da sequência numérica. No caso do grupo do diagrama 8.4, os estudantes indicam que, para descobrir o centésimo termo da sequência, basta subtrair uma unidade referente à localização do termo e, em seguida, multiplicar por três, ou seja, subtrair cem por um e multiplicar por três, o que resultaria em 99 vezes 3, totalizando 297 bolinhas no centésimo termo da sequência, com o diagrama abaixo permitindo observar essa relação.

Figura 8.5: Diagrama representando o cálculo usado pelo grupo para contar a quantidade de bolinhas por termo da sequência.



Fonte: Fernandes (2004, p.238).

Em resumo, o que a figura 8.5 nos apresenta é como a contagem foi feita e percebida pelo grupo referido, no entanto, a maneira com que esse grupo conclui isso é representada por uma expressão algébrica, em que se fosse necessário calcular a quantidade de bolinhas de um termo *x* da sequência, bastaria multiplicar *x-1* por 3, obtendo assim uma quantidade *3(x-1)*, que, aplicando a distributividade, resultaria em *3x-3* bolinhas. A conclusão que Fernandes (2004) nos faz perceber em seu trabalho é que essa expressão algébrica final, *3x-3*, é a mesma que o grupo do diagrama 8.2 obtém para calcular a quantidade total de bolinhas de um termo *x* qualquer da sequência, entretanto o que muda é a forma como esse grupo chega a essa ideia, já que o grupo da figura 8.2 toma como base para calcular a quantidade total de bolinhas a soma de um certo termo da sequência pelos seus dois antecessores. Desse modo, calcular a quantidade total de bolinhas de um termo *x* da sequência seria somar *x* aos seus dois antecessores, nesse caso x-1 e *x-2*, o que também resultaria em *3x-3* como a quantidade total de bolinhas para um certo termo *x* na sequência referida.

Para concluirmos esse capítulo, percebemos, ao observar os diferentes diagramas e propostas apresentadas no trabalho de Fernandes (2004), que a matemática é um campo de trabalho fértil para o professor que deseja desenvolver o raciocínio abdutivo e estimular a criatividade em sala de aula. Os problemas abertos, como expostos por meio das diferentes leituras de sequência numérica e construção dos respectivos diagramas, possibilitam ao estudante refletir e ir além das respostas prontas, pois existem várias possibilidades de resposta que podem ser validadas. Além disso a composição, permeada pelo uso de distintos elementos, permite a utilização de diferentes linguagens e maneiras de se expressar, com o exemplo dos próprios diagramas.

Dessa forma, os problemas abertos, além de desenvolver as habilidades matemáticas, incentivam a criticidade, para que haja o "pensar e o construir", formulando hipóteses e buscando soluções originais, estimulando diferentes formas de pensar. Com isso, o uso dos diagramas, em conjunto com os problemas abertos não só enriquece o ensino de matemática, mas também promove uma mentalidade investigativa e inovadora nos estudantes, preparando-os para enfrentar problemas complexos de forma criativa e eficaz.

6.2 Área equivalente ao quadrado e perímetro indo para o infinito

Na linha que Souza (2014) traz em seu trabalho, de como a abdução pode estar implícita em processos matemáticos de maneira criativa e dinâmica no incentivo para o surgimento de novas conjecturas e ideias, a diversidade de abordagens para desenvolver esse tipo de raciocínio, focando na produção de conhecimento matemático, é de fato ampla, especialmente ao considerar a complementaridade, que aqui já explicamos, entre a aritmética e a geometria, com os diagramas desempenhando um papel crucial nesse processo, conectando conceitos e possibilitando a visualização de relações matemáticas.

Uma proposta que apresenta abdução para estimular raciocínio abdutivo utilizando diagramas com foco em enriquecer o aprendizado em matemática é trabalhar com figuras que possuem áreas equivalentes, mas, os perímetros podem ser modificados e se apresentarem com medidas diferentes. Essa abordagem permite explorar como os perímetros podem aumentar tendendo ao infinito, mesmo mantendo a mesma área, com uma análise que não apenas fortalece a compreensão da relação entre aritmética e geometria, mas também estimula a criatividade e o pensamento investigativo dos alunos na construção de conhecimento matemático. Monteiro (2019) exemplifica como esse tipo de problema aberto, ao trabalhar com noções e tendências ao infinito, pode ser favorável a geração de novas ideias e favorecer a produção de conhecimento.

