UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CENTRO DE TECNOLOGIA
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL

ANÁLISE CONFIABILÍSTICA EM ESTRUTURAS PLANAS BASEADA NO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

EVYLLYN DOS SANTOS VIEIRA

Plano de Trabalho de Conclusão de Curso

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Toledo de Lima Junior
Coorientador: Eng. Gabriel de Carvalho Freitas

MACEIÓ
2024

EVYLLYN DOS SANTOS VIEIRA

ANÁLISE CONFIABILÍSTICA EM ESTRUTURAS PLANAS BASEADA NO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Monografia apresentada ao Colegiado do Curso de Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas como requisito parcial para obtenção do título de Bacharela em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Toledo de Lima Junior

Coorientador: Eng. Gabriel de Carvalho Freitas

MACEIÓ

2024

Catalogação na Fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário: Jone Sidney Alves de Oliveira – CRB-4 – 1485

V657a Vieira, Evyllyn dos Santos Vieira.
Análise confiabilística em estruturas planas baseada no Método dos elementos de contorno / Evyllyn dos Santos Vieira. – Maceió, 2024.
45 f. : il.

Orientadora: Eduardo Toledo de Lima Junior.
Coorientador: Gabriel de Carvalho Freitas.
Monografia (Trabalho de conclusão de curso em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Alagoas. Centro de Tecnologia. Maceió, 2024.

Bibliografia: f. 44 - 45.

1. Elasticidade Linear Plana. 2. Método dos Elementos de Contorno. 3. Simulação de Monte Carlo. 4. Hipercubo Latino. I. Título.

CDU: 69

Folha de Aprovação

AUTORA: EVYLLYN DOS SANTOS VIEIRA

ANÁLISE CONFIABILÍSTICA EM ESTRUTURAS PLANAS BASEADA NO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Colegiado do Curso de Engenharia Civil do Centro de Tecnologia da Universidade Federal de Alagoas (CTEC/UFAL) como requisito parcial para obtenção do título de Engenheiro Civil e aprovado em 21 de Novembro de 2024.

gov.br
Documento assinado digitalmente
EDUARDO TOLEDO DE LIMA JUNIOR
Data: 05/12/2024 13:41:14-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

_____

Orientador – Prof. Dr. Eduardo Toledo de Lima Junior

gov.br
Documento assinado digitalmente
GABRIEL DE CARVALHO FREITAS
Data: 05/12/2024 15:21:08-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

_____

Coorientador - Eng. Gabriel de Carvalho Freitas

Banca examinadora:

gov.br
Documento assinado digitalmente
JOAO CARLOS CORDEIRO BARBIRATO
Data: 05/12/2024 15:15:45-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

_____

Prof. Dr. João Carlos Cordeiro Barbirato

gov.br
Documento assinado digitalmente
LUCAS PEREIRA DE GOUVEIA
Data: 05/12/2024 21:17:22-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

_____

Prof. Dr. Lucas Pereira de Gouveia

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus que sempre esteve ao meu lado me guiando e amando, sem Ele eu nada sou. Agradeço a minha família, minha principal rede de apoio, que me ensinou a importância da educação, que sempre acreditou em mim, em especial a minha mãe que sacrificou muito de si para me proporcionar o melhor que ela pôde, que acreditou em mim e me educou para valorizar a educação. A minha vó, dona Cicera, que me criou e foi meu suporte e me mostrou que o amor se apresenta de várias formas, por um abraço e as vezes por acordar cedo e fazer seu café da manhã. Ao meu padrasto Nildo que me apresentou a Engenharia Civil na forma mais pura possível, aos 3 reais do RU e as conversas na sexta à noite sobre construção civil. Ao meu pai Edney que me apoiou, à minha irmã Ana Sophia que nos dias mais difíceis conseguia me acalmar com apenas um abraço e ao meu irmão Gabriel que se estivesse aqui sei que se orgulharia da minha conquista.

Agradeço a todos os meus amigos de graduação que, ao longo desses cinco anos, compartilharam comigo as dificuldades e também as melhores risadas durante o curso, especialmente Antonio Peroba, Júlio Cesar, Lucas, Natalia e Wydem. Aos meus amigos que o PET me presenteou que fizeram meus dias mais felizes, especialmente Márcio Farias que se tornou meu parceiro de PIBIC, PET, eletivas, artigos, REX, Balanços.... Você foi um verdadeiro presente e sou muito grata por ter vivido as melhores memórias desses últimos anos com você, por ter compartilhado tantos momentos bons e por você ter sido meu apoio em momentos difíceis. A minha amiga Rayanne Barros que sempre me ouviu e sem sombra de dúvidas me marcou por sua alegria e empatia. E à Alícia, que se tornou a primeira pessoa em quem penso quando algo bom ou ruim acontece — obrigada por sempre me ouvir.

As minhas amigas de infância (bests de berço), que sempre estiveram comigo e acreditaram em mim, amo vocês, Crislane, Ellen, Luana, Maria Eduarda e Thalita. As minhas amigas de Ensino Médio que estudaram no vestibular comigo e me ajudaram tanto em um ano tão cansativo, Andréa, Mylena e Bárbara.

Ao PET Engenharia Civil UFAL, grupo do qual fui parte por quase três anos da minha graduação, tenho muito orgulho de ter sido integrante, de ter me entregado a experiência do que é ser petiana, foi definitivamente uma das melhores decisões que eu já tomei. Foi nesse grupo que encontrei pessoas incríveis que amo tanto, que aprendi a ensinar, e que foi uma das minhas principais redes de apoio dentro da Universidade. Agradeço a minha geração PET SIX, de

forma especial a Chayanne, Márcio e Yelli. Agradeço especialmente a Samira que mesmo não sendo da minha geração se fez muito presente.

Ao PAESPE, programa que me marcou, cada aula que eu ministrei me fizeram enxergar o quão lindo é ensinar, mostrou que a educação é uma via de mão dupla de crescimento mútuo e contínuo. Cada aluno me marcou de uma forma que nem eu consigo dimensionar, sou eternamente grata por ter tido o privilégio de ministrar aulas de física aos sábados de manhã e por entender que o programa é muito mais do que ensinar é sobre transformação social.

Ainda sobre o PET, agradeço ao PET Ufal que me possibilitou conhecer pessoas fora da Engenharia, que me permitiu crescer e entender que a educação é muito mais do que conhecimento técnico. Ao G12 que foi a comissão que eu mais tive a oportunidade de aprender. As minhas tutoras, professora Karoline Melo que foi, por diversas vezes, a pessoa que mais me aconselhou e apontou o caminho que faria mais sentido para mim, obrigada por me acolher, me ouvir e não deixar eu desistir; e à professora Adriana Weber que sempre me faz lembrar o quão longe eu posso ir e por todo amor e dedicação que entregou ao grupo.

Ao meu orientador, professor Eduardo Toledo, por sua orientação, por todos os direcionamentos, conselhos e dicas. Ao meu coorientador e amigo, Gabriel Freitas que me ensinou tanto e topou o desafio de me orientar nessa jornada. Ao Christian Carneiro que sempre me orientou e ajudou em muitos momentos.

Agradeço aos meus professores por todo o empenho, inspiração e conhecimentos compartilhados. De forma especial ao professor João Barbirato, que, mais do que minha banca avaliadora, foi meu orientador de iniciação cientifica, que me aconselhou e que sempre esteve disposto a me ouvir, o mais sincero obrigada por todas as contribuições. Ao professor Lucas Gouveia que compõe a banca avaliadora, obrigada pelas contribuições neste trabalho.

Por fim, agradeço a Universidade Federal de Alagoas, lugar que me permitiu aprender, crescer e vivenciar as mais diversas experiências, sou eternamente grata por ter vivido essa graduação, levarei sempre comigo o nome da universidade.

"*O segredo, querida Alice, é rodear-se de pessoas que te façam sorrir o coração. E então, só então que estarás no país das maravilhas*"

Alice no País das Maravilhas

RESUMO

VIEIRA, E. S. **Análise confiabilística em estruturas planas baseada no método dos elementos de contorno**, (Graduação em Engenharia Civil). Curso de Engenharia Civil, UFAL, Maceió, 2024.

Na Engenharia de Estruturas, um dos principais objetivos é encontrar soluções robustas, que garantam segurança estrutural sem abrir mão da economicidade. Para alcançar essa meta, uma das estratégias envolve a consideração das incertezas inerentes aos projetos, levando em conta a variabilidade dos parâmetros de projeto, em vez de depender exclusivamente de valores característicos, como os fornecidos por abordagens semi-probabilísticas. Essa abordagem permite a estimativa da probabilidade de falha de elementos e sistemas estruturais, conferindo maior robustez às análises e à tomada de decisões, reduzindo os riscos associados tanto a projetos excessivamente conservadores e dispendiosos quanto a projetos econômicos, porém inseguros e com desempenho insatisfatório. Este trabalho apresenta a implementação computacional e o acoplamento do modelo mecânico fundamentado no Método dos Elementos de Contorno (MEC) com o modelo confiabilístico utilizando Simulação de Monte Carlo (SMC) e Hipercubo Latino. Todos os algoritmos foram implementados utilizando a linguagem Python. As variáveis aleatórias consideradas incluem parâmetros mecânicos – como módulo de elasticidade, dimensões dos elementos estruturais, além dos carregamentos aplicados. Foram analisados exemplos como o problema de Lamé, uma chapa tracionada com orifício central e uma viga biapoiada, avaliando variáveis como módulo de elasticidade, carregamentos e dimensões. Os resultados demonstraram a validade do modelo proposto, com o Hipercubo Latino reduzindo o custo computacional sem comprometer a precisão, evidenciando a eficácia da abordagem para estimar probabilidades de falha em estruturas.

Palavras-chave: Elasticidade Linear Plana, Método dos Elementos de Contorno, Simulação de Monte Carlo, Hipercubo Latino.

ABSTRACT

VIEIRA, E. S. Reliability Analysis in Planar Structures Based on the Boundary Element Method. (Undergraduate Thesis in Civil Engineering). Civil Engineering Course, UFAL, Maceió, 2024.

In Structural Engineering, one of the main objectives is to find robust solutions that ensure structural safety without compromising cost-effectiveness. To achieve this goal, one strategy involves accounting for the inherent uncertainties in design by considering the variability of design parameters rather than relying solely on characteristic values, such as those provided by semi-probabilistic approaches. This methodology enables the estimation of the failure probability of structural elements and systems, providing greater robustness in analysis and decision-making while reducing the risks associated with overly conservative and expensive designs or economical but unsafe and underperforming ones. This study presents the computational implementation and coupling of a mechanical model based on the Boundary Element Method (BEM) with a reliability model using Monte Carlo Simulation (MCS) and Latin Hypercube Sampling (LHS). All algorithms were implemented in Python. The random variables considered include mechanical parameters such as the modulus of elasticity, structural element dimensions, and applied loads. Examples analyzed include the Lamé problem, a tensioned plate with a central hole, and a simply supported beam, evaluating variables such as elasticity modulus, loads, and dimensions. The results demonstrated the validity of the proposed model, with LHS reducing computational cost without compromising accuracy, highlighting the effectiveness of the approach in estimating failure probabilities in structures.

