

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS -UFAL**  
**CAMPUS A.C SIMÕES**  
**MATEMÁTICA**

**GABRIEL FERNANDO SANTOS DE OLIVEIRA**

**2024**

**MACEIÓ**  
**2024**

Gabriel Fernando Santos de Oliveira

## A DIMENSÃO DE HAUSDORFF DE FRACTAIS

Monografia apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharelado em Matemática da Universidade Federal de Alagoas - UFAL, Campus A.C Simões.

Orientador: Prof. Dr. Davi dos Santos Lima

Maceió  
2024

**Catálogo na Fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

O48d      Oliveira, Gabriel Fernando Santos de.  
              A dimensão de Hausdorff de fractais / Gabriel Fernando Santos de Oliveira.  
              - 2024.  
              44 f. : il.

              Orientador: Davi dos Santos Lima.  
              Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática : Bacharelado)  
              – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2024.

              Bibliografia: f. 44.

              1. Dimensão de Hausdorff. 2. Teorema de Morán. 3. Sistemas iterados de  
              funções. I. Título.

CDU: 514.13



*Dedico este  
trabalho a minha família.*

## **AGRADECIMENTOS**

Gostaria de agradecer primeiramente ao meu Deus e Senhor Jesus Cristo por absolutamente tudo que me fez chegar até aqui por meio de sua divina providência. Em segundo lugar quero agradecer aos meus pais por me fazerem chegar até esse ponto, a eles devo tudo em minha vida. Além disso quero agradecer ao meu orientador Davi a quem devo muito e a grandes professores Alan, Rafael Lucena, Wagner e outros que tornaram minha jornada de aprendizado mais rica, aos meus colegas de curso Hegel, Francisco Alan, Henrique, Samuel, Gerson, Lucas nogueira e tantos outros que marcaram minha caminhada acadêmica na UFAL pelas longas horas de estudos e brincadeiras.

O conhecimento do qual a geometria aponta é o conhecimento do eterno, e não de algo que perece e é transitório. Platão

## RESUMO

Este trabalho explora o conceito de dimensão na geometria fractal. São apresentadas as definições e propriedades da dimensão de medida e de Hausdorff, juntamente com definições alternativas como a dimensão de caixa. O artigo aprofunda as aplicações da geometria fractal em IFS (Sistemas de Funções Iteradas), focando particularmente no Teorema de Moran. Este teorema é crucial para calcular a dimensão de Hausdorff de conjuntos auto-similares que satisfazem a propriedade do conjunto aberto (Open Set Condition).

**Palavras-chave:** Dimensão de Hausdorff. Teorema de Moran. IFS.

## **ABSTRACT**

This paper explores the concept of dimension in fractal geometry. It introduces the definitions and properties of measure and Hausdorff dimension, along with alternative definitions like box dimension. The paper delves into applications of fractal geometry on IFS (Iterated Function Systems), particularly focusing on Moran's Theorem. This theorem plays a crucial role in calculating the Hausdorff dimension of self-similar sets satisfying the open set property.

**Keywords:** Hausdorff dimension. Moran's theorem. IFS

## **LISTA DE FIGURAS**

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>PRELIMINARES</b> . . . . .	<b>11</b>
2.1	Espaços métricos . . . . .	11
2.2	Noções de álgebra linear. . . . .	16
2.3	Medidas no $\mathbb{R}^n$ . . . . .	17
<b>3</b>	<b>A MEDIDA E A DIMENSÃO DE HAUSDORFF</b> . . . . .	<b>20</b>
3.1	Definições alternativas de dimensão. . . . .	26
<b>4</b>	<b>APLICAÇÕES EM SISTEMAS ITERADOS DE FUNÇÕES</b> . . . . .	<b>34</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	<b>43</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>44</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O termo "fractal" foi desenvolvido em 1975 pelo matemático polonês Benoit Mandelbrot e vem do latim "fractus" que significa "quebrado" ou "fragmentado". Tal nome não poderia ser melhor escolhido já que fractais nada mais são que conjuntos definidos por processos repetitivos onde cada etapa da construção do conjunto é na verdade uma cópia auto-similar da etapa anterior em escala menor, de modo que, se dermos um "zoom" nessa estrutura, encontraremos não algo bem definido mas uma cópia reduzida do todo, ora, um exemplo disso é o Conjunto de Cantor, que nada mais é que o conjunto formado pelos números reais entre 0 e 1 que só tem dígitos 0 ou 2 na base 3, tal conjunto é formado inicialmente a partir do intervalo  $[0, 1]$  onde seu terço médio  $(1/3, 2/3)$  é removido, sobrando na etapa seguinte da construção os intervalos  $[0, 1/3]$  e  $[2/3, 1]$ , agora repetimos o processo com os dois intervalos restantes e assim seguindo *ad infinitum*, após isso, intersectamos todas  $k$ -etapas as etapas formadas pela união dos  $2^k$ -conjuntos disjuntos e daí teremos o conjunto de Cantor. Agora, definido o que se trata de um fractal auto-similar em linhas gerais, passamos para a parte da medição de tais conjuntos. É bem conhecido que a medida de Lebesgue  $\lambda$  é utilizada para medir o comprimento de conjuntos, no caso de um intervalo  $(a, b)$  ou  $[a, b]$  temos que  $\lambda(a, b) = \lambda([a, b]) = b - a$ , ou se  $C$  é enumerável então  $\lambda(C) = 0$ , mas, no caso dos fractais, surge um grande problema: a medida de Lebesgue não é suficientemente precisa para medi-los! Ora, a saída para isso foi o desenvolvimento da medida de Hausdorff, que consegue "enxergar" os fractais de maneira mais aprofundada e medi-los com mais eficácia e ainda conseguindo generalizar a medida de Lebesgue de modo que a medida de Lebesgue  $n$ -dimensional coincide com a medida de Hausdorff  $n$ -dimensional para  $n$  inteiro positivo, mas, com a diferença que a medida  $s$ -dimensional de Hausdorff não precisa que  $s$  seja um número inteiro. Após isso, percebeu-se que a medida de Hausdorff tem um comportamento muito interessante, isto é, dado um conjunto  $E \subset \mathbb{R}^n$  qualquer, existe um certo número real  $s_0$  tal que a medida  $s_0$ -dimensional de Hausdorff é positiva e finita, para todo  $s > s_0$  a medida  $s$ -dimensional de Hausdorff de  $E$  vale  $\infty$  e para todo  $s < s_0$  a medida  $s$ -dimensional de  $E$  vale 0, a este número  $s_0$  nomeamos de *dimensão de Hausdorff* do conjunto  $E$ . Este trabalho consiste portanto em definir e apresentar os conceitos de medida e dimensão de Hausdorff, mostrar técnicas para o cálculo da dimensão de Hausdorff de conjuntos e por fim aplicá-las ao cálculo da dimensão de Hausdorff em fractais dinamicamente definidos a partir do que definiremos por sistemas iterados de funções (IFS) através do mais importante teorema apresentado neste trabalho, o teorema de Moran.

## 2 Preliminares

Nesta seção daremos os Pré-requisitos básicos mínimos para uma leitura auto-contida do texto. Salientamos que uma boa compreensão de exemplos canônicos clássicos irá facilitar a leitura, a noção de distância de números na reta pode ser generalizada como veremos abaixo:

### 2.1 ESPAÇOS MÉTRICOS

**Definição 2.1.** Dado um conjunto  $M$  qualquer, uma função  $d : M^2 \mapsto \mathbb{R}$  é uma métrica se:

1.  $d(x, x) = 0$ ;
2. Se  $x \neq y$  então  $d(x, y) > 0$ ;
3.  $d(x, y) = d(y, x)$ ;
4.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

A dupla  $(M, d)$  é chamada espaço métrico. Obs:  $M^2 = M \times M$

**Exemplo 2.1.** A métrica "zero-um". Dado um conjunto  $M$  qualquer, definimos  $d : M^2 \mapsto \mathbb{R}$  dada por  $d(x, x) = 0$  e  $d(x, y) = 1$  se  $x \neq y$ , note que é evidente que  $d$  é uma métrica.

**Exemplo 2.2.** O espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ . Os pontos de  $\mathbb{R}^n$  são da forma  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  donde  $x_i \in \mathbb{R}$ . Podemos agora definir a métrica  $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  por

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - y_i)^2}.$$

**Definição 2.2.** Uma sequência  $(x_n)$  num espaço métrico  $M$  é chamada de sequência de Cauchy quando, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que se  $m, n > n_0$  então  $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ .

As propriedades básicas relativas as sequências de Cauchy, como o fato de toda sequência convergente ser de Cauchy e que toda sequência de Cauchy ser limitada, serão omitidas pois são trivialmente deduzidas. Agora vamos a outra definição importante:

**Definição 2.3.** Um espaço métrico  $M$  é dito completo quando toda sequência de Cauchy é convergente.

**Exemplo 2.3.** Seja  $d$  a métrica euclidiana da reta,  $(\mathbb{R}, d)$  é completo. De fato, tome  $(x_n)$  uma sequência de Cauchy em  $\mathbb{R}$ , para cada natural  $n$  definamos o conjunto  $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$ , note que  $X_{k+1} \subset X_k$  para todo  $k$ , note tbm que  $X_n$  é sempre limitado, pois a sequência é de Cauchy e, portanto, limitada. Defina também  $a_n = \inf X_n$ , logo,  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b = \sup X_1$ , como toda sequência monótona limitada é convergente, então, existe  $a = \lim a_n$ .

**Afirmção 2.1.**  $\lim x_n = a$

De fato, precisamos apenas mostrar que  $a$  é limite de alguma subsequência de  $(x_n)$ , isto é, dado  $\varepsilon > 0$  e  $n_1 \in \mathbb{N}$ , podemos obter  $n > n_1$  tal que  $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ . Note que, sendo  $a = \lim(a_n)$  então existe  $m > n_1$  tal que  $a - \varepsilon < a_m < a + \varepsilon$ , mas por definição  $a_m = \inf X_m$ , portanto, existe  $n \geq m \geq n_1$  tal que  $a_m \leq x_n < a + \varepsilon$  e portanto  $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ . o que encerra nossa demonstração.

**Exemplo 2.4.**  $(\mathbb{Q}, d)$  não é completo. De fato basta tomar uma sequência de racionais  $q_n$  tais que  $q_n$  seja a expansão decimal de  $\pi$  até o  $n$ -ésimo dígito após a vírgula, isto é,  $q_1 = 3,1$ ,  $q_2 = 3,14$ ,  $q_3 = 3,141$  e o processo segue analogamente para todo  $n$ . Veja que  $\lim q_n = \pi$ , mas,  $q_n \in \mathbb{Q}$  e  $\pi \notin \mathbb{Q}$ .

Agora iremos falar de compacidade, mas para isso será necessário que definamos o que é um conjunto aberto. O que nos leva a:

**Definição 2.4.** Uma *bola aberta* de centro  $a$  e raio  $r$  num espaço métrico  $(M, d)$  é definida por

$$B(a, r) = \{x \in M \mid d(a, x) < r\}$$

Essa idéia de bola aberta nos leva a uma noção mais geral de conjunto aberto num espaço métrico  $M$ , isto é:

**Definição 2.5.** Um subconjunto  $A$  de um espaço métrico  $M$  é um conjunto *aberto* quando todo  $a \in A$  é centro de uma bola aberta  $B(a, r)$  inteiramente contida em  $A$ .

**Definição 2.6.** Um subconjunto  $F$  um espaço métrico  $M$  é *fechado* se seu complementar for um conjunto aberto.

**Proposição 2.1.** Toda bola aberta  $B(a, r)$  num espaço métrico  $(M, d)$  é um subconjunto aberto de  $M$ .

*Demonstração.* Para cada ponto  $x \in B(a, r)$ , temos  $d(x, a) < r$ , e portanto  $\varepsilon = r - d(x, a) > 0$ . Afirmamos que a bola  $B(x, \varepsilon)$  está contida em  $B(a, r)$ . De fato, se  $y \in B(x, \varepsilon)$  então

$$d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a) \leq r - d(x, a) + d(x, a) = r$$

logo  $y \in B(a, r)$ . □

**Definição 2.7.** Seja  $N$  um subconjunto do espaço métrico  $M$ . Uma cobertura de  $N$  é uma família  $S = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda \subset M$ , tal que para cada  $x \in N$  existe um  $\lambda \in \Lambda$  tal que  $x \in C_\lambda$ . Se existe ainda um certo  $L$  que é subconjunto próprio de  $\Lambda$  tal que  $S' = \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$ , então  $S'$  é subcobertura de  $S$ . Se a cobertura  $S$  for formada por conjuntos abertos, chamamos de cobertura aberta, analogamente para a subcobertura  $S'$ .

**Exemplo 2.5.** A família de conjuntos formadas por  $A_n = (a + 1/n, b - 1/n)$  forma uma cobertura aberta para  $(a, b)$  se  $n$  for suficientemente grande, pois  $(a, b) = \bigcup A_n$ . De fato, dado qualquer ponto  $x \in (a, b)$ , então existem  $n_1, n_2$  tais que  $x > a + 1/n_1$  e  $x < b - 1/n_2$ , daí basta tomar  $n_0 = \min\{n_1, n_2\}$  e teremos  $x \in A_{n_0}$ .