> Para Otte (1993) a criatividade requer a combinação de um pensamento formal e um pensamento livre. Para Monteiro (2015), provocar movimento entre um pensamento formal da matemática e um pensamento livre com significado e mediado por paradoxos e metáforas do infinito, parece ter grande potencial para produzir novos interpretantes e conceber matemática como atividade semiótica (Monteiro, 2019, p.702).

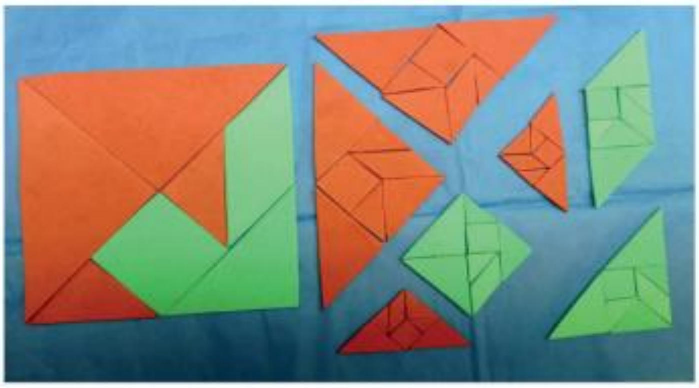
Com base na colocação de Monteiro (2019), percebemos que, ao utilizar um pensamento formal fundamentado, como no caso da análise da área de uma figura geométrica, é possível explorar maneiras de combinar esse raciocínio estruturado a um pensamento mais livre, promovendo o surgimento da criatividade, conforme compreende Otte (1993). Essa abordagem busca dar significado ao pensamento matemático, e a noção de infinito, quando trabalhada aliada a essa interação entre diferentes formas de raciocínio, torna-se motivadora. Além de estimular a criatividade, essa combinação de diferentes representações e interpretações de uma mesma ideia, que chamamos semiose, ou seja, processo de um signo, permite uma compreensão mais profunda e abrangente dos conceitos matemáticos estudados, podendo ser fomentada por meio da manipulação física e visual de símbolos matemáticos, especialmente os geométricos.

É nesse sentido que os diagramas surgem como elementos que auxiliam na compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos estudados e no desenvolvimento de novas hipóteses e conjecturas. Conforme discutido por Montaner (2017), em relação às ideias de Peirce, os diagramas fazem parte de um processo que influencia o raciocínio abdutivo, estimulando a criatividade e o pensamento imaginativo.

Para exemplificar, tomemos o tangram, um quebra-cabeça popular chinês, e suas subdivisões, que surgem como uma interessante ferramenta para os processos de ensino e aprendizagem, utilizando dos diagramas de forma implícita. Por meio do tangram, é possível explorar o caso da área equivalente ao quadrado e o perímetro tendendo ao infinito, envolvendo processos de visualização e manipulação que, como destaca Monteiro (2019, p.701), “interpretar artefatos e modificá-los por metáforas do infinito pode ser motivador para didática da matemática”, o que ajuda a incorporar esses meios como propostas voltadas para o ensino da matemática.

No caso específico do tangram, a manipulação das peças e suas subdivisões permitem observar as relações geométricas e aritméticas implícitas, como a área e o perímetro. Ao analisar as combinações das peças e suas modificações, é possível compreender a relação entre a área da figura original e seu perímetro, considerando as variações a partir das mudanças na disposição das peças. A utilização do tangram é versátil e pode ser aplicada a diversos conteúdos, como coloca Passos (2022, p.31), “por ser um jogo que desperta a curiosidade, trabalha a concentração e a ludicidade do aluno”, então como ferramenta educacional, o tangram pode proporcionar uma abordagem prática e visual para explorar esses conceitos matemáticos, como ilustrado na figura abaixo.

Figura 9: Tangram como diagrama geométrico e suas subdivisões.

