UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS – UFAL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA – IM

GELISON ALVES DE MORAIS

DESIGUALDADES DAS MÉDIAS COM O AUXILIO DE FORMAS GEOMÉTRICAS

MACEIÓ/AL
2023

GELISON ALVES DE MORAIS

DESIGUALDADES DAS MÉDIAS COM O AUXILIO DE FORMAS GEOMÉTRICAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito para obtenção do título de licenciado em Matemática sob a Orientação do Prof. Dr. Wagner Rânter Gouveia Da Silva.

MACEIÓ/AL

2023

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária: Taciana Sousa dos Santos – CRB-4 – 2062

M828d Morais, Gelison Alves de.
Desigualdades das médias com o auxílio de formas geométricas / Gelison Alves de Morais. – 2024.
43 f. : il. color.

Orientador: Wagner Rânter Gouveia da Silva.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática : Licenciatura) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2024.

Bibliografia: f. 43.

1. Desigualdades das médias. 2. Geometria. 3 Álgebra. 4. Pensamento espacial. I. Título.

CDU: 51

GELISON ALVES DE MORAIS

DESIGUALDADES DAS MÉDIAS COM O AUXILIO DE FORMAS GEOMÉTRICAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito para obtenção do título de licenciado em Matemática sob a Orientação do Prof. Dr. Wagner Rânter Gouveia Da Silva.

Prof. Dr. Wagner Rânter Gouveia Da Silva – UFAL
(Orientador)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Vanio Fragoso de Melo– UFAL

Prof. Dr..Rafael Nobrega de Oliveira Lucena – UFAL

Dedico o presente trabalho a minha avó Iraci Maria Da Silva a pessoal mais importante da minha vida.

AGRADECIMENTOS

Minha história é simples e comum, nada muito diferente de muitas outras. Porém, sou muito grato por ter tido, durante toda essa trajetória, pessoas incríveis que sempre me apoiaram e me deram todo o suporte que precisei nessa jornada.

Assim, sou grato mais uma vez à minha avó Iraci Maria Da Silva, pois tudo que sou devo a ela.

A minha mãe Amara Maria da Silva, por toda doação e sacrifício.

A minha irmã Larissa Vitória, por ser uma luz na minha vida.

Aos meus amigos do curso de licenciatura em matemática por essa longa parceria.

A minha família, por todo apoio nos bons e maus momentos.

Aos meus amigos por todo carinho e companheirismo nessa jornada.

Ao meu Orientador, Prof. Dr. Wagner Rânter Gouveia Da Silva, por toda paciência e orientação.

“Não deixe o mar te engolir.”

Charlie Brown Jr.

RESUMO

O presente trabalho se propôs a desenvolver um material que possibilite explicar as desigualdades das médias aritmética, geométrica, harmônica e quadrática por demonstrações geométricas, sabendo que muitos estudantes têm dificuldades na compreensão e entendimento da álgebra, e que a geometria por sua vez possui eficácia no desenvolvimento do pensamento espacial, pensamento lógico e com uma rigidez de argumentos eficaz no auxílio da compreensão e aprendizagem de diversos conteúdos matemáticos, então, desenvolvemos esse material de forma que possa ser utilizado em sala de aula, pelo professor, ao apresentar o conteúdo ou para fixá-lo, entendendo que a explicação visual já possibilita a prova, foi abordado de maneira minuciosa, o passo a passo que deverá ser seguido para chegarmos ao resultado desejado, a ideia, como já dito, é fornecer pistas visuais que estimule o pensamento espacial e matemático possibilitando a compreensão do conteúdo.

Palavras-chave: Desigualdades Das Medias, Pensamento Espacial, Compreensão E Aprendizagem**.**

ABSTRACT

The present work proposed to develop a material that makes it possible to explain the inequalities of arithmetic, geometric, harmonic and quadratic means through geometric demonstrations, knowing that many students have difficulties in understanding and understanding algebra, and that geometry in turn is effective in development of spatial thinking, logical thinking and with a rigidity of arguments that are effective in aiding the understanding and learning of various mathematical contents, so we developed this material so that it can be used in the classroom, by the teacher, when presenting the content or for fix it, understanding that the visual explanation already makes the proof possible, the step by step that must be followed to reach the desired result was approached in detail, the idea, as already said, is to provide visual clues that stimulate spatial thinking and mathematical, enabling the understanding of the content.

Keywords: Media Inequalities, Spatial Thinking, Understanding and Learning.

ÍNDICE DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Matemática possui e exige um imenso rigor lógico na sua compreensão que por muitas vezes acaba afastando muito dos seus admiradores, e aqueles que tentam compreender toda sua forma deverá se dedicar ao máximo em prol desse objetivo como diz Gil (2008, p. 13):

> [...] Entendo que a Matemática traz consigo um formalismo que, aliado à dificuldade de abstração faz com que o aluno se distancie de seu estudo, até porque diversas vezes os conceitos e procedimentos apresentados não são entendidos de imediato, e talvez nem em uma segunda explicação, fazendo com que o aluno se desmotive para seu estudo.

Esse rigor matemático é oriundo de séculos atrás, mas a importância da matemática parece cada vez mais indissociável de nossas vidas, nesse sentido D'Ambrosio (1998, p. 3, apud GIL, 2008, p. 14) afirma que:

> [...] A matemática dos sistemas escolares é congelada. São teorias em geral antigas, desligadas da realidade. Foram concebidas e desenvolvidas em outros tempos, outros espaços. Será que essa matemática, que chamamos de acadêmica, é importante para todos os povos? Sem dúvida. A sociedade moderna não funciona sem essa matemática, a tecnologia moderna não se aplica sem essa matemática, as teorias científicas não podem ser trabalhadas sem essa matemática. Mesmo as artes e as humanidades estão impregnadas dessa matemática.

Sempre tive uma imensa admiração pela geometria, geometria essa que sempre despertou grande fascínio na humanidade, as formas geométricas tentando imitar o ambiente que nos cerca tanto o concreto como o abstrato, no seu rigor lógico e argumentativo.

Refletindo em relação a esse fato surge assim um questionamento importante, "podemos usar geometria como auxílio de explicação de outros conteúdos matemáticos?", e pensando na imensa dificuldade que a álgebra desperta nos alunos do Ensino Fundamental vem à tentativa de utilizar o auxílio da geometria para tentar explicar esses conceitos algébricos, pois sabemos das inúmeras forma de aprender e de ensinar matemática, na variedade de possibilidades que a matemática nos concede, onde não existe uma metodologia única e universal de ensino da mesma, e nos permite criar, expandir e utilizar nossa criatividade ao máximo, e nessa ideia Onuchic e Allevato (2004, p. 214, apud GIL, 2008, p. 14) afirmam que:

> [...] Gente de todo o mundo está trabalhando na reestruturação da Educação Matemática. Ensinar bem Matemática é um empenho complexo e não há receitas fáceis para isso. Não há um caminho único para se ensinar e aprender Matemática.

Assim com objetivo de melhorar a aprendizagem de conceitos algébricos, utilizaremos argumentos e contextos geométricos de forma a auxiliar a alcançar esse objetivo.