Keywords: Plane Linear Elasticity, Boundary Element Method, Monte Carlo Simulation, Latin Hypercube.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação do Estado Plano de Tensões 16
Figura 2 – Representação do limite avaliado pela Equação (2.20) 20
Figura 3 – Domínios possíveis para a função de performance 23
Figura 4 – Exemplo ilustrativo da simulação de Monte Carlo 24
Figura 5 – Hipercubo Latino para duas variáveis e cinco realizações. 25
Figura 6 – Esquema das etapas do trabalho 26
Figura 7 – Esquema desenvolvido para realização do estudo proposto 27
Figura 8 – Exemplo de entrada de dados por arquivo 28
Figura 9 – Tubo Cilíndrico sob pressão interna 29
Figura 10 – Saída de dados do estudo comparativo com 64 nós 29
Figura 11 – Imagem gerada pelo programa para 8 nós de contorno 31
Figura 12 – Imagem gerada pelo programa para 64 nós de contorno 31
Figura 13 – Erro x Número de nós 33
Figura 14 - Distribuição de deslocamentos principais ao longo do Exemplo 1. 33
Figura 15 – Placa quadrada com furo circular sob tensão 34
Figura 16 - Saída de dados do estudo comparativo 35
Figura 17 - Imagem da placa gerada pelo programa para 64 nós de contorno. 35
Figura 18 - Distribuição de deslocamentos principais ao longo do Exemplo 2 35
Figura 19 - Erro vs. Número de nós 37
Figura 20 – Gráfico Resistência vs Solicitação 39
Figura 21 – Gráfico Hipercubo Latino para o segundo exemplo de verificação. 40
Figura 22 - Viga biapoiada 40
Figura 23 - Imagem da viga gerada pelo programa para 10 nós de contorno 41
Figura 24 - Gráfico hipercubo latino do primeiro cenário do exemplo de aplicação 42
Figura 25 - Gráfico hipercubo latino do segundo cenário do exemplo de aplicação 43

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Valores das tensões principais obtidos analiticamente e com uso do modelo 30
Tabela 2 – Evolução do erro em função do refinamento da malha 30
Tabela 3 – Estudo da influência do número de nós de contorno no erro 32
Tabela 4 – Comparativo entre resultados analíticos e numéricos para as tensões principais 36
Tabela 5 – Convergência da solução numérica para as tensões principais 36
Tabela 6 – Descrição estatística das v.a consideradas no exemplo 2 37
Tabela 7 – Resultados da análise de confiabilidade 38
Tabela 8 – Descrição estatística das v.a consideradas para a viga biapoiada 41
Tabela 7 – Resultados da análise de confiabilidade 42

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
FORM	First Order Reliability Method
MDF	Método das Diferenças Finitas
MEC	Método de Elementos de Contorno
MEF	Método dos Elementos Finitos
SMC	Simulação de Monte Carlo
UFAL	Universidade Federal de Alagoas
v.a.	Variável Aleatória

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 13

1.1 Objetivo geral 14

1.2 Justificativa 14

1.3 Delimitação do trabalho 15

2 REFERENCIAL TEÓRICO 16

2.1 Elasticidade Linear 16

2.1.1 Tensões 16

2.1.2 Deformações 17

2.2 Método dos Elementos de Contorno 18

2.2.1 Formulação Integral de Contorno 18

2.2.2 Implementação numérica 21

2.3 Conceitos em confiabilidade estrutural 22

2.3.1 Conceitos básicos de Confiabilidade 22

2.3.2 Simulação de Monte Carlo 23

2.3.3 Hipercubo Latino 24

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS 26

4 APLICAÇÕES 27

4.1 Primeiro exemplo de verificação – Tubo Cilíndrico 28

4.2 Segundo exemplo de verificação – Chapa Quadrada 34

4.3 Exemplo de aplicação – Viga biapoiada 40

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 44

REFERÊNCIAS 46

1 INTRODUÇÃO

As simulações numéricas de problemas de engenharia são amplamente empregadas em análise e projeto de estruturas, sendo impulsionadas pelo avanço contínuo da tecnologia de *hardware* e *software,* que possibilita simulações cada vez mais sofisticadas. Dentre os principais métodos para representar numericamente problemas físicos, destacam-se o Método dos Elementos Finitos (MEF), o Método das Diferenças Finitas (MDF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC), este último surgindo como uma abordagem mais recente dentre as mencionadas.

O surgimento da base do Método dos Elementos de Contorno remonta ao início do século XIX, quando os estudos acerca de equações integrais foram iniciados, fornecendo a base para o desenvolvimento do MEC. Entretanto, foi somente em 1903 que a primeira teoria clássica das equações integrais foi desenvolvida por Fredholm (1903), introduzindo núcleos definidos e integráveis. Posteriormente, na década de 1960, Kupradze (1965) apresentou a primeira formulação indireta do MEC, embora ainda não fosse chamado assim, aplicando-o a problemas potenciais e elásticos.

Contudo, foi somente em 1967 que houve o início da consolidação dos métodos integrais na comunidade científica, com o artigo de Rizzo (1967), que abordou a formulação direta do Método das Equações Integrais de Contorno para problemas elásticos bidimensionais. A ampla aplicação do método em problemas de engenharia começou em 1975, com o trabalho de Lachat (1975), quando as técnicas de resolução das equações integrais foram reconhecidas como métodos numéricos.

O termo "Método dos Elementos de Contorno" passou a ser adotado com a publicação do primeiro livro sobre o assunto pelo professor Brebbia (1978). Nesse livro, o autor formulou o método a partir do Método dos Resíduos Ponderados, utilizando como função ponderadora a chamada solução fundamental do problema.

Segundo Ubessi (2014), as características que tornam o MEC atraente para aplicação em problemas de engenharia vêm da sua fundamentação matemática: As equações integrais que resultam do método são de contorno, reduzindo uma dimensão na discretização do problema; o método possui um caráter misto, que considera os deslocamentos e as forças de superfície no contorno em sua formulação.

Por sua vez, de acordo com Barbosa (2004), a teoria da confiabilidade é uma ferramenta que proporciona ao engenheiro, a partir do conhecimento das incertezas inerentes às variáveis de projeto, por meio de suas distribuições de probabilidade, a determinação da probabilidade de estrutura falhar e parâmetros que fornecem a importância de cada variável nesta probabilidade. Estas informações são seguramente de fundamental importância na tomada de decisões que envolvam a segurança da estrutura.

Além disso, Beck (2010) afirma que a simulação por computador possibilita a execução de experimentos virtuais, viabilizando a resolução de problemas complexos. No âmbito da Engenharia Estrutural, essa técnica é uma ferramenta fundamental para reproduzir experimentos que seriam inviáveis na prática. Entre as várias abordagens de simulação computacional, destaca-se a Simulação de Monte Carlo (SMC), que tem ganhado destaque à medida que a capacidade dos computadores aumenta, devido à sua robustez e facilidade de uso.

O método de amostragem por Hipercubo Latino (LHS, do inglês Latin Hypercube Sampling) é amplamente utilizado em análises de confiabilidade estrutural e engenharia devido à sua eficiência em gerar amostras representativas de variáveis aleatórias em espaços de alta dimensionalidade. Segundo McKay et al. (1979), o LHS “fornece uma abordagem eficaz para explorar o espaço de entrada, assegurando que todas as porções do domínio das variáveis sejam amostradas adequadamente”. Essa técnica reduz a variância das estimativas em comparação aos métodos tradicionais, como a amostragem aleatória pura, sendo, portanto, uma escolha preferida em simulações computacionais de Monte Carlo.

1.1 Objetivo geral

Desenvolver e implementar uma ferramenta computacional que acople o Método dos Elementos de Contorno (MEC) com técnicas probabilísticas, como a Simulação de Monte Carlo e a Amostragem por Hipercubo Latino, para analisar a confiabilidade estrutural, avaliando a influência de incertezas em parâmetros mecânicos, geométricos e de carregamento, e estimando a probabilidade de falha em diferentes cenários estruturais.

1.2 Justificativa

A modelagem computacional oferece uma abordagem poderosa para investigar fenômenos complexos em engenharia, permitindo a análise detalhada de sistemas sob diferentes condições de operação. A adoção do regime elástico linear é fundamentada no seu amplo uso na prática de projeto estrutural, considerando que, mesmo sob altos níveis de carga, a resposta da estrutura

se dê dentro da faixa elástica de serviço dos materiais. Além disso, a escolha de trabalhar com o Método dos Elementos de Contorno se dá por sua eficiência na análise de problemas de contorno, especialmente em geometrias complexas, eliminando a necessidade de discretização de domínio, em problemas lineares.

No âmbito da Engenharia Civil, observa-se que um dos principais objetivos é proporcionar soluções eficientes com o menor custo associado. Apesar dos avanços, ainda existem desafios a serem superados no campo da análise estrutural. Os modelos existentes muitas vezes não consideram adequadamente a variabilidade dos parâmetros envolvidos, levando a uma falta de robustez nos resultados obtidos. Nesse sentido, a aplicação de métodos confiabilísticos representa uma abordagem promissora para lidar com essas incertezas. Uma melhor compreensão dos modelos de elementos de contorno e da confiabilidade estrutural pode contribuir significativamente para a concepção de estruturas mais seguras, econômicas e sustentáveis, impactando diretamente na qualidade de vida das pessoas e na segurança das edificações.

O acoplamento entre o modelo de elementos de contorno e a simulação de Monte Carlo, proposto neste trabalho, ainda é pouco explorado na literatura, representando uma inovação significativa. Esse acoplamento permite uma análise mais robusta, considerando as incertezas dos parâmetros de entrada, e contribui para a compreensão e predição de estados limite em estruturas.

1.3 Delimitação do trabalho

A modelagem das estruturas está restrita ao regime de pequenos deslocamentos e deformações. O modelo do Método dos Elementos de Contorno (MEC) utilizado é o elástico bidimensional, com formulação direta, incluindo pontos internos para o cálculo de tensões e deslocamentos dentro do domínio. Quanto à análise de confiabilidade, esta se restringe a abordagens baseadas em técnicas de simulação, especificamente na Simulação de Monte Carlo (SMC) e no método de amostragem por Hipercubo Latino.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Nesta parte do estudo, serão apresentados os três temas abordados ao longo da pesquisa, sendo dois deles relacionados à modelagem mecânica do problema (Conceitos em Elasticidade Linear e MEC), enquanto o terceiro trata da modelagem confiabilística.

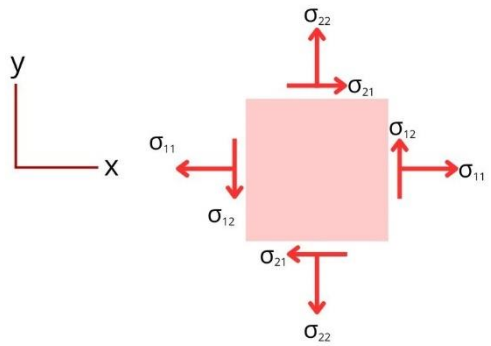
2.1 Elasticidade Linear

Um dos objetivos da investigação da elasticidade na engenharia é examinar a resposta de um corpo material sob ação de forças. A equação de equilíbrio, que é central na teoria da elasticidade, surge da análise das forças atuantes em um ponto dentro de um corpo contínuo.

2.1.1 Tensões

A concepção do estado de tensão de um ponto material envolve compreender completamente as forças internas atuantes no ponto em questão. Isso significa caracterizar as componentes normais e tangenciais do vetor de tensão para todos os planos de corte, levando em conta as interações infinitas com a vizinhança do ponto material. Para alcançar isso, é útil analisar a matriz conhecida como tensor de tensão, que facilita a manipulação das tensões em direções de interesse e representa o estado global de solicitações. Entretanto, na prática da engenharia, é comum simplificar a geometria e as cargas atuantes, como no caso de lajes e placas, permitindo que a tensão produzida em um elemento estrutural seja analisada em um único plano (Hibbeler, 2010). Desse modo, pode-se dizer que o ponto material está sujeito a um estado plano de tensões, cuja representação gráfica é ilustrada na Figura 1.

Figura 1 – Representação do Estado Plano de Tensões



Fonte: Autora, 2024.