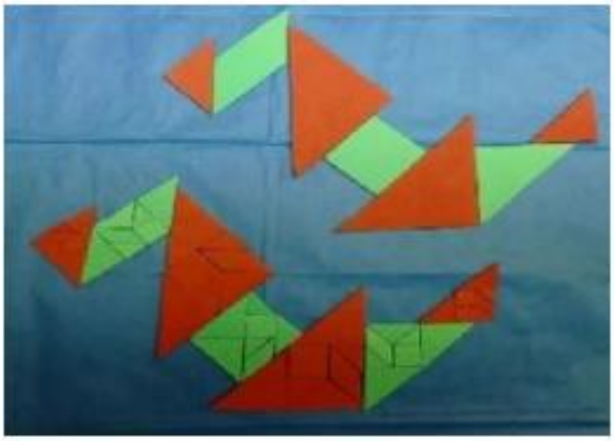


Fonte: Monteiro (2019, p.699).

Inicialmente, é necessário compreender que a figura que o tangram representa é um quadrado dividido em 7 peças, essas peças que variam entre cinco triângulos, um quadrado menor e um paralelogramo, como percebemos na parte à esquerda da figura 9. Já o procedimento realizado à direita, na mesma figura, é uma divisão de cada uma das 7 peças desse tangram em um conjunto de 7 peças menores, o que transforma o quadrado original do tangram, formado por um total de 7 peças, em um quadrado composto agora por 49 peças. Pelo fato de a figura original ser a mesma, a subdivisão das peças originais em peças menores não altera a área da figura inicial, apenas influencia no aumento do número de peças do tangram.

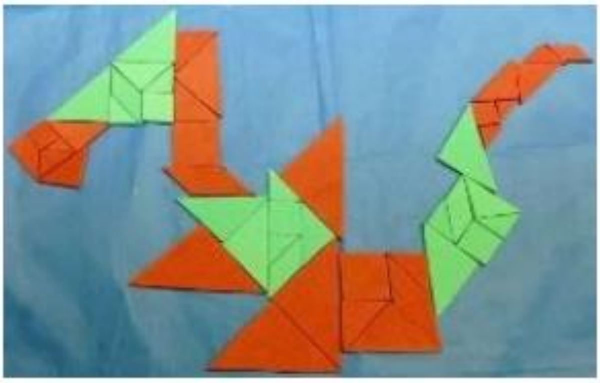
O interessante a se perceber está nas figuras 9.1 e 9.2, o como a manipulação e a nova disposição das peças do tangram vão formando novos desenhos, sem que haja sobreposição de uma peça sobre outra. A tendência do aumento do perímetro, de acordo com as novas divisões e composições, e as possibilidades de figuras a serem formadas é o que, de fato, leva à ideia de uma infinidade de possibilidades. Com um processo que regido por mais e mais subdivisões de cada peça do nosso quebra-cabeça, pode, de acordo com a sua disposição, possibilitar um perímetro cada vez maior, mesmo com a área original da figura sendo conservada, o que nos faz chegar a uma sensação de paradoxo.

Figura 9.1: Figura com a área equivalente ao quadrado, montada a partir das peças do tangram, composta de uma primeira forma com as 7 peças originais do tangram e, na segunda forma, composta por 49 peças originadas das subdivisões das peças originais do tangram.



Fonte: https://educmatematicaufal.blogspot.com/

Figura 9.2: Visualização de figura com a área equivalente à superfície de um quadrado, montada com 49 peças geradas a partir das subdivisões das peças do tangram, apresentando um perímetro maior em comparação ao próprio tangram e à figura 9.1.



Fonte: https://educmatematicaufal.blogspot.com/

Nos casos em questão, a criatividade é trabalhada a partir da montagem de desenhos com as peças disponíveis, é possível perceber que as figuras em evidência representam o desenho, nesse caso de um dragão, no entanto, a figura 9.1 é um dragão montado com as 7 peças originais do tangram e possuindo a mesma área da superfície do quadrado original, enquanto a figura 9.2 representa um dragão composto pelas 49 peças subdivididas das peças originais do tangram, o que permite um maior detalhamento do dragão e consequentemente também um alongamento em suas medidas. Isso possibilita, até visualmente, a percepção de um dragão com o tamanho maior do que o montado na figura 9.1 e é essa situação que permite discussões de como, mesmo com a área da superfície permanecendo a mesma, a disposição das novas peças proporciona um perímetro maior na comparação de uma figura com a outra.

A quantidade de possibilidades para a disposição e criação de novas figuras com essas peças é imensurável. As oportunidades propostas pelo docente, nesse tipo de trabalho, passam por tentar levar os estudantes a chegarem às suas conclusões sobre o caso, num meio de exploração desse fenômeno, com o estudo sobre esse caso de conservação da área da figura e acréscimo ao perímetro podendo estar associado a diversos contextos, seja com a elaboração de histórias ou montagem para a criação de outros polígonos.