Neste trabalho buscamos desenvolver um material focado nas desigualdades entre médias, com auxílio de demonstrações geométricas, utilizando de modo geral os conceitos de áreas de figuras planas, ideias bem familiares aos alunos do fundamental 2. No capítulo 1 e 2, Justificamos o porquê procurar outras formas de explicações que auxilie na aprendizagem e como a interação entre áreas é importante. O capítulo 3 traz uma breve análise, de modo geral, de alguns livros didáticos de escolas públicas e módulos de escolas particulares sobre o conteúdo das médias, já nos capítulos 4 e 5 definimos áreas de figuras planas, que usaremos nas demonstrações futuras, e as médias Aritmética, Geométrica, Harmônica e Quadrática que são os pontos norteadores da construção do nosso material. O capítulo 6 vem com algumas aplicações das médias pouco citadas no fundamental 2, que são as médias Harmônica e Quadrática, aplicações essas que poderiam ser bem trabalhadas no com os alunos nessa fase. E por fim o capítulo 7 vem com o material desenvolvido a base de demonstrações geométricas com figuras planas para justificar as desigualdades entre as médias, material esse que pode ser utilizado por professores em sala de aula sem a necessidade de utilização de conceitos a priori distantes do conhecimento desses alunos nessa fase escolar.

1 JUSTIFICATIVA E RELEVÂNCIA DO TEMA

Observando a grande dificuldade de muitos alunos em compreender expressões algébricas e a dúvida na veracidade de tais expressões, surgi a necessidade de outro tipo de explicação que os façam compreender e acreditar que essas expressões são de fato verdadeiras.

Dito isso, podemos através da utilização da geometria com explicações visuais que estimulem e motivem os estudantes nessa busca de respostas para convencê-los de que essas expressões são verdadeiras e possuem uma explicação física.

A Álgebra é extremamente relevante na expansão do pensamento abstrato por estar relacionada com símbolos genéricos muitas vezes podendo ser criados pelo próprio aluno, porém a Álgebra está muito mais associada à tradução de contextos matemáticos observados na natureza em geral, e também nos ambientes mais próximos de nós, como afirma Vale et al. (2007, p. 1):

> [...] No entanto, o seu estudo está fortemente ligado à manipulação simbólica e à resolução de equações. Mas a álgebra é mais do que isso. Os alunos precisam entender os conceitos algébricos, as estruturas e princípios que regem as manipulações simbólicas e como estes símbolos podem ser utilizados para traduzir ideias matemáticas. Muitos desses conceitos algébricos podem ser construídos partindo das experiências com números; contudo a álgebra também está fortemente ligada à geometria e ao tratamento de dados.

O objetivo dos matemáticos muitas das vezes é encontrar ou generalizar ideias que se tornem padrões, sabendo que encontramos padrões em todas as formas de vida, podemos assim utilizar esses padrões existentes na busca de facilitar a compreensão da matemática em relação ao mundo, como diz Vale et al. (2007, 5):

> [...] Quando apelamos aos padrões no ensino da matemática é normalmente porque queremos ajudar os alunos a aprender uma matemática significativa e/ou a envolver-se na sua aprendizagem facultando-lhes um ambiente de aprendizagem que tenha algo a ver com a sua realidade e experiências.

Assim como base nessas ideias podemos utilizar a geometria que é caracterizada por tentar construir padrões de objetos físicos para nos ajudar na compreensão dos conteúdos Algébricos, pois possibilita a construção do raciocínio de uma forma intuitiva e que por se tratar de objetos físicos a priori, possui um aspecto motivador por trabalhar com o concreto, pois como enfatiza Vale et al. (2007, p. 5), “Os alunos devem começar a aprendizagem da álgebra de modo intuitivo e motivador com o estudo dos padrões no mundo que nos rodeia e o esforço de analisar e descrever esses padrões”.

Dessa forma podemos trabalhar com a geometria e todo o seu rigor matemático relacionado com o concreto para auxiliar na compreensão de ideias mais abstratas relacionadas a conteúdos algébricos.

2 A GEOMETRIA COMO FERRAMENTA AUXILIADORA NA COMPREENSÃO DA ÁLGEBRA

Buscando formas para complementar o ensino da álgebra e tentando fugir do ensino monótono, do tradicional e vislumbrando uma nova perspectiva, encontramos como uma ideia alternativa a utilização de aulas dinâmicas com auxílio de outros conteúdos como, por exemplo, a geometria. A geometria é conhecida por ser rigorosa e por trabalhar muito com observações de objetos concretos do dia a dia, dessa forma se torna viável a utilização da geometria na compreensão de ideias abstratas, pois como diz Pontes (2007), podemos utilizar a geometria como forma de justificar procedimentos algébricos onde a interação dessas áreas da matemática possibilita um ambiente adequado à construção do conhecimento matemático.

A interação entre áreas da matemática possibilita uma gama maior de ferramentas que por ventura auxiliarão na aprendizagem, tornando conceitos mais palpáveis aos olhos daqueles que não tem tanta familiaridade com o conteúdo.

Dessa forma, com essa interação entre as áreas podemos trazer mais significados aos conteúdos, trazendo assim o fator motivador com problemas semelhantes a suas experiências no cotidiano, como diz nos PCNs (BRASIL, 1998, p. 95):

> [...] Para que a aprendizagem possa ser significativa é preciso que os conteúdos sejam analisados e abordados de modo a formarem uma rede de significados. Se a premissa de que compreender é apreender o significado e de que para aprender o significado de um objeto ou acontecimento é preciso vê-lo em suas relações com os outros objetos ou acontecimentos, é possível dizer a ideia de conhecer assemelha-se a ideia de tecer uma teia.

Assim fica óbvio a importância da geometria como ferramenta para descrever o abstrato relacionando com o concreto, pois de fato a Geometria produz significados concretos de ideias, padrões ou observações abstratas possibilitando que possamos ver as suas interações e relações, dessa forma podemos utilizá-la como uma ferramenta robusta que auxiliará no estudo e na compreensão da álgebra.

Sabendo que a Álgebra possui como finalidade o desenvolvimento do pensamento algébrico, como diz na BNCC (BRASIL, 2019, p. 270):

> [...] A unidade temática Álgebra, por sua vez, tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos.

A Geometria possui eficácia em desenvolver o pensamento espacial, atua no cotidiano e estimula o pensar logicamente, de forma estrutural e com rigidez de argumentos sólidos.

Dessa forma, através da interação da geometria e da álgebra, isso nos possibilitará dar significados aos conteúdos trabalhados possibilitando uma maior compreensão e culminando numa melhor aprendizagem.

3 ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO FUNDAMENTAL II

Inicialmente foram analisados alguns livros didáticos de 8° e 9° anos utilizados em escolas públicas e também alguns módulos de algumas escolas particulares também voltados aos anos finais do ensino fundamental 2. Em todos os materiais analisados fica evidente a falta de representação geométrica que possibilite uma nova perspectiva de entendimento do conteúdo das médias, vale ressaltar que, as únicas médias apresentadas são as médias aritmética e geométrica, que são trabalhadas e contextualizadas apenas na área de estatística, sendo utilizadas apenas como ferramentas de manipulação de dados, nenhuma menção a outros tipos de médias, como as médias Geométrica e Harmônica e suas aplicações, e muito menos menção as desigualdades entre as médias.

Os autores apresentam as médias como uma expressão que possibilita a manipulação de dados estatísticos coletados, para tentar obter mais informações sobre esses dados oriundos de pesquisas socioambientais. Em seguida, é complementado com gráficos e expressões algébricas, todas essas formas de representações simbólicas são de certa forma as bases para o cálculo das médias aritmética e geométrica que foi construído através de algoritmos de expressões algébricas oriundas de uma prática matemática, a média quadrática, por exemplo, aparece no cálculo do desvio padrão, porém nem é citada como média quadrática. No caso específico do desenvolvimento da ideia de cálculo da média aritmética, que é feito através do pensamento de que é a soma dos valores dividido pelo número da quantidade total desses valores, e esse quociente representará a média aritmética, e assim é comprovado o conceito de média aritmética.

