

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CENTRO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

RAFAEL NUNES DA CUNHA

**MECÂNICA DO DANO CONCENTRADO PARA ANÁLISE DE PLACAS, LAJES E
CASCAS DELGADAS**

Maceió

2024

RAFAEL NUNES DA CUNHA

**MECÂNICA DO DANO CONCENTRADO PARA ANÁLISE DE PLACAS, LAJES E
CASCAS DELGADAS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do título de doutor em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. David Leonardo Nascimento de Figueiredo Amorim

Maceió

2024

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária: Girlaine da Silva Santos – CRB-4 – 1127

C972m Cunha, Rafael Nunes da.
Mecânica do dano concentrado para análise de placas, lajes e cascas delgadas / Rafael Nunes da Cunha. – 2024.
179 f.: il.

Orientador: David Leonardo Nascimento de Figueiredo Amorim.
Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Alagoas.
Centro de Tecnologia. Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, Maceió, 2024.

Bibliografia: f. 156- 171.
Apêndices: f. 172-177.
Anexos: f.178- 179.

1. Placas delgadas. 2. Lajes de concreto. 3. Casca de concreto. 4. Mecânica do dano concentrado. 5. Localização de deformações. I. Título.

CDU: 624.073



**MECÂNICA DO DANO CONCENTRADO PARA ANÁLISE DE PLACAS, LAJES E
CASCAS DELGADAS**

RAFAEL NUNES DA CUNHA

Tese de doutorado submetida à banca examinadora do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas e aprovada no dia 16 do mês de dezembro do ano de 2024.

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
 **DAVID LEONARDO NASCIMENTO DE FIGUEIREDO**
Data: 16/12/2024 14:46:56-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. David Leonardo Nascimento de Figueiredo de Amorim
(Orientador – PPGEC/UFAL)

Documento assinado digitalmente
 **ALINE DA SILVA RAMOS BARBOZA**
Data: 16/12/2024 16:02:04-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Aline da Silva Ramos Barboza
(Avaliadora Interna – PPGEC/UFAL)

Documento assinado digitalmente
 **SERGIO GUSTAVO FERREIRA CORDEIRO**
Data: 16/12/2024 18:42:08-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Sérgio Gustavo Ferreira Cordeiro
(Avaliador Externo à Instituição – ITA)

Documento assinado digitalmente
 **RUBIA MARA BOSSE**
Data: 16/12/2024 19:02:08-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Rúbia Mara Bosse
(Avaliadora Externa à Instituição - UTFPR)

Documento assinado digitalmente
 **RODRIGO BARROS**
Data: 16/12/2024 19:20:49-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Rodrigo Barros
(Avaliador Externo à Instituição - UFRN)

*Dedico este trabalho aos meus pais,
Maria José e Mauro, por seu incansável
esforço em me proporcionar a melhor
educação possível.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que de alguma forma me ajudaram e me deram forças para que eu conseguisse desenvolver este trabalho.

Agradeço a Deus por me guiar ao longo de toda minha vida, me dando forças para vencer os desafios.

Aos meus pais, Maria José e Mauro, que sempre trabalharam duro para dar a melhor educação possível para mim e meus irmãos.

Aos meus irmãos, Fábio e Rafaela, que estiveram juntos comigo compartilhando risadas e ajudando a esquecer parte dos problemas.

A minha prima Elaine, que me apoiou sempre em todas minhas decisões, aturou minhas reclamações e com quem sempre pude contar.

A Lorrán, que foi um irmão que a vida me deu, com o qual compartilhei inúmeras horas de risadas, fofocas, reclamações e muitos jogos, claro.

A Daniel e Danilo, por toda amizade e parceria, desde a graduação, além do suporte quando me aventurei a entrar no doutorado.

Aos meus amigos, com os quais compartilhei momentos de alegria e estresse durante o doutorado, que fizeram essa caminhada mais divertida e leve: Leonardo, Luiza, Yuri, Jorge, Nora, Jéssica Dantas, Evilly, Jonathan, Thauany, Lúcio, Janaína, Giovanna, Ramila, Kaylaine, Tatyane, Vinícius, Rainara, Jéssica Simão, Anderson, Luiz, Edjunio, Ygor, Leandro, Talysson.

A Ludmilson, um grande amigo que a UFS me deu, sempre com as melhores palavras de calma e conselhos acadêmicos e de vida.

Ao meu orientador e amigo, David Amorim, por todos os ensinamentos, conselhos transmitidos e suporte, desde o mestrado.

Aos professores Lucas Gouveia, Eduardo Toledo e a todos do LCCV, em especial a todos do projeto SCORE-TR 2, que me receberam e transmitiram tanto conhecimento ao longo de meu período no laboratório.

Aos professores Aline Barboza e Wayne Assis, por suas valiosas contribuições durante a campanha experimental realizada neste trabalho.

Aos técnicos do LEMA, Tássis, Jonas e Valdemir, por toda ajuda durante a campanha experimental realizada neste trabalho.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) por ter financiado esta pesquisa.

“Aquele que avança confiante na direção de seus sonhos e se empenha em levar a vida que imaginou encontrará sucesso inesperado nas horas corriqueiras.”

Henry David Thoreau

RESUMO

A busca por uma melhor compreensão e descrição matemática do comportamento das estruturas é de fundamental importância no campo da engenharia estrutural. Para uma perfeita descrição é necessário que os modelos matemáticos considerem o comportamento não linear físico dos materiais. Algumas das principais teorias que permitem levar em consideração os efeitos não lineares são a teoria da plasticidade e a mecânica do dano contínuo. Estas teorias apresentaram grandes contribuições para a engenharia estrutural, no entanto também podem cair em limitações das soluções não lineares, como a descrição do comportamento não linear no pós-pico ou por apresentar infinitas soluções, ao ser analisado o problema da localização de deformações. Contornando estes problemas, diferentes teorias têm sido propostas, como a mecânica da fratura, a mecânica do dano moderna, os modelos de campo de fase e mecânica do dano concentrado (MDC). A MDC foi inicialmente proposta para elementos de pórtico e posteriormente foi formulada para meios bidimensionais (elementos finitos de membrana), tem se mostrado capaz de desenvolver análises não lineares, evitando o problema de localização de deformações, sem a necessidade de qualquer técnica de regularização. Portanto, o presente trabalho tem como objetivo contribuir com o desenvolvimento das análises através da MDC, com a proposta de novos modelos para a análise de placas, lajes e cascas delgadas. Para este fim, o presente trabalho selecionou o elemento finito *Discrete Kirchhoff Triangle* (DKT) para a análise de placas e o *Constant Moment Triangle* (CMT), para análise de placas, lajes e cascas. Também foi empregado o elemento *Constant Strain Triangle* (CST) para a análise de cascas. Todos os elementos foram reformulados, de modo a alterar as suas variáveis cinemáticas e permitir a inclusão das considerações da MDC. Para os elementos de placa, foi admitida uma lei de evolução do dano não linear, com amolecimento com comportamento exponencial. O presente trabalho desenvolveu uma campanha experimental para moldagem de placas de concreto reforçado com fibras de aço. Desta forma, os elementos de placa foram validados com diferentes ensaios experimentais da literatura e ensaios desenvolvidos neste trabalho, apresentando respostas com alta precisão, em termos de Força vs. Deslocamento, distribuição de fissuração e abertura de fissuras. Com base no elemento de placa baseado no CMT, este trabalho apresenta a proposta de um novo modelo para avaliar placas de concreto armado (lajes). Dentro deste modelo, as variáveis inelásticas são definidas como o dano e rotações plásticas, as quais podem ser relacionadas com a resposta do concreto armado (fissuração e escoamento da armadura). Com base nisto, diferentes leis de evolução do dano e das rotações plásticas são propostas neste trabalho. O modelo foi aplicado para uma série de ensaios da literatura, cujos resultados apresentaram alta acurácia em comparação aos experimentais, em termos de Força vs. Deslocamento e iniciação e propagação de redes complexas de fissuras. Finalmente, um modelo de casca plano, para aplicação em cascas de concreto armado, é proposto neste trabalho. Os efeitos axiais são descritos pelo elemento finito CST, admitido com resposta elástica linear, e os efeitos de flexão, com o elemento de lajes proposto. O modelo é aplicado a diferentes exemplos experimentais da literatura, obtendo respostas com boa precisão, mostrando-se adequado para prever as respostas de Força vs. Deslocamento e fissuração, obtidos com um modelo de arco e com os próprios resultados experimentais.

Palavras-chave: Placas delgadas; Lajes; Cascas, Mecânica do dano concentrado; Localização de deformações; Campanha Experimental.

ABSTRACT

The search for a better understanding and precise mathematical description of the behaviour of structural behaviour is of fundamental importance in structural engineering. For an accurate representation, mathematical models must account for the physical non-linear behaviour of materials. The main theories that account for nonlinear effects include the theory of plasticity and the mechanics of continuous damage. These theories have significantly contributed to structural engineering, they also face limitations associated with nonlinear solutions. Challenges include describing post-peak non-linear behaviour or encountering infinite solutions when analysing strain localization problems. To address these issues, various alternative theories have been proposed, such as fracture mechanics, modern damage mechanics, phase field models, and lumped damage mechanics (CDM). Initially developed for frame elements, CDM was later extended to two-dimensional media (e.g., membrane finite elements). It has demonstrated the capability to perform non-linear analyses, avoiding the problem of strain localization without relying on regularization techniques. This study aims to contribute to the development of analyses using CDM by proposing new models for the analysis of thin plates, slabs, and thin shells. The study selected the Discrete Kirchhoff Triangle (DKT) finite element for plate analysis, and the Constant Moment Triangle (CMT) was chosen for the analysis of slabs, plates, and shells. Additionally, the Constant Strain Triangle (CST) element was employed for shell analysis. All the elements were reformulated to modify their kinematic variables, enabling the incorporation of CDM considerations. For plate elements, a nonlinear damage evolution law with exponential softening behaviour was adopted. This study also developed an experimental campaign involving the casting of fibre-reinforced concrete plates. The plate elements were tested against a series of experimental tests found in the literature as well as the experimental tests conducted in this study. The results demonstrated accurate performance in terms of force-displacement relationships, crack distribution, and crack opening. Based on the plate element using the CMT, this study proposes a new model for evaluating reinforced concrete plates (slabs). Within this model, inelastic variables, defined as damage and plastic rotations, are associated with the behaviour of reinforced concrete (cracking and reinforcement yielding). Accordingly, this study introduces different laws governing the evolution of damage and plastic rotation. The proposed model was tested against series of experimental tests from the literature, yielding results with high accuracy compared to experimental data, in terms of Force vs. Displacement and the initiation and propagation of complex networks of cracks. Finally, a flat shell model for application in reinforced concrete shells is proposed. Axial effects are described using the CST finite element, assumed to exhibit a linear-elastic response, while bending effects are modelled using the proposed slab element. The model was validated against various experimental examples from the literature, delivering accurate predictions of force-displacement responses and cracking behaviour, consistent with both an arch model and experimental results.

Keywords: Thin plates; Slabs; Shells, Lumped damage mechanics; Strain localization; Experimental campaign.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1: Comportamento de uma laje.	37
Figura 2.2: Comportamento rígido-elástico de um material.	38
Figura 2.3: Chapa infinita com furo elíptico.	41
Figura 2.4: Modos de propagação de fissuras.	42
Figura 2.5: Elemento de volume representativo (EVR).	44
Figura 2.6: Elemento danificado sujeito a carga uniaxial.	45
Figura 2.7: (a) Barra tracionada, sujeita a deslocamento imposto e (b) curva tensão-deformação do modelo de dano.	48
Figura 2.8: (a) Comportamento da curva Tensão vs. Deformação específica, (b) soluções antes do pico, (c) solução homogênea e (d) solução localizada.	50
Figura 2.9: Curva Força vs. Deslocamento, apresentando a dependência de malha.	51
Figura 3.1: Viga engastada: (a) geometria, (b) modelo inelástico, (c) deformações generalizadas e (d) esforços generalizados.	53
Figura 3.2: Modelo inelástico para vigas: (a) parâmetros inelásticos e (b) solução do problema.	56
Figura 3.3: Elemento finito DKT.	57
Figura 3.4: Rotações normais às bordas do elemento DKT.	59
Figura 3.5: Sistema de coordenadas com base na área.	60
Figura 3.6: Campo de deslocamentos transversais.	61
Figura 3.7: Placa elástica: (a) geometria, (b) $N = 2$, (c) $N = 4$, (d) $N = 6$, (e) $N = 14$ e (f) $N = 32$	68
Figura 3.8: Resposta da placa sujeita a carga distribuída: (a) apoiada e (b) engastada.	69
Figura 3.9: Resposta da placa sujeita a carga concentrada: (a) apoiada e (b) engastada.	69
Figura 3.10: (a) posição das charneiras de dano e (b) rotações de dano.	71
Figura 3.11: (a) Elemento finito CMT, (b) campo de deflexões e (c) momentos fletores nas arestas	73

Figura 3.12: Momentos fletores no elemento DKT: (a) Elástico e (b) Altos danos.....	74
Figura 3.13: Momentos fletores no elemento CMT: (a) Elástico e (b) Altos danos.	74
Figura 3.14: (a) Elemento CMT com considerações do dano concentrado e (b) variáveis inelásticas	78
Figura 3.15: Estimativa da abertura de fissuras.....	80
Figura 3.16: Fluxograma da solução via PEEF.	84
Figura 4.1: Modelo para análise de lajes	85
Figura 4.2: Relação Momento fletor vs Dano.	88
Figura 5.1: Elemento finito CST.	90
Figura 5.2: Trelíça equivalente de 3 barras.	92
Figura 5.3: Elemento finito de casca proposto.	95
Figura 5.4: Rotação de eixos do elemento de casca.	96
Figura 6.1: Fibra de aço.....	99
Figura 6.2: Curva granulométrica da areia.	99
Figura 6.3: Curva granulométrica da brita.....	100
Figura 6.4: Materiais utilizados para a moldagem: (a) areia, (b) brita e (c) fibras de aço.	100
Figura 6.5: Formas: (a) das placas e (b) das vigas.	101
Figura 6.6: Geometria da viga sob ensaio de flexão de 3 pontos.	101
Figura 6.7: Moldagem do concreto: (a) lançamento das fibras e (b) concreto pronto.	103
Figura 6.8: Medida de abatimento do concreto.	104
Figura 6.9: Adensamento do concreto: (a) placas e (b) vigas.	104
Figura 6.10: Corpos de prova cobertos por plástico filme.	105
Figura 6.11: Processo de cura das placas.	105
Figura 6.12: Máquinas universais: (a) AMSLER e (b) Shimadzu.	106
Figura 6.13: Realização dos entalhes nas vigas.....	107
Figura 6.14: Equipamentos de aplicação de carga: (a) bomba e (b) cilindro hidráulico.....	107

Figura 6.15: Equipamentos de medição: (a) célula de carga, (b) LVDT e (c) Spider8.....	108
Figura 6.16: (a) ponte rolante e (b) pórtico metálico.....	109
Figura 6.17: Placas preparadas para correlação de imagens digitais.....	110
Figura 6.18: (a) Representação esquemática e (b) real do ensaio.	111
Figura 6.19: Calibração dos equipamentos: (a) célula de carga e (b) LVDT.....	112
Figura 6.20: Calibração: (a) da célula de carga e (b) dos LVDTs.....	113
Figura 6.21: Ensaio de flexão das vigas.....	116
Figura 6.22: (a) vista lateral e (b) superior da placa durante o ensaio.....	117
Figura 6.23: Gráficos de Força vs. Deslocamento no centro das placas.	118
Figura 6.24: (a) fissura da laje e (b) fissura obtida via CID.	118
Figura 6.25: COD para diferentes estágios de carregamento.	118
Figura 6.26: Força vs. COD.....	119
Figura 7.1: Placa apoiada, com carga concentrada em seu centro.	121
Figura 7.2: Malhas para o elemento de placa.	121
Figura 7.3: Malhas de elementos finitos: (a) 32 elementos, (b) 64 elementos, (c) 72 elementos, (d) 144 elementos e (e) 256 elementos.....	122
Figura 7.4: Objetividade do elemento finito proposto.....	122
Figura 7.5: Malhas deformadas das placas: (a) 32 elementos, (b) 64 elementos, (c) 72 elementos, (d) 144 elementos e (e) 256 elementos.....	124
Figura 7.6: Distribuição de charneiras nos cantos da placa.....	124
Figura 7.7: Charneiras negativas nas bordas da placa.	125
Figura 7.8: Distribuição de tensões na seção transversal da placa	126
Figura 7.9: Força vs. Deslocamento para o efeito escala.	127
Figura 7.10: Malhas deformadas: (a) $L = 4000$, (b) $L = 5000$, (c) $L = 6000$, (d) $L = 7000$, (e) $L = 8000$, (f) $L = 9000$, (g) $L = 10000$	128
Figura 7.11: Inclinação das retas tangentes nos pós-picos.	129
Figura 7.12: Força vs. Deslocamento no centro da placa para diferentes malhas.....	130

Figura 7.13: Rotações de dano positivas para as diferentes malhas analisadas.	131
Figura 7.14: Arranjo experimental do ensaio.	132
Figura 7.15: Resultados de (a) rotação de dano e (b) danos para a placa 1, (c) rotação de dano e (d) danos para a placa 2 e (e) curvas de Força vs. Deslocamento e (f) Curvas de Força vs. COD.	133
Figura 7.16: (a) arranjo experimental e (b) malha de elementos finitos adotada.	134
Figura 7.17: Força vs. Deslocamento na borda para as placas octogonais.....	135
Figura 7.18: Padrão de fissuração: experimental e numérico para a primeira placa (a) e (b), (c) e (d) para a segunda placa, e (e) e (f) para a terceira placa, respectivamente.	136
Figura 7.19: Força vs. Deslocamento no centro da laje, para diferentes malhas.....	138
Figura 7.20: (a) Arranjo experimental, (b) padrão de fissuração experimental, dano positivo para as diferentes malhas: (c) 64 elementos, (d) 72 elementos, (e) 128 elementos, (f) 144 elementos e (g) 256 elementos e (h) distribuição de danos por Perego (1990).....	139
Figura 7.21: (a) Dano positivo e (b) rotações plásticas pelo modelo proposto, (c) distribuição de danos obtidos por Perego (1990) e (d) Força vs. Deslocamento no centro da laje.....	141
Figura 7.22: Padrão de fissuração experimental: (a) momentos fletores positivos e (b) negativos (SAWCZUK e JAEGGER, 1963), resultados numéricos: (c) dano positivo, (d) dano negativo, (e) rotações plásticas positivas e (f) Força vs. Deslocamento no centro.....	143
Figura 7.23: Arranjo experimental.	144
Figura 7.24: (a) Fissuras positivas experimentais, (b) danos positivos, (c) rotações plásticas positivas numéricas e (d) Força vs. Deslocamento no centro da laje.....	145
Figura 7.25: Placa em forma de T: (a) configuração do teste e (b) condições de contorno (PINHEIRO, 1981).....	146
Figura 7.26: Condições de dano para laje T: (a) Fissuras positivas e (b) negativas experimentais (PINHEIRO, 1981), (c) danos positivos e (d) danos negativos, (e) rotações plásticas positivas e (f) rotações plásticas negativas.	147
Figura 7.27: Curvas de Força vs. Deslocamento da laje medidas no ponto “d”.	148

Figura 7.28: Condições de dano para casca T: (a) Trincas positivas e (b) negativas experimentais (PINHEIRO, 1981), (c) dano positivos e (d) dano negativos, (e) rotações plásticas positivas e (f) rotações plásticas negativas.	150
Figura 7.29: Curvas de Força vs. Deslocamento da casca medidas no ponto “d”	151
Figura 7.30: Exemplo de Arco: (a) aparato experimental, (b) padrão de fissuração (ABBAS <i>et al.</i> 2014) e distribuição de (c) dano e (d) rotações plásticas.....	152
Figura 7.31: Detalhamento da armadura passiva.....	153
Figura 7.32: Força vs. Deslocamento no centro do Arco.	153

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1: Deslocamentos adimensionais do ponto central para placa elástica.....	68
Tabela 6.1: Quantitativos totais para as moldagens.	102
Tabela 6.2: Resistências à compressão (MPa).....	115
Tabela 6.3: Módulos de Elasticidade Longitudinal (GPa).	115
Tabela 6.4: Energia de Fratura do concreto (Nmm/mm ²).	116

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CID	Correlação de Imagens Digitais
CMT	Constant Moment Triangle
COD	Cracking (Mouth) Opening Displacement
CPs	Corpos de Prova
CST	Constant Strain Triangle
DKT	Discrete Kirchhoff Triangle
EVR	Elemento de Volume Representativo
FCT	Fator de Concentração de Tensão
FIT	Fator de Intensidade de Tensão
LDNL	Lei de Dano Não-Linear
LEMA	Laboratório de Estruturas e de Materiais
LVDT	Transdutor de Deslocamento Variável Linear
MDC	Mecânica do Dano Concentrado
MDCX	Mecânica do Dano Concentrado Expandida
MEF	Método dos Elementos Finitos
NBR NM	Norma Técnica Brasileira válida no Mercado Comum do Sul (MERCOSUL)
NBR	Norma Técnica Brasileira
PEEF	Programa Endógeno de Elementos Finitos
PPGEC	Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
PROAP	Programa de Apoio à Pós-Graduação
PTV	Princípio dos Trabalhos Virtuais
RGB	Red-Green-Blue

RILEM Réunion Internationale des Laboratoires et Experts des Matériaux, systèmes de construction et ouvrages

ROI Region of Interest

UFAL Universidade Federal de Alagoas

LISTA DE SIMBOLOS

$[\mathbf{B}^0]_b$	Matriz de transformação cinemática do elemento de viga na configuração inicial
$[\mathbf{B}]_b$	Matriz de transformação cinemática do elemento de viga
$\{\mathbf{M}_n\}$	Matriz de momentos fletores normais às arestas do elemento finito
$\{\mathbf{U}^*\}$	Matriz de deslocamentos virtuais
$\{\boldsymbol{\kappa}^*\}$	Matriz de curvaturas virtuais do elemento de placa
$\{\boldsymbol{\phi}^d\}$	Matriz de rotações de dano normais às arestas
$\{\boldsymbol{\phi}^e\}$	Matriz de rotações elásticas normais às arestas
$[\mathbf{C}(\mathbf{D})]$	Matriz de flexibilidade de dano
$[\mathbf{B}]$	Matriz de transformação cinemática clássica do elemento DKT
$[\mathbf{D}]$	Matriz constitutiva do elemento de placa
$[\mathbf{E}]$	Matriz de elasticidade generalizada para o elemento DKT
$[\mathbf{F}]$	Matriz de flexibilidade
$[\mathbf{H}]$	Matriz constitutiva do elemento de chapa
$\{\mathbf{M}\}$	Matriz de momento fletores distribuídos ao longo do elemento
$\{\mathbf{P}\}$	Matriz de ações externas
$\{\mathbf{Q}\}$	Esforços internos
$[\mathbf{R}]$	Matriz de rotação
$[\mathbf{T}]$	Matriz de transformação
$\{\mathbf{U}\}$	Matriz de deslocamentos reais
$[\mathbf{b}]$	Matriz de transformação cinemática da MDC
$\{\boldsymbol{\kappa}\}$	Matriz de curvaturas
$[\boldsymbol{\lambda}]$	Matriz dos cossenos diretores do elemento de casca
$\{\boldsymbol{\phi}\}$	Matriz de rotações totais normais às arestas
$[\mathbf{F}(\mathbf{D})]$	Matriz de flexibilidade total

$[K]$	Matriz de rigidez do elemento finito
$\{\Phi^P\}^t$	Matriz de rotações plásticas normais às arestas
$\{\delta\}$	Matriz de alongamentos dos numexes
$\{\epsilon\}$	Matriz de deformações específicas do
\vec{n}_{ij}	Versor normal à aresta ij
\bar{h}	Altura efetiva da seção
$h_{ij,i}$	Lei de evolução do dano para a charneira de dano ij , no nó i
$w_{\xi,i}, w_{\eta,i}$	Pesos dos pontos e integração numérica
E_T	Energia total do sistema
E_s	Energia necessária para a formação de novas superfícies de fissuras
G^d	Taxa de liberação de energia do elemento danificado
G_f	Energia de fratura
G^ω	Taxa de liberação de energia de um elemento danificado
\bar{I}	Momento de inércia efetivo da seção
M_{cr}	Momento crítico
M_{cr}	Momento de fissuração
$M_{ij,i}^n$	Momento fletor normal a aresta ij , no nó i
M_p	Momento plástico
M_u	Momento último
N_1, N_2 e N_3	Funções de forma
R_0^{ij}	Primeira resistência à fissuração
R^ω	Resistência à fissuração
R^ω	Resistência à fissuração de um elemento danificado
U_f	Energia de deformação da estrutura
W_c	Energia de deformação complementar

W_{ext}	Trabalho devido as ações externas
c_{ij}, s_{ij}	Cosseno e o seno (com relação ao eixo X) do lado “ ij ”, respectivamente
d_{ij}	Dano da charneira inelástica “ ij ”
d_{ij}^p	Dano plástico da charneira de dano “ ij ”
d_{ij}^u	Dano último da charneira de dano “ ij ”
k_0^{ij}, c_{ij}	Parâmetros da lei de evolução das rotações plásticas
q_{ij}	Resistência adicional devido à armadura
x_{ij}, y_{ij}	Distância entre coordenadas dos nós i e j , em x e em y, respectivamente
γ_{xy}	Distorção dos elementos de chapa e casca
δ_f	Deslocamento máximo ao fim do ensaio de flexão de 3 pontos
$\varepsilon_1, \varepsilon_2$	Deformação específica nos elementos 1 e 2, respectivamente
ε^e	Deformação específica elástica
ε^p	Deformação específica plástica
$\varepsilon_x, \varepsilon_y$	Deformações específicas nas direções X e Y dos elementos de chapa e casca
ε^ω	Deformação específica de dano
$\bar{\sigma}$	Tensão efetiva
σ_1, σ_2	Tensão nos elementos 1 e 2, respectivamente
$\sigma_{médio}$	Tensão média da estrutura
σ_{max}	Tensão máxima em um ponto
$\frac{\partial}{\partial x}$	Derivada parcial de uma dada função, com relação a variável x
$\phi_{ij,i}$	Rotação normal a aresta ij , no nó i
ϕ_u	Rotação última
ϕ_u^p	Rotação plástica última
A	Área da seção transversal
a	Profundidade do entalhe das vigas

a, b	Comprimentos da fissura elíptica
A_d	Área de microdefeitos na seção transversal
d	Dano concentrado
D	Rigidez à flexão para elemento finito de placa
E	Módulo de Elasticidade Longitudinal ou de Young
EI	Rigidez à flexão
h, b	Dimensões da seção transversal da viga
I	Momento de inércia
i, j, k	Nós dos elementos finitos
L	Comprimento, comprimento da barra
l_1, l_2	Comprimento dos elementos de barra 1 e 2, respectivamente
L_1, L_2, L_3	Sistema de coordenadas paramétricas para triângulos
L_{ij}	Lado da aresta ij do elemento finito de placa
L_q	Tamanho dos elementos finitos de placa
N	Esforço normal atuante na barra
p	Carga distribuída na laje
P	Força, Força axial atuante
q	Parâmetro presente na lei de dano não linear proposta
t	Espessura
u_i, v_i	Deslocamentos no plano do nó i , para os elementos de chapa e casca
$W(x, y)$	Deslocamento transversal total
W_f	Trabalho das forças externas
w_i, w_j, w_k	Deslocamentos transversais ao plano médio do elemento de placa, laje e casca, dos nós i, j e k , respectivamente
$w_r(x, y)$	Deslocamento relativo
x, y, z	Coordenadas Cartesianas

X, Y, Z	Sistema de eixos cartesianos globais
X', Y', Z'	Sistema de eixos cartesianos locais
$Z(x,y)$	Deslocamento de corpo rígido
α	Constantes do campo de deslocamentos transversais do elemento DKT
Δ	Deslocamento, alongamento, deslocamento imposto
ε_{cr}	Deformação específica crítica
ε_u	Deformação específica última
$\theta_{x, i}, \theta_{y, i}$	Rotações no nó i , em torno dos eixos X e Y , respectivamente
σ_{cr}	Tensão crítica
ω	Dano contínuo
COD_{ij}	Abertura de fissuras da charneira inelástica “ ij ”
g	Aceleração da gravidade
l	Distância da linha neutra até o início da abertura da fissura
m	Massa do elemento
ε	Deformação específica total
ζ	Controle de incrementação do passo i
ν	Coefficiente de Poisson
ξ, η	Coordenadas paramétricas
σ	Tensão nominal, tensão de Cauchy

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	25
1.1 Justificativa	29
1.2 Objetivos.....	29
1.3 Metodologia.....	30
1.4 Organização do trabalho	31
2 REVISÃO DA LITERATURA.....	32
2.1 Breve histórico	32
2.2 Teoria das charneiras plásticas	36
2.3 Mecânica da fratura	40
2.4 Mecânica do dano	43
2.5 Localização de deformações	47
3 MODELO DE DANO CONCENTRADO PARA PLACAS.....	53
3.1 Unicidade de solução para o modelo de vigas.....	53
3.2 Discrete Kirchhoff Triangle (DKT)	56
3.3 Triângulo de Momento Fletor Constante.....	72
3.4 Implementação numérica	80
4 MODELO DE DANO CONCENTRADO PARA LAJES.....	85
4.1 Adaptações do Elemento de Placa	85
4.2 Leis de evolução do dano	86
4.3 Leis de evolução da plasticidade	87
4.4 Cálculo dos parâmetros do modelo.....	87
5 MODELO DE DANO CONCENTRADO PARA CASCAS.....	90
5.1 Elemento Finito de Chapa	90
5.2 Acoplamento entre o elemento CST e o elemento de lajes	94
5.3 Montagem das Matrizes no Sistema Global.....	95
6 PROGRAMA EXPERIMENTAL.....	98
6.1 Materiais.....	98
6.2 Moldagem.....	101
6.3 Equipamentos	106
6.4 Ensaios.....	109

6.5	Correlação de imagens digitais	114
6.6	Resultados Experimentais	114
7	RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	120
7.1	Análise de Placas de concreto reforçado com fibras de aço	120
7.2	Análise de Lajes	136
7.3	Análise de Cascas.....	148
8	CONCLUSÕES.....	154
	REFERÊNCIAS	157
	APÊNDICE A: CAMPO DE DESLOCAMENTOS.....	173
	APÊNDICE B: USO DO PROGRAMA ITOM.....	175
	ANEXO A: MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO CINEMÁTICA (DKT).....	179

1 INTRODUÇÃO

A análise estrutural visa compreender e descrever o comportamento de estruturas sob diferentes condições de carga. A correta descrição de cada problema parte do conhecimento das formulações diferenciais que os governam, a fim de ser possível um detalhamento do comportamento físico, através de modelos matemáticos. Estudos que envolvem modelos de placas e cascas delgadas têm sido desenvolvidos desde o século passado. Estes elementos desempenham um papel fundamental nas mais diversas áreas da engenharia, como a civil, naval e espacial. No entanto, devido à complexidade de algumas estruturas, essa descrição passa a ser inviável ou desconhecida. Desta forma, surge a necessidade de obter soluções aproximadas para os problemas, de modo que seja garantida a qualidade da solução. Um dos métodos numéricos mais utilizados é o método dos elementos finitos (MEF), que consiste em discretizar as estruturas em problemas menores, de mais fácil solução, chamados de elementos finitos.

Além disso, é necessário levar em consideração o comportamento não linear dos materiais, o qual é uma característica marcante, em específico no concreto e em metais. Segundo Lamaitre e Charboche (1990), problemas de não linearidade física ocorrem pela manifestação de processos irreversíveis na microestrutura dos materiais, como perda de coesão em planos de clivagem, mudanças de porosidade ou de fase, entre outros. Portanto, o estudo do comportamento não linear em estruturas é de extrema relevância para o campo da engenharia estrutural, pois podem ser potenciais causadores de mecanismos de colapso. Objetivando a solução destes problemas não lineares, diversos modelos matemáticos têm sido formulados, com destaque para a teoria da plasticidade, mecânica da fratura e a mecânica do dano contínuo.

A teoria da plasticidade nasce com a observação do comportamento não linear em metais, como o encruamento (ganho de resistência com o aumento das deformações) e as deformações permanentes. Esta teoria considera que os sólidos, atingida/ultrapassada sua tensão de escoamento, continuam a apresentar aumento nas deformações e que, se descarregados, existirão deformações permanentes, igual a deformação total menos a deformação elástica (em regime de pequenas deformações), também denominadas de residuais. Existe uma série de critérios de resistência máxima que podem ser adotados nas análises, com destaque para o critério da tensão normal máxima, o critério de Tresca, o de Mohr-Coulomb, o de Beltrami, o de von Mises e o de Drucker-Prager. A teoria da plasticidade permite a obtenção de importantes resultados na engenharia, em específico em problemas de colapso plástico. No entanto, esta teoria pode ser aplicada apenas para meio contínuos, condição que não ocorre

próximo ao instante de ruptura, em razão do surgimento de fissuras, e, portanto, pode não representar bem o comportamento de algumas estruturas.

A mecânica da fratura considera que todos os materiais possuem fissuras iniciais discretas. De acordo com Broek (1974), esta teoria visa determinar como as fissuras podem evoluir e interagir entre si, com o aumento do carregamento. Portanto, a mecânica da fratura está direcionada a analisar as condições de crescimento e instabilidade das fissuras. Para a análise de geometrias simples, com a propagação de fissuras discretas, esta teoria apresenta bons resultados, como o caso das aplicações em engenharia aeronáutica e naval. No entanto, para a análise de estruturas mais complexas, como as estruturas presentes nos diversos ramos da engenharia (civil, aeronáutica, naval), além da dificuldade em se definir o local da fissura inicial, a evolução de várias fissuras e a interação entre si demanda um alto custo computacional, além da necessidade de algoritmos de remalhamento complexos, se tornando inviável em aplicações práticas.

Mais recente, dentre as supracitadas teorias não lineares, a mecânica do dano contínuo foi apresentada inicialmente por Kachanov (1958) e posteriormente desenvolvida por Rabotnov (1969), surgindo da necessidade de modelar processos de ruptura lenta, denominado fluência. Dentro desta teoria não linear, propõe a incorporação de uma variável interna nas leis de comportamento denominada dano, responsável por mensurar o nível de deterioração da estrutura, surgindo o conceito de tensão efetiva (LEMAITRE; CHABOCHE, 1990). Tal consideração permite o desenvolvimento de problemas elásticos, plásticos e viscoplásticos de forma exitosa, para diversos mecanismos de deterioração. No entanto, de acordo com Flórez-López *et al.* (2015), apesar do considerável avanço, as formulações baseadas na mecânica do dano clássica podem apresentar problemas mal colocados, devido ao fenômeno da localização de deformações, e, portanto, possuem um número infinito de soluções (dependência de malha, em elementos finitos). De acordo com Peerlings *et al.*, 1996 e Borst, 2002, os modelos baseados na mecânica do dano contínuo frequentemente apresentam dependência de malha, pois as variáveis de dano são definidas localmente.

A mecânica do dano moderna então surge na busca por métodos que permitam soluções objetivas, adotando duas medidas principais: modificação nas leis de evolução do dano (abordagens não locais ou de dano gradiente), e a introdução de variáveis cinemáticas apropriadas, de modo a serem levados em consideração os efeitos de dano. Os modelos podem ser baseados em abordagens não locais (AHMED *et al.*, 2021, LENZ; MAHNKEN, 2023, NOGUEIRA *et al.*, 2024) ou pelo método do gradiente (NEGI *et al.*, 2022, WANG *et al.*, 2023,

XUE et al., 2024). Uma revisão mais detalhada da mecânica do dano moderna pode ser observada vide Comi e Perego (2001), Peerlings *et al.* (1996), Desmorat *et al.* (2007), Richard e Ragueneau (2013) e suas referências.

Além disso, outra teoria foi proposta no início do século XXI, com a consideração de rótulas suaves (*softening hinges*) em elementos finitos, a fim de considerar descontinuidades fortes. Para mais informações, vide Bazant (2003), Cocchetti e Maier (2003), Armero e Ehrlich (2006), Wu (2013) e suas referências.

Mais recentemente, alguns pesquisadores têm tratado o desenvolvimento de microfissuras e sua coalescência até se tornarem macrofissuras por meio da teoria do campo de fase (*phase-field theory*). Nesta abordagem, tais fenômenos físicos são quantificados por meio de uma variável de dano, respeitando-se os critérios energéticos da mecânica da fratura, escritos em uma forma variacional. Para mais informações, vide Francfort e Marigo (1998), Bourdin *et al.* (2008), Leao *et al.* (2021), Novelli *et al.* (2022), Li *et al.* (2023), Gonçalves *et al.* (2023), Caetano e Penna (2024), Ferreira *et al.* (2024), Shajan *et al.* (2024), Wang *et al.* (2024) Chen *et al.* (2024) e suas referências.

Na tentativa de modelar o comportamento de estruturas de maneira simplificada, a mecânica do dano concentrado (MDC) foi inicialmente formulada no início da década de 90, com o trabalho de Flórez-López (1993). A MDC aplica conceitos da mecânica da fratura e mecânica do dano em rótulas inelásticas, como as leis de evolução do dano, baseadas no critério de Griffith, o conceito de tensão efetiva e o uso da variável de dano. No entanto, a variável de dano na MDC difere-se da apresentada na mecânica do dano contínuo, pois refere-se a macrofissuração do material, enquanto na mecânica do dano contínuo, trata da de defeitos em mesoescala, dentro de um elemento de volume representativo (EVR). Além disso, a MDC não sofre problemas com dependência de malha, como observado em teorias anteriores (TOI; HASEGAWA, 2011). Uma das principais vantagens da aplicação desta formulação é não ser necessário alterar a geometria inicial do problema, pois as rótulas inelásticas propostas se localizam nas extremidades dos elementos e com comprimento zero.

A MDC foi desenvolvida como um método simplificado para análise de dano em pórticos. Inicialmente apresentada por Flórez-López (1993), foi formulada para estruturas de concreto armado sujeitas a ações sísmicas (CIPOLLINA *et al.*, 1995; PERDOMO *et al.*, 1999; TELES *et al.*, 2021, BOSSE *et al.*, 2024). Outros modelos foram criados com base na MDC. Álvares (1999) propôs uma generalização da MDC, em que o critério de transmissão de momentos fletores entre nós de um mesmo elemento é baseado no método da rigidez direta.

Perera *et al.* (2000) propuseram um elemento finito com base na MDC, que considera a fadiga. Kaewkulchai e Williamson (2004) desenvolveram análises de colapso progressivo de pórticos de concreto armado sujeitos a cargas de explosão. Araújo e Proença (2008) aplicaram o modelo da MDC para a análise de pórticos de concreto armado, considerando deformações residuais e ciclos de histerese. Alva e El Debs (2010) propuseram uma modificação do elemento finito de Álvares (1999), com a inclusão de um fator de penalização nas leis de evolução do dano, visando melhorar os resultados numéricos, em comparação a respostas experimentais. Faleiro *et al.* (2010) propuseram um elemento finito com base na formulação proposta por Flórez-López (1993) e por Cipollina *et al.* (1995), porém modificando a lei de evolução do dano e das deformações plásticas. Santoro e Kunnath (2013) propuseram um elemento finito de viga, com base nas formulações apresentadas por Perdomo *et al.* (1999), realizando modificações nas leis de evolução do dano e das deformações plásticas. A MDC foi desenvolvida e aplicada para diversos outros campos de análises como cargas impulsivas (WANG; YANG, 2009), pórticos metálicos (GUERRERO *et al.*, 2009; BAI *et al.*, 2016; BAI *et al.*, 2017; BAZÁN *et al.*, 2019; SILVA *et al.*, 2022; MONTILLA *et al.*, 2024), arcos de concreto armado (AMORIM *et al.*, 2013; BRITO *et al.*, 2020; CUNHA *et al.*, 2021; PEREIRA NETO *et al.*, 2022), arcos de concreto simples e de alvenaria (AMORIM *et al.*, 2014), arcos de concreto reforçado com fibras (OLIVEIRA *et al.*, 2023), vigas de concreto armado sujeitas a cargas de impacto (OLIVEIRA *et al.*, 2020; TELES *et al.*, 2020), para vigas reforçadas com fibras de vidro poliméricas (CUNHA *et al.*, 2021), pórticos reforçados com fibras de polímeros (BARRIOS; FLÓREZ-LÓPEZ, 2020) e estimativa de flecha de vigas (SOUZA *et al.*, 2023). A MDC foi posteriormente ampliada para meios contínuos bidimensionais (placas e chapas) por Amorim (2016). Em seguida, para elementos de chapa, Amorim *et al.* (2018), Oliveira (2020), Santos (2020), Picón *et al.* (2021), Teles *et al.* (2023) e Nardi e Leonel (2024) deram continuidade aos avanços nas pesquisas. Uma das grandes vantagens do uso da mecânica do dano concentrado tem sido a obtenção de resultados com objetividade de solução, com baixo custo computacional e com a não violação dos efeitos locais. Desta forma, a MDC tem se comprovado uma teoria que proporciona bons resultados para a análise não linear de estruturas, nas mais diversas aplicações, sem sofrer com o problema de localização de deformações e dependência de malha.

Diante do exposto, com a comprovação de bons resultados nas mais diversas aplicações e com trabalhos de relevância nacional e internacional utilizando a mecânica do dano concentrado, o presente trabalho busca contribuir no desenvolvimento e ampliação desta teoria.

1.1 Justificativa

A avaliação de placas e cascas dentro da análise estrutural ainda é um ponto importante e que necessita constante desenvolvimento, especialmente no que tange às análises não lineares. Os atuais modelos presentes na literatura podem levar a resultados com soluções limitadas, seja devido a problemas de dependência de malha, por problemas de convergência, altos custos computacionais para definição de posição da fissura ou algoritmos de remalhamento. Neste sentido, com base nos estudos preliminares desenvolvidos por Amorim (2016), o presente trabalho objetiva desenvolver novos e mais eficientes (menos custosos computacionalmente e que levem a soluções numéricas em concordância com resultados experimentais e numéricos) modelos não lineares para a análise de placas e cascas delgadas com base na MDC. A escolha da referida teoria parte da observação da qualidade das respostas em prévios modelos que a aplicaram para diferentes tipos de estrutura usando elementos de pórtico e bidimensionais.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo geral

Propor modelos de dano concentrado para problemas de placas e cascas de concreto reforçado com fibras de aço e concreto armado com objetividade de solução e independência de malha.

1.2.2 Objetivos específicos

Para atingir o objetivo geral da pesquisa, tem-se os seguintes objetivos específicos:

- Deduzir o elemento finito Discrete Kirchhoff Triangle (DKT) na notação de Powell (1969), para aplicação da teoria do dano concentrado;
- Deduzir o elemento finito *Constant Moment Triangle* (CMT) na notação de Powell (1969), para aplicação da teoria do dano concentrado;
- Desenvolver modelos não lineares para avaliação de placas para concreto reforçado com fibras de aço, com base nos elementos DKT e CMT;

- Executar campanha experimental em placas de concreto reforçado com fibras de aço para validações numéricas;
- Desenvolver modelo não linear de placas para concreto com armadura passiva (lajes), com base no elemento CMT;
- Deduzir o elemento finito *Constant Strain Triangle* (CST) na notação de Powell (1969) e acoplá-lo ao elemento CMT;
- Desenvolver modelo não linear de cascas plano de concreto armado.

1.3 Metodologia

A MDC tem sido largamente empregada em diferentes campos de aplicação, para a avaliação de problemas de estruturas reticuladas e de meios contínuos bidimensionais. Com o intuito de cumprir os objetivos deste trabalho e de realizar a expansão da MDC para aplicações de placas e cascas delgadas sujeitas a colapso flexão, o presente trabalho desenvolveu a adaptação de elementos finitos apresentados na literatura, especificamente o DKT, CMT e CST acoplado ao CMT, com base na notação de Powell (1969). Apesar de muitos trabalhos na literatura considerarem elementos de casca com algum nível de curvatura, nesta tese o acoplamento de dois elementos planos (CMT e CST) é considerado suficiente para a análise de placas. Isto é, presume-se a curvatura da casca é aproximada de forma adequada com diversos elementos finitos planos.

A partir das adaptações dos elementos finitos é possível propor modelos não lineares com base na MDC considerando diferentes variáveis inelásticas (dano ou rotações de dano, e rotações plásticas), de acordo com o problema avaliado. Note que os parâmetros dos modelos podem se relacionar com as propriedades físicas e geométricas das placas e cascas.

Todos os modelos não lineares desenvolvidos neste trabalho foram programados utilizando a linguagem Fortran que, por ser de baixo nível, apresenta alta eficiência no processamento dos cálculos. A visualização dos resultados foi feita com códigos Python.

Visando a validação dos supracitados modelos, uma série de ensaios experimentais em placas de concreto reforçado com fibras de aço, lajes e cascas de concreto armado presentes na literatura foram aplicados. Em específico para a avaliação dos modelos de placa, uma campanha experimental própria também é desenvolvida. Os modelos são avaliados de acordo com

diferentes resultados, em termos de gráficos de Força vs. Deslocamento, do padrão de fissuração dos ensaios (iniciação e propagação) e abertura de fissuras, além de comparar com resultados de outros modelos não lineares da literatura.

1.4 Organização do trabalho

O presente trabalho está organizado da forma: No capítulo 2 é apresentada uma revisão bibliográfica com um breve histórico de trabalhos que desenvolveram outros elementos finitos de placa. Além disso, neste capítulo é apresentada uma revisão do método das charneiras plásticas e a apresentação de conceitos importantes dentro das análises não lineares. O capítulo 3 é iniciado demonstrando a viabilidade, em termos de dependência de malha, para a aplicação da mecânica do dano concentrado a elementos sujeitos à flexão. São apresentadas as propostas de elementos finitos de placas de concreto reforçado com fibras, baseadas no elemento DKT e no elemento CMT, da formulação elástica à formulação de dano, e detalhes de sua implementação numérica. No capítulo 4 é apresentada a adaptação do modelo de lajes de concreto armado. Além disso, é apresentado o cálculo dos parâmetros do modelo, com base nas propriedades físicas e geométricas das lajes. O capítulo 5 é iniciado com a apresentação e dedução do elemento finito de chapa *Constant Strain Triangle* (CST). Posteriormente neste capítulo este elemento é superposto com o elemento de lajes, formando um elemento de casca plano, baseado na mecânica do dano concentrado. No capítulo 6 é apresentada a campanha experimental que foi desenvolvida no presente trabalho, referente à moldagem de placas de concreto reforçadas com fibras de aço, assim como elementos de viga e corpos de prova. Estes últimos têm como finalidade a caracterização do material, enquanto as vigas têm a finalidade do cálculo da energia de fratura. As placas serviram como exemplos para a validação do elemento finito proposto. O capítulo 6 detalha como os experimentos foram realizados, descrevendo os materiais, equipamentos e os métodos utilizados e os resultados experimentais obtidos. No capítulo 7 são apresentados os resultados obtidos por cada modelo de dano proposto, comparando os resultados numéricos aos experimentais. No capítulo 8 são apresentadas as principais conclusões do trabalho. O trabalho finaliza com as referências bibliográficas e dois apêndices: o primeiro contendo a dedução do campo de deslocamentos transversais do elemento finito DKT e segundo apresentando o programa computacional Itom (ITOM, 2018). Por fim, é apresentado um anexo com o detalhamento da matriz de transformação cinemática clássica do elemento DKT.

2 REVISÃO DA LITERATURA

Estudos que envolvem modelos de placas e cascas delgadas têm sido desenvolvidos desde o século passado. Estes elementos estruturais desempenham um papel fundamental nas mais diversas áreas da engenharia, como a civil, naval e espacial. As teorias clássicas propõem uma série de soluções analíticas para alguns casos particulares de estudo. Entretanto, devido à complexidade das formulações, os sistemas de equações resultantes são de difícil solução, sendo necessário o uso de métodos aproximados para solução, como o método dos elementos finitos.

2.1 Breve histórico

Pesquisas voltadas ao desenvolvimento de elementos finitos, com formulações simples e mais eficientes, para a análise de placas e cascas, têm aumentado nas últimas décadas (GAL; LEVY, 2006; CAI *et al.*, 2010). Desta forma, diversos trabalhos desenvolveram formulações próprias, com base nas teorias de Kirchhoff e de Reissner–Mindlin, para a análise de placas delgadas e delgadas e espessas, respectivamente.

Em analogia com a teoria de vigas à flexão, a teoria de Kirchhoff é equivalente à teoria de Euler-Bernoulli. Desta forma, pode-se estabelecer 3 hipóteses: 1^a - qualquer ponto na superfície média da placa se move apenas na direção transversal ao plano médio; 2^a - as deformações transversais são nulas; 3^a - uma linha reta e normal à superfície média da placa antes do carregamento e que corta o plano médio da placa permanece reta e normal ao plano tangente à superfície média do mesmo ponto após a aplicação do carregamento. Por consequência, a teoria de Reissner–Mindlin é análoga à teoria de Timoshenko para vigas, também estabelecendo 3 hipóteses principais: 1^a - Qualquer ponto na superfície média da placa se move apenas da direção do eixo Z; 2^a - a deformação transversal ao plano médio da placa é nula em qualquer ponto; 3^a - uma linha reta e normal à superfície média da placa antes do carregamento e que corta o plano médio da placa em um ponto não necessariamente permanece reta após a aplicação do carregamento. A diferença entre a segunda teoria e a primeira é que a segunda não vincula a rotação da reta vertical às derivadas do deslocamento vertical (VAZ, 2011).