O que interessa é, que através desses processos, que podem ser diferentes para cada estudante, seja possível chegar a uma compreensão geral, como discorre Monteiro (2019), de que o perímetro pode continuar aumentando indefinidamente, se forem usadas infinitas replicações e movimentos das peças, ou seja, se houver uma continuação na subdivisão das peças e elas forem sendo rearranjadas de maneira a tender para o infinito, o perímetro total da figura resultante continuará aumentando sem limites, mesmo que a área permaneça a mesma. O trabalho com o tangram e a divisão de suas peças passa pela fluência deste tipo de diagrama/quebra-cabeça em si, de acordo com Monteiro (2019), justamente pela infinidade de decomposições e combinações de suas peças.

Esse tipo de proposta é um exemplo, entre várias outras, de como essa ideia da conservação de área e aumento do perímetro pode ser trabalhada, destacando a semiose de um signo, no caso, interpretações possíveis a partir de um quebra-cabeça com 07 (sete) peças como um tangram original, em conexão com exploração de processos em diagramas objetivando desenvolver raciocínio abdutivo, em que através desses procedimentos criativos, como a montagem de figuras, proporcionam uma abordagem didática leve e prática aos estudantes na assimilação de conceitos muitas vezes desafiadores de serem compreendidos, por seu grau de abstração, no envolvente a essa relação entre aritmética e geometria.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

No tangente ao analisado e discutido neste trabalho, percebemos o quanto abordar conceitos matemáticos explorando diagramas para estimular raciocínio abdutivo pode influenciar positivamente, num meio de ensino favorecido pela interrogação e investigação em busca da formação de estudantes críticos e com diferentes formas de pensar, com uma produção de conhecimento matemático dinâmica e com outras perspectivas, como coloca Bicudo (2008). A incerteza presente nesse processo é um elemento importante para instigar e incentivar a formulação de conjecturas e hipóteses, que, por meio da observação e investigação, permitem a construção de argumentos acerca do que é estudado.

Outro ponto de interesse a esta discussão, na percepção sobre o raciocínio abdutivo e os diagramas, é como o docente precisa estar preparado para saber lidar com a aplicação desses casos, identificando e elaborando situações didáticas para explorar diagramas e processos em diagramas. Para isto é importante que os docentes envolvidos concebam para a didática da matemática da Educação Básica uma visão de currículo em rede de conceitos, a serem explorados em consonância com a tradicional visão linear do currículo das estruturas matemáticas e suas operações, com o intuito de conseguir instigar os estudantes, de maneira a facilitar o raciocínio abdutivo. É também necessário, por parte dos professores, preparo para analisar e interpretar os argumentos dos estudantes, em suas diversas formas de pensar para chegar a uma conclusão, entendendo que cada indivíduo tem seu tempo de percepção e compreensão. Nessa linha, sobre papel professor na produção de conhecimento, Bicudo (2009) explica:

> Eu compreendo construção/produção da realidade e construção/ produção do conhecimento como faces de um mesmo movimento, de maneira que o professor/pesquisador, com atitude assumida de sempre dar-se conta do que faz, pergunte-se: “quais as características do que quero conhecer e trazer como conteúdo das atividades educadoras?”; “como proceder para avançar no conhecimento disso que me proponho a conhecer e nos modos de proceder junto aos meus aprendizes, co-sujeitos desse processo de pesquisar/conhecer/organizar o produzido em formas possíveis?”. Essas perguntas não se sustentam se o pensamento em processo for pautado em uma lógica linear, estruturada em termos de antes e depois, de causa e de consequência. Seguindo essa lógica, haveria necessidade de conhecermos as características do investigado para poder investigá-lo. Acabaríamos por penetrar em um círculo vicioso, em que o “quê” implicaria, necessariamente, o “como” e vice-versa. Não nos seria possível avançar em compreensões e interpretações. Porém, essas perguntas mostram-se procedentes se assumirmos a complexidade do “ser sendo”. /.../ Essa concepção permite que

> falemos em construção da realidade e construção do conhecimento dando-se em um movimento de ser e de conhecer (Bicudo, 2009, p.232-33).