**Definição 2.8.** Um espaço métrico  $M$  é compacto quando toda cobertura aberta de  $M$ , admite subcobertura finita, isto é, se  $M \subset S = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$  então existe um suconjunto próprio finito  $L \subset \Lambda$  tal que  $M \subset S = \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$ .

**Exemplo 2.6.** Note que o  $(a, b)$  não é compacto, pois, tomando a mesma cobertura aberta do exemplo anterior, isto é,  $S = \{A_n\}_n$  onde  $A_n = (a + 1/n, b - 1/n)$  para  $n$  suficientemente grande,  $S$  não admite subcobertura finita. De fato, a reunião finita de conjuntos  $A_n$  é apenas um outro  $A_n$  de maior índice na reunião, e portanto jamais poderá cobrir o intervalo  $(a, b)$ .

**Exemplo 2.7.** Todo subconjunto fechado e limitado do  $\mathbb{R}^n$  é compacto segundo o teorema de Borel-Lebesgue. A demonstração pode ser encontrada em (LIMA, 2000)

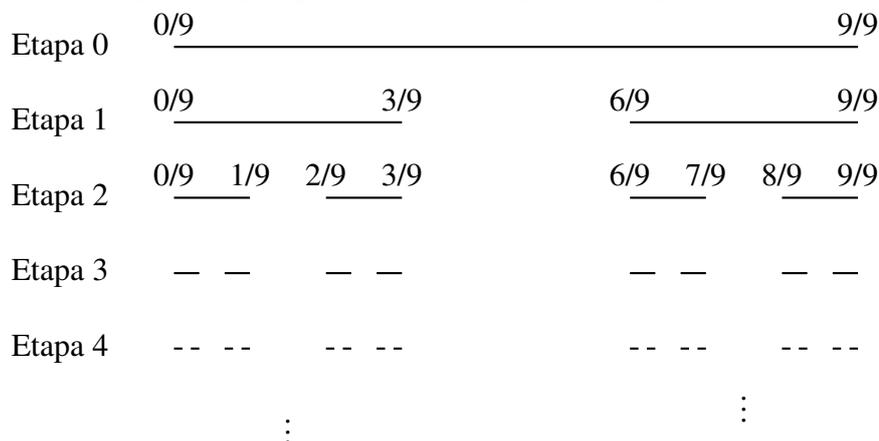
Vamos agora construir um conjunto importante para toda a nossa teoria e demonstrar que ele é um exemplo de compacto.

**Exemplo 2.8.** O conjunto de **Cantor** ternário é construído da seguinte maneira:

Tome inicialmente o Conjunto  $I_0 = [0, 1]$ . Na etapa 1 tire seu terço médio, isto é,  $(1/3, 2/3)$ , assim, lhe restará os conjuntos  $I_1 = [0, 1/3]$  e  $I_2 = [2/3, 1]$ , prosseguiremos do mesmo modo na etapa 2 com os intervalos  $I_1$  e  $I_2$  e teremos então os intervalos  $I_{1,1} = [0, 1/9]$ ,  $I_{1,2} = [2/9, 3/9]$ ,  $I_{2,1} = [6/9, 7/9]$  e  $I_{2,2} = [8/9, 9/9]$ . O processo segue *ad infinitum*, após isso e o conjunto de Cantor será precisamente o conjunto

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{(i_1, \dots, i_n)} I_{i_1, i_2, \dots, i_n}$$

Esta é a representação gráfica da construção do conjunto:



Veja que se chamarmos a etapa  $k$  de  $E_k$  para todo  $k$ , podemos também definir o conjunto de Cantor como sendo  $K = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$ .

Note que o Conjunto de Cantor é limitado em  $[0, 1]$ . Resta demonstrarmos que o conjunto de Cantor é fechado, assim concluiremos pelo teorema de Borel-Lebesgue que o conjunto de Cantor é compacto. De fato, note que em cada etapa da construção temos uma união de fechados, que é fechada, sabemos também que a união finita de fechados é fechado, como  $K$  é a interseção dessas etapas na construção, então é fechado, logo, o conjunto de Cantor  $K$  é compacto. Note também que  $K$  é o conjunto dos  $x \in [0, 1]$  tal que  $x = \sum_{j \geq 1} a_j 3^{-j}$  com  $a_j = 0$  ou  $a_j = 2$ .

Agora iremos adentrar nas definições importantes na teoria de geometria fractal, essas definições serão relevantes nos próximos capítulos.

**Definição 2.9.** Seja  $\mathcal{S}$  a classe dos subconjuntos compactos não vazios de  $\mathbb{R}^n$ . Tome  $A \subset \mathcal{S}$ , então

$$A_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - a| \leq \delta \text{ para algum } a \in A\}.$$

$A_\delta$  é chamado de  $\delta$ -vizinhança de  $A$ .

**Definição 2.10.** A métrica de Hausdorff  $d : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \mapsto \mathbb{R}$  dada por

$$d_h(A, B) = \inf\{\delta \mid A \subset B_\delta \text{ e } B \subset A_\delta\}$$

é uma métrica. De fato, vamos provar as 4 propriedades:

*Demonstração.* 1.  $d(A, A) = \inf\{\delta \mid A \subset A_\delta\} = 0$ .

2.

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \inf\{\delta \mid A \subset B_\delta \text{ e } B \subset A_\delta\} \\ &= \inf\{\delta \mid B \subset A_\delta \text{ e } A \subset B_\delta\} \\ &= d(B, A). \end{aligned}$$

3. Se  $d(A, B) = 0$  então  $\inf\{\delta \mid A \subset B_\delta \text{ e } B \subset A_\delta\} = 0$ , logo para todo  $\delta \geq 0$  temos que  $A \subset B_\delta$  e  $B \subset A_\delta$ , tome  $\delta = 0$ , e como  $A_0 = A$  e  $B_0 = B$  segue-se que  $A = B$ . Agora se  $A = B$  temos novamente a propriedade 1, que já foi provada. Portanto  $d(A, B) = 0 \iff A = B$ .

4. Por fim a desigualdade triangular. Sejam  $A, B$  e  $C$  três conjuntos quaisquer. Vamos usar a definição da métrica de Hausdorff:

$$d(A, B) = \inf\{\delta \mid A \subset B_\delta \text{ e } B \subset A_\delta\},$$

$$d(B, C) = \inf\{\delta \mid B \subset C_\delta \text{ e } C \subset B_\delta\},$$

$$d(A, C) = \inf\{\delta \mid A \subset C_\delta \text{ e } C \subset A_\delta\}.$$

Queremos mostrar que:

$$d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C).$$

Vamos considerar um  $\delta > 0$  arbitrário. Como  $A \subset B_\delta$ , existem pontos  $a$  em  $A$  e  $b$  em  $B$  tais que  $|a - b| \leq \delta$ . Da mesma forma, como  $B \subset C_\delta$ , existem pontos  $b'$  em  $B$  e  $c$  em  $C$  tais que  $|b' - c| \leq \delta$ .

Usando as desigualdades triangulares, temos:

$$|a - c| \leq |a - b'| + |b' - c|.$$

Como  $|a - b'| \leq \delta$  e  $|b' - c| \leq \delta$ , temos:

$$|a - c| \leq 2\delta.$$

Isso significa que  $A \subset C_{2\delta}$  e  $C \subset A_{2\delta}$ . Portanto, podemos concluir que:

$$d(A, C) \leq 2\delta$$

Agora, vamos considerar a soma  $d(A, B) + d(B, C)$ :

$$d(A, B) + d(B, C) \geq \delta + \delta = 2\delta.$$

Como essa desigualdade vale para todo  $\delta > 0$ , concluímos que:

$$d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C).$$

Portanto, a desigualdade triangular é satisfeita pela métrica de Hausdorff. □

**Exemplo 2.9.** Vamos calcular  $d_h(E_{k-1}, E_k)$  donde  $E_k$  é o  $k$ -ésimo estágio do conjunto de Cantor  $K$ . Note que  $E_k \subset E_{k-1}$  então sempre é verdade que  $E_k \subset (E_{k-1})_\delta$ . Logo

$$d_h(E_k, E_{k-1}) = \inf\{\delta \mid E_{k-1} \subset (E_k)_\delta\}.$$

Mas ora, como  $E_k$  é formado através da remoção do terço médio dos intervalos de  $E_{k-1}$ , então o menor  $\delta$  para que  $E_{k-1} \subset (E_k)_\delta$  é metade do terço médio de  $E_k$ . Isto é

$$d_h(E_k, E_{k-1}) = \frac{1}{2 \cdot 3^k}.$$

**Definição 2.11.** Uma coleção  $\mathcal{B}$  de abertos num espaço métrico  $M$  chama-se *base* quando todo aberto  $A \subset M$  se exprime como uma reunião  $A = \bigcup B_\lambda$  com  $B_\lambda \in \mathcal{B}$ . Isto é, dados um aberto  $A \subset M$  e  $x \in A$  então existe um  $B_{\lambda_0} \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in B_{\lambda_0} \subset A$ . Em particular, quando a base  $\mathcal{B}$  é um conjunto enumerável então diz-se que  $M$  tem *base enumerável*.

**Exemplo 2.10.**  $(\mathbb{R}^n, d)$ , onde  $d$  é a métrica euclideana, tem base enumerável. De fato a coleção de bolas abertas  $\{B(q, r)\}_{q \in \mathbb{Q}^n}$  forma uma base enumerável para  $(\mathbb{R}^n, d)$ .

**Definição 2.12.** Um conjunto  $A \subset M$  é *denso* se  $\bar{A} = M$ . Diz-se, assim, que  $A$  é denso em  $M$ .

**Exemplo 2.11.**  $\mathbb{Q}$  é denso em  $\mathbb{R}$ . A prova pode ser encontrada em (LIMA, 2013)

**Definição 2.13.** Um espaço métrico  $M$  é dito ser *separável* se satisfaz uma das 3 seguintes proposições:

1.  $M$  possui um subconjunto enumerável denso;
2.  $M$  possui uma base enumerável de abertos;
3. Toda cobertura aberta de  $M$  admite subcobertura enumerável. (Propriedade *Lindelöf*).

As 3 propriedades são equivalentes e a demonstração pode ser encontrada em (LIMA, 1993).

**Exemplo 2.12.** Seja  $M$  um espaço métrico enumerável, então  $M$  é separável. De fato,  $M$  é subconjunto denso em si mesmo e também é enumerável.

**Exemplo 2.13.** Seja  $M$  um espaço métrico compacto, então  $M$  é separável. Com efeito, como  $M$  é compacto então toda cobertura aberta admite subcobertura finita, e portanto, enumerável.

As ferramentas, conceitos e exemplos que surgem naturalmente do estudo de espaços métricos necessários para o avanço da teoria proposta neste texto, estão contempladas nessa seção, o leitor poderá guiar-se por ela e pelas referências aqui citadas em caso de dúvidas posteriormente.

## 2.2 NOÇÕES DE ÁLGEBRA LINEAR.

**Definição 2.14.** Uma transformação  $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  é dita linear se

1.  $T(x + y) = T(x) + T(y)$  para todos os  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ;
2. Para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$  vale  $T(\lambda \cdot x) = \lambda T(x)$ .

$T$  é dita não-singular se  $T(x) = 0 \iff x = 0$ .

**Definição 2.15.** Uma *transformação*  $S : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  da forma  $S(x) = T(x) + a$ , com  $a$  fixado, donde  $T(x)$  é uma transformação linear não-singular, é chamada de *transformação afim*.

**Exemplo 2.14.** Tome  $T(x) = \lambda x$ , com  $\lambda > 0$ , então  $S(x) = T(x) + a = \lambda x + a$ , com  $a$  fixado, é uma transformação afim.

**Definição 2.16.** Dada  $S : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  tal que  $|S(x) - S(y)| = c \cdot |x - y|$  com  $c > 0$ , então  $S$  é conhecida como *similaridade*.

**Exemplo 2.15.** Considere  $S(x) = T(x) + a$  uma transformação afim, se  $T$  é uma transformação ortogonal (preserva produto interno, portanto norma) então  $S$  é uma similaridade. De fato, note que

$$|S(x) - S(y)| = |T(x) - T(y)| = |T(x - y)| = |x - y|.$$

### 2.3 MEDIDAS NO $\mathbb{R}^n$

**Definição 2.17.** Seja  $X$  um conjunto não vazio e  $\mathcal{F}$  uma coleção de subconjuntos de  $X$ . A coleção  $\mathcal{F}$  é uma *algebra* de subconjuntos de  $X$  se tiver as seguintes propriedades:

1.  $\emptyset, X \in \mathcal{F}$ .
2.  $A \cap B \in \mathcal{F}$ , sempre que  $A, B \in \mathcal{F}$ .
3.  $A^c \in \mathcal{F}$ , sempre que  $A \in \mathcal{F}$ .

**Definição 2.18.** Seja  $X$  um conjunto não vazio e  $\mathcal{S}$  a classe de todos os subconjuntos de  $X$  com as seguintes propriedades:

1.  $\emptyset, X \in \mathcal{S}$ .
2.  $A^c \in \mathcal{S}$  sempre que  $A \in \mathcal{S}$ .
3.  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{S}$  sempre que  $A_i \in \mathcal{S}$ .

Tal classe de conjuntos é chamada de *sigma algebra* ( $\sigma$ -algebra) dos subconjuntos de  $X$ .