Observa-se que as tensões mostradas na Figura 1 são equilibradas por valores de igual magnitude e direção contrária, na face oposta desse cubo. Logo, o estado plano de tensões pode ser representado pelo seguinte tensor na Equação (2.1)

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

que deve apresentar simetria para qualquer estado de tensões admissível, ou seja, $\sigma_{21} = \sigma_{12}$.

Deve haver o equilíbrio das forças nas direções x, y e a seguinte relação deve ser válida em todo o domínio Ω, como definido nas Equações (2.2) e (2.3)

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \mathrm{y}} + b_1 = 0, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \mathrm{y}} + b_2 = 0, \tag{2.3}$$

nas quais b_i são as forças de corpo atuantes no domínio, usualmente de origem gravitacional. A Equação (2.4) é a equação geral de equilíbrio da elasticidade, em notação indicial

$$\sigma_{kj,j} + b_i = 0, \text{ em } \Omega. \tag{2.4}$$

2.1.2 Deformações

Entende-se que o estado de deformação de um ponto material diz respeito ao pleno conhecimento da mobilização interna de um ponto em análise, semelhante ao estado plano de tensão. Nesse ínterim, pode-se definir o tensor de deformações por meio de taxas de variação dos deslocamentos, conforme a Equação (2.5),

$$\varepsilon_{kj}(q) = \frac{1}{2}(u_{k,j}(q) + u_{j,k}(q) + u_{i,j}u_{i,k}), \tag{2.5}$$

na qual o termo de ordem superior é desprezível em relação às outras derivadas, logo tem-se na Equação (2.6)

$$\varepsilon_{kj}(q) = \frac{1}{2}[u_{k,j}(q) + u_{,j,k}(q)]. \tag{2.6}$$

2.1.3 Relação Constitutiva

Pode-se definir as deformações em termos da taxa de variação dos deslocamentos, conforme a Equação (2.7),

$$\varepsilon_{kj} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right). \tag{2.7}$$

A relação constitutiva para um material isotrópico linear é dada pela Equação (2.8),

$$\sigma_{k,j} = \lambda\delta_{kj}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{kj}. \tag{2.8}$$

As constantes de Lamé, λ e μ, são relacionadas com o módulo de elasticidade longitudinal E e o coeficiente de Poisson, v, por meio da Equações (2.9) e (2.10),

$$\mu = \frac{E}{2(1+v)}, \tag{2.9}$$

$$\lambda = \frac{Ev}{(1+v)(1-2v)}. \tag{2.10}$$

2.2 Método dos Elementos de Contorno

O método dos elementos de contorno (MEC) é uma técnica numérica utilizada para resolver equações diferenciais, especialmente em problemas de engenharia. Ao contrário do método dos elementos finitos (MEF), que discretiza todo o domínio de um problema, o MEC discretiza apenas o contorno da região em estudo.

2.2.1 Formulação Integral de Contorno

Rizzo (1967) apresentou a formulação do MEC direto para a elasticidade. Brebbia (1978) ilustrou o procedimento de obtenção desta formulação, mediante a aplicação do método de resíduos ponderados. Multiplicando a Equação (2.4) por funções peso do tipo u_k^*, obtém-se a Equação (2.11),

$$\int_{\Omega} (\sigma_{kj,j} + b_k)u_k^* d\Omega. \tag{2.11}$$

Para os interesses do MEC, a função ponderadora pode ser escolhida como sendo a solução fundamental do problema em estudo. Esta é definida em um domínio infinito submetido a uma carga concentrada unitária atuante em um ponto (ponto fonte), e descreve a resposta medida em um outro ponto, chamado ponto campo. Para maiores detalhes, vide Brebbia (1978). Integrando por partes o primeiro termo, e agrupando a integral de contorno para o lado direito da igualdade, obtém-se a Equação (2.12),

$$-\int_{\Omega} \sigma_{kj}u_{k,j}^* d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = -\int_{\Gamma} p_k u_k^* d\Gamma. \tag{2.12}$$

A primeira integral do lado esquerdo pode ser integrada por partes novamente, resultando na Equação (2.13),

$$\int_{\Omega} u_k \sigma^*_{kj,j} d\Omega + \int_{\Omega} b_k u^*_k d\Omega = -\int_{\Gamma} p_k u^*_k d\Gamma + \int_{\Gamma} u_k p^*_k d\Gamma, \tag{2.13}$$

a qual corresponde ao teorema da reciprocidade de Betti. A Equação (2.13) deve satisfazer às seguintes condições de contorno na Equação (2.14),

$$\begin{aligned} u_k &= \underline{u_k} \qquad \text{em } \Gamma_1, \\ p_k &= \underline{p_k} \qquad \text{em } \Gamma_2, \end{aligned} \tag{2.14}$$

nas quais contorno Γ é dividido em Γ_1 e Γ_2. Ao aplicar as respectivas condições de contorno nessas duas partes tem-se a Equação (2.15),

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_k \sigma^*_{kj,j} d\Omega + \int_{\Omega} b_k u^*_k d\Omega = -\int_{\Gamma_1} p_k u^*_k d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \underline{p_k} u^*_k d\Gamma + \\ \int_{\Gamma_1} \underline{u_k} p^*_k d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u_k p^*_k d\Gamma, \end{aligned} \tag{2.15}$$

na qual as barras representam os valores conhecidos de deslocamentos e forças de superfície no contorno.

Integrar por partes duas vezes o primeiro termo à esquerda da Equação (2.15) resulta na Equação (2.16),

$$\int_{\Omega} (\sigma_{kj,j} + b_k) u^*_k d\Omega = \int_{\Gamma_2} (p_k - \underline{p_k}) u^*_k d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\underline{u_k} - u_k) p^*_k d\Gamma. \tag{2.16}$$

A Equação (2.15) é um teorema generalizado que pode ser utilizado para obter as equações no contorno. Aplicando como funções peso as soluções fundamentais obtidas para uma carga pontual $b_l = \Delta^i$ ao longo da direção do vetor unitário e_l, a primeira integral de domínio da Equação (2.15), esta simplifica-se na Equação (2.17),

$$\int_{\Omega} u_k \sigma^*_{kj,j} d\Omega = \int_{\Omega} u_l \sigma^*_{lj,j} d\Omega = -\int_{\Omega} \Delta^i u_l e_l d\Omega = -u^i_l e_l. \tag{2.17}$$

A Equação (2.15) pode ser escrita para representar as três componentes de deslocamento em i. Tomando-se as três direções independentemente obtém-se a Equação (2.18)

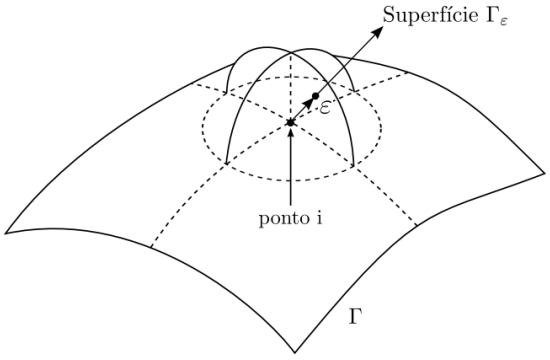
$$\begin{aligned} u^i_l + \int_{\Gamma_1} \underline{u_k} p^*_{lk} d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u_k p^*_{lk} d\Gamma = \int_{\Gamma_1} p_k u^*_{lk} d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \underline{p_k} u^*_{lk} d\Gamma + \\ \int_{\Omega} b_k u^*_{lk} d\Omega, \end{aligned} \tag{2.18}$$

a qual pode ser escrita mais sucintamente e sem separar as incógnitas e as condições de contorno na Equação (2.19),

$$u_l^i + \int_\Gamma u_k p_{lk}^* d\Gamma = \int_\Gamma p_k u_{lk}^* d\Gamma + \int_\Omega b_k u_{lk}^* d\Omega. \tag{2.19}$$

A Equação (2.19), conhecida como *identidade de Somigliana*, é válida para qualquer força aplicada a um ponto "i" do domínio Ω. Por meio desta identidade é possível calcular analiticamente o deslocamento em quaisquer pontos internos em termos dos valores no contorno, das forças de domínio e das soluções fundamentais. Quando (2.19) é avaliada no contorno, surgem singularidades que precisam ser isoladas, para um hemisfério de raio ε, de superfície Γ_e, em torno da singularidade (Figura 2), tornando-se então um limite em todas as integrais de (2.17), conforme o seguinte exemplo,

Figura 2 – Representação do limite avaliado pela Equação (2.20)



Fonte: Ubessi, 2014.

$$\int_\Gamma p_{lk}^* u_k d\Gamma = \lim_{e\to 0}\left\{\int_{\Gamma-\Gamma_e} p_{lk}^* u_k d\Gamma\right\} + \lim_{e\to 0}\left\{\int_{\Gamma_e} p_{lk}^* u_k d\Gamma\right\}. \tag{2.20}$$

Pode-se provar que, em pontos onde o contorno é suave, a Equação (2.20) simplifica-se na Equação (2.21)

$$\lim_{e\to 0}\{\int_{\Gamma_e} p_{lk}^* u_k d\Gamma\} = \frac{1}{2}\delta_{lk}, \tag{2.21}$$

e todas as outras integrais tendem a zero. O lado esquerdo da Equação (2.20) resulta em

$$\int_\Gamma p_{lk}^* u_k d\Gamma - \frac{1}{2}\delta_{lk} u_k^i = \int_\Gamma p_{lk}^* u_k d\Gamma - \frac{1}{2} u_l^i. \tag{2.22}$$

Chamando o termo livre c_{lk} a Equação (2.22) pode ser escrita como a Equação (2.23),

$$c_{lk}^i u_k^i + \int_\Gamma p_{lk}^* u_k d\Gamma = \int_\Gamma u_{lk}^* p_k d\Gamma + \int_\Omega b_k u_{lk}^* d\Omega. \tag{2.23}$$

Em pontos onde o contorno não é suave (arestas e vértices) o termo livre c_{lk} torna-se dependente de formulações que não são objeto de estudo neste trabalho.

2.2.2 Implementação numérica

A abordagem numérica do MEC se baseia na formulação integral dos problemas, onde as incógnitas são definidas ao longo das fronteiras do domínio e as variáveis internas são derivadas dessas condições de contorno. A implementação do MEC envolve a discretização apropriada do contorno, a escolha adequada de funções de interpolação e a resolução precisa das integrais singulares que surgem durante o processo.

Descobrir os deslocamentos e as forças de superfície em cada ponto, em duas direções, envolve a criação das matrizes globais G e H, que incluem os componentes essenciais das integrais p_{ij} e u_{ij} (associadas às forças de superfície e aos deslocamentos, respectivamente). Essas matrizes, juntamente com o conjunto de valores especificados, constituem um sistema de equações lineares com incógnitas e valores dados. Ao resolver esse sistema, obtém-se os valores desconhecidos nas fronteiras do problema, permitindo-nos determinar os deslocamentos e as tensões em pontos internos do corpo, conforme descrito nas Equações (2.24) e (2.25),

$$[H]\{u\} = [G]\{p\}, \tag{2.24}$$

$$[A]\{X\} = \{B\}. \tag{2.25}$$

De acordo com Vieira *et. al.* (2023), no Método dos Elementos de Contorno os deslocamentos e tensões em pontos internos são obtidos a partir das informações dos contornos da aplicação, com valores de deslocamentos e forças de superfície. As Equações (2.26) e (2.27) são empregadas no MEC para calcular, respectivamente, os deslocamentos e as tensões internas,

$$u_i(s) = -\int_{\Gamma} p_{ij}^*(\mathrm{s},\mathrm{Q}) u_j(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\mathrm{s},\mathrm{Q}) p_j(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Omega} u_{ij}^*(s,q) b_j(q) d\Omega(q), \tag{2.26}$$

$$\sigma_{ij}(s) = -\int_{\Gamma} S_{ij}^{*}(\mathrm{s},\mathrm{Q})u_k(Q)d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma} D_{ij}^{*}(\mathrm{s},\mathrm{Q})p_k(Q)d\Gamma(Q) + \int_{\Omega} D_{ij}^{*}(s,q)b_k(q)d\Omega(q). \tag{2.27}$$

A Equação (2.27) fornece os valores das tensões no ponto interno s a partir dos valores de deslocamentos e forças de superfície do ponto Q do contorno, acrescidos da parcela relativa a forças de volume, ponto q do domínio, quando considerada. Os tensores S_{ijk}^{*} e D_{ijk}^{*} que nela aparecem são determinados por meio da derivação dos tensores de deslocamentos e forças de superfície do problema fundamental, respectivamente.