O desenvolvimento de um elemento de placa triangular com 3 nós, baseado na teoria de Kirchhoff, que consiga representar de forma adequada elementos sujeitos a curvatura constante e momentos torçores, além de obter bons resultados para análises de flexão, foi de extrema dificuldade nas últimas décadas (COOK, 2007).

Morley (1971) propôs um elemento finito de placa triangular não conforme, cujos deslocamentos transversais variam de forma quadrática ao longo do elemento. Desta forma, é possível garantir que a curvatura e, portanto, os momentos fletores no elemento são constantes. No entanto, devido a sua simplicidade, há uma considerável perda de precisão nas respostas, necessitando de malhas mais refinadas. Posteriormente Allman e Morley (2000) propuseram uma nova formulação para o elemento finito de momento fletor constante. Em sua nova formulação, os momentos fletores foram admitidos como virtualmente constantes, a fim de melhorar o número de condição da matriz de rigidez e, portanto, melhorar a convergência de soluções não lineares.

Com o objetivo resolver o problema relatado a elementos de placa triangulares, Stricklin *et al.* (1969) apresentou a primeira formulação para o chamado *Discrete Kirchhoff Triangle* (DKT). Este elemento finito possui 3 nós, com 3 graus de liberdade por nó (deslocamento transversal e rotações em torno dos eixos X e Y). Posteriormente o elemento finito DKT teve sua formulação detalhada por Batoz *et al.* (1980). De acordo com estes autores, a energia de deformação devido ao cisalhamento é dispensada nas arestas, enquanto a hipótese de Kirchhoff é adotada de maneira discreta, ao longo das arestas do elemento, a fim de relacionar as rotações com o deslocamento transversal, o que faz o elemento convergir para a teoria de placas delgadas.

Hughes e Tezduyar (1981) desenvolveram um elemento finito quadrilateral para a análise de placas espessas, com base na teoria de Reissner–Mindlin. O elemento empregou funções de interpolação bilineares, com o intuito de sanar prévios problemas de singularidade na matriz de rigidez. No entanto, estes autores afirmam que a formulação é mais complicada que as anteriores, mas que poderia servir como base para o desenvolvimento de novas formulações.

Belytschko *et al.* (1984) propuseram um novo elemento finito triangular para a análise de placas espessas, baseado na teoria de Reissner–Mindlin. Na formulação, as rotações e deslocamentos transversais dos elementos eram definidos por funções lineares. Além disso, como principal vantagem, o elemento demandava apenas um ponto de quadratura para a integração numérica, e, portanto, demandava um menor custo computacional.

Com base em conceitos de plasticidade, Armero e Ehrlich (2006) desenvolveram elementos finitos triangular e quadrilateral de placa, para a análise de colapso plástico de placas com base na teoria de Reissner–Mindlin. Estes autores realizaram uma série de exemplos numéricos, a fim de verificar a performance dos elementos propostos. Além disso, estes autores fazem o uso de charneiras plásticas para contornar o problema de descontinuidades provocados devido ao fenômeno de localização de deformações. Desta forma, o trabalho desenvolvido por Armero e Ehrlich (2006) apresentou uma considerável contribuição para análise de placas espessas.

Thakkar e Pandey (2006) implementaram um modelo de dano contínuo isotrópico para placas de alumínio em um programa de análise não linear que considera o dano acoplado e desacoplado. Os autores realizaram a análise de uma série de exemplos numéricos, observando o comportamento das charneiras plásticas obtidas e confrontando com o esperado, disposto na literatura técnica.

Zhang *et al.* (2006) formularam um novo elemento finito para a análise de placas. Estes autores incluem em seu modelo critérios de cinemática, admitindo a hipótese de grandes deslocamentos, porém rotações moderadas.

Devido a boa qualidade dos resultados proporcionados com o elemento DKT, diversos trabalhos têm desenvolvido novas formulações ou formulações alternativas. Cai *et al.* (2011) formularam um novo elemento finito de placa triangular, com base no DKT, porém que engloba a análise de placas delgadas e espessas, sem sofrer com o problema de travamento ao cisalhamento. Além disso, para o caso de placas delgadas, no qual o efeito cisalhante é desprezável, a solução converge para a obtida através do DKT. De forma similar, Lucena Neto *et al.* (2017) definiram uma matriz de rigidez geométrica de forma explícita e consistente, para o elemento DKT. A nova formulação foi comparada com outras já existentes na literatura, obtendo resultados mais precisos para alguns casos de carregamento analisados.

Xu *et al.* (2013), com o objetivo de analisar a resposta elastoplástica de placas, formulou 2 novos elementos de placa, com 6 e 9 nós, baseados no método dos elementos finitos expandidos (XFEM). Para considerar tal comportamento elastoplástico, estes autores avaliaram as zonas de alto gradiente com enriquecimento, ou seja, regiões em que as respostas de deslocamento e rotações não são suaves, resultando nas chamadas charneiras plásticas.

Almeida *et al.* (2019) apresentaram uma nova formulação para um elemento finito triangular, baseado na teoria de Kirchhoff, que requer funções de aproximação com

continuidade C^1 . Além disso, estes autores adotam em sua formulação restrições híbridas e os respectivos multiplicadores de Lagrange. Desta forma, a abordagem proposta permite que sejam adotados graus de liberdade arbitrários, sem a necessidade de associar os respectivos graus com derivadas de segunda ou mais alta ordem.

Freitas e Tiago (2020) propuseram uma nova formulação para a análise de placas moderadamente espessas, com a presença de fissuras ou de aparelhos de apoio que possam causar concentração de tensões e a condição pós-reparo. Para tal, estes autores propõem novas definições para o fator de intensidade de tensão (FIT) e relações constitutivas para representar a região da fissura reparada.

A adaptação e aplicação de elementos finitos de placa pré-existentes para análises de estruturas de concreto armado teve esforços voltados na última década. Othman e Marzouk (2017) realizam a análise de lajes de concreto armado sujeitas a cargas de impacto, a partir do uso de martelos de queda. As análises visaram determinar as propriedades dinâmicas de lajes de concreto armado e verificar a condição de danificação das mesmas, a fim de calibrar um modelo dinâmico pré-existente. Sadiq *et al.* (2020) analisaram o dano em estruturas de alta importância, como plantas nucleares, devido ao impacto de aeronaves (aviões comerciais e militares). Estes autores realizam a modelagem numérica de barreiras de concreto armado com e sem a presença de placas metálicas de reforço, para verificar a influência destas na resistência da estrutura. Oñate *et al.* (2022) realizaram a análise de barreiras de concreto armado, utilizando elementos finitos e elementos discretos, para avaliar a resposta de estruturas de placa sujeitas a grandes cargas de impacto oriundas da ação ondas, como o caso de estruturas de barragens.

Além dos trabalhos voltados à análise de elementos de placa, diversos outros trabalhos desenvolveram elementos finitos de casca. As duas principais abordagens para a análise não linear de cascas finas consistem no desenvolvimento modelos utilizando uma degeneração de elementos tridimensionais baseados na mecânica do contínuo; e na superposição de efeitos entre elementos de placa e elementos de membrana, criando elementos de casca plana (GAL; LEVY, 2006). Para a primeira abordagem, a principal motivação é o desenvolvimento de um elemento finito tridimensional, evitando as dificuldades das formulações completas associadas à teoria de placas e cascas finas. Para a segunda formulação, mesmo que seja necessário um maior número de elementos finitos para representação da superfície, o custo computacional é inferior. Para uma revisão detalhada de elementos de casca, sejam tridimensionais degenerados, sejam planos, consultar Gal e Levy (2006) e suas referências.

2.2 Teoria das charneiras plásticas

A teoria das charneiras plásticas teve seus primeiros conceitos elaborados no século XIX, tendo Bach (1891) como seu pioneiro, porém com aplicabilidade reduzida. Por sua vez, Ingerslev (1923) deu continuidade à teoria, formulando critérios para a ruptura de lajes apoiadas e engastadas, admitindo a hipótese de escoamento da armadura. No entanto, sua formulação não abrangia todos os casos possíveis de análise, devido a não consideração das forças cortantes ao longo das linhas de ruptura. Anos depois, Johansen (1943) realizou um desenvolvimento por completo da teoria, incluindo as forças cortantes, apresentando-a de maneira formal. A teoria teve novos desenvolvimentos ao longo das décadas posteriores, com destaque para as contribuições de Jones e Wood (1967), na Inglaterra, e de Chamecki (1948) e van Langendonck (1970), no Brasil.

Para a formulação da teoria das charneiras plásticas, Chamecki (1948) afirma que três hipóteses principais devem ser atendidas, sendo elas:

1. As linhas de rupturas devem ser consideradas retas;
2. A placa se rompe, limitada pelas charneiras plásticas e suas demais bordas, e suas partes permanecem planas;
3. Ao longo da charneira plástica, o momento fletor atuante (distribuído por unidade de comprimento) é considerado constante e igual ao momento fletor máximo resistente da placa.

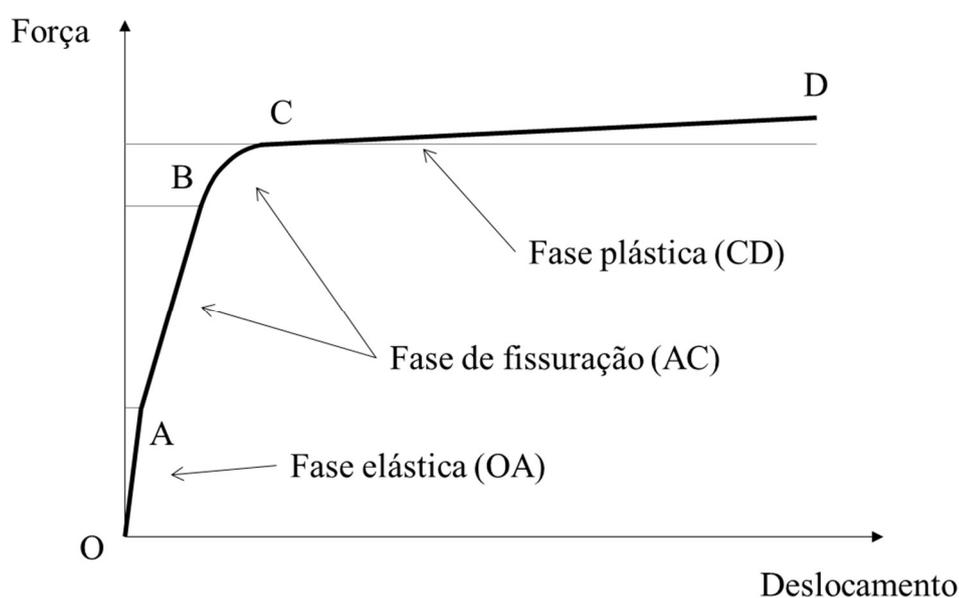
Além disso, os conceitos e formulações desenvolvidos para a teoria das charneiras plásticas são baseados na teoria da plasticidade e na análise limite, em específico com a aplicação do teorema do limite superior a placas. De acordo com Darwin, Dolan e Nilson (2016), este teorema afirma que, para um pequeno deslocamento imposto à laje, o trabalho interno provocado por estes momentos é igual ao trabalho externo provocado pelo carregamento referente ao pequeno deslocamento imposto. Este teorema é válido presumindo a hipótese que o momento fletor atuante ao longo de toda charneira plástica é constante e igual ao momento máximo da estrutura e que as condições de contorno da placa são atendidas.

A consequência direta da aplicação do teorema do limite superior na análise de placas é que, para realizar o cálculo do equilíbrio entre o trabalho interno e o trabalho externo das forças, é necessário conhecer o comportamento da charneira plástica. Desta forma, esta teoria tem

aplicação reduzida a casos mais simples, como lajes usuais de edifícios e de pontes, cujas fissurações possuem padrões conhecidos. Para o caso de estruturas mais complexas, cuja posição das charneiras não é conhecida, a aplicação de tal teoria exigiria muito esforço para a visualização dos possíveis mecanismos de falha, inviabilizando seu uso.

A compreensão de como uma laje se comporta à medida que é carregada é primordial para compreender o processo de ruptura da mesma. De acordo com Pinheiro (1988), uma laje apresenta três diferentes fases de comportamento: a fase elástica, a fase de fissuração e a fase plástica, como mostrado na Figura 2.1.

Figura 2.1: Comportamento de uma laje.



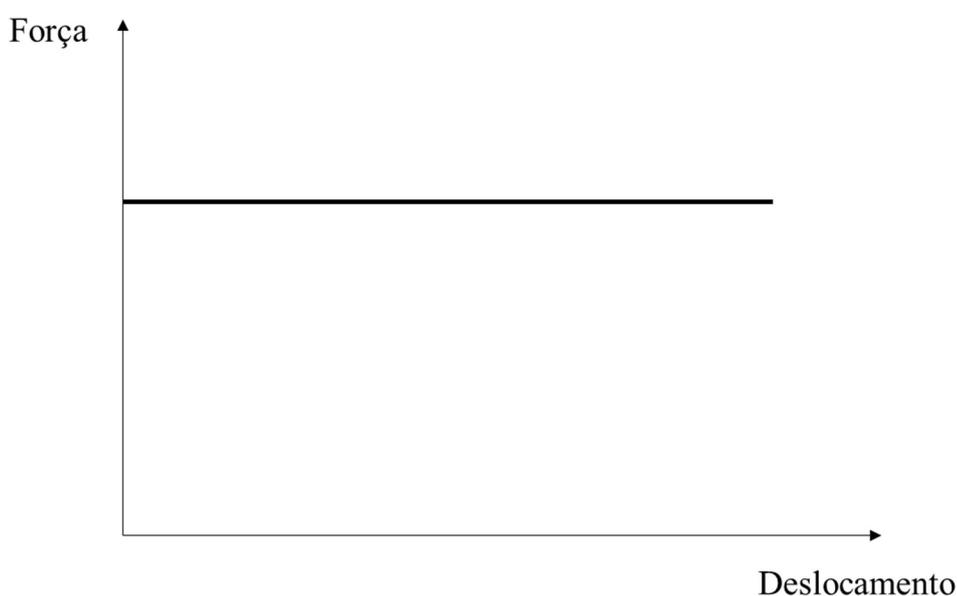
Fonte: Adaptado de Pinheiro (1988).

Para pequenos níveis de carregamento a laje permanece na fase elástica (trecho OA), na qual o concreto resiste aos esforços atuantes, e que se descarregada, não haverá deformações residuais. À medida que o carregamento é acrescido, é atingida a carga de fissuração do concreto (ponto A), a partir deste instante o concreto começa a apresentar fissuras (trecho AB). As regiões que não apresentam fissuras passam a ter esforços internos aumentados, levando a uma propagação das fissuras na laje. Com o aumento da carga e a fissuração do concreto, o aço da armadura começa a resistir em maior parcela aos esforços de tração gerados internamente, aumentando o deslocamento mais rapidamente (trecho BC), até que o aço escoe. Por fim, quando as seções mais carregadas atingem o escoamento do aço, é atingida a fase plástica, na qual o deslocamento aumenta, com pouco acréscimo de carga (trecho CD). Quando a laje

alcança o trecho CD, as fissuras se propagam ao longo de toda a laje, sendo considerado que a laje colapsou para aquele nível de carga.

Como a teoria das charneiras plásticas possui suas principais bases na teoria da plasticidade, em específico no teorema do limite superior, a teoria admite algumas hipóteses referentes as fases de resistência das placas. É admitido que para cargas inferiores a carga de colapso a estrutura não se desloca, trabalhando como um corpo rígido, e, ao atingir a carga de ruptura, a placa imediatamente colapsa. Assim sendo, para lajes de concreto armado, o comportamento admitido é diferente do real (Figura 2.1), passando a se comportar como um material rígido-plástico (Figura 2.2).

Figura 2.2: Comportamento rígido-elástico de um material.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Duas são as principais formas de aplicação da teoria das charneiras plásticas: através do processo de equilíbrio Newtoniano e do processo de energia (equilíbrio Lagrangeano). Para o primeiro processo, conhecida a configuração das charneiras, é admitido que após a ruptura todas as partes da laje permanecem em equilíbrio. Desta forma, calcula-se as cargas nodais e em seguida a carga de ruptura (se o momento último for conhecido) ou o momento último (se a carga última for conhecida). O segundo processo é o mais usual, cuja base parte do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV). Conhecida a configuração das charneiras, cada parte da laje deve ser girada em torno de seu eixo de rotação, em um deslocamento virtual. A soma dos trabalhos virtuais produzidos pelos esforços internos ao longo de toda a laje deve ser igual à soma dos trabalhos externos, produzido pelas cargas aplicadas. Para uma revisão mais detalhada dos

processos de cálculo através do método das charneiras plásticas, ver Johansen (1943), Chamecki (1948), Jones e Wood (1967), Pinheiro (1988), van Langendonck (1970) ou Darwin, Dolan e Nilson (2016).

Apesar de suas hipóteses e limitações, diversos trabalhos teóricos-experimentais se utilizaram da mesma para as mais diversas análises. Kowal e Sawczuk (1976) aplicaram a teoria das charneiras plásticas em conjunto com formulações de confiabilidade estrutural, a fim de determinar o nível de segurança de dimensionamento de lajes de concreto armado.

Bastos (1977) aplicou a teoria das charneiras plásticas para a análise de lajes, comparando os resultados teóricos a casos experimentais. Este autor considerou a influência da redução gradativa da armadura de flexão e dos efeitos de membrana, mesmo para casos em que não houvesse nenhuma restrição lateral na placa. Bastos (1977) observou que as cargas de ruína experimental foram superiores às calculadas.

Giongo (1982) avaliou a qualidade da teoria das charneiras plásticas para a análise de tabuleiros de pontes. Para isto, este autor moldou modelos de tabuleiros reduzidos com microconcreto e aplicou um carregamento equivalente ao veículo tipo segundo a norma vigente. Giongo (1982) observou que as cargas de ruína calculadas pelo método das charneiras plásticas foram ligeiramente inferiores às obtidas experimentalmente. De forma similar, Pinheiro (1988) desenvolveu uma extensa análise de lajes de concreto armado de edifícios, apoiadas e engastadas, considerando ortotropia. Este autor comparou o dimensionamento utilizando um método elástico e o método das charneiras plásticas, notando que para este último, havia uma economia no dimensionamento das lajes.

Diversos são os casos em que placas precisam ser apoiadas no solo. Baumann e Weisgerber (1983) desenvolveram formulações analíticas para o cálculo da carga de ruína de lajes apoiadas no solo, sujeitas a cargas distribuídas e cargas concentradas em diversas partes da laje, além da consideração da rigidez do solo.

Com o objetivo de determinar o comportamento de lajes de concreto armado reforçadas com fibras poliméricas, Feldfogel e Rabinovitch (2019) realizam análises numéricas objetivando verificar a capacidade resistente de lajes nesta situação. Para isto, foram consideradas as hipóteses estabelecidas por Johansen (1943), para determinar as regiões nas quais ocorreriam as charneiras. Foi observado que o padrão de separação do reforço e das novas charneiras das lajes reforçadas seguiam um caminho irregular, fato observado nos gráficos de

força vs. deslocamento, devido à presença de *snap-backs*. Estes autores afirmam que os resultados estão qualitativamente de acordo com análises experimentais presentes na literatura.

2.3 Mecânica da fratura

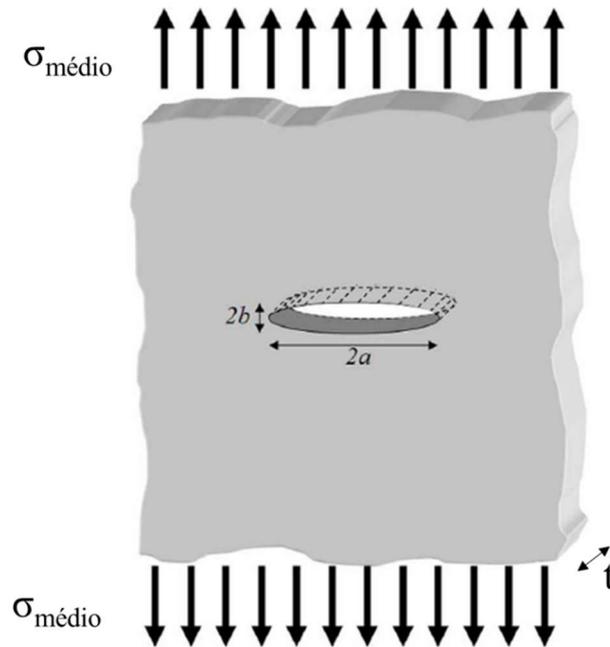
A análise não linear de estruturas tem sido realizada com a aplicação dos mais diversos modelos matemáticos ao longo das últimas décadas, com destaque para a teoria da plasticidade e mecânica do dano. Entretanto, em todas estas teorias ocorre a limitação da não modificação do contorno da estrutura ao longo da análise e, portanto, impossibilitando uma devida análise admitindo propagação de fissuras. Como alternativa para realizar este tipo de avaliação surge a mecânica da fratura, além de possibilitar determinar as condições de propagação das mesmas, nos mais diferentes meios (elásticos, elastoplásticos ou quase frágeis) (FLÓREZ-LÓPEZ *et al.*, 2015).

Por muito tempo o critério de falha adotado para a análise estrutural era baseado no equilíbrio de forças e com a análise do Fator de Concentração de Tensão (FCT). Por definição, o FCT é dado pela razão entre a tensão máxima no ponto analisado (σ_{max}) e a tensão média da estrutura ($\sigma_{médio}$):

$$FCT = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{médio}} \quad (2.1)$$

Entretanto, o conceito do FCT é ineficiente para a análise de aberturas estreitas, como o caso de fissuras, principal objeto de análise na mecânica da fratura. A ineficiência do uso do FCT pode ser observada pelo exemplo clássico da chapa infinita com um furo. Admita uma chapa infinita de espessura constante (t), com um furo em seu centro em formato elíptico, com diâmetros menor e maior iguais a $2a$ e $2b$, respectivamente, e submetida a um carregamento constante de intensidade $\sigma_{médio}$ (Figura 2.3). De acordo com Kirsch (1898) e Inglis (1913), para a análise deste tipo de problema, o FCT pode ser calculado de acordo com a equação (2.2).

Figura 2.3: Chapa infinita com furo elíptico.



Fonte: Adaptado de Flórez-López, Marante e Picón (2015).

$$FCT = 1 + 2 \frac{a}{b} \quad (2.2)$$

Desta forma, ao ser reduzida a espessura do furo ($b \rightarrow 0$), este se torna uma fissura e o FCT tende ao infinito e, por consequência direta de sua definição, a tensão máxima no ponto tende a infinito (equação (2.1)), independentemente do valor de tensão média aplicada. Este fato não condiz com a realidade, pois para esta hipótese qualquer estrutura que apresentasse a presença de uma fissura iria ao colapso, para qualquer nível de carregamento não nulo. Esta análise permite concluir que o uso das tensões como critério de falha não é eficiente e que não é possível o utilizar como critério para a propagação de fissuras (FLÓREZ-LÓPEZ *et al.*, 2015).

Devido a sua ineficiência para as referidas análises, Griffith (1921, 1924), através de uma série de ensaios com placas de vidro e com base nos resultados de Inglis (1913), propõe quantificar o processo de fratura com o uso de critérios de energia. Os critérios propostos por Griffith em seus trabalhos são baseados por um balanço de energia, em função do comprimento da fissura ($2a$), a partir da aplicação da termodinâmica dos processos irreversíveis. Os trabalhos de Griffith deram início ao que hoje é chamado de mecânica da fratura.

Para exemplificação do critério proposto por Griffith, considere um problema mecânico no qual a energia total do sistema (E_T) pode ser descrita pela equação (2.3):

$$E_T = U - W_{ext} + E_s \quad (2.3)$$

em que U é a energia de deformação da estrutura, W_{ext} é o trabalho devido às forças externas e E_s é a energia necessária para a formação de novas superfícies de fissuras.

Por definição da termodinâmica, a variação da energia total de um sistema é nula. Desta forma, o balanço de energia de Griffith estabelece que:

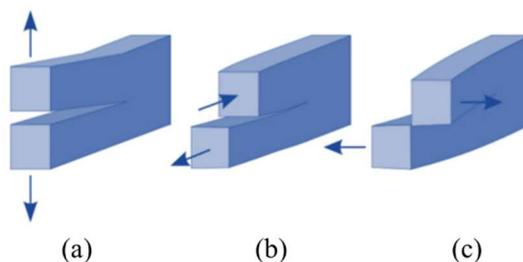
$$\frac{\partial E_T}{\partial a} = 0 \Rightarrow -\frac{\partial(U - W_{ext})}{\partial a} = \frac{\partial E_s}{\partial a} \quad (2.4)$$

sendo $\partial E_s/\partial a$ denominada de resistência à fissuração (R) e o termo $-\partial(U - W_{ext})/\partial a$ denominado de força condutora da fissura, do dano ou de taxa de liberação de energia (G).

Desta forma, é possível estabelecer um novo critério para a propagação de fissuras, ocorrendo apenas quando $G = R$. Por definição, a resistência à fissuração (R) pode ser calculada com base em resultados experimentais; enquanto a taxa de liberação de energia (G) pode ser calculada através de análises estruturais. Portanto, enquanto G for inferior a R , não ocorre a propagação de fissuras.

O critério proposto por Griffith apresenta boa eficiência, no entanto para casos de grandes problemas e múltiplas fissuras, este critério pode ser desafiador devido ao aumento da dificuldade para o cálculo de G . Na mecânica da fratura, os processos que envolvam o desenvolvimento de fissuras podem ser caracterizados por 3 diferentes modos e por suas combinações. O modo I corresponde a abertura de fissuras no plano (Figura 2.4(a)), o modo II refere-se ao cisalhamento/escorregamento no plano (Figura 2.4(b)) e o modo III corresponde ao cisalhamento/escorregamento fora do plano ou rasgamento (Figura 2.4(c)). Cada modo de abertura de fissura está relacionado a um valor de G , tornando-o de cálculo mais complexo.

Figura 2.4: Modos de propagação de fissuras.



Fonte: Adaptado de Amorim (2016)

Em vista desta dificuldade, Irwin (1957) propôs um critério com base no Fator de Intensidade de Tensão (FIT), na tentativa de substituir o uso do FCT. Neste critério, é possível determinar de forma precisa a intensidade das tensões na ponta das fissuras. Além disso, nesta abordagem, é possível definir valores de FIT para cada modo de abertura de fissuras e determinar o valor da taxa de liberação de energia para o caso de estado plano de tensões (equação (2.5)) e estado plano de deformações (equação (2.6)) (LAMAITRE; CHARBOCHE, 1990):

$$G = \frac{1}{E} \left(K_I^2 + K_{II}^2 + \frac{K_{III}^2}{1 + \nu} \right) \quad (2.5)$$

$$G = \frac{(1 - \nu)^2}{E} \left(K_I^2 + K_{II}^2 + \frac{K_{III}^2}{1 - \nu} \right) \quad (2.6)$$

sendo ν o coeficiente de Poisson e K_I , K_{II} e K_{III} os valores de FIT para os modos de abertura de fissura I, II e III, respectivamente.

Amorim (2016), para o problema fundamental de Griffith (com rótulas de dano apenas modo I), relaciona o valor de FIT à taxa de liberação de energia, obtendo a condição de instabilidade do problema, em função da tensão crítica e do comprimento da fissura. Ressalta-se que os FIT também podem ser utilizados para prever a direção de propagação da fissura.

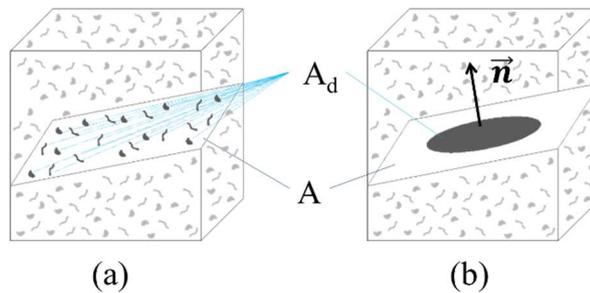
2.4 Mecânica do dano

Uma das principais dificuldades presentes na mecânica da fratura é a necessidade da existência de uma fissura inicial no problema para realizar as análises. Em problemas de grandes dimensões, como problemas reais de engenharia, a definição da fissura inicial é de grande dificuldade. Outro problema refere-se à degradação da estrutura, pois esta teoria a leva em consideração em escala macroestrutural, com as modificações das condições de contorno, porém não leva em conta a extensiva degradação microestrutural, que ocorre antes da propagação das fissuras.

Como alternativa para resolver este problema, Lemaitre e Chaboche (1990), com base na termodinâmica dos processos irreversíveis, propuseram a mecânica do dano contínuo. Esta teoria tem como base a criação de uma variável interna do problema denominada “dano” (ω),

que quantifica a densidade de microdefeitos, como microfissuras ou microvazios. A variável de dano tem como objetivo descrever a evolução dos microdefeitos provocados pela ação dos carregamentos. Os microdefeitos dos problemas são pequenos demais para serem considerados fissuras (análises de macroescala), porém são grandes demais para serem negligenciados dentro da análise de microescala, devendo-se levá-los em consideração (FLÓREZ-LÓPEZ *et al.*, 2015). Considere um elemento de volume representativo (EVR) (Figura 2.5 (a)), o qual é uma porção do material representado em macroescala. Admitindo uma seção transversal qualquer (\vec{n}) do EVR, que possui uma área de seção transversal (A) e uma área de microdefeitos (A_d). A perda de resistência mecânica do material pode ser definida através do dano local $\omega_{\vec{n}}$ na seção \vec{n} , medido conforme a Figura 2.5 (b):

Figura 2.5: Elemento de volume representativo (EVR).



Fonte: Adaptado de Amorim (2016).

$$\omega_{\vec{n}} = \frac{A_d}{A} \quad (2.7)$$

Com base na equação (2.7) é possível inferir sobre os valores limites para $\omega_{\vec{n}}$, iguais a 0 e 1. Na condição em que não há qualquer área de microdefeitos, ou seja, o material está íntegro, o dano é zero; enquanto para a condição completamente danificada, o dano é igual a 1 e o EVR é rompido em duas partes. Note que, ao assumir a hipótese de dano isotrópico, a variável tensorial $\omega_{\vec{n}}$ pode ser definida como uma variável escalar ω , para qualquer plano \vec{n} . Esta hipótese é adotada para os próximos procedimentos.

Outro importante conceito aplicado a mecânica do dano contínuo refere-se à tensão efetiva, que é a tensão que realmente atua na seção transversal íntegra do corpo. Para tal, considere o caso de um elemento danificado, tracionado por uma carga uniaxial P , conforme a Figura 2.6, seguindo a hipótese de pequenas deformações, a tensão efetiva é dada por:

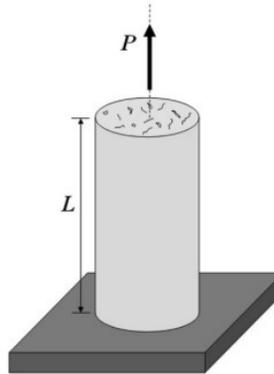
$$\bar{\sigma} = \frac{P}{A - A_d} \quad (2.8)$$

Substituindo a definição de área de microdefeitos (equação (2.7)) em (2.8), a tensão efetiva pode ser reescrita em função da tensão nominal:

$$\bar{\sigma} = \frac{P}{A - \omega A} = \frac{P}{A(1 - \omega)} = \frac{\sigma}{(1 - \omega)} \quad (2.9)$$

Vale notar que, para o caso do dano zero (seção íntegra), a tensão efetiva é igual a tensão nominal, enquanto para o dano igual a 1, a tensão efetiva tende ao infinito.

Figura 2.6: Elemento danificado sujeito a carga uniaxial.



Fonte: Adaptado de Flórez-López *et al.* (2015).

Considerando as observações de tensões efetivas, Lemaitre e Chaboche (1990) propuseram a hipótese de equivalência de deformações, que determina que o comportamento de deformação apresentado pelo material é afetado apenas por danos na forma de tensão efetiva. Desta forma, para um material que apresente um dano ω , a lei de elasticidade pode ser reescrita:

$$\bar{\sigma} = E\varepsilon = \frac{\sigma}{(1 - \omega)} \Rightarrow \sigma = (1 - \omega)E\varepsilon^e = (1 - \omega)E\varepsilon \quad (2.10)$$

em que E e ε são o módulo de elasticidade longitudinal do material e a deformação específica, respectivamente.

Com base na equação (2.10), note que a hipótese de equivalência em deformações penaliza o tensor constitutivo do material. Em termos de flexibilidade, a equação pode ser reescrita no formato:

$$\varepsilon = \frac{1}{(1 - \omega)E} \sigma \quad (2.11)$$

A equação (2.11) pode ser organizada de modo a separar os termos relativos à deformação elástica (ε^e) e a deformação de dano do material (ε^ω):

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{\omega}{(1 - \omega)E} \sigma \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^\omega \quad (2.12)$$

Além disso, é possível considerar a equação (2.10) para o caso de materiais elastoplásticos, que possuam deformações plásticas ou permanentes (ε^p):

$$\bar{\sigma} = E(\varepsilon - \varepsilon^p) \Rightarrow \sigma = (1 - \omega)E(\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (2.13)$$

De forma análoga, a equação pode ser reescrita em termos de flexibilidade:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{\omega}{(1 - \omega)E} \sigma + \varepsilon^p \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^\omega + \varepsilon^p \quad (2.14)$$

É possível observar que, se não for considerado um material elastoplástico ($\varepsilon^p = 0$) e se o valor de dano for igual a 0, a equação (2.14) retorna para a lei de Hooke elástica.

Além disso, considere o critério de balanço de energia generalizado de Griffith, aplicado à mecânica do contínuo (MARIGO, 1985):

$$G^\omega - R^\omega \leq 0 \quad (2.15)$$

onde G^ω e R^ω são a taxa de liberação de energia e a resistência à fissuração de um elemento danificado, respectivamente (FLÓREZ-LÓPEZ *et al.*, 2015). A taxa de liberação de energia pode ser escrita da forma:

$$G^\omega = -\frac{\partial U}{\partial \omega} = \frac{\partial W_c}{\partial \omega} \quad (2.16)$$

sendo U a energia de deformação e W_c a energia complementar, descritas pelas equações (2.17) e (2.18), respectivamente.

$$U = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon = \frac{1}{2} (1 - \omega) E \varepsilon^2 \quad (2.17)$$

$$W_c = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{(1 - \omega) E} \quad (2.18)$$

Substituindo (2.17) e (2.18) em (2.16), a taxa de liberação de energia pode ser escrita em termos das propriedades do elemento e de seu dano, em termos de rigidez ou flexibilidade:

$$G^\omega = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{(1 - \omega) E} \quad (2.19)$$

Vale ressaltar que a taxa de liberação de energia aqui descrita (G^ω) pode possuir diferentes nomenclaturas, de acordo com o material estudado.

A mecânica do dano contínuo trouxe uma grande evolução para as análises não lineares, com a criação dos conceitos de tensão efetiva e da hipótese de equivalência em deformações. No entanto, esta teoria ainda apresenta limitações de análises. A principal limitação desta teoria é o problema de dependência de malha, devido ao fenômeno de localização de deformações, que será descrito na seção 2.5.

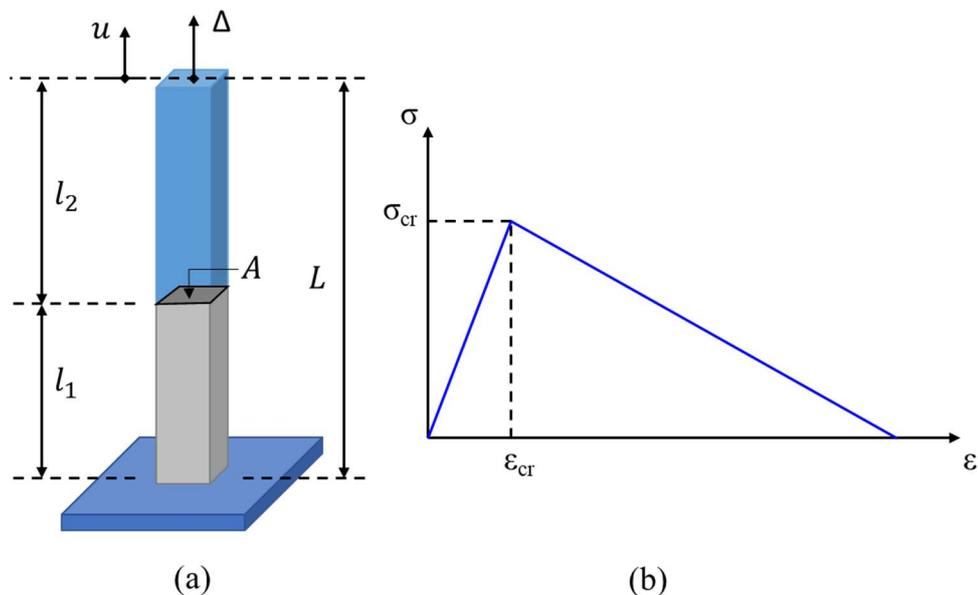
2.5 Localização de deformações

O problema da localização de deformações pode ser observado de um ponto de vista matemático ou físico. Para o primeiro, consiste na perda de elipticidade das equações diferenciais que governam o problema (RUDNICKI; RICE, 1975); para o segundo, se refere ao surgimento de faixas de deformação estreitas, denominadas de bandas de localização. A localização de deformações pode ocorrer em quaisquer tipos de estruturas e materiais, desde meios dúcteis, frágeis ou meios porosos (HOBBS *et al.*, 1990; MARANTE *et al.*, 2007; RICE, 1976). De acordo com Flórez-López *et al.* (2015), as bandas de localização são definidas como faixas estreitas, as quais concentram as deformações totais do elemento, gerando descontinuidade na taxa de deformações (efeitos inelásticos), acelerando a danificação do elemento, enquanto o restante do sólido tende a se descarregar elasticamente.

A busca por compreender matematicamente o que ocorre nos limites da banda de localização é de extrema importância para a busca de um método que possa contornar este problema. O estudo apresentado por Rudnicki e Rice (1975) permitiu descrever o comportamento material, assinalando a posição e direção da banda de localização, e matematico, observando a perda da elipticidade das equações que governam o problema. O modelo proposto por estes autores tem sido continuamente melhorado (STÖREN; RICE, 1975; ZHANG *et al.*, 2003; HASHIGUCHI; PROTASOV, 2004; MARANTE; FLÓREZ-LÓPEZ, 2004). Este modelo tem sido aplicado para diversas áreas do conhecimento, como na engenharia geotécnica, com a extensão para análises de meios porosos (BENALLAL; COMI, 2002, 2003) e para materiais dúcteis (BORDIGNON *et al.*, 2015).

A dependência de malha pode ser observada em um exemplo acadêmico apresentado por Flórez-López *et al.* (2015) e Amorim *et al.* (2018). Estes autores apresentam o problema da localização de deformações, através da solução de um exemplo com a aplicação da mecânica do contínuo unidimensional. Considere o problema de uma barra tracionada (Figura 2.7(a)), engastada em uma extremidade e livre na outra, sujeita a um deslocamento imposto (Δ), com área de seção transversal (A), dividida em dois elementos (elemento 1 e elemento 2) de comprimentos l_1 e l_2 , respectivamente.

Figura 2.7: (a) Barra tracionada, sujeita a deslocamento imposto e (b) curva tensão-deformação do modelo de dano.



Fonte: Adaptado de Amorim *et al.* (2018).

Para o problema da barra, a compatibilidade cinemática pode ser descrita de acordo com a equação (2.20):

$$\varepsilon_1 l_1 + \varepsilon_2 l_2 = \Delta \quad (2.20)$$

onde ε_1 e ε_2 são as deformações específicas dos elementos 1 e 2, respectivamente.

As tensões nos elementos para o problema avaliado são dadas por:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{N}{A} \quad (2.21)$$

sendo σ_1 e σ_2 as tensões normais nos elementos 1 e 2, respectivamente e N o esforço normal atuante na barra, devido ao deslocamento imposto.

Além disso, admita a equação (2.10) como a lei de elasticidade do problema, levando em consideração as tensões efetivas, e que a lei de evolução do dano (h) é dada pela equação (2.22):

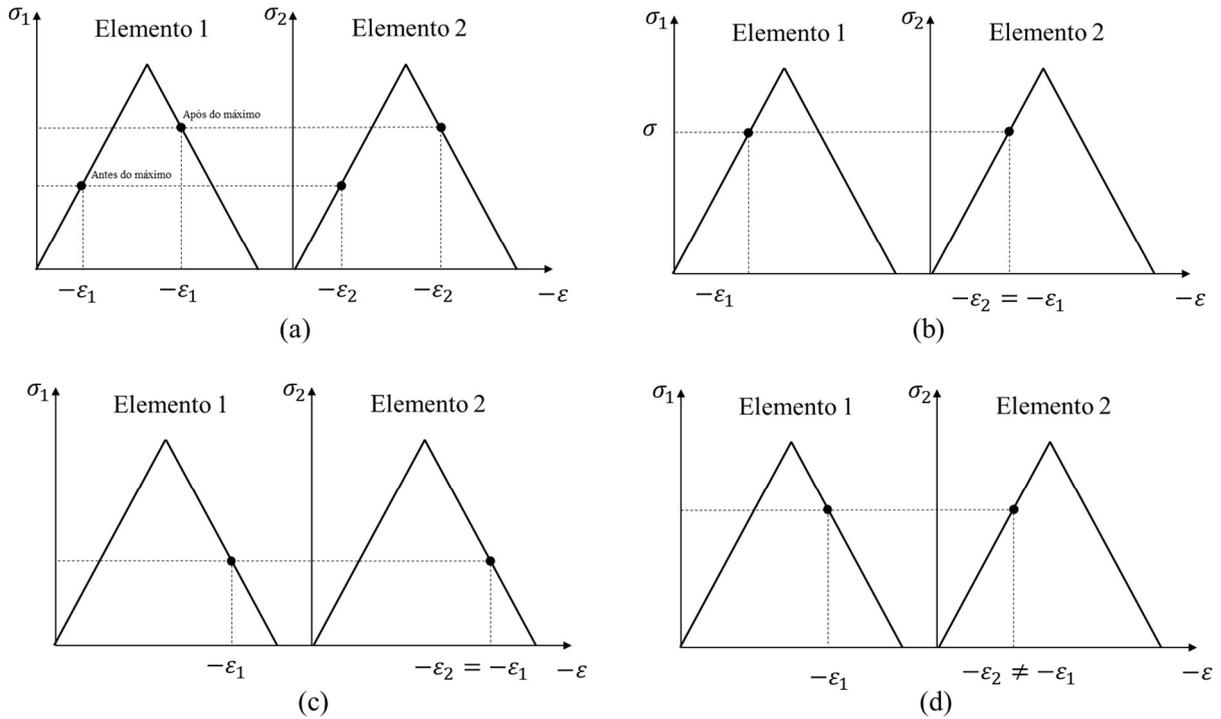
$$h = G^\omega - R^\omega \leq 0 \Rightarrow h = |\varepsilon| - \frac{\varepsilon_{cr} \varepsilon_u}{\varepsilon_u + \omega(\varepsilon_{cr} - \varepsilon_u)} \leq 0 \quad (2.22)$$

em que ε_u e ε_{cr} são a deformação específica última e no instante do início do dano (tensão crítica) (Figura 2.7(b)), respectivamente.

Com base nas equações (2.20) a (2.22) é possível obter a resposta de ambos os elementos, ao longo do incremento de deslocamento, em especial as curvas de Tensão vs. Deformação específica, como apresentado na Figura 2.8(a), em que a linha horizontal indica o equilíbrio, com tensão igual em ambos os elementos. No trecho inicial da curva, antes da carga máxima, ao serem realizados incrementos de deslocamentos haverá apenas uma solução para cada elemento, que satisfazem as equações governantes do problema, como mostrado na Figura 2.8(b). Após a carga máxima resistente da estrutura qualquer deslocamento fará com que a tensão em ambos os elementos seja reduzida, pois a estrutura inicia sua fase de amolecimento. Além disso, para esta situação, é possível observar que surgem duas soluções possíveis para o problema, que satisfazem as equações que governam o problema. Na primeira solução possível a deformação específica em ambos os elementos é igual, sendo denominada de solução homogênea (Figura 2.8(c)). A segunda solução possível consiste no aumento considerável da deformação específica no elemento 1 (concentração de deformação específica e dano),

enquanto o elemento 2 tende a ser descarregado elasticamente, sendo denominada de solução localizada (Figura 2.8(d)).

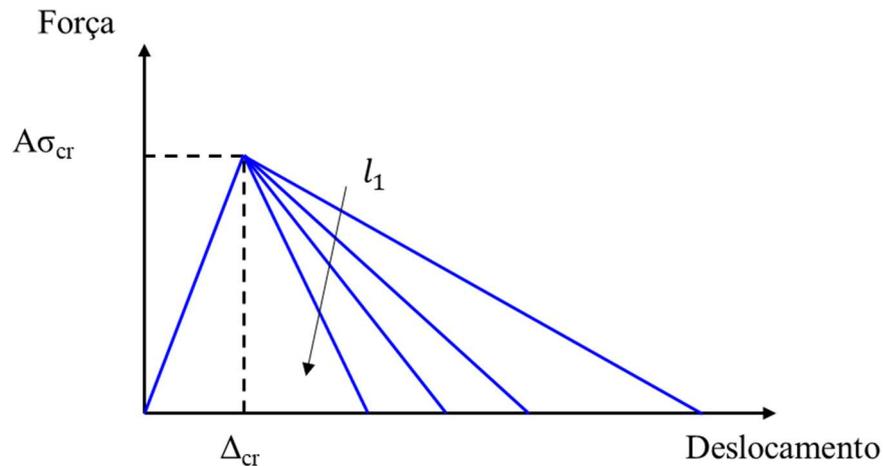
Figura 2.8: (a) Comportamento da curva Tensão vs. Deformação específica, (b) soluções antes do pico, (c) solução homogênea e (d) solução localizada.



Fonte: Adaptado de Santos (2022).

Para análises reais, com o uso de experimentos, a solução encontrada sempre é a localizada, sendo a homogênea fisicamente impossível, devido a distribuição de microdefeitos no material (FLÓREZ-LÓPEZ *et al.*, 2015). Para este exemplo uniaxial, como a deformação específica se concentra em apenas um elemento, a curva de Força vs. Deslocamento dependerá do tamanho do elemento e, portanto, a solução apresenta dependência de malha. A Figura 2.9 apresenta a curva, mostrando a infinidade de possibilidades de soluções, de acordo com o comprimento do elemento.

Figura 2.9: Curva Força vs. Deslocamento, apresentando a dependência de malha.



Fonte: Adaptado de Amorim (2016).

Com base nestes fatos, Flórez-López *et al.* (2015) destacam que, quando se é aplicada a mecânica do dano contínuo para análises não lineares, é necessário o uso de métodos de regularização, de modo a evitar o problema de dependência de malha e obter soluções objetivas.

Dentro desta abordagem, surgem novos modelos de dano, que visam contornar os problemas matemáticos citados, criando a chamada mecânica do dano moderna. Com destaque, os principais modelos utilizam de duas abordagens: a não local ou o método do gradiente. Na primeira abordagem, o dano depende das deformações de vários elementos vizinhos, não apenas no ponto de análise, impondo um campo de deformações específicas contínuo, a partir do uso de funções ponderadoras. Na segunda abordagem, é admitido que o dano depende das derivadas de segunda ordem do campo de deformações, além da deformação específica do próprio ponto de estudo, também sendo impostos campos contínuos de deformação. Vale destacar que o uso de métodos de regularização não objetiva uma melhor descrição física do problema analisado, mas apenas contornar o problema de dependência de malha e obter resultados objetivos. Para uma revisão mais detalhada sobre a mecânica do dano moderna é apresentada em Comi e Perego (2001), Desmorat *et al.* (2007), Richard e Ragueneau (2013) e suas referências.

Outro método para análises não lineares surge no início da década de 90, com a mecânica do dano concentrado (MDC), apresentada por Flórez-López (1993). Nesta abordagem é assumido que os efeitos da localização de deformações se concentram nas extremidades dos elementos, com espessura muito pequena, e de modo que a geometria inicial do problema não sofra alterações, enquanto o restante do elemento permanece elástico. Esta consideração permite que o problema de dependência de malha seja contornado. Além disso, é admitida a

hipótese de equivalência em deformações, apresentada por Lemaitre e Chaboche (1990), a qual é reescrita substituindo a deformação específica por alongamentos, ou seja, com a substituição da variável cinemática do problema.

Desta forma, a MDC permite desenvolver análises não lineares, com objetividade de solução, como observado na série de trabalhos publicados sobre este tema, citados na seção 1 deste trabalho. As aplicações são diversas, desde elementos axiais, a elementos de pórtico e elementos de chapa, para diferentes materiais e geometrias de estruturas.

A MDC passou a ser expandida para meios bidimensionais, na análise de chapas. Inicialmente por Amorim (2016), seguido por Amorim *et al.* (2018), Oliveira (2020), Santos (2021), Picón *et al.* (2021) e Teles *et al.* (2023). Em todos os trabalhos citados, os autores destacam a objetividade (unicidade) de solução obtida para as mais diversas aplicações. Portanto, é possível afirmar que as hipóteses e formulações internas da MDC permitem que o problema de dependência de malha seja evitado e que a MDC possa ser considerada por si um método de análise não linear com regularização integrada, sem a necessidade de imposição de funções de peso.

3 MODELO DE DANO CONCENTRADO PARA PLACAS

A mecânica do dano concentrado surge como uma nova teoria para análises não lineares, evitando o problema da localização de deformações e, portanto, da dependência de malha. A seguir é apresentado inicialmente a formulação para vigas e em seguida, a formulação do elemento de placa proposto.