**Exemplo 2.16.** Seja  $X$  um conjunto arbitrário e seja  $\mathcal{C}$  a classe de todos os subconjuntos de  $X$ . Denote por  $\mathcal{S}(\mathcal{C}) := \bigcap \mathcal{S}$ , onde a interseção é tomada sobre todas as  $\sigma$ -algebras  $\mathcal{S}$  de  $X$  tal que  $\mathcal{S} \supseteq \mathcal{C}$ , então  $\mathcal{S}(\mathcal{C})$  é uma  $\sigma$ -algebra de  $X$  e  $\mathcal{S}(\mathcal{C}) \supseteq \mathcal{C}$ . De fato, se  $\mathcal{S}$  é uma  $\sigma$ -algebra de  $X$  tal que  $\mathcal{S} \supseteq \mathcal{C}$ , então por definição de  $\mathcal{S}$ , temos que  $\mathcal{S} \supseteq \mathcal{S}(\mathcal{C})$ . Então  $\mathcal{S}(\mathcal{C})$  é a menor sigma algebra de subconjuntos de  $X$  contendo  $\mathcal{C}$ , tal  $\sigma$ -algebra é chamada de  $\sigma$ -algebra gerada por  $\mathcal{C}$ .

**Exemplo 2.17.** Seja  $X$  um espaço topológico. Denote por  $\mathcal{U}$  a classe de todos os subconjuntos abertos de  $X$  e  $\mathcal{C}$  a classe de todos subconjuntos fechados de  $X$ . então  $\mathcal{S}(\mathcal{U}) = \mathcal{S}(\mathcal{C})$ , chamaremos de  $\sigma$ -algebra de Borel dos subconjuntos de  $X$  e denotaremos por  $\mathcal{B}_X$ . Agora tomando se  $X = \mathbb{R}$  então  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$  é a  $\sigma$ -algebra de Borel da reta, cada elemento da sigma algebra de borel é chamado de boreliano. Mais detalhes podem ser vistos em (RANA, 2002)

**Definição 2.19.** Nós chamamos  $\mu$  de uma medida em  $\mathbb{R}^n$  se  $\mu$  é associada a um número não negativo, possivelmente  $\infty$ , a cada subconjunto do  $\mathbb{R}^n$  tal que:

1.  $\mu(\emptyset) = 0$ .
2.  $\mu(A) \leq \mu(B)$  se  $A \subset B$
3. Se  $A_1, A_2, \dots$  é uma sequência enumerável de conjuntos mensuráveis em  $\mathbb{R}^n$  então:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Se tomarmos os  $\{A_i\} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$  disjuntos, teremos:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

**Exemplo 2.18.** A medida de Lebesgue  $\mathcal{L}^1$  estende a ideia de comprimento para uma vasta coleção de conjuntos em  $\mathbb{R}$ , isso inclui os borelianos da reta. Para intervalos abertos e fechados, tomamos  $\mathcal{L}^1(a, b) = \mathcal{L}^1[a, b] = b - a$ . Seja  $A = \bigcup_i [a_i, b_i]$  uma união disjunta, então  $\mathcal{L}^1(A) = \sum_i (b_i - a_i)$ . Isso nos leva a definição natural da medida de Lebesgue (comprimento) de um conjunto  $A$  arbitrário:

$$\mathcal{L}^1(A) = \inf \left\{ \sum_i (b_i - a_i) \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i] \right\}.$$

Agora se definirmos  $A = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i\}$ , volume  $n$ -dimensional de  $A$  é dado por

$$\text{Vol}^n(A) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

Generalizamos  $\mathcal{L}^1$  para o caso  $n$ -dimensional do seguinte modo

$$\mathcal{L}^n(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{Vol}^n(A_i) \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\}.$$

**Proposição 2.2.** A medida de Lebesgue  $\mathcal{L}^1$  é invariante por translação, isto é, dado  $t \in \mathbb{R}$ , então

$$\mathcal{L}^1(A + t) = \mathcal{L}^1(A)$$

para  $A \subset \mathbb{R}$  mensurável.

*Demonstração.* Note que

$$\mathcal{L}^1(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{Vol}^1(A_i) \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\}.$$

Agora, definamos

$$X = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{Vol}^1(A_i) \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\}$$

e

$$Y = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{Vol}^1(A_i + t) \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\}.$$

Tomemos então  $x \in X$ , segue que  $x = \sum_{i=1}^{\infty} Vol^1(A_i)$  para intervalos  $A_i$  que cobrem  $A$ . Teremos então que

$$A + t \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i + t = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i + t),$$

e como  $Vol^1(A_i) = Vol^1(A_i + t)$  teremos

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} Vol^1(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} Vol^1(A_i + t) \in Y.$$

Portanto  $X \subset Y$ . Analogamente se prova que  $Y \subset X$ , daí,  $X = Y$  logo  $\inf X = \inf Y$ .  $\square$

**Exemplo 2.19.** Dado  $A \in \mathbb{R}^n$  limitado, uma distribuição de massa  $\mu$  em  $A$  é uma medida tal que  $0 < \mu(\mathbb{R}^n) < \infty$ . Tomemos como exemplo o seguinte: seja  $L$  um segmento de reta de tamanho 1 no plano. Defina agora  $\mu(A) = \mathcal{L}^1(L \cap A)$  então  $\mu$  é uma medida de massa pois  $\mu(\mathbb{R}^n) = \mathcal{L}^1(L \cap \mathbb{R}^n) = 1$ .

### 3 A medida e a dimensão de Hausdorff

No final do capítulo anterior vimos a definição de medida, em particular, da medida de Lebesgue. Note que a definição de conjunto de medida nula para a medida de Lebesgue é equivalente a dizer que para todo  $\varepsilon > 0$  existe uma cobertura do conjunto em questão, digamos  $F$ , tal que  $\bigcup I_j \supset F$  e  $\sum_j |I_j| \leq \varepsilon$ . Um exemplo disso é o conjunto dos números racionais. De fato, seja  $\mathbb{Q}$  este conjunto, para cada racional  $q_n$  considere o  $I_n = (q_n - \varepsilon/2^{n+2}, q_n + \varepsilon/2^{n+2})$ . Note que  $|I_n| = \varepsilon/2^{n+1}$  e daí somando os comprimentos intervalos teremos:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |I_j| = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} = \varepsilon.$$

Um outro exemplo de conjunto de medida de Lebesgue nula é o conjunto de Cantor ternário  $K$ . Lembremos aqui sua construção:

Etapa 0	0/9							9/9			
Etapa 1	0/9			3/9				6/9			9/9
Etapa 2	0/9	1/9	2/9	3/9				6/9	7/9	8/9	9/9
Etapa 3	--	--	--	--				--	--	--	--
Etapa 4	--	--	--	--				--	--	--	--
			⋮						⋮		

Note que o processo de construção do conjunto de Cantor ternário consiste na continuação *ad aeternum* dessas etapas e depois na interseção infinita delas, isto é, seja  $E_k$  cada uma dessas etapas, teremos:

$$K = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k.$$

Pode-se provar que o conjunto de Cantor consiste nos números entre  $[0, 1]$  cuja expansão na base 3 só possui dígitos 0 e 2, e portanto é uma sequência binária infinita, usando o argumento da diagonal de Cantor é trivial mostrar que qualquer lista de sequências binárias infinitas infinitas é não enumerável, e portanto  $K$  também é. Além disso, para provar que  $\mathcal{L}^1(K) = 0$ , basta notar que cada etapa  $E_k$ , para  $k \geq 1$ , são retirados  $2^{k-1}$  intervalos de tamanho  $3^{-k}$  e portanto, teremos que a medida dos intervalos retirados  $G_k$  é:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |G_k| = \sum_{k \geq 1} 2^{k-1} 3^{-k} = 1.$$

E por fim:

$$\mathcal{L}^1(K) = \mathcal{L}^1([0, 1]) - \sum_{k \geq 1} 2^{k-1} 3^{-k} = 1 - 1 = 0.$$

Assim do ponto de vista da teoria da medida de Lebesgue não podemos distinguir  $\mathbb{Q}$  e  $K$ . Desde que  $\mathbb{Q}$  é enumerável mas  $K$  não é, sob a ótica de teoria dos cardinais surge uma importante diferença entre  $\mathbb{Q}$  e  $K$ . E então surge um questionamento: é possível colocar uma medida em  $K$  que dê peso (medida) positiva para  $K$ ? Isto permitiria dizer se é possível enxergar  $K$  sob outra "lupa", isto é, outra medida. O estudo da medida e dimensão de Hausdorff permite-nos responder perguntas como acima e a detalhar conjuntos de maneira bem eficiente.

**Definição 3.1.** O diâmetro de um subconjunto  $U \subset \mathbb{R}^n$  é definido como

$$|U| = \sup\{|x - y| \mid x, y \in U\}.$$

**Definição 3.2.** Se  $\{U_i\}$  é uma coleção enumerável de diâmetro no máximo  $\delta$  que cobre  $F$ , isto é,  $F \subset \bigcup_{i \geq 1} U_i$  com  $0 \leq |U_i| \leq \delta$  para todo  $i$ , dizemos que  $\{U_i\}$  é  $\delta$ -cobertura de  $F$ .

**Definição 3.3.** Tome  $F \subset \mathbb{R}^n$  e  $s \in [0, \infty)$ , para qualquer  $\delta > 0$  definimos

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \mid \{U_i\} \text{ é uma } \delta\text{-cobertura de } F \right\}.$$

**Proposição 3.1.** Se  $\delta_1 \geq \delta_2$  então  $\mathcal{H}_{\delta_1}^s(F) \leq \mathcal{H}_{\delta_2}^s(F)$ .

*Demonstração.* Se  $\delta_1 \geq \delta_2$  teremos que

$$\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \mid \{U_i\} \text{ é uma } \delta_2\text{-cobertura de } F \right\} \subset \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \mid \{U_i\} \text{ é uma } \delta_1\text{-cobertura de } F \right\}.$$

Mas lembremos que se  $A \subset B$  então  $\inf B \leq \inf A$ , daí, tomando o infimo sobre todas as coberturas, teremos que  $\mathcal{H}_{\delta_1}^s(F) \leq \mathcal{H}_{\delta_2}^s(F)$ .  $\square$

Note da proposição acima que quando  $\delta$  decresce,  $\mathcal{H}_\delta^s(F)$  cresce, portanto, quando  $\delta \downarrow 0$ , visto que é bem conhecido que funções monótonas  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  possuem limites laterais  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  se  $a \in X$ , conforme (LIMA, 2013). Então  $\mathcal{H}_\delta^s(F)$  se aproxima de um limite, o que nos leva a seguinte definição:

**Definição 3.4.**

$$\mathcal{H}^s(F) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F).$$

$\mathcal{H}^s(F)$  é chamada de *medida de Hausdorff s-dimensional*.

**Proposição 3.2.** Tome  $\{F_i\}_{i \geq 1} \subset \mathbb{R}^n$  enumerável então  $\mathcal{H}^s(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F_i)$ .

*Demonstração.* Seja  $\{A_{i,j}\}_j$  uma  $\delta$ -cobertura de  $F_i$ , então temos que  $\bigcup_i \{A_{i,j}\}_{i,j}$  é  $\delta$ -cobertura de  $F = \bigcup F_i$ . Logo da definição de  $\mathcal{H}_\delta^s(F)$  temos que:

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq \sum_{i,j \geq 1} |F_{i,j}|^s = \sum_{i \geq 1} \sum_{j \geq 1} |F_{i,j}|^s.$$

Tomando agora o ínfimo sobre todas as coberturas teremos:

$$\mathcal{H}_\delta^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^s(F_i).$$

Por outro lado temos, utilizando a proposição anterior e a definição, que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_{\delta}^s(F_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F_i).$$

E daí juntando tudo temos por fim que

$$\mathcal{H}_{\delta}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F_i).$$

Agora fazendo  $\delta \rightarrow 0$  obtemos o que desejavamos:

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F_i).$$

□

**Definição 3.5.** Seja  $U \in \mathbb{R}^n$  e  $\lambda > 0$  então denotemos  $\lambda U = \{\lambda x \mid x \in U\}$ .

**Proposição 3.3.** Tome  $F \in \mathbb{R}^n$  e  $\lambda > 0$  então  $\mathcal{H}^s(\lambda F) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F)$ .

*Demonstração.* Tome  $\delta > 0$  e seja  $\{U_i\}_i$  uma  $\delta$ -cobertura de  $F$  então  $\{\lambda U_i\}_i$  é uma  $\lambda\delta$ -cobertura de  $\lambda F$ , de fato, se  $A \subset \bigcup F_i$  com  $|U_i| \leq \delta$  então  $|\lambda F_i| \leq \lambda\delta$ . Note que  $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda U_i|^s = \lambda^s \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s$ . Portanto

$$\lambda^s \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \mid \{U_i\}_i \text{ é } \delta\text{-cobertura de } F \right\} \subset \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |V_i|^s \mid \{V_i\}_i \text{ é } \lambda\delta\text{-cobertura de } \lambda F \right\}.$$

Portanto, iremos obter que  $\mathcal{H}_{\lambda\delta}^s(F) \leq \mathcal{H}_{\delta}^s(F)$ . Fazendo  $\delta \rightarrow 0$ , temos:

$$\mathcal{H}^s(F) \leq \lambda^s \mathcal{H}^s(F).$$

Por outro lado, seja  $B \subset \mathbb{R}^n$  e  $\alpha > 0$ , tome  $\lambda = \frac{1}{\alpha}$  e  $F = \frac{B}{\lambda}$  na equação acima e teremos

$$\mathcal{H}^s\left(\lambda \cdot \frac{B}{\lambda}\right) \leq \lambda^s \mathcal{H}^s\left(\frac{B}{\lambda}\right) \iff \mathcal{H}^s(B) \leq \left(\frac{1}{\alpha}\right)^s \mathcal{H}^s(\alpha B) \quad (3.1)$$

$$\iff \alpha^s \mathcal{H}^s(B) \leq \mathcal{H}^s(\alpha B). \quad (3.2)$$

$$(3.3)$$

Como as equações anteriores valem de um modo geral, temos

$$\mathcal{H}^s(\lambda F) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F).$$

□

**Definição 3.6.** Dado  $c \in \mathbb{R}$ , uma função  $f : A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  é  $(c, \alpha)$ -Holder se  $|f(x) - f(y)| \leq c \cdot |x - y|^\alpha$ .