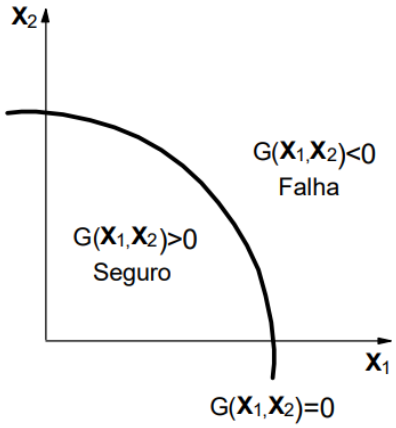
2.3 Conceitos em confiabilidade estrutural

A confiabilidade estrutural é uma área da engenharia que se concentra na avaliação da probabilidade de uma estrutura desempenhar sua função de maneira segura e eficiente ao longo de sua vida útil, mesmo diante de incertezas. Essas incertezas podem surgir devido à variabilidade dos materiais, imprecisões nos processos de fabricação, incertezas nas cargas aplicadas e mudanças nas condições ambientais. Em vez de depender apenas de valores determinísticos para parâmetros como resistência e carga, a confiabilidade estrutural utiliza métodos probabilísticos para avaliar a probabilidade de falha de uma estrutura.

2.3.1 Conceitos básicos de Confiabilidade

A representação de um estado limite é realizada por meio de uma função conhecida como função de desempenho ou de falha, comumente denominada $G(\boldsymbol{x})$, que engloba valores das variáveis aleatórias relevantes do problema em estudo, presentes no vetor $\boldsymbol{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$. A avaliação desta função pode resultar em duas configurações possíveis, que indicam os domínios nos quais a estrutura é considerada segura ou insegura. Essas configurações podem ser representadas graficamente conforme a Figura 3, como demonstrado no caso bidimensional.

Figura 3 – Domínios possíveis para a função de performance



Fonte: Barbosa, 2004

A partir da Figura 3, a região de falha é definida como aquela em que ocorre $G(\boldsymbol{x}) \leq 0$. Isso pode ser representado pela integral da função de densidade de probabilidade conjunta das v.a. $f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})$ sobre a região destacada anteriormente, conforme definido pela Equação (2.28),

$$P_f = \int_{G(\boldsymbol{x})\leq 0} \ldots\ldots \int f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}. \tag{2.28}$$

A avaliação da integral n-dimensional mencionada na Equação (2.2) não é trivial, pela complexidade da função de densidade de probabilidade conjunta. De acordo com Barbosa (2004), mesmo com o uso de técnicas modernas de integração numérica e o avanço da eficiência computacional, na prática, a avaliação da integral costuma ser restrita a problemas com 5 a 6 variáveis aleatórias.

2.3.2 Simulação de Monte Carlo

A simulação é uma técnica crucial na experimentação numérica, conforme destacado por Rubinstein (1981). Ela se refere à realização de experimentos computacionais baseados em modelos lógicos e matemáticos para descrever o comportamento de sistemas ao longo do tempo. Um exemplo notável é a Simulação de Monte Carlo, que emprega números aleatórios e recebe seu nome como referência à cidade de Monte Carlo, conhecida por seus cassinos.

Beck (2010) retrata o método de Monte Carlo como uma técnica que envolve simular artificialmente um grande conjunto de amostras simuladas e observar o resultado encontrado. A distribuição estatística de cada v.a. x_i é representada de forma discreta por um vetor de números aleatórios. Assim, a técnica consiste em produzir N eventos aleatórios a serem avaliados na equação do estado limite $G(\boldsymbol{x})$, de forma que a probabilidade de falha (P_f) pode

ser estimada como a razão entre o número de eventos de falha (N_f) e o número total de eventos (N),

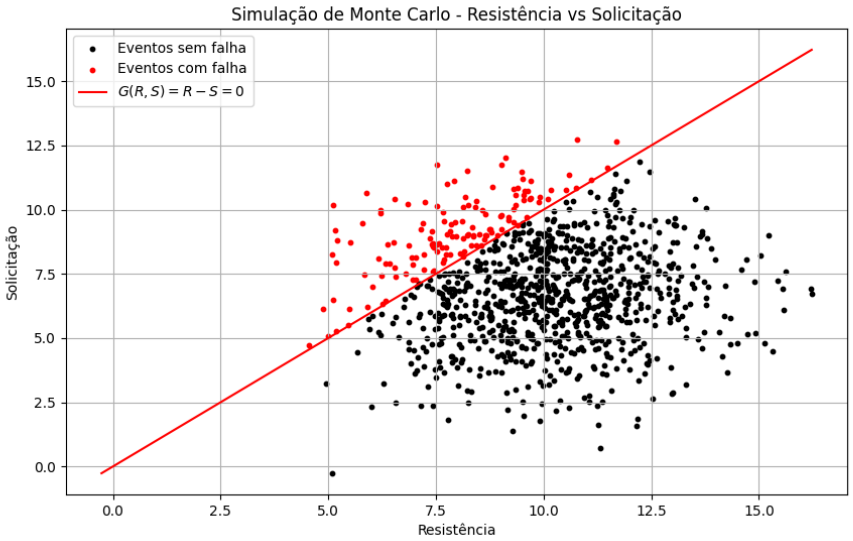
$$P_f = \frac{N_f}{N}. \tag{2.29}$$

A precisão do método está relacionada com o tamanho da amostragem, e pode ser avaliado pelo coeficiente de variação da probabilidade de falha. Com o objetivo de obter uniformidade na resposta, para diferentes execuções do método, estima-se um número de cenários mínimos N_{min} para que uma probabilidade de falha P_f seja determinada com um almejado coeficiente de variação δ, cujo valor recomendado é inferior a 5%, vide Equação (2.30),

$$N_{min} = \frac{1}{\delta^2}\frac{1-P_f}{P_f}. \tag{2.30}$$

A Figura 4 ilustra um exemplo da Simulação de Monte Carlo, demonstrando eventos com falha e sem falha.

Figura 4 – Exemplo ilustrativo da simulação de Monte Carlo



Fonte: Autora, 2024.

2.3.3 Hipercubo Latino

Em 1979, foi apresentada por McKy, Beckman e Conover, a técnica de amostragem por hipercubo latino, onde foi realizado um estudo comparativo com as amostragens aleatória e estratificada.

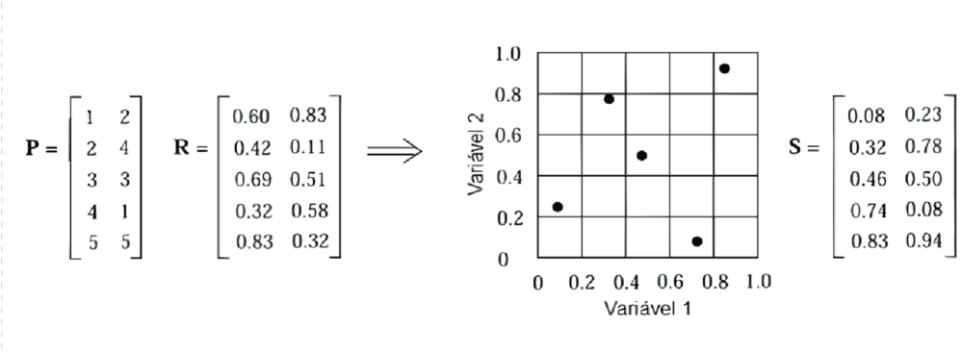
Dessa forma, a amostragem estratificada, bem como a amostragem por hipercubo latino, dividem o domínio de cada variável aleatória em faixas (McKAY, 1979; Olsson *et al*, 2003). Logo, cada faixa é amostrada uma única vez, resultando numa distribuição esparsa dos pontos. Isto garante uma cobertura homogênea do domínio das variáveis aleatórias.

Seja n_{va} o número de variáveis aleatórias do problema e n o número de pontos da amostra. Sabe-se que o espaço de amostragem se torna n_{va}-dimensional. Uma matriz $\boldsymbol{P}$, de dimensões (n x n_{va}), é gerada, onde cada uma das n_{va} colunas é uma permutação aleatória de 1...n. Outra matriz $\boldsymbol{R}$ é gerada (dimensões n x n_{va}), cujos componentes são números aleatoriamente distribuídos entre (0,1). A partir destas matrizes, obtém-se a matriz $\boldsymbol{S}$ (Olsson *et.al*, 2003),

$$S = \frac{1}{\mathrm{n}}(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{R}). \tag{2.31}$$

O exemplo na Figura 5 ilustra bem as dimensões (n x n_{va}) = (5 x 2), logo tem

Figura 5 – Hipercubo Latino para duas variáveis e cinco realizações.



Fonte: Autora, 2024.

Dessa forma, as amostras são geradas a partir de $\boldsymbol{S}$, tal que

$$X_{ij} = F_{xj}^{-1}(s_{ij}), \tag{2.32}$$

na qual F_{xj}^{-1} é a inversa da função de distribuição acumulada de probabilidade da variável X_j.

A geração das matrizes $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{R}$, pode ser proibitiva quando se deseja gerar uma amostra de tamanho n muito grande, uma vez que isto pode levar a um consumo excessivo de memória do computador.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O estudo iniciou com uma análise extensiva da literatura. Em seguida foi implementado um modelo mecânico em Python, baseado no Método dos Elementos de Contorno (MEC), para a avaliação estrutural de chapas, em regime elástico linear. A validação do modelo foi realizada utilizando exemplos disponíveis na literatura.

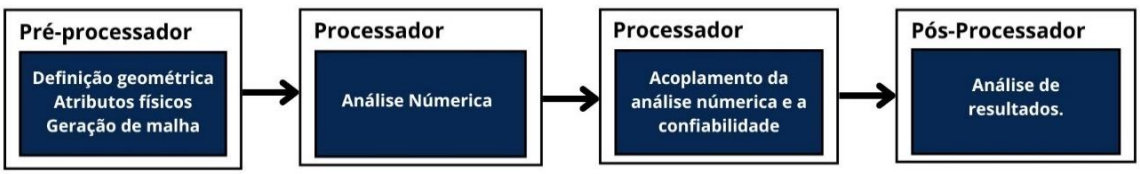
Além disso, foi conduzida uma revisão bibliográfica e implementação computacional da Simulação de Monte Carlo (SMC) em Python. Após a validação com exemplos da literatura, foram definidas curvas de distribuição para os parâmetros de projeto e funções de falha associadas aos estados limites da estrutura. Isso permitiu a realização de simulações computacionais e análise dos resultados obtidos.

Em seguida, fez-se o acoplamento direto dos modelos confiabilístico e mecânico. Esses modelos foram controlados pela rotina de confiabilidade, que invocou o modelo mecânico em cada realização da SMC. A validação dos modelos acoplados foi realizada utilizando exemplos disponíveis na literatura, para, posteriormente, aplicá-lo a estudos de caso.