De maneira geral, é necessário por parte do docente compreender que, para que esse processo funcione e seja realizado da melhor forma possível, é preciso entender os estudantes como sujeitos cognitivos, cada um com a capacidade de produzir seu próprio conhecimento a partir de suas bases cognitivas, dando um pouco mais de liberdade na construção de seus argumentos e hipóteses, mesmo que possam ser consideradas erradas. O docente, nesse caso, deve instigar o estudante a partir do que foi elaborado, valorizando sua construção nos pontos interessantes e relevantes que percebeu e destacando a forma com que o indivíduo chegou à solução ou resposta do problema, não se importando apenas com a resposta final e evitando o uso de processos mecanizados, como geralmente presenciamos, sendo flexível e avançando junto com os estudantes, respeitando o processo de investigação de cada sujeito, de forma a auxiliar e funcionar como um orientador, valorizando os raciocínios apresentados por seus estudantes.

Considerando os aspectos levantados neste trabalho, concluímos que o uso de diagramas e o estímulo ao raciocínio abdutivo enriquecem o ensino da matemática, favorecendo uma prática pedagógica mais inclusiva e reflexiva, permitindo que os estudantes desenvolvam autonomia, criatividade e senso crítico, valorizando suas construções individuais e coletivas. Cabe ao docente, como mediador e orientador, criar um ambiente que incentive a curiosidade e a investigação por meio desses elementos, reconhecendo que o aprendizado é um processo contínuo e dinâmico, indo além da memorização de fórmulas e respostas prontas e promovendo uma educação matemática mais significativa e transformadora.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N.; VIEIRA, G. Do ensino através da resolução de problemas abertos às investigações matemáticas: possibilidades para a aprendizagem. **Quadrante**, v. 25, n. 1, p. 113-132, 2016.

BACHA, M. L. **A teoria da investigação de CS Peirce**. Dissertação (Mestrado em Comunicação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.

BARBOSA, G. Criatividade e o conhecimento matemático no Íon, de Platão. **Zetetike**, v. 31, p. e023008-e023008, 2023.

BARROS, R. L.; DE SÁ, P. F. Números irracionais na antiguidade clássica: um estudo bibliográfico sobre como os números irracionais se fundamentaram na Grécia Antiga nas escolas de Pitágoras e de Platão. **Anais do XI Simpósio Científico de Educação Matemática (SCEM)**, Belém-PA, Brasil, 2021.

BICUDO, M. A. V. A pesquisa interdisciplinar: uma possibilidade de construção do trabalho científico / acadêmico. **Educ. Mat. Pesquisa**. São Paulo. v. 10. n. 1, p. 137-150, 2008.

BICUDO, M. A. V. **Filosofia da Educação Matemática: por quê?** 2009. Disponível em: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291221889013. Acesso em: março/2024.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN. Matemática)**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

COLAPIETRO, V. M. **Glossary of semiotics**. New York, NY: Paragon House, 1993.

DE CARVALHO BORBA, M.; GARNICA, A. V. M. Interpretação e o Fazer do Professor: a possibilidade do trabalho hermenêutico na Educação Matemática. 1992. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática).–Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, R. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 9, n. 10, p. 83-89, 1994.

DIOFANTO. **La aritmética y el libro sobre los números poligonales**. Tres canto: Nivola Libros Ediciones, 2007.

EUCLIDES. **Os elementos**. Trad. e introd. Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

FARIAS, P. L. O conceito de diagrama na semiótica de Charles S. Peirce. **Tríades em Revista**, v. 1, n. 1, p. 1-13, 2008.

FERNANDES, F. L. P.; CRISTÓVÃO, E. M.; FIORENTINI, D. As potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos da 6ª série. **Iniciação Científica**. Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), p. 227-244, 2004.

FIORENTINI, D.; SILVA, J. G. A. M. da. O Ensino da Matemática: da aparência à essência. Rio Claro, Unesp. Dissertação de Mestrado. 1987. **Bolema-Boletim de Educação Matemática**, v. 3, n. 4, p. 67-71, 1988.

FISCHBEIN, E. **Intuition in science and mathematics: an educational approach**. Dordrecht: Reidel, 1987.

FRANCO, J. R.; BORGES, P. M. O conceito de diagrama em Peirce: uma leitura semiótica para além da gramática especulativa. **Cognitio-Estudos: revista eletrônica de filosofia**, v. 14, n. 1, p. 45-54, 2017.