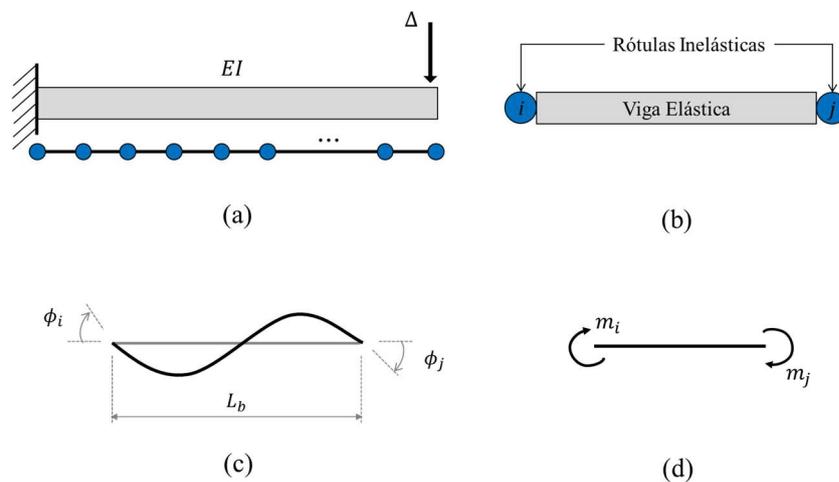
3.1 Unicidade de solução para o modelo de vigas

Considere uma viga engastada, que segue a teoria de Euler-Bernoulli, em uma extremidade e com deslocamento vertical (Δ) imposto em sua outra extremidade (Figura 3.1(a)), com rigidez à flexão EI . A viga pode ser subdividida em “ n ” elementos de dois nós, com deslocamentos cúbicos. Para um elemento “ b ” qualquer, os deslocamentos nodais podem ser descritos por:

$$\{\mathbf{U}\}_b = \{w_i \quad \theta_i \quad w_j \quad \theta_j\}^T \quad (3.1)$$

em que $\{\mathbf{U}\}$ é a matriz de deslocamentos nodais, w_i e w_j são os deslocamentos verticais dos nós “ i ” e “ j ”, respectivamente, θ_i e θ_j são as rotações nos nós “ i ” e “ j ”, respectivamente e o sobrescrito “ T ” refere-se à transposta da matriz.

Figura 3.1: Viga engastada: (a) geometria, (b) modelo inelástico, (c) deformações generalizadas e (d) esforços generalizados.



Fonte: Adaptado de Amorim (2016).

Além disso, considere um modelo baseado na formulação padrão de inelasticidade concentrada, na qual é assumida a combinação de um elemento finito de viga elástico e duas rótulas inelásticas em suas extremidades “*i*” e “*j*” (Figura 3.1(b)). No modelo proposto, todos os efeitos inelásticos do problema devem ser concentrados nas respectivas rótulas. Além disso, considere a matriz de deformações generalizadas $\{\boldsymbol{\phi}\}$ (equação (3.2)) como variável cinemática do problema (Figura 3.1(c)).

$$\{\boldsymbol{\phi}\}_b = \{\phi_i \quad \phi_j\}^T \quad (3.2)$$

Conjugada à matriz de deformações generalizadas, define-se a matriz de tensões generalizadas $\{\mathbf{M}\}$ (Figura 3.1(d)):

$$\{\mathbf{M}\}_b = \{m_i \quad m_j\}^T \quad (3.3)$$

Desta forma, a equação cinemática do problema pode ser definida de acordo com a equação (3.4):

$$\{d\boldsymbol{\phi}\}_b = [\mathbf{B}]_b \{d\mathbf{U}\}_b \quad (3.4)$$

onde $[\mathbf{B}]_b$ é a matriz de transformação cinemática para o elemento de viga, descrita de acordo com a equação (3.5) para o caso geral, em que L_b e α_b são o comprimento e a orientação do elemento de viga, respectivamente.

$$[\mathbf{B}]_b = \begin{bmatrix} -\frac{\cos(\alpha_b)}{L_b} & 1 & \frac{\cos(\alpha_b)}{L_b} & 0 \\ -\frac{\cos(\alpha_b)}{L_b} & 0 & \frac{\cos(\alpha_b)}{L_b} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

No entanto, para muitos casos de problema de engenharia, em que pode ser admitida a hipótese de pequenos deslocamentos e pequenas rotações, a equação (3.4) pode ser reescrita de acordo com a equação (3.6).

$$\{\boldsymbol{\phi}\}_b \cong [\mathbf{B}^0]_b \{\mathbf{U}\}_b \quad (3.6)$$

em que $[\mathbf{B}^0]_b$ é a matriz de transformação cinemática para a configuração inicial do elemento.

Para os casos em que o elemento de viga está orientado como apresentado na Figura 3.1, a matriz $[\mathbf{B}]_b$ pode ser simplificada:

$$[\mathbf{B}]_b = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L_b} & 1 & \frac{1}{L_b} & 0 \\ -\frac{1}{L_b} & 0 & \frac{1}{L_b} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Os esforços internos do elemento de viga $\{\mathbf{Q}\}$ são calculados segundo a equação (3.8):

$$\{\mathbf{Q}\}_b = [\mathbf{B}]_b^T \{\mathbf{M}\}_b \quad (3.8)$$

Considere também a hipótese de equivalência em deformações. A matriz de deformações generalizadas pode ser descrita por uma parcela elástica ($\{\boldsymbol{\phi}^e\}$) e uma parcela de dano ($\{\boldsymbol{\phi}^d\}$):

$$\{\boldsymbol{\phi}\}_b = \{\boldsymbol{\phi}^e\}_b + \{\boldsymbol{\phi}^d\}_b \quad (3.9)$$

onde as deformações elásticas são dadas pela equação (3.10) e as deformações de dano, pela equação (3.11):

$$\{\boldsymbol{\phi}^e\}_b = [\mathbf{F}]_b \{\mathbf{M}\}_b \quad (3.10)$$

$$\{\boldsymbol{\phi}^d\}_b = \{\phi_i^d \quad \phi_j^d\}^T \quad (3.11)$$

sendo $[\mathbf{F}]$ a matriz de flexibilidade do elemento de viga, apresentada na equação (3.12):

$$[\mathbf{F}]_b = \begin{bmatrix} \frac{L_b}{3EI} & -\frac{L_b}{6EI} \\ -\frac{L_b}{6EI} & \frac{L_b}{3EI} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

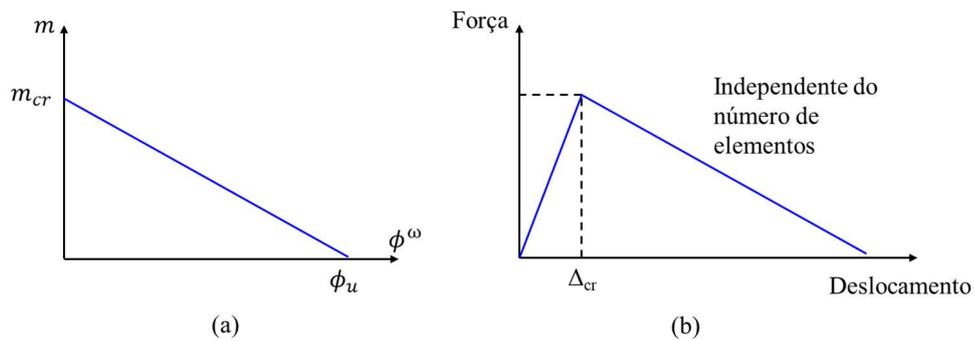
Para completar o modelo, é necessário definir as equações de evolução do dano, neste exemplo, leis de evolução lineares. Para a análise de cargas monotônicas, as leis de dano (h) para as rótulas “ i ” e “ j ” são dadas por:

$$h_i = |m_i| - m_{cr} \left(1 - \frac{|\phi_i^d|}{\phi_u} \right) \leq 0$$

$$h_j = |m_j| - m_{cr} \left(1 - \frac{|\phi_j^d|}{\phi_u} \right) \leq 0$$
(3.13)

sendo m_{cr} e ϕ_u parâmetros dos materiais (momento crítico e rotação última, respectivamente), apresentados na Figura 3.2.

Figura 3.2: Modelo inelástico para vigas: (a) parâmetros inelásticos e (b) solução do problema.



Fonte: Adaptado de Amorim (2016).

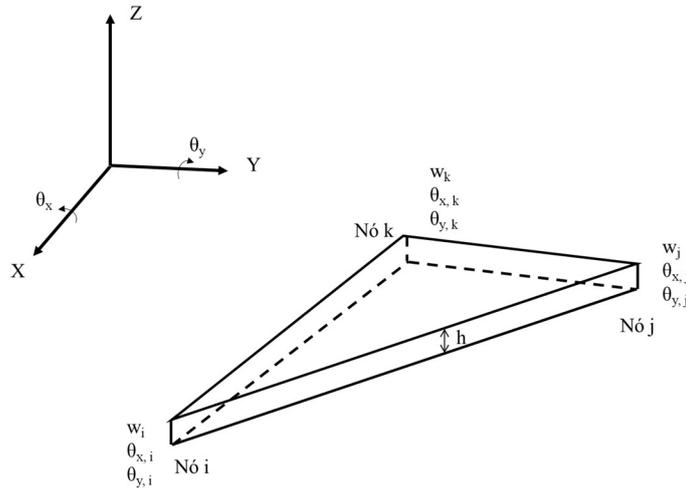
Avaliando o problema da viga engastada com deslocamento imposto em sua extremidade livre (Figura 3.1), considere que foi imposto um deslocamento tal que o momento gerado foi superior ao momento crítico. Nos primeiros estágios de aplicação de deslocamento, o momento atuante é inferior ao crítico e, portanto, a estrutura segue com comportamento linear-elástico, até atingir um deslocamento Δ_{cr} , tal que o momento gerado é igual ao crítico. A partir deste momento a rótula inelástica é ativada e a fase de amolecimento é iniciada, até ser atingido um valor de deslocamento no qual o momento na rótula seja igual a zero. Nesta situação, as deformações nos elementos são zero e a rotação da rótula inelástica é igual à sua rotação limite (ϕ_u). Desta forma, o deslocamento final da viga pode ser calculado igual à rotação vezes o comprimento da viga. Portanto, independentemente do número de elementos adotados, o resultado não depende do tamanho de cada elemento isolado, ou seja, a curva Força vs. Deslocamento não apresenta dependência de malha (Figura 3.2(b)).

3.2 Discrete Kirchhoff Triangle (DKT)

O elemento finito escolhido para as formulações desenvolvidas no presente trabalho foi o *Discrete Kirchhoff Triangle* (DKT), inicialmente proposto por Stricklin *et al.* (1969) e

formalmente apresentado por Batoz *et al.* (1980). Este elemento de placa triangular conta com 3 graus de liberdade por nó, sendo um deslocamento transversal (w) e duas rotações: em torno dos eixos X (θ_x) e Y (θ_y) (Figura 3.3).

Figura 3.3: Elemento finito DKT.



Fonte: Adaptado de Batoz *et al.* (1980).

Como o elemento finito segue a teoria de Kirchhoff, as condições de contorno cinemáticas de Kirchhoff devem ser atendidas. Deste modo, o campo de deslocamentos transversais ($W(x, y)$) e as rotações dos elementos finitos se correlacionam da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(x, y)}{\partial y} &= \theta_x \\ \frac{\partial W(x, y)}{\partial x} &= -\theta_y \end{aligned} \quad (3.14)$$

De acordo com Batoz *et al.* (1980), o campo de deslocamentos transversais para o elemento finito segue um polinômio do terceiro grau e, portanto, do segundo grau para as rotações e do primeiro grau para os momentos fletores. Além disso, como a energia de deformação por cisalhamento do elemento é negligenciada e as hipóteses de Kirchhoff são impostas ao longo das bordas, o DKT converge para a solução de placas delgadas.

Devido aos bons resultados de suas aplicações, diversos autores elaboraram elementos de casca plana, nos quais utilizam o elemento finito DKT como base para considerar os efeitos de flexão. Para uma revisão detalhada de elementos de casca ver Gal e Levy (2006). Este elemento finito de casca plana foi incorporado a biblioteca nativa do programa comercial Abaqus, com nome STRI3 (ABAQUS, 2011).

Portanto, devido a qualidade dos resultados apresentados na literatura para este elemento, além do mesmo estar presente na biblioteca do Abaqus, na forma do elemento de casca, o mesmo foi escolhido para ser reformulado dentro das considerações da mecânica do dano concentrado. A dedução deste elemento finito na notação de Powell (1969) é apresentado a seguir.

3.2.1 Equações cinemáticas

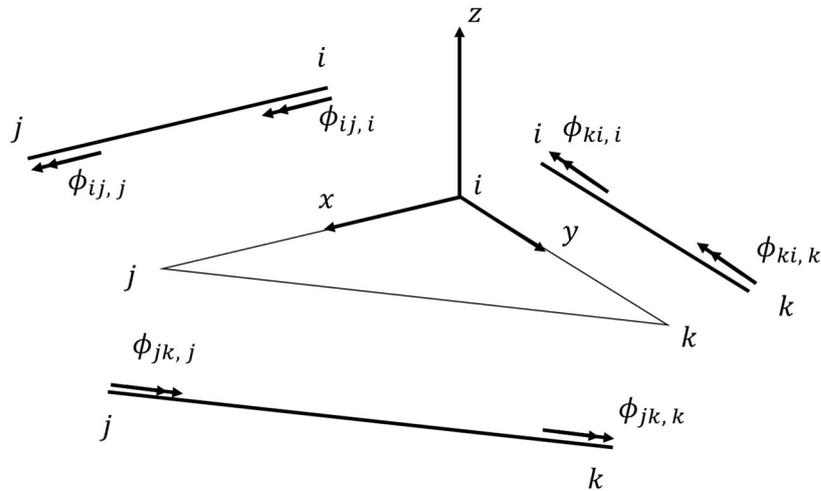
Em sua formulação clássica, as equações cinemáticas para os elementos finitos de placa relacionam as curvaturas do elemento ($\{\boldsymbol{\kappa}\}$) com os graus de liberdade do elemento finito ($\{\mathbf{U}\}^T = \{w_i \ \theta_{x,i} \ \theta_{y,i} \ w_j \ \theta_{x,j} \ \theta_{y,j} \ w_k \ \theta_{x,k} \ \theta_{y,k}\}$) (equação (3.15)), através da matriz de transformação cinemática clássica $[\mathbf{B}]$, apresentada de forma explícita no Anexo A. Para mais detalhes sobre a matriz $[\mathbf{B}]$ do elemento finito DKT, consultar Batoz *et al.* (1980).

$$\{\boldsymbol{\kappa}\} = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{\partial^2 W(x,y)}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 W(x,y)}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 W(x,y)}{\partial x \partial y} \quad -\frac{\partial^2 W(x,y)}{\partial y \partial x} \end{array} \right\} = [\mathbf{B}]\{\mathbf{U}\} \quad (3.15)$$

De forma análoga ao realizado para o elemento de viga, a variável cinemática do problema é alterada, passando a ser definida como as rotações normais às bordas do elemento finito (Figura 3.4 e equação (3.16)). A rotação $\phi_{ij,i}$ refere-se à rotação normal a borda “*ij*”, no nó “*i*” e assim sucessivamente para as demais rotações. Dentro do escopo da MDC no presente trabalho, as rotações normais às arestas dos elementos também são nomeadas de deformações generalizadas.

A relação entre as rotações normais às bordas e os deslocamentos pode ser definida de forma análoga ao apresentado por Morley (1971) e Amorim (2016). Para isto, é necessário definir o campo de deslocamentos transversais do elemento finito DKT.

Figura 3.4: Rotações normais às bordas do elemento DKT.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

$$\{\phi\} = \begin{Bmatrix} \phi_{ij,i} \\ \phi_{ij,j} \\ \phi_{ki,i} \\ \phi_{ki,k} \\ \phi_{jk,j} \\ \phi_{jk,k} \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

Para um elemento finito de placa triangular, com nós localizados em seus cantos e 9 graus de liberdade, o campo de deslocamentos pode ser descrito por uma expansão polinomial cúbica incompleta (9 termos), utilizando o sistema de coordenadas paramétrico com base na área (L_1 , L_2 e L_3), como apresentado na equação (3.17) (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000), em que α são os coeficientes do problema a serem determinados:

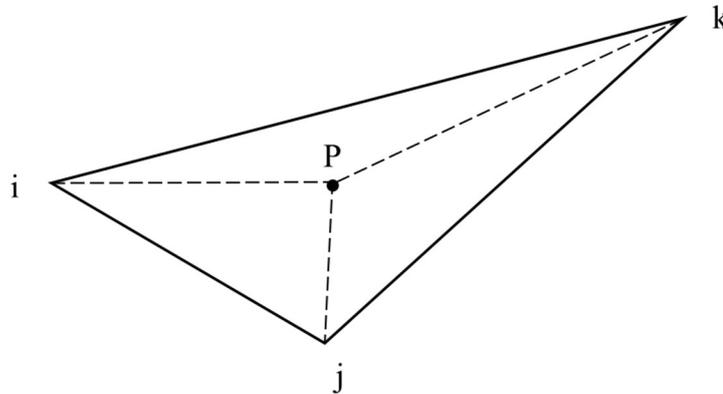
$$W(x, y) = \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \alpha_3 L_3 + \alpha_4 L_1 L_2 + \alpha_5 L_2 L_3 + \alpha_6 L_3 L_1 + \alpha_7 L_1^2 L_2 + \alpha_8 L_2^2 L_3 + \alpha_9 L_3^2 L_1 \quad (3.17)$$

Considere um triângulo qualquer e considere um ponto P interno ao triângulo (Figura 3.5), o sistema de coordenadas com base na área pode ser calculado como:

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \frac{A_{ijP}}{A} \\
 L_2 &= \frac{A_{jkP}}{A} \\
 L_3 &= \frac{A_{kiP}}{A}
 \end{aligned}
 \tag{3.18}$$

sendo A_{ijP} a área formada pelos nós “ i ”, “ j ” e o ponto P e assim sucessivamente e A é a área total do triângulo ijk .

Figura 3.5: Sistema de coordenadas com base na área.



Fonte: Adaptado de Zienkiewicz e Taylor (2000).

Além disso, de acordo com Zienkiewicz e Taylor (2000), o sistema de coordenadas com base na área deve seguir 3 condições essenciais, para um ponto qualquer no sistema de coordenadas (x, y) :

$$\begin{aligned}
 x &= L_1x_i + L_2x_j + L_3x_k \\
 y &= L_1y_i + L_2y_j + L_3y_k \\
 L_1 + L_2 + L_3 &= 1
 \end{aligned}
 \tag{3.19}$$

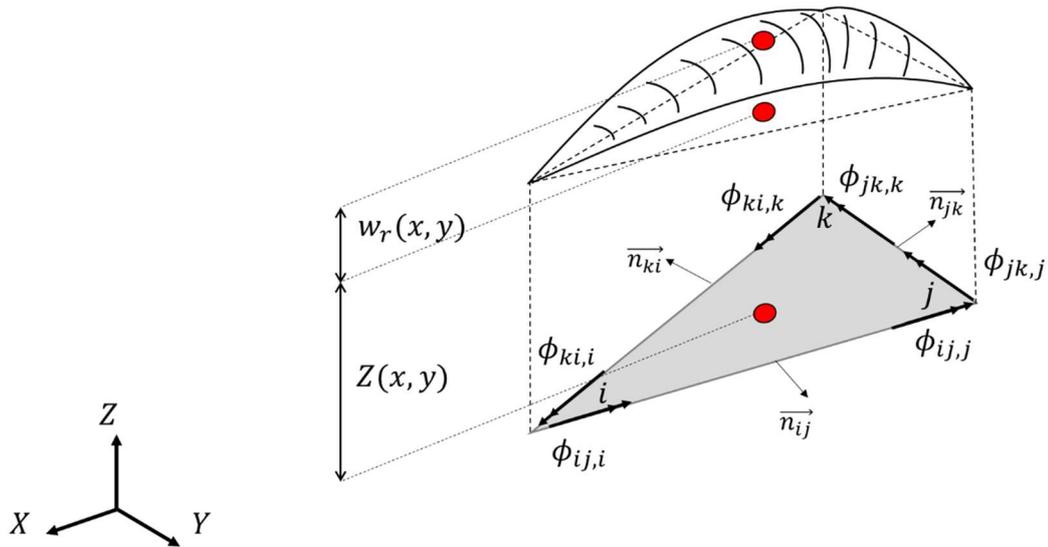
Com base nas equações (3.17) a (3.19) e sabendo que o elemento DKT possui 9 graus de liberdade (3 por nó), é possível elaborar um sistema de equações lineares e, portanto, obter os coeficientes que definem o campo de deslocamentos $W(x, y)$, em função dos graus de liberdade do elemento DKT. Esta dedução está apresentada com mais detalhes no Apêndice A.

Além disso, Morley (1971) propõe que o campo de deslocamentos transversais de um elemento finito triangular pode ser decomposto pela soma de uma parcela referente ao

deslocamento de corpo rígido ($Z(x, y)$) e uma parcela de deslocamentos relativos ($w_r(x, y)$), como apresentado na equação (3.20) e esquematicamente disposto na Figura 3.6, em que \vec{n}_{ij} é o versor normal a aresta “ ij ” e assim sucessivamente.

$$W(x, y) = Z(x, y) + w_r(x, y) \quad (3.20)$$

Figura 3.6: Campo de deslocamentos transversais.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

O deslocamento de corpo rígido do elemento finito pode ser descrito pela equação do plano que passa nos pontos (x_i, y_i, w_i) , (x_j, y_j, w_j) e (x_k, y_k, w_k) e o deslocamento relativo, pela diferença entre os campos de deslocamento total e o deslocamento de corpo rígido. Desta forma, de acordo com Morley (1971), as rotações relativas normais às arestas podem ser descritas de acordo com a equação (3.21):

$$\begin{aligned}
\phi_{ij,i} &= \left. \frac{\partial w_r}{\partial \vec{n}_{ij}} \right|_{(x_i, y_i)} = \theta_{ij,i} - \left. \frac{\partial Z}{\partial \vec{n}_{ij}} \right|_{(x_i, y_i)} \\
\phi_{ij,j} &= \left. \frac{\partial w_r}{\partial \vec{n}_{ij}} \right|_{(x_j, y_j)} = \theta_{ij,j} - \left. \frac{\partial Z}{\partial \vec{n}_{ij}} \right|_{(x_j, y_j)} \\
\phi_{ki,k} &= \left. \frac{\partial w_r}{\partial \vec{n}_{ki}} \right|_{(x_k, y_k)} = \theta_{ki,k} - \left. \frac{\partial Z}{\partial \vec{n}_{ki}} \right|_{(x_k, y_k)} \\
\phi_{ki,i} &= \left. \frac{\partial w_r}{\partial \vec{n}_{ki}} \right|_{(x_i, y_i)} = \theta_{ki,k} - \left. \frac{\partial Z}{\partial \vec{n}_{ki}} \right|_{(x_i, y_i)} \\
\phi_{jk,j} &= \left. \frac{\partial w_r}{\partial \vec{n}_{jk}} \right|_{(x_j, y_j)} = \theta_{jk,j} - \left. \frac{\partial Z}{\partial \vec{n}_{jk}} \right|_{(x_j, y_j)} \\
\phi_{jk,k} &= \left. \frac{\partial w_r}{\partial \vec{n}_{jk}} \right|_{(x_k, y_k)} = \theta_{jk,k} - \left. \frac{\partial Z}{\partial \vec{n}_{jk}} \right|_{(x_k, y_k)}
\end{aligned} \tag{3.21}$$

sendo $\theta_{ij,i}$ as rotações θ_x e θ_y do nó “ i ” do elemento finito rebatidas na direção da aresta “ ij ” e assim sucessivamente para as demais rotações.

Desta forma, as rotações normais às arestas ficam em função dos graus de liberdade do elemento finito. Portanto, é possível escrever uma relação matricial entre estas variáveis:

$$\{\boldsymbol{\phi}\} = [\mathbf{b}]\{\mathbf{U}\} \tag{3.22}$$

em que $[\mathbf{b}]$ é chamada de a matriz de transformação cinemática, dada por:

$$\begin{aligned}
& [b] \\
& = \begin{bmatrix} \frac{x_{ij}x_{jk} + y_{ij}y_{jk}}{2AL_{ij}} & \frac{x_{ij}}{L_{ij}} & \frac{y_{ij}}{L_{ij}} & \frac{x_{ij}x_{ki} + y_{ij}y_{ki}}{2AL_{ij}} & 0 & 0 & \frac{x_{ij}^2 + y_{ij}^2}{2AL_{ij}} & 0 & 0 \\ \frac{x_{ij}x_{jk} + y_{ij}y_{jk}}{2AL_{ij}} & 0 & 0 & \frac{x_{ij}x_{ki} + y_{ij}y_{ki}}{2AL_{ij}} & \frac{x_{ij}}{L_{ij}} & \frac{y_{ij}}{L_{ij}} & \frac{x_{ij}^2 + y_{ij}^2}{2AL_{ij}} & 0 & 0 \\ \frac{x_{jk}x_{ki} + y_{jk}y_{ki}}{2AL_{ki}} & \frac{x_{ki}}{L_{ki}} & \frac{y_{ki}}{L_{ki}} & \frac{x_{ki}^2 + y_{ki}^2}{2AL_{ki}} & 0 & 0 & \frac{x_{ij}x_{ki} + y_{ij}y_{ki}}{2AL_{ki}} & 0 & 0 \\ \frac{x_{jk}x_{ki} + y_{jk}y_{ki}}{2AL_{ki}} & 0 & 0 & \frac{x_{ki}^2 + y_{ki}^2}{2AL_{ki}} & 0 & 0 & \frac{x_{ij}x_{ki} + y_{ij}y_{ki}}{2AL_{ki}} & \frac{x_{ki}}{L_{ki}} & \frac{y_{ki}}{L_{ki}} \\ \frac{x_{jk}^2 + y_{jk}^2}{2AL_{jk}} & 0 & 0 & \frac{x_{jk}x_{ki} + y_{jk}y_{ki}}{2AL_{jk}} & \frac{x_{jk}}{L_{jk}} & \frac{y_{jk}}{L_{jk}} & \frac{x_{ij}x_{jk} + y_{ij}y_{jk}}{2AL_{jk}} & 0 & 0 \\ \frac{x_{jk}^2 + y_{jk}^2}{2AL_{jk}} & 0 & 0 & \frac{x_{jk}x_{ki} + y_{jk}y_{ki}}{2AL_{jk}} & 0 & 0 & \frac{x_{ij}x_{jk} + y_{ij}y_{jk}}{2AL_{jk}} & \frac{x_{jk}}{L_{jk}} & \frac{y_{jk}}{L_{jk}} \end{bmatrix} \quad (3.23)
\end{aligned}$$

onde L_{ij} , L_{ki} e L_{jk} são os comprimentos das arestas “ ij ”, “ ki ” e “ jk ”, respectivamente, e os termos x_{ij} , y_{ij} , x_{ki} , y_{ki} , x_{jk} e y_{jk} objetivam reduzir a notação da matriz, calculados de acordo com a equação (3.24).

$$\begin{aligned}
x_{ij} &= x_i - x_j \\
y_{ij} &= y_i - y_j \\
x_{ki} &= x_k - x_i \\
y_{ki} &= y_k - y_i \\
x_{jk} &= x_j - x_k \\
y_{jk} &= y_j - y_k
\end{aligned} \quad (3.24)$$

onde x_i , y_i , x_j , y_j , x_k e y_k são as coordenadas do elemento finito.

Além disso, é possível definir uma matriz de transformação $[T]$, que relaciona a matriz $[B]$ clássica do elemento finito (equação (3.15)) com a matriz de transformação cinemática (equação (3.23)):

$$\begin{aligned}
[\mathbf{B}] &= [\mathbf{T}][\mathbf{b}] \\
[\mathbf{B}][\mathbf{b}]^T &= [\mathbf{T}][\mathbf{b}][\mathbf{b}]^T \\
[\mathbf{T}] &= [\mathbf{B}][\mathbf{b}]^T([\mathbf{b}][\mathbf{b}]^T)^{-1}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Substituindo (3.25) e (3.22) em (3.15), é possível reescrever as curvaturas do elemento DKT em função das rotações normais às bordas do elemento:

$$\{\boldsymbol{\kappa}\} = [\mathbf{T}][\mathbf{b}]\{\mathbf{U}\} \Rightarrow \{\boldsymbol{\kappa}\} = [\mathbf{T}]\{\boldsymbol{\phi}\} \tag{3.26}$$

3.2.2 Equações de equilíbrio

Considere inicialmente PTV para um elemento de placa:

$$\iint \{\boldsymbol{\kappa}^*\}^T \{\mathbf{M}\} dA = \{\mathbf{U}^*\} \{\mathbf{P}\} \tag{3.27}$$

em que $\{\mathbf{M}\}$ são os momentos fletores distribuídos ao longo do elemento finito, $\{\mathbf{P}\}$ são as ações externas aplicadas e o sobrescrito “*” significa campo virtual.

De (3.15), o PTV pode ser reescrito na forma:

$$\begin{aligned}
\{\mathbf{U}^*\} \iint [\mathbf{B}]^T \{\mathbf{M}\} dA &= \{\mathbf{U}^*\} \{\mathbf{P}\}, \quad \forall \{\mathbf{U}^*\} \\
\iint [\mathbf{B}]^T \{\mathbf{M}\} dA &= \{\mathbf{P}\}
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Por definição, para um elemento de placa, os momentos fletores $\{\mathbf{M}\}$ podem ser definidos como:

$$\{\mathbf{M}\} = [\mathbf{D}]\{\boldsymbol{\kappa}\} \tag{3.29}$$

em que $[\mathbf{D}]$ é a matriz constitutiva de flexão do elemento de placa para um material isotrópico, dada por:

$$[\mathbf{D}] = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

onde ν é o coeficiente de Poisson e D é a rigidez à flexão da placa, definida como:

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (3.31)$$

sendo E e t o módulo de elasticidade longitudinal e a espessura da placa, respectivamente.

Substituindo (3.25), (3.26) e (3.29) em (3.28):

$$\begin{aligned} \iint [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] \{\boldsymbol{\kappa}\} dA &= \{\mathbf{P}\} \\ \iint [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{T}] \{\boldsymbol{\phi}\} dA &= \{\mathbf{P}\} \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$[\mathbf{b}]^T \iint [\mathbf{T}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{T}] dA \{\boldsymbol{\phi}\} = \{\mathbf{P}\}$$

Aplicando a integração numérica em coordenadas paramétricas:

$$[\mathbf{b}]^T 2A \int_0^1 \int_0^{1-\eta} [\mathbf{T}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{T}] d\xi d\eta \{\boldsymbol{\phi}\} = \{\mathbf{P}\} \quad (3.33)$$

A matriz de rigidez do elemento finito ($[\mathbf{K}_e]$) pode ser recuperada substituindo a definição das rotações normais às bordas:

$$[\mathbf{b}]^T 2A \int_0^1 \int_0^{1-\eta} [\mathbf{T}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{T}] d\xi d\eta [\mathbf{b}] \{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{P}\} \quad (3.34)$$

$$[\mathbf{K}_e] \{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{P}\}$$

De acordo com Batoz *et al.* (1980), para o elemento finito DKT é possível recuperar a solução da integração exata utilizando-se de uma integração numérica com 3 pontos de integração de Gauss:

$$[\mathbf{b}]^T A \sum_{i=1}^3 [\mathbf{T}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{T}] w_{\xi,i} w_{\eta,i} \{\boldsymbol{\phi}\} = \{\mathbf{P}\} \quad (3.35)$$

onde $w_{\xi,i}$ e $w_{\eta,i}$ são os pesos dos pontos da integração numérica da quadratura de Gauss.

Ainda, é possível definir a matriz de elasticidade generalizada para o elemento DKT $[\mathbf{E}]$:

$$[\mathbf{E}] = A \sum_{i=1}^3 [\mathbf{T}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{T}] w_{\xi,i} w_{\eta,i} \quad (3.36)$$

3.2.3 Equações constitutivas

Por fim, faz-se necessário a definição de equações que relacionem as deformações generalizadas (rotações normais às arestas) com suas respectivas variáveis conjugadas (momentos fletores normais às arestas). Para isto, considere a energia de deformação do elemento DKT:

$$U_f = \frac{1}{2} \iint \{\boldsymbol{\kappa}\}^T \{\mathbf{M}\} dA \quad (3.37)$$

Substituindo (3.26) e (3.29) em (3.37):

$$U_f = \frac{1}{2} \iint \{\boldsymbol{\kappa}\}^T [\mathbf{D}] \{\boldsymbol{\kappa}\} dA \quad (3.38)$$

$$U_f = \frac{1}{2} \{\boldsymbol{\phi}\}^T \iint [\mathbf{T}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{T}] dA \{\boldsymbol{\phi}\}$$

De acordo com o Teorema de Castigliano, a derivada parcial da energia de deformação em relação a uma dada variável nos fornece a variável conjugada à variável que a energia foi derivada. Desta forma, derivando parcialmente a energia de deformação do elemento DKT em relação as rotações normais às arestas:

$$\frac{\partial U_f}{\partial \{\boldsymbol{\phi}\}} = \{\mathbf{M}_n\} = \iint [\mathbf{T}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{T}] dA \{\boldsymbol{\phi}\} \quad (3.39)$$

onde $\{\mathbf{M}_n\}$ são os momentos fletores normais às arestas, apresentados na equação (3.40). Dentro da abordagem da MDC desenvolvida no presente trabalho, os momentos fletores normais às arestas podem ser nomeados como tensões generalizadas.

$$\{\mathbf{M}_n\} = \begin{Bmatrix} M_{ij,i}^n \\ M_{ij,j}^n \\ M_{ki,i}^n \\ M_{ki,k}^n \\ M_{jk,j}^n \\ M_{jk,k}^n \end{Bmatrix} \quad (3.40)$$

O termo $M_{ij,i}^n$ refere-se ao momento fletor normal a aresta “ ij ”, no nó “ i ” e assim sucessivamente para os demais momentos fletores.

Aplicando integração numérica e substituindo (3.36) em (3.39), os momentos fletores normais às bordas podem ser reescritos:

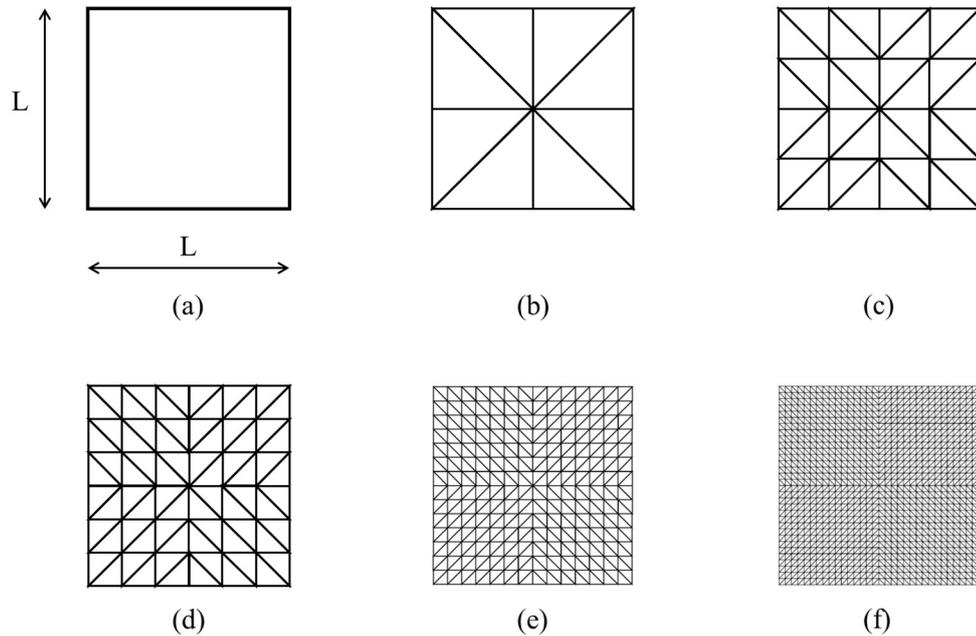
$$\{\mathbf{M}_n\} = \iint [\mathbf{T}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{T}] dA \{\boldsymbol{\phi}\} = A \sum_{i=1}^3 [\mathbf{T}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{T}] w_{\xi,i} w_{\eta,i} \{\boldsymbol{\phi}\} \quad (3.41)$$

$$\{\mathbf{M}_n\} = [\mathbf{E}] \{\boldsymbol{\phi}\}$$

3.2.4 Solução elástica

Com o objetivo de verificar a validade das formulações propostas até o presente momento, foi desenvolvida a análise elástica de uma série de exemplos, comparando os resultados obtidos com as respostas analíticas. Foi avaliada uma placa quadrada isotrópica, de lado L igual a 2000 mm, módulo de elasticidade e coeficiente Poisson iguais a 210 GPa e 0,3, respectivamente. As malhas foram geradas dividindo a placa em N intervalos de comprimentos iguais nas duas direções e, em seguida, as regiões foram subdivididas em triângulos retângulos, conforme apresentado na Figura 3.7.

Figura 3.7: Placa elástica: (a) geometria, (b) $N = 2$, (c) $N = 4$, (d) $N = 6$, (e) $N = 14$ e (f) $N = 32$.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

As verificações foram realizadas para 4 diferentes combinações de configurações: placas apoiadas ao longo das 4 bordas ou placas engastadas ao longo das quatro bordas e sujeitas a aplicação uma carga concentrada em seu centro (P) ou uma carga distribuída ao longo de sua área (p). A Tabela 3.1 apresenta os resultados de deslocamento adimensional para os exemplos, para as diferentes malhas, além da resposta analítica, tomada como referência.

Tabela 3.1: Deslocamentos adimensionais do ponto central para placa elástica.

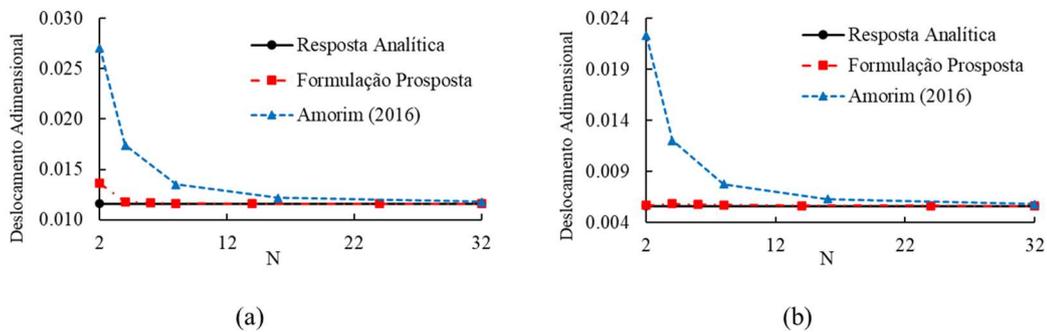
N	Carga Concentrada		Carga Distribuída	
	Apoiada	Engastada	Apoiada	Engastada
2	0,0136	0,0057	0,00341	0,00142
4	0,0118	0,0059	0,00352	0,00142
6	0,0117	0,0058	0,00367	0,00136
8	0,0116	0,0057	0,00376	0,00133
14	0,0116	0,0056	0,00388	0,00129
24	0,0116	0,0056	0,00395	0,00128
32	0,0116	0,0056	0,00398	0,00127
Resposta analítica	0,0116	0,0056	0,00406	0,00126
Multiplicador	PL^2/D		pL^4/D	

Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Como pode ser observado na Tabela 3.1, os resultados obtidos com o elemento DKT, utilizando a formulação apresentada nesta seção, foram iguais ou próximos às respostas analíticas, até mesmo para os casos de malhas menos refinadas.

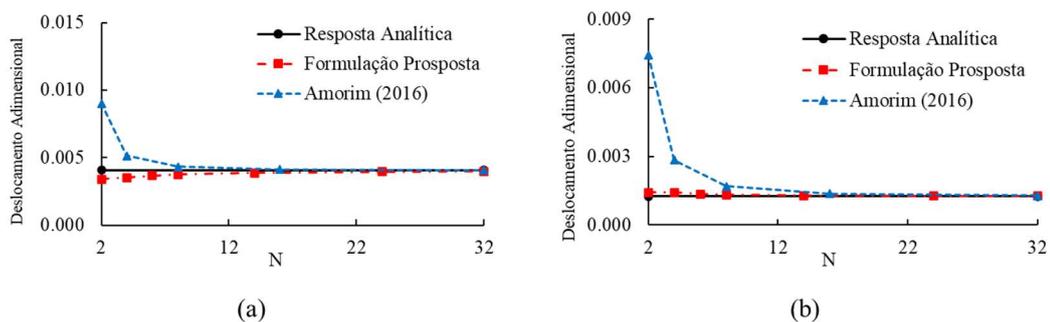
Além disso, é possível realizar uma comparação entre os resultados de deslocamento adimensional obtidos com a formulação proposta no presente trabalho e com os obtidos por Amorim (2016), utilizando o elemento proposto por Morley (1971), avaliando a convergência da malha para a resposta analítica. A Figura 3.8 apresenta os resultados para o caso de uma placa sujeita a carga distribuída e a Figura 3.9, para uma placa com carga concentrada, em ambos os casos com para as placas apoiadas (a) e engastadas (b).

Figura 3.8: Resposta da placa sujeita a carga distribuída: (a) apoiada e (b) engastada.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Figura 3.9: Resposta da placa sujeita a carga concentrada: (a) apoiada e (b) engastada.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Como pode ser observado, as respostas obtidas com o elemento DKT apresentaram uma melhor convergência em relação aos valores de referência, em comparação aos obtidos por Amorim (2016) aplicando o elemento proposto por Morley (1971), até mesmo para malhas menos refinadas. Desta forma, com uma menor quantidade de elementos finitos é possível obter respostas mais precisas com o elemento DKT, justificando seu uso.

Vale ressaltar que as respostas obtidas com a formulação clássica coincidem com a formulação proposta com base na formulação de Powell (1969), não alterando a resposta elástica do elemento.

3.2.5 Leis de evolução do dano

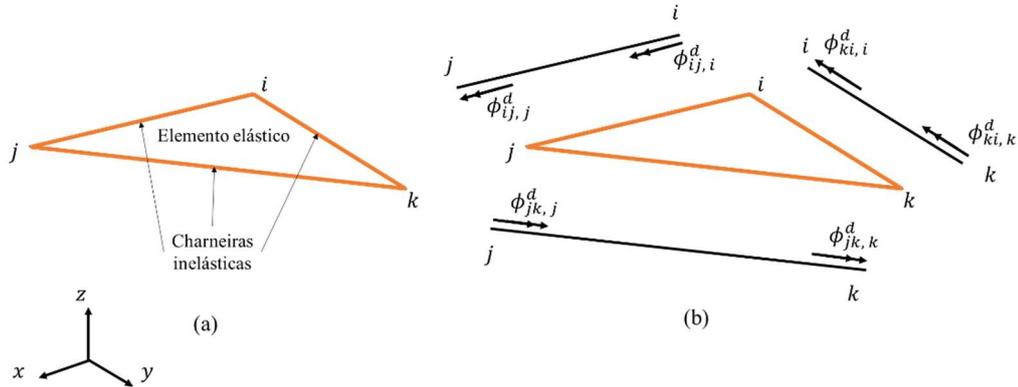
Dado que a formulação proposta para o elemento DKT coincide com a resposta da formulação clássica, é possível avançar as deduções para a inclusão dos efeitos de dano no elemento finito. No presente trabalho propõe-se o uso de 3 charneiras inelásticas, uma em cada aresta do elemento finito (Figura 3.10(a)). De forma análoga ao apresentado para o caso dos elementos de viga (vide seção 3.1), as charneiras inelásticas desempenham papel similar às rótulas. Ainda utilizando-se da analogia ao elemento de viga, a parte interna do elemento permanece elástica, enquanto todos os efeitos de dano são localizados nas charneiras.

No início da análise as charneiras apresentam rotações de dano ($\{\phi^d\}$) iguais a zero e ao longo da simulação estas rotações são incrementadas, à medida que o dano aumenta. Além disso, de forma análoga ao realizado para a definição da variável cinemática, para as charneiras inelásticas é possível definir rotações de dano para todos os nós, em todas as arestas, conforme a Figura 3.10(b), onde as rotações de dano são definidas de acordo com a equação (3.42):

$$\{\phi^d\} = \begin{Bmatrix} \phi_{ij,i}^d \\ \phi_{ij,j}^d \\ \phi_{ki,i}^d \\ \phi_{ki,k}^d \\ \phi_{jk,j}^d \\ \phi_{jk,k}^d \end{Bmatrix} \quad (3.42)$$

em que $\phi_{ij,i}^d$ é a rotação de dano na charneira “ij”, no nó “i” e assim sucessivamente.

Figura 3.10: (a) posição das charneiras de dano e (b) rotações de dano.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Desta forma, agora é possível definir a hipótese de equivalência em deformações para o elemento de placa:

$$\{\boldsymbol{\phi}\} = \{\boldsymbol{\phi}^e\} + \{\boldsymbol{\phi}^d\} \quad (3.43)$$

em que $\{\boldsymbol{\phi}\}$ é a rotação total normal às arestas do elemento e $\{\boldsymbol{\phi}^e\}$ é a parcela referente as rotações elásticas.

Além disso, com a adoção da hipótese de equivalência de deformações, a equação de equilíbrio (equação (3.35)) passa a ser reescrita da seguinte forma:

$$[\mathbf{b}]^T A \sum_{i=1}^3 [\mathbf{T}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{T}] w_{\xi,i} w_{\eta,i} (\{\boldsymbol{\phi}\} - \{\boldsymbol{\phi}^d\}) = \{\mathbf{P}\} \quad (3.44)$$

E a lei elástica (equação (3.41)), conforme:

$$\{\mathbf{M}_n\} = [\mathbf{E}](\{\boldsymbol{\phi}\} - \{\boldsymbol{\phi}^d\}) \quad (3.45)$$

Para complementar o modelo de dano é necessário definir a equação de evolução das rotações de dano para cada charneira inelástica. Nas formulações previamente elaboradas dentro do MDC para meios bidimensionais (elementos de chapa), Amorim (2016), Oliveira (2020) e Santos (2021), aplicaram leis de evolução do dano lineares (LDL), considerando o amolecimento linear. Por sua vez, objetivando uma melhor representação do comportamento experimental de estruturas, Teles *et al.* (2023) modificou a lei de evolução do dano para uma não linear (LDNL), com amolecimento exponencial. Com esta última lei as respostas numéricas das análises apresentaram qualidade superior àquelas obtidas com a lei de evolução linear. Além

disso, Teles *et al.* (2023) cita que é possível relacionar o parâmetro de queda da exponencial com a energia de fratura (G_f) dos experimentos.

Portanto, com base nas análises prévias observadas no desenvolvimento dos elementos de chapa, o presente trabalho propõe o uso de leis de evolução não lineares, com comportamento exponencial, para rotações dano. Para o elemento DKT proposto, as leis de evolução são definidas para cada nó de cada charneira de dano, totalizando 6 leis, conforme a equação (3.46):

$$\begin{aligned}
 h_{ij,i} &= |M_{ij,i}^n| - \frac{1}{2} L_{ij} M_{cr} \exp(q|\phi_{ij,i}^d|) \leq 0 \\
 h_{ij,j} &= |M_{ij,j}^n| - \frac{1}{2} L_{ij} M_{cr} \exp(q|\phi_{ij,j}^d|) \leq 0 \\
 h_{ki,i} &= |M_{ki,i}^n| - \frac{1}{2} L_{ki} M_{cr} \exp(q|\phi_{ki,i}^d|) \leq 0 \\
 h_{ki,k} &= |M_{ki,k}^n| - \frac{1}{2} L_{ki} M_{cr} \exp(q|\phi_{ki,k}^d|) \leq 0 \\
 h_{jk,j} &= |M_{jk,j}^n| - \frac{1}{2} L_{jk} M_{cr} \exp(q|\phi_{jk,j}^d|) \leq 0 \\
 h_{jk,k} &= |M_{jk,k}^n| - \frac{1}{2} L_{jk} M_{cr} \exp(q|\phi_{jk,k}^d|) \leq 0
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

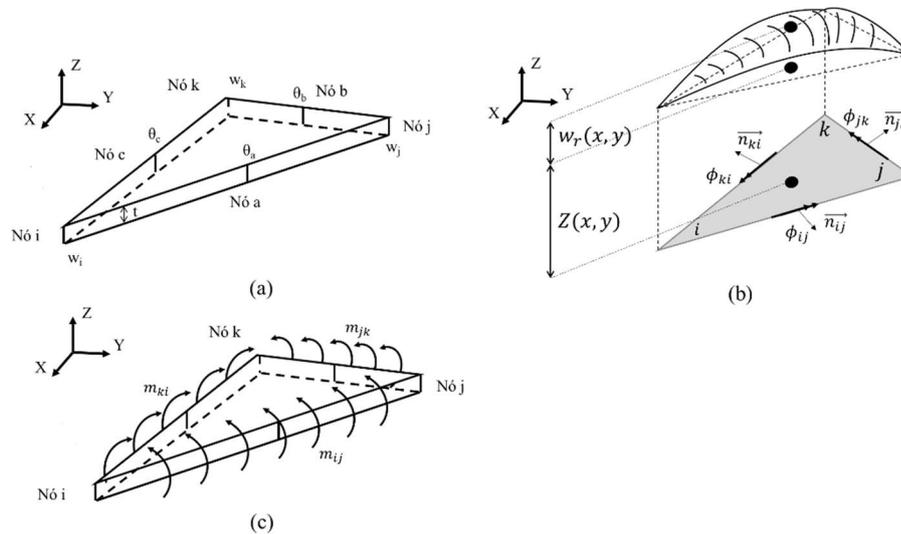
onde $h_{ij,i}$ é a lei de evolução do dano para a charneira “ ij ”, no nó “ i ”, L_{ij} é o comprimento da aresta “ ij ” do elemento, M_{cr} é o momento fletor crítico da estrutura, em unidade de momento fletor distribuído, e q é o parâmetro da formulação não linear, ajustado para cada estrutura por meio de ensaios experimentais, e assim sucessivamente para as demais leis de evolução do dano.