Utilizou-se os pacotes NumPy (análises numéricas), SciPy (especialmente funções relacionadas a análises estatísticas), Matplotlib (visualização gráfica dos resultados). As variáveis aleatórias consideradas foram parâmetros mecânicos – como módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson, dimensões dos elementos estruturais, além dos carregamentos aplicados.

A Figura 6 apresenta um esquema da implementação computacional, a qual inicialmente é feita por um pré-processador, onde é gerada a entrada de dados em arquivo em formato *.txt*, que possui as características do material, como módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson, suas condições de contorno, como número de nós e suas coordenadas, número de elementos e suas conectividades, número de pontos internos e suas coordenadas, bem como força aplicada em cada nó. Em seguida é realizada a análise de resultados na etapa de pós-processamento.

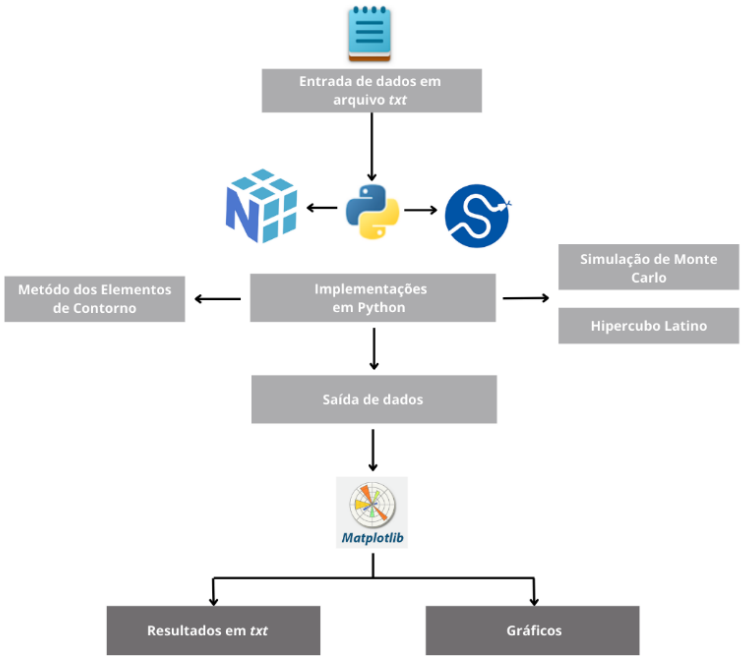
Figura 6 – Esquema das etapas do trabalho



Fonte: Autora, 2024.

No que tange à implementação do programa computacional, foi adotada uma abordagem de Programação Orientada a Objeto (POO), o código foi desenvolvido em três arquivos o “MEC2D.py”, que rege todo o modelo mecânico do problema, e o “MEC2D_SC.py” performa a Simulação de Monte Carlo acoplada ao modelo mecânico, bem como o “MEC2D_HL.py” que performa a Amostragem por Hipercubo latino. O esquema exposto na Figura 7 apresenta um resumo da metodologia utilizada para concretização do estudo proposto.

Figura 7 – Esquema desenvolvido para realização do estudo proposto



Fonte: Autora, 2024.

Todos os arquivos que compõem o código fonte do modelo mecano-fiabilístico descrito neste trabalho estão disponíveis em <https://github.com/Evyllyn/TCC---Evyllyn>, para fins de reprodutibilidade.

4 APLICAÇÕES

No presente capítulo apresentam-se algumas aplicações do programa. Inicialmente, analisam-se exemplos em 2D, com o intuito de validar a implementação do Método dos Elementos de Contorno, e posteriormente são feitas aplicações em Confiabilidade Estrutural, utilizando a Simulação de Monte Carlo e a Amostragem por Hipercubo Latino, a fim de validar as abordagens implementadas.

Os dados de entrada são extraídos de um arquivo de texto (de extensão *.txt*). O arquivo deve conter os seguintes dados: E (módulo de elasticidade transversal), υ (coeficiente de Poisson), número de nós de contorno e suas coordenadas, número de nós internos e suas devidas coordenadas, número de elementos e suas conectividades, condições de contorno e força aplicada em cada nó. Observa-se na Figura 8 um exemplo de arquivo de dados de entrada.

Figura 8 – Exemplo de entrada de dados por arquivo

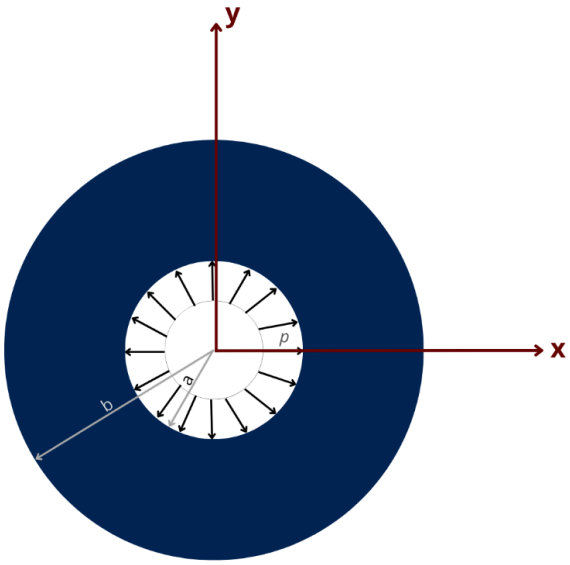
```
%POISSON
0.250000

%ELASTICITY
200000.000000

%SIGMAMAXMAT
0.210000

%NODE.BOUND
64
1 25.000000 0
2 23.0970 9.5671
3 23.0970 9.5671
4 17.6777 17.6777
5 17.6777 17.6777
6 9.5671 23.0970
7 9.5671 23.0970
8 0.0000 25.0000
9 0.0000 25.0000
10 -9.5671 23.0970
11 -9.5671 23.0970
12 -17.6777 17.6777
13 -17.6777 17.6777
14 -23.0970 9.5671
15 -23.0970 9.5671
16 -25.0000 0.0000
17 -25.0000 0.0000
18 -23.0970 -9.5671
19 -23.0970 -9.5671
20 -17.6777 -17.6777
21 -17.6777 -17.6777
22 -9.5671 -23.0970
23 -9.5671 -23.0970
24 -0.0000 -25.0000
25 -0.0000 -25.0000
26 9.5671 -23.0970
```

Fonte: Autora, 2024.

4.1 Primeiro exemplo de verificação – Tubo Cilíndrico

O primeiro exemplo trata-se do problema de Lamé, no qual o raio interno é a = 10 cm e o externo é b = 25 cm. O cilindro está sob uma pressão interna hidrostática de p = 100 MPa. Os parâmetros do material são: $E = 2 * 10^5$MPa e v = 0,25. Na Figura 9, pode-se observar o problema em questão.

Figura 9 – Tubo Cilíndrico sob pressão interna



Fonte: Autora, 2024.

O problema de Lamé é um problema fundamental da mecânica dos sólidos, dedicado ao comportamento de componentes cilíndricos sob pressão. Sua solução é essencial para o projeto seguro e eficiente de diversos tipos de estruturas.

Para a discretização do problema, a geometria do tubo foi inicialmente modelada com 8 nós distribuídos tanto na parede interna quanto na externa. A fim de avaliar a influência da discretização nos resultados, o número de nós foi gradualmente aumentado, atingindo um total de 64 nós. A partir desse refinamento da malha, considerou-se que a precisão dos resultados numéricos era satisfatória.

Os resultados numéricos para os pontos internos da geometria foram armazenados em um arquivo de texto e são apresentados na Figura 10.

Figura 10 – Saída de dados do estudo comparativo com 64 nós

*** PONTOS INTERNOS ***

P_int	Coord-X	Coord-Y	Desloc-X	Desloc-Y	Tensao-X	Tensao-Y	Tensao_XY	Sigma1	Sigma2	Teta1	Teta2
0	0.12000	0.0000	0.0066	-0.0000	-63.7821	99.4235	0.0000	-63.7821	99.4235	-0.0	90.0
1	0.16000	0.0000	0.0054	-0.0000	-28.0585	63.7289	-0.0000	-28.0585	63.7289	0.0	90.0
2	0.18000	0.0000	0.0050	-0.0000	-18.4255	54.0963	-0.0000	-18.4255	54.0963	0.0	90.0
3	0.20000	0.0000	0.0047	-0.0000	-11.5368	47.2074	0.0000	-11.5368	47.2074	-0.0	90.0
4	0.24000	0.0000	0.0044	-0.0000	-1.6060	38.2154	0.0000	-1.6060	38.2154	-0.0	90.0

Fonte: Autora, 2024.

A Tabela 1 apresenta uma comparação entre a solução analítica e os resultados numéricos obtidos pelo modelo para o problema em estudo. Os dados numéricos foram gerados considerando uma discretização do contorno com 64 nós e correspondem aos pontos internos

localizados em y = 0, ou seja, ao longo da direção radial, conforme ilustrado nas Figuras 11 e 12.

Tabela 1 – Valores das tensões principais obtidos analiticamente e com uso do modelo

x (cm)	Analítico		MEC	
	$\sigma_x\ (MPa)$	$\sigma_y\ (MPa)$	$\sigma_x(MPa)$	$\sigma_y(MPa)$
12	-63,624	101,720	-63,782	99,423
18	-17,695	55,791	-18,425	54,096
20	-10,714	48,810	-11,536	47,20
24	-1,620	39,716	-1,606	38,214
Erro médio (%)			0,219	2,58

Fonte: Autora, 2024.

A fim de compreender a importância de uma discretização adequada do contorno na modelagem, realizou-se um estudo de convergência. Para tanto, o ponto de coordenadas x = 12 cm e y = 0 foi selecionado para análise das tensões horizontais. Os resultados obtidos estão apresentados na Tabela 2.

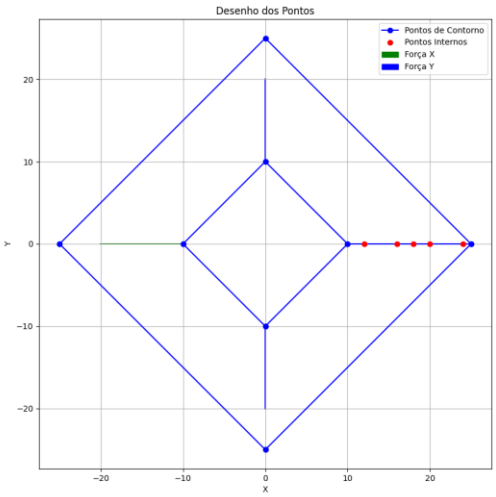
Tabela 2 – Redução do erro em função do refinamento da malha

Números de nós de contorno	$\sigma_x(MPa)$	Erro (%)
8	104,845	64,78
16	-25,633	59,710
32	-57,190	10,13
64	-63,782	0,219

Fonte: Autora, 2024.