GARBI, G. G. **A rainha das ciências:** um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática. 5. ed,ver. e ampl. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

HILLESHEIM, S. F.; MORETTI, M. T. A regra dos sinais: alguns elementos importantes do seu contexto histórico. **Ensinar e aprender matemática: possibilidades para a prática educativa**. Ponta Grossa: Editora UEPG, p. 233-254, 2016.

INÁCIO, L. M. **Diagramas lógicos: a importância filosófica dos diagramas na lógica**. Disponível em: < http://independent. academia. edu/LuisInacio/Papers/1296024/Diagramas_Logicos>. Acesso em: abril/2024.

LORIN, J. H.; REZENDE, V. Os Alogon: uma história dos números irracionais. **Encontro Interdisciplinar de Educação**, [online], v.5, n.1, 2013. Disponível em:http://www.fecilcam.br/anais/v_enieduc/data/uploads/mat/trabscompletos/mat00778624900.pdf. Acesso em: abril/2024.

MACHADO, I. Controvérsias sobre a cientificidade da linguagem. **Líbero. Revista do Programa de Pós-graduação da Faculdade Cásper Líbero**, ano XI, n. 22, p.63-74, 2008.

MARTINS, J.; BICUDO, M. A. V; ESPOSITO, V. H. C. **A pesquisa qualitativa em educação: um enfoque fenomenológico**. Piracicaba, SP: Editora UNIMEP, 1997.

MONTANER, J. M. **Do diagrama às experiências, rumo a uma arquitetura de ação**. Tradução: M. L. A. de Lima Paz. Barcelona: Editorial Gustavo Gili, 2017.

MONTEIRO, L. C. S. Complementaridade na circularidade das representações: uma abordagem semiótica para a criatividade em matemática. **Anais do XIII Encontro Nacional de Educação Matemática**, Cuiabá-MT, Brasil, 2019.

MONTEIRO, L. C. S. **Semiótica na Didática da Matemática: Interpretações das Interpretações das Interpretações**. Curitiba: Editora Appris, 2021.

NELSEN, R. B. **Proofs without words: Exercises in visual thinking**. MAA, 1993.

OTTE, M. **A Realidade das Ideias: uma perspectiva epistemológica para a Educação Matemática**. Cuiabá, MT, EdUFMT, 2012.

OLIVEIRA, V.; ARAUJO, I. S.; VEIT, E. A. Resolução de problemas abertos no ensino de física: uma revisão da literatura**. Revista Brasileira de Ensino de Física**, [s. l.], ano 2017, v. 39, n. 3, ed. 3402, p. 1-17, 2017.

PASSOS, E. C.; SILVA, K. F.; SILVA, L. D. **Tecnologia assistiva para ensino de matemática para surdos: o uso de Tangram como ferramenta didática**. São Luís, MA, UEMA, 2022.

PEIRCE, C. S. **Collected Papers**. Vols. 1-8. Cambridge: Harvard University Press, 1931-1958.

PEIRCE, C. S. **Ilustrações da lógica da ciência**. Trad. e introd. Renato Rodrigues Kinouchi. Aparecida, SP: Ideias e Letras, 2008.

PÓLYA, G. **How to solve it**. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1945.

POMMER, W. M. **A construção de significados dos Números Irracionais no ensino básico: Uma proposta de abordagem envolvendo os eixos constituintes dos Números Reais**. Tese (Doutorado em Educação do Programa de Pós-graduação em Educação) - Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, USP, São Paulo, 2012.

PONTES, E. A. S. A arte de ensinar e aprender matemática na educação básica: um sincronismo ideal entre professor e aluno. **Revista Psicologia & Saberes**, v. 7, n. 8, p. 163-173, 2018.

PONTES, E. A. S. Uma proposta metodológica no processo ensino e aprendizagem de matemática na educação básica: Uma contribuição de leonard euler na solução do problema das sete pontes de königsberg. **Ensino em Foco**, v. 2, n. 5, p. 21-32, 2019.

ROQUE, T. **História da matemática**. Editora Schwarcz-Companhia das Letras, 2012.

SCHEINERMAN, E. R. **Matemática Discreta: Uma Introdução**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.