3.3 Triângulo de Momento Fletor Constante

O elemento finito triangular de momento fletor constante, ou *Constant Moment Triangle* (CMT) é um elemento de placa não conforme, proposto por Morley (1971). O elemento apresenta 6 nós, cujos graus de liberdade são os deslocamentos transversais ao plano do elemento nos nós dos cantos e as rotações normais nos nós intermediários das arestas, conforme Figura 3.11 (a):

$$\{\mathbf{U}\}^t = [w_i \quad w_j \quad w_k \quad \theta_a \quad \theta_b \quad \theta_c] \quad (3.47)$$

Figura 3.11: (a) Elemento finito CMT, (b) campo de deflexões e (c) momentos fletores nas arestas

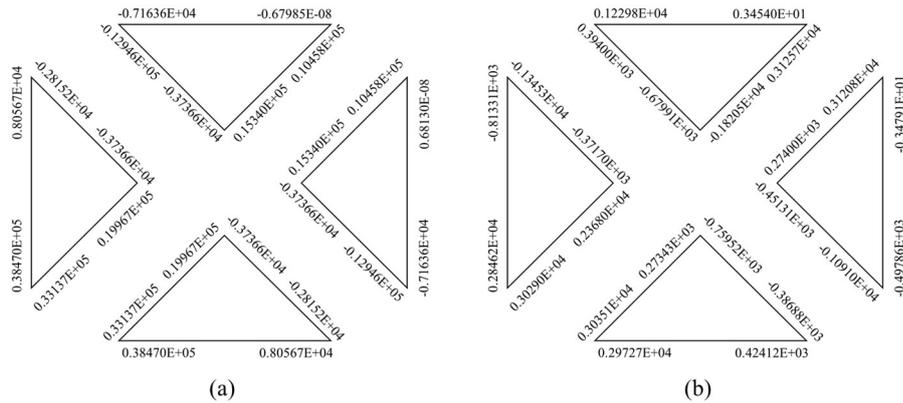


Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

3.3.1 Distribuição de momentos fletores nas arestas

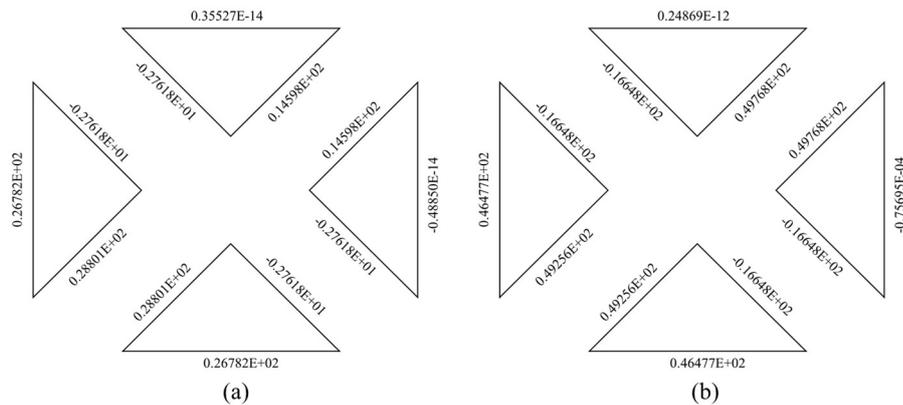
O elemento finito DKT apresentou bons resultados em regime elástico linear, com respostas em termos de Forças e Deslocamentos precisas para todos os exemplos testados. No entanto, para a análise da evolução das rotações de dano e, por consequência, do dano nas charneiras, é necessário verificar como os momentos fletores normais às arestas se comportam. Para isto, foi realizada a simulação de uma placa quadrada, com todas as bordas apoiadas e cantos fixos, sujeita a uma carga concentrada no centro. A simulação foi realizada considerando dupla simetria, na qual são apresentados os resultados de 1/4 da placa. A Figura 3.12 apresenta a distribuição dos momentos fletores nas arestas para uma análise com o elemento DKT, enquanto a Figura 3.13 para o elemento CMT.

Figura 3.12: Momentos fletores no elemento DKT: (a) Elástico e (b) Altos danos.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Figura 3.13: Momentos fletores no elemento CMT: (a) Elástico e (b) Altos danos.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Com base na Figura 3.12 é possível observar o elemento finito DKT apresenta momentos fletores simétricos enquanto está na fase elástica (exceto no ponto de aplicação da simetria), no entanto, quando o dano é evoluído, estes momentos passam a não serem iguais. Isto se deve, pois a formulação deste elemento garante o equilíbrio dos momentos fletores no nó, não garantindo o mesmo valor entre elementos que compartilham uma mesma aresta. Para o elemento CMT (Figura 3.13) é possível observar que antes e após a evolução de dano nas charneiras, os momentos fletores permanecem iguais em uma mesma charneira compartilhada.

Note que esta resposta de momentos fletores do elemento DKT não influencia nos resultados obtidos com a formulação desenvolvida na seção 3.2, cujos resultados para exemplos acadêmicos são apresentados na seção 7.1.1, uma vez que estes são obtidos em termos de rotações de dano da charneira inelástica e esta é dada pela soma algébrica das rotações de dano

das charneiras coincidentes. No entanto, para formulações que apliquem a variável de dano como variável inelástica, este elemento pode não ser adequado. Desta forma, para o desenvolvimento das demais análises deste trabalho, o elemento CMT é aplicado. A dedução deste elemento finito na notação de Powell (1969) é apresentado a seguir.

3.3.2 Equações cinemáticas

As equações cinemáticas para o elemento CMT podem ser obtidas de forma análoga ao apresentado para o elemento DKT (Equações (3.20) e (3.21) Figura 3.11 (b)). Em específico, para o elemento CMT, a formulação é obtida usando uma aproximação quadrática completa do campo de deslocamentos, o que leva a curvaturas e momentos fletores constantes no elemento finito. No entanto, note que, como o elemento finito CMT apresenta momentos fletores constantes nas arestas, existem apenas 3 rotações relativas normais às arestas (variáveis cinemáticas), para um elemento t , sendo descritas da forma:

$$\{\Phi\}_t^T = [\phi_{ij} \quad \phi_{jk} \quad \phi_{ki}] \quad (3.48)$$

Portanto, as equações cinemáticas do elemento CMT podem ser escritas através da representação matricial da equação:

$$\{\Phi\}_t = [b]_t \{U\}_t$$

[b]

$$= \begin{bmatrix} \frac{c_{ij}(y_k - y_j) + s_{ij}(x_j - x_k)}{2A} & \frac{c_{ij}(y_i - y_k) + s_{ij}(x_k - x_i)}{2A} & \frac{L_{ij}}{2A} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{L_{jk}}{2A} & \frac{c_{jk}(y_i - y_k) + s_{jk}(x_k - x_i)}{2A} & \frac{c_{jk}(y_j - y_i) + s_{jk}(x_i - x_j)}{2A} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{c_{ki}(y_k - y_j) + s_{ki}(x_j - x_k)}{2A} & \frac{L_{ki}}{2A} & \frac{c_{ki}(y_j - y_i) + s_{ki}(x_i - x_j)}{2A} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

em que c_{ij} e s_{ij} são o cosseno e o seno (com relação ao eixo X) do lado “ ij ”, respectivamente, e assim sucessivamente para as demais arestas.

Vale ressaltar que o vetor de curvaturas também pode ser expresso através das deformações generalizadas, similar ao apresentado para o elemento DKT:

$$\{\boldsymbol{\kappa}\}_t = \left\{ -\frac{\partial^2 w^r}{\partial x^2} \quad -\frac{\partial^2 w^r}{\partial y^2} \quad -2\frac{\partial^2 w^r}{\partial x \partial y} \right\}^T = \frac{1}{A} [\mathbf{T}]_t^T \{\boldsymbol{\Phi}\}_t$$

$$[\mathbf{T}]_t = \begin{bmatrix} -L_{ij}c_{ij}^2 & -L_{ij}s_{ij}^2 & -2L_{ij}c_{ij}s_{ij} \\ -L_{jk}c_{jk}^2 & -L_{jk}s_{jk}^2 & -2L_{jk}c_{jk}s_{jk} \\ -L_{ki}c_{ki}^2 & -L_{ki}s_{ki}^2 & -2L_{ki}c_{ki}s_{ki} \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

3.3.3 Equações de equilíbrio

Sejam os momentos fletores distribuídos no interior elemento finito CMT:

$$\{\mathbf{M}\}_t = \{m_{xx} \quad m_{yy} \quad m_{xy}\}^T \quad (3.51)$$

Os momentos fletores concentrados atuantes nas arestas do elemento finito (Figura 3.11 (c)), conjugados às rotações normais, são dados por:

$$\{\mathbf{M}_n\}_t^T = [L_{ij}m_{ij} \quad L_{jk}m_{jk} \quad L_{ki}m_{ki}] = [\mathbf{T}] \{\mathbf{M}\} \quad (3.52)$$

Além disso, as forças nodais no elemento podem ser definidas:

$$\{\mathbf{Q}\}_t^T = \{Q_{wi} \quad Q_{wj} \quad Q_{wk} \quad Q_{\theta a} \quad Q_{\theta b} \quad Q_{\theta c}\} \quad (3.53)$$

onde Q_{wi} , Q_{wj} e Q_{wk} e $Q_{\theta a}$, $Q_{\theta b}$ e $Q_{\theta c}$ são as reações verticais nos nós dos cantos das arestas e os momentos fletores nos nós intermediários das arestas, respectivamente.

Do princípio dos trabalhos virtuais, sabendo que o subscrito “*” se refere ao campo virtual e realizando as devidas substituições das variáveis:

$$\iint_A \{\boldsymbol{\kappa}^*\}_t^T \{\mathbf{M}\}_t dA = \{\mathbf{U}^*\}_t^T \{\mathbf{Q}\}_t \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned}
A\{\boldsymbol{\kappa}^*\}_t^T\{\mathbf{M}\}_t &= \{\mathbf{U}^*\}_t^T\{\mathbf{Q}\}_t \\
\{\boldsymbol{\phi}^*\}_t^T\{\mathbf{M}_n\}_t &= \{\mathbf{U}^*\}_t^T\{\mathbf{Q}\}_t \\
\{\mathbf{U}^*\}_t^T[\mathbf{b}]_t^T\{\mathbf{M}_n\}_t &= \{\mathbf{U}^*\}_t^T\{\mathbf{Q}\}_t \quad \forall\{\mathbf{U}^*\}_t
\end{aligned}$$

Finalmente, as forças nodais podem ser escritas como:

$$\{\mathbf{Q}\}_t = [\mathbf{b}]_t^T\{\mathbf{M}_n\}_t \quad (3.55)$$

3.3.4 Equações constitutivas

Os momentos fletores distribuídos no elemento finito se relacionam com as curvaturas:

$$\{\mathbf{M}\}_t = [\mathbf{D}]_t\{\boldsymbol{\kappa}\}_t \quad (3.56)$$

De forma similar ao definido para o elemento DKT, a energia de deformação do elemento CMT pode ser escrita:

$$\begin{aligned}
U_f &= \frac{1}{2} \iint_A \{\boldsymbol{\kappa}\}_t^T\{\mathbf{M}\}_t dA = \frac{A}{2} \{\boldsymbol{\kappa}\}_t^T\{\mathbf{M}\}_t = \frac{A}{2} \{\mathbf{M}\}_t^T[\mathbf{D}]^{-1}\{\mathbf{M}\}_t \\
U_f &= \frac{A}{2} \{\mathbf{M}_n\}_t^T([\mathbf{T}]_t^T)^{-1}[\mathbf{D}]^{-1}[\mathbf{T}]_t^{-1}\{\mathbf{M}_n\}_t
\end{aligned} \quad (3.57)$$

Pelo teorema de Castigliano, as rotações normais às arestas são definidas por:

$$\{\boldsymbol{\phi}\}_t = \frac{\partial U_f}{\partial \{\mathbf{M}_n\}_t} = A([\mathbf{T}]_t^T)^{-1}[\mathbf{D}]^{-1}[\mathbf{T}]_t^{-1}\{\mathbf{M}_n\}_t \quad (3.58)$$

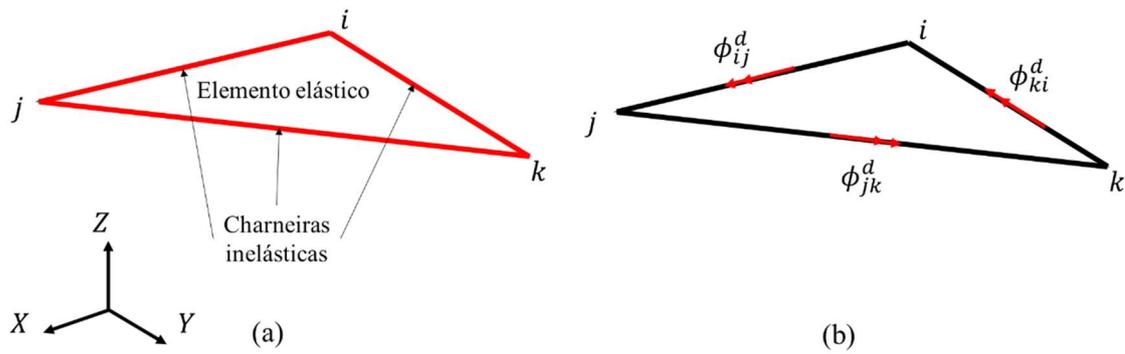
onde pode-se definir a matriz de flexibilidade ($[\mathbf{F}]_t$):

$$[\mathbf{F}]_t = A([\mathbf{T}]_t^T)^{-1}[\mathbf{D}]^{-1}[\mathbf{T}]_t^{-1} \quad (3.59)$$

3.3.5 Leis de evolução do dano

Note que a solução elástica para o elemento finito CMT foi previamente demonstrada por Amorim (2016). Desta forma, faz-se necessário a inclusão dos efeitos de dano, através das hipóteses da mecânica do dano concentrado. De forma análoga ao elemento DKT, considere que o elemento finito pode ter efeitos inelásticos concentrados em suas arestas (Figura 3.14 (a)), enquanto o restante do elemento permanece em regime elástico linear.

Figura 3.14: (a) Elemento CMT com considerações do dano concentrado e (b) variáveis inelásticas



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Além disso, admita que os efeitos inelásticos possam ser representados através de rotações de dano, as quais são definidas de forma similar as rotações normais às arestas (Figura 3.14 (b)):

$$\{\Phi^d\}^T = [\phi_{ij}^d \quad \phi_{jk}^d \quad \phi_{ki}^d] \quad (3.60)$$

onde ϕ_{ij}^d é a rotação de dano normal à aresta “ ij ” e assim sucessivamente para as demais arestas.

A lei constitutiva apresentada na seção 3.3.4 deve ser reescrita, a fim de levar em consideração os efeitos inelásticos:

$$\{\Phi - \Phi^d\} = [F]_t \{\mathbf{M}_n\} \quad (3.61)$$

Por fim, é necessário definir as leis de evolução das rotações de dano. Neste trabalho, estas leis são definidas de forma similar àquelas adotadas para o elemento DKT, as quais assumem um comportamento de amolecimento com caimento exponencial:

$$\begin{aligned}
 h_{ij} &= |L_{ij}m_{ij}| - M_{cr}L_{ij} \exp(q|\phi_{ij}^d|) \leq 0 \\
 h_{jk} &= |L_{jk}m_{jk}| - M_{cr}L_{jk} \exp(q|\phi_{jk}^d|) \leq 0 \\
 h_{ki} &= |L_{ki}m_{ki}| - M_{cr}L_{ki} \exp(q|\phi_{ki}^d|) \leq 0
 \end{aligned} \tag{3.62}$$

3.3.6 Abertura de Fissuras

Note que as rotações de dano podem ser reescritas em função dos momentos fletores normais às arestas e da matriz de flexibilidade de dano ($[\mathbf{C}(\mathbf{D})]$):

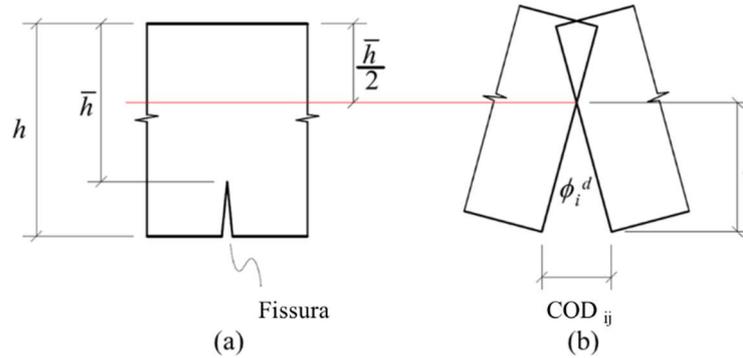
$$\begin{aligned}
 \{\Phi^d\} &= [\mathbf{C}(\mathbf{D})]\{\mathbf{M}_n\} \\
 [\mathbf{C}(\mathbf{D})] &= \begin{bmatrix} \frac{d_{ij}F[1,1]}{1-d_{ij}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d_{jk}F[2,2]}{1-d_{jk}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d_{ki}F[3,3]}{1-d_{ki}} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

Com base nas expressões apresentadas na Equação (3.63), é possível calcular as variáveis de dano (d_{ij} , d_{jk} e d_{ki}) relacionadas as rotações de dano:

$$\begin{aligned}
 d_{ij} &= \frac{\phi_{ij}^d}{F[1,1]L_{ik}m_{ij} + \phi_{ij}^d} \\
 d_{jk} &= \frac{\phi_{jk}^d}{F[2,2]L_{jk}m_{jk} + \phi_{jk}^d} \\
 d_{ki} &= \frac{\phi_{ki}^d}{F[3,3]L_{ki}m_{ki} + \phi_{ki}^d}
 \end{aligned} \tag{3.64}$$

Os resultados da abertura de fissuras em sua extremidade (*Cracking (Mouth) Opening Displacement* – COD ou CMOD) também podem ser estimados com o uso da definição de rotulas e rotação inelástica, como apresentado por Amorim *et al.* (2014). Graficamente, a abertura da fissura pode ser definida de acordo com a Figura 3.15 e, numericamente, através da equação (3.65):

Figura 3.15: Estimativa da abertura de fissuras.



Fonte: Adaptado de Amorim *et al.* (2014)

$$\begin{aligned}
 COD_{ij} &= \phi_{ij}^d l = \phi_{ij}^d \left(h - \frac{\bar{h}}{2} \right) \\
 \bar{I} &= \frac{b\bar{h}^3}{12} \cong I(1 - d_{ij}) = \frac{bh^3(1 - d_{ij})}{12} \\
 \bar{h} &= h \sqrt[3]{1 - d_{ij}} \\
 COD_{ij} &= \phi_{ij}^d h \left(1 - \frac{\sqrt[3]{1 - d_{ij}}}{2} \right)
 \end{aligned} \tag{3.65}$$

onde l é a distância da linha neutra até o início da abertura da fissura, h é a altura inicial da seção, \bar{h} e \bar{I} são a altura e momento de inércia efetivos da seção, I o momento de inércia da seção intacta e COD_{ij} é a abertura da fissura da aresta “ ij ” e assim sucessivamente para as demais arestas

3.4 Implementação numérica

De forma similar aos trabalhos realizados por Amorim (2016), Oliveira (2020), Santos (2021) e Teles *et al.* (2023), as formulações propostas via Mecânica do Dano Concentrado para os elementos finitos foram implementadas no Programa Endógeno de Elementos Finitos (PEEF). O PEEF foi inicialmente desenvolvido por Uzcátegui (2012) e hoje conta com uma ampla biblioteca de elementos finitos baseados na MDC, permitindo o desenvolvimento de análises lineares e não lineares, para estruturas planas ou espaciais, sujeitas a carregamentos estáticos ou dinâmicos.

O PEEF divide as análises em duas etapas: local e global. Dentro da etapa local, o programa resolve as leis de comportamento de cada elemento finito; na etapa global, o PEEF resolve o sistema de equações de equilíbrio da estrutura, sujeitas as condições de contorno pré-estabelecidas.

Dentro da etapa global, o PEEF inicia com a leitura dos dados de entrada, organizados em um arquivo com formatação específica, que contém informações gerais da estrutura, como coordenadas dos nós, conectividade dos elementos finitos, condições de contorno, tipo de carregamento, bem como qual o elemento finito da biblioteca será empregado. Além disso, para os exemplos neste trabalho desenvolvidos, foi adotado um procedimento de incremento de deslocamentos, com tamanho de incremento e nós de aplicação definidos inicialmente no arquivo de dados de entrada. Com base nos valores de incremento de deslocamento, através de um processo iterativo para cada passo da simulação, deve ser alcançado equilíbrio de forças entre as ações externas $\{\mathbf{P}\}$ e os esforços internos $\{\mathbf{Q}\}$, devendo respeitar a condição:

$$\{\mathbf{Q}\} - \{\mathbf{P}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (3.66)$$

Os exemplos desenvolvidos no presente trabalho são avaliados do ponto de vista da não linearidade física, desta forma, para a resolução dos sistemas de equações, é realizada a linearização do problema, seguido da solução por via de um processo iterativo. Devido a seu grande uso em diversos trabalhos da literatura, o método de Newton-Raphson foi adotado para a solução dos problemas. Para mais detalhes do método, ver Flórez-López, Marante e Picón (2015) ou Proença (2018). Por fim, a etapa global é finalizada com o cálculo do sistema da estrutura, podendo ser definido através de um processo de linearização:

$$\left\{ \frac{\partial Q(U)}{\partial U} \right\} (\Delta U) + \{P\} = 0 \quad (3.67)$$

em que $\{(\partial Q(U))/\partial U\}$ é a matriz de rigidez tangente, atualizada para todos os passos, e (ΔU) é o incremento de deslocamentos.

A etapa local da análise realizada pelo PEEF está relacionada com a rotina do elemento finito selecionado pelo usuário. Este processo ocorre para todos os elementos da estrutura e visa calcular as variáveis de dano de cada elemento, se houver, que influenciam na resposta da etapa de cálculo dos esforços internos e matriz de rigidez.

Dentro da etapa local, o primeiro passo consiste no cálculo das rotações normais às charneiras (deformações generalizadas), para um dado incremento de deslocamento, para cada elemento finito “ q ”:

$$\{\phi\}_q = [b]_q \{U\}_q \quad (3.68)$$

Após este cálculo, é iniciada a etapa de predição elástica do elemento, na qual supõe-se que o elemento segue a lei constitutiva elástica e linear. Nesta etapa, são calculados os momentos normais às arestas do elemento “ q ” (tensões generalizadas). Vale ressaltar que neste primeiro passo, é admitido que as rotações de dano do passo atual são iguais as rotações calculadas no passo imediatamente anterior.

$$\{M_n\}_q = [E] (\{\phi\}_q - \{\phi^d\}_q) \quad (3.69)$$

Dado o cálculo das tensões generalizadas, o próximo passo da rotina é a verificação se em alguma aresta o momento fletor atuante foi superior ao momento fletor crítico, com o uso das leis de dano descritas na equação (3.46).

Caso todas as leis de dano sejam menores ou iguais a zero ($\{h\} \leq 0$) nenhuma charneira está ativa e não há necessidade de incrementar a rotação de dano. Entretanto, caso ao menos uma charneira esteja ativa ($h > 0$), é ativada a etapa de correção inelástica do passo.

Na rotina de correção inelástica são recalculados os momentos fletores e rotações de dano normais às arestas, de modo que na etapa verificação da lei de dano obtenha-se $h = 0$. Para isto, é elaborado um sistema matricial de equações, formado pelas leis constitutivas do elemento (LC), reescritas na forma da equação (3.70), e pelas leis de evolução do dano de todas as charneiras (LD) (equação (3.46)).

$$\{LC\} = (\{\boldsymbol{\phi}\}_q - \{\boldsymbol{\phi}^d\}_q) - [E]^{-1}\{\mathbf{M}_n\}_q \quad (3.70)$$

Advinda do cálculo diferencial, a linearização de uma equação pode ser definida como:

$$\{LC\} = LC_0 + \frac{\partial LC}{\partial \{\mathbf{M}_n\}} \{\mathbf{M}_n - \mathbf{M}_{n0}\} + \frac{\partial LC}{\partial \{\boldsymbol{\phi}^d\}} (\{\boldsymbol{\phi}^d\} - \{\boldsymbol{\phi}_0^d\}) = 0 \quad (3.71)$$

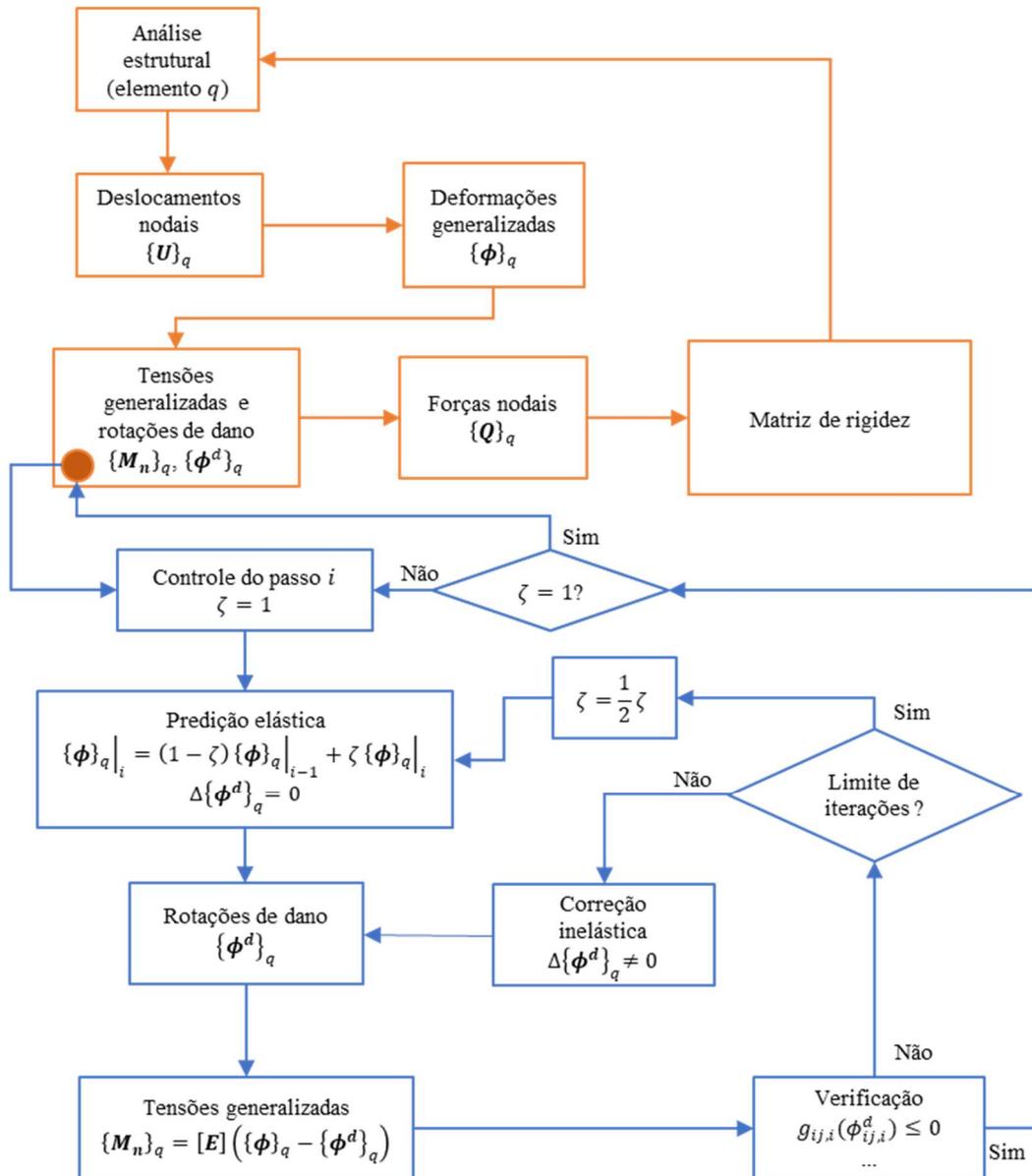
onde o subscrito “0” refere-se ao valor no passo imediatamente anterior.

Realizando-se procedimento análogo para as todas as leis constitutivas e para as leis de dano, é possível elaborar o sistema matricial. No presente trabalho, o sistema de equações tem dimensões $N \times N$, iguais ao número total de momentos fletores e variáveis inelásticas (12 para o DKT e 6 para o CMT, para avaliação de placas de concreto reforçado com fibras) e pode ser escrito no formato:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial LC}{\partial \{\mathbf{M}_n\}} & \frac{\partial LC}{\partial \{\boldsymbol{\phi}^d\}} \\ \frac{\partial LD}{\partial \{\mathbf{M}_n\}} & \frac{\partial LD}{\partial \{\boldsymbol{\phi}^d\}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \{\mathbf{M}_n\} \\ \Delta \{\boldsymbol{\phi}^d\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -LC_0 \\ -LD_0 \end{Bmatrix} \quad (3.72)$$

A solução do sistema é obtida aplicando o método de Newton-Raphson e ao final do processo os valores de $\{\mathbf{M}_n\}$ e $\{\boldsymbol{\phi}^d\}$ são atualizados, de modo que todos os valores de $\{\mathbf{h}\}$ sejam menores ou iguais a 0. Logo após a solução, uma nova etapa de verificação da condição $\{\mathbf{h}\} \leq 0$ é realizada. Caso esta condição não ocorra, é realizada uma nova correção inelástica. As correções são limitadas a um número máximo de iterações definida pelo usuário. Caso este limite seja atingido sem solução (sem convergência), o incremento de deslocamento é reduzido e todo o processo é realizado novamente. A Figura 3.16 apresenta uma representação, através de fluxograma, das etapas de solução realizadas no PEEF.

Figura 3.16: Fluxograma da solução via PEEF.



Fonte: Adaptado de Oliveira (2020).

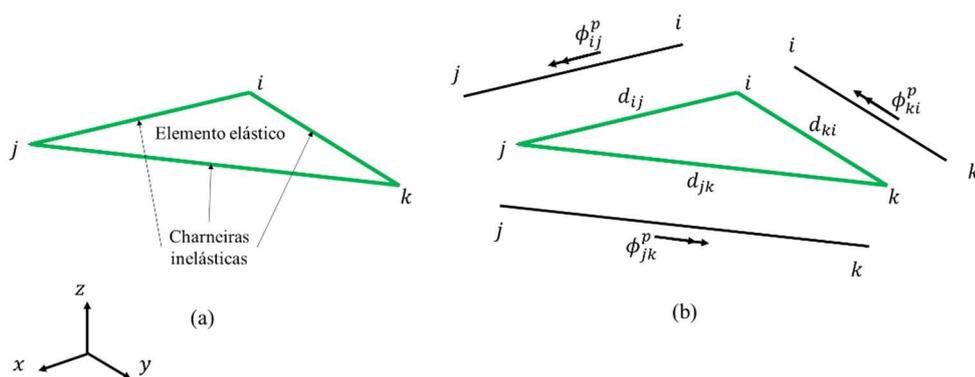
4 MODELO DE DANO CONCENTRADO PARA LAJES

4.1 Adaptações do Elemento de Placa

Note que o elemento finito CMT apresentado na seção 3.3 pode ser aplicado para a análise de placas de concreto simples ou concreto com fibras, de acordo com o valor do parâmetro “ q ”. Nesta seção é proposta a adaptação do referido elemento finito para a análise de placas de concreto armado, também denominadas de lajes. Uma vez que o elemento finito proposto é baseado no mesmo elemento CMT, sua formulação elástica permanece inalterada ao que foi deduzido para as equações cinemáticas, de equilíbrio e constitutiva: seções 3.3.2 a 3.3.4, respectivamente.

A inclusão dos efeitos inelásticos para o problema, a partir da mecânica do dano concentrado, a um elemento finito parte da hipótese em que estes efeitos possam ser concentrados nas arestas do elemento finito, enquanto o restante do elemento permanece em regime elástico linear (Figura 4.1 (a)). Para a consideração dos efeitos inelásticos ao problema de lajes, duas novas variáveis inelásticas são propostas, sendo elas o dano (d) e a rotação plástica (ϕ^p) das arestas, conforme Figura 4.1 (b), em que as rotações podem ser escritas na forma da equação (4.1):

Figura 4.1: Modelo para análise de lajes



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

$$\{\Phi^P\}^t = [\phi_{ij}^p \quad \phi_{jk}^p \quad \phi_{ki}^p]. \quad (4.1)$$

em que ϕ_{ij}^p é a rotação plástica da aresta “ ij ” e assim sucessivamente para as demais arestas.

Para a avaliação do problema, a relação constitutiva deve ser reescrita, de forma a levar em consideração os efeitos inelásticos:

$$\{\Phi - \Phi^P\} = [\mathbf{F}(\mathbf{D})]\{\mathbf{M}_n\}$$

$$[\mathbf{F}(\mathbf{D})] = \begin{bmatrix} \frac{F[1,1]}{1-d_{ij}} & F[1,2] & F[1,3] \\ F[2,1] & \frac{F[2,2]}{1-d_{jk}} & F[2,3] \\ F[3,1] & F[3,2] & \frac{F[3,3]}{1-d_{ki}} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

onde d_{ij} é a variável de dano na aresta “ ij ” e assim sucessivamente para as demais arestas e $\mathbf{F}(\mathbf{D})$ é a matriz de flexibilidade total, que leva em consideração os efeitos de dano, dada pela soma da matriz de flexibilidade elástica $[\mathbf{F}]$ e a matriz de flexibilidade de dano $[\mathbf{C}(\mathbf{D})]$.

4.2 Leis de evolução do dano

A lei de evolução do dano pode ser descrita de acordo com o critério de Griffith, como uma generalização da lei de dano proposta por Flórez-López *et al.* (2015) para o caso de elemento finito de pórticos de concreto armado:

$$\begin{cases} \dot{d}_{ij} = 0, & \text{se } G_{ij} < R(d_{ij}) \\ G_{ij} = R(d_{ij}), & \text{se } \dot{d}_{ij} > 0 \end{cases}$$

$$G_{ij} = \frac{\partial W}{\partial d_{ij}} = \frac{(L_{ij}m_{ij})^2 F^0[1,1]}{2(1-d_{ij})^2} \quad (4.3)$$

$$R_{ij} = R_0^{ij} + q_{ij} \frac{\ln(1-d_{ij})}{(1-d_{ij})}$$

onde R_0^{ij} e q_{ij} são parâmetros do modelo, referentes a aresta “ ij ” e sua obtenção é detalhada na seção 4.4. Estas leis de evolução do dano são replicadas de forma análoga para as demais arestas do elemento, para todos os elementos finitos.

Note que para a formulação proposta, as variáveis de dano das charneiras inelásticas (d_{ij} , d_{jk} e d_{ki}) estão diretamente relacionadas com a fissuração da seção de concreto.

4.3 Leis de evolução da plasticidade

O modelo para lajes é completo com a inclusão da lei de evolução das rotações plásticas:

$$\begin{cases} \dot{\phi}_{ij}^p = 0, & \text{se } f_{ij} < 0 \\ f_{ij} = 0, & \text{se } \dot{\phi}_{ij}^p \neq 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

$$f_{ij} = \left| \frac{L_{ij}m_{ij}}{1 - d_{ij}} - c_{ij}\phi_{ij}^p \right| - k_0^{ij} \leq 0$$

onde c_{ij} e k_0^{ij} são parâmetros do modelo, referentes a aresta “ ij ” e sua obtenção é detalhada na seção 4.4. Estas leis de evolução das rotações plásticas são replicadas de forma análoga para as demais arestas do elemento, para todos os elementos finitos.

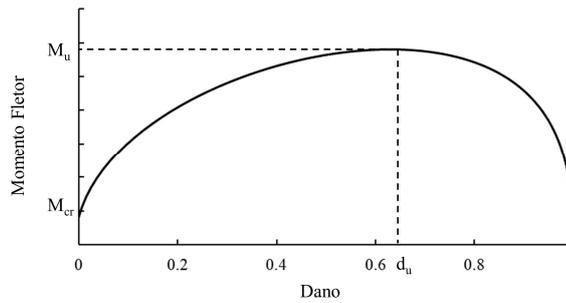
Note que para a formulação proposta, as rotações plásticas das charneiras inelásticas (ϕ_{ij}^p , ϕ_{jk}^p e ϕ_{ki}^p) estão relacionadas com o escoamento da armadura passiva das lajes.

4.4 Cálculo dos parâmetros do modelo

O cálculo dos parâmetros das leis de evolução do dano e de plasticidade são baseados na teoria clássica do concreto armado, explorando as propriedades físicas e geométricas das lajes. A resposta do concreto é admitida através do diagrama parábola-retângulo (ABNT, 2023), enquanto o aço é modelado de acordo com um modelo elastoplástico perfeito. Com base nestes conceitos, é possível desenvolver o cálculo do momento de fissuração (M_{cr}), do momento plástico (M_p) e do momento último (M_u) de uma seção transversal, além da rotação plástica última (ϕ_u^p). Note que estes parâmetros devem ser calculados para cada direção da laje, de acordo com a distribuição da área de aço das armaduras. Além disso, a partir destes parâmetros e dos cossenos diretores de cada aresta dos elementos finitos, é possível calcular os momentos fletores resistentes de cada aresta do elemento analisado.

De acordo com o critério de Griffith, adotado para controlar a lei de evolução do dano nas charneiras inelásticas, é possível considerar que o momento fletor é uma função do dano, conforme mostrado na Figura 4.2. Dois pontos importantes podem ser observados: o início da fissuração (M_{cr}) e a capacidade máxima da seção (M_u).

Figura 4.2: Relação Momento fletor vs Dano.



Fonte: Adaptada de Flórez-López *et al.* (2015).

Para qualquer charneira inelástica, é possível admitir que a fissura (dano) se inicia quando o momento fletor é igual a momento de fissuração, ou seja, nesta condição de momentos fletores, a variável de dano é nula quando $m = M_{cr}$. Com isso, segundo o critério de Griffith, a resistência da primeira fissura é dada por:

$$R_0^{ij} = \frac{M_{cr}^2 F[1,1]}{2} \quad (4.5)$$

O segundo ponto de interesse é o de capacidade máxima da seção. Para essa condição, o momento fletor é igual ao momento fletor último e o dano é igual ao dano último (d_{ij}^u). Além disso, nesse ponto, a curva Momento fletor vs. Dano apresenta uma tangente horizontal. Portanto, é possível definir um sistema de equações na forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{M_u^2 F[1,1]}{2(1 - d_{ij}^u)^2} = R_0^{ij} + q_{ij} \frac{\ln(1 - d_{ij}^u)}{(1 - d_{ij}^u)} \\ \left. \frac{\partial m}{\partial d} \right|_{d=d_{ij}^u} = 0 = 2R_0^{ij}(1 - d_{ij}^u) + q_{ij}[1 + \ln(1 - d_{ij}^u)] \end{array} \right. \quad (4.6)$$

Ao resolver o sistema de equações, os parâmetros d_{ij}^u e q_{ij} são determinados. Nas leis de evolução do dano, o parâmetro R_0^{ij} pode ser definido como a primeira resistência à fissuração e q_{ij} , a resistência adicional devido à armadura.

De forma similar, é possível definir um valor de dano para o momento plástico (d_{ij}^p). Aplicando o critério de Griffith para esta condição:

$$\frac{M_p^2 F[1,1]}{2(1-d_{ij}^p)^2} = R_0^{ij} + q_{ij} \frac{\ln(1-d_{ij}^p)}{(1-d_{ij}^p)} \quad (4.7)$$

No ponto do momento plástico, a armadura começa a escoar, ou seja, ϕ_{ij}^p é nula. Desta forma, a lei de evolução plasticidade pode ser reescrita:

$$k_0^{ij} = \frac{M_p}{1-d_{ij}^p} \quad (4.8)$$

Finalmente, para a capacidade última da seção transversal ($m = M_u$), a rotação plástica é igual a rotação plástica última. Portanto:

$$c_{ij} = \frac{1}{\phi_{u,ij}^p} \left(\frac{M_u}{1-d_{ij}^u} - k_0^{ij} \right) \quad (4.9)$$

Este procedimento deve ser realizado de forma similar para as demais arestas do elemento, para todos os elementos finitos, ao início da análise.

Para a formulação proposta, não é realizado nenhum tipo de restrição quanto a região de abertura de charneiras inelásticas. Desta forma, os critérios de iniciação e propagação dependem unicamente das propriedades da laje na respectiva charneira e dos momentos fletores atuantes.

5 MODELO DE DANO CONCENTRADO PARA CASCAS

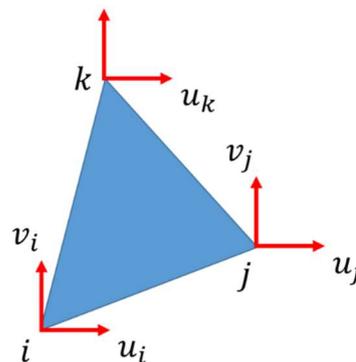
Os modelos apresentados nas seções 3 e 4 estão diretamente relacionados a placas e lajes, nas quais as ações atuantes agem perpendicularmente ao plano médio dos elementos. No entanto, em diversos casos da engenharia existem problemas nos quais devem ser avaliados elementos curvos. Para esta condição, além das ações perpendiculares ao plano dos elementos, as ações na direção do plano podem influenciar significativamente nos resultados. Portanto, propõe-se a dedução de um elemento finito de chapa, o qual é acoplado ao elemento finito de lajes, criando um elemento finito plano de cascas, para a análise cascas de concreto armado.

5.1 Elemento Finito de Chapa

Com o objetivo de realizar o acoplamento entre um elemento de chapa e o elemento CMT, é necessário garantir a compatibilidade de forma entre os elementos finitos. Desta forma, para o desenvolvimento das análises, foi adotado o elemento finito triangular de deformação constante (*Constant Strain Triangle* – CST). Este é um elemento finito com 3 nós, com graus de deslocamento nas duas direções do plano (u, v), para cada nó, totalizando 6 graus de liberdade, conforme apresentado na Figura 5.1 e equação (5.1):

$$\{\mathbf{U}\}^T = \{u_i \quad v_i \quad u_j \quad v_j \quad u_k \quad v_k\} \quad (5.1)$$

Figura 5.1: Elemento finito CST.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Note que, o elemento CST pode ter seu comportamento elástico definido de acordo com a equação (5.2):

$$\begin{aligned}\{\boldsymbol{\varepsilon}\} &= [\mathbf{B}]\{\mathbf{U}\} \\ \{\boldsymbol{\sigma}\} &= [\mathbf{H}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{H}][\mathbf{B}]\{\mathbf{U}\} \\ \{\mathbf{Q}\} &= \iint_v [\mathbf{B}]^T \{\boldsymbol{\sigma}\} dV \\ [\mathbf{K}] &= \iint_v [\mathbf{B}]^T [\mathbf{H}][\mathbf{B}] dV\end{aligned}\quad (5.2)$$

em que $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$, $\{\boldsymbol{\sigma}\}$, $\{\mathbf{Q}\}$ são os vetores de deformações específicas, tensões e reações nodais do elemento, respectivamente, $[\mathbf{K}]$ é a matriz de rigidez e $[\mathbf{B}]$ e $[\mathbf{H}]$ são as matrizes de transformação cinemática e a matriz constitutiva do elemento de chapa, dadas pelas equações (5.3) e (5.4), respectivamente.

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$N_1 = \frac{1}{2A} [y_k x_j - y_j x_k + x(y_j - y_k) + y(x_k - x_j)]$$

$$N_2 = \frac{1}{2A} [y_i x_k - y_k x_i + x(y_k - y_i) + y(x_i - x_k)]$$

$$N_3 = \frac{1}{2A} [y_j x_i - y_i x_j + x(y_i - y_j) + y(x_j - x_i)]$$
(5.3)

$$[\mathbf{H}] = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 + \nu}{2} \end{bmatrix}$$
(5.4)

5.1.1 Equações cinemáticas

O campo de deslocamentos para o elemento CST pode ser definido pelo triângulo de Pascal linear incompleto:

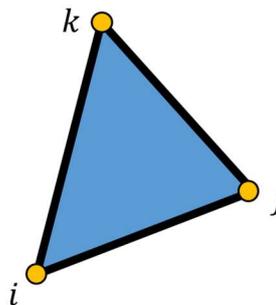
$$\begin{aligned} u(x) &= a_0 + a_1x + a_2y \\ v(x) &= a_3 + a_4x + a_5y \end{aligned} \quad (5.5)$$

onde a_i , $i = 0, 5$ são constantes a serem determinadas. Por sua vez, as deformações do elemento CST podem ser expressas:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = a_1 \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = a_5 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = a_2 + a_4 = a_{24} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Portanto, a descrição completa das deformações do elemento CST fica em função de 3 constantes independentes a serem determinadas. Para esta descrição, é possível a adoção de uma descrição similar ao que foi apresentado por Amorim (2016), com a proposta de um campo de deformações generalizadas, que são expressas através de barras de uma treliça equivalente, a serem posicionadas entre os nós do elemento finito, denominados de extensômetros numéricos ou “numexes”:

Figura 5.2: Treliça equivalente de 3 barras.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

O campo de deformações generalizadas é definido através dos alongamentos das barras dos numexes:

$$\{\boldsymbol{\delta}\}^T = \{\delta_{ij} \quad \delta_{jk} \quad \delta_{ik}\} \quad (5.7)$$

Aplicando o vetor de deformações generalizadas como nova variável cinemática, as equações cinemáticas são reescritas:

$$\{\boldsymbol{\delta}\} = [\mathbf{b}]\{\mathbf{U}\}$$

$$[\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} -c_{ij} & -s_{ij} & c_{ij} & s_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_{jk} & -s_{jk} & c_{jk} & s_{jk} \\ -c_{ik} & -s_{ik} & 0 & 0 & c_{ik} & s_{ik} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Além disso, é possível definir a matriz de transformação entre matrizes cinemáticas, de forma similar ao definido para o elemento DKT:

$$[\mathbf{B}] = [\mathbf{T}][\mathbf{b}]$$

$$[\mathbf{B}][\mathbf{b}]^T = [\mathbf{T}][\mathbf{b}][\mathbf{b}]^T \quad (5.9)$$

$$[\mathbf{T}] = [\mathbf{B}][\mathbf{b}]^T([\mathbf{b}][\mathbf{b}]^T)^{-1}$$

O campo de deformações específicas pode ser escrito em função dos alongamentos:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{T}]\{\boldsymbol{\delta}\} \quad (5.10)$$

5.1.2 Equações constitutivas

As equações constitutivas, para o cálculo das tensões ao longo do elemento CST, podem ser reescritas, trocando a variável cinemática do problema:

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{H}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{H}][\mathbf{B}]\{\mathbf{U}\}$$

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{H}][\mathbf{T}]\{\boldsymbol{\delta}\} \quad (5.11)$$

5.1.3 Equações de equilíbrio

As equações de equilíbrio para o elemento CST podem ser reescritas, a fim de considerar a nova variável cinemática, além de admitir que as tensões são constantes ao longo do elemento:

$$\begin{aligned}
 \{\mathbf{Q}\} &= \iint_V [\mathbf{B}]^T \{\boldsymbol{\sigma}\} dV \\
 \{\mathbf{Q}\} &= t \iint [\mathbf{b}]^T [\mathbf{T}]^T \{\boldsymbol{\sigma}\} dA \\
 \{\mathbf{Q}\} &= tA [\mathbf{b}]^T [\mathbf{T}]^T \{\boldsymbol{\sigma}\} \\
 \{\mathbf{Q}\} &= tA [\mathbf{b}]^T [\mathbf{T}]^T [\mathbf{H}] [\mathbf{T}] \{\boldsymbol{\delta}\}
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

5.1.4 Matriz de rigidez

A matriz de rigidez para o elemento finito CST pode ser reescrita de forma análoga:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{K}] &= \iint_v [\mathbf{B}]^T [\mathbf{H}] [\mathbf{B}] dV \\
 [\mathbf{K}] &= t [\mathbf{b}]^T \iint [\mathbf{T}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{T}] [\mathbf{b}] dA \\
 [\mathbf{K}] &= tA [\mathbf{b}]^T [\mathbf{T}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{T}] [\mathbf{b}]
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

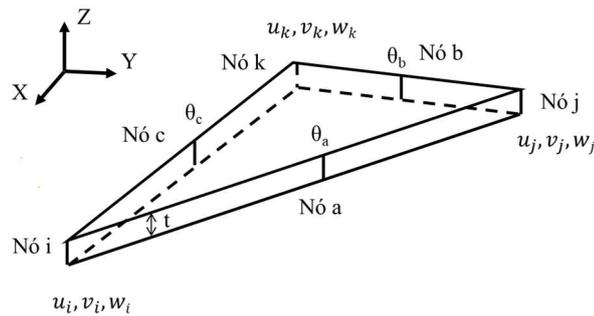
5.2 Acoplamento entre o elemento CST e o elemento de lajes

O modelo proposto de dano concentrado para análise de cascas de concreto armado admite que a resposta no plano do elemento é dada em regime elástico linear. Desta forma, todos efeitos inelásticos são referentes ao elemento de laje (dano e rotações plásticas). Além disso, é admitido que os esforços no plano não possuem interação com os momentos fletores e que o modelo de dano é isotrópico por faces, portanto, é possível aplicar a superposição de efeitos entre o elemento CST e o elemento de lajes.