De modo geral, observamos que os conceitos sobre as médias são poucos trabalhados e explorados, sendo apenas informado o resultado das operações, que são as médias aritmética e geométrica, não fazendo distinção dos aspectos conceituais, reduzindo-os a cálculos matemáticos simples, ou seja, foram utilizados recursos visando facilitar os cálculos, e não para desenvolver o entendimento sobre o que representa as expressões média aritmética e média geométrica.

Portanto, este trabalho tem como objetivo fornecer outra forma de abordagem de representação do conteúdo, visando expandir as ideias e os conceitos principalmente das desigualdades entre as médias.

4 ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

Neste capítulo introduziremos alguns conceitos que serão utilizados nas demonstrações para provar as desigualdades das médias.

4.1 ÁREA

A palavra área provém do latim *área* e refere-se ao espaço de terra que há entre determinados limites, ou seja, um espaço, uma região com delimitações. Na matemática associamos a essa região delimitada um valor numérico real positivo, e assim a área é a medida de uma superfície plana delimitada.

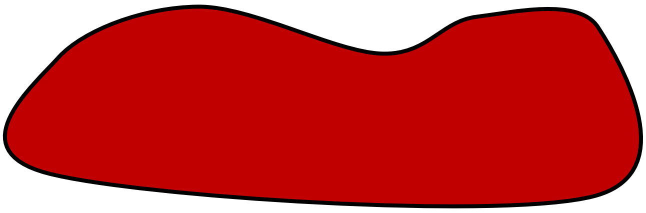


Figura 01 – Superfície plana delimitada

4.2 ÁREA DO QUADRADO

Inicialmente definiremos um quadrado unitário de lado medindo uma unidade de comprimento (1 u.c), e a sua área será 1 u.c^2 (uma unidade de comprimento quadrado).

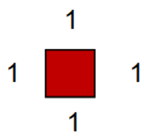


Figura 02 – Quadrado unitário de área 1 u.c^2

Considere agora um Quadrado Q de lado medindo x, onde $x > 1$.

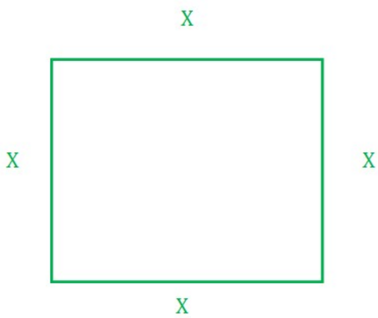


Figura 03 – Quadrado de lado x

Sabendo que,

$$x = \underbrace{1+1+\ldots+1+1}_{x veses}$$

Particionaremos o quadrado Q em x partes de quadrados unitários,

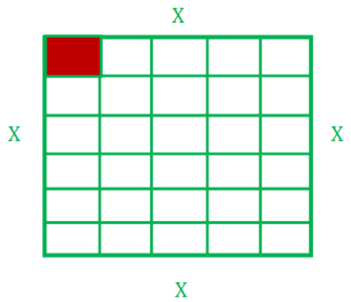


Figura 04 – Quadrado particionado em x quadrados unitários

Definiremos assim que, a área do quadrado será a soma das áreas dos quadrados unitários cuja área é 1 u.c^2. portanto temos que a área do quadrado Q é,

$$A_Q = x^2$$

De modo geral, a área do quadrado será a medida do seu lado elevado ao quadrado.

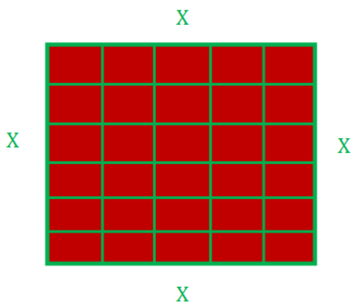


Figura 05 – Quadrado de área x^2

4.3 ÁREA DO RETÂNGULO

Considere um retângulo R de lados medindo x e y, onde x é o comprimento e y é a largura,

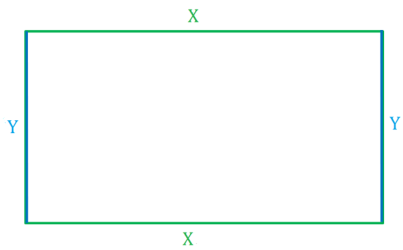


Figura 06 – Retângulo de lados medindo x e y

Particionando os lados do retângulo de forma unitária,

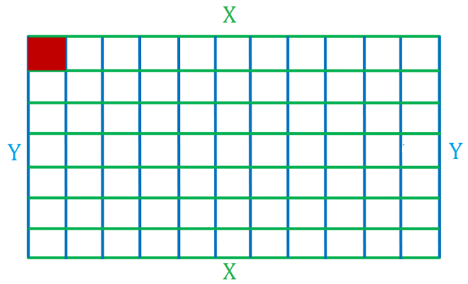


Figura 07 – Retângulo particionado em xy quadrados unitários

Definiremos assim que, a área do retângulo será a soma das áreas dos quadrados unitários cuja área é 1 u.c^2. Portanto temos que a área do retângulo R é,

$$A_R = xy$$

De modo geral, a área do retângulo será o produto das medidas do comprimento pela largura.

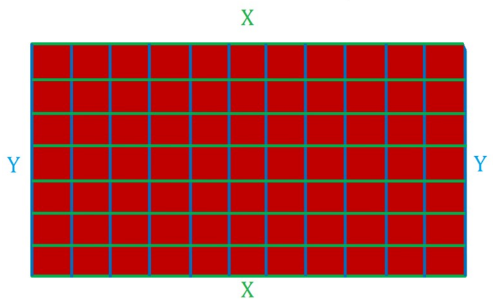


Figura 08 – Retângulo de área xy

4.4 ÁREA DO TRIÂNGULO

Considere um retângulo$R$ de lados medindo x e y, onde x é o comprimento e y é a largura,

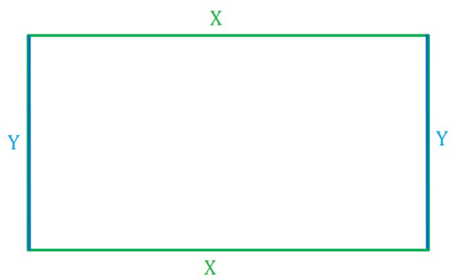


Figura 09 – Retângulo de lados medindo x e y

Traçando a diagonal do retângulo R obtemos dois triângulos,

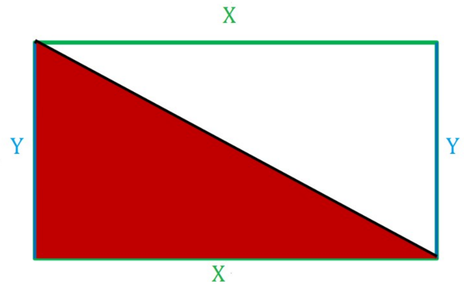


Figura 10 – Retângulo dividido pela sua diagonal

Sabendo que a área do retângulo é o Produto do seu comprimento pela a sua largura, observe que o triângulo T é a metade da área desse retângulo, sendo x a medida da base desse triângulo e y a altura, então a área do triângulo será,

$$A_T = \frac{xy}{2}$$

De modo geral, a área do Triângulo será a metade do produto das medidas da base pela altura.

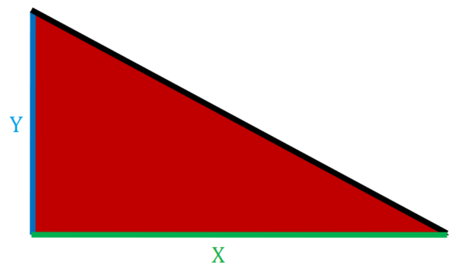


Figura 11 – Triângulo de área $\frac{xy}{2}$

5 MÉDIAS

Uma média de uma lista de números é um valor que pode substituir todos os elementos da lista sem alterar certa característica da lista.