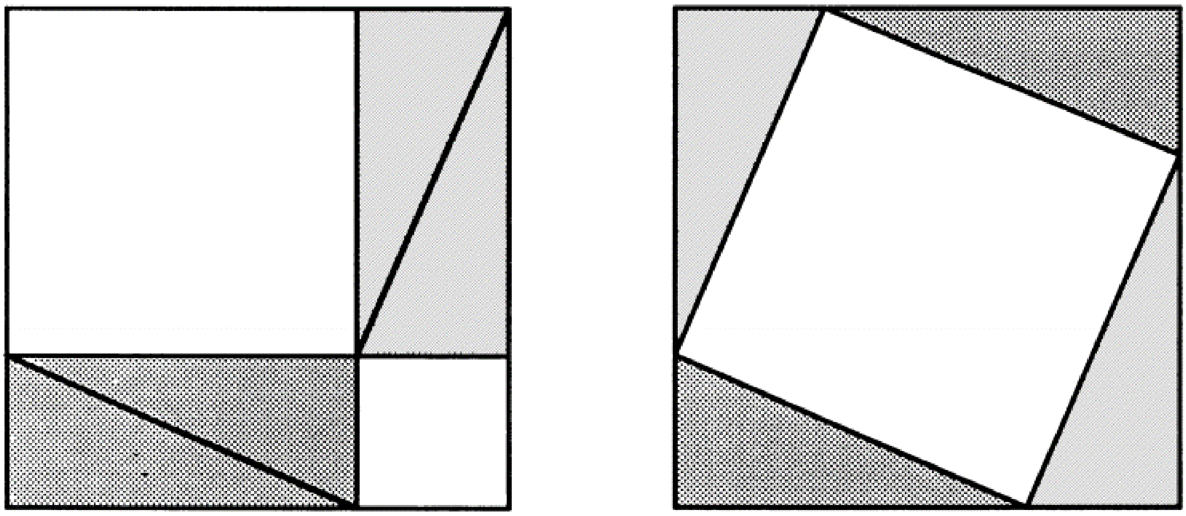
SIMAS JUNIOR, P. F. **O Princípio da Complementaridade na Educação Matemática**. Tese (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, p. 62. 2019.

SOUZA, J. S. **A abdução em Peirce: um estudo hermenêutico**. Tese (Mestrado em Educação Matemática) – Faculdade de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, p. 93. 2014.

VALE, I.; PIMENTEL, T. Raciocinar com padrões figurativos. In: **Encontro de Investigação em Educação Matemática**, Covilhã, Portugal. Ata do EIEM. p. 205-222, 2013.

YU, C. Abduction, Deduction, and Induction**:** Their implications to quantitative methods. **The American Educational Research Journal (AERA)**, Vol 43. 2006.

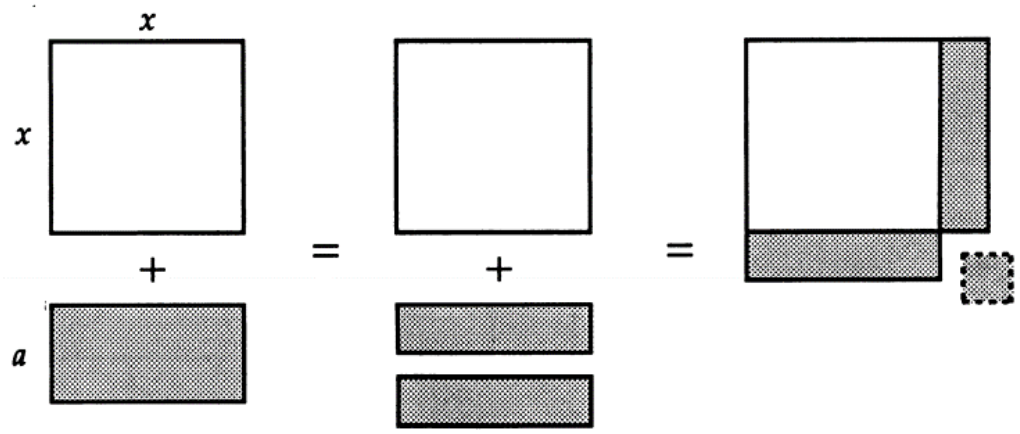
ANEXO A – Diagrama Pitagórico I



Fonte: Nelsen (1993, p.3).

ANEXO B – Completar quadrado

$$x^2 + ax = (x + a/2)^2 - (a/2)^2$$



Fonte: Nelsen (1993, p.19).