**Proposição 3.4.** Seja  $f : A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  nas condições acima, então  $\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(A)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(A)$ .

*Demonstração.* Tome  $S = \{U_n\}_n$  uma  $\delta$ -cobertura de  $A$ , então  $f(S)$  é uma  $\delta^s$ -cobertura de  $f(A)$ . De fato, como  $|f(x) - f(y)| \leq c \cdot |x - y|^\alpha$ , então, tomando o sup em ambos os lados obtemos que  $|f(U_i)| \leq c \cdot \delta^\alpha, \forall i$ . Além disso,, temos que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |f(U_i)|^{s/\alpha} \leq c^{s/\alpha} \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s.$$

Agora tomando o ínfimo sobre todas as coberturas e fazendo  $\delta \rightarrow 0$  temos:

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(A)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(A).$$

□

**Teorema 3.1.** *Seja  $A \subset \mathbb{R}^n$  existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que:*

$$\mathcal{H}^s(A) = \begin{cases} 0, & \text{se } s > \alpha \\ \infty, & \text{se } s < \alpha \end{cases}$$

*Neste caso  $\alpha$  é chamado de dimensão de Hausdorff de  $A$ . Denotamos por  $\mathcal{HD}(A)$ .*

*Demonstração.* Suponha primeiramente que  $\mathcal{H}^\alpha(A) = \infty$ . tome  $s < \alpha$  e  $\delta > 0$ , então  $\varepsilon = \alpha - s > 0$ . Seja  $\{U_i\}_i$  uma  $\delta$ -cobertura de  $A$ , temos:

$$\sum_i |U_i|^s = \sum_i |U_i|^{\alpha-\varepsilon} \geq \delta^{-\varepsilon} \cdot \sum_i |U_i|^\alpha.$$

Tomando ínfimo sobre as  $\delta$ -coberturas temos  $\mathcal{H}_\delta^s(A) \geq \delta^{-\varepsilon} \mathcal{H}_\delta^\alpha(A)$ , fazendo  $\delta \rightarrow 0$  encontramos:

$$\mathcal{H}^s(A) \geq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^\alpha(A)}{\delta^\varepsilon} = \infty.$$

Por outro lado, se  $\mathcal{H}^\alpha(A) < \infty$ , suponha  $s > \alpha$  e  $\delta > 0$  tal que  $\mathcal{H}_\delta^s(A) \leq \infty$ . Seja  $\{U_i\}_i$  uma  $\delta$ -cobertura de  $A$ , denote também  $\varepsilon = s - \alpha > 0$ . Temos

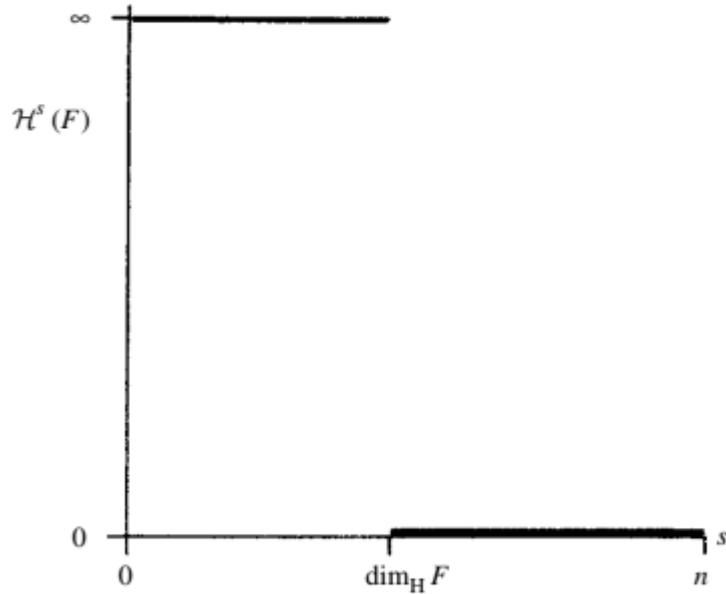
$$\sum_i |U_i|^\alpha = \sum_i |U_i|^s \cdot |U_i|^{-\varepsilon} \geq \delta^{-\varepsilon} \sum_i |U_i|^s.$$

Tomando o ínfimo sobre todas as coberturas e fazendo  $\delta \rightarrow 0$ , segue que:

$$\mathcal{H}^s(A) \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^\varepsilon \cdot \mathcal{H}_\delta^\alpha(A) = 0.$$

□

A imagem abaixo representa o comportamento da medida de Hausdorff:



**Proposição 3.5.** Seja  $A \subset \mathbb{R}^n$  e suponha  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  sendo  $(c, \alpha)$ -Holder. Então temos que

$$\mathcal{H}\mathcal{D}(f(A)) \leq (1/\alpha) \cdot \mathcal{H}\mathcal{D}(A)$$

*Demonstração.* Seja  $s > \mathcal{H}\mathcal{D}(A)$ . Então como  $\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(A)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}(A) = 0$  daí, pela definição,  $\mathcal{H}\mathcal{D}(f(A)) \leq s/\alpha$  para todo  $s > \mathcal{H}\mathcal{D}(A)$ . Logo

$$\alpha \mathcal{H}\mathcal{D}(f(A)) \leq \mathcal{H}\mathcal{D}(F) \implies \mathcal{H}\mathcal{D}(f(A)) \leq (1/\alpha) \mathcal{H}\mathcal{D}(A).$$

□

**Definição 3.7.** A transformação  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  é chamada de bi-Lipschitz se existem constantes  $a, b \in \mathbb{R}$  com  $0 < a \leq b < \infty$  tais que

$$a|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq b|x - y| \quad \forall x, y \in A.$$

**Corolário 3.1.**

- Seja  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma transformação Lipschitz, então,  $\mathcal{H}\mathcal{D}(f(A)) \leq \mathcal{H}\mathcal{D}(A)$ .
- Seja  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma transformação bi-Lipschitz, então,  $\mathcal{H}\mathcal{D}(f(A)) = \mathcal{H}\mathcal{D}(A)$ .

*Demonstração.* Na proposição anterior tome  $\alpha = 1$  e teremos o desejado, isto é,  $\mathcal{H}\mathcal{D}(f(A)) \leq \mathcal{H}\mathcal{D}(A)$ . Provando a primeira afirmação. Agora para essa segunda afirmação, pegue o ítem anterior e aplique para a inversa  $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$  que também é Lipschitz. teremos então  $\mathcal{H}\mathcal{D}(A) \leq \mathcal{H}\mathcal{D}(f(A))$ . O que vai nos dar o desejado:

$$\mathcal{H}\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}\mathcal{D}(f(A)).$$

□

**Proposição 3.6.** *Seja  $A \in \mathbb{R}^n$  com  $\mathcal{HD}(A) < 1$ .  $A$  é totalmente desconexo.*

*Demonstração.* Tome  $x, y \in A$  dois pontos distintos. Considere o mapa  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$  definido por  $f(z) = |z - x|$ . Note que  $|f(z) - f(w)| = |(z - x) - (w - x)| = |z - w|$ , logo, pela primeira parte do corolário anterior teremos que  $\mathcal{HD}(f(A)) \leq \mathcal{HD}(A) < 1$  (por hipótese). Daí  $f(A)$  é um subconjunto da reta com  $\mathcal{H}^1(f(A)) = 0$ , por definição de dimensão de Hausdorff, logo, tem complementar denso. Tome  $r$  tal que  $r \notin f(A)$  e  $0 < r < f(y)$ , teremos

$$A = \{z \in A \mid |z - x| < r\} \cup \{z \in A \mid |z - x| > r\}.$$

Então  $A$  está contido em dois conjuntos disjuntos tais que  $x \in \{z \in A \mid |z - x| < r\}$  e  $y \in \{z \in A \mid |z - x| > r\}$ . Segue que  $x$  e  $y$  estão em componentes conexas distintas, portanto,  $A$  é totalmente desconexo.  $\square$

**Exemplo 3.1.** Seja  $K$  o conjunto de Cantor ternário, então  $\mathcal{HD}(K) = \frac{\log(2)}{\log(3)}$ .

*Demonstração.* Seja  $E_k$  o  $k$ -ésimo estágio da construção do conjunto de Cantor que consiste em  $2^k$  intervalos de tamanho  $3^{-k}$ , a idéia consiste em mostrar que quando  $s = \frac{\log(2)}{\log(3)}$  então  $0 < \mathcal{H}^s(K) < \infty$ . Primeiramente note que ao tomarmos os intervalos de  $E_k$  como uma  $3^{-k}$ -cobertura de  $K$ , teremos que  $\mathcal{H}_{3^{-k}}^s(K) \leq 2^k \cdot 3^{-ks} = 1$  se  $s = \frac{\log(2)}{\log(3)}$ . Fazendo  $k \rightarrow \infty$  e tomando o ínfimo sobre as coberturas obtemos que  $\mathcal{H}^s(K) \leq 1$ . Agora vamos mostrar que  $\mathcal{H}^s(K) \geq 1/2$ . Com efeito, como  $K$  é compacto então podemos pegar uma subcobertura aberta finita  $\{U_i\}$  de  $K$ , Agora para  $i$ , tomemos um  $j$  de tal modo que  $3^{-(j+1)} \leq |U_i| < 3^{-j}$ . Note que, cada  $U_i$  intersecta no máximo um intervalo em cada  $E_j$ , pois seu diâmetro é menor que o tamanho dos "gaps". Perceba que se  $l \geq j$  então  $U_i$  intersecta no máximo  $2^{l-j}$  intervalos básicos, pois esse é o número máximo de subintervalos contidos no intervalo básico no qual nosso intervalo  $U_i$  pode intersectar em  $E_j$ , e também, sendo  $\sigma_i$  o número exato de intervalos que cada  $U_i$  intersecta, temos que  $2^{l-j} > \sigma_i$  para cada elemento da cobertura finita. E como cada intervalo básico em cada  $E_j$  pode ser intersectado por mais de um  $U_i$ , vamos obter, somando sobre todas as coberturas que

$$\sum 2^l 3^s |U_i|^s \geq \sum 2^{l-j} \geq \sum \sigma_i \geq 2^l.$$

O que vai nos dar por fim

$$\sum |U_i|^s \geq 3^{-s} = \frac{1}{2}.$$

Por fim, obtemos que para  $s = \log(2)/\log(3)$ , temos que

$$\frac{1}{2} \leq \mathcal{H}^s(K) \leq 1.$$

O que nos dá o desejado.  $\square$

### 3.1 DEFINIÇÕES ALTERNATIVAS DE DIMENSÃO.

Agora vamos falar brevemente de definições alternativas de dimensão e como calculá-las.

**Definição 3.8.** Seja  $F \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto não vazio e limitado e  $N_\delta(F)$  o menor número de conjuntos de diâmetro no máximo  $\delta$  que cobrem  $F$ . Definimos a *box dimension inferior e superior* do seguinte modo:

$$\underline{\dim}_b F = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

e

$$\overline{\dim}_b F = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}.$$

Se a igualdade ocorre, o valor comum é chamado de *box dimension*, ou em notação:

$$\dim_b F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}.$$

Note que quando  $\delta \rightarrow 0$ , então  $-\log \delta$  é positivo.

Vamos agora apresentar definições alternativas importantes de box dimension, e para isso, vamos primeiro a uma nova definição.

**Definição 3.9.** Uma  $\delta$ -malha de cubos em  $\mathbb{R}^n$  é um cubo da forma

$$[m_1\delta, (m_1 + 1)\delta] \times \dots \times [m_n\delta, (m_n + 1)\delta].$$

Donde  $m_1, m_2, \dots, m_n$  são inteiros.

**Proposição 3.7.** As seguintes definições para  $N_\delta(F)$  são equivalentes:

1. O número de  $\delta$ -malhas de cubos que intersectam  $F$
2. O menor número de cubos de lado  $\delta$  que cobrem  $F$
3. O menor número de bolas fechadas de raio  $\delta$  que cobrem  $F$ .
4. O menor número de conjuntos de diâmetro no máximo  $\delta$  que cobrem  $F$ .
5. O maior número de bolas disjuntas de raio  $\delta$  com centros em  $F$ .

*Demonstração.* Provaremos as mais importantes equivalências. As outras seguem facilmente das que ficarão provadas.