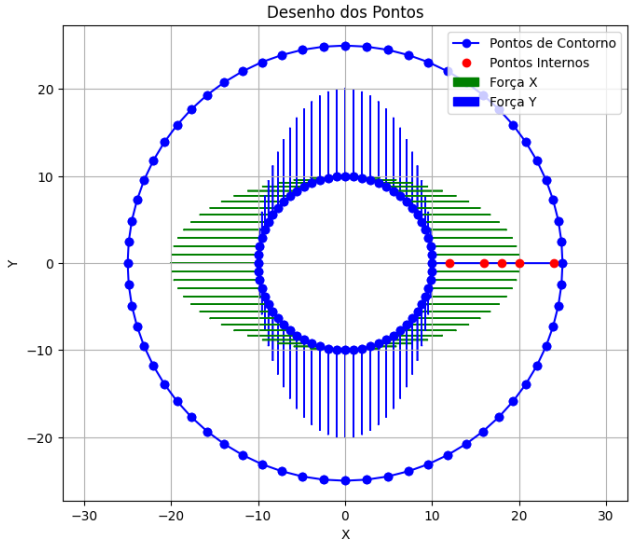
Os resultados numéricos obtidos demonstraram excelente concordância com os valores de referência, apresentando um erro percentual médio de apenas 0,219% em relação às tensões horizontais. A Figura 11 ilustra a distribuição de tensões para uma malha com 8 elementos de contorno, enquanto a Figura 12 apresenta os resultados para uma malha mais refinada, com 64 elementos. A comparação entre essas figuras evidencia a influência da discretização do contorno na precisão dos resultados, sendo notável a melhoria na representação dos gradientes de tensão com o aumento do número de elementos.

Figura 11 – Imagem gerada pelo programa para 8 nós de contorno



Fonte: Autora, 2024.

Figura 12 – Imagem gerada pelo programa para 64 nós de contorno



Fonte: Autora, 2024.

A fim de realizar uma análise de convergência mais rigorosa, torna-se fundamental determinar analiticamente o deslocamento de um ponto específico, servindo como referência para comparação com os resultados numéricos.

A simetria axial presente permite a utilização de coordenadas cilíndricas, simplificando a análise. Conforme Braga (2021), o deslocamento circunferencial é nulo ($u_\theta = 0$), indicando a ausência de deformações nessa direção. Além disso, a hipótese de estado plano tensão é válida, ou seja, as tensões e deformações axiais são independentes das tensões e deformações radiais e tangenciais, decorrentes da aplicação da pressão interna ou externa.

Nesse sentido, a equação (3.1) é usada para obter uma solução analítica do deslocamento:

$$u_r = \left(\frac{1-v}{E}\frac{a^2}{(b^2-a^2)}\mathrm{r} + \frac{1+v}{E}\frac{a^2b^2}{(b^2-a^2)r}\right)P - \frac{vr}{E}\sigma_0. \tag{3.1}$$

O ponto de interesse, caracterizado pelas coordenadas cartesianas x = $10cm$ e y = 0, localiza-se sobre o contorno do cilindro, onde a coordenada radial r é igual a $10cm$. Considerando as condições de contorno pertinentes a este ponto, a substituição dos valores numéricos nas expressões analíticas resulta em

$$u_r = \left(\frac{1-0{,}25}{2*10^5}\frac{0{,}1^2}{(0{,}25^2-0{,}1^2)}0{,}10 + \frac{1+0{,}25}{2*10^5}\frac{0{,}1^2 0{,}25^2}{(0{,}25^2-0{,}1^2)\,0{,}10}\right) * 100 - \frac{0{,}25*0{,}1}{2*10^5} * 0. \tag{3.2}$$

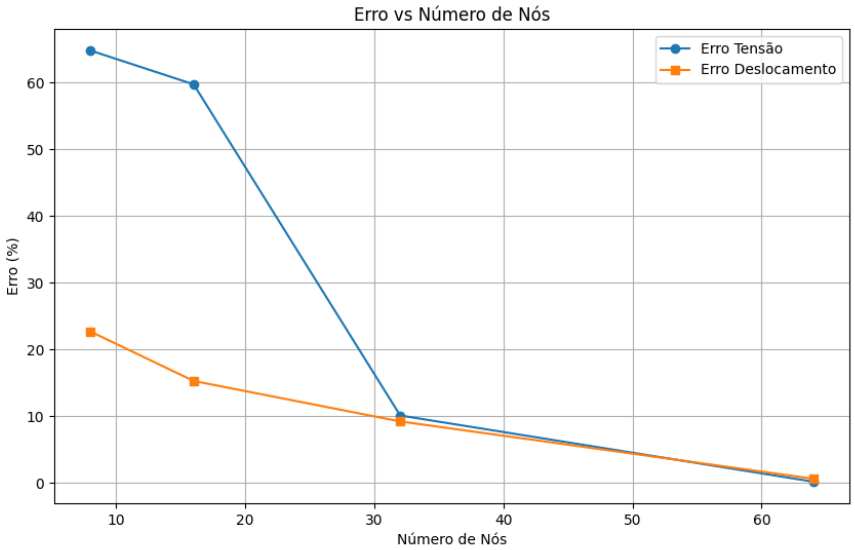
Após a realização dos cálculos, obteve-se um deslocamento radial teórico de u_r = $8{,}154 * 10^{-3}cm$ no ponto com coordenada radial r = $10cm$ A análise numérica, realizada utilizando uma malha com 64 nós de contorno, resultou em um deslocamento radial de u_r = $8 * 10^{-3}cm$ do mesmo ponto. A Tabela 3 apresenta os resultados da análise de convergência da solução numérica para a deformação, detalhando a redução do erro em função do refinamento da malha. A Figura 13 complementa essa análise, ilustrando graficamente a convergência tanto dos deslocamentos quanto das tensões em relação ao número de nós.

Tabela 3 – Estudo da influência do número de nós de contorno no erro

Números de nós de contorno	$u_r\ (cm)$	Erro (%)
8	$6{,}3 * 10^{-5}$	22,7
16	$6{,}9 * 10^{-5}$	15,3
32	$7{,}4 * 10^{-5}$	9,24
64	$8{,}1 * 10^{-5}$	0,66

Fonte: Autora, 2024.

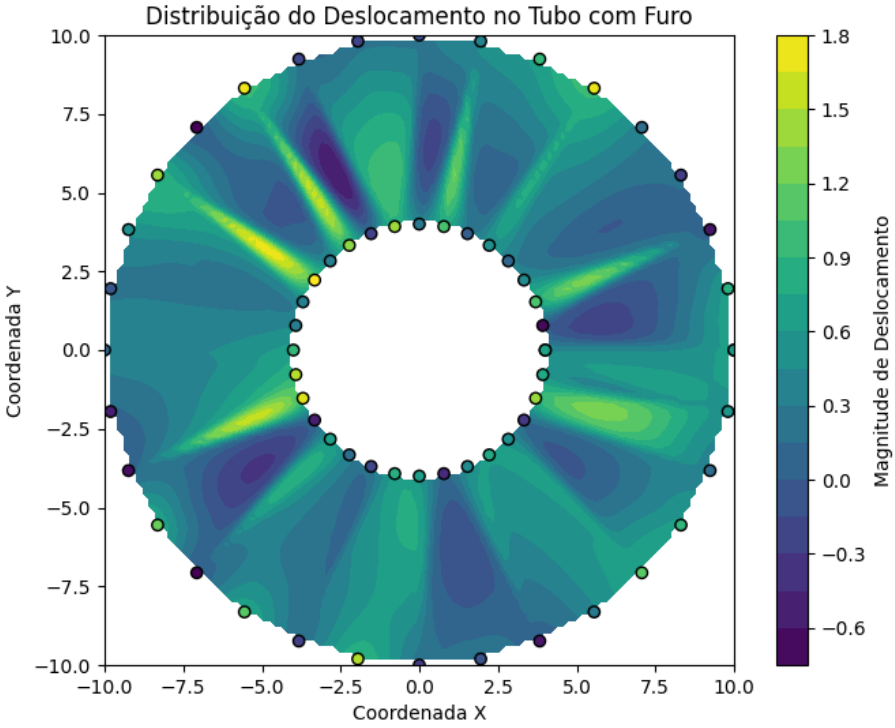
Figura 13 – Erro x Número de nós



Fonte: Autora, 2024.

A seguir, na Figura 14, apresenta a distribuição dos deslocamentos principais na estrutura plana analisada, discretizada em 64 nós.

Figura 14 - Distribuição de deslocamentos principais ao longo do Exemplo 1.

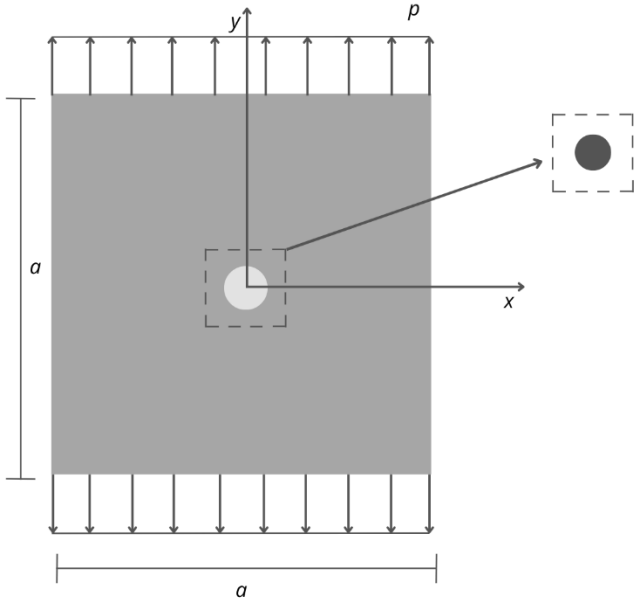


Fonte: Autora, 2024.

4.2 Segundo exemplo de verificação – Chapa Quadrada

O segundo exemplo trata-se de uma chapa quadrada com um orifício no centro, em estado plano de tensão, conforme apresentado na Figura 15. O lado da chapa é de a = 20 m. O raio do furo é de R = 1 m e a força de tração aplicada é de p = 272,65 MPa. Os parâmetros do material são: $E = 200 * 10^9\ MPa$ e v = 0,33.

Figura 15 – Placa quadrada com furo circular sob tensão



Fonte: Autora, 2024.

Para a discretização da geometria, iniciou-se com uma malha contendo 8 nós tanto no contorno externo da chapa quanto no contorno do furo. A fim de refinar a solução e avaliar a convergência, o número de nós no contorno do furo foi gradualmente incrementado, atingindo um total de 64 nós na análise mais refinada. Todas as simulações numéricas foram realizadas utilizando a rotina MEC desenvolvida neste trabalho. Para avaliar a precisão da solução numérica, a tensão vertical σ_y no raio interno r foi comparada com a solução analítica proposta por Kapturczak e Zieniuk (2021), dada pela Equação (4.1),

$$\sigma_{22} = \left(\frac{p}{2}\left(2 + \frac{R^2}{r^2} + 3\frac{R^4}{r^4}\right)\right), \tag{4.1}$$

em que R representa o raio do furo e p refere-se à tensão aplicada. O ponto com coordenadas (2,0) é tomado como referência para a validação. Indo precisamente ao valor analítico, σ_{22} é 365,016 MPa nesse ponto. A Figura 17 apresenta os resultados gerado pelo programa.

Figura 16 - Saída de dados do estudo comparativo

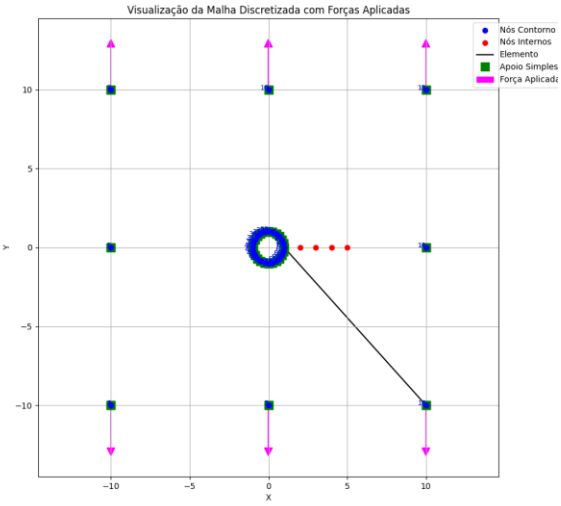
*** PONTOS INTERNOS ***

P_int	Coord-X	Coord-Y	Desloc-X	Desloc-Y	Tensao-X	Tensao-Y	Tensao_XY	Sigma1	Sigma2	Teta1	Teta2
0	2.0000	0.0000	-0.0019	0.0000	52999436.1981	316583324.3780	0.0000	52999436.1981	316583324.3780	-0.0	90.0
1	3.0000	0.0000	-0.0024	0.0000	19296525.3799	280144729.2320	0.0000	19296525.3799	280144729.2320	-0.0	90.0
2	4.0000	0.0000	-0.0029	0.0000	4298198.1951	269862541.6797	0.0000	4298198.1951	269862541.6797	-0.0	90.0
3	5.0000	0.0000	-0.0035	0.0000	-3113349.4562	264744546.8545	0.0000	-3113349.4562	264744546.8545	-0.0	90.0

Fonte: Autora, 2024.