5.1 MÉDIA ARITMÉTICA

A média aritmética é a média com respeito a operação de adição, dessa forma, a média aritmética de uma lista de n números $x_1, x_2, \ldots, x_n$é um número $M_A$tal que,

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=\underbrace{M_A+M_A+\ldots+M_A}_{nparcelas}=n\,M_A$$

Assim,

$$M_A=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$$

5.2 MÉDIA GEOMÉTRICA

A média geométrica é a média com respeito a operação de multiplicação, dessa forma, a média geométrica de uma lista de n números positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$é um número M_G tal que,

$$x_1 x_2 \ldots x_n=\underbrace{M_G M_G \ldots M_G}_{nfatores}=\left(M_G\right)^n$$

Assim,

$$M_G=\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$$

5.3 MÉDIA HARMÔNICA

A média harmônica é a média com respeito a operação de adição dos inversos, dessa forma, a média harmônica de uma lista de n números positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$é um número M_H tal que,

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}=\underbrace{\frac{1}{M_H}+\frac{1}{M_H}+\ldots+\frac{1}{M_H}}_{nparcelas}=\frac{n1}{M_H}$$

Assim,

$$\frac{1}{M_H}=\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}{n}$$

Logo obtemos,

$$M_H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$$

5.4 MÉDIA QUADRÁTICA

A média quadrática é a média em relação à adição dos quadrados, dessa forma, a média quadrática de uma lista de n números positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é um número M_Q tal que,

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \underbrace{(M_Q)^2 + (M_Q)^2 + \ldots + (M_Q)^2}_{nparcelas} = n(M_Q)^2$$

Assim,

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = n(M_Q)^2$$

Disso temos,

$$(M_Q)^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}$$

Logo obtemos,

$$M_Q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}}$$

6 APLICAÇÕES

Neste capítulo faremos algumas aplicações de modo a justificar o porquê acreditamos ser interessante abordar a média harmônica.

6.1 APLICAÇÕES DA MÉDIA HARMÔNICA

Problema 1. Um automóvel viajou da cidade A para cidade B a uma velocidade média de 80 km/h, em seguida, retornou da cidade B para cidade A a uma velocidade média de 120 km/h. A velocidade média desse veículo no percurso inteiro foi de:

Solução: Esse tipo de problema induz o aluno a pensar que a solução seria simplesmente fazer a média aritmética das velocidades, porém não é bem assim, vamos analisar o problema e as informações contida nele.

Seja d a distância entre as cidades A e B, t_1 o tempo de ida da cidade A para a cidade B, e t_2 o tempo de retorno da cidade B para cidade A, sendo v_1 a velocidade média do automóvel na ida, v_2 a velocidade média do automóvel no retorno e v a velocidade média durante todo o percurso.

Disso temos que,

$$v_1=\frac{d}{t_1} \rightarrow t_1=\frac{d}{v_1}\, e\, v_2=\frac{d}{t_2} \rightarrow t_2=\frac{d}{v_2}$$

A velocidade média durante todo o percurso v será dada pelo quociente do espaço total percorrido, ou seja, $2d$ com o tempo total de todo o percurso no caso, t_1+t_2, assim a expressão da velocidade média v será:

$$v=\frac{2d}{t_1+t_2}=\frac{2d}{\frac{d}{v_1}+\frac{d}{v_2}}=\frac{2d}{d\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}\right)}=\frac{2}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}}$$

Perceba que, v é a média harmônica das velocidades v_1 e v_2,

$$v=\frac{2}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}}$$

$$v=\frac{2}{\frac{1}{80}+\frac{1}{120}}$$

$$v=\frac{2}{\frac{3}{240}+\frac{2}{240}}$$

$$v=\frac{2}{\frac{3+2}{240}}$$

$$v=\frac{2}{\frac{5}{240}}$$

$$v=\frac{2\cdot 240}{5}$$

$$v=\frac{480}{5}$$

$$v=96\,km/h$$

Problema 2. Para encher um tanque vazio utilizaremos duas torneiras. Abrindo a torneira A, em sua potência máxima, o tanque encherá em 6 horas, se a torneira B for aberta, em sua potência máxima, o tanque encherá em 12 horas. Se as duas torneiras estiverem abertas ao mesmo tempo, em suas potências máximas, em quanto tempo o tanque encherá?

Solução: Seja x o volume do tanque, e v_1 e v_2 as vazões das torneiras A e B respectivamente, sabendo que a vazão é definida como a razão do volume do tanque pelo tempo gasto pela torneira, assim temos que,

$$v_1=\frac{x}{6}\,e\,v_2=\frac{x}{12}$$

Sendo v a vazão das duas torneiras abertas em suas potências máximas ao mesmo tempo, e t o tempo gasto para que ambas encham o tanque, e lembrando que a vazão total é igual a soma das vazões de cada torneira, ou seja, $v = v_1 + v_2$ e assim temos,

$$v=\frac{x}{t}\,eque\,v=v_1+v_2\,onde\,v_1=\frac{x}{6}\,e\,v_2=\frac{x}{12}$$

Disso temos que,

$$v=\frac{x}{t}=\frac{x}{6}+\frac{x}{12}$$

$$\frac{x}{t}=\frac{x}{6}+\frac{x}{12}$$

$$\frac{x}{t}=x\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\right)$$

$$\frac{1}{t}=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{t}=\frac{2}{12}+\frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{t}=\frac{3}{12}$$

$$\frac{1}{t}=\frac{1}{4}$$

$$t=4$$

Portanto, o tempo necessário para que as duas torneiras encham o tanque é de 4 horas.

Perceba que nesse problema das torneiras se calcularmos a média harmônica dos tempos das torneiras e dividirmos o resultado pela quantidade de torneiras encontraremos o mesmo resultado.

$$M_H=\frac{n}{\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}}$$

Onde t_1 e t_2 são os tempos das torneiras A e B respectivamente

$$M_H=\frac{2}{\frac{1}{6}+\frac{1}{12}}$$

$$M_H = \frac{2}{\frac{2}{12} + \frac{1}{12}}$$

$$M_H = \frac{2}{\frac{3}{12}}$$

$$M_H = \frac{2}{\frac{1}{4}}$$

$$M_H = 2 \cdot \frac{4}{1}$$

$$M_H = 8$$

Dividindo o resultado do cálculo da média harmônica dos tempos pela quantidade de torneiras.

$$M_H = 8 \div 2 = 4$$

Encontramos o tempo gasto por ambas as torneiras para encher o tanque. Portanto, os problemas clássicos para descobrir o tempo gasto para encher ou esvaziar um tanque será dado calculando a média harmônica e dividindo pelo número de torneiras.

6.2 APLICAÇÕES DA MÉDIA QUADRÁTICA

Problema 1. A tabela a seguir mostra a quantidade de pontos, por jogo, que os dois melhores pontuadores de um campeonato de basquete numa sequência de seis jogos.

Jogador 1	21	15	20	18	17	23
Jogador 2	21	18	17	20	18	20

Qual dos atletas foi mais consistente, em pontuação, nessa sequência de seis jogos?

Solução: Para sabermos qual atleta foi mais consistente devemos calcular a média aritmética, dos pontos por jogo, de cada um.

Assim a média aritmética do jogador 1 **Ma_1** será,

$$Ma_1 = \frac{21+15+20+18+17+23}{6} = \frac{144}{6} = 19$$

Logo, a média aritmética do jogador 1 é de 19 pontos por jogo.