Com base nestas hipóteses, a superposição entre os elementos é realizada, de modo a ser elaborado um elemento finito de casca plano de 6 nós, nos quais os nós dos cantos possuem 3 graus de liberdade e os nós intermediários, 1 grau de liberdade, totalizando 12 graus de liberdade, conforme apresentado na Figura 5.3 e disposto na equação (5.14):

$$\{\mathbf{U}\}^t = \{u_i \ v_i \ w_i \ u_j \ v_j \ w_j \ u_k \ v_k \ w_k \ \theta_a \ \theta_b \ \theta_c\} \quad (5.14)$$

Figura 5.3: Elemento finito de casca proposto.



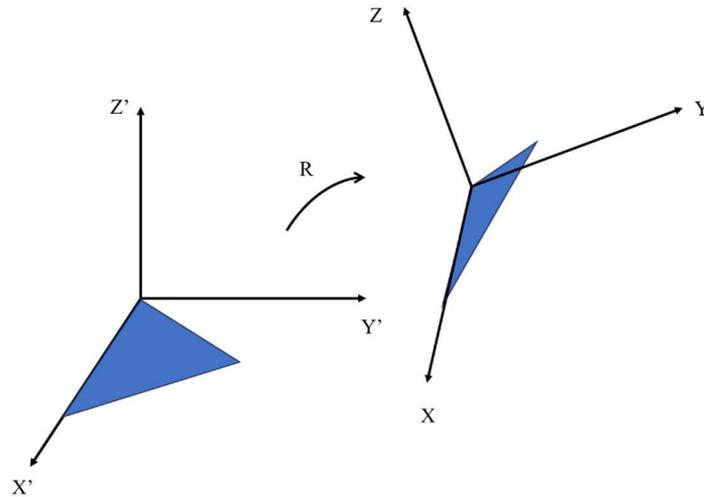
Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

A solução do elemento de casca é realizada com a superposição das soluções locais referentes a parcela de flexão e a parcela de membrana. Desta forma, ao fim da solução isolada de cada problema (flexão e axial) as matrizes de rigidez, forças e de deslocamentos são combinadas, para efetuar a solução global do passo analisado do problema.

5.3 Montagem das Matrizes no Sistema Global

Os elementos finitos CMT e CST são elementos planos, com as soluções locais apresentadas nas seções anteriores. Note que, para o caso de problemas espaciais (estrutura fora do plano), faz-se necessário a inclusão de uma matriz de rotações, que visa levar a solução do plano para os eixos globais (Figura 5.4).

Figura 5.4: Rotação de eixos do elemento de casca.



Fonte: Adaptado de Zienkiewicz e Taylor (2000).

As forças e deslocamentos ($\{\mathbf{F}'\}$ e $\{\mathbf{U}'\}$) do sistema local (X', Y' e Z') se relacionam com suas componentes no sistema global ($\{\mathbf{F}\}$ e $\{\mathbf{U}\}$) (X, Y e Z) através de uma matriz de rotações ($[\mathbf{R}]$) de acordo com a equação (5.15). Note que as dimensões da matriz de rotações podem ser reduzidas ou aumentadas, de acordo com o número de nós do problema a ser rotacionado, removendo ou adicionando termos $[\lambda]$ à diagonal da matriz.

$$\begin{aligned} \{\mathbf{U}'\} &= [\mathbf{R}]\{\mathbf{U}\} & \{\mathbf{F}'\} &= [\mathbf{R}]\{\mathbf{F}\} \\ [\mathbf{R}] &= \begin{bmatrix} [\lambda] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [\lambda] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [\lambda] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [\lambda] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [\lambda] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [\lambda] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.15)$$

onde λ é a matriz de cossenos diretores, com dimensões 3×3 , dos ângulos que são formados entre os dois sistemas de eixo:

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \{\mathbf{v}_{X'}\}^T \\ \{\mathbf{v}_{Y'}\}^T \\ \{\mathbf{v}_{Z'}\}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{X'X} & \lambda_{X'Y} & \lambda_{X'Z} \\ \lambda_{Y'X} & \lambda_{Y'Z} & \lambda_{Y'Z} \\ \lambda_{Z'X} & \lambda_{Z'Y} & \lambda_{Z'Z} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

sendo $\lambda_{X'X}$ o cosseno do ângulo formado pelos eixos X e X'

Seja o caso de um elemento triangular plano, com coordenadas globais $x_i, x_j, x_k, y_i, y_j, y_k, z_i, z_j, z_k$, é possível definir o vetor V_{ij} referente a um lado do elemento:

$$\{\mathbf{V}_{ij}\}^T = \{x_j - x_i \quad y_j - y_i \quad z_j - z_i\} \quad (5.17)$$

O primeiro conjunto de vetores diretores pode ser obtido através do versor:

$$\{\mathbf{v}_X'\}^T = \frac{1}{L_{ij}} \{\mathbf{V}_{ij}\}^T = \{\lambda_{X'X} \quad \lambda_{X'Y} \quad \lambda_{X'Z}\} \quad (5.18)$$

A direção Z deve ser normal ao plano do triangulo. Desta forma, faz-se o produto vetorial entre o vetor $\{\mathbf{V}_{ij}\}$ e um segundo vetor $\{\mathbf{V}_{ik}\}$ pertencente ao plano do elemento:

$$\{\mathbf{V}_{Z'}\} = \{\mathbf{V}_{ij}\} \times \{\mathbf{V}_{ik}\} \quad (5.19)$$

Portanto, o segundo conjunto de cossenos diretores é dado por:

$$\{\mathbf{v}_Z'\}^T = \frac{1}{L'_{Z'}} \{\mathbf{V}_{Z'}\} = \{\lambda_{Z'X} \quad \lambda_{Z'Y} \quad \lambda_{Z'Z}\} \quad (5.20)$$

Por fim, tem-se que o terceiro cosseno diretor deve ser perpendicular aos dois primeiros vetores:

$$\{\mathbf{v}_Y'\}^T = \{\mathbf{v}_Z'\}^T \times \{\mathbf{v}_X'\}^T = \{\lambda_{Y'X} \quad \lambda_{Y'Y} \quad \lambda_{Y'Z}\} \quad (5.21)$$

6 PROGRAMA EXPERIMENTAL

Com o objetivo de validar o elemento finito de placa proposto com experimentos próprios, foi realizada uma campanha experimental para a moldagem de placas de concreto reforçado com fibras de aço. Toda a execução dos experimentos, desde moldagem ao rompimento foi realizada no Laboratório de Estruturas e de Materiais (LEMA), vinculado ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas (PPGEC/UFAL). Para a realização dos ensaios, foi utilizado o recurso PROAP/CAPES, seguindo todas as regras de uso exigidas pela UFAL.

Para auxiliar no desenvolvimento dos experimentos, desde a concepção até a etapa de rompimento, foi contada com a ajuda dos professores Aline da Silva Ramos Barboza¹ e Wayne Santos de Assis¹, vinculados ao PPGEC/UFAL, os quais foram de grande valia para a execução de todo o programa experimental. A seguir são dispostas mais informações a respeito da campanha experimental.

6.1 Materiais

Para a execução das moldagens foi utilizado como base um traço de concreto reforçado com fibras, previamente calculado pela professora aposentada da Universidade Federal de Sergipe, Ângela Teresa Costa Sales. O traço sofreu leves ajustes, devido às alterações referentes aos materiais utilizados.

Desta forma, foi utilizado o traço 1:2,35:2,60, com relação água/cimento (a/c) igual a 0,54 e resistência à compressão de 25 MPa. Nos presentes experimentos, o cimento utilizado foi do tipo CP II-Z 32, com consumo de cimento de 367,56 kg/m³. Foi utilizado aditivo plastificante da marca Sika, em uma proporção de 0,34% em massa de cimento, e o teor de fibras de aço foi de 32,59 kg/m³ (0,35%, em volume). As fibras utilizadas foram do tipo FF4, com ancoragem, cujo diâmetro é igual a 0,75 mm, comprimento igual a 60 mm e fator de forma de 80, conforme a Figura 6.1 (MACCAFERRI, 2014).

¹ Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, Brasil.

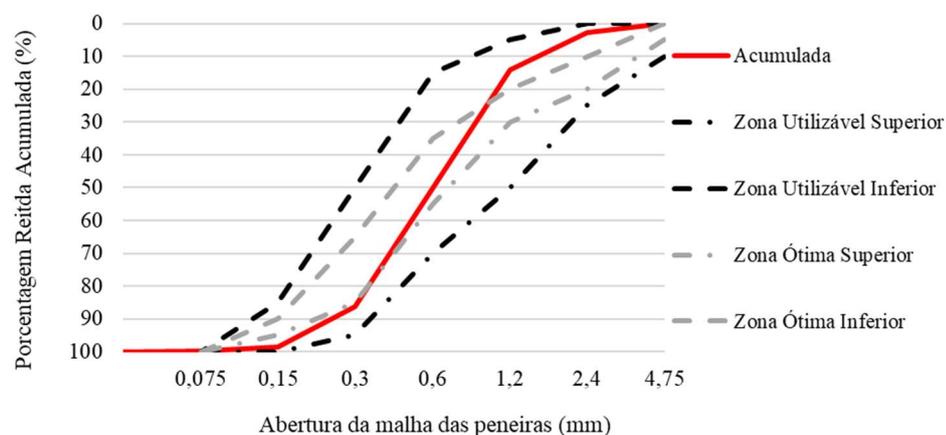
Figura 6.1: Fibra de aço.



Fonte: Adaptado de Maccaferri (2014).

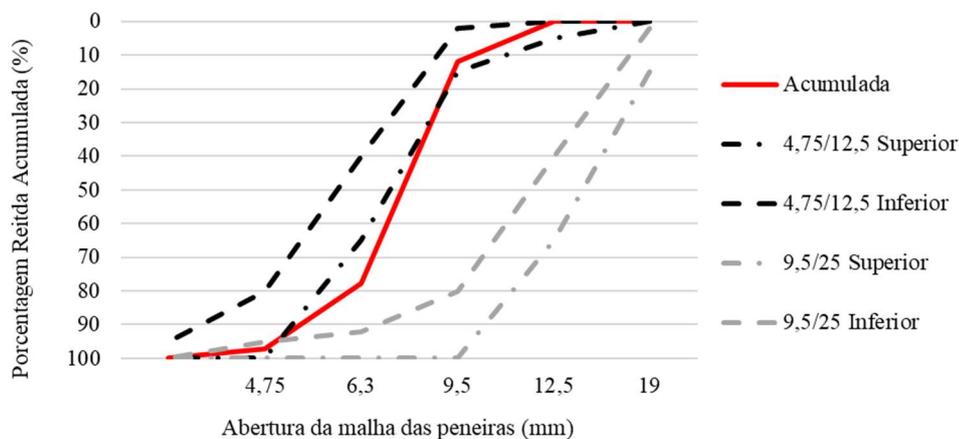
Com relação a areia e a brita, ambos os materiais foram secos em estufa, com temperatura superior a 100°C, por um período mínimo de 24h, e devidamente armazenados, para evitar que os mesmos voltassem a ficar úmidos. Em específico para a brita, previamente a secagem em estufa, todo o material foi lavado com água corrente, para remover o pó aderido às britas, utilizando a peneira da série normal com abertura da malha de 4,75 mm, também para remover os materiais inferiores a este diâmetro. Após a etapa de secagem, a areia e a brita foram peneiradas, para utilizar os diâmetros desejados. Para a areia, foi utilizada a peneira da série normal com abertura da malha de 4,75 mm, sendo utilizado o material passante. Para a brita, foi empregada apenas brita 0. Desta forma, foi usado o material passante da peneira com abertura de malha de 12,5 mm e que haviam sido previamente retidos na peneira de 4,75 mm, durante a etapa de lavagem. Realizadas estas etapas, foi coletada uma amostra representativa do montante de cada um destes materiais para a realização do ensaio de granulometria. O ensaio seguiu todas as recomendações da NBR NM 248 (ABNT, 2003), sendo obtidas as curvas granulométricas para a areia e brita, apresentadas na Figura 6.2 e Figura 6.3, respectivamente. A Figura 6.4 apresenta uma amostra dos materiais utilizados na execução dos experimentos (areia, brita e fibras de aço).

Figura 6.2: Curva granulométrica da areia.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Figura 6.3: Curva granulométrica da brita.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

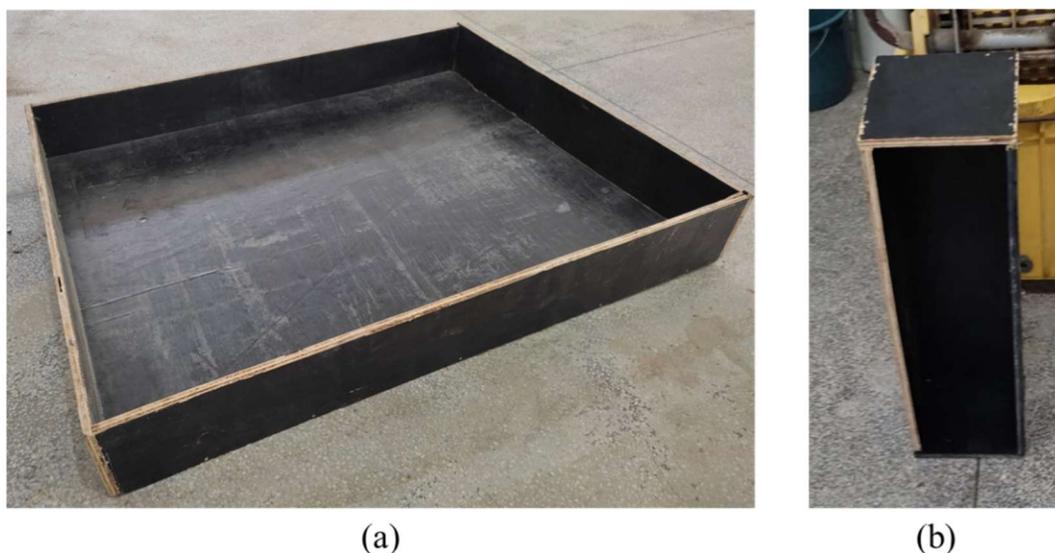
Figura 6.4: Materiais utilizados para a moldagem: (a) areia, (b) brita e (c) fibras de aço.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Os corpos de prova das placas e vigas foram moldados em fôrmas de madeira compensada plastificada, de espessura igual a 12 mm. As dimensões das formas foram medidas com o auxílio de réguas e escalímetros e cortadas com o uso de uma serra circular portátil NK1580. A montagem das formas foi realizada com o uso de pregos, de modo que não houvesse aberturas que permitissem o vazamento da nata de concreto. A Figura 6.5 apresenta a foto das fôrmas utilizadas. Finalizados os preparativos, foi realizada a moldagem de todos os corpos de prova.

Figura 6.5: Formas: (a) das placas e (b) das vigas.



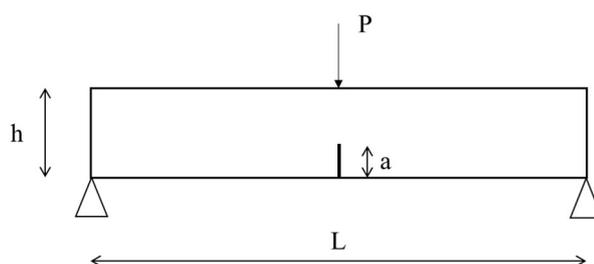
Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

6.2 Moldagem

O objetivo principal da campanha experimental foi a obtenção de placas de concreto reforçado com fibras de aço para posterior ensaio e validação com o elemento finito proposto. Ciente disto, foi definido que seriam moldadas 4 placas, com dimensões de 1,00 m x 0,80 m x 0,12 m.

Como observado por Teles (2022), o parâmetro “ q ” da LDNL pode estar relacionado com a energia de fratura do material. Considere uma viga retangular de concreto reforçado com fibras, de comprimento L , com altura e base da seção transversal iguais a h e b , respectivamente, com um entalhe no centro da viga, de altura a , e sujeita a um ensaio de flexão de 3 pontos (Figura 6.6).

Figura 6.6: Geometria da viga sob ensaio de flexão de 3 pontos.



Fonte: Elaborada pelo autor (2013).

De acordo com o RILEM TC-50 FMC (1985) a energia de fratura pode ser calculada através da equação (6.1):

$$G_f = \frac{1}{(h-a)b} \int P d\delta \Rightarrow G_f = \frac{W_f + mg\delta_f}{(h-a)b} \quad (6.1)$$

em que W_f é o trabalho das forças externas, definido como a área abaixo da curva Força vs. Deslocamento no ensaio de flexão de 3 pontos, m é a massa da viga, g é a aceleração da gravidade ($9,81 \text{ m/s}^2$) e δ_f é o deslocamento vertical da viga ao final do ensaio.

Desta forma, com o objetivo de calcular a energia de fratura do concreto com fibras, para cada placa de concreto moldada (1 placa por betonada), foram moldadas 2 vigas do mesmo concreto, totalizando 8 vigas. As dimensões das vigas seguiram o que é preconizado pela NBR 16940 (ABNT, 2021), com seção transversal de dimensões $0,15 \text{ m} \times 0,15 \text{ m}$ e vão entre $0,55 \text{ m}$ e $0,7 \text{ m}$. No presente trabalho foi adotado um vão de $0,60 \text{ m}$.

Por fim, também foi definida a moldagem dos corpos de prova (CPs), para a determinação da resistência à compressão (5 espécimes por placa) e módulo de elasticidade longitudinal do concreto (3 espécimes por placa), seguindo o que estabelecem a NBR 5739 (ABNT, 2018) e NBR 8522 (ABNT, 2017), respectivamente.

Ao total foi utilizado o seguinte quantitativo de materiais para a execução dos ensaios:

Tabela 6.1: Quantitativos totais para as moldagens.

Cimento (kg)	262,11
Areia (kg)	615,96
Brita 0 (kg)	681,49
Fibras de aço (kg)	25,92
Água (L)	139,52
Aditivo plastificante (L)	0,95

Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

A moldagem dos corpos de prova foi realizada em 2 dias: 08/11/2022 e 10/11/2022. Esta divisão foi realizada devido ao grande volume de concreto a ser moldado. Para cada betonada foram moldadas 1 placa, 2 vigas e 8 CPs, com um volume aproximado de 150 L, sendo produzidas 4 betonadas ao total. A execução da concretagem foi realizada adotando a seguinte ordem de lançamento dos materiais:

1. Lançamento de metade da água;
2. Lançamento de metade da brita;

3. Lançamento de toda areia;
4. Lançamento de todo o cimento;
5. Lançamento da segunda metade de britas;
6. Lançamento da segunda metade de água;
7. Lançamento do aditivo plastificante;
8. Adição gradual das fibras de aço (Figura 6.7(a)).

Figura 6.7: Moldagem do concreto: (a) lançamento das fibras e (b) concreto pronto.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Ao fim da adição de todos os materiais na betoneira, o concreto apresentava boa aparência (Figura 6.7(b)). O ensaio de abatimento do tronco de cone foi então realizado, na condição do concreto já com fibras (Figura 6.8), e, portanto, apresentava maior consistência. Para estas condições, o abatimento médio de todas as betonadas foi igual a 2 cm.

O concreto foi então lançado nas fôrmas das placas, das vigas e cilindros dos CPs. Todas as fôrmas e cilindros foram untados com óleo vegetal, para facilitar na etapa de desmoldagem. Para as placas e as vigas, o adensamento foi realizado em 3 camadas, com o uso de um vibrador (Figura 6.9). Para os CPs, o adensamento foi realizado através de golpeamento em 3 camadas, cada camada com 12 golpes, distribuídos na seção transversal do cilindro, com o uso de uma haste metálica padrão, como preconiza a NBR 5738 (ABNT, 2015).

Figura 6.8: Medida de abatimento do concreto.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Figura 6.9: Adensamento do concreto: (a) placas e (b) vigas.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

A duração média das betonadas, do lançamento da primeira metade da água até o fim de todos os adensamentos, foi aproximadamente 2 horas. Com o objetivo de evitar a perda de água do concreto por exsudação nas primeiras horas após as moldagens, e, portanto, evitar a fissuração por retração, todos os elementos moldados foram cobertos com plástico filme (Figura 6.10), pelo período de 24h, até o desmolde dos elementos para a cura.

Figura 6.10: Corpos de prova cobertos por plástico filme.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Foi realizada a cura úmida para todos os elementos estruturais. Após o desmolde, as vigas e os CPs foram armazenados dentro de tanque de cura presente no LEMA. No entanto, devido a suas dimensões e massa estimada entre 200kg e 300kg, as placas não puderam ser armazenadas dentro dos mesmos tanques de cura. Para realizar a cura destes espécimes foi preparada uma argamassa com traço 1:8, a qual foi aplicada nas bordas das fôrmas de todas as placas. Desta forma, após o período de secagem da argamassa, foi possível criar uma película de água de aproximadamente 3 cm acima de todas as placas para realizar a cura (Figura 6.11). Vale ressaltar que as formas laterais das placas de concreto não foram removidas, para auxiliar no processo da cura, e que a água acima das placas foi reposta 2 vezes ao dia até completar os 28 dias.

Figura 6.11: Processo de cura das placas.



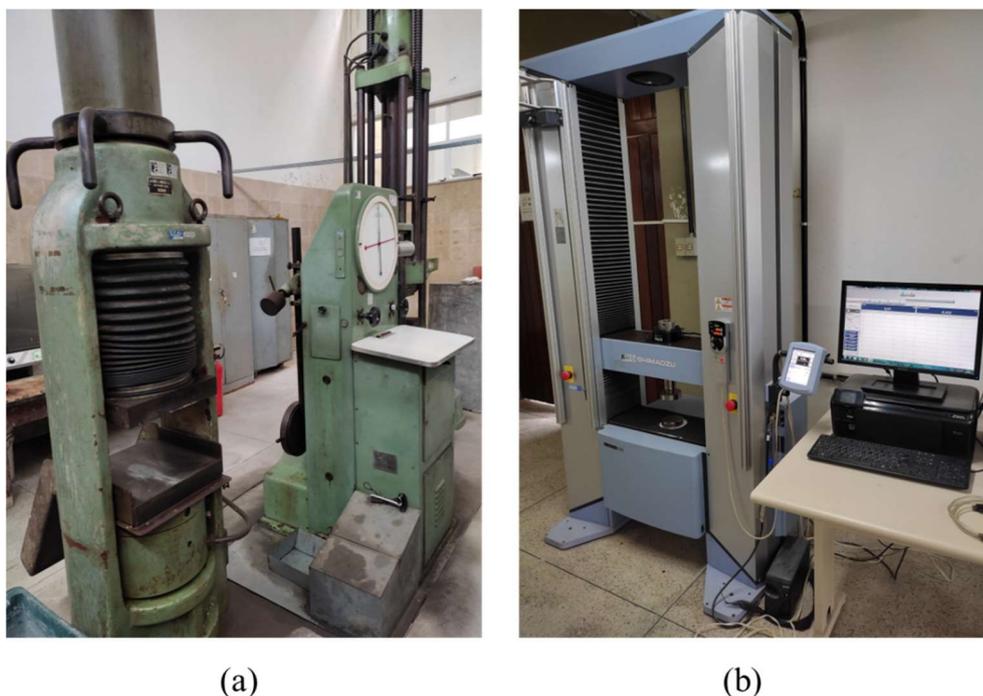
Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

6.3 Equipamentos

Para a execução das moldagens, bem como os experimentos, foram utilizados os equipamentos do LEMA. Devido ao grande volume de concreto a ser preparado, foi utilizada uma betoneira com capacidade de 400 L, a qual foi utilizada até um volume aproximado de 150 L, sendo realizadas 4 betonadas.

Com relação ao rompimento dos corpos de prova cilíndricos, seja para o ensaio de compressão, seja para o ensaio de módulo de elasticidade, foi utilizada uma máquina universal da AMSLER (Figura 6.12(a)), com capacidade de 200 tf. Previamente aos ensaios, os CPs foram retificados com uma máquina retificadora disponível no LEMA.

Figura 6.12: Máquinas universais: (a) AMSLER e (b) Shimadzu.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

As vigas moldadas foram rompidas na máquina universal AG-X plus, da Shimadzu, com capacidade de carga de até 100 kN (Figura 6.12(b)) (SHIMADZU, 2023). Para o cálculo da energia de fratura (equação (6.1)), foram realizados entalhes nas vigas com o uso de uma serra mármore portátil DW862-B2 (Figura 6.13). O entalhe se localiza no meio do vão da viga, na superfície lateral do corpo de prova, a qual será submetida às tensões de tração durante o ensaio de flexão de 3 pontos. Os entalhes seguiram as recomendações da EN 14651 (2007),

com 5 mm de espessura e 25 mm de profundidade, com finalidade de induzir o posicionamento da fissura.

Figura 6.13: Realização dos entalhes nas vigas.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Para a aplicação da carga nas placas de concreto reforçadas com fibras de aço, foram utilizados os equipamentos da Enerpac (2024). Foi utilizada uma bomba do modelo ZE – 4840MG: bomba com motor elétrico, trifásica, com vazão de óleo 0,98 l/min, a 700 bar de pressão máxima, com capacidade de até 40 litros de óleo, com válvula manual, com 4 vias/3 posições manuais de bloqueio com retenção pilotada (Figura 6.14(a)). Para a aplicação da carga nas placas, foi utilizado o cilindro hidráulico RC-506: cujo diâmetro do pistão é igual a 71,2 cm², de curso do pistão igual a 159 mm, capacidade de óleo de 1131 cm³ e capacidade de carga de até 50 tf (Figura 6.14(b)) (ENERPAC, 2024).

Figura 6.14: Equipamentos de aplicação de carga: (a) bomba e (b) cilindro hidráulico.



(a)

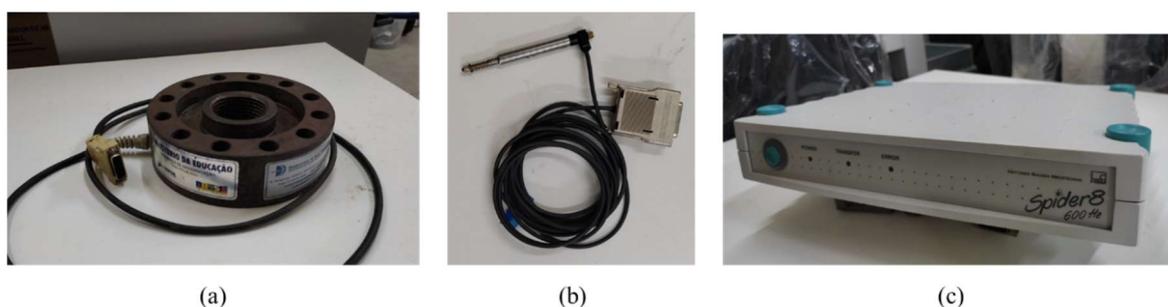


(b)

Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Além dos equipamentos relacionados a aplicação de força na estrutura, também deve-se avaliar os equipamentos para a coleta dos dados de saída, em específico as forças e os deslocamentos aplicados. Para medida das forças foi utilizada uma célula de carga da *Gunt Hamburg*, com capacidade máxima de 50 tf (LT50), cuja voltagem de saída varia de 0-10 V (Figura 6.15(a)) (S2 TECH, 2024). Para a medição dos deslocamentos foi utilizado 1 transdutor de deslocamento variável linear (LVDT), com curso de 10 mm (Figura 6.15(b)) (HBM, 2022a). Estes dois últimos equipamentos não apresentam respostas diretas, sendo necessário o uso de outros equipamentos para o reconhecimento dos dados de saída e, portanto, interpretação dos resultados. Isto se deve, pois, as células de carga e os LVDTs são equipamentos em que a resposta é dada em termos de tensão (mV/V). Desta forma é necessário utilizar o equipamento Spider8 (Figura 6.15(c)) (HBM, 2022b) para leitura dos dados destes equipamentos, através da conexão dos equipamentos com cabos D-Sub HD-15, usuais para as células de carga e LVDTs.

Figura 6.15: Equipamentos de medição: (a) célula de carga, (b) LVDT e (c) Spider8.



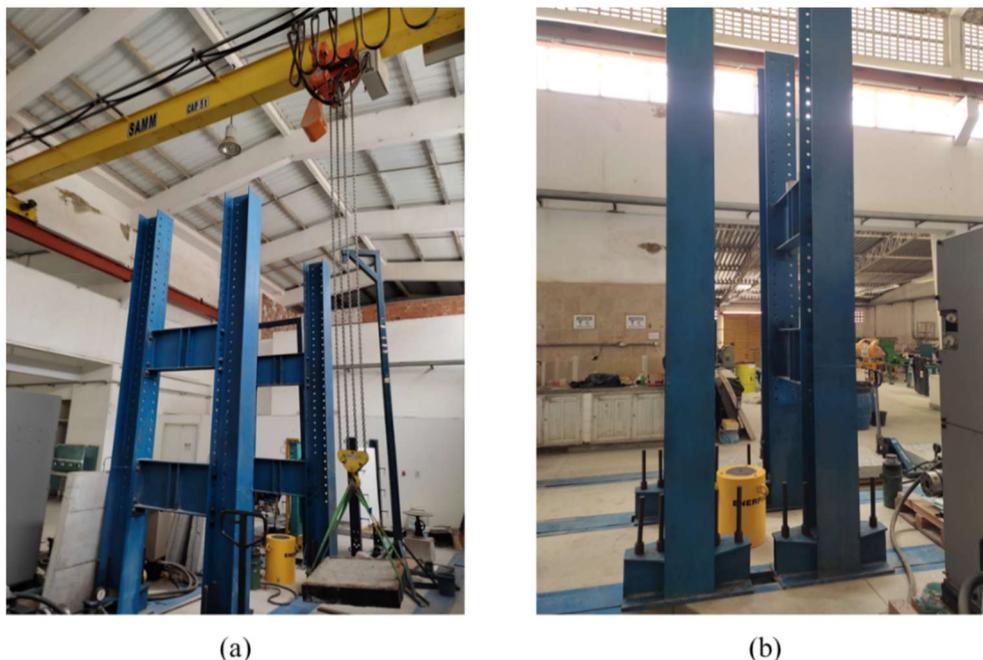
Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

No entanto, o equipamento Spider8 apenas faz a leitura dos dados de saída da célula de carga e LVDTs, ainda sendo necessário exportá-los para computadores, a fim de analisar e utilizar os dados. Existem diversos programas computacionais que desempenham o papel de leitura e exportação de dados, como o Itom (ITOM, 2018) e o Catman (HBM, 2022c). No presente trabalho foi utilizado o Itom, devido a sua viabilidade para uso, por ser um programa computacional aberto. Para a leitura dos dados, o Spider8 deve ser conectado ao computador com o uso de um cabo RS232-USB e então configurar o respectivo programa para leitura dos dados de cada equipamento utilizado. O passo a passo para o uso do Itom é detalhado no Apêndice B.

Dadas as dimensões das placas de concreto reforçado com fibras, para realizar o seu ensaio de rompimento, faz-se necessário do uso de uma estrutura maior e mais rígida que as máquinas universais. Para isto foi utilizado um pórtico metálico, instalado no LEMA, que conta com uma laje de reação. Graças a presença de trilhos, o pórtico permite variar o vão das peças

a serem rompidas, conforme apresentado na Figura 6.16. Além disso, devido ao peso das placas, estimado em 240 kg, a fim de evitar acidentes e facilitar a movimentação das peças, foi utilizada uma ponte rolante (Figura 6.16(a)), cuja capacidade é de até 5 t, e fitas específicas para o içamento, cada fita com capacidade de 1 t.

Figura 6.16: (a) ponte rolante e (b) pórtico metálico.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Além disso, com o objetivo de realizar a gravação dos ensaios das placas para posteriores análises, como com a aplicação da técnica de correlação de imagens digitais (CID), foi utilizada uma câmera digital Nikon DSLR D5500, com lente de 18-140 mm.

6.4 Ensaios

Para a aplicação da técnica de correlação de imagens digitais, no dia anterior aos ensaios, todas as placas foram pintadas com o uso de tintas de cores branco, azul e preto, seguindo um padrão aleatório. Com o objetivo de detectar qualquer fissura que possa ocorrer na face tracionada da placa, toda a sua área foi pintada. Para avaliar a qualidade da pintura, foi utilizado o programa computacional Correli-Q4, realizando análises de textura e incertezas. Caso os resultados apresentassem baixa qualidade, a pintura seria melhorada, com uma melhor

distribuição das cores e as análises seriam refeitas. A Figura 6.17 apresenta o preparo das placas para aplicação da CID.

Figura 6.17: Placas preparadas para correlação de imagens digitais.

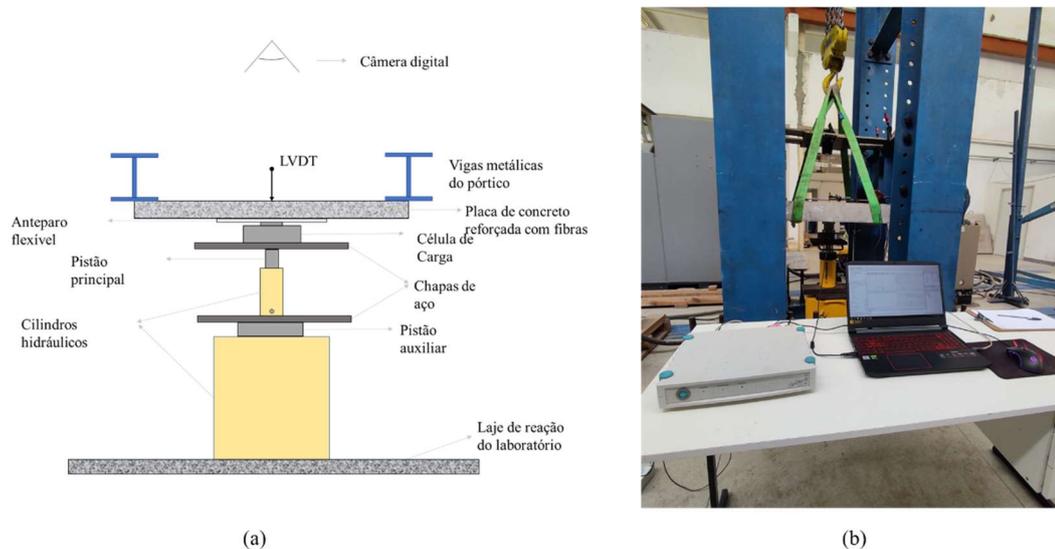


Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

A distribuição aleatória de cores na face da placa tem como principal objetivo auxiliar o programa responsável pelo cálculo da CID, permitindo que o mesmo localize a movimentação dos pixels da imagem com mais facilidade e, portanto, garantindo maior precisão dos resultados.

Com base nos equipamentos apresentados na seção 6.3, os ensaios das placas foram realizados de uma forma alternativa. O cilindro hidráulico permite aplicação de força apenas em uma direção e sem suporte para aplicar a carga de cima para baixo. Desta forma, os ensaios das lajes foram realizados com a carga de baixo para cima. Além disso, devido a estrutura do pórtico não possuir vigas transversais que permitissem apoiar todas as bordas laterais das placas (ver Figura 6.16(b)), os ensaios foram realizados com as placas biapoiadas. A Figura 6.18 (a) e (b) apresentam uma representação esquemática e a real, de como foi realizado o ensaio, com a visão lateral de todo os equipamentos utilizados, respectivamente. Vale ressaltar que não foi possível definir a rigidez do atuador hidráulico.

Figura 6.18: (a) Representação esquemática e (b) real do ensaio.



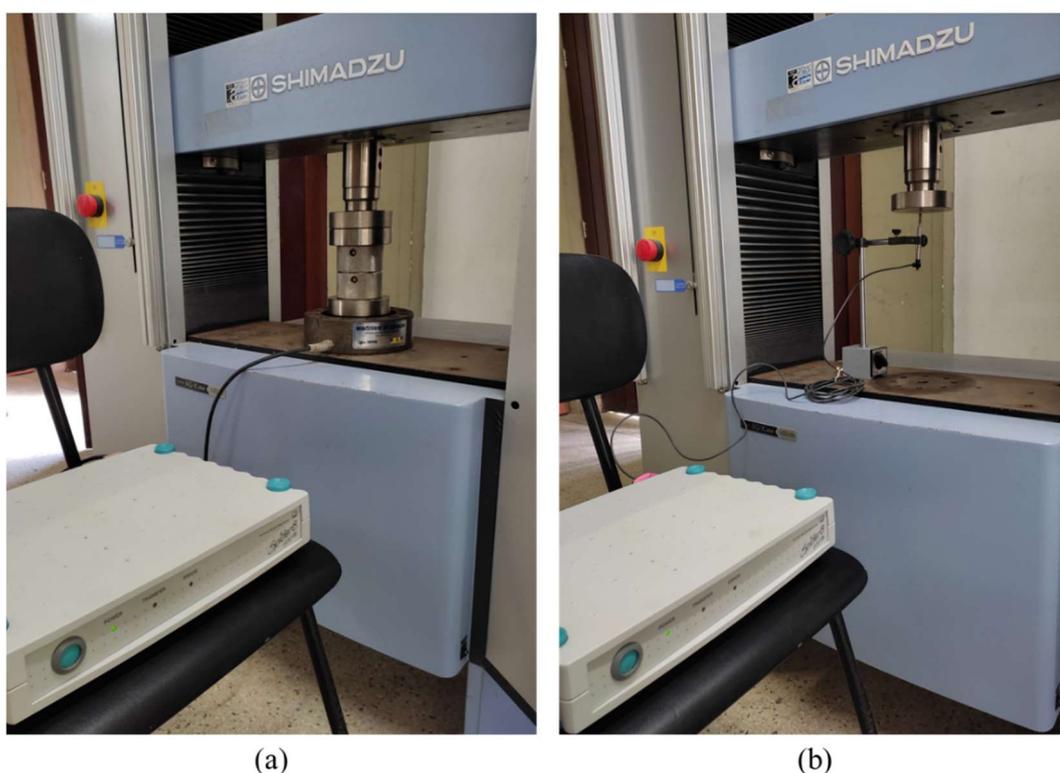
Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Como observado na Figura 6.18, na condição de realização do ensaio, foram utilizados dois cilindros hidráulicos. A função do cilindro maior (inferior) é unicamente de apoio para os demais equipamentos, devido à altura mínima que as vigas do pórtico estão situadas, e apoiado sobre a laje de reação do LEMA. Este cilindro hidráulico teve o pistão erguido para evitar a danificação da estrutura lateral do mesmo. Além disso, para evitar a danificação do pistão, foi utilizada uma chapa metálica rígida entre este pistão e o cilindro responsável pela realização do ensaio (Figura 6.14 (c)). Como a área do pistão é inferior a área da célula de carga, também foi utilizada outra chapa metálica, a fim de distribuir igualmente a força aplicada. Visando evitar a danificação da superfície da célula de carga, devido ao contato direto com a placa de concreto, foi utilizado um anteparo flexível. Para a medição dos deslocamentos, 1 LVDT foi posicionado no centro geométrico, acima das placas, com o auxílio de suportes magnéticos e grampos mecânicos. Por fim, a câmera digital foi posicionada acima de toda a estrutura, para realizar a gravação do ensaio. A câmera ficou presa a um anteparo, que por sua vez estava fixado às vigas do pórtico.

Além disso, como observado na seção 6.3, sobre o funcionamento da célula de carga e dos LVDTs, estes equipamentos exportam resultados em termos de tensão elétrica. Para a transformação em termos de deslocamento e força é necessário realizar uma calibração prévia nos equipamentos. Foram calibrados a célula de carga e o LVDT, com o auxílio da máquina universal AG-X plus (Figura 6.12(b)). Além disso, também foi utilizado um suporte magnético para manter os LVDTs na posição vertical, o Spider8 (Figura 6.15(c)) e o programa computacional Itom (2018), considerando a voltagem de saída de acordo com os manuais dos

respectivos equipamentos (célula de carga de 3mV/V e LVDTs de 125 mV/V). Como a máquina universal permite a aplicação de forças e/ou deslocamentos conhecidos, foram realizadas uma série de cargas e descargas em todos os equipamentos, salvando os dados de força e deslocamento da máquina, simultaneamente aos resultados de voltagem exportados e lidos com o auxílio do Spider8 e do Itom. A Figura 6.20 apresenta o processo de calibração de ambos os equipamentos.

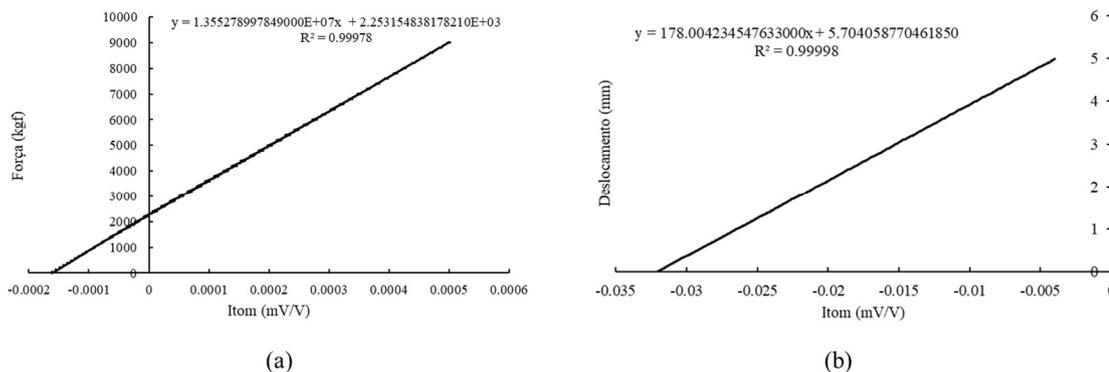
Figura 6.19: Calibração dos equipamentos: (a) célula de carga e (b) LVDT.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Com base nos dados coletados, foi possível realizar regressões lineares para obter equações que relacionem os parâmetros físicos desejados (força e deslocamento) com os resultados de voltagem. Em todos os equipamentos foram realizados ajustes com equações polinomiais de 1º grau, obtendo os respectivos coeficientes de determinação (R^2). Para a célula de carga, o R^2 foi igual a 0,99978 (Figura 6.20(a)), enquanto para o LVDT, o R^2 foi superior a 0,9999 (Figura 6.20(b)).

Figura 6.20: Calibração: (a) da célula de carga e (b) dos LVDTs.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Após os 28 dias de moldagem os CPs foram rompidos à compressão, utilizando a máquina universal AMSLER, após a retificação. Foram rompidos 5 corpos de prova para cada amostra. Os CPs para a determinação do módulo de elasticidade foram rompidos com a mesma idade das vigas e placas.

Devido a problemas relacionados com a célula de carga, além da possibilidade de surgir a disponibilidade de uma célula de carga mais nova, e, portanto, mais precisa, o rompimento das placas foi adiado em relação aos 28 dias de moldagem. Além disso, neste período de tempo ocorreu o recesso acadêmico da UFAL (24/12/2022 a 22/01/2023) e posterior ao recesso, uma obra de reforma de parte da estrutura interna do LEMA. Além disso, após a finalização da obra, durante uma etapa de reverificação do funcionamento de todos os equipamentos, o cilindro hidráulico que foi utilizado apresentou problemas na válvula de retenção do óleo, causando um vazamento interno e necessitando de uma manutenção no cilindro. Devido a estes problemas, o rompimento das placas de concreto foi adiado. Vale ressaltar que a célula de carga que apresentaria uma melhor resposta estava com as conexões danificadas e, após manutenção, com uma nova soldagem das ligações, a célula ainda apresentou problema de leitura dos dados e precisou ser enviada ao fabricante para que o mesmo fizesse o reparo adequado.

Devido ao adiamento dos ensaios das placas, foi optado por romper as vigas simultaneamente com as placas, para garantir a mesma idade e este não ser um fator que influencie negativamente no cálculo da energia de fratura e na correlação deste parâmetro com o parâmetro do modelo da LDNL. Os ensaios das lajes e vigas ocorreram no LEMA após 245 dias da moldagem dos corpos de prova.

6.5 Correlação de imagens digitais

A técnica de correlação de imagens digitais (CID) se enquadra dentro do campo de ensaios não destrutivos, ou seja, aqueles que não há necessidade de intervir na forma ou propriedades da estrutura (SUTTON; HILD, 2015). A CID é um ensaio não destrutivo que pode avaliar, por meio óptico, deslocamentos e deformações da estrutura. A aquisição de imagens deve ser realizada durante todo o decorrer do ensaio.

De modo simplificado, a técnica da CID é baseada na análise de imagens antes da deformação e após a deformação, discretizando uma região específica de interesse (ROI – *Region of Interest*) em pixels. Desta forma, com o uso de programas específicos, é possível transformar a ROI em matrizes, em que cada pixel corresponde a um termo específico da matriz. As intensidades dos pixels são definidas de acordo com a suas cores, podendo ser avaliadas de forma monocromática ou em RGB (*Red-Green-Blue*). Portanto, com a pintura de forma aleatória e posterior transformação em escala de cinza, é facilitado ao programa reconhecer os diferentes pixels e obter resultados mais precisos. Os principais parâmetros internos e externos que influenciam na CID são a resolução da câmera, iluminação da estrutura avaliada, frequência de aquisição de imagens, distorção da lente, além do tamanho da ROI desejada e parâmetros internos a cada programa (OLIVEIRA, 2022).

Desta forma, durante a execução dos ensaios das placas, foi realizada a gravação dos experimentos. Com o objetivo de obter o maior número possível de quadros, os ensaios foram filmados, para posterior obtenção dos quadros da câmera, com auxílio de programa de visualização, como o Tracker (2008). Como o LVDT foi posicionado na parte superior e, portanto, na região que será gravada, os fios e suportes foram arranjados de modo a ocuparem o menor espaço possível, sem interferir na região esperada de fissuração principal.

As análises de correlação foram realizadas com o programa computacional Correli-Q4, avaliando a abertura de fissura, para comparação com os resultados obtidos com o uso do elemento finito proposto.

6.6 Resultados Experimentais

6.6.1 Ensaios de resistência à compressão

Os ensaios de resistência à compressão dos corpos de prova foram realizados com o uso da máquina universal AMSLER (Figura 6.12(a)) aos 28 dias de moldagem, cujos resultados são apresentados na Tabela 6.2, para cada betonada.

Tabela 6.2: Resistências à compressão (MPa).

	CP 1	CP 2	CP 3	CP 4	CP 5	Média	Desvio Padrão
Betonada 1	26,95	26,13	27,34	28,29	27,60	27,26	0,80
Betonada 2	26,13	28,04	22,30	26,64	28,16	26,25	2,38
Betonada 3	23,13	19,86	26,25	19,69	25,79	22,95	3,13
Betonada 4	26,32	28,10	22,68	28,23	29,18	26,90	2,58

Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

6.6.2 Ensaios de módulo de elasticidade longitudinal

Os ensaios de módulo de elasticidade longitudinal dos corpos de prova foram realizados com o uso da máquina universal AMSLER (Figura 6.12(a)) aos 245 dias de moldagem, cujos resultados são apresentados na Tabela 6.3Tabela 6.2, para cada betonada. Vale destacar que, devido a condição de concreto reforçado com fibras de aço, os valores dos módulos de elasticidade longitudinal para os cilindros foram elevados e acima do esperado através de equações normativas (ABNT, 2023). Os valores obtidos experimentalmente foram até aproximadamente iguais triplo do estimado. Além disso, para a betonada 4, após as reformas internas do LEMA, apesar dos cilindros estarem devidamente armazenados dentro dos tanques de cura, o terceiro corpo de prova não foi localizado.

Tabela 6.3: Módulos de Elasticidade Longitudinal (GPa).

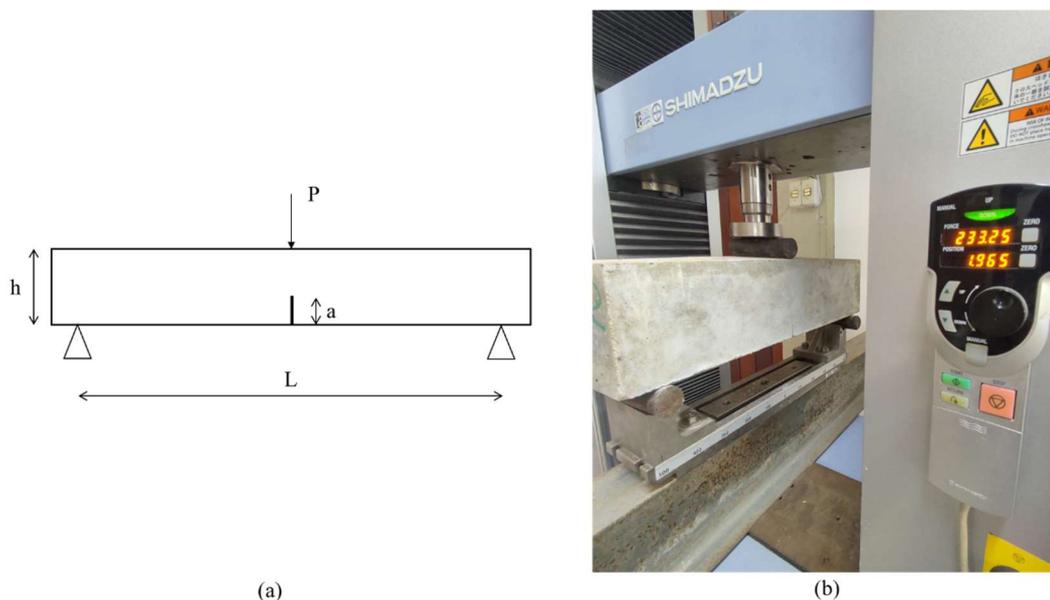
	CP 1	CP 2	CP 3	Média	Desvio Padrão
Betonada 1	83,86	67,99	67,99	73,28	9,16
Betonada 2	79,25	107,42	85,31	90,66	14,83
Betonada 3	93,33	68,85	76,82	79,67	12,48
Betonada 4	188,41	82,69	-	135,55	-

Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

6.6.3 Flexão de 3 pontos

As vigas de concreto reforçado com fibras de aço foram rompidas sob um ensaio de flexão de 3 pontos, conforme recomendações do RILEM TC-50 FMC (1985), com representação esquemática e real apresentadas nas Figura 6.21 (a) e (b), respectivamente.