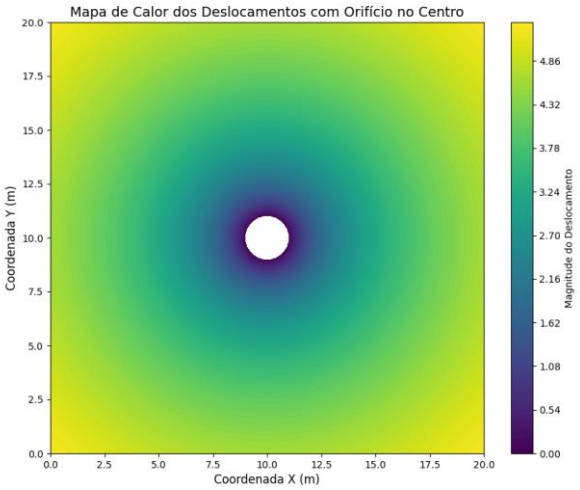
A Figura 17 apresenta a estrutura com uma malha de 64 nós de contorno. A Figura 18 apresenta a distribuição dos deslocamentos principais na estrutura plana analisada, discretizada em 64 nós.

Figura 17 - Imagem da placa gerada pelo programa para 64 nós de contorno.



Fonte: Autora, 2024.

Figura 18 - Distribuição de deslocamentos principais ao longo do Exemplo 2



Fonte: Autora, 2024.

Os resultados do problema são apresentados na Tabela 4, a qual contém uma comparação entre a solução analítica e a solução numérica obtida pelo programa utilizando uma malha com 64 nós no contorno, sendo 8 nós na placa e 56 no furo circular.

Tabela 4 – Comparativo entre resultados analíticos e numéricos para as tensões principais

x	y	Analítico	MEC
		$\sigma_y\ (MPa)$	$\sigma_y(MPa)$
2	0	332,29	316,58
3	0	292,84	280,14
4	0	282,76	269,86
5	0	278,75	264,74
Erro médio (%)			4,72

Fonte: Autora, 2024.

A fim de compreender a influência da discretização do contorno na precisão dos resultados, um estudo de convergência foi realizado. Para tanto, o ponto de coordenadas (2, 0) foi selecionado e a tensão vertical nesse ponto foi analisada para diferentes refinamentos de malha. Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 5.

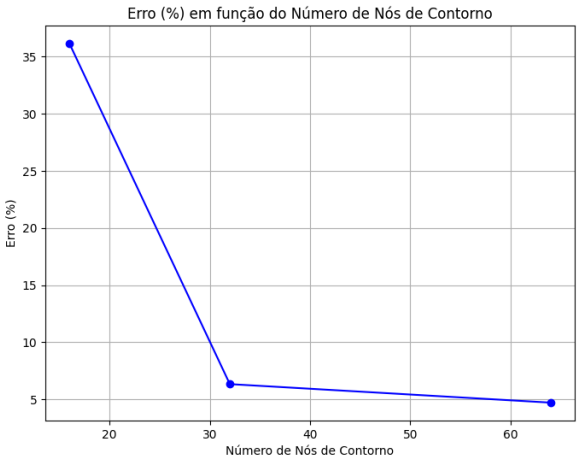
Tabela 5 – Convergência da solução numérica para as tensões principais

Números de nós de contorno	$\sigma_y\ (MPa)$	Erro (%)
16	212,12	36,16
32	311,2	6,34
64	316,58	4,72

Fonte: Autora, 2024.

Devido a maior concentração de tensões na vizinhança do furo, o ponto (2,0), situado na região de maior solicitação, foi selecionado para a análise de convergência da chapa. A Figura 19 apresenta o gráfico de erro em função do número de nós, evidenciando a convergência numérica da solução obtida.

Figura 19 - Erro vs. Número de nós



Fonte: Autora, 2024.

Foi adotada para a análise uma discretização com 32 nós no contorno. Em seguida, esse exemplo verificado foi abordado do ponto de vista de confiabilidade, considerando as variáveis aleatórias: limite de escoamento, tensão aplicada, módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson. Os parâmetros estatísticos dessas variáveis são apresentados na Tabela 6. Inicialmente, foram geradas amostras variando apenas o limite de escoamento e a tensão aplicada, a fim de investigar a influência dos diferentes parâmetros no cálculo da probabilidade de falha da estrutura. Posteriormente, foram realizadas análises variando isoladamente o módulo de elasticidade. A dispersão das variáveis aleatórias foi quantificada pelo coeficiente de variação (COV).

Tabela 6 – Descrição estatística das v.a consideradas no exemplo 2

Variável Aleatória	**Média**	**Desvio Padrão**	**Distribuição de variável**
E (Mpa)	200*10^9	0,05	Normal
f_y (MPa)	450	0,063	LogNormal
p (MPa)	272,65	0,05	Normal

Fonte: Autora, 2024.

Define-se uma função de falha em termos de tensões pela seguinte Equação (4.2),

$$G(f_y, p) = f_y - \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2}. \tag{4.2}$$

O segundo termo do lado direito da Equação (4.2) representa a tensão equivalente de von Mises no ponto de referência, calculada a partir das tensões principais σ_1e σ_2 obtidas pela rotina MEC2D a cada iteração. Posteriormente, a variável aleatória associada à pressão aplicada, p, é considerada na análise. Para determinar o número mínimo de repetições, inicialmente foi calculada a probabilidade de falha característica. Para isso, realizaram-se cinco

conjuntos de simulações, cada um com 10 mil repetições. Após identificar a probabilidade de falha característica, utilizou-se a Equação (2.30) para calcular o número mínimo de eventos necessário.

Os resultados obtidos considerando as diferentes variáveis aleatórias são apresentados na Tabela 7.

Tabela 7 – Resultados da análise de confiabilidade

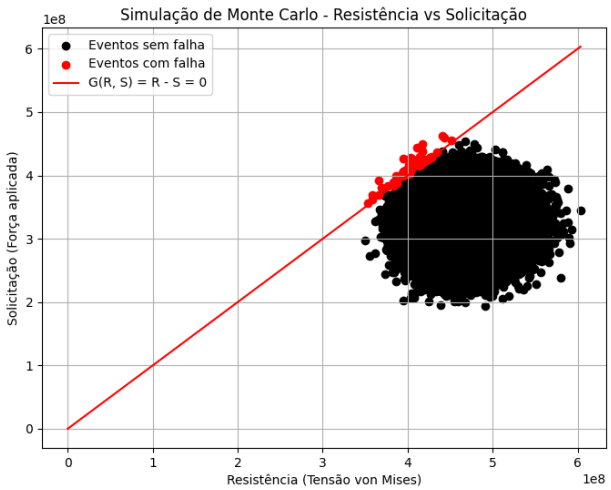
Variáveis aleatórias	Resultados	
f_y, p, E	P_f	$7{,}41 * 10^{-4}$
	$\boldsymbol{\delta}$	5%
	Repetições	68000
	Tempo de processamento (h)	5,86
f_y, p	P_f	$7{,}5 * 10^{-4}$
	$\boldsymbol{\delta}$	5%
	Repetições	68000
	Tempo de processamento (h)	5,66
E (MPa)	P_f	-
	$\boldsymbol{\delta}$	5%
	Repetições	68000
	Tempo de processamento (h)	5,72

Fonte: Autora, 2024.

A análise de confiabilidade considerando apenas o módulo de elasticidade como variável aleatória, não foi capaz de retornar uma estimativa de P_f. Esse resultado sugere que, para o caso em estudo, a variação do módulo de elasticidade exerce uma influência menor que a das outras v.a. na tensão de von Mises e, consequentemente, na probabilidade de ocorrência de falha.

A Figura 20 apresenta o gráfico de Resistência vs Solicitação do problema considerando a tensão aplicada e a tensão de escoamento como v.a.

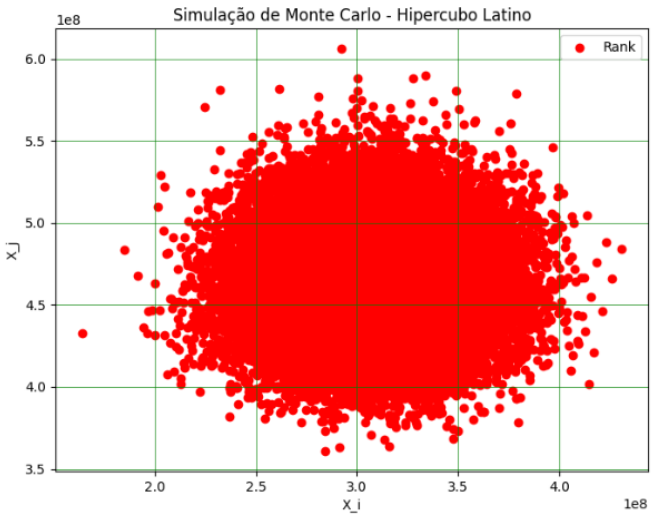
Figura 20 – Gráfico Resistência vs Solicitação



Fonte: Autora, 2024.

A seguir, realizou-se uma análise de confiabilidade utilizando a Simulação de Monte Carlo com a Amostragem por Hipercubo Latino, considerando a pressão aplicada (p) e a tensão de escoamento (f_y) como variáveis aleatórias. Os resultados indicaram uma probabilidade de falha de 5,14 * 10^{-4} e o tempo de processamento de 4,82 horas. A Figura 21 ilustra a distribuição das amostras geradas pelo método de amostragem por Hipercubo Latino durante a simulação de Monte Carlo. No eixo x_i, estão representados os valores do módulo de elasticidade (f_y), enquanto no eixox_j, encontram-se os valores da tensão (p). Cada ponto vermelho corresponde a uma combinação de valores dessas duas variáveis, usadas para calcular a tensão na placa.

Figura 21 – Gráfico Hipercubo Latino para o segundo exemplo de verificação.

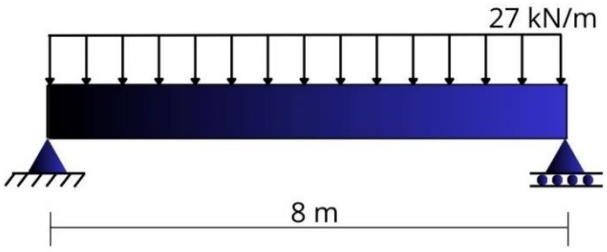


Fonte: Autora, 2024.

4.3 Exemplo de aplicação – Viga biapoiada

No exemplo de aplicação, propõe-se a realização de uma análise confiabilística de uma viga biapoiada metálica. Os parâmetros do material são o módulo de elasticidade de 210 GPa e o coeficiente de Poisson de 0,3. A Figura 22 apresenta a viga em questão.