Agora calcularemos a média aritmética do jogador 2 **Ma_2** que será,

$$Ma_2 = \frac{21+18+17+20+18+20}{6} = \frac{144}{6} = 19$$

A média aritmética do jogador 2 também é de 19 pontos por jogo, com isso devemos calcular a variância pra saber em quantos pontos varia em relação a média e depois o desvio-padrão que determina o quanto um conjunto de dados é homogêneo para saber qual atleta foi mais constante nesse período. Então sabendo que a variância é calculada tomando o quadrado da diferença entre cada dado e a média aritmética desse conjunto de dados e dividindo pela quantidade desses dados, temos então que a variância do jogador 1 **V_1** e do jogador 2 **V_2** serão.

Variância jogador 1:

$$V_1 = \frac{(21-19)^2+(15-19)^2+(20-19)^2+(18-19)^2+(17-19)^2+(23-19)^2}{6}$$

$$V_1 = \frac{(2)^2+(-4)^2+(1)^2+(-1)^2+(-2)^2+(4)^2}{6}$$

$$V_1 = \frac{4+16+1+1+4+16}{6} = \frac{42}{6} = 7$$

Assim, a variância do jogador 1 é de 7 Pontos em relação a média. Agora vamos calcular a variância do jogador 2.

Variância jogador 2:

$$V_2 = \frac{(21-19)^2+(18-19)^2+(17-19)^2+(20-19)^2+(18-19)^2+(20-19)^2}{6}$$

$$V_2 = \frac{(2)^2+(-1)^2+(-2)^2+(1)^2+(-1)^2+(1)^2}{6}$$

$$V_2 = \frac{4+1+4+1+1+1}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

Portanto temos que a variância do jogador 2 é de 2 pontos em relação a média. Logo a variação de pontos em relação a média do jogador 1 é maior que a do jogador 2, e isso nos diz que houve uma variação maior de desempenho, em pontos, no jogador 1 que no jogador 2, porém, como a variância está numa unidade diferente dos dados originais pois está elevada ao quadrado, vamos calcular o desvio-padrão que é a raiz quadrada da variância, trazendo assim à mesma unidade original dos dados inicialmente.

Portanto, o desvio-padrão do jogador 1 $\mathbf{DP_1}$ e do jogador 2 $\mathbf{DP_2}$ serão necessariamente.

Desvio-padrão do jogador 1:
Como $V_1 = 7$ temos que $DP_1 = \sqrt{7} \approx 2{,}64$

Desvio-padrão do jogador 2:
Como $V_2 = 2$ temos que $DP_2 = \sqrt{2} \approx 1{,}41$

Portanto, como o desvio-padrão de pontos do jogador 1 é quase o dobro do desvio-padrão de pontos do jogador 2, e quanto mais próximo de zero é o desvio-padrão mais homogêneo é o conjunto de dados, concluímos que o jogador 2 foi mais consistente em suas atuações em pontos por jogo neste período de seis partidas.

Note que, este tipo de problema usando a ideia de desvio-padrão é o mesmo que calcular a média quadrática desse conjunto de dados, de fato, o desvio-padrão é uma aplicação direta da ideia de média quadrática.

Problema 2. Os irmãos João e Pedro receberam de herança, do seu falecido pai, um terreno em forma de trapézio, e precisam dividi-lo igualmente em duas regiões de mesma área, se sua bases maior e menor medem 8 e 6 metros respectivamente, qual deverá ser a medida do segmento paralelo as bases que divide o trapézio em duas áreas como a mesma medida.

Solução: Sabendo que a área de qualquer trapézio $\mathbf{A_t}$ é dada pela expressão,

$A_t = \frac{(y+z)\cdot h}{2}$ onde y é a medida da base maior, z é a medida da base menor e h é a altura do trapézio. Seja x a medida do segmento $\overline{EF}$ paralelo as bases do trapézio $ABCD$ que o divide em dois trapézios de mesma área e de alturas h_1 e h_2 **Figura 12.**

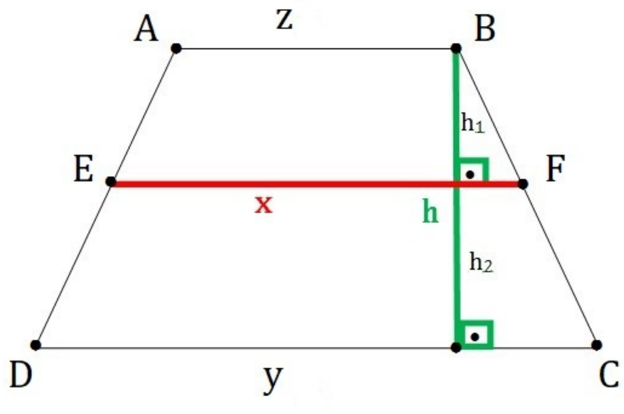


Figura 12 – Trapézio $ABCD$

As áreas A_{t1} e A_{t2} dos trapézios $ABEF$ e $EFCD$ são respectivamente,

$$A_{t1} = \frac{(x+z)\cdot h_1}{2} \text{ e } A_{t2} = \frac{(y+x)\cdot h_2}{2}$$

Traçando o segmento $\overline{BM}$ que intersecta o segmento $\overline{EF}$ no ponto N e é paralelo ao lado $\overline{AD}$, obtemos os triângulos ΔBMC e ΔBNF **Figura 13.**

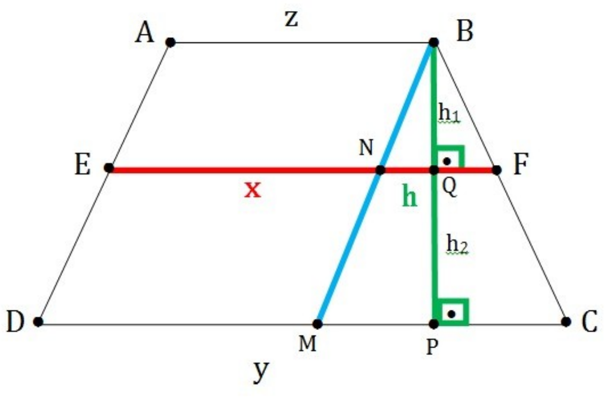


Figura 13 – Trapézio Particionado

Note que, nos triângulos ΔBMC e ΔBNF temos os ângulos $\widehat{B} \equiv \widehat{B}$, $\widehat{M} \equiv \widehat{N}$, $\widehat{C} \equiv \widehat{F}$, pois são ângulos correspondentes, assim pelo critério de semelhança AAA(Ângulo, Ângulo, Ângulo) concluímos que o triângulo $\Delta BMC \sim \Delta BNF$ **Figura 14.**

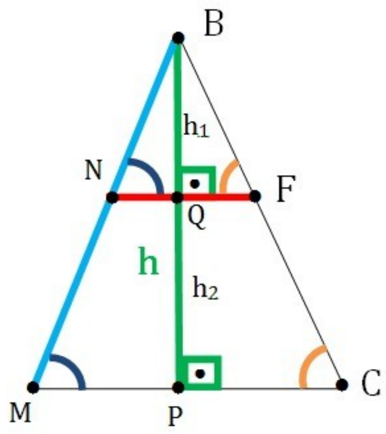
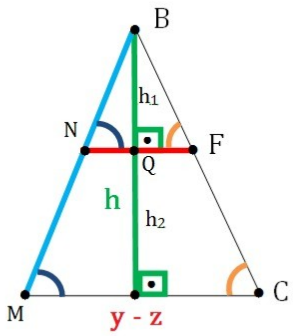


Figura 14 – $\Delta BMC \sim \Delta BNF$

Disso temos que os lados dos triângulos ΔBMC e ΔBNF são proporcionais **Figura 15** e **Figura 16.**