Figura 6.21: Ensaio de flexão das vigas.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Com base nos resultados dos ensaios de flexão, foi aplicada a equação (6.1), para o cálculo da energia de fratura de todas as vigas, de todas as moldagens, com resultados dispostos na Tabela 6.4:

Tabela 6.4: Energia de Fratura do concreto (Nmm/mm²).

	Média
Betonada 1	3,36
Betonada 2	4,13
Betonada 3	3,51
Betonada 4	3,79

Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

6.6.4 Ensaio das placas de concreto reforçado com fibras de aço

Os ensaios das placas de concreto reforçado com fibras de aço se deram conforme disposto na seção 6.4. Com base na metodologia do ensaio, foi possível obter os gráficos de Força vs. Deslocamento até uma deflexão de 10 mm do centro da placa (curso máximo do LVDT) (Figura 6.22 (a)). Após atingir este deslocamento, o aparato para fixação do LVDT foi removido e a placa foi ensaiada até apresentar aberturas de fissura consideráveis (Figura 6.22 (b)). Note que para esta etapa do ensaio, as placas continuaram a ser monitoradas com a célula de carga (Força) e com a câmera digital (abertura de fissuras).

Figura 6.22: (a) vista lateral e (b) superior da placa durante o ensaio.

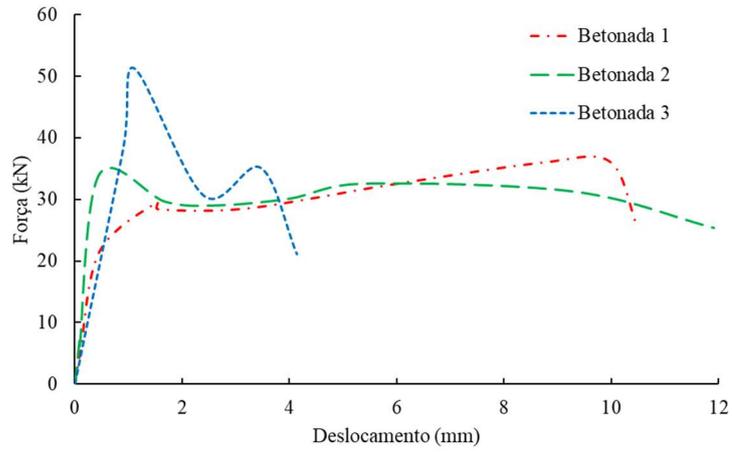


Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

As curvas de Força vs. Deslocamento são apresentadas na Figura 6.23. Note que, para a placa da betonada 3 a curva apresenta comprimento reduzido. Isto se deve pois durante o ensaio o programa Itom parou de responder, não gravando os resultados do ensaio. Além disso, para a placa da betonada 4, devido a erros para iniciar a gravação dos dados, os resultados também não foram obtidos.

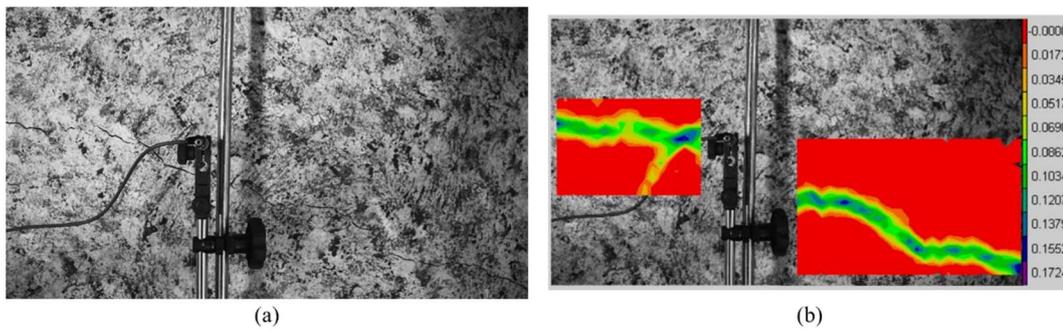
Com base nas gravações efetuadas com a câmera digital, foi possível aplicar a técnica de correlação de imagens digitais ao ensaio e obter a abertura de fissuras. A partir da Figura 6.24, é possível notar que o padrão de fissuração observado durante o ensaio (a), foi recuperado com a técnica de CID (b). Desta forma, este procedimento pode ser replicado para diferentes estágios de carregamento atuantes nas placas (Figura 6.25). Note que os resultados do Correli-Q4 saem em unidades de pixel, sendo necessário efetuar uma conversão dos valores para uma unidade de distância, a partir de relações lineares de um comprimento conhecido da imagem.

Figura 6.23: Gráficos de Força vs. Deslocamento no centro das placas.



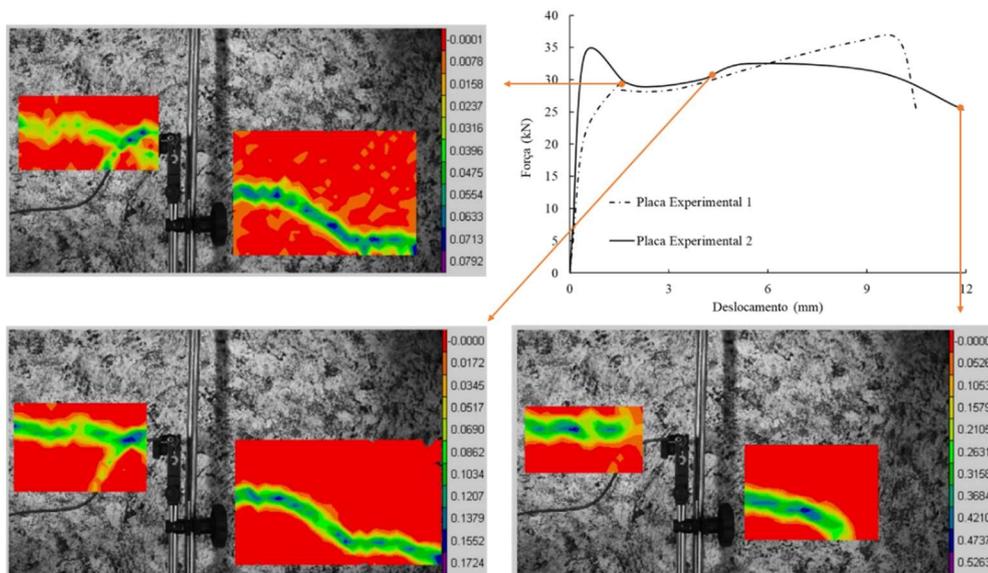
Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Figura 6.24: (a) fissura da laje e (b) fissura obtida via CID.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

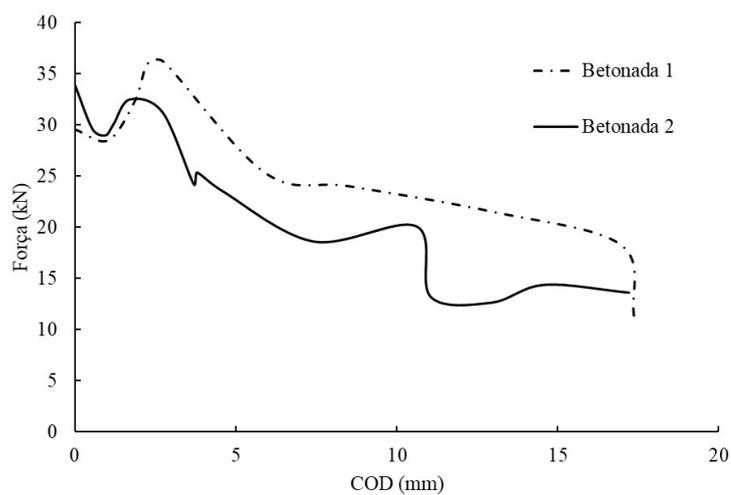
Figura 6.25: COD para diferentes estágios de carregamento.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Com base nos resultados para diferentes estágios de carregamento ao longo do ensaio, é possível definir curvas de Força vs. COD no centro da placa para os ensaios das placas. Uma vez que a placa referente à betonada 3 apresentou problemas de gravação dos dados de força de parte do ensaio, seus resultados foram omitidos.

Figura 6.26: Força vs. COD.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

7 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Com base nos elementos finitos propostos foi possível reproduzir exemplos numéricos e experimentais, a fim de validar e verificar a qualidade dos modelos, desde objetividade de solução até a posições de fissuras e seu valor de abertura.

É de ciência que o valor do módulo de elasticidade adotado para simulações numéricas pode variar significativamente, em comparação a resultados obtidos através de ensaios experimentais ou através de equações normativas (ABNT, 2023), especialmente para estruturas concreto. Note que esta variável pode ter significativa alteração de acordo com diversos critérios, como heterogeneidade do concreto. De acordo com Cordeiro (2015), outras hipóteses simplificadoras também causam influência no valor do módulo de elasticidade das simulações numéricas, como as condições de aplicação do carregamento e das reações de apoio, que são admitidos como pontuais, porém ocorrem em uma área da estrutura. Além de condições de rigidez do atuador hidráulico e da estrutura de reação. Além disso, o principal objetivo desta tese é a avaliação dos modelos não lineares, especialmente no que se refere a resposta após a capacidade máxima das estruturas. Desta forma, em vista dos fatos mencionados, dentro do presente estudo foi optado por realizar a calibração dos módulos de elasticidade longitudinal do concreto, de modo que o trecho de resposta elástica das simulações numéricas se aproximasse dos trechos observados experimentalmente.

7.1 Análise de Placas de concreto reforçado com fibras de aço

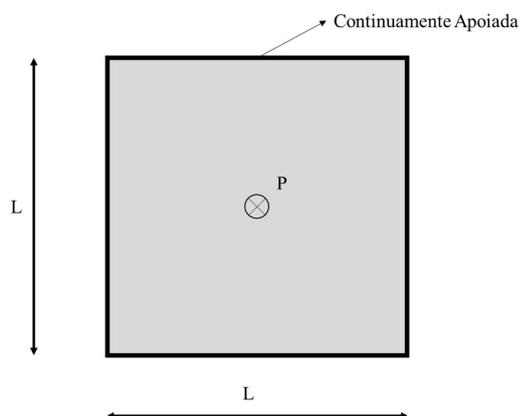
7.1.1 Discrete Kirchhoff Triangle (DKT)

7.1.1.1 *Objetividade de Solução*

A partir da implementação numérica do elemento finito proposto no PEEF foi possível resolver exemplos de placas, considerando os efeitos não lineares físicos, com diferentes configurações de geometria. No entanto, vale ressaltar que a formulação do elemento DKT é restrita ao caso de placas delgadas. Desta forma, é recomendado que a razão entre o lado dos elementos finitos e suas espessuras sejam elevadas, a fim de evitar que os efeitos de cisalhamento sejam consideráveis.

Considere o exemplo de uma placa quadrada genérica, unicamente para avaliação acadêmica, simplesmente apoiada ao longo de todo o seu contorno, sem a possibilidade de levantamento das bordas, como mostrado na Figura 7.1. A placa tem lado L igual a 5000 mm, espessura h igual a 150 mm e com carga concentrada P aplicada no seu centro. Admitem-se, ainda, as seguintes propriedades físicas hipotéticas para a placa: módulo de elasticidade longitudinal igual a 5600 kN/mm², coeficiente de Poisson igual a 0,18, momento fletor crítico igual a 37,5 kN mm/mm e o parâmetro q da LDNL igual a -10^4 .

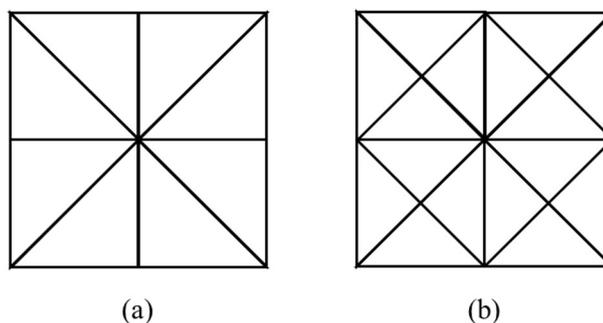
Figura 7.1: Placa apoiada, com carga concentrada em seu centro.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

As simulações foram realizadas de modo a garantir que a razão entre o menor lado dos elementos finitos (L_q) e a espessura da placa fosse superior a 4. Desta forma, foram adotados dois tipos diferentes modelos de malhas de elementos finitos, conforme apresentado na Figura 7.2.

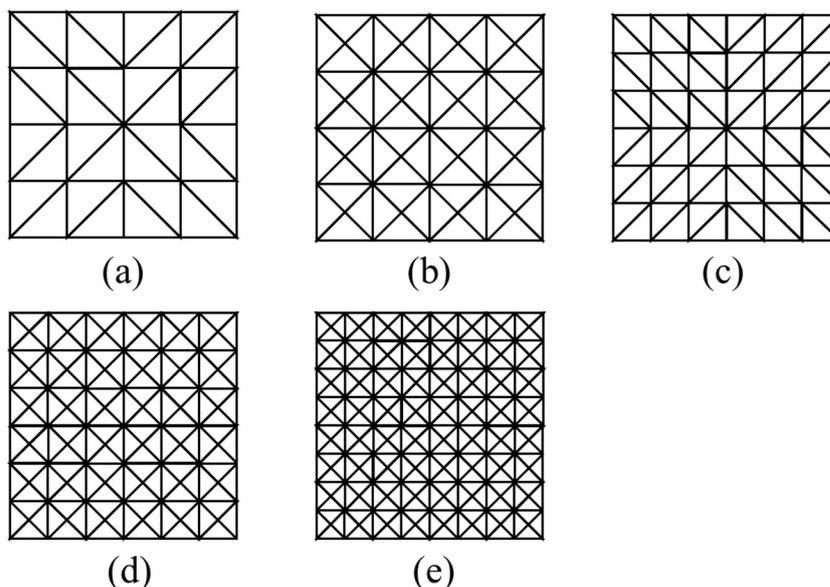
Figura 7.2: Malhas para o elemento de placa.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Com base nestes modelos, foram geradas 5 diferentes malhas, seguindo a mesma lógica utilizada para os exemplos elásticos (Figura 3.7), apresentadas na Figura 7.3.

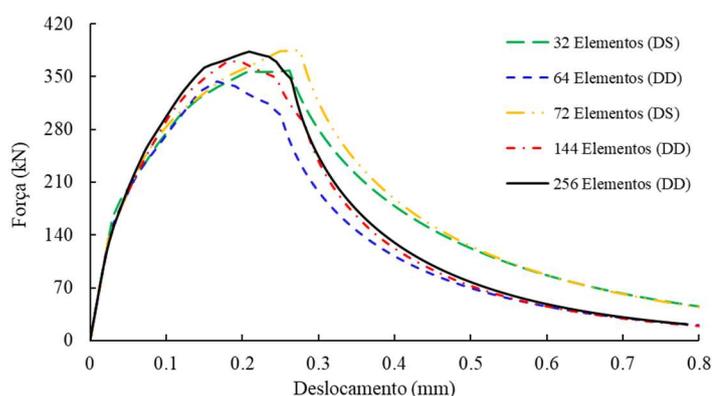
Figura 7.3: Malhas de elementos finitos: (a) 32 elementos, (b) 64 elementos, (c) 72 elementos, (d) 144 elementos e (e) 256 elementos.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

As malhas de 32 e 72 elementos finitos são referentes ao primeiro modelo de malha (Figura 7.2(a)) com diagonal simples (DS) e as malhas de 64, 144 e 256 elementos, referentes ao segundo modelo de malha (Figura 7.2(b)), com diagonal dupla (DD). Os resultados das curvas de Força vs. Deslocamento para estas malhas estão apresentados na Figura 7.4.

Figura 7.4: Objetividade do elemento finito proposto.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

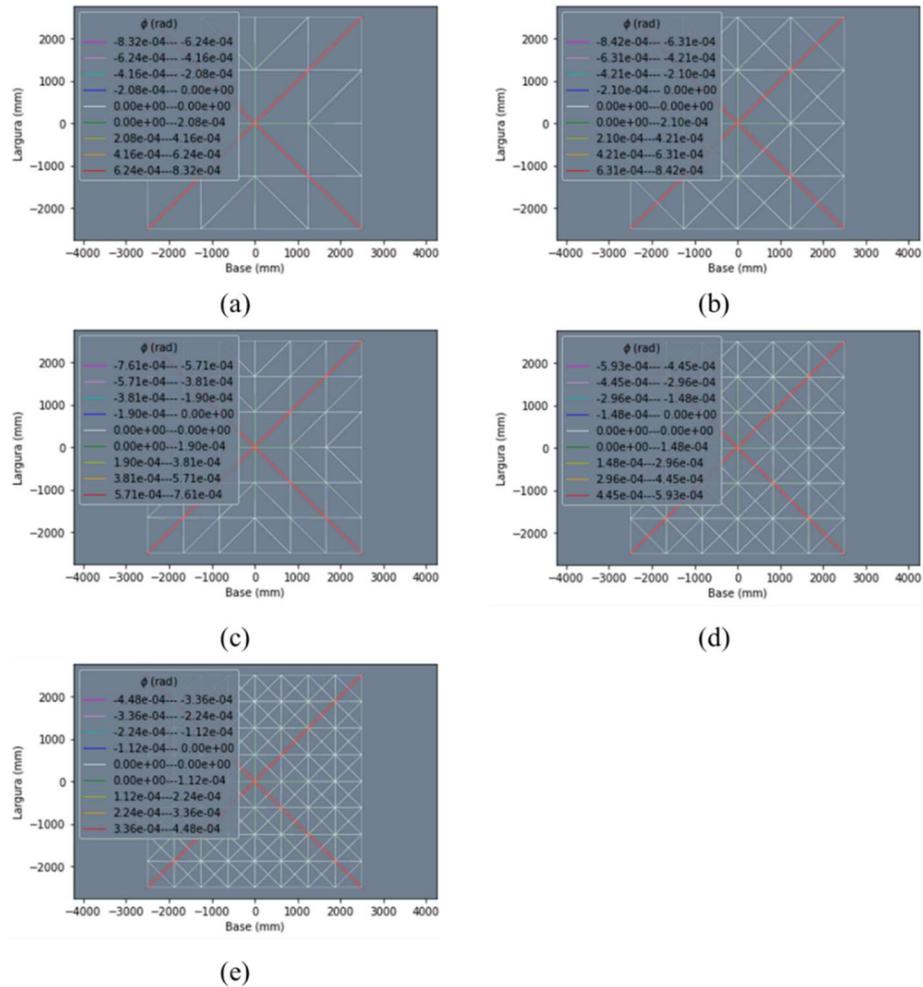
Como pode ser observado, todas as soluções dispostas na Figura 7.4 apresentam proximidade, especialmente para as duas malhas mais refinadas (144 e 256 elementos), cuja diferença percentual das cargas é de 3,33%. Inicialmente, para todas as malhas, os trechos iniciais até ser atingida a carga máxima são muito próximos. Com relação a carga de pico, todas malhas apresentaram valores próximos, dentro do intervalo de 343,64 kN a 383,14 kN. Esta

diferença pode ser justificada pois a razão L_q/t variou entre os exemplos, de 8,33 (32 elementos) a 4,17 (256 elementos). Desta forma, entre as malhas de mesmo tipo, as que apresentam menores razões (72 e 256 elementos) tiveram seus picos levemente superior.

As respectivas deformadas com as charneiras de dano para os exemplos simulados estão apresentadas na Figura 7.5. Como é possível observar, considerando o problema analisado de uma placa simplesmente apoiada em todo seu contorno, sujeita a uma carga concentrada no centro, as posições das charneiras de dano estão de acordo com o disponível na literatura (JOHANSEN, 1943; PINHEIRO, 1988; VAN LANGENDONCK, 1970).

Além disso, na condição deformada é possível observar charneiras com rotações de dano muito pequenas (charneiras verdes), fora da posição da charneira principal. Este motivo é justificado pelas diferentes configurações de malhas. Como é definido por Dias, Oliver e Huesper (2012), o problema de viés de malha se relaciona com a tendência das linhas de localização de deformações se desenvolverem segundo uma direção, influenciada pelo alinhamento da malha de elementos finitos. É importante ressaltar que, o problema de viés de malha difere do problema de dependência de malha. O primeiro problema está relacionado a pequenas alterações nos resultados, relacionadas à quantidade e tamanhos das charneiras inelásticas que são ativadas, enquanto o segundo, a grandes alterações nos resultados, associado ao refinamento da malha de elementos finitos. Para maiores detalhes sobre o problema de viés de malha, recomenda-se a leitura dos trabalhos de Cervera e Chiumenti (2006), Cervera *et al.* (2010), Dias *et al.* (2012) e suas referências. Desta forma, devido à influência do viés de malha, com as charneiras com rotações de dano menores, também é possível justificar a pequena diferença no pico do gráfico de Força vs. Deslocamento, na qual as malhas do tipo Figura 7.2(a) levam a cargas de pico levemente superior, em comparação com as malhas do tipo Figura 7.2(b). Por fim, a junção destes motivos justifica a diferença das curvas em seus pós pico, possuindo convergência diferente entre os modelos de malha, mas semelhantes para o mesmo modelo, tornando clara a influência do formato de malha adotado. Portanto, é admitido que a formulação proposta não apresenta dependência do tamanho da malha dos elementos finitos, ou seja, apresenta objetividade de solução, uma vez que é observado que as malhas refinadas tendem a uma mesma solução.

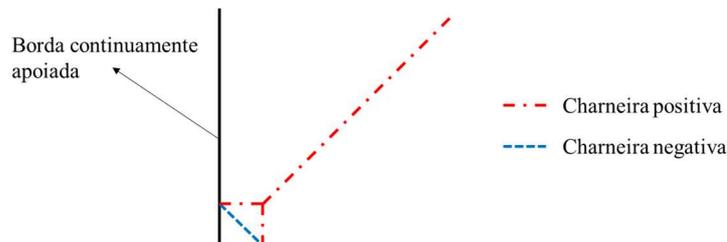
Figura 7.5: Malhas deformadas das placas: (a) 32 elementos, (b) 64 elementos, (c) 72 elementos, (d) 144 elementos e (e) 256 elementos.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Além disso, de acordo com Park e Gamble (2020), para placas na condição aqui analisadas, continuamente apoiadas, com a aplicação de uma carga concentrada em seu centro e em que não é permitido o levantamento das bordas durante a análise, é gerada uma charneira negativa nos cantos da placa, conforme a Figura 7.6.

Figura 7.6: Distribuição de charneiras nos cantos da placa.

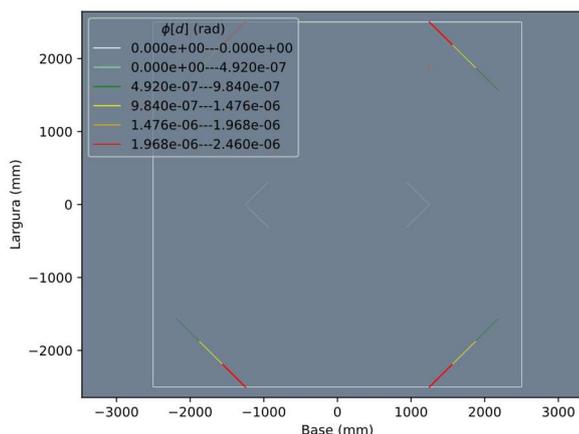


Fonte: Adaptado de Park e Gamble (2000).

Esta charneira ocorre devido à presença do momento torçor (ou momento volvente), que é máximo nos cantos das placas, que pode ser observado pela teoria elástica de placas. Estes momentos torçores tendem a levantar os cantos da placa, porém como não permitido o levantamento, ocorre o surgimento das charneiras negativas. Por vezes, a consideração destes efeitos é dificultosa, como observado por Thakkar e Pandey (2006) que não os consideram em seu elemento finito.

Para os resultados das malhas deformadas das simulações realizadas no presente trabalho (Figura 7.5), é possível observar que em todos os casos o elemento finito proposto recuperou a presença das charneiras negativas nos cantos, devido aos momentos volventes, como destacado na Figura 7.7 para a malha de 64 elementos finitos. Portanto, o elemento finito proposto apresenta boa qualidade nas soluções, desde para a solução de Força vs. Deslocamento, até para a distribuição de charneiras de dano.

Figura 7.7: Charneiras negativas nas bordas da placa.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

7.1.1.2 Efeito escala

Considere o caso de várias estruturas, com carregamento e condições de contorno iguais, porém com aumento das dimensões da estrutura mantendo uma dada proporção. Este fenômeno tem sido testado e comprovado experimental e numericamente desde o século passado. Foram realizados testes para diferentes materiais, como em concreto (KANI, 1967; KARIHALO *et al.*, 2003), madeira (MOREL; DOURADO, 2011) e rochas (WANG *et al.*, 2010). Numericamente, este fenômeno foi reproduzido utilizando modelos baseados em integrais não locais

(GRÉGOIRE *et al.*, 2013; HAVLÁSEK *et al.*, 2016) e mecânica da fratura (BAŽANT, 1989; BAŽANT; PLANAS, 1997).

Desta forma, com o objetivo de mostrar que o elemento finito proposto consegue recuperar o efeito escala, o exemplo apresentado na seção 7.1.1.1 foi novamente simulado. Para tal, foram adotadas as mesmas considerações lá realizadas, admitindo propriedades fictícias ($E = 5600 \text{ kN/mm}^2$, $\nu = 0,18$, $q = -12000$), de uma placa continuamente apoiada em suas bordas, com uma carga concentrada em seu centro (Figura 7.1). Para o exemplo, foi utilizada a malha com 64 elementos finitos, considerando que as dimensões da placa (L), bem como sua espessura (t) variavam seguindo a proporção $L/t = 28,3$. Este valor foi adotado de modo a garantir que a menor razão de aspecto dos elementos finitos fosse igual a 5.

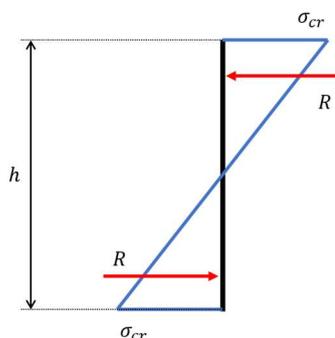
Além disso, admita que a distribuição de tensões na seção transversal da placa segue o apresentado na Figura 7.8, em que σ_{cr} é a tensão crítica do material e R é a resultante das forças na seção transversal. Do equilíbrio de forças na seção transversal, é possível definir que:

$$R = \frac{\sigma_{cr} h}{4} \quad (7.1)$$

Portanto, o momento crítico da placa é dado por:

$$M_{cr} = \frac{\sigma_{cr} h^2}{6} \quad (7.2)$$

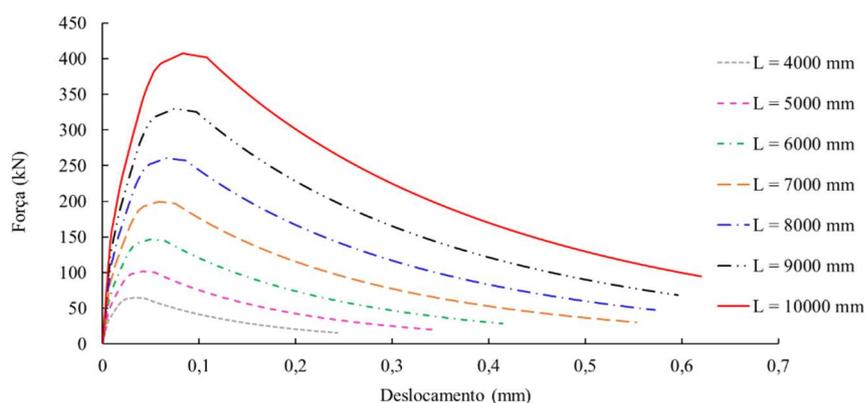
Figura 7.8: Distribuição de tensões na seção transversal da placa



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Desta forma, o momento crítico das placas também foi variado, de acordo com as dimensões da placa e com tensão crítica, adotada constante. Para os exemplos avaliados, a tensão crítica foi definida igual a 1,8 MPa. Foram adotadas 7 dimensões de placa, iguais a 4000 mm, 5000 mm, 6000 mm, 7000 mm, 8000 mm, 9000 mm, 10000 mm. Os gráficos de Força vs. Deslocamento para avaliar o efeito de escala estão dispostos na Figura 7.9 e as malhas deformadas, na Figura 7.10.

Figura 7.9: Força vs. Deslocamento para o efeito escala.



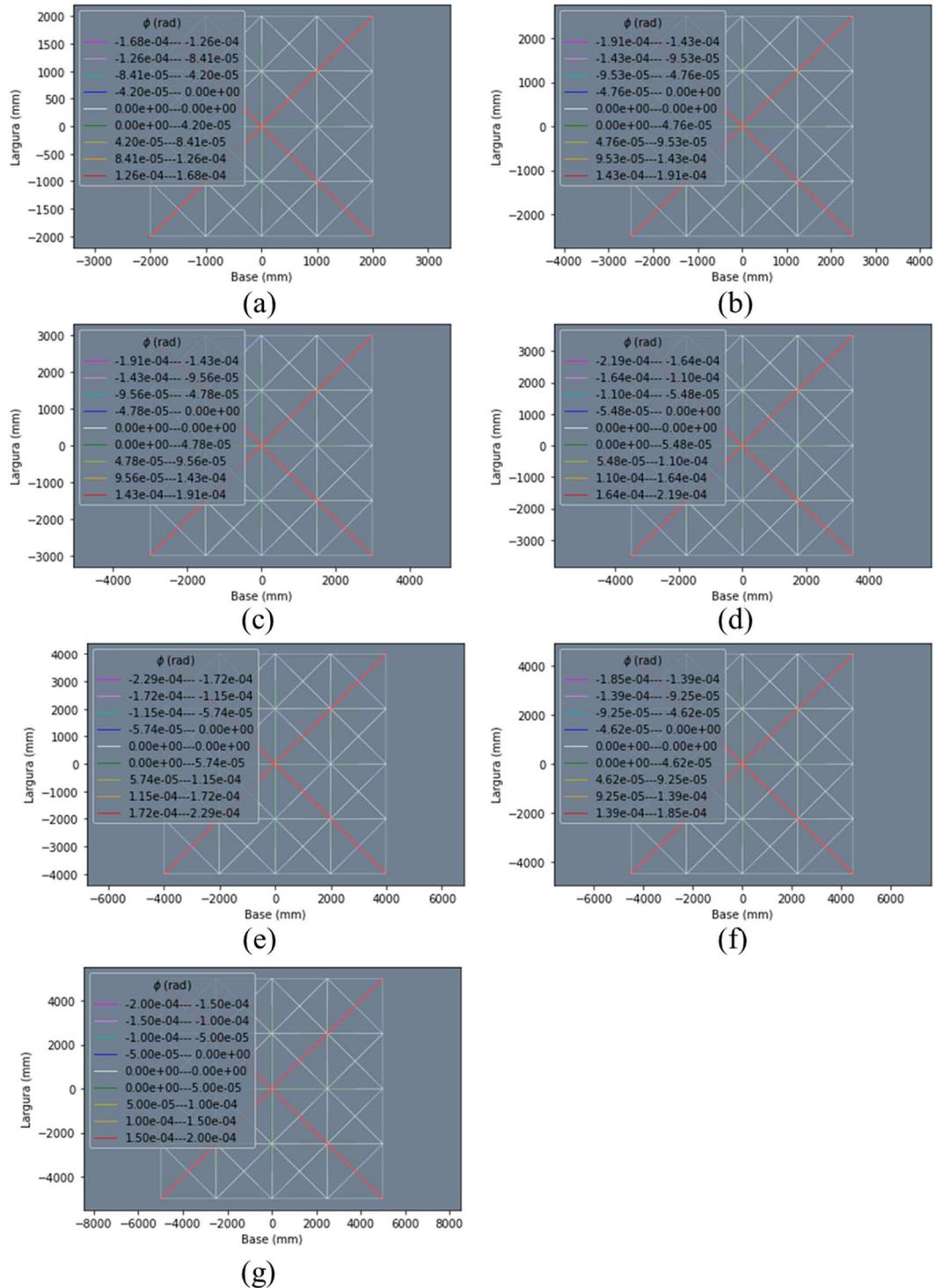
Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

O comportamento das curvas de Força vs. Deslocamento segue o padrão reportado na literatura para a análise de efeito escala, na qual a carga de pico cresce proporcional ao aumento das dimensões da estrutura, além de apresentar pós pico mais abruptos, à medida que as dimensões da placa aumentam. Esta última consideração pode ser observada com o cálculo a inclinação da reta tangente dos pós pico, como disposto na Figura 7.11.

Para a determinação da inclinação das retas tangentes foram escolhidos 2 pontos em todas as curvas, com igual distância em termos de deslocamento. Além disso, para facilitar a visualização da diferença de angulação das retas tangentes, o eixo X das curvas de Força vs. Deslocamento foi ampliado 1000 vezes.

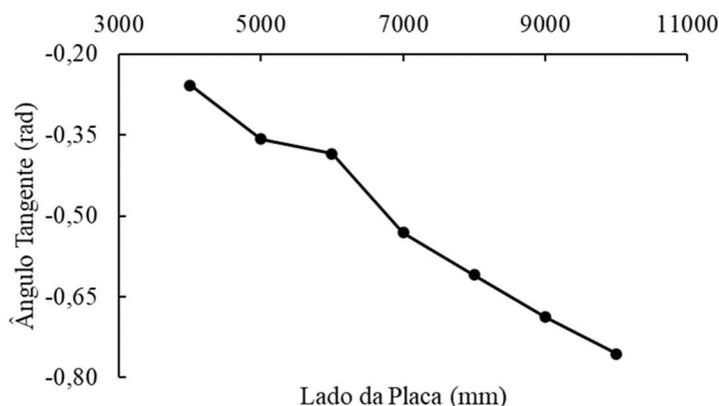
Como pode ser observado, à medida que o lado da placa aumenta, os pós pico das curvas se tornam mais abruptos. Portanto, o elemento finito proposto também consegue recuperar o efeito de escala para a análise de placas delgadas.

Figura 7.10: Malhas deformadas: (a) $L = 4000$, (b) $L = 5000$, (c) $L = 6000$, (d) $L = 7000$, (e) $L = 8000$, (f) $L = 9000$, (g) $L = 10000$



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Figura 7.11: Inclinação das retas tangentes nos pós-picos.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

7.1.2 Triângulo de Momento Fletor Constante (CMT)

Esta seção apresenta os resultados obtidos com a aplicação do elemento finito CMT, para a análise de placas de concreto reforçadas com fibras de aço, incluindo os ensaios que foram desenvolvidos durante a etapa experimental deste trabalho, descritos na seção 6.

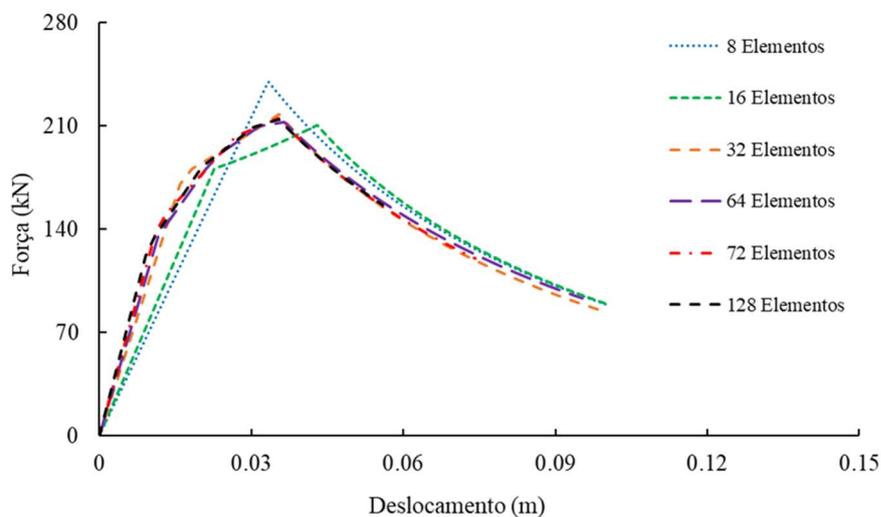
7.1.2.1 Objetividade de Solução

O primeiro exemplo se refere a uma placa quadrada simplesmente apoiada, com os cantos presos, sob uma carga concentrada em seu centro (Figura 7.1). Este exemplo numérico visa avaliar a objetividade do elemento finito de placa proposto. A placa tem dimensões de $5\text{ m} \times 5\text{ m} \times 0,15\text{ m}$ e as propriedades físicas para o modelo numérico foram definidas como: o momento crítico, o módulo de elasticidade longitudinal e o coeficiente de Poisson iguais a 30 kNm/m , 15 GPa e $0,2$, respectivamente, e o parâmetro q igual a $-20,0$.

Com relação às curvas Carga vs. Deslocamento, apresentadas na Figura 7.12, é possível notar que os resultados para todas as malhas são bastante próximos, mesmo para aquelas com poucos elementos finitos (8 e 16 elementos). As outras malhas levaram a resultados mais próximos, cuja carga máxima foi igual a $214,7\text{ kN}$ e que todas as simulações têm pós pico similares. Portanto, com base nesses resultados numéricos, é possível afirmar que o elemento

finito de placa com lei de dano não linear proposto é independente da malha, ou seja, possui objetividade de solução.

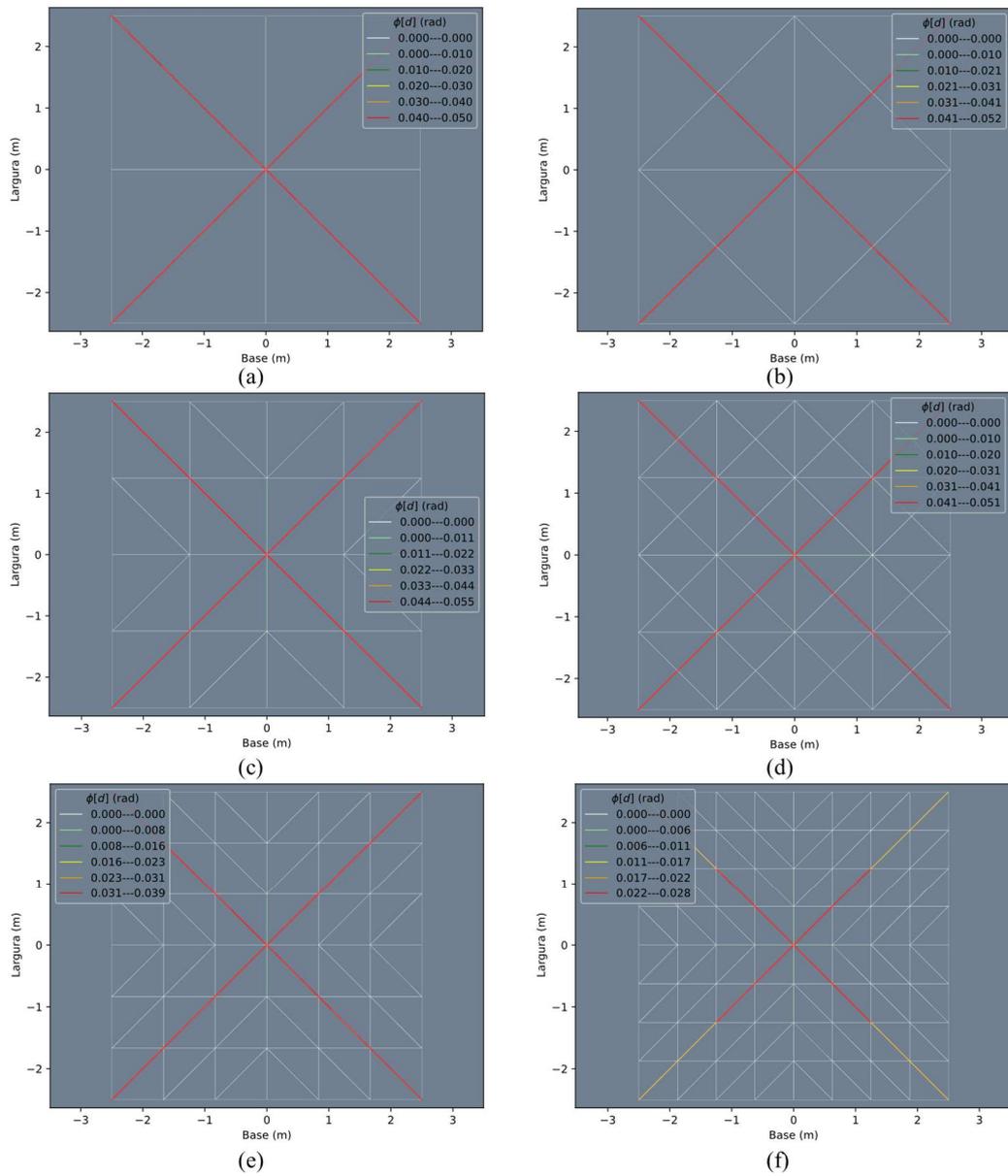
Figura 7.12: Força vs. Deslocamento no centro da placa para diferentes malhas.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Os resultados numéricos da rotação do dano são apresentados na Figura 7.13 para as diferentes malhas analisadas. Foram adotadas 6 malhas, considerando diagonais simples (Figura 7.13 (a), (c), (e), (f)) e duplas (Figura 7.13 (b), (d)). Com base nestes resultados, é possível observar um mecanismo de colapso em forma de “X” para todas as malhas, o que está de acordo com o esperado pela literatura (JOHANSEN, 1943; PINHEIRO, 1988; VAN LANGENDONCK, 1970).

Figura 7.13: Rotações de dano positivas para as diferentes malhas analisadas.



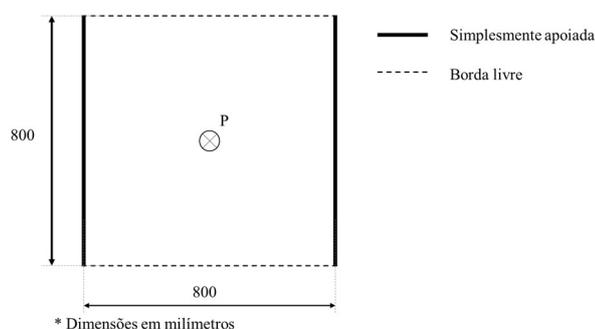
Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

7.1.2.2 Placas testadas no LEMA/UFAL

O segundo exemplo apresenta a simulação numérica das placas de concreto reforçado com fibras de aço que foram testadas experimentalmente neste trabalho, com detalhes apresentados na seção 6.

As placas têm dimensões efetivas de 800 mm x 800 mm x 120 mm, que o arranjo experimental foi definido como simplesmente apoiadas, com a carga aplicada em um ponto, em seu centro, conforme mostrado na Figura 7.14. As propriedades físicas do concreto para as simulações numéricas foram: resistência à tração, módulo de elasticidade longitudinal do concreto e coeficiente de Poisson iguais a 3,3 MPa, 8,0 GPa e 0,2, respectivamente. A partir destas propriedades, para o modelo proposto, o momento crítico foi igual a 7,92 kNm/m, para ambas as placas analisadas, e o parâmetro q foi igual a -10,9 e -9,3, para a Placa 1 e a Placa 2, respectivamente. As simulações numéricas foram realizadas usando 144 elementos com uma malha regular de diagonal dupla. Vale ressaltar que no presente trabalho não foi possível definir uma relação direta entre a energia de fratura do concreto e o parâmetro q do modelo.

Figura 7.14: Arranjo experimental do ensaio.

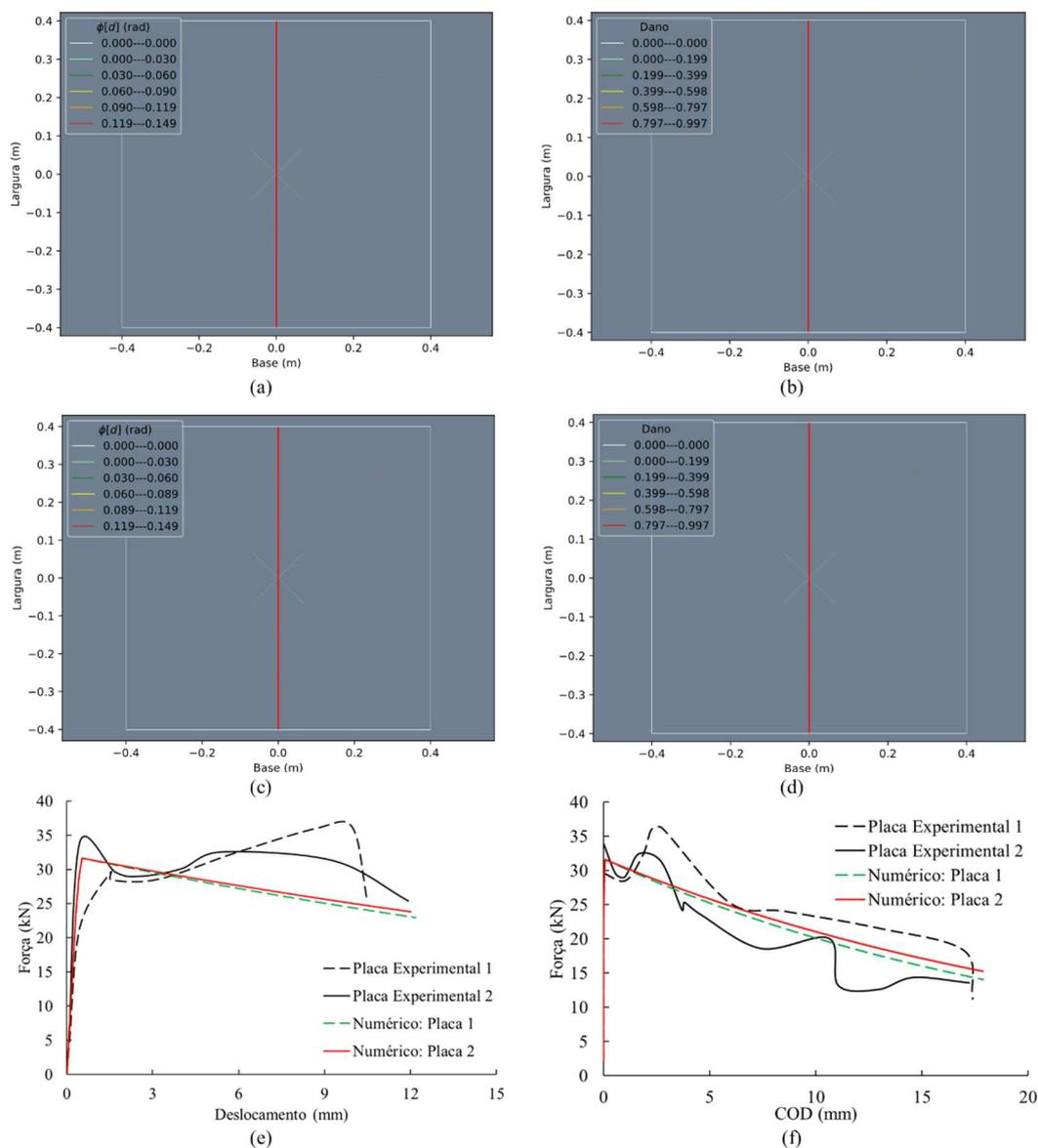


Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Os resultados numéricos das simulações de ambas as placas são apresentados na Figura 7.15. De acordo com os resultados de rotação do dano e de dano (Figura 7.15 (a)-(d)), o modo de colapso está de acordo com o observado experimentalmente, na qual a fissura atravessa a largura da placa. É possível observar que os valores de dano estão próximos de 1,0. Pela definição de dano, essa condição significa que a seção transversal da placa está completamente trincada, o que é corroborado pelas observações das placas durante os ensaios, como disposto na Figura 6.22.

Os resultados de Força vs. Deslocamento da simulação numérica também estão de acordo com os experimentais, conforme mostrado na Figura 7.15 (e), cuja carga máxima e fase de amolecimento apresentam respostas em concordância com as envoltórias experimentais. Os resultados de COD também são de acordo com as envoltórias experimentais, durante todo o teste, como pode ser observado pelas curvas Força vs. COD, apresentadas na Figura 7.15 (f).

Figura 7.15: Resultados de (a) rotação de dano e (b) danos para a placa 1, (c) rotação de dano e (d) danos para a placa 2 e (e) curvas de Força vs. Deslocamento e (f) Curvas de Força vs. COD.