1. Seja  $M_\delta(F)$  o número de  $\delta$ -malhas que intersectam  $F$ . Obviamente elas nos dão uma coleção de  $M_\delta(F)$  conjuntos de diâmetro  $\delta\sqrt{n}$  que cobrem  $F$ . Daí  $N_{\delta\sqrt{n}}(F) < M_\delta(F)$ . Se  $\delta\sqrt{n} < 1$  então

$$\frac{\log N_{\delta\sqrt{n}}(F)}{-\log \delta\sqrt{n}} \leq \frac{\log M_\delta(F)}{-\log \sqrt{n} - \log \delta}.$$

Agora, se  $\delta \rightarrow 0$

$$\underline{\dim}_b F \leq \liminf \frac{\log M_\delta}{-\log \sqrt{n} - \log \delta} \leq \frac{\log M_\delta(F)}{-\log \delta}.$$

E analogamente

$$\overline{\dim}_b F \leq \limsup \frac{\log N_\delta F}{-\log \delta}.$$

Agora por outro lado notemos que qualquer conjunto  $A$  de diâmetro no máximo  $\delta$  está contido em  $3^n$  cubos de lado  $\delta$ . Com efeito, para notarmos isso, basta perceber que em dimensão 1, basta escolhermos o cubo contendo ao menos um ponto do conjunto  $A$  e os 2 cubos de lado  $\delta$  adjacentes a ele na reta. A união desses 3 cubos terá diâmetro  $3\delta$ , enquanto a união de  $A$  com o cubo escolhido terá diâmetro no máximo  $2\delta$  e ainda estarão contidos nos 3 cubos. A idéia pode ser generalizada para qualquer  $\mathbb{R}^n$  por indução. Segue-se, portanto, que:

$$M_\delta F \leq 3^n N_\delta F.$$

Tomando logaritmos, o lim sup e lim inf quando  $\delta \rightarrow 0$ , e juntando com a desigualdade anterior obtemos:

$$\liminf \frac{\log N_{\delta\sqrt{n}} F}{-\log \delta\sqrt{n} + \log \sqrt{n}} \leq \liminf \frac{\log M_\delta F}{-\log \delta} \leq \liminf \frac{\log 3^n + \log N_\delta F}{-\log \delta}.$$

Isto equivale a

$$\liminf \frac{\log N_\delta F}{-\log \delta} \leq \liminf \frac{\log M_\delta F}{-\log \delta} \leq \liminf \frac{N_\delta F}{-\log \delta}.$$

A ideia é análoga para a box dimension superior. O que encerra a demonstração.

2. Este segue como o anterior, basta notar que como todo cubo de lado  $\delta$  tem diâmetro  $\delta\sqrt{n}$ , logo todo conjunto de diâmetro  $\delta$  está contido num cubo de lado  $\delta$ . Portanto seja  $N_\delta F$  como definido anteriormente e  $M_\delta F$  como definido no item (2), teremos que

$$N_{\delta\sqrt{n}} F \leq M_\delta F.$$

Por outro lado suponha que  $K_1, K_2, \dots, K_{N_\delta F}$  são conjuntos de diâmetro no máximo  $\delta$  cobrindo  $F$ . Basta agora escolher cubos  $C_1, C_2, \dots, C_{N_\delta F}$  de lado  $\delta/\sqrt{n}$  tal que  $K_i \in C_i$ . O que nos dá

$$M_{\delta/\sqrt{n}} \leq N_\delta F.$$

Agora procedendo igual no item anterior, isto é, dividindo as desigualdas por  $-\log \delta$  e aplicando os limites, vamos obter tais equivalências.

3. Esta aqui procede igual a anterior, basta lembrar que o diâmetro do fecho é igual o diâmetro do conjunto, e todo conjunto de diâmetro no máximo  $\delta$  ta contido num conjunto de diâmetro no máximo  $2\delta$  e teremos desigualdades semelhantes as anteriores.
4. Análogo ao anterior.
5. Este é o caso mais interessante. Seja  $N_\delta F$  como nos itens anteriores e  $M'_\delta F$  o maior número de bolas disjuntas de raio  $\delta$  centradas em  $F$  de modo que sejam  $B_1, \dots, B_{M'_\delta F}$  tais bolas. Note que, dado qualquer  $x \in F$ , então  $x$  está a uma distancia no máximo  $\delta$  de alguma  $B_i$ , caso contrário, deveria haver ainda mais uma  $B_j$  que contém  $x$ . O que contrariaria a maximalidade de  $M'_\delta F$ , portanto, as bolas de raio  $2\delta$  concêntricas as  $B_i$  cobrem  $F$ , e finalmente teremos

$$N_{4\delta} F \leq M'_\delta F.$$

O que encerra nossa demonstração com contas análogas a primeira.

□

**Exemplo 3.2.** É verdade também que nem sempre as box dimensions inferior e superior coincidem. Vamos então a ideia de construir um conjunto  $E$  tal que  $\underline{\dim}_b E < \overline{\dim}_b E$  reproduzindo a ideia da construção do conjunto de Cantor, porém, com um padrão mais sofisticado.

Seja  $k_n = 10^n, \forall n \geq 1$ . E seja também  $E = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$  donde  $E_0 = [0, 1]$  e

$$E_k = \begin{cases} \text{É obtido removendo } 1/3 \text{ médio se } k_{2n} < k \leq k_{2n+1} \\ \text{É obtido removendo } 3/5 \text{ médio se } k_{2n+1} < k \leq k_{2n+2} \end{cases}$$

Agora vamos estimar  $N_\delta(E)$ , tomando por definição como sendo o menor número de intervalos fechados de tamanho  $\delta$  que podem cobrir  $E$ . analisaremos 2 casos pela paridade de  $n$ :

1. Suponha  $n$  par. Primeiramente note que o estágio  $E_{k_2}$  é composto de  $2^{100} = 2^{k_2}$  intervalos de tamanho  $(1/3)^{k_1} (1/5)^{k_2 - k_1}$ , isto é fácil de ver pela construção pois até  $E_{K_1}$  os intervalos vão diminuindo em escala  $1/3$  e depois de  $k_1$  a  $k_2$  ele diminui na escala  $1/5$ , pois o intervalo é dividido em 5 e é removido o  $3/5$  médio. Para  $n$  par então o intervalo  $E_{k_n}$  é feito de  $2^{k_n}$  intervalos de tamanho

$$\delta_n = (1/3)^{k_1} (1/5)^{k_2 - k_1} \cdot \dots \cdot (1/3)^{k_{n-1} - k_{n-2}} (1/5)^{k_n - k_{n-1}}$$

Como  $\delta_n < (1/5)^{k_n - k_{n-1}}$  vamos então tomar os intervalos como coberturas e teremos

$$\begin{aligned} \underline{\dim}_b E &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N_{\delta_n}(E)}{-\log \delta_n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 2^{k_n}}{-\log (1/5)^{k_n - k_{n-1}}} \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n \log 2}{(k_n - k_{n-1}) \log 5} \\ &= \frac{10 \log 2}{9 \log 5} \end{aligned}$$

2. Suponha  $n$  ímpar. Para  $n = 1$  temos que  $E_{k_1}$  é formado por  $2^{k_1}$  intervalos de tamanho  $(1/3)^{k_1}$ . Analogamente, para  $n = 3$  temos que  $E_{k_3}$  é formado por  $2^{k_3}$  intervalos de tamanho  $(1/3)^{k_1}(1/5)^{k_2-k_1}(1/3)^{k_3-k_2}$ . Indutivamente em  $E_{k_n}$  teremos  $2^{k_n}$  intervalos de tamanho

$$\delta_n = (1/3)^{k_1}(1/5)^{k_2-k_1}(1/3) \cdot \dots \cdot (1/5)^{k_{n-1}-k_{n-2}}(1/3)^{k_n-k_{n-1}}.$$

Note que  $\delta_n > (1/5)^{k_{n-1}}(1/3)^{k_n-k_{n-1}}$ . Portanto como qualquer intervalo de tamanho  $\delta_n$  intersecta no máximo dois intervalos em  $E_{k_n}$ , temos

$$\begin{aligned} \overline{\dim_b E} &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N_{\delta_n}(E)}{-\log \delta_n} \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 2^{k_n-1}}{-\log((1/5)^{k_{n-1}}(1/3)^{k_n-k_{n-1}})} \\ &= \limsup \frac{k_n \log 2 - \log 2}{k_{n-1} \log 5 + (k_n - k_{n-1}) \log 3} \\ &= \limsup \frac{10k_{n-1} \log 2 - \log 2}{k_{n-1} \log 5 + 9k_{n-1} \log 3} \\ &= \frac{10 \log(2)}{\log 5 + 9 \log 3}. \end{aligned}$$

Mas

$$\frac{10 \log 2}{9 \log 5} \leq \frac{10 \log 2}{11 \log 3} \leq \frac{10 \log 2}{\log 5 + 9 \log 3}.$$

Portanto

$$\underline{\dim_b E} < \overline{\dim_b E}.$$

Como desejado.

**Proposição 3.8.** *Seja  $F$  um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  então:*

$$\underline{\dim_b F} = n - \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log Vol^n(F_\delta)}{\log \delta}$$

e

$$\overline{\dim_b F} = n - \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log Vol^n(F_\delta)}{\log \delta}.$$

*Demonstração.* Note que se  $F$  pode ser coberta por  $N_\delta F$  bolas de raio  $\delta < 1$  então  $F_\delta$  pode ser coberto pelo mesmo número de bolas de raio  $2\delta$ , já que o ponto mais distante na fronteira de  $F_\delta$  dista no máximo  $\delta$  de  $F$ . Portanto temos que, sendo  $C_n$  o volume da esfera  $n$ -dimensional unitária, então:

$$Vol^n(F_\delta) \leq N_\delta(F) C_n (2\delta)^n.$$

Tomando logaritmos de ambos os lados e dividindo tudo por  $-\log \delta$ , obtemos:

$$\frac{\log Vol^n(F_\delta)}{-\log \delta} \leq \frac{\log(2^n C_n) + n \log \delta + \log N_\delta F}{-\log \delta}.$$

Tomando o liminf de ambos os lados

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log Vol^n(F_\delta)}{-\log \delta} \leq -n + \underline{\dim}_b F.$$

Analogamente obtemos o mesmo limite para o caso superior. Agora veja que, tomando a definição equivalente de  $N_\delta F$  ser o número de bolas disjuntas de raio  $\delta$  de centros em  $F$  da proposição anterior, podemos somar seus volumes de modo a obter que

$$N_\delta F C_n \delta^n \leq Vol^n(F_\delta)$$

Agora basta dividir por  $-\log \delta$  e tomar o limite a fazendo  $\delta \rightarrow 0$  e daí

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log Vol^n(F_\delta)}{-\log \delta} \geq -n + \underline{\dim}_b F.$$

Encerrando a demonstração. □

**Proposição 3.9.** *Seja  $F \subset \mathbb{R}^n$ . Então  $\mathcal{HD}(F) \leq \underline{\dim}_b F \leq \overline{\dim}_b F$*

*Demonstração.* Note que pela definição de dimensão de Hausdorff, se um conjunto  $F$  pode ser coberto por  $N_\delta F$  conjuntos de diâmetro  $\delta$ , se segue trivialmente que

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq N_\delta F \delta^s.$$

Agora, se  $\mathcal{H}^s(F) > 1$ , então, tomando logaritmos obtemos que  $\log N_\delta F + s \log \delta > 0$  e daí

$$s \leq \liminf_{\delta} \frac{\log N_\delta F}{-\log \delta}.$$

E portanto

$$\mathcal{HD}(F) \leq \underline{\dim}_b F \leq \overline{\dim}_b F, \forall F \in \mathbb{R}^n.$$

□

**Exemplo 3.3.** *seja  $F$  o conjunto de Cantor ternário. Então  $\underline{\dim}_b F = \overline{\dim}_b F = \frac{\log 2}{\log 3}$ .*

*Demonstração.* Note que cada  $k$ -level, isto é, cada etapa  $E_k$ , da construção do conjunto de Cantor, é formado por  $2^k$  conjunto de tamanho  $3^{-k}$  e portanto, se  $3^{-k} \leq \delta \leq 3^{1-k}$ , então  $N_\delta F \leq 2^k$ . Daí usando a definição e tomando o limite com  $\delta \rightarrow 0$ :

$$\overline{\dim}_b F = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta F}{-\log \delta} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2^k}{-\log 3^{1-k}} = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Por outro lado, qualquer intervalo de comprimento  $\delta$ , com  $3^{-(k+1)} \leq \delta \leq 3^{-k}$ , intersecta no máximo um dos intervalos de tamanho  $3^{-k}$  em cada  $k$ -level. Mas, temos  $2^k$  intervalos em cada etapa de um  $k$ -level, portanto, são necessários pelo menos  $2^k$  intervalos de tamanho  $\delta$  para cobrir  $F$ . O que vai nos dar que  $N_\delta F \geq 2^k$  e daí temos que  $\underline{\dim}_b F \geq \frac{\log 2}{\log 3}$ . Usando a proposição anterior nossa demonstração está encerrada. □

**Proposição 3.10.** *Valem as seguintes propriedades:*

1. *Seja  $F$  uma subvariedade suave  $m$ -dimensional do  $\mathbb{R}^n$  (pode-se encontrar a definição em (LIMA, 2000)). Então  $\dim_b(F) = m$ .*
2. *Se  $B \subset S$  então  $\dim_b(B) \leq \dim_b(S)$ .*
3.  *$\overline{\dim}_b(A \cup B) = \max\{\overline{\dim}_b(A), \overline{\dim}_b(B)\}$ .*
4.  *$\dim_b$  é invariante por transformações bi-Lipschitz.*
5.  *$\dim_b(A \times B) \leq \dim_b(A) + \dim_b(B)$*

*Demonstração.* 1. Semelhante ao caso para a dimensão de Hausdorff.