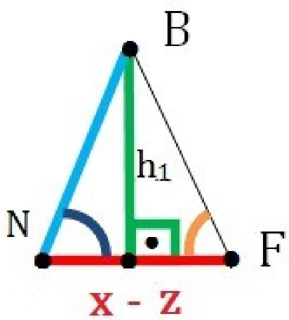


Figura 15 - ΔBMC **Figura 16 –** ΔBNF

Assim temos que,

$\frac{\overline{MC}}{\overline{NF}}=\frac{h}{h_1}$ onde $h=h_1+h_2$, $\overline{MC}=y-z$ e $\overline{NF}=x-z$

$$\frac{y-z}{x-z}=\frac{h_1+h_2}{h_1}$$

$$\frac{y-z}{x-z}=\frac{h_1}{h_1}+\frac{h_2}{h_1}$$

$$\frac{y-z}{x-z}=1+\frac{h_2}{h_1}$$

$$\frac{y-z}{x-z}-1=\frac{h_2}{h_1}$$

$$\frac{y-z}{x-z}-\frac{(x-z)}{x-z}=\frac{h_2}{h_1}$$

$$\frac{y-z-x+z}{x-z}=\frac{h_2}{h_1}$$

$$\frac{y-x}{x-z}=\frac{h_2}{h_1} \quad \text{(i)}$$

Porém, como temos que as áreas A_{t1} e A_{t2} dos trapézios $ABEF$ e $EFCD$ são iguais, igualando as expressões obtemos,

$$A_{t1}=A_{t2}$$

$$\frac{(x+z)\cdot h_1}{2}=\frac{(y+x)\cdot h_2}{2}$$

$$(x+z)\cdot h_1=(y+x)\cdot h_2$$

$$\frac{x+z}{y+x}=\frac{h_2}{h_1} \quad \text{(ii)}$$

Assim, igualando (i) e (ii) encontramos,

$$\frac{y-x}{x-z}=\frac{x+z}{y+x}$$

$$(y-x)\cdot(y+x)=(x+z)\cdot(x-z)$$

$$y^2-x^2=x^2-z^2$$

$$2x^2=y^2+z^2$$

$$x^2=\frac{y^2+z^2}{2}$$

$$x=\sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}}$$

Portanto, como as bases do trapézio medem 8 cm e 6 cm temos que a medida x do segmento $\overline{EF}$ será dado por,

$$x=\sqrt{\frac{8^2+6^2}{2}}$$

$$x=\sqrt{\frac{64+36}{2}}$$

$$x=\sqrt{\frac{100}{2}}$$

$$x=\sqrt{50}$$

$$x=5\sqrt{2}$$

Por fim, concluímos que para determinar a medida do segmento paralelo às bases que divide um trapézio em dois trapézios de mesma área, é dado pelo cálculo da média quadrática das medidas das suas bases.

7 DEMONSTRAÇÃO GEOMÉTRICA DA DESIGUALDADE DAS MÉDIAS

As Desigualdades na matemática surgem com objetivo de estabelecer uma relação de ordem entre duas ou mais expressões. A representação geométrica da desigualdade das médias tem o objetivo de fornecer uma ferramenta, um auxílio visual, uma explicação que concretize o argumento algébrico.

Neste capítulo provaremos as seguintes desigualdades:

Média Quadrática ≥ Média Aritmética ≥ Média Geométrica ≥ Média Harmônica

Mais precisamente, mostraremos que dados x e y números reais não negativos, vale que:

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{x \cdot y} \geq \frac{x \cdot y}{x+y}$$

A prova será dividida em três etapas, seguindo as desigualdades acima.

7.1 A DESIGUALDADE ENTRE A MÉDIA QUADRÁTICA E A MÉDIA ARITMÉTICA

Sejam x e y números reais não negativos. Assuma que $x \leq y$ e considere um quadrado Q de lado $x+y$ com área $(x+y)^2$ como na figura abaixo.

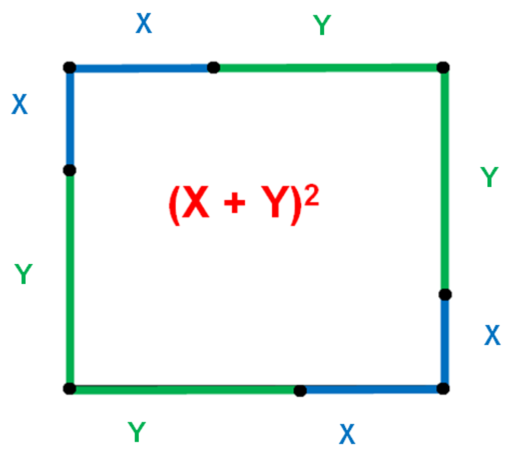


Figura 17 - Quadrado Q de lado $x+y$

Façamos a decomposição desse quadrado em quadrados com áreas menores. Primeiro, considere encontramos dois quadrados em Q cujos lados medem x, e possuem áreas iguais a x^2 cada, como $x \leq y$ esses quadrados não se sobrepõem, como podemos ver na figura abaixo.

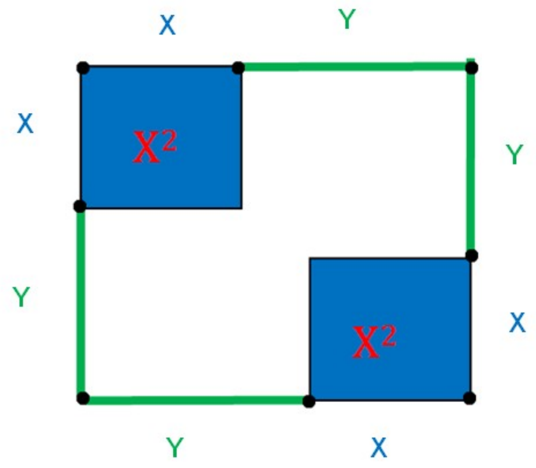


Figura 18 - Dois quadrados de lados x dentro de Q

Considere agora, outros dois quadrados em Q cujos lados medem y e, consequentemente, suas áreas medem y^2. Veja a **Figura 19.**

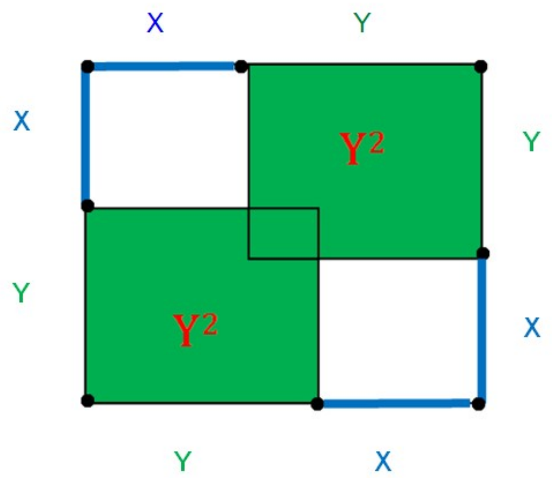


Figura 19 - Dois quadrados de lados y em Q

Observemos que há uma sobreposição entre os dois quadrados, resultando em um quadrado menor de lado $y - x$**.**

Assim, concluímos a decomposição do quadrado Q em quatro quadrados: dois de lados x e dois de lados y, que se sobrepõem um quadrado de lado $y - x$.

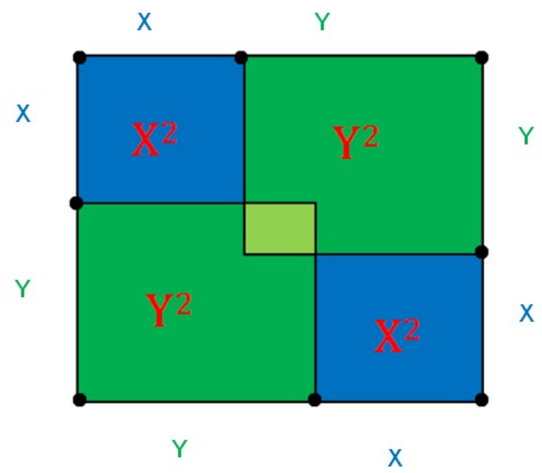


Figura 20 - Decomposição do quadrado Q.