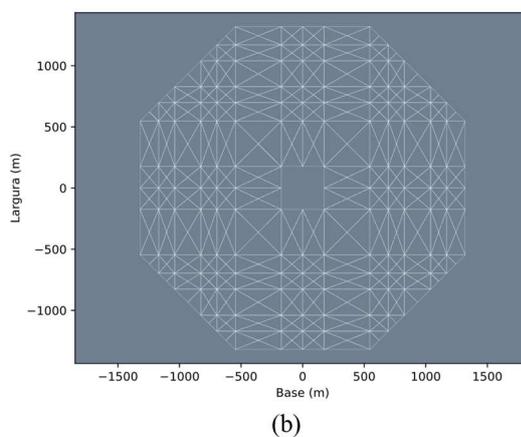
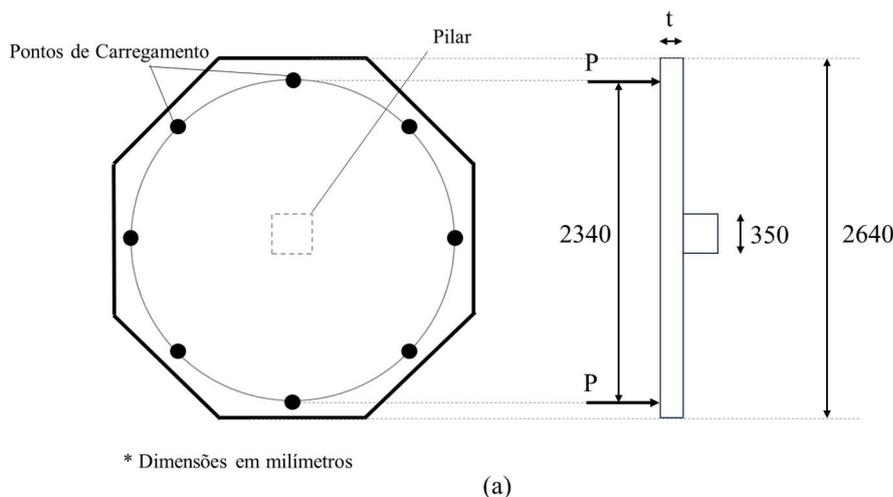
Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

7.1.2.3 Placas octogonais

O terceiro exemplo testado numericamente é uma série com três placas octogonais de concreto reforçado com fibras de aço, com diferentes espessuras, testadas experimentalmente por Michels *et al.* (2013). Os testes das placas foram feitos aplicando uma carga simétrica em torno de uma coluna, por meio de 8 cilindros hidráulicos, conforme mostrado na Figura 7.16 (a), que também apresenta o diâmetro da região de carregamento, o diâmetro total da placa e o

tamanho da coluna de apoio quadrada, de lado igual a 350 mm. Observe que os pontos de aplicação de carga estão localizados a uma distância radial de 150 mm da borda. Os ensaios desenvolvidos por Michels *et al.* (2013) consistiram em três placas de mesmo formato, com uma variação da espessura, cujos valores foram iguais a 200 mm (Placa 1), 250 mm (Placa 2) e 300 mm (Placa 3).

Figura 7.16: (a) arranjo experimental e (b) malha de elementos finitos adotada.



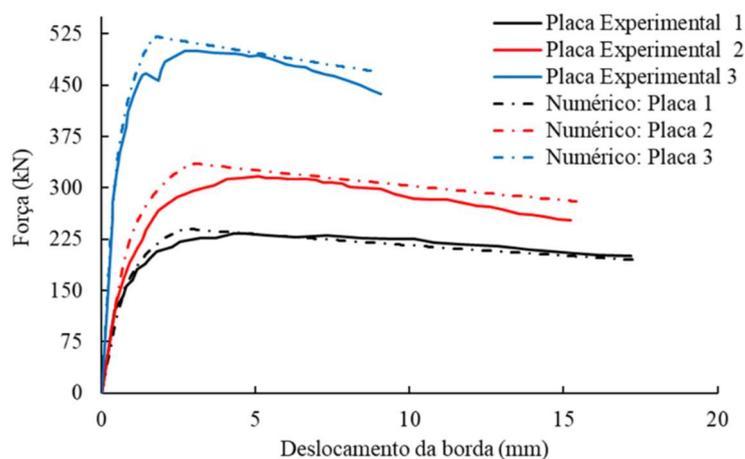
Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

A resistência à compressão do concreto foi medida após 28 dias, usando corpos de prova cúbicos, com valor médio igual a 60,4 MPa (MICHELS *et al.* 2013). Os principais códigos normativos (EUROCODE 2, 2004, CEB-FIB, 2010, ABNT, 2023) sugerem que a resistência à tração do concreto pode ser definida a partir da resistência à compressão em corpos de prova cilíndricos. Elwell e Fu (1995) apresentaram uma extensa análise acerca da relação entre a resistência à compressão de corpos de provas cúbicos e cilíndricos, concluindo que a resistência à compressão cilíndrica varia entre 55% e 96% da cúbica. Michels *et al.* (2013) sugere um valor

médio de conversão de 80%. Com isso, a resistência à tração e o módulo de elasticidade longitudinal do concreto para as três placas foram iguais a 4,0 MPa e 20 GPa, para a Placa 1, 3,5 MPa e 15 GPa, para a Placa 2, e 3,8 MPa e 20 GPa, para a Placa 3, respectivamente. Essa diferença pode ser explicada pela heterogeneidade do concreto e pelo fator de conversão de amostras de cubo para cilindro possuir variações. O coeficiente de Poisson foi igual a 0,2 para todas as placas. Para o modelo LDM proposto, o momento crítico foi igual a 26,78 kNm/m, 36,46 kNm/m e 57 kNm/m, respectivamente, para as placas 1, 2 e 3. Para todas as três placas, o parâmetro q foi igual a -25,57. As simulações numéricas foram realizadas usando 192 elementos com uma malha diagonal simples irregular (Figura 7.16 (b)).

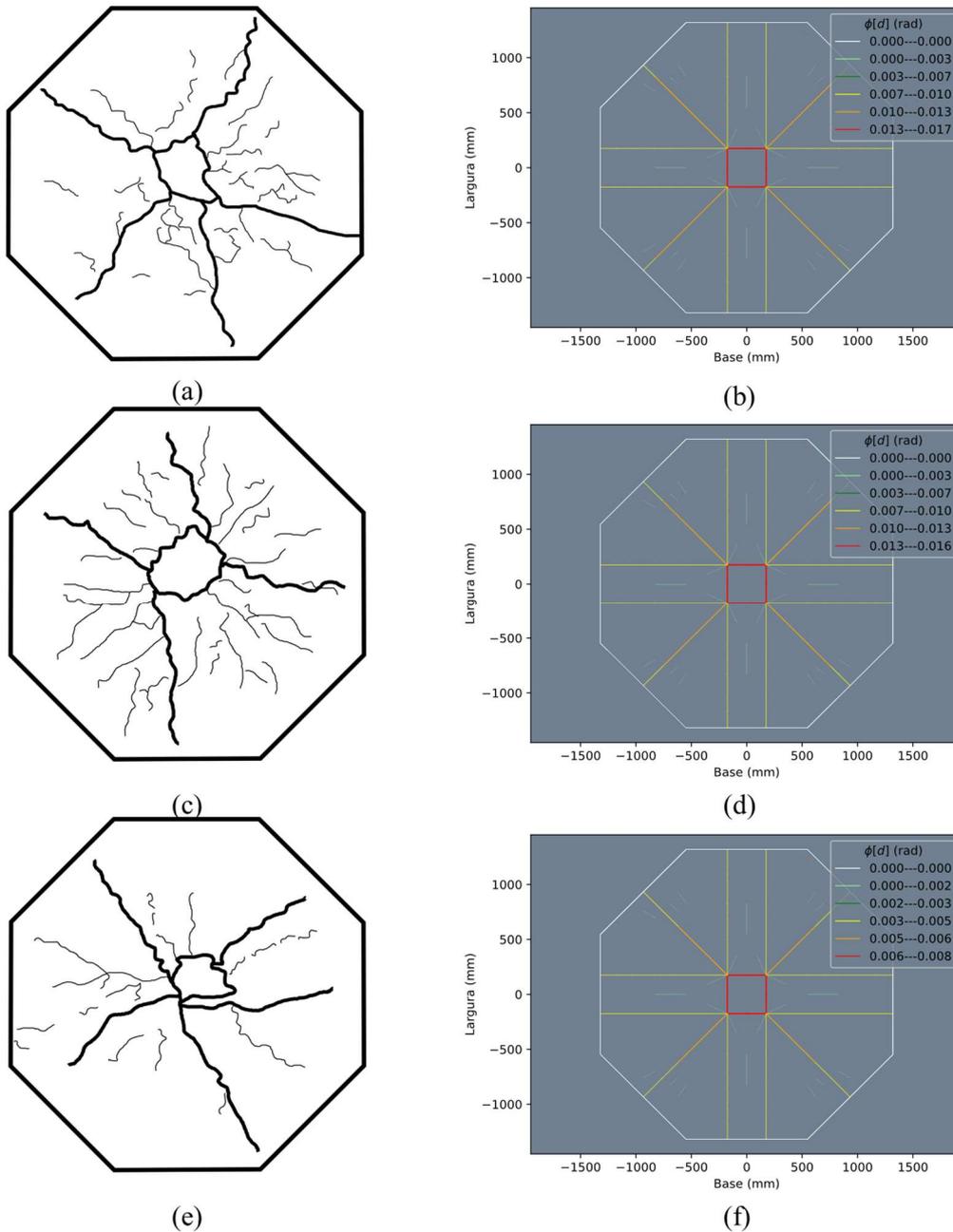
Os resultados de rotação de dano para as três placas são apresentados na Figura 7.18, em comparação com o padrão de fissuração experimental, apresentado por Michels *et al.* (2013), que não definiu valores para as aberturas das fissuras. Os resultados experimentais mostram uma variação na posição da fissura principal, mas, em todos os casos, essas fissuras partem da região de fixação (coluna) em direção dos pontos de aplicação do carregamento. Esse comportamento foi observado nos resultados numéricos, nos quais as rotações do dano também estão na direção dos pontos de carregamento, com valores mais altos próximos à região fixada. As curvas de Força vs. Deslocamento na borda para as três placas também são comparadas com os resultados experimentais, apresentadas na Figura 7.17. Para todas as placas octogonais, é possível observar que as curvas numéricas são bastante semelhantes às experimentais, seja em termos da carga última, seja em relação ao formato da fase de amolecimento.

Figura 7.17: Força vs. Deslocamento na borda para as placas octogonais.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Figura 7.18: Padrão de fissuração: experimental e numérico para a primeira placa (a) e (b), (c) e (d) para a segunda placa, e (e) e (f) para a terceira placa, respectivamente.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

7.2 Análise de Lajes

Esta seção apresenta os resultados obtidos com o modelo proposto para a análise de lajes. Ensaios experimentais obtidos na literatura foram avaliados a partir da análise numérica,

cujos resultados em termos de força e fissuração foram comparados. Para consultar mais exemplos além dos aqui apresentados, consultar Cunha *et al.* (2024).

7.2.1 Objetividade de Solução

O primeiro exemplo visa a analisar a objetividade da solução do modelo de laje proposto, cujos resultados experimentais foram obtidos por Sawczuk e Jaeger (1963).

O exemplo é uma laje de concreto armado, quadrada com dimensões de 1,44 m x 1,44 m x 0,06 m que foi simplesmente apoiada ao longo de todas as suas bordas, e os cantos foram fixados, sem permitir o levantamento (Figura 7.20 (a)). Os ensaios foram realizados com a aplicação de uma carga concentrada no centro da laje. O arranjo de armadura desta laje foi: barras de aço com diâmetro de 4,2 mm na direção horizontal e 4 mm na direção vertical, espaçadas a cada 4 cm, em ambas as direções. As distâncias entre o centro de gravidade das armaduras e a fibra mais comprimida da seção foram iguais a 4,38 cm e 4,8 cm, respectivamente, nas direções horizontal e vertical. As taxas de armadura foram iguais a aproximadamente 0,79% e 0,66% nas direções horizontal e vertical, respectivamente. As propriedades físicas das barras de aço foram: tensão de escoamento, módulo de elasticidade longitudinal, coeficiente de Poisson e deformação de escoamento iguais a 304 MPa, 115,78 GPa, 0,3 e 4,45%, respectivamente. As propriedades físicas do concreto foram: resistência à compressão, módulo de elasticidade longitudinal e coeficiente de Poisson iguais a 18,63 MPa, 15 GPa e 0,2, respectivamente (SAWCZUK e JAEGER, 1963). Com base nestas propriedades, os parâmetros do modelo foram calculados conforme a seção 4.4.

As curvas de Força vs. Deslocamento são apresentadas na Figura 7.19. O padrão de fissuração experimental é apresentado na Figura 7.20 (b), os resultados de danos do modelo proposto para as diferentes malhas são apresentados nas Figura 7.20 (c)-(g) e. Os resultados obtidos também podem ser comparados aos obtidos por Perego (1990), o qual aplicou um modelo de dano contínuo para a análise da mesma placa (Figura 7.20 (h)).

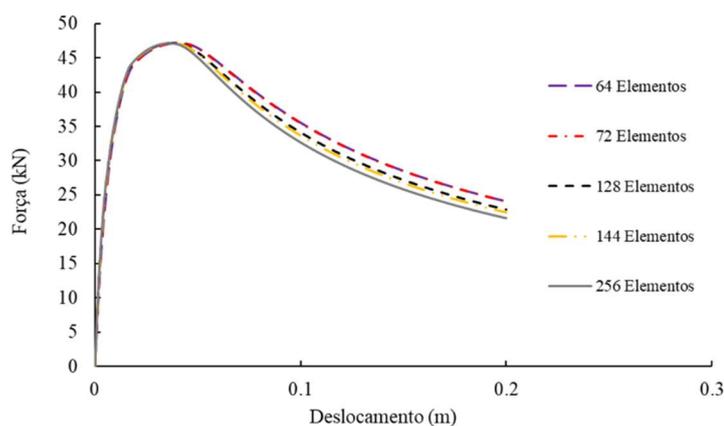
De acordo com a distribuição de danos nas lajes (Figura 7.20 (c)-(g)) e considerando as condições de contorno da mesma, é possível notar que o mecanismo de colapso está de acordo com as observações experimentais (Figura 7.20 (b)), com o esperado na literatura e com o obtido por Perego (1990), cujos maiores valores de dano estão em forma de “X” (SAWCZUK e JAEGER, 1963). As malhas foram elaboradas a partir de duas configurações de diagonais:

simples (Figura 7.20 (d)-(e)) e duplas (Figura 7.20 (c), (f)-(g)). Observe que, em ambos os casos, o mecanismo de colapso foi mantido. Além disso, o padrão de fissuração principal responsável pelo mecanismo de colapso foi observado para todas as simulações, como apresentado na Figura 7.20, enquanto é observado um padrão de fissuração secundário, que corresponde aos momentos fletores entre o início da fissuração e o momento de plastificação, causando pequenas variações nas distribuições de dano, entre as diferentes malhas.

As curvas de força-deflexão não foram influenciadas pelas diferentes configurações e tamanhos das malhas, conforme apresentado na Figura 7.19. Os resultados para as cinco malhas foram bastante semelhantes; a carga máxima foi igual a 47,17 kN, e as fases de amolecimento foram bastante próximas para todos os exemplos testados. Além disso, Perego (1990) apresenta que, para um deslocamento de 0,2 m, foi obtida uma carga de 25,34 kN e um dano máximo próximo a 0,9, porém não apresenta a curva de Força vs. Deslocamento completa. Para essa condição de deslocamento, o modelo proposto obteve uma carga de 23,02 kN e a um dano próximo a 0,97.

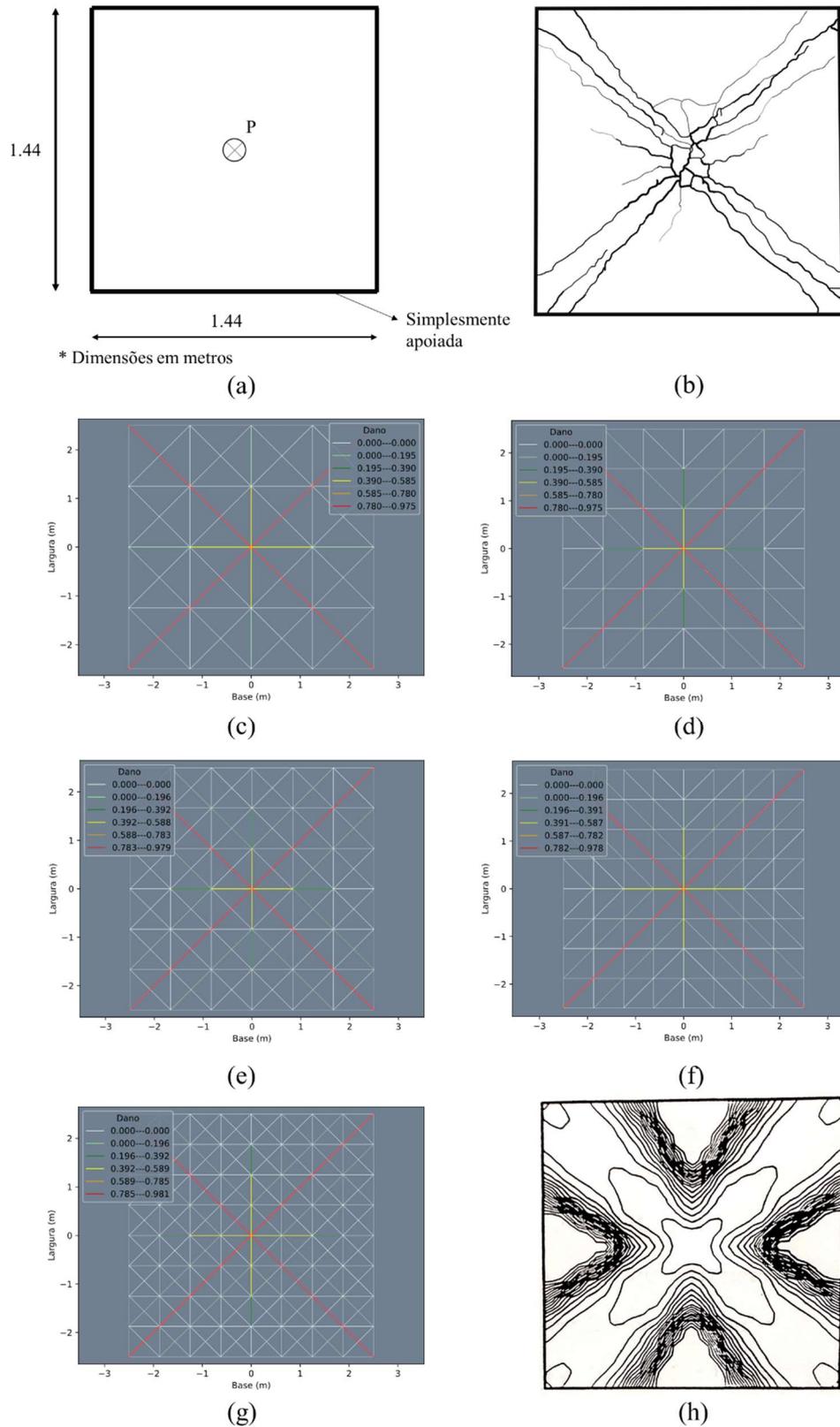
Portanto, é possível concluir que o modelo não linear proposto para a análise de lajes é independente da malha e está de acordo com as observações experimentais e da literatura.

Figura 7.19: Força vs. Deslocamento no centro da laje, para diferentes malhas.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Figura 7.20: (a) Arranjo experimental, (b) padrão de fissuração experimental, dano positivo para as diferentes malhas: (c) 64 elementos, (d) 72 elementos, (e) 128 elementos, (f) 144 elementos e (g) 256 elementos e (h) distribuição de danos por Perego (1990).



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

7.2.2 Laje quadrada com os cantos apoiados sob carga concentrada

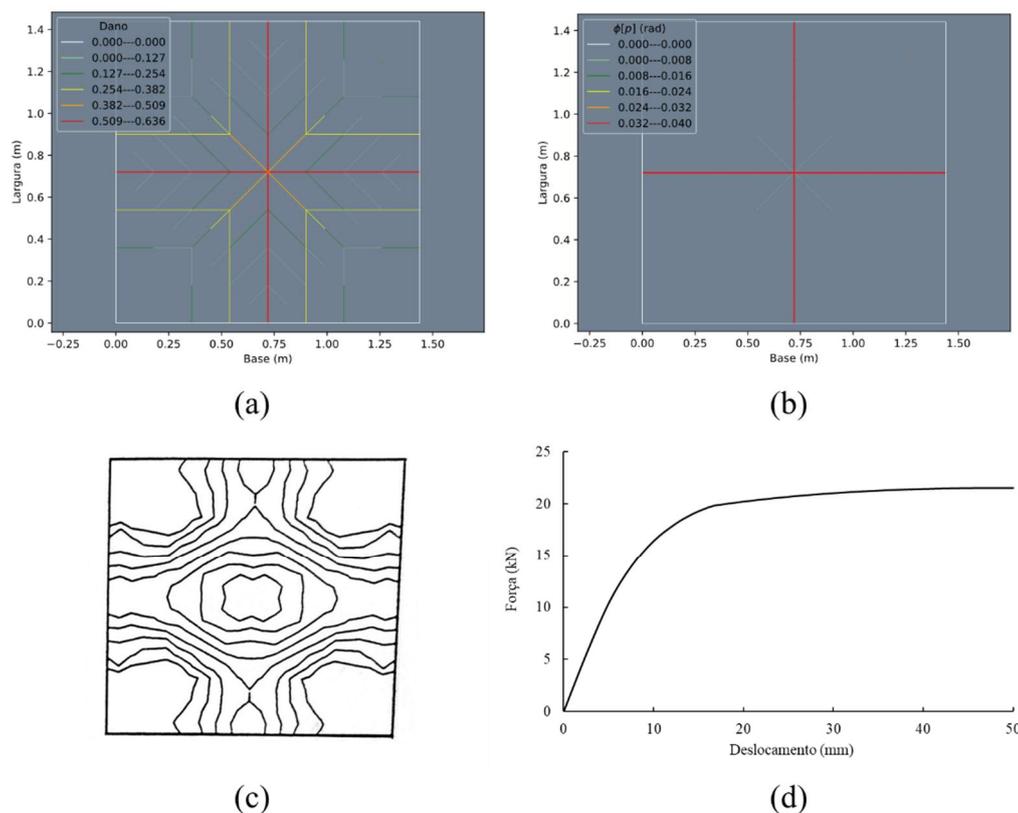
O segundo exemplo analisado é uma laje quadrada com dimensões de 1,44 m x 1,44 m x 0,06 m, cujas condições de contorno foram consideradas como apoiadas em seus quatro cantos com uma carga concentrada em seu centro. Assumiu-se que a taxa e distribuição da armadura e as propriedades físicas do aço e do concreto são iguais às propriedades do exemplo apresentado na seção 7.2.1.

É possível verificar a qualidade do modelo proposto com base na teoria das charneiras plásticas e de modelos numéricos da literatura, em termos da carga de colapso e no mecanismo de colapso esperado, respectivamente. A Figura 7.21 (a)-(b) apresenta os resultados numéricos obtidos pelo modelo proposto para esse exemplo; a Figura 7.21 (c) apresenta os resultados obtidos numericamente por Perego (1990), aplicando o modelo de dano contínuo, para uma laje com condições de contorno semelhantes; e a curva força-deflexão para o ponto central da placa é mostrada na Figura 7.21 (d).

Os resultados através do modelo proposto estão de acordo com o mecanismo de colapso teórico, que se espera que seja “em forma de cruz”. O padrão de fissuração principal (Figura 7.21 (a)) é corroborado pelos resultados das rotações plásticas (Figura 7.21 (b)). Além disso, também é possível notar uma charneira de dano, paralela às principais. Esse comportamento também foi observado por Perego (1990) (Figura 7.21 (c)), que reflete que o dano ocorre em todas as porções centrais da laje, mas os valores mais elevados são localizados no centro.

A carga de colapso também foi verificada pela teoria das charneiras plásticas, atingindo um valor de 19,66 kN, que é bastante próximo do resultado numérico obtido através do modelo proposto, igual a 21,56 kN (Figura 7.21 (d)).

Figura 7.21: (a) Dano positivo e (b) rotações plásticas pelo modelo proposto, (c) distribuição de danos obtidos por Perego (1990) e (d) Força vs. Deslocamento no centro da laje.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

7.2.3 Laje quadrada sob carga distribuída

O terceiro exemplo apresentado também foi testado experimentalmente por Sawczuk e Jaeger (1963), com o objetivo de testar o padrão de fissuração de lajes sob cargas distribuídas.

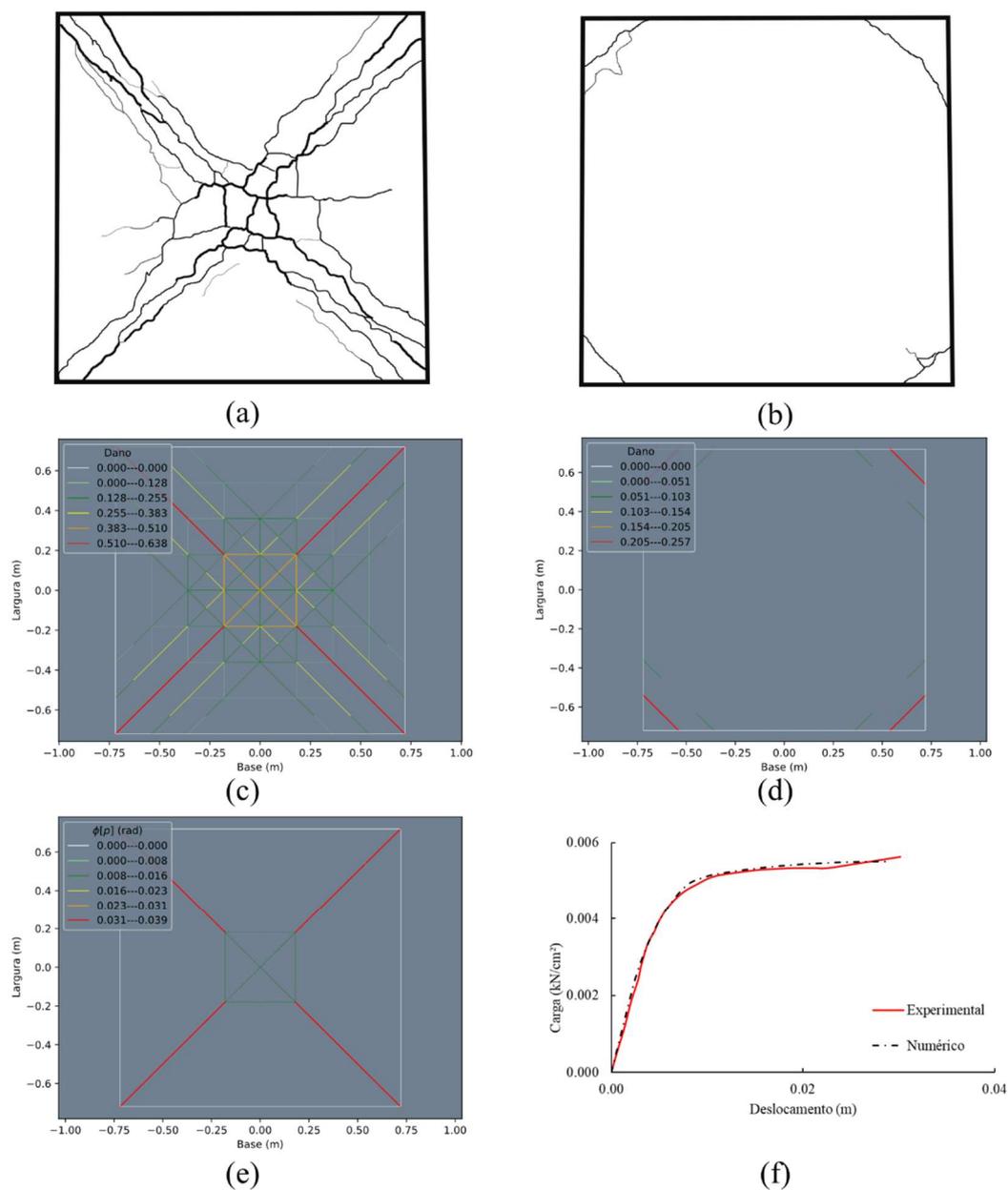
O exemplo é uma laje quadrada com dimensões de 1,44 m x 1,44 m x 0,06 m que foi simplesmente apoiada ao longo de todas as suas bordas, e os cantos foram restringidos. Os testes experimentais foram realizados com a aplicação de uma carga uniformemente distribuída sobre sua área. A geometria da laje, taxa e distribuição da armadura e as propriedades físicas dos materiais eram iguais às do primeiro exemplo apresentado na seção 7.2.1.

A simulação numérica foi realizada com 1/4 da laje, totalizando 64 elementos, usando uma malha regular de diagonal dupla. Os resultados experimentais e numéricos são apresentados na Figura 7.22.

É possível notar que a distribuição de danos é bastante semelhante à rede de fissuras observada experimentalmente, com os maiores valores de dano para a região do mecanismo de colapso (formato de X), conforme observado pelas rotações plásticas (Figura 7.22 (e)). Também é possível notar que outras linhas de dano, paralelas às principais (Figura 7.22 (a) e (c)), com danos próximos à metade dos maiores, semelhantes às observações experimentais, assim como a distribuição de danos na parte central da laje (quadrado). Além disso, como os cantos da laje foram fixados, espera-se a ocorrência de dano devido ao momento volvente, o que também foi observado em experimentos (Figura 7.22 (b)) e numericamente (Figura 7.22 (d)). A abertura dessas fissuras negativas é próxima às observadas nas fissuras positivas, paralelas à principal. Isso também foi obtido pelo modelo numérico, cujo valor de dano foi próximo a 0,25. A curva numérica de força-deflexão também foi bastante próxima da experimental (Figura 7.22 (f)), para todos os estágios de carregamento.

Vale destacar que, graças a consideração do modelo em permitir a abertura de charneiras por critérios de resistência da laje na seção e dos momentos fletores atuantes, não sendo impostas limitações da região de fissuras, é possível recuperar numericamente com alta precisão os resultados de fissuração, desde sua iniciação até a propagação das redes complexas de fissuras.

Figura 7.22: Padrão de fissuração experimental: (a) momentos fletores positivos e (b) negativos (SAWCZUK e JAEGER, 1963), resultados numéricos: (c) dano positivo, (d) dano negativo, (e) rotações plásticas positivas e (f) Força vs. Deslocamento no centro.



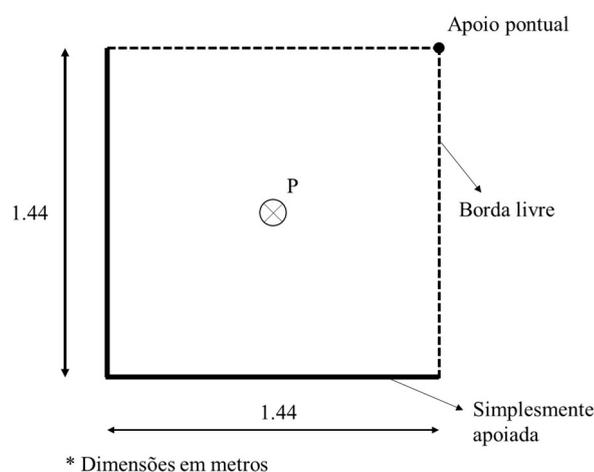
Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

7.2.4 Laje quadrada assimétrica com duas bordas livres

Sawczuk e Jaeger (1963) também testaram lajes assimétricas sob cargas concentradas. A geometria, a armadura e as propriedades físicas também foram iguais às do primeiro exemplo. As condições de contorno para esse exemplo são duas bordas ortogonais simplesmente

apoiadas, com um ponto de deslocamento controlado e uma carga concentrada em seu centro, conforme mostrado na Figura 7.23. Para essa laje, Sawczuk e Jaeger (1963) não apresentaram a curva Força vs. Deslocamento, apenas o padrão de fissuração experimental. Devido ao bom ajuste dos resultados nos exemplos anteriores, os resultados numéricos de dano e rotação plástica pelo modelo proposto foram relacionados ao padrão de fissuração experimental, que são apresentados na Figura 7.24. A curva numérica de Força vs. Deslocamento também é apresentada. A simulação foi realizada com 256 elementos e uma malha regular de diagonal dupla.

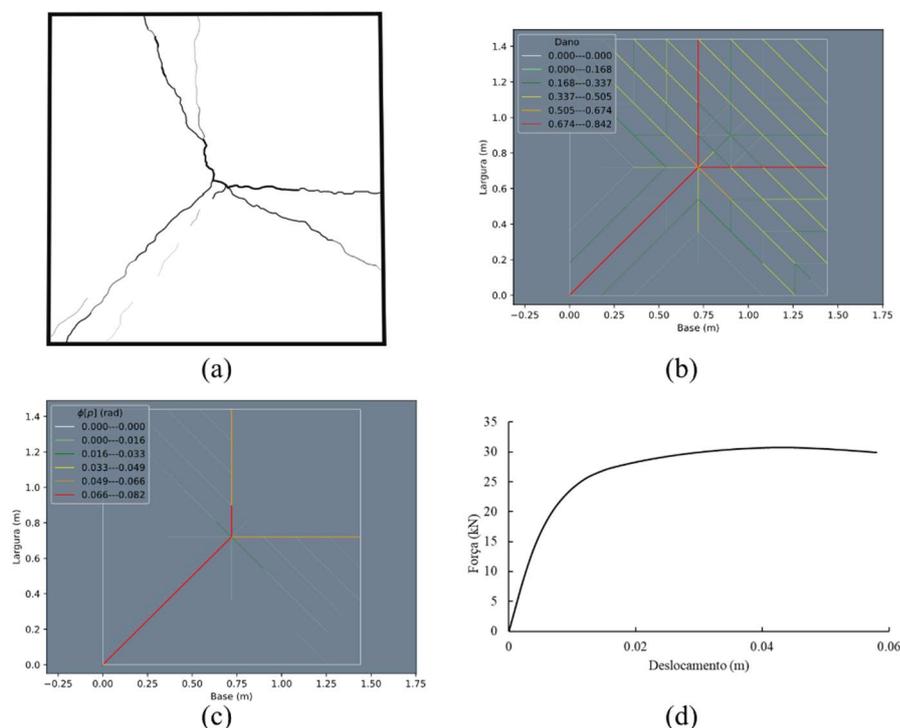
Figura 7.23: Arranjo experimental.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Os resultados de dano (Figura 7.24 (b)) estão compatíveis com as fissuras observadas experimentalmente (Figura 7.24 (a)), em que os principais valores de danos começam a partir das bordas de apoio simples até o centro da laje e com valores de danos mais altos perto do ponto médio das bordas livres. Esses detalhes são corroborados pelas rotações plásticas (Figura 7.24 (c)). Além disso, também é possível notar que há rotações plásticas na direção das bordas simplesmente apoiadas, ou seja, os valores de dano nessa região são consideráveis (momentos fletores normais às arestas superiores ao momento de plastificação), como foi observado experimentalmente. A curva Força vs. Deslocamento apresenta um aumento nas rotações plásticas próximo a 25 kN, e a carga de colapso numérico para essa laje foi igual a 30,74 kN.

Figura 7.24: (a) Fissuras positivas experimentais, (b) danos positivos, (c) rotações plásticas positivas numéricas e (d) Força vs. Deslocamento no centro da laje.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

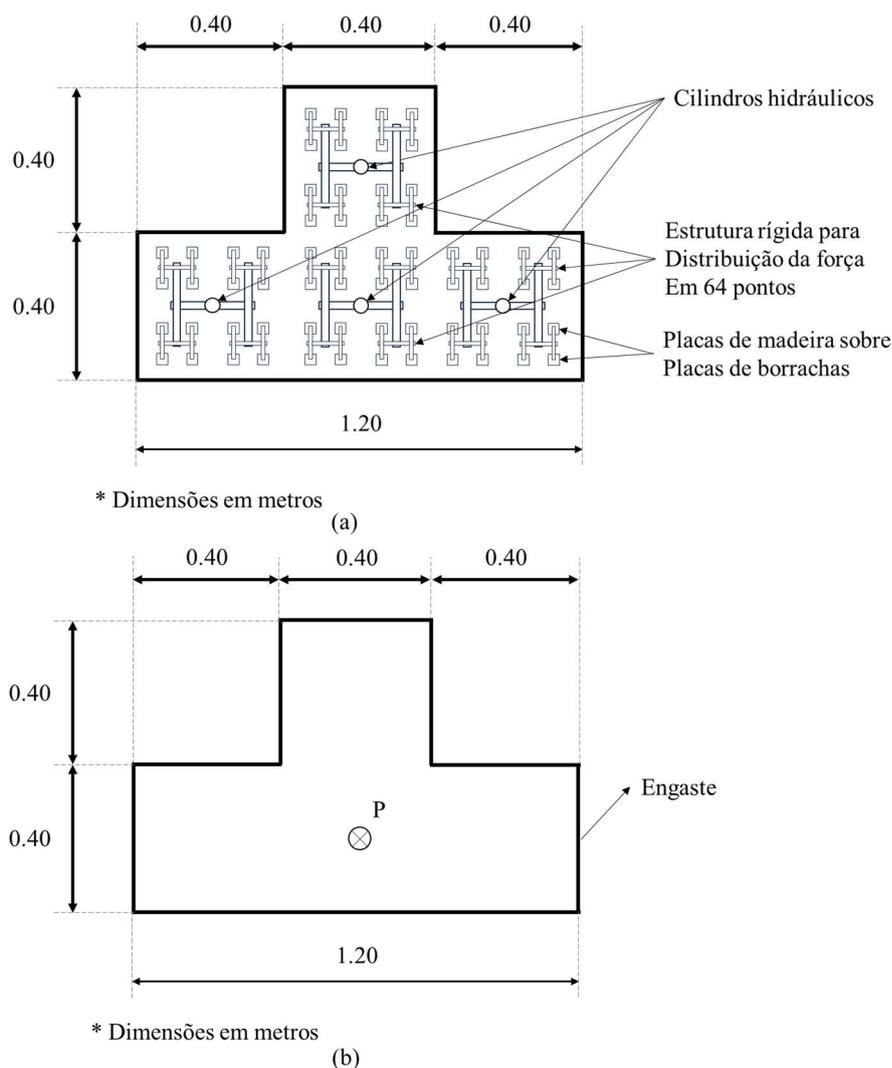
7.2.5 Laje em formato de T

Pinheiro (1981) teve como objetivo investigar o comportamento experimental de lajes em forma de T, engastadas ao longo de todas as bordas, sob um carregamento uniformemente distribuído. O autor testou 4 lajes para essa condição, verificando os padrões de fissuração devido a momentos fletores positivos e negativos e os resultados de Força vs. Deslocamento. A carga foi aplicada por meio de quatro cilindros hidráulicos e algumas estruturas rígidas para distribuir a carga em 64 pontos na área da laje, conforme mostrado na Figura 7.25 (a). A deflexão para as curvas de força-deflexão foi medida no ponto “d” (Figura 7.25 (b)).

As lajes tinham dimensões da mesa de 1,20 m x 0,40 m e da alma de 0,40 m x 0,40 m (Figura 7.25), cuja espessura era igual a 0,02 m para ambas as regiões. A armadura foi igual para ambas as camadas (momentos fletores positivos e negativos), cujo diâmetro foi igual a 1,26 mm, espaçadas a cada 2,5 cm, para ambas as direções, e o cobrimento de concreto foi igual a 1,25 mm. O aço apresentou uma tensão média de escoamento, módulo de elasticidade longitudinal, coeficiente de Poisson e deformação específica de escoamento iguais a 284,4

MPa, 109,74 GPa, 0,3 e 4,7%, respectivamente. A resistência à compressão do concreto, o módulo de elasticidade longitudinal experimental para os corpos de prova, o módulo utilizado para simulação numérica e o coeficiente de Poisson foram iguais a 24,72 MPa, 26 GPa, 5,0 GPa e 0,20, respectivamente (PINHEIRO, 1981).

Figura 7.25: Placa em forma de T: (a) configuração do teste e (b) condições de contorno (PINHEIRO, 1981).

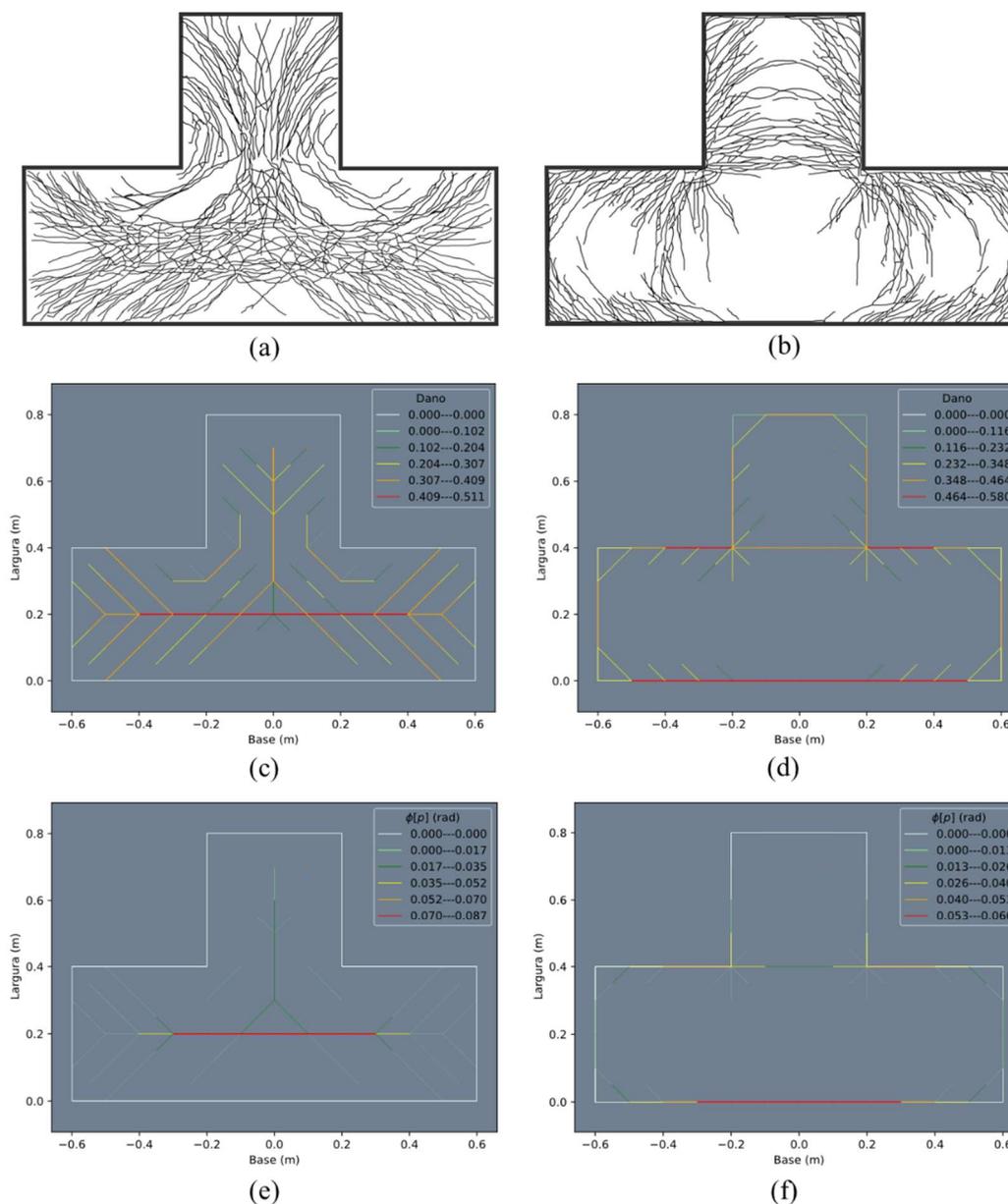


Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Pinheiro (1981) desenhou manualmente a rede de fissuração de todas as lajes separadamente e sobrepôs à rede de fissuração das 4 lajes para cada amostra em uma única figura. Para a laje avaliada, as condições de fissuração devido aos momentos fletores positivos e negativos são apresentadas na Figura 7.26 (a) e na Figura 7.26 (b), respectivamente. No entanto, não houve diferença na espessura das linhas de fissura nas figuras apresentadas por

Pinheiro (1981). A simulação foi realizada com 128 elementos, considerando a simetria, e uma malha regular de diagonal dupla.

Figura 7.26: Condições de dano para laje T: (a) Fissuras positivas e (b) negativas experimentais (PINHEIRO, 1981), (c) danos positivos e (d) danos negativos, (e) rotações plásticas positivas e (f) rotações plásticas negativas.

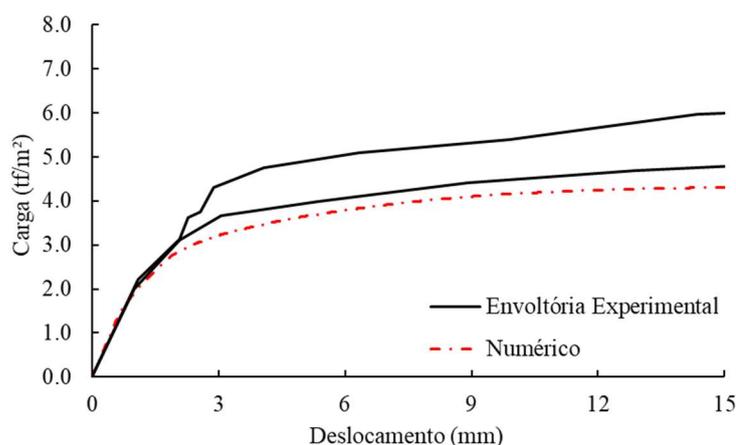


Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

A distribuição de dano devido aos momentos fletores positivos está de acordo com os resultados experimentais (Figura 7.26 (c) e (e)), em que as linhas de dano estão voltadas para os cantos das lajes em T. Além disso, também se observa que há danos no canto entre a alma e a mesa da laje, e os danos mais altos estão localizados no centro da mesa, com a armadura

passiva escoando, devido aos resultados de rotações plásticas. O dano devido aos momentos fletores negativos também é bastante semelhante aos experimentais (Figura 7.26 (d) e (f)), com danos ao longo de todas as bordas engastadas. Além disso, também são observadas as linhas de dano radial nos cantos da laje e a linha de dano na região entre a alma e a mesa. As curvas de Força vs. Deslocamento são apresentadas na Figura 7.27, onde os resultados numéricos também estão próximos dos experimentais.

Figura 7.27: Curvas de Força vs. Deslocamento da laje medidas no ponto “d”.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

7.3 Análise de Cascas

7.3.1 Laje em formato de T

O primeiro exemplo ao qual o modelo de casca foi aplicado consiste em uma laje em formato de T, com mesmas dimensões a apresentada na seção 7.2.5, experimentalmente ensaiada por Pinheiro (1981). Para este exemplo, as condições de carregamento foram mantidas, conforme apresentado na Figura 7.25. Em relação as condições de contorno, Pinheiro (1981) aplicou uma condição de engaste móvel ao longo do contorno de toda a laje. Desta forma, os deslocamentos transversais ao plano médio da laje e os giros foram impedidos, enquanto os deslocamentos no plano da placa foram permitidos. O autor também testou 4 lajes para essa condição, verificando os padrões de fissuração devido a momentos fletores positivos e negativos e os resultados de Força vs. Deslocamento.

A armadura passiva da laje foi distribuída de forma similar ao descrito na seção na seção 7.2.5, com barras de diâmetro de 1,26 mm, espaçadas a cada 2,5 cm, em ambas as direções.

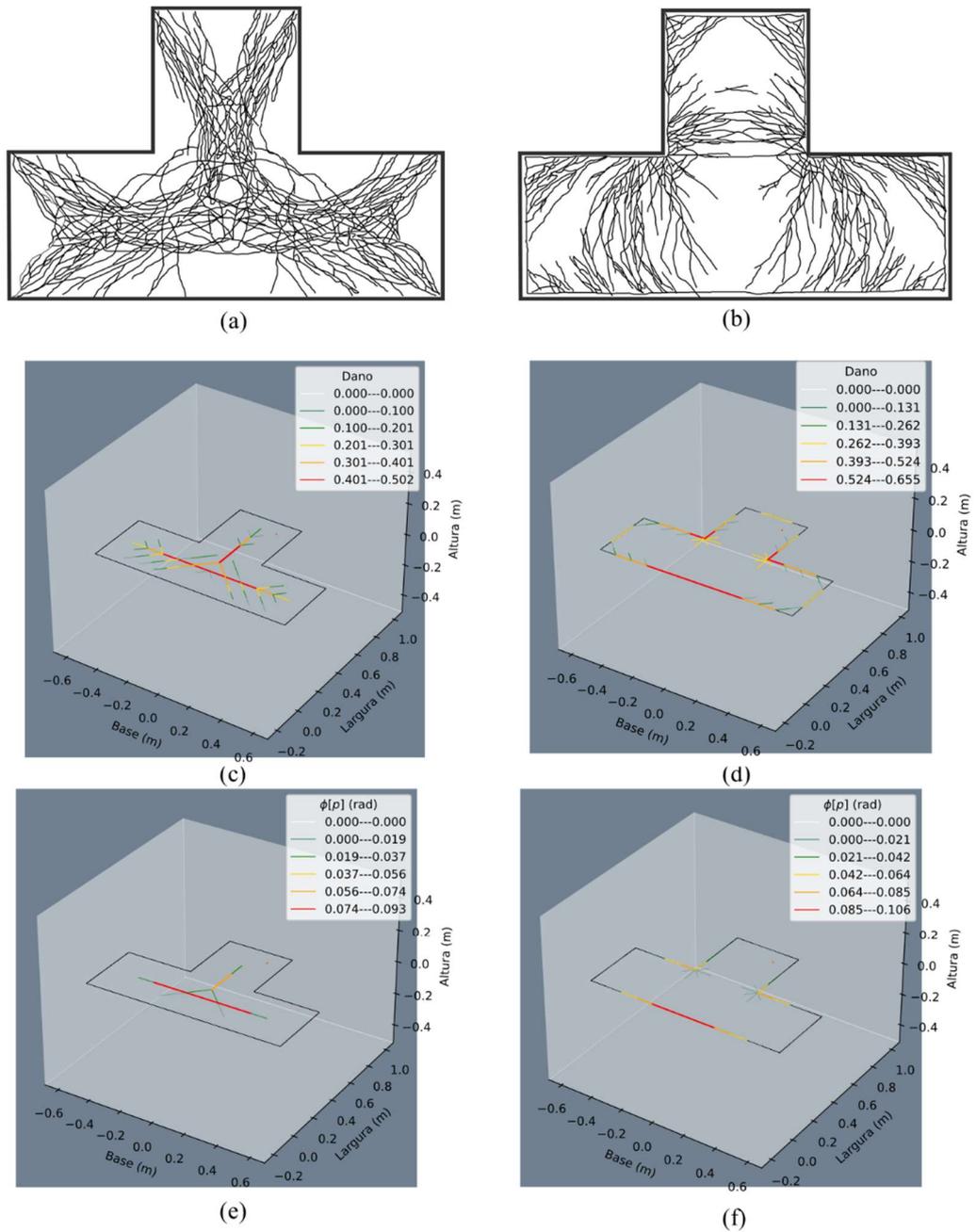
Com relação as propriedades dos materiais, a aço apresentou uma tensão média de escoamento, módulo de elasticidade longitudinal, coeficiente de Poisson e deformação específica de escoamento iguais a 294 MPa, 109,74 GPa, 0,3 e 5,1‰, respectivamente. A resistência à compressão do concreto, o módulo de elasticidade longitudinal experimental para os corpos de prova, o módulo utilizado para simulação numérica e o coeficiente de Poisson foram iguais a 24,72 MPa, 26 GPa, 2,0 GPa e 0,20, respectivamente (PINHEIRO, 1981).