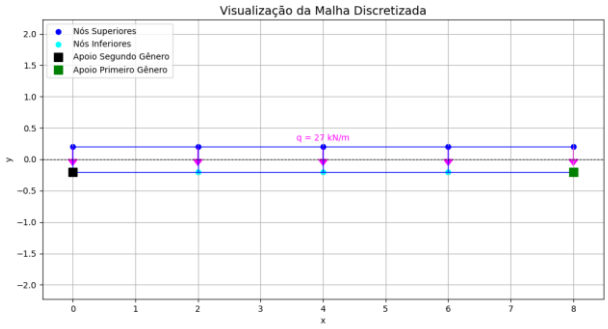
Figura 22 - Viga biapoiada



Fonte: Autora, 2024.

Para a análise mecânica, foi empregada uma malha com 10 nós distribuídos ao longo do contorno da viga, sendo 5 nós discretizando a face inferior e 5 nós a face superior. A Figura 23 apresenta a malha escolhida de 10 nós de contorno.

Figura 23 - Imagem da viga gerada pelo programa MEC2D para 10 nós de contorno



Fonte: Autora, 2024.

A fim de considerar a incerteza associada aos parâmetros do problema, o módulo de elasticidade, a carga distribuída e o comprimento da viga foram modelados como variáveis aleatórias. A Tabela 8 apresenta os valores médios, desvios padrão e as distribuições de probabilidade adotadas para cada uma dessas variáveis. Para isso, realizaram-se cinco conjuntos de simulações, cada um com 10 mil repetições. Após identificar a probabilidade de falha característica, utilizou-se a Equação (2.30) para calcular o número mínimo de eventos necessário. Para o segundo cenário percebe-se que a probabilidade de falha foi maior, por esse motivo o número de repetições foi menor do que o primeiro cenário.

Tabela 8 – Descrição estatística das v.a consideradas para a viga biapoiada

Variável Aleatória	**Média**	**Desvio Padrão**	**Distribuição de variável**
E (Mpa)	$210 * 10^6$	0,15	Normal
q (kN/m)	27	0,1	Normal
L (m)	8	0,4	Lognormal

Fonte: Autora, 2024.

A Associação Brasileira de Normas Técnicas, por meio dos preceitos dispostos na NBR 8800 (2018), define o deslocamento vertical máximo para vigas de pisos feitas em aço conforme ilustrado na Equação (4.3),

$$d_{máx}(L) = \frac{L}{350}. \tag{4.3}$$

na qual L é o vão livre da estrutura (portanto, neste exemplo, L = 8,0 m). Nesse sentido, é definida a primeira função de falha, g_1, conforme disposto na Equação (4.4),

$$g_1(D) = 0{,}022 - D, \tag{4.4}$$

na qual D é o deslocamento vertical máximo da estrutura, em metros.

Os resultados obtidos considerando as diferentes variáveis aleatórias são apresentados na Tabela 9. Como foi verificado no segundo exemplo de verificação, foi escolhido o uso da Amostragem por Hipercubo Latino.

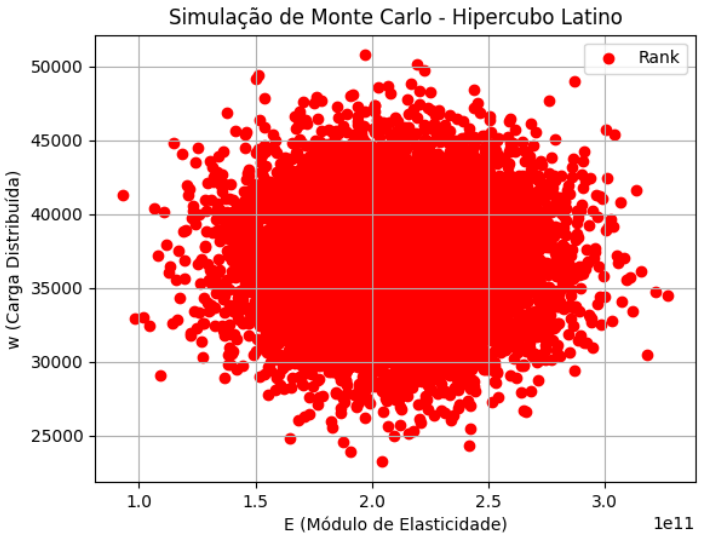
Tabela 9 – Resultados da análise de confiabilidade

Variáveis aleatórias	Resultados	
E, q	P_f	$6{,}2 * 10^{-4}$
	$\boldsymbol{\delta}$	5%
	Repetições	644762
	Tempo de processamento (h)	4,18
E, q, L	P_f	0,2630
	$\boldsymbol{\delta}$	5%
	Repetições	1128
	Tempo de processamento (h)	4,27

Fonte: Autora, 2024.

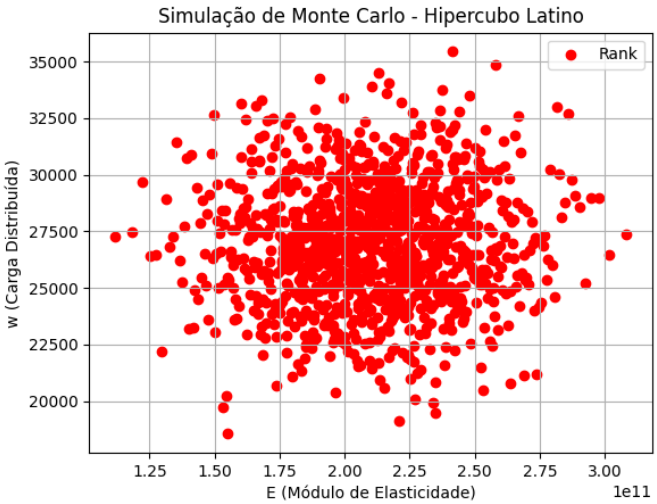
Os resultados indicam que a combinação de módulo de elasticidade e carga distribuída como variáveis aleatórias resulta em uma P_f menor em comparação com a simulação que considera adicionalmente o comprimento da viga como variável aleatória, o que mostra a importância de considerar esta última na análise. Tal diferença é explicada pela alta dispersão da v.a. L. A Figura 24 ilustra o primeiro cenário, enquanto a Figura 25 representa o segundo, com suas respectivas distribuições de probabilidade para as variáveis aleatórias.

Figura 24 - Gráfico hipercubo latino do primeiro cenário do exemplo de aplicação



Fonte: Autora, 2024.

Figura 25 - Gráfico hipercubo latino do segundo cenário do exemplo de aplicação



Fonte: Autora, 2024.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os resultados das análises realizadas nos exemplos de verificação e aplicação demonstram a eficácia da implementação do código computacional para a análise mecânica probabilística proposta. Os resultados obtidos para os problemas analisado revelaram-se satisfatórios, corroborando a validade do modelo numérico.

A implementação computacional em Python permitiu avaliar a influência de incertezas em parâmetros mecânicos e geométricos na probabilidade de falha de estruturas. Os resultados obtidos para os problemas de Lamé e da chapa tracionada demonstraram a eficácia da metodologia proposta. A comparação entre o métodos de Monte Carlo sem e com a Amostragem por Hipercubo Latino indicou que o último apresenta menor custo computacional, sem comprometer significativamente a precisão dos resultados.

O elevado custo computacional das análises aqui propostas, evidenciado no segundo exemplo de verificação, impôs sérias restrições ao escopo do estudo. A impossibilidade de utilizar conjuntos de dados mais complexos e de realizar análises mais detalhadas comprometeu a profundidade dos resultados obtidos. Esse compromisso entre precisão e custo computacional é uma constante na modelagem computacional, semelhante à busca por soluções otimizadas em termos de segurança e custo na engenharia.

Dada a alta demanda computacional observada nas análises realizadas, trabalhos futuros poderão explorar a implementação de técnicas mais eficientes para reduzir o custo computacional sem comprometer a precisão dos resultados. Uma possibilidade é o uso do método **FORM (First-Order Reliability Method)**, que pode fornecer aproximações eficientes para problemas de confiabilidade estrutural, especialmente em cenários onde métodos baseados em simulação direta, como Monte Carlo, são computacionalmente proibitivos.

Além disso, o desenvolvimento de estratégias híbridas, que combinem a simplicidade do Hipercubo Latino com algoritmos adaptativos, poderá ser investigado para otimizar ainda mais a eficiência computacional. Outras direções incluem a implementação de técnicas de redução de dimensionalidade, como **POD (Proper Orthogonal Decomposition)**, e a integração de algoritmos baseados em inteligência artificial para identificar padrões e otimizar as análises probabilísticas.

Por fim, a aplicação do código a casos mais complexos, como problemas tridimensionais (3D) ou com maior variabilidade nos parâmetros mecânicos e geométricos, poderá ampliar

significativamente o escopo das investigações, validando a metodologia proposta em cenários mais desafiadores da engenharia prática

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. P. R.; LIMA JUNIOR, E. T.; BARBIRATO, J. C. C. Reliability models for crack propagation analysis by using the boundary element method. **In: XL Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering**. Natal-RN, 2019

ANG, A. H-S.; TANG, W. H. **Probability concepts in engineering: emphasis on applications to civil and environmental engineering**, John Wiley & Sons, 2007.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios**, NBR 8800. Rio de Janeiro, ABNT, 2018, 237p.

BARBOSA, A. H. **Análise de confiabilidade estrutural utilizando o método de monte carlo e redes neurais**. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, 2004.

BECK, A. T**. Curso de confiabilidade estrutural.** Universidade de São Paulo - Escola de Engenharia de São Carlos: Notas de aula, 2010.

BRAGA, Arthur. **Cilindros de Paredes Grossas (Solução de Lamé).** Departamento de Engenharia Mecânica dos Sólidos II, PUC-Rio. Anotações de aula. [S.l.].

BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C. F.; WROBEL, L. C. **Boundary elements techniques: theory and applications in engineering**. Springer-Verlag, London, 1984.

BREBBIA, C. A. **The boundary element method for engineers**. London, Pentech Press. 1978.

CHENG, A. H. D.; CHANG, D. T. **Heritage and early history of the boundary element method.** Department of Civil Engineering University of Mississippi, University, MS, 38677, USA, 2004. ELSEVIER.

CROUCH, S. L. **Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method.** International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 10, n.2, p. 301-342, 1976.

GERE, James Monroe; GOODNO, Barry John. **Mecânica dos materiais**. 7. ed, São Paulo: Cengage Learning, 2013.

HIBBELER, Russell Charles. **Resistência dos materiais**. 7. ed, São Paulo: Pearson, 2010.

KAPTURCZAK, M.; ZIENIUK, E. Modeling the boundary shape of the problems described by Navier–Lamé equations using NURBS curves in parametric integral equations system method. Journal of Computational Science, 2021.

LIMA JUNIOR, E. T. **Formulação do Método dos Elementos de Contornos para Análise de Cascas Abatidas**. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2006.

McKAY, M. D.; BECKMAN, R. J.; CONOVER, W. J. A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code. **Technometrics**, v.21, n.2, p. 239-124, mai. 1979.

OLSSON, A.; SANDBERG, G.; DAHLBLOM, O. On Latin hypercube sampling for structural reliability analysis. Structural Safety, v. 25, n. 1, p. 47-68, 2003. ISSN 0167-4730.

RUBINSTEIN, R. Y. **Simulation and the Monte-Carlo Method**. Nova York, EUA: John Wiley & Sons, 1981.

UBESSI, C. J. B. **Método dos Elementos de Contorno para elasticidade linear 3D com avaliação direta das integrais singulares**. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2014.

VIEIRA, E. S.; ARAÚJO, M. F. I.; BARBIRATO, J. C. C.; MELO, C. V. A. BrickSim eDU: Explorando virtualmente a caracterização de blocos furados. **Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia**. Rio de Janeiro-RJ, 2023.