Observando a decomposição e comparando as áreas dos quadrados, concluímos que,

$$2x^2+2y^2 \geq (x+y)^2$$

Então, dividindo ambos os lados da desigualdade por 4, obtemos que

$$\frac{2x^2+2y^2}{4} \geq \frac{(x+y)^2}{4} \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

Consequentemente,

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \frac{x+y}{2}$$

Portanto, concluímos que a média quadrática é maior ou igual que a média aritmética. Além disso, é importante observar que a igualdade só ocorrerá quando não há sobreposição dos quadrados de lados y, ou seja, quando $x=y$.

7.2 A DESIGUALDADE ENTRE A MÉDIA ARITMÉTICA E A MÉDIA GEOMÉTRICA

Nesta demonstração, vamos considerar Q como sendo um quadrado de lado $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ e, portanto, de área igual a $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$, como na **Figura 21**.

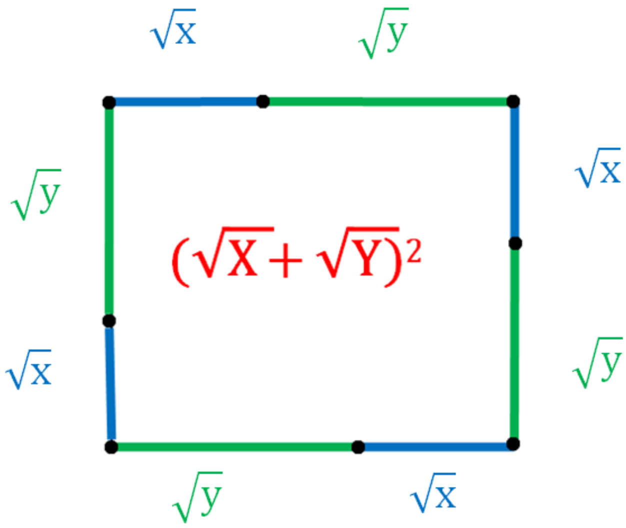


Figura 21 - Quadrado Q de lado $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ e área$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$.

Decomponha o quadrado Q em retângulos de lados $\sqrt{x}$ e $\sqrt{y}$ e um quadrado de lado $\sqrt{y}-\sqrt{x}$ no centro, como na **Figura 22.**

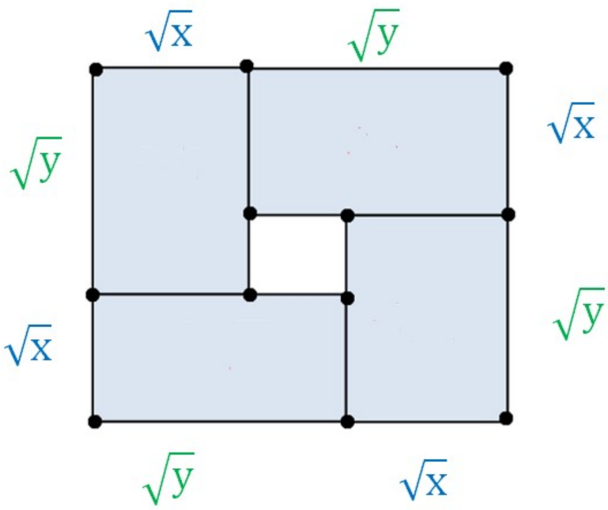


Figura 22 - Decomposição de Q em 4 retângulos e um quadrado

Note que traçando a diagonal em cada um dos quatro retângulos, decompomos cada retângulo em dois triângulos retângulos com catetos $\sqrt{x}$ e$\sqrt{y}$, como na figura abaixo.

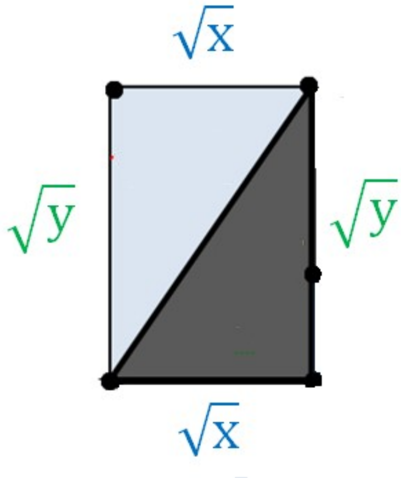


Figura 23 - Retângulo dividido pela diagonal em dois triângulos retângulos.

Aplicado o Teorema de Pitágoras em cada triângulo retângulo, obtemos a mesma medida para hipotenusa, como na **Figura 24**.

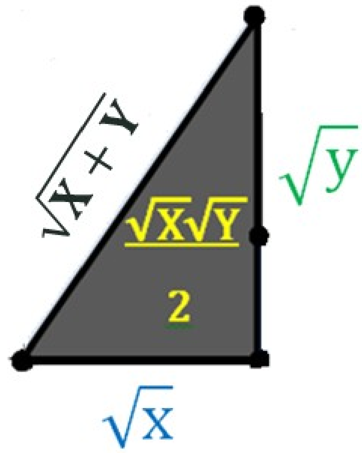


Figura 24 - Triângulo retângulo obtido da decomposição do retângulo da Figura 34.

Escolhemos em cada retângulo da **Figura 22** a diagonal adequada, podemos obter a seguinte figura.

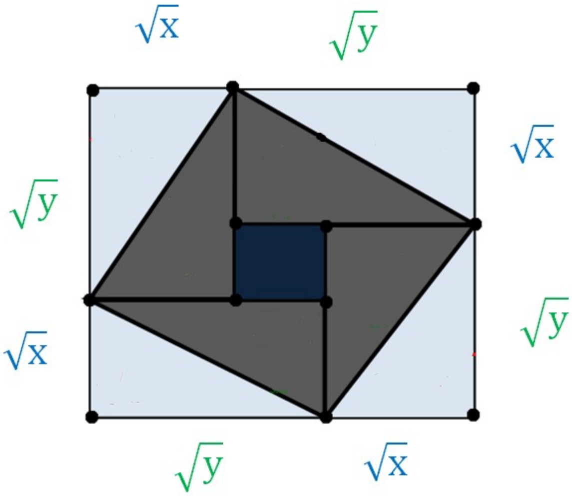


Figura 25 - Quadrado sombreado de lado $\sqrt{x+y}$.

Note que o quadrado obtido na **Figura 25**, pode ser decomposto em quatro triângulos congruentes ao triângulo da **Figura 24** e um quadrado de lado $\sqrt{y}-\sqrt{x}$, como na **Figura 26**.