2. Note que para qualquer  $\delta > 0$  temos que  $N_\delta(B) \leq N_\delta(S)$ . De fato, como  $B \subset S$  então qualquer cobertura para um ponto em  $B$  também está em  $S$ . portanto, pela permanencia de sinal do limite vamos ter que

$$\dim_b(B) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{N_\delta B}{-\log \delta} \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{N_\delta S}{-\log \delta} = \dim_b(S).$$

3. Primeiramente note que como  $A, B \subset A \cup B$  então pela propriedade anterior vamos ter que  $\overline{\dim}_b(A) \leq \overline{\dim}_b(A \cup B)$  e analogamente  $\overline{\dim}_b(B) \leq \overline{\dim}_b(A \cup B)$ . E portanto temos que

$$\max\{\overline{\dim}_b(A), \overline{\dim}_b(B)\} \leq \overline{\dim}_b(A \cup B).$$

Por outro lado, perceba que  $N_\delta(A \cup B) \leq N_\delta(A) + N_\delta(B)$  onde a igualdade só ocorre se os conjuntos forem disjuntos. Também é verdade que  $N_\delta(A) + N_\delta(B) \leq 2 \max\{N_\delta(A), N_\delta(B)\}$ . Agora basta tomar os logaritmos de ambos os lados, dividir por  $-\log \delta$  e tomar os limites de ambos os lados quando  $\delta \rightarrow 0$ . Por fim teremos

$$\overline{\dim}_b(A \cup B) \leq \max\{\overline{\dim}_b(A), \overline{\dim}_b(B)\}$$

juntando ambas as desigualdades temos o desejado.

4. Para provar isto, note que se  $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$  e  $F$  pode ser coberto por  $N_\delta F$  conjuntos de diâmetro no máximo  $\delta$  então  $f(F)$  pode ser coberta por  $N_\delta F$  conjuntos de diâmetro no máximo  $c\delta$ . Portanto tomando os limites e o logaritmo de ambos os lados obtemos que  $\dim_b(f(F)) \leq \dim_b(F)$ . A outra desigualdade pode ser obtida de modo análoga a dimensão de Hausdorff.
5. Análogo ao item 3.

□

**Proposição 3.11.** *Seja  $\overline{F}$  o fecho do conjunto  $F \subset \mathbb{R}^n$ . Então vale*

$$\overline{\dim_b(\overline{F})} = \overline{\dim_b(F)}$$

e

$$\underline{\dim_b(\overline{F})} = \underline{\dim_b(F)}.$$

*Demonstração.* Veja que como  $\overline{F}$  é o menor subconjunto fechado contendo  $F$ , basta tomar  $B_1, B_2, \dots, B_k$  como sendo uma cobertura de  $F$  formada por bolas fechadas de raio  $\delta$ , i.e.,  $F \subset \bigcup_{i=1}^k B_i$ . Daí, como a união finita de fechados é fechada, segue que  $\bigcup_{i=1}^k B_i$  é fechada, e por definição teremos  $\overline{F} \subset \bigcup_{i=1}^k B_i$ . Agora, como isso vale para qualquer cobertura fechada, vale, em particular, para a menor delas, e o resultado segue trivialmente.  $\square$

**Exemplo 3.4.**  $\dim_b(\mathbb{Q} \cap (0, 1)) = 1$ . De fato, como  $\overline{\mathbb{Q} \cap (0, 1)} = [0, 1]$ , então,  $\dim_b(\mathbb{Q} \cap (0, 1)) = \dim_b(\overline{\mathbb{Q} \cap (0, 1)}) = \dim_b([0, 1]) = 1$ .

Agora, faremos uma proposição simples, porém, importante para o tópico seguinte.

**Proposição 3.12.** *Seja  $\mu$  uma distribuição de massa em  $F$  (exemplo 2.19), e suponha que para algum  $s$ , existem  $c, \varepsilon > 0$  tais que*

$$\mu(U) \leq c|U|^s$$

*para todo  $U$  tal que  $|U| < \varepsilon$ . Então  $\mathcal{H}^s(F) \geq \mu(F)/c$ .*

*Demonstração.* De fato, apenas note que se  $\{U_i\}$  é uma cobertura de  $F$ , então

$$0 < \mu(F) \leq \mu\left(\bigcup U_i\right) \leq \sum_i \mu(U_i) \leq c \sum_i |U_i|^s$$

Tomando os ínfimos temos  $\mathcal{H}_\delta^s(F) > \mu(F)/c$ , daí, quando  $\delta \rightarrow 0$  obtemos  $\mathcal{H}^s(F) \geq \mu(F)/c$ .  $\square$

**Exemplo 3.5.** Seja  $K_1 = K \times [0, 1]$  onde  $K$  é o conjunto de Cantor ternário, provaremos usando a proposição acima que  $\mathcal{H}^s(K_1) > 1/2$ . Colocando  $s = 1 + \log 2 / \log 3$  temos então que  $s = \mathcal{HD}(K_1) = \dim_b K_1$ . De fato, Para cada estágio  $E_k$  do conjunto de Cantor temos  $2^k$  intervalos de tamanho  $3^{-k}$ . Então, como  $K_1$  é o produto de  $K$  por um intervalo de comprimento 1, acima de cada intervalo básico em  $E_k$ , são suficientes uma coluna de  $3^k$  quadrados de lado  $3^{-k}$ , e por conseguinte diâmetro  $3^{-k}\sqrt{2}$ , para cobrir  $K_1$ , o que nos dará um total de  $2^k 3^k$  quadrados. Portanto:

$$\mathcal{H}_{3^{-k}\sqrt{2}}^s(K_1) \leq 2^k 3^k |3^{-k}\sqrt{2}|^{1+\log 2/\log 3} = 2^{s/2}.$$

Então  $\mathcal{H}(K_1) \leq 2^{s/2}$  e além disso  $\mathcal{HD}(K_1) \leq \underline{\dim_b K_1} \leq \overline{\dim_b K_1} \leq s$ . Agora nós definiremos uma distribuição de massa em  $K_1$  partindo da distribuição de massa natural em  $K$ , isto é onde cada intervalo básico em  $E_k$  tem massa  $2^{-k}$  (pois a soma total deve resultar em 1). Portanto, seja  $U$  um retângulo de altura  $h \leq 1$  paralelo ao eixo  $y$  do plano cartesiano e com

base acima de um dos intervalos básicos de  $E_k$ , definimos então naturalmente  $\mu(U) = 2^{-k}h$ . Note que cada conjunto  $U$  está contido num quadrado de lado  $|U|$  com lados paralelos ao eixo coordenado. Se  $3^{-(k+1)} \leq |U| < 3^{-k}$  então  $U$  está sobre no máximo um dos intervalos básicos de  $K$  de tamanho  $3^{-k}$ . Logo

$$\mu(U) \leq 2^{-k}|U| \leq |U| \leq |U|3^{-k \log 2 / \log 3} \leq |U|(3|U|)^{\log 2 / \log 3} = 3^{\log 2 / \log 3}|U|^s.$$

Portanto, pelo principio de distribuição de massa temos que  $\mathcal{H}^s(K_1) > 1/2$ .

## 4 APLICAÇÕES EM SISTEMAS ITERADOS DE FUNÇÕES

Agora nós iremos tratar mais especificamente de fractais de maneira mais rigorosa através de algumas definições importantes como a de IFS, além disso, forneceremos teoremas relevantes para calcular a dimensão de Hausdorff quando obedecem uma condição específica (open set condition) e também maneiras de estimá-los em outras condições como o caso do conjunto de Cantor não-linear.

**Definição 4.1.** Sejam  $S_i : D \rightarrow D$  contrações onde  $D \in \mathbb{R}^n$  é fechado. Um sistema iterado de funções (IFS) é uma família finita  $\{S_1, S_2, \dots, S_m\}$  com  $m \geq 2$ . Dizemos que um subconjunto compacto e não vazio  $F \subset D$  é um atrator para o IFS se

$$F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F).$$

**Exemplo 4.1.** Seja  $F$  o conjunto de Cantor ternário e sejam  $S_1, S_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por

$$S_1(x) = \frac{x}{3} \text{ e } S_2(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}.$$

Então  $F = S_1(F) \cup S_2(F)$ .

De fato, se  $x \in S_1(F)$  então para algum  $y \in F$  temos  $x = S_1(y)$ , então se  $y = \sum_{i \geq 1} \sigma_i / 3^i$  donde  $\sigma_i \in \{0, 2\}$ , teremos que  $x = y/3 = \sum_{i \geq 1} \sigma_i / 3^{i+1} \in F$ , analogamente se  $x \in S_2(F)$ , existe  $y \in F$  tal que  $x = S_2(y) = 2/3 + \sum_{i \geq 1} \sigma_i / 3^i$  com  $\sigma_i \in \{0, 2\}$ , Logo  $S_1(F) \cup S_2(F) \subset F$ . Por outro lado, dado  $x \in F$  teremos que  $x = \sum_{i \geq 1} \sigma_i / 3^i$ , se  $\sigma_1 = 0$  então  $x = \sum_{i \geq 2} \sigma_i / 3^i \leq 2/3$  logo  $x \in S_1(F)$ , analogamente, se  $\sigma_1 = 2$  então  $x \in S_2(F)$ .

**Teorema 4.1.** Considere o IFS dado pelas contrações  $\{S_1, S_2, \dots, S_m\}$  em  $D \subset \mathbb{R}^n$  tal que

$$|S_i(x) - S_i(y)| \leq c_i \cdot |x - y|, \forall x, y \in D$$

com  $c_i < 1$ . Então existe um único atrator  $F$  para esse IFS. Além disso, se definirmos a transformação  $S : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ , na classe de compactos não vazios  $\mathcal{S}$ , como

$$S(E) = \bigcup_{i=1}^m S_i(E)$$

para todo  $E \in \mathcal{S}$  e denotarmos  $S^k(E)$  como o  $k$ -ésimo iterado de  $S$  (Com  $S^0(E) = E$  e  $S^k = S(S^{k-1}(E))$ ,  $k \geq 1$ ), então

$$F = \bigcap_{k \geq 0} S^k(E)$$

para todo  $E \in \mathcal{S}$  tal que  $S_i(E) \subset E, \forall i$ .

*Demonstração.* Consideremos primeiramente  $\mathcal{S}$  munido da métrica de Hausdorff  $d_h$ . Tome então  $A, B \in \mathcal{S}$  e perceba que claramente que  $S(A), S(B) \in \mathcal{S}$ , agora temos que

$$d_h(S(A), S(B)) = d_h\left(\bigcup_{i=1}^m S_i(A), \bigcup_{i=1}^m S_i(B)\right) \leq \max_{1 \leq i \leq m} d_h(S_i(A), S_i(B))$$

De fato, note que, por definição,

$$d_h\left(\bigcup_{i=1}^m S_i(A), \bigcup_{i=1}^m S_i(B)\right) = \inf\left\{\delta \mid \left(\bigcup_{i=1}^m S_i(A)\right)_\delta \supset \bigcup_{i=1}^m S_i(B) \text{ e } \left(\bigcup_{i=1}^m S_i(B)\right)_\delta \supset \bigcup_{i=1}^m S_i(A)\right\}$$

e

$$\max_{1 \leq i \leq m} d_h(S_i(A), S_i(B)) = \max_{1 \leq i \leq m} \inf\left\{\delta \mid (S_i(A))_\delta \supset S_i(B) \text{ e } (S_i(B))_\delta \supset S_i(A)\right\}.$$

Porém se  $(S_i(A))_\delta$  contém  $S_i(B)$  para todo  $i$ , então  $(\bigcup_{i=1}^m S_i(A))_\delta$  contém  $\bigcup_{i=1}^m S_i(B)$ , analogamente temos que  $(\bigcup_{i=1}^m S_i(B))_\delta$  contém  $\bigcup_{i=1}^m S_i(A)$ , e isto vale para todo  $\delta$ , então basta tomar o ínfimo em ambos os conjuntos. Agora veja que

$$d_h(S(A), S(B)) \leq \max_i C_i \cdot d_h(A, B).$$

De fato, como  $|S_i(x) - S_i(y)| \leq C_i \cdot |x - y|$ , então  $|S_i(x) - S_i(y)| \leq \max_i C_i \cdot |x - y|$  para todo  $i$ . Agora se  $A_\delta \supset B$  e  $B_\delta \supset A$  então  $\{\delta \mid (\bigcup_{i=1}^m S_i(A))_\delta \supset \bigcup_{i=1}^m S_i(B) \text{ e } (\bigcup_{i=1}^m S_i(B))_\delta \supset \bigcup_{i=1}^m S_i(A)\} \subset \max_i \{C_i \delta \mid A_\delta \supset B \text{ e } B_\delta \supset A\}$  tomando os ínfimos obtemos o desejado. Note também que a métrica de Hausdorff é completa  $\mathcal{S}$  pois todo espaço métrico compacto é completo. Agora usando o teorema do ponto fixo de Banach, então a transformação  $S$  tem um único ponto fixo, isto é, existe um único  $F \in \mathcal{S}$  tal que  $S(F) = F$ , que é justamente nosso atrator. Além disso,  $S^k(E) \rightarrow F$ . Veja que como  $S_i(E) \subset E$  então tomando a união sobre todos os  $i$  temos que  $S(E) \subset E$ , logo  $S^k(E)$  é uma sequência decrescente de compactos não vazios contendo  $F$  cuja interseção é  $\bigcap_{k=0}^{\infty} S^k(E)$ . Portanto  $F = \bigcap_{k=0}^{\infty} S^k(E)$ .  $\square$

Agora note que se  $S(E) = \bigcup_{i=1}^m S_i(E)$ , então

$$\begin{aligned} S^2(E) &= S(S(E)) \\ &= \bigcup_{i=1}^m S_i\left(\bigcup_{j=1}^m S_j(E)\right) \\ &= \bigcup_{i_1, i_2=1}^m (S_{i_1} \circ S_{i_2})(E). \end{aligned}$$

Analogamente, podemos definir  $\mathcal{I}_k = \{(i_1, i_2, \dots, i_k) \mid 1 \leq i_j \leq m\}$ , de modo que  $S^2(E) = \bigcup_{\mathcal{I}_2} S_{i_1} \circ S_{i_2}(E)$  como no exemplo acima e de maneira geral teríamos

$$S^k(E) = \bigcup_{\mathcal{I}_k} S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(E).$$

Agora veja que se  $S_i(E) \subset E$  para todo  $i$ , então dado  $x \in F = \bigcap_{k \geq 0} S^k(E)$ , temos que para todo  $k$ , existe uma sequência  $(i_1, i_2, \dots)$  tal que  $x \in S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}$ . Isso nos dá uma decodificação natural para  $x$ , onde

$$x = x_{i_1, i_2, \dots} = \bigcap_{k \geq 1} S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}.$$

E assim obtemos que

$$F = \bigcup \{x_{i_1, i_2, \dots}\}$$

**Proposição 4.1.** *Seja  $\{S_1, \dots, S_m\}$  um IFS e  $F$  seu atrator, se  $F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F)$  uma união disjunta, então  $F$  não é conexo.*

*Demonstração.* De fato, note que dados dois pontos  $x_{i_1, i_2, \dots} \neq x_{i'_1, i'_2, \dots} \in F$ . Então, existe  $k$  tal que  $(i_1, i_2, \dots, i_k) \neq (i'_1, i'_2, \dots, i'_k)$  de modo que os conjuntos  $S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(F)$  e  $S_{i'_1} \circ \dots \circ S_{i'_k}(F)$  são conjuntos disjuntos fechados contendo os dois pontos e formando uma cisão não trivial em  $F$ .  $\square$

**Exemplo 4.2.** Considere  $E = [0, 1]$  e  $S_1(x) = x/3$  e  $S_2(x) = x/3 + 2/3$ . Veja que  $S(E) = S_1(E) \cup S_2(E)$ ,  $S^2(E) = S_1(S_2(E)) \cup S_2(S_1(E))$ , e assim vamos ter que  $S^k(E) = \bigcup_{i_j=1,2} S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(E) = E_k$  sendo o  $k$ -ésimo estágio da construção do conjunto de Cantor, composto de  $2^k$  intervalos básicos de tamanho  $3^{-k}$ . Além disso, o ponto  $x_{i_1, i_2, \dots}$  é um número da forma  $0.a_1a_2\dots a_j\dots$  donde  $a_j = 0$  se  $i_j = 1$  e  $a_j = 2$  se  $i_j = 2$ , que descreve perfeitamente bem os elementos do conjunto de Cantor.  $S^k(E)$  é usualmente chamado de pre fractal de  $E$ .

**Definição 4.2.** Dizemos que  $S_i$  satisfaz a "open set condition (O.S.C)" se existe um conjunto não vazio, aberto e limitado  $V$  tal que

$$V \supset \bigcup_{i=1}^m S_i(V)$$

onde tal união é disjunta.

**Lema 4.1.** *Seja  $\{V_i\}$  Uma coleção disjunta de abertos do  $\mathbb{R}^n$  tal que cada  $V_i$  contém uma bola de raio  $a_1r$  e está contida numa bola de raio  $a_2r$ . Então qualquer bola  $B$  de raio  $r$  intersecta no máximo  $(1 + 2a_2)^n a_1^{-n}$  dos fechos  $\overline{V}_i$ .*

*Demonstração.* Se  $\overline{V}_i$  intersecta a bola  $B$ , então como a  $|\overline{V}_i| = |V_i|$ , temos que  $\overline{V}_i$  está contida numa bola de raio  $(1 + 2a_2)r$  concêntrica com  $B$ , de fato, a soma do diâmetro de  $\overline{V}_i$  mais o raio de  $B$  é menor que  $2a_2r + r = (1 + 2a_2)r$ . Agora suponha que  $N$  dos conjuntos  $\overline{V}_i$  intersectam  $B$ , somando agora os volumes das bolas interiores de raio  $a_1r$  e comparando com a soma da bola de raio  $(1 + 2a_2)r$  que contém todo  $\overline{V}_i$  que intersecta  $B$ , teremos que

$$N(a_1r)^n \leq (1 + 2a_2)^n r^n.$$

Portanto

$$N \leq (1 + 2a_2)^n a_1^{-n}.$$

$\square$

Agora vamos ao mais importante teorema deste trabalho, o teorema de Moràn, que nos dá uma forma de calcular a diemensão de Hausdorff de fractais auto-similares dada algumas condições.

**Teorema 4.2** (Moràn). *Suponha que a open set condition é satisfeita para as similaridades  $S_i$  no  $\mathbb{R}^n$  com raios  $0 < c_i < 1$  para  $1 \leq i \leq m$ . Se  $F$  é o atrator do IFS  $\{S_1, \dots, S_m\}$ , então  $\mathcal{HD}(F) = \dim_b(F) = s$ , onde  $s$  é dado pela expressão*

$$\sum_{i=1}^m c_i^s = 1.$$

E alem disso, para tal valor  $s$ , a dimensão de Hausdorff satisfaz  $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$ .

*Demonstração.* Primeiramente vamos escolher  $s$  tal que  $\sum_{i=1}^m c_i^s = 1$ . Denotemos  $\mathcal{I}_k$  como foi definido anteriormente, o conjunto das sequencias  $(i_1, i_2, \dots, i_k)$  com  $1 \leq i_j \leq m$ . Dado qualquer conjunto  $A$  e uma sequência em  $\mathcal{I}_k$ , denotaremos por  $A_{i_1, i_2, \dots, i_k} = S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(A)$ . Como ja foi comentado, temos que

$$F = \bigcup_{\mathcal{I}_k} F_{i_1, \dots, i_k}.$$

Vamos verificar que essa cobertura de  $F$  nos dá uma estimativa adequada para a dimensão de Haurdorff. Como  $S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}$  é uma similaridade de raio  $c_1 \cdot c_2 \dots \cdot c_k$  temos que

$$\sum_{\mathcal{I}_k} |F_{i_1, \dots, i_k}|^s = \sum_{\mathcal{I}_k} (c_1 \cdot c_2 \dots c_k)^s \cdot |F|^s.$$

Veja que como estamos percorrendo todos os  $i_j \in \{1, 2, \dots, m\}$  vale que podemos reagrupar esse produto de modo que

$$\sum_{\mathcal{I}_k} (c_1 \cdot c_2 \dots c_k)^s \cdot |F|^s = \left( \sum_{i_1=1}^m c_{i_1}^s \right) \cdot \left( \sum_{i_2=1}^m c_{i_2}^s \right) \dots \left( \sum_{i_k=1}^m c_{i_k}^s \right) \cdot |F|^s = |F|^s.$$

Agora dado  $\delta > 0$ , vamos escolher  $k$  tal que

$$|F_{i_1, \dots, i_k}| \leq (\max_i c_i)^k |F| \leq \delta.$$

Então  $\mathcal{H}(\mathcal{F})_\delta^s \leq |F|^s$  e portanto  $\mathcal{H}(\mathcal{F})^s \leq |F|^s$ . Agora vamos analisar a cota inferior, que é a parte mais difícil da demonstração. Denotemos por  $\mathcal{I} = \{(i_1, i_2, \dots) \mid 1 \leq i_j \leq m\}$ , e  $I_{i_1, \dots, i_k} = \{(i_1, \dots, i_k, q_{k+1}, \dots) \mid 1 \leq q_j \leq m\}$  o cilindro consistindo das sequências em  $\mathcal{I}$  com termos iniciais  $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ . Agora vamos por uma distribuição de massa  $\mu$  em  $\mathcal{I}$  tal que  $\mu(I_{i_1, \dots, i_k}) = (c_{i_1} \dots c_{i_k})^s$ . como  $\sum_{i=1}^m c_i = 1$  é verdade que

$$(c_{i_1} \dots c_{i_k})^s = \sum_{i=1}^m (c_{i_1} \dots c_{i_k} c_i).$$

Basta agrupar a soma, e portanto vale por definição que

$$\mu(I_{i_1, \dots, i_k}) = \sum_{i=1}^m \mu(I_{i_1, \dots, i_k, i}).$$

Isto prova a  $\sigma$ -aditividade, e portanto  $\mu$  é de fato uma distribuição de massa nos subconjuntos de  $\mathcal{I}$ , com  $\mu(\mathcal{I}) = 1$ . Agora nós temos que transferir essa distribuição de massa em  $\mathcal{I}$ , para uma distribuição de massa  $\nu$  em  $F$ , definindo da seguinte maneira

$$\nu(A) = \mu(\{(i_1, i_2, \dots) \mid x_{i_1, i_2, \dots} \in A\}), \forall A \in F.$$

Primeiramente veja que  $\nu(F) = 1$  pois  $\nu(F) = \mu(\mathcal{I}) = 1$ . Vamos mostrar que  $\nu$  satisfaz o princípio de distribuição de massa, com efeito, seja  $V$  o conjunto aberto, limitado e não vazio de modo que o nosso IFS satisfaça a open set condition, como  $\bar{V} \supset S(\bar{V}) = \bigcup_{i=1}^m S_i(\bar{V})$ , então a sequência decrescente de iterados  $S^k(V) \rightarrow F$ . Note que como  $\bar{V} \supset F$  então  $\bar{V}_{i_1, \dots, i_k} \supset F_{i_1, \dots, i_k}$  para toda sequência finita  $(i_1, \dots, i_k)$ . Agora seja  $B$  uma bola de raio  $r < 1$ , vamos estimar  $\nu(B)$  comparando os diâmetros dos conjuntos  $V_{i_1, \dots, i_k}$  cujos fechos intersectam  $B$ . Procederemos cortando cada sequência infinita  $(i_1, \dots, i_k)$  em  $\mathcal{I}$  depois do primeiro termo  $i_k$  tal que

$$\left( \min_{1 \leq i \leq m} c_i \right) \cdot r \leq c_{i_1} \dots c_{i_k} \leq r.$$

Agora denote por  $\mathcal{Q}$  o conjunto de todas as sequências finitas que serão obtidas dessa maneira, então para toda sequência infinita  $(i_1, i_2, \dots) \in \mathcal{I}$ , existe um único  $k$  tal que  $(i_1, i_2, \dots, i_k) \in \mathcal{Q}$ . Agora dados  $V_1, V_2, \dots, V_m$  disjuntos abertos do  $\mathbb{R}^n$ , teremos que  $V_{i_1, i_2, \dots, i_k, 1}, V_{i_1, i_2, \dots, i_k, 2}, \dots, V_{i_1, i_2, \dots, i_k, m}$  serão disjuntos também para toda  $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ , e portanto a coleção  $\{V_{i_1, \dots, i_k} \mid (i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{Q}\}$  é disjunta. Note que  $F = \bigcap_{\mathcal{I}} \{x_{i_1, i_2, \dots}\}$  e para cada um desses elementos existe uma sequência infinita em  $\mathcal{I}$  associada a ela. Vale portanto, pela definição de  $\mathcal{Q}$  que:

$$F \subset \bigcup_{\mathcal{Q}} F_{i_1, \dots, i_k} \subset \bigcup_{\mathcal{Q}} \bar{V}_{i_1, \dots, i_k}.$$

Escolhamos então  $a_1$  e  $a_2$  de modo que  $V$  contém uma bola de raio  $a_1$  e está contida numa bola de raio  $a_2$ . Então por definição de similaridade, para todo  $(i_1, i_2, \dots, i_k) \in \mathcal{Q}$ , o conjunto  $V_{i_1, \dots, i_k}$  contém uma bola de raio  $c_{i_1} \dots c_{i_k} \cdot a_1$  e agora por definição de  $\mathcal{Q}$  temos que  $V_{i_1, \dots, i_k}$  contém uma bola de raio  $\min_i c_i a_1 r$  e está contida em uma bola de raio  $c_{i_1} \dots c_{i_k} \cdot a_2$  e por conseguinte numa bola de raio  $a_2 \cdot r$ . Agora vamos definir por  $\mathcal{Q}_1$  o subconjunto de  $\mathcal{Q}$  tal que  $B$  intersecta  $\bar{V}_{i_1, \dots, i_k}$ . Pelo lema anterior, existem no máximo  $N = (1 + 2a_2)^n a_1^{-n} (\min_i c_i)^{-n}$  sequências em  $\mathcal{Q}_1$ . Então segue que

$$\nu(B) = \nu(B \cap F) = \mu(\{(i_1, i_2, \dots) \mid x_{i_1, i_2, \dots} \in F \cap B\}) \leq \mu\left(\bigcup_{\mathcal{Q}_1} I_{i_1, \dots, i_k}\right).$$

De fato, se  $x_{i_1, i_2, \dots} \in F \cap B \subset \bigcup_{\mathcal{Q}} \bar{V}_{i_1, \dots, i_k}$ , então existe um  $k$  tal que  $(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{Q}_1$ . E portanto

$$\nu(B) \leq \sum_{\mathcal{Q}_1} \mu(I_{i_1, \dots, i_k}) = \sum_{\mathcal{Q}_1} (c_{i_1} \dots c_{i_k})^s \leq \sum_{\mathcal{Q}_1} r^s \leq r^s N.$$

É notório também que dado qualquer conjunto  $U$ , ele está contido numa bola de raio  $|U|$ , então  $\nu(U) \leq |U|^s N$ . Usando o princípio de distribuição de massa e sabendo que  $\nu(F) = 1$ , temos que  $\mathcal{H}^s(F) \geq N^{-1} > 0$  e portanto  $\mathcal{HD}(F) = s$ .