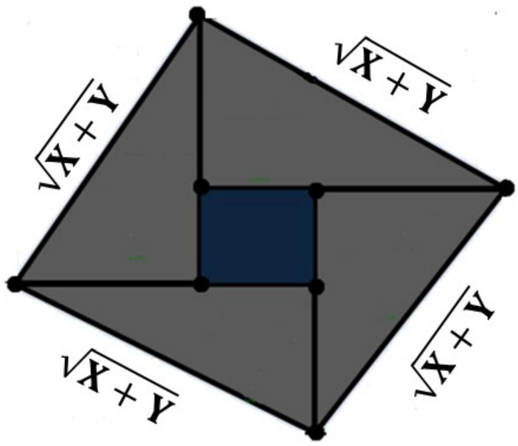


Figura 26 - Decomposição do quadrado sombreado

Assim, podemos observar que a área do quadrado sombreado é a soma das áreas dos quatro triângulos mais a área do quadrado de lado $\sqrt{y}-\sqrt{x}$. Em particular, a área do quadrado sombreado é maior que a soma das áreas dos quatro triângulos. Observe que a soma das áreas dos quatro triângulos é igual à área de dois retângulos como na **Figura 23.**

Logo,

$$\left(\sqrt{x+y}\right)^2 \geq 2 \cdot \sqrt{x}\sqrt{y}$$

Consequentemente,

$$x+y \geq 2 \cdot \sqrt{x \cdot y}$$

Portanto, concluímos que média aritmética é maior que a média geométrica:

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{x \cdot y}$$

Além disso, podemos observar que a igualdade ocorre se, e somente se, o quadrado azul na decomposição da **Figura 26** tem área 0, ou seja, o lado $\sqrt{y}-\sqrt{x}$ possui medida igual a 0. No entanto, isto ocorre somente quando $x=y$.

7.3 A DESIGUALDADE ENTRE A MÉDIA GEOMÉTRICA E A MÉDIA HARMÔNICA

Seja um quadrado Q de lado $\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x+y}=1$ esse quadrado possui área igual a $1u.c^2$, como na abaixo.

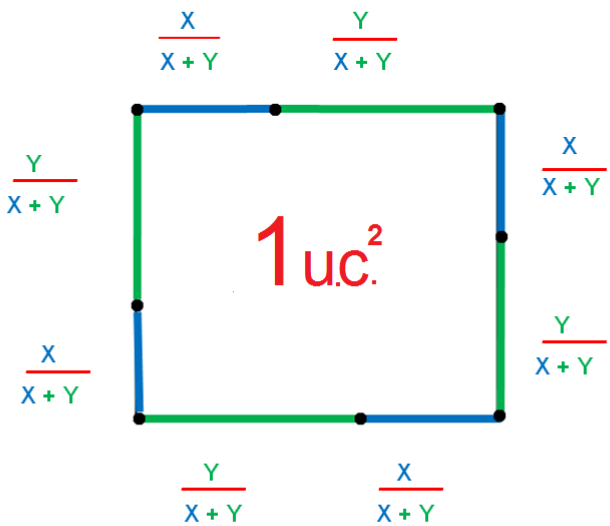


Figura 27 - Quadrado Q de lado $\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x+y}=1$ e área $1u.c^2$.

Decomponha o quadrado Q em retângulos de lados $\frac{x}{x+y}$ e $\frac{y}{x+y}$ e um quadrado menor de lado $\frac{y}{x+y}-\frac{x}{x+y}$ localizado no centro, como na **Figura 28.**

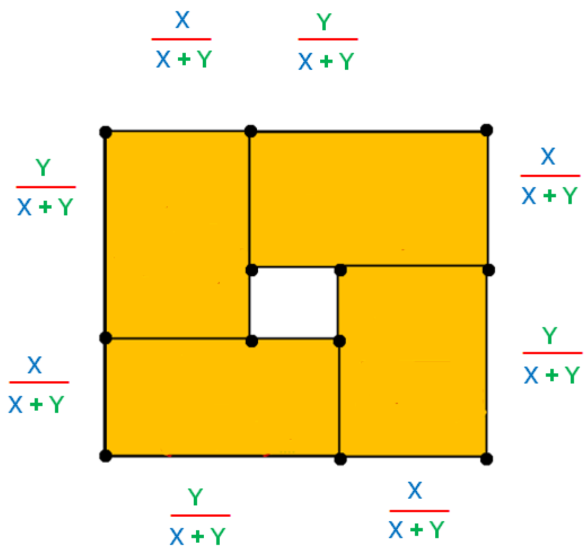


Figura 28 - Decomposição de Q em 4 retângulos e um quadrado

Note que cada um desses retângulos possuem área igual a $\frac{xy}{(x+y)^2}$.

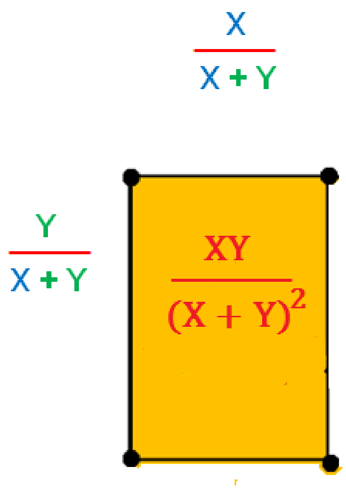


Figura 29 – Retângulo de lado $\frac{x}{x+y}$ e $\frac{y}{x+y}$ que possui área igual a $\frac{xy}{(x+y)^2}$

Então a área da **Figura 28** é soma das áreas dos retângulos que é igual a $4\frac{xy}{(x+y)^2}$, comparando a área da **Figura 27** com a área da **Figura 28** encontramos,

$$1 \geq \frac{4xy}{(x+y)^2}$$

Desenvolvendo essa desigualdade temos que,

$$(x+y)^2 \geq 4xy$$

$$x+y \geq 2\sqrt{xy}$$

$$\frac{1}{\sqrt{xy}} \geq \frac{2}{x+y}$$

$$\frac{\sqrt{xy}}{xy} \geq \frac{2}{x+y}$$

$$\sqrt{xy} \geq \frac{2xy}{x+y}$$

Concluímos assim que a média geométrica é maior do que a média harmônica. Também fica perceptível que a igualdade ocorre se, e somente se, o quadrado Branco na decomposição da **Figura 28** tem área 0, ou seja, o lado $\frac{y}{x+y} - \frac{x}{x+y}$ possui medida igual a 0, e isto só é possível quando temos $x = y$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As demonstrações geométricas de conteúdos matemáticos que geram dificuldades para os alunos do ensino fundamental e médio, devem ser bem exploradas pelos professores para facilitar o aprendizado e possibilitar a sua compreensão, trazendo assim um novo significado para tais conteúdos.

Tendo esse trabalho como guia, pode-se avançar de tal forma que o aluno desenvolva seu pensamento abstrato e espacial indo além de um simples recurso para sanar dúvidas, podendo assim provocar no aluno um hábito de explorar e descobrir ideias mais gerais, incentivando-o a fazer verificações, e elaborar todo o processo de construção de argumentos matemáticos, tendo o professor como um guia nesse trajeto.

Esse projeto contribui aproximando a geometria do âmbito escolar dando significado concreto a diversos conteúdos, e possibilita que o aluno enxergue a matemática por uma perspectiva jamais observada por ele.

REFERÊNCIAS

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular.** Ministério da Educação. Governo Federal. 2019.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática.** Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

GIL, Katia Henn, **Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de álgebra**. Porto Alegre, 2008. 118 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Faculdade De Física – PUCRS, Porto Alegre, 2008.

NELSEN, Roger B. Inequalities.In: NELSEN, Roger B. **Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking.** 93-86388. ed. United States of America: The Mathematical Association of America (Incorporated), 1993. p. 49-55. ISBN 0-88385-700-6.

PONTES, Mércia de Oliveira. **Interação Entre Estruturas Algébricas e Geométricas na Prática Pedagógica do Professor de Matemática da 8ª Série do Ensino Fundamental**, Ceará, 2007. 108 f. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação) - Universidade Estadual do Ceará – UECE, Ceará, 2007.

VALE, Isabel, PALHARES, Pedro; CABRITA, Isabel; BORRALHO, Antônio. 2007. Os Padrões no Ensino e Aprendizagem da Álgebra. **Números e Álgebra** (pp. 193-211). Lisboa: SEM-SPCE.