Por outro lado, considere  $\mathcal{Q}$  como sendo qualquer conjunto de sequências finitas tal que para toda sequência infinita  $(i_1, i_2, \dots) \in \mathcal{I}$ , existe um  $k$  tal que  $(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{Q}$ . Segue-se indutivamente que se  $\sum_{i_j=1}^m c_{i_j} = 1$  então vale que

$$\sum_{\mathcal{Q}} (c_{i_1} \dots c_{i_k})^s = \sum_{\mathcal{Q}} c_{i_1} \dots \sum_{\mathcal{Q}} c_{i_k} = 1.$$

Vamos ter então que se escolhermos  $\mathcal{Q}$  como definimos inicialmente, temos que

$$\sum_{\mathcal{Q}} (\min c_i \cdot r)^s \leq \sum_{\mathcal{Q}} (c_{i_1} \dots c_{i_k})^s = 1$$

implicando em

$$\sum_{\mathcal{Q}} 1 \leq (\min c_i)^{-s} r^{-s}.$$

Portanto  $\mathcal{Q}$  tem no máximo  $(\min c_i)^{-s} \cdot r^{-s}$  sequências. Para cada sequência  $(i_1, \dots, i_k)$  em  $\mathcal{Q}$  temos que  $|\overline{V}_{i_1, \dots, i_k}| = c_{i_1} \dots c_{i_k} |\overline{V}| \leq r |\overline{V}|$ , logo  $F$  pode ser coberto por  $(\min c_i)^{-s} r^{-s}$  bolas de raio no máximo  $r |\overline{V}|$  para cada  $r < 1$ . Usando uma das equivalências de box dimension e tomando  $N_\delta(F) = (\min c_i)^{-s} r^{-s}$ , vamos ter que

$$s = \mathcal{HD}(F) \leq \underline{\dim}_b(F) = \overline{\dim}_b(F) \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log((\min c_i)^{-s} r^{-s})}{-\log(\delta)} = s.$$

E isto encerra a demonstração do nosso teorema. □

**Exemplo 4.3.** Sabemos que, como já foi provado, o conjunto de Cantor  $F$  é o atrator do IFS dado por  $S_1(x) = x/3$  e  $S_2(x) = x/3 + 2/3$ . Note que tal IFS obedece a open set condition, basta notar trivialmente que  $S_1(F) \cup S_2(F) \subset (0, 1)$ . Agora vemos que  $|S_1(x) - S_1(y)| = 1/3|x - y|$  e analogamente  $|S_2(x) - S_2(y)| = 1/3|x - y|$ , portanto  $c_1 = c_2 = 1/3$ . Aplicando o teorema temos que a dimensão de Hausdorff e a dimensão box  $s$  é dada por

$$\begin{aligned} (1/3)^s + (1/3)^s &= 1 \\ (2/3)^s &= 1 \\ s &= \frac{\log(2)}{\log(3)} \end{aligned}$$

**Proposição 4.2.** *Seja  $F$  o atrator de um IFS consistindo das contrações  $\{S_1, \dots, S_m\}$  num subconjunto fechado  $D \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $|S_i(x) - S_i(y)| \leq c_i|x - y|$ ,  $\forall x, y \in D$ , com  $0 < c_i < 1$ ,  $\forall i$ . Então  $\mathcal{HD}(F) \leq s$ ,  $\dim_b(F) \leq s$  e vale*

$$\sum_i^m c_i^s = 1.$$

*Demonstração.* A prova é análoga ao teorema anterior, atentando-se ao fato que  $|A_{i_1, \dots, i_k}| \leq c_{i_1} \dots c_{i_m} |A|$  ao invés de uma igualdade. □

**Proposição 4.3.** *Considere o IFS consistindo das contrações  $\{S_1, \dots, S_m\}$  num subconjunto fechado  $D \in \mathbb{R}^n$  tal que*

$$b_i|x - y| \leq |S_i(x) - S_i(y)|, x, y \in D$$

com  $0 < b_i < 1$  para todo  $i$ . Assuma que o atrator  $F$  Satisfaz

$$F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F)$$

sendo essa união disjunta. Então  $F$  é desconexo e  $\mathcal{HD}(F) \geq s$  onde

$$\sum_{i=1}^m b_i^s = 1.$$

*Demonstração.* Seja  $d > 0$  a menor distância entre qualquer par de conjuntos compactos  $S_1(F), \dots, S_m(F)$ , isto é, vamos definir  $d = \min_{i \neq j} \inf\{|x - y| \mid x \in S_i(F) \text{ e } y \in S_j(F)\}$ . Considere  $F_{i_1, \dots, i_k} = S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(F)$  e defina  $\mu(F_{i_1, \dots, i_k}) = (b_{i_1} \dots b_{i_k})^s$ . Veja que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \mu(F_{i_1, \dots, i_k, i}) &= \sum_{i=1}^m (b_{i_1} \dots b_{i_k} b_i)^s \\ &= (b_{i_1} \dots b_{i_k})^s \\ &= \mu(F_{i_1, \dots, i_k}) \\ &= \mu\left(\bigcup_{i=1}^k F_{i_1, \dots, i_k, i}\right). \end{aligned}$$

Logo,  $\mu$  define uma distribuição de massa em  $F$  com  $\mu(F) = 1$ . Veja agora que se  $x \in F$  então existe uma única sequência infinita  $i_1, i_2, \dots$  tal que  $x \in F_{i_1, \dots, i_k}$  para todo  $k$  já que os  $S_i(F)$  são disjuntos. Para  $0 < r < d$  seja  $k$  o menor inteiro tal que

$$b_{i_1} \dots b_{i_k} d \leq r < b_{i_1} \dots b_{i_{k-1}} d.$$

Se  $i'_1, \dots, i'_k$  é distinto de  $i_1, \dots, i_k$  então os conjuntos  $F_{i'_1, \dots, i'_k}$  e  $F_{i_1, \dots, i_k}$  são separados por uma distância de pelo menos  $b_{i_1} \dots b_{i_{k-1}} d > r$ . De fato, veja que se  $j$  é o menor inteiro tal que  $i_j \neq i'_j$  e como  $F_{i_j, \dots, i_k} \subset F_{i_j}$  e  $F_{i'_j, \dots, i'_k} \subset F_{i'_j}$  são separados por  $d$ , então  $F_{i_1, \dots, i_k}$  e  $F_{i'_1, \dots, i'_k}$  estão separados por uma distância de ao menos  $b_{i_1} \dots b_{i_{j-1}} d$ , portanto  $F$  é desconexo. Agora, sendo  $B(x, r)$  uma bola de centro  $x$  e raio  $r$ , segue-se que se  $B(x, r)$  intersecta  $F$  e como  $r < b_{i_1} \dots b_{i_{k-1}} d$  então  $F \cap B(x, r) \subset F_{i_1, \dots, i_k}$  e daí

$$\mu(B(x, r) \cap F) \leq \mu(F_{i_1, \dots, i_k}) = (b_{i_1} \dots b_{i_k})^s \leq d^{-s} r^s.$$

Perceba que se  $U$  intersecta  $F$ , então  $U \subset B(x, r)$  para algum  $x \in F$  e  $r = |U|$ . Logo  $\mu(U) \leq d^{-s} |U|^s$ , e portanto pelo principio de distribuição de massa temos que  $\mathcal{H}^S(F) > 0$  e  $\mathcal{HD}(F) \geq s$ . Isto encerra a demonstração.  $\square$

**Exemplo 4.4.** Seja  $D = [\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}), 1 + \sqrt{3}]$  e sejam  $S_1, S_2 : D \rightarrow D$  tais que  $S_1(x) = 1 + 1/x$  e  $S_2(x) = 2 + 1/x$ . Seja também  $F$  o atrator do IFS formado por  $\{S_1, S_2\}$  ( $F$  é chamado de Conjunto de Cantor não-linear). Então

$$0,44 < \mathcal{HD}(F) \leq \underline{\dim_b F} \leq \overline{\dim_b F} < 0,66.$$

De fato, primeiramente note que  $S_1(D) = [\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}), \sqrt{3}]$  e analogamente  $S_2(D) = [\frac{1}{2}(3 + \sqrt{3}), 1 + \sqrt{3}]$ , e isso é fácil de ver pois basta ver que são funções contínuas e decrescentes nos intervalos. Daí basta observar os extremos; agora usaremos as Proposições 4.2 e 4.3 para estimar a dimensão de Hausdorff de  $F$ . Pelo teorema do Valor Médio, dados dois pontos distintos  $x, y \in D$ , existe um  $z_i \in D$ , para  $i = 1, 2$ , tal que

$$\frac{S_i(x) - S_i(y)}{x - y} = S'_i(z_i).$$

Então se tomarmos os menores e maiores valores de  $S'_i(x)$  para  $x \in D$ , teremos que para  $i = 1, 2$ :

$$\inf_{x \in D} |S'_i(x)| \leq \left| \frac{S_i(x) - S_i(y)}{x - y} \right| \leq \sup_{x \in D} |S'_i(x)|.$$

Note, porém, que  $S'_1(x) = S'_2(x) = -1/x^2$ , portanto:

$$\inf_{x \in D} |x^{-2}| \leq \left| \frac{S_i(x) - S_i(y)}{x - y} \right| \leq \sup_{x \in D} |x^{-2}|.$$

Logo

$$\frac{1}{2}(2 - \sqrt{3}) = (1 + \sqrt{3})^{-2} \leq \left| \frac{S_i(x) - S_i(y)}{x - y} \right| \leq \left(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})\right)^{-2} = 2(2 - \sqrt{3}).$$

E portanto pelas proposições anteriores teríamos que as cotas inferiores e superiores de  $\mathcal{HD}(F)$  são dadas respectivamente por  $2(\frac{1}{2}(2 - \sqrt{3}))^s = 1$  e  $2(2(2 - \sqrt{3}))^s = 1$ . O que nos dá 0,34 e 1,11 respectivamente. Note porém que do ponto de vista topológico essa estimativa superior para um conjunto da reta não é muito interessante, pois não podemos falar sobre a conexidade do atrator. Então um jeito de obtermos uma estimativa melhor é usando os iterados dos mapas descritos acima, isto é:

$$S_i \circ S_j(x) = i + \frac{1}{j + 1/x} = i + \frac{x}{jx + 1}, \text{ com } i, j = 1, 2.$$

Derivando obtemos que

$$(S_i \circ S_j)'(x) = (jx + 1)^{-2}.$$

Utilizando o teorema do Valor Médio como feito acima, temos

$$(j(1 + \sqrt{3}) + 1)^{-2}|x - y| \leq |S_i \circ S_j(x) - S_i \circ S_j(y)| \leq \left(\frac{1}{2}j(1 + \sqrt{3}) + 1\right)^{-2}|x - y|.$$

Usando novamente as proposições supracitadas obtemos que as estimativas inferiores e superiores são dadas respectivamente por:

$$2(2 + \sqrt{3})^{-2s} + 2(3 + 2\sqrt{3})^{-2s} = 1 \implies s = 0,44$$

e

$$2\left(\frac{1}{2}(3 + \sqrt{3})\right)^{-2s} + 2(2 + \sqrt{3})^{-2s} = 1 \implies s = 0,66.$$

Portanto  $0,44 \leq \mathcal{HD}(F) \leq 0,66$ .

## 5 CONCLUSÃO

Concluimos com este trabalho que os conceitos de medida e dimensão de Hausdorff são, além de extremamente interessantes, importantes conceitos para analisar a estrutura de fractais, que normalmente não podem ser bem analisados a partir, por exemplo, da medida de Lebesgue. Além disso, o teorema de Moràn oferece uma ótima alternativa para o cálculo da dimensão de Hausdorff desses fractais que normalmente são difíceis de calcular, oferecendo também dados interessantes sobre a topologia dos fractais.

## REFERÊNCIAS

FALCONER, K. **Fractal geometry: mathematical foundations and applications**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2004.

FALCONER, K. J.; FALCONER, K. **Techniques in fractal geometry**. [S.l.]: Wiley Chichester, 1997. v. 3.

LIMA, E. L. **Espaços métricos**.(3ª edição). **Rio de Janeiro: IMPA**, 1993.

LIMA, E. L. **Curso de Análise, vol. 2**. [S.l.: s.n.], 2000.

LIMA, E. L. **Curso de análise—volume 1**. 14ª edição. **Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada**, 2013.

RANA, I. K. **An introduction to measure and integration**. [S.l.]: American Mathematical Soc., 2002. v. 45.