Os padrões de fissuração da laje foram elaborados de forma análoga por Pinheiro (1981), o qual desenhou o padrão de fissuração de cada laje e, por fim, sobrepos todos os padrões. Para a laje avaliada, as fissurações devido aos momentos fletores positivos e negativos são apresentadas na Figura 7.28 (a) e na Figura 7.28 (b), respectivamente. A simulação com o modelo proposto foi realizada com 128 elementos, considerando a simetria, e uma malha regular de diagonal dupla.

Com base nos resultados de dano, sejam os positivos, sejam os negativos (Figura 7.28 (c)-(d)), é possível observar que a distribuição destes estão de acordo com o observado experimentalmente. Os principais valores de dano ocorrem no centro da mesa, além da borda da laje, onde a condição de engaste móvel foi estabelecida, fato corroborado pelas rotações plásticas (Figura 7.28 (e)-(f)).

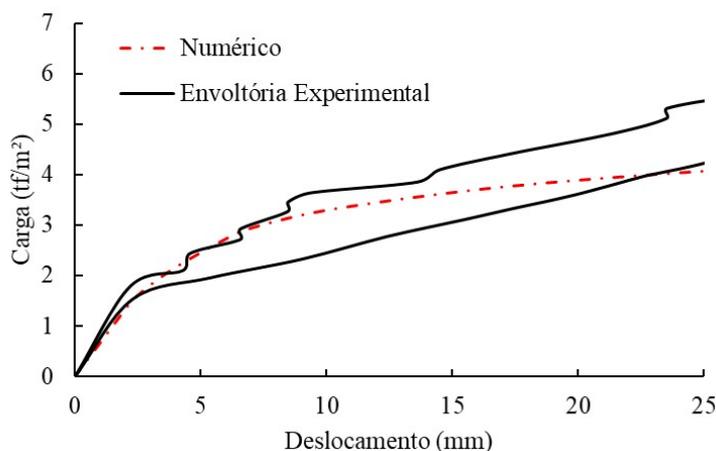
O resultado da curva Força vs. Deslocamento está apresentado na Figura 7.29, no qual é possível notar que o resultado do modelo numérico está totalmente contido dentro da envoltória experimental apresentada por Pinheiro (1981). Além disso, note que, uma vez que para este exemplo de casca são permitidos os deslocamentos no plano, o ensaio e a simulação apresentaram deslocamentos transversais mais elevados, de 12 mm (exemplo de laje) para 25 mm (elemento de casca).

Figura 7.28: Condições de dano para casca T: (a) Trincas positivas e (b) negativas experimentais (PINHEIRO, 1981), (c) dano positivos e (d) dano negativos, (e) rotações plásticas positivas e (f) rotações plásticas negativas.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Figura 7.29: Curvas de Força vs. Deslocamento da casca medidas no ponto “d”.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

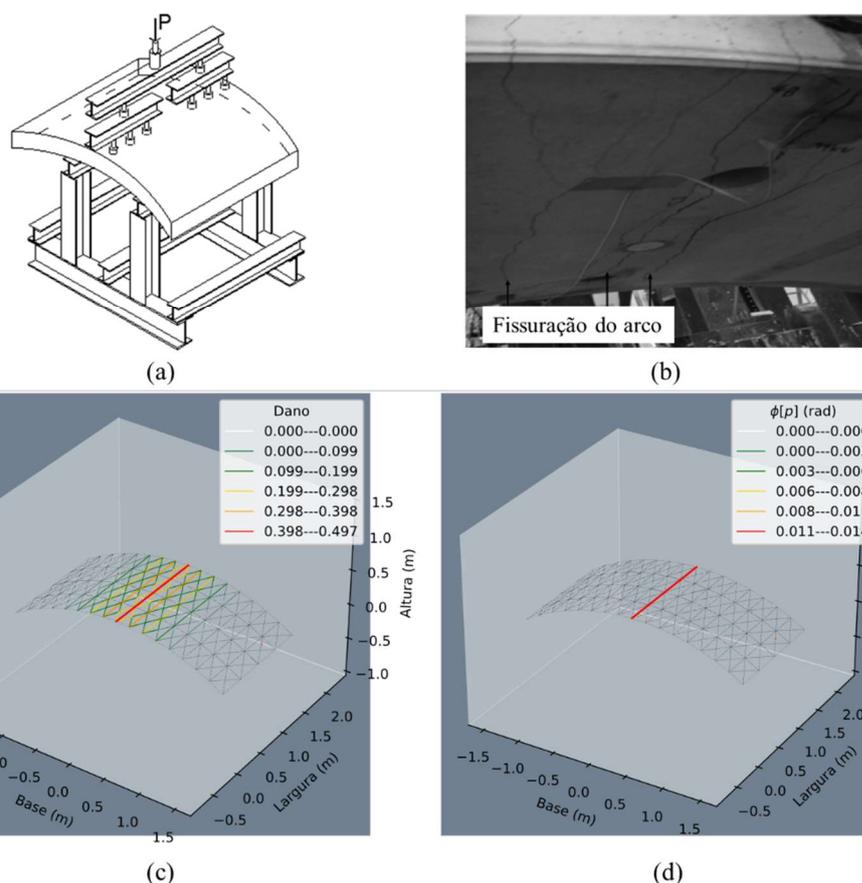
7.3.2 Segmento de revestimento de túnel

Finalmente, o último exemplo a ser avaliado consiste em um segmento de revestimento de túnel (arco) testado por Abbas *et al.* (2014) em laboratório. Estes autores visavam estudar a resposta estrutural de um revestimento de túnel de concreto pré-moldado, no qual moldaram um segmento de arco, em escala real, de um túnel de metrô do Canadá. O arco foi ensaiado segundo um teste de flexão de 3 pontos, com uma carga monotônica, conforme apresentado na Figura 7.30 (a). O arco tinha distância entre os apoios, largura e espessura iguais a 300 cm, 150 cm e 235 mm, respectivamente. A resistência à compressão almejada do concreto, módulo de elasticidade longitudinal para a simulação numérica e coeficiente de Poisson são iguais a 60 MPa, 10 GPa e 0,20, respectivamente, e a resistência ao escoamento do aço, igual a 450 MPa. A armadura passiva foi executada com vergalhões de 8,6 mm, 11,3 mm e 14 mm, com distribuição apresentada na Figura 7.31. A simulação com o modelo de casca foi desenvolvida com 128 elementos, considerando a simetria do problema, e uma malha regular de diagonal dupla.

Os resultados de distribuição de dano (Figura 7.30 (c)) e rotações plásticas (Figura 7.30 (d)) podem ser confrontados com o padrão de fissuração experimental apresentado por Abbas *et al.* (2014) (Figura 7.30 (b)). Note que, como esperado, o mecanismo de colapso é definido através da fissuração e escoamento do concreto na região central do arco, onde os momentos fletores são máximos, fato observado pelos maiores valores de dano e a concentração das

rotações plásticas nessa região. Além disso, como observado experimentalmente, fissuras paralelas à principal também ocorre, em intensidades menores. Esta observação também foi recuperada com o modelo numérico, com valores de dano intermediários.

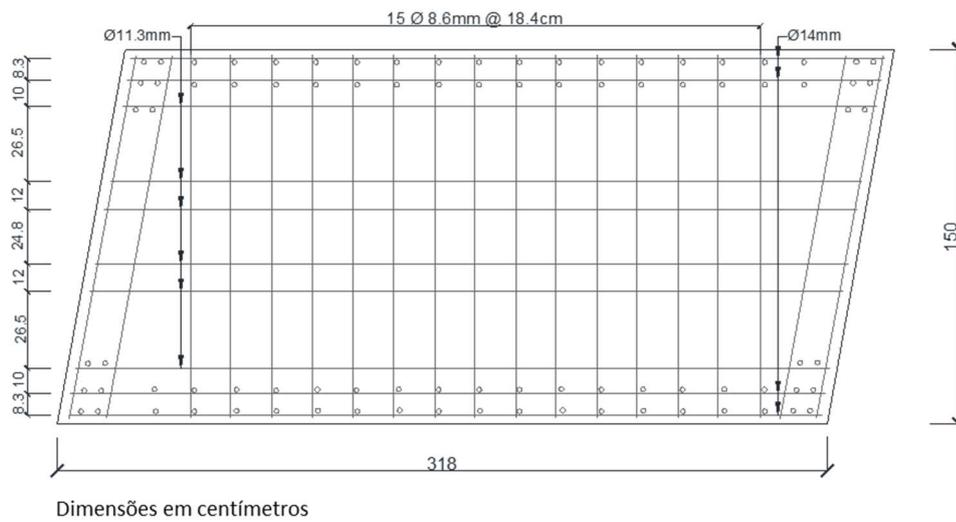
Figura 7.30: Exemplo de Arco: (a) aparato experimental, (b) padrão de fissuração (ABBAS *et al.* 2014) e distribuição de (c) dano e (d) rotações plásticas.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

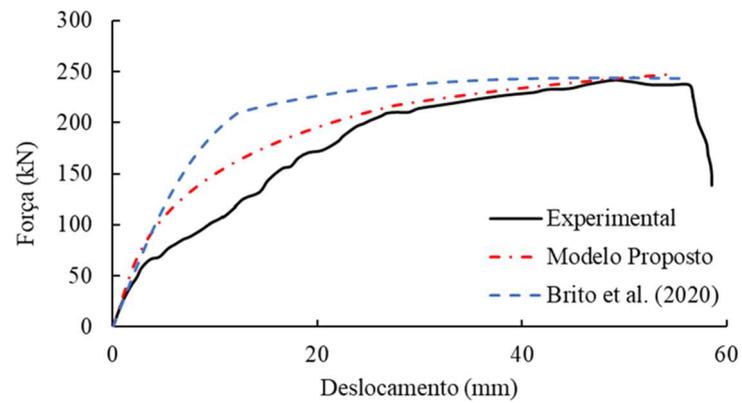
O resultado em termos da curva de Força vs. Deslocamento também pode ser comparado ao observado experimentalmente e apresentado por Abbas *et al.* (2014) e com o resultado numérico desenvolvido por Brito *et al.* (2020), a partir da simulação com um elemento de arco. É possível notar que a curva com o modelo proposto de casca está mais próxima ao resultado experimental, em comparação ao modelo de Brito *et al.* (2020). Isto se deve pois o modelo proposto recupera os danos próximos ao dano principal, que levam a uma redução da rigidez do elemento no estado fissurado.

Figura 7.31: Detalhamento da armadura passiva.



Fonte: Adaptado de Abbas *et al.* (2014)

Figura 7.32: Força vs. Deslocamento no centro do Arco.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

8 CONCLUSÕES

A avaliação de estruturas de forma precisa, incluindo a não linearidade física, é imprescindível para a análise estrutural, uma vez que a não consideração destes efeitos pode levar a falha de uma estrutura a níveis de carregamento inferiores aos de projeto, devido a problemas de concentrações de tensões e o problema da localização de deformações. Desta forma, o presente trabalho objetivou contribuir com o desenvolvimento da teoria não linear mecânica do dano concentrado, a partir da proposta de novos modelos para a avaliação de placas, lajes e cascas.

Com base em referências da literatura, foram adotados dois elementos finitos clássicos, o *Discrete Kirchhoff Triangle* (DKT), apresentado por Batoz *et al.* (1980), e o *Constant Moment Triangle* (CMT), proposto por Morley (1971). A partir das formulações clássicas destes elementos, é proposta a adaptação da variável cinemática do problema, visando contornar o problema da localização de deformações (de curvaturas para rotações normais às arestas).

O elemento DKT foi desenvolvido para a análise de placas de concreto simples e concreto reforçado com fibras, no qual os efeitos não lineares foram definidos através da variável de rotações de dano, nas arestas do elemento. Além disso, as leis de evolução das rotações de dano foram propostas com base no discutido por Teles *et al.* (2023), com fase de amolecimento com queda exponencial, cujo comportamento reproduz de modo mais fidedigno o observado experimentalmente. No entanto, para este elemento, foi observado um problema de convergência dos resultados além de alterações no que se refere aos gráficos Força vs. Deslocamento, devido a problemas relacionados ao viés de malha. Além disso, quando avaliados os momentos fletores normais às arestas, é possível observar que o elemento garante o equilíbrio nodal, porém os momentos fletores entre arestas adjacentes são diferentes. Esta resposta torna inviável o uso deste elemento para modelos que utilizem a variável de dano diretamente, por ser calculado para cada elemento finito. Note que, para o modelo proposto, cujas variáveis inelásticas são as rotações de dano, esta distribuição de momentos fletores não invalida os resultados, uma vez que as rotações de dano das arestas são dadas pela soma das rotações de dano da aresta de cada elemento que a compõe. Além disso, também foi observado um alto custo computacional para as simulações aplicando este elemento, o que o dificulta aplicações em larga escala.

Com base nestas observações, o elemento CMT também foi desenvolvido para a análise de placas de concreto simples e concreto reforçado com fibras. Para este elemento, a variável inelástica, bem como as leis de evolução foram adotadas de forma similar ao definido para o elemento DKT (rotações de dano e lei de evolução do dano com fase de amolecimento com queda exponencial). Este elemento foi testado para diferentes exemplos experimentais da literatura apresentando resultados com alta acurácia para descrever os padrões de fissuração observados experimentalmente, além das curvas de Força vs. Deslocamento. Além disso, em comparação ao elemento DKT, o tempo de simulação utilizando o elemento CMT apresentou uma considerável redução, com simulações até 14 vezes mais rápidas.

Com o objetivo de obter exemplos experimentais próprios, o presente trabalho também desenvolveu uma campanha experimental junto ao Laboratório de Estruturas e de Materiais (LEMA), vinculado ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas (PPGEC/UFAL). Desta forma, foram moldadas 4 placas de concreto reforçadas com fibras de aço, 8 vigas e 8 corpos de prova cilíndricos do mesmo concreto. A campanha experimental completa consistiu desde a preparação e caracterização dos materiais, moldagem dos corpos de prova e ensaios de flexão das placas. Vale ressaltar que para os ensaios das placas, também foi aplicada a técnica de correlação de imagens digitais (CID). As vigas foram ensaiadas à flexão de acordo com o recomendado pelo RILEM TC-50 FMC (1985), para a obtenção da energia de fratura do concreto. Portanto, com base nos resultados obtidos experimentalmente, as placas também foram simuladas numericamente com o modelo proposto baseado no elemento CMT. Foi observado que o modelo proposto recuperou com boa precisão os resultados experimentais, em termos das regiões de fissuração, curva de Força vs. Deslocamento e curva de Força vs. Abertura de Fissuras (COD).

O presente trabalho também desenvolveu um novo modelo para a análise de placas de concreto armado (lajes), também utilizando o elemento CMT. O modelo foi elaborado a partir de adaptações do elemento para análise de placas, nos quais as variáveis inelásticas foram definidas como o dano e as rotações plásticas, que puderam ser diretamente relacionadas com a fissuração do concreto e o escoamento da armadura, respectivamente. Note que os parâmetros do modelo podem ser obtidos unicamente a partir das propriedades físicas e geométricas das lajes. O modelo foi aplicado para lajes com diferentes condições de contorno, de carregamento e formatos, comparando os resultados de fissuração e das curvas de força deslocamento. Foi possível observar que o modelo proposto recuperou com alta precisão o processo de iniciação e propagação de redes complexas de fissuras de todas as lajes analisadas. O modelo também

recuperou com boa precisão os resultados das curvas de Força vs. Deslocamento em comparação a valores experimentais, com a teoria das charneiras plásticas e com um modelo de dano contínuo.

A avaliação de problemas nos quais os esforços axiais apresentassem influência também foi considerado no presente trabalho. Desta forma, foi realizada a adaptação do elemento finito *Constant Strain Triangle* (CST), a fim de alterar a variável cinemática do mesmo de deformações específicas para alongamentos. Note que este elemento foi mantido em regime elástico linear. Visando a avaliação de problemas de cascas de concreto armado, foi realizado o acoplamento direto entre o elemento de laje proposto e o elemento CST, admitindo a superposição de efeitos. Portanto, os efeitos inelásticos do problema eram referentes ao elemento de laje (dano e rotações plásticas). O modelo foi testado para exemplos com diferentes condições de contorno e carregamento: uma laje em forma de T, com deslocamentos no plano permitidos e um arco, ensaiado à flexão de 3 pontos. Os resultados obtidos mostraram uma boa capacidade do elemento para avaliar problemas de casca, obtendo respostas com precisão elevada, em termos de fissuração e cargas máximas.

Vale ressaltar que para todos os modelos desenvolvidos neste trabalho foi avaliada a objetividade de solução (ou independência de malha), problema recorrente em modelos não lineares. Com base nos estudos desenvolvidos, foi possível confirmar que os modelos são independentes de malha e, portanto, apresentam objetividade de solução. Além disso, é possível destacar a flexibilidade dos modelos no que se refere à formação dos mecanismos de colapso. Enquanto algumas teorias necessitam de um direcionamento da região de fissuração ou, devido a problemas computacionais, limitar as regiões de possíveis danos, todos os modelos apresentados permitem que o processo de fissuração se inicie e propague unicamente de acordo com os níveis de momentos fletores normais às charneiras, sem quaisquer tipos de restrição. Além disso, destaca-se que os cálculos de todos os parâmetros dos modelos estão diretamente relacionados com as propriedades físicas e geométricas dos exemplos avaliados. Portanto, este tipo de consideração poderá permitir as aplicações práticas do modelo no futuro.

Em trabalhos futuros, recomenda-se realizar a proposta de um novo modelo de placas, de modo a considerar os efeitos de cisalhamento. Com relação ao elemento de lajes, recomenda-se uma adaptação do modelo, de modo a considerar efeitos de corrosão na armadura. Para o elemento de cascas, recomenda-se a alteração do elemento referente aos efeitos no plano, utilizando o elemento *Linear Strain Triangle* (LST), além de considerar efeitos inelásticos para este elemento (fissuração por tração e compressão).

REFERÊNCIAS

ABAQUS, G. **Abaqus 6.11**. Dassault Systemes Simulia Corporation, Providence, RI, USA, 2011;

ABBAS, S.; SOLIMAN, A.M.; NEHDI, M.L. Mechanical performance of reinforced concrete and steel fiber-reinforced concrete precast tunnel lining segments: A case study, **ACI Materials Journal**, 111(5), 501–10, 2014. <https://doi.org/10.14359/51687101>;

AHMED, B.; VOYIADJIS, G. Z.; PARK, T. Local and non-local damage model with extended stress decomposition for concrete. **International Journal of Damage Mechanics**, 30 (2021) 1149–1191. <https://doi.org/10.1177/1056789521998728>;

ALLMAN, D. J.; MORLEY, L. S. D. The ‘constant’ bending moment three-noded triangle. **Communications in numerical methods in engineering**, 16(10), 733-741, 2000. [https://doi.org/10.1002/1099-0887\(200010\)16:10<733::AID-CNM374>3.0.CO;2-V](https://doi.org/10.1002/1099-0887(200010)16:10<733::AID-CNM374>3.0.CO;2-V);

ALMEIDA, J. P. M.; MAUNDER, E. A. W.; TIAGO, C. A general degree semihybrid triangular compatible finite element formulation for Kirchhoff plates. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 120(1), 56-85, 2019. <https://doi.org/10.1002/nme.6124>;

ALVA, G. M. S.; EL DEBS, A. L. H. C. Application of lumped dissipation model in nonlinear analysis of reinforced concrete structures. **Engineering Structures**, 32(4), 974-981, 2010. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2009.12.024>;

ÁLVARES, Manoel da Silva. **Contribuição ao estudo e emprego de modelos simplificados de dano e plasticidade para a análise de estruturas de barras em concreto armado**. 150 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Universidade de São Paulo, São Carlos, 1999;

AMORIM, D. L. N. F.; PROENÇA, S. P. B.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. A model of fracture in reinforced concrete arches based on lumped damage mechanics. **International Journal of Solids and Structures**, 50(24):4070–4079, 2013. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.08.012>;

AMORIM, D. L. N. F.; PROENÇA, S. P. B.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Simplified modeling of cracking in concrete: Application in tunnel linings. **Engineering Structures**, 70:23–35, 2014. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2014.03.031>;

AMORIM, David L. N. F. PIEDADE NETO, D.; PROENÇA, S. P. B.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. The extended lumped damage mechanics: a new formulation for the analysis of softening with

FE size independence. **Mechanics Research Communications**, v. 91, 13–18, 2018. <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2018.05.001>;

AMORIM, David Leonardo Nascimento de Figueiredo. **On the lumped damage mechanics for nonlinear structural analysis: new developments and applications**. 195 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016;

ARAÚJO, F., PROENÇA, S.P.B. Application of a lumped dissipation model to reinforced concrete structures with the consideration of residual strains and cycles of hysteresis. **Journal of Mechanics of Materials and Structures**, v. 03, 1011-1031, 2008. <https://doi.org/10.2140/jomms.2008.3.1011>;

ARMERO, F.; EHRLICH, D. Finite Element Methods for the Multi-scale Modeling of Softening Hinge Lines in Plates at Failure. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 195.13-16: 1283-324, 2006. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2005.05.040>;

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). **NBR 16940**: Concreto reforçado com fibras – Determinação das resistências à tração na flexão (limite de proporcionalidade e resistências residuais) – Método de ensaio. Rio de Janeiro, p. 15. 2021;

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). **NBR 5738**: Moldagem e cura de corpos-de-prova cilíndricos ou prismáticos de concreto. Rio de Janeiro. 2015;

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). **NBR 5739**: Concreto - Ensaio de compressão de corpos de prova cilíndricos. Rio de Janeiro, p. 9. 2018;

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto - Procedimento. Rio de Janeiro, p. 260.2023;

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). **NBR 8522**: Concreto - Determinação dos módulos estáticos de elasticidade e de deformação à compressão. Rio de Janeiro, p. 20. 2017;

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). **NBR NM 248**: Agregados – Determinação da composição granulométrica. Rio de Janeiro, 13. 2003;

BACH, C. **Versuche über die Widerstandsfähigkeit ebener Platten**. Springer, 1891. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-33809-4>;

BAI, Y.; GUAN, S.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Development of a damage model for assessing fracture failure of steel beam-to-column connections subjected to extremely low cycle fatigue.

Engineering Failure Analysis, 82:823–34, 2017.
<https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2017.07.032>;

BAI, Y.; KURATA, M.; FLÓREZ-LÓPEZ, J.; NAKASHIMA, M. Macromodeling of Crack Damage in Steel Beams Subjected to Nonstationary Low Cycle Fatigue. **Journal of Structural Engineering**, 142(10):1–13, 2016. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)ST.1943-541X.0001536](https://doi.org/10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0001536);

BARIL, M.A.; SORELLI, L.; RÉTHORÉ, J.; BABY, F.; TOUTLEMONDE, F.; FERRARA, L.; BERNARDI, S.; FAFARD, M. Effect of casting flow defects on the crack propagation in UHPFRC thin slabs by means of stereovision Digital Image Correlation. **Construction and Building Materials**, 129, 182-192, 2016. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2016.10.102>;

BARRIOS, S. K. M.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Numerical quantification of damage reduction in frames retrofitted with FRP bands as bracing elements. **Engineering Structures**, 223:111178, 2020. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2020.111178>;

BASTOS, Rutenio Gurgel. **Ruína de lajes de concreto armado com efeito de membrana e redução gradativa da armadura**. 220 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade de São Paulo, São Carlos, 1977;

BATOZ, J.L.; BATHE, K.J.; HO, L.W. A study of three-node triangular plate bending elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 15(12): 1171-1812, 1980. <https://doi.org/10.1002/nme.1620151205>;

BAUMANN, R. A.; WEISGERBER, F. E. Yield-line analysis of slabs-on-grade. **Journal of Structural Engineering**, 109(7), 1553-1568, 1983. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1983\)109:7\(1553\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1983)109:7(1553));

BAZÁN, J. A. V.; BECK, A. T.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Random fatigue of plane frames via lumped damage mechanics. **Engineering Structures**, v. 182, 301-315, 2019. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.12.008>;

BAZANT, Z.P. Asymptotic matching analysis of scaling structural failure due to softening hinges. I: Theory. II: Implications. **Journal of Engineering Mechanics**, 129:641–650. 651–654, 2003. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2003\)129:6\(641\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2003)129:6(641)).
[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2003\)129:6\(651\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2003)129:6(651));

BAŽANT, Z. P. Fracture Energy of Heterogeneous Materials and Similitude. In: **Fracture of Concrete and Rock**. New York, NY: Springer New York, 1989. 229–241. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3578-1_23;

BAŽANT, Z. P.; PLANAS, J. **Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasibrittle**

Materials. New York, NY: CRC Press, 1997. ISBN-13: 978-0060822293;

BELYTSCHKO, T.; STOLARSKI, H.; CARPENTER, N. A C^0 triangular plate element with one-point quadrature. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 20(5), 787-802, 1984. <https://doi.org/10.1002/nme.1620200502>;

BENALLAL, A.; COMI, C. Material instabilities in inelastic saturated porous media under dynamic loadings. **International Journal of Solids and Structures**, 2002. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(02\)00180-4](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00180-4);

BENALLAL, A.; COMI, C. Perturbation growth and localization in fluid-saturated inelastic porous media under quasi-static loadings. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, 2003. [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(02\)00143-6](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(02)00143-6);

BORDIGNON, N. PICCOLROAZ, A.; DAL CORSO, F.; BIGONI, D. Strain localization and shear band propagation in ductile materials. **Frontiers in Materials**, 2015. <https://doi.org/10.3389/fmats.2015.00022>;

BORST, R. Fracture in quasi-brittle materials: a review of continuum damage-based approaches. **Engineering Fracture Mechanics**, 69 (2002) 95–112. [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(01\)00082-0](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(01)00082-0);

BOSSE, R. M.; FLÓREZ-LÓPEZ, J.; GIDRÃO, G. M.; RODRIGUES, I. D.; BECK, A. T. Collapse mechanisms and fragility curves based on Lumped Damage Mechanics for RC frames subjected to earthquakes. **Engineering Structures**, 311, 118115, 2024. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2024.118115>;

BOURDIN, B.; FRANCFORT, G.A.; MARIGO, J.J. The variational approach to fracture. **Journal of elasticity**, 91, 5-148, 2008. <https://doi.org/10.1007/s10659-007-9107-3>;

BRITO, T. I. J.; SANTOS, D. M.; SANTOS, F. A. S.; CUNHA, R. N.; AMORIM, D. L. N. F. On the lumped damage modelling of reinforced concrete beams and arches. **Frattura ed Integrità Strutturale**, 14(54):1-20, 2020. <https://doi.org/10.3221/IGF-ESIS.54.01>;

BROEK, David. **Elementary engineering fracture mechanics**. AH Dordrecht, The Netherlands: Martinus Nijhoff Publishers, 1984. <https://doi.org/10.1007/978-94-009-4333-9>;

CAETANO, G. R.; PENNA, S. S. Formulation based on combined loading function strategy to improve the description of the bi-modularity of quasi-brittle material degradation with multiple damage evolution laws. **Applied Mathematical Modelling**, 126, 713-738, 2024. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2023.11.023>;

CAI, Y. C.; TIAN, L. G.; ATLURI, S. N. A simple locking-free discrete shear triangular plate element. **Computer Modeling in Engineering and Sciences**, 77(3), 221, 2011. <https://doi.org/10.3970/cmcs.2011.077.221>;

CERVERA, M.; CHIUMENTI, M. Mesh objective tensile cracking via a local continuum damage model and a crack tracking technique. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, 196(1-3), 304-320, 2006. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2006.04.008>;

CERVERA, M.; CHIUMENTI, M.; CODINA, R. Mixed stabilized finite element methods in nonlinear solid mechanics: Part I: Formulation. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 199(37-40), 2559-2570, 2010. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2010.04.006>;

CHAMECKI, S. **Calculo no regime de ruptura, das lajes de concreto armadas em cruz**. Curitiba, 1948;

CHEN, H.; NATARAJAN, S.; OOI, E. T.; SONG, C. Modeling of coupled thermo-mechanical crack propagation in brittle solids using adaptive phase field method with scaled boundary finite element method. **Theoretical and Applied Fracture Mechanics**, 129, 104158, 2024. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2023.104158>;

CIPOLLINA, A.; LÓPEZ-INOJOSA, A.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. A simplified damage mechanics approach to nonlinear analysis of frames. **Computers & Structures**, 54(6):1113-1126, 1995. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(94\)00394-I](https://doi.org/10.1016/0045-7949(94)00394-I);

COCCHETTI, G.; MAIER, G. Elastic-plastic and limit-state analyses of frames with softening plasti-hinge models by mathematical programming. **International Journal of Solids and Structures**, 40: 7219-7244, 2003. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(03\)00363-9](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(03)00363-9);

COMI, C.; PEREGO, U. Fracture energy based bi-dissipative damage model for concrete. **International Journal of Solids and Structures**, v. 38, 6427-6454, 2001. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(01\)00066-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(01)00066-X);

COOK, Robert D. **Concepts and applications of finite element analysis**. John wiley & sons, 2007. ISBN-13 : 978-0471356059;

CORDEIRO, Sérgio Gustavo Ferreira. **Formulações do Método dos Elementos de Contorno aplicadas à análise elástica e à fratura coesiva de estruturas compostas planas**. 266 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015;

CUNHA, R. N.; AMORIM, D. L.; PROENÇA, S. P.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Modeling the initiation and propagation of complex networks of cracks in reinforced concrete plates. **Engineering Structures**, 308, 117993, 2024. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2024.117993>;

CUNHA, R.N.; OLIVEIRA, K.; BRITO, A.; VIEIRA, C.; AMORIM, D.L.N.F. Evaluation of the behaviour of reinforced concrete beams repaired with glass fibre reinforced polymer (GFRP) using a damage variable. **Frattura ed Integrità Strutturale**, 15(57), 82-92, 2021. <https://doi.org/10.3221/IGF-ESIS.57.08>;

CUNHA, R.N.; VIEIRA, C.; AMORIM, D.L.N.F. Lumped damage mechanics as a diagnosis tool of reinforced concrete structures in service: case studies of a former bridge arch and a balcony slab. **Frattura ed Integrità Strutturale**, 15(58), 21-32, 2021, <https://doi.org/10.3221/IGF-ESIS.58.02>;

DARWIN, D.; DOLAN, C. W.; NILSON, A. H. **Design of concrete structures** – Volume 2. New York, NY, USA:: McGraw-Hill Education, 2016;

DESMORAT, R.; GATUINGT, F.; RAGUENEAU, F. Nonlocal anisotropic damage model and related computational aspects for quasi-brittle materials. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 74, n. 10, 1539-1560, 2007. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2006.09.012>;

DIAS, I. F.; OLIVER, J.; HUESPE, A. E. **Strain injection techniques in numerical modeling of propagating material failure**. International Center for Numerical Methods in Engineering, 2012. <https://doi.org/10.13140/2.1.2844.5761>;

ELWELL, D.J.; FU, G. **Compression testing of concrete: cylinders vs. Cubes**, New York State Department of Transportation, 1995;22;

ENERPAC. **Industrial Tools**: E 327 PO, 2024. 260 f. Catálogo. Disponível em: <<https://www.carlsons.com.br/uploads/pdf/Enerpac-E327.pdf>>;

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. **EN 14651**: Test method for metallic fiber- reinforced concrete – Measuring the flexural tensile strength (limit of proportionality (LOP), residual), CEN, London, 15 p., 2007;

FALEIRO, J.; OLLER, S.; BARBAT, A.H. Plastic-damage analysis of reinforced concrete frames, **Engineering Computations**, Vol. 27 No. 1, 57-83, 2010. <https://doi.org/10.1108/02644401011008522>;

FELDFOGEL, S.; RABINOVITCH, O. Crack induced interfacial debonding in damaged RC slabs strengthened with FRP. **International Journal of Fracture**, 215(1-2), 153-173, 2019. <https://doi.org/10.1007/s10704-018-0333-4>;

FERREIRA, E. M.; NOVELLI, L.; PITANGUEIRA, R. L.S.; GORI, L. Smoothed point interpolation methods for phase-field modelling of pressurised fracture. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 167, 105869, 2024. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2024.105869>;

FLÓREZ-LÓPEZ, J. Modelos de daño concentrados para la simulación numérica del colapso de pórticos planos. **Revista Internacional de Metodos Numericos para Calculo y Diseño en Ingenieria**, v. 9, n. 2, 123–139, 1993;

FLÓREZ-LÓPEZ, Julio; MARANTE, María Eugenia; PICÓN, Ricardo. **Fracture and damage mechanics for structural engineering of frames: state-of-the-art industrial application**. Hershey, Pennsylvania, USA: IGI Global, 2015. ISBN-13 : 978-1466663794;

FRANCFORT, G.A.; MARIGO, J.J. Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, 46(8), 1319-1342, 1998. [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(98\)00034-9](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(98)00034-9);

FREITAS, J. A. T.; TIAGO, C. Wedge and crack solutions for Mindlin–Reissner plates. **International Journal of Fracture**, 221(1), 1-23, 2020. <https://doi.org/10.1007/s10704-019-00397-3>;

GIONGO, Jose Samuel. **Contribuição ao estudo da ruína de lajes retangulares de tabuleiros de pontes**. 178 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade de São Paulo, São Carlos, 1983;

GONÇALVES, D. C.; SÁNCHEZ-ARCE, I. J.; RAMALHO, L. D. C.; CAMPILHO, R. D. S. G.; BELINHA, J. A meshless crack propagation algorithm extended to mixed-mode loading of adhesive joints. **Composite Structures**, 305, 116502, 2023. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2022.116502>;

GRÉGOIRE, D.; ROJAS-SOLANO, L. B.; PIJAUDIER-CABOT, G. Failure and size effect for notched and unnotched concrete beams. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, v. 37, n. 10, 1434–1452, 2013. <https://doi.org/10.1002/nag.2180>;

GRIFFITH, A. A. The phenomena of rupture and flow in solids. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London A**, v. 221, 163–198, 1921. <https://doi.org/10.1098/rsta.1921.0006>;

GRIFFITH, A. A. **The theory of rupture**. In: First International Congress of Applied Mechanics. **Anais...Delft**: 1924;

GUERRERO, N.; MARANTE, M.E.; PICÓN, R. FLÓREZ-LÓPEZ, J. Analysis of Steel hollow structural beams subjected to biaxial bending by lumped damage mechanics. **Revista Internacional de Metodos Numericos para Calculo y Diseno en Ingenieria**, 25(1):3–27, 2009;

GUPTA, A.; NGUYEN, D. T.; DUDDU, R. Damage mechanics challenge: Predictions from an adaptive finite element implementation of the stress-based phase-field fracture model. **Engineering Fracture Mechanics**, 306, 110252, 2024. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2024.110252>;

HASHIGUCHI, K.; PROTASOV, A. Localized necking analysis by the subloading surface model with tangential-strain rate and anisotropy. **International Journal of Plasticity**, 2004. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2003.11.018>;

HAVLÁSEK, P.; GRASSL, P.; JIRÁSEK, M. Analysis of size effect on strength of quasi-brittle materials using integral-type nonlocal models. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 157, 72–85, 2016. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2016.02.029>;

HBM. **catman Data Acquisition Software**. Disponível em: < https://www.hbm.com/pt/2290/catman-software-para-aquisicao-de-dados/?product_type_no=Software%20catman:%20Mais%20do%20que%20uma%20Aquisi%C3%A7%C3%A3o%20de%20Dados>. Acesso em: 03 de dez. de 2022c;

HBM. **Spider8**. Disponível em: < <https://www.hbm.com/pt/2464/software-and-firmware-downloads-for-legacy-products/>>. Acesso em: 03 de dez. de 2022b;

HBM. **WI Displacement Transducers**. Disponível em: <[https://www.hbm.com/en/3060/wi-inductive-displacement-transducer-miniature-probe/?product_type_no=WI:%20Inductive%20Displacement%20Transducer%20\(Miniature%20Probe\)](https://www.hbm.com/en/3060/wi-inductive-displacement-transducer-miniature-probe/?product_type_no=WI:%20Inductive%20Displacement%20Transducer%20(Miniature%20Probe))>. Acesso em: 14 de nov. de 2022a;

HOBBS, B. E.; MÜHLHAUS, H. B.; ORD, A. **Geological Society Special Publication**, 1990. <https://doi.org/10.1144/GSL.SP.1990.054.01.15>;

HUGHES, T. J. R.; TEZDUYAR, T. E. Finite Elements Based Upon Mindlin Plate Theory with Particular Reference to the Four-Node Bilinear Isoparametric Element. **ASME. J. Appl. Mech. September**, 48(3): 587–596, 1981. <https://doi.org/10.1115/1.3157679>;

INGERSLEV, Å. The strength of rectangular slabs. **The Institution of Structural Engineer's Journal**, 1923;

INGLIS, C. E. Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners. **Trans Inst Naval Archit**, 55, 219-241, 1913;

INTERNATIONAL FEDERATION FOR STRUCTURAL CONCRETE (FIB), CEB. **Model code 2010**. First complete draft, v. 1, 220-231, 2010;

IRWIN, G. R. **Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate****Journal of Applied Mechanics**, 1957;

ITOM. **Itom software**. Version 3.1.0. [S.l.]: Institut für Technische Optik, 2018. Disponível em: <<https://itom.bitbucket.io>>;

JOHANSEN, Knud Winstrup. **Brudlinieteorier**. Polyteknish Forening, Genoptrykt, 1943;

JONES, L. L.; WOOD, R. H. **Yield-line analysis of slabs**. Thames & Hudson, 1967;

KACHANOV, L. M. Time of the rupture process of nonlinear solid mechanics. **Otdeleniye Technicheskikh Nauk**, v. 8, 28–31, 1958;

KAEWKULCHAI, G.; WILLIAMSON, E. B. Beam element formulation and solution procedure for dynamic progressive collapse analysis. **Computers and Structures**, v. 82, 639-651, 2004. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2003.12.001>;

KANI, G. N. J. How Safe are Our Large Reinforced Concrete Beams?. **Journal Proceedings**, v. 64, n. 3, 128–141, 1967. <https://doi.org/10.14359/7549>;

KARIHALOO, B.; ABDALLA, H.; XIAO, Q. Size effect in concrete beams. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 70, n. 7–8, 979–993, 2003. [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(02\)00161-3](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(02)00161-3);

KIRSCH, C. Die theorie der elastizitat und die bedurfnisse der festigkeitslehre. **Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure**, v. 42, 797-807, 1898;

KOWAL, Z.; SAWCZUK, A. On the yield-line theory of plates with random plastic moments. **Engineering Fracture Mechanics**, 8(1), 275-280, 1976. [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(76\)90093-X](https://doi.org/10.1016/0013-7944(76)90093-X);

LEAO, H. M.; PITANGUEIRA, R. L. S.; GORI, L.; PENNA, S. S. Phase-field modelling of size effect on strength and structural brittleness. **Journal of the Brazilian Society of**

Mechanical Sciences and Engineering, 43, 1-12, 2021. <https://doi.org/10.1007/s40430-021-03197-w>;

LEMAITRE, Jean; CHABOCHE, Jean Louis. **Mechanics of solid materials**. Cambridge University Press, 1990;

LENZ, P.; MAHNKEN, R. Non-local integral-type damage combined to mean-field homogenization methods for composites and its parallel implementation. **Composite Structures**, 314 (2023) 116911. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2023.116911>;

LI, P.; LI, W.; LI, B.; YANG, S.; SHEN, Y.; WANG, Q.; ZHOU, K. A review on phase field models for fracture and fatigue. **Engineering Fracture Mechanics**, 289, 109419, 2023. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2023.109419>;

LUCENA NETO, E.; ARARIPE, M. A. F.; MONTEIRO, F. A. C.; HERNANDES, J. A. An explicit consistent geometric stiffness matrix for the DKT element. **Latin American Journal of Solids and Structures**, 14, 613-628, 2017. <https://doi.org/10.1590/1679-78252799>;

MACCAFERRI. **Fibras como elemento estrutural para reforço de concreto**, 2014. 238 f. Manual técnico. Disponível em: <https://api.aecweb.com.br/cls/catalogos/maccaferri/Fibras_como_elemento_estrutural_para_refor%C3%A7o_de_concreto_opt.pdf>;

MARANTE, M. E.; BENALLAL, A.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Análisis de falla de sólidos inelásticos mediante la teoría de localización. **Acta Científica Venezolana**, 2007;

MARANTE, M. E.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Plastic localization revisited. **Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME**, 2004. <https://doi.org/10.1115/1.1636790>;

MARIGO, J. J. Modelling of brittle and fatigue damage for elastic material by growth of microvoids. **Engineering Fracture Mechanics**, 21(4), 861-874, 1985. [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(85\)90093-1](https://doi.org/10.1016/0013-7944(85)90093-1);

MICHELS, J.; CHRISTEN, R.; WALDMANN, D. Experimental and numerical investigation on postcracking behavior of steel fiber reinforced concrete. **Engineering Fracture Mechanics**, 98:326-349, 2013. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2012.11.004>;

MONTILLA, S. K.; BOSSE, R. M.; GIDRÃO, G. M.; BECK, A. T.; PICÓN, R. A.; LIU, J.; BAI, Y.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Fragility analysis of tubular structures based on local-buckling driving variables. **International Journal of Mechanical Sciences**, 284, 109776, 2024. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2024.109776>;

MOREL, S.; DOURADO, N. Size effect in quasi-brittle failure: Analytical model and numerical simulations using cohesive zone model. **International Journal of Solids and Structures**, v. 48, n. 10, 1403–1412, 2011. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.01.014>;

MORLEY, L. S. D. The constant-moment plate-bending element. **Journal of Strain Analysis**, 6(1), 20-24, 1971. <https://doi.org/10.1243/03093247V061020>;

NARDI, D.C.; LEONEL, E.D. An extended lumped damage mechanics IGABEM formulation for quasi-brittle material failure. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 169, 105955, 2024. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2024.105955>;

NEGI, A.; SONI, A.; KUMAR, S. An anisotropic localizing gradient damage approach for failure analysis of fiber reinforced composites. **Composite Structures**, 294 (2022) 115677. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2022.115677>;

NOGUEIRA, B.R.; RASTIELLO, G.; GIRY C.; GATUINGT, F.; CALLARI, C. Differential geometry-based thermodynamics derivation of isotropic and anisotropic eikonal non-local gradient (enlg) damage models using a micromorphic media framework. **Engineering Fracture Mechanics**, 295 (2024) 109670. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2023.109670>;

NOVELLI, L.; GORI, L.; PITANGUEIRA, R. L.S. Phase-field modelling of brittle fracture with smoothed radial point interpolation methods. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 138, 219-234, 2022. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2022.01.011>;

OLIVEIRA, J. M.; VIEIRA, C. S.; SILVA, M. F.; AMORIM, D. L. N. F. Fracture modelling of steel fibre reinforced concrete structures by the lumped damage mechanics: Application in precast tunnel segments. **Engineering Structures**, v. 278, 115487, 2023. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2022.115487>;

OLIVEIRA, João Marcos de Jesus. **Mecânica do Dano Concentrado Expandida para Meios Bidimensionais**: Elemento Finito para Problemas de Localização de Deformações em Chapas. 113 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2020;

OLIVEIRA, Kaio Cezar da Silva. **Aplicação da correlação de imagens digitais na avaliação do comportamento à tração de elementos de concreto**. 149 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2022;

OLIVEIRA, M. C.; TELES, D. V. C.; AMORIM, D. L. N. F. Shear behaviour of reinforced concrete beams under impact loads by the lumped damage framework. **Frattura ed Integrità Strutturale**, 14(53):13-25, 2020. <https://doi.org/10.3221/IGF-ESIS.53.02>;

OÑATE, E.; CORNEJO, A.; ZARATE, F.; KASHIYAMA, K.; FRANCI, A. Combination of the finite element method and particle-based methods for predicting the failure of reinforced concrete structures under extreme water forces. **Engineering Structures**, 251, 113510, 2022. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.113510>;

OTHMAN, H.; MARZOUK, H. Finite-element analysis of reinforced concrete plates subjected to repeated impact loads. **Journal of Structural Engineering**, 143(9), 04017120, 2017. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)ST.1943-541X.0001852](https://doi.org/10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0001852);

PARK, R.; GAMBLE, W. L. **Reinforced concrete Slabs**, John Willey & Sons. Inc, New York, 2000;

PEERLINGS, R. D.; BORST, R. D.; BREKELMANS, W. D.; VREE, J. D.; SPEE, I. Some observations on localization in non-local and gradient damage models. **European Journal of Mechanics. A, Solids**, v. 15, n. 6, 937-953, 1996;

PERDOMO, M. E.; RAMÍREZ, A.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Simulation of damage in RC frames with variable axial force. **Earthquake Engineering and Structural Dynamics**, v. 28, 311-328, 1999. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1096-9845\(199903\)28:3%3C311::AID-EQE819%3E3.0.CO;2-D](https://doi.org/10.1002/(SICI)1096-9845(199903)28:3%3C311::AID-EQE819%3E3.0.CO;2-D);

PEREGO, M.A. **Danneggiamento dei materiali lapidei: leggi costitutive, analisi per elementi finiti ed applicazioni**. Thesis, Politecnico di Milano, Italy, 1990;

PEREIRA NETO, R.; TELES, D. V.; VIEIRA, C. S.; AMORIM, D. L. N. F. Energy equivalent lumped damage model for reinforced concrete structures. **Structural Engineering and Mechanics**, v. 84, n. 2, 285-293, 2022. <https://doi.org/10.12989/sem.2022.84.2.285>;

PERERA, R.; CARNICERO, A.; ALARCON, E.; GOMEZ, S. A fatigue damage model for seismic response of RC structures. **Computers & Structures**, 78(1-3), 293-302, 2000. [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(00\)00071-7](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(00)00071-7);

PICON, R.A.; SANTOS, D.M.; TELES, D.V.C.; AMORIM, D.L.N.F.; ZHOU, X.; BAI, Y.; PROENÇA, S.P.B.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Modeling of localization using Nash variational formulations: The extended damage mechanics. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 258, 108083, 2021. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2021.108083>;

PINHEIRO, Libanio Miranda. **Análise elástica e plástica de lajes retangulares de edifícios**. 314 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Universidade de São Paulo, São Carlos, 1988;

PINHEIRO, Libânio Miranda. **Charneiras plásticas em lajes com forma de T: estudo experimental**. Thesis, Universidade de São Paulo, Brazil, 1981. <http://sistemas.set.eesc.usp.br/producao/613>;

PROENÇA, Sergio Persival Baroncini. **Análise não-linear de estruturas**, 2018. 34 f. Notas de Aula;

RABOTNOV, Y. N. Creep rupture. In: **Applied Mechanics**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1969. 342–349;

RICE, J. R. The localization of plastic deformation. **14th International Congress on Theoretical and Applied Mechanics**, 1976;

RICHARD, B.; RAGUENEAU, F. Continuum Damage mechanics based model for quasi-brittle materials subjected to cyclic loadings: formulation, numerical implementation and applications. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 98, 383-406, 2013. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2012.11.013>;

RILEM. Draft Recommendation. **50-FMC** committee fracture mechanics of concrete. *Mater Struct*;18(106), 285–90, 1985;

RUDNICKI, J. W.; RICE, J. R. Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, 23(6), 371-394, 1975. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(75\)90001-0](https://doi.org/10.1016/0022-5096(75)90001-0);

S2 TECH. **LT50 low profile load cells**, 2024. Catálogo. Disponível em: <https://www.s2tech.it/en/products-catalog/load-cells/compression/series-lt50/>;

SADIQ, M.; KHALIQ, W.; ILYAS, M.; KHUSHNOOD, R. A.; KHAN, S. A.; RONG, P. Analysis of full-scale aircraft impact to reinforced concrete and steel plate reinforced concrete multiple barriers protecting nuclear power plants. **Structures**, 27, 732-746, 2020. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2020.06.030>;

SANTORO, M. G.; KUNNATH, S. K. Damage-based RC beam element for nonlinear structural analysis. **Engineering structures**, 49, 733-742, 2013. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2012.12.026>;

SANTOS, Danilo Menezes. **Formulação em Dano Concentrado para Meios Contínuos Bidimensionais com Localização de Deformações**. 92 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2021;

SAWCZUK, A.; JAEGER, T. **Grenztragfähigkeits-Theorie der Platten**. Springer-Verlag; 1963;

SHAJAN, A.M.; PISKA, R.; NATARAJAN, S. Study of mixed-mode fracture in functionally graded material using an adaptive phase-field fracture model. **Composite Structures**, 327, 117708, 2024. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2023.117708>;

SHIMADZU. **AG-Xplus Series**. Disponível em: <<https://www.shimadzu.eu/ag-xplus-series>>. Acesso em: 09 de fev. de 2023;

SILVA, L. A.; ARGÔLO, H. S.; AMORIM, D.L.N.D.F. Lumped Damage Model Applied to Local Buckling in Steel Rectangular Hollow Section Subjected to Compressive Axial Force with Bending Moment. **International Journal of Steel Structures**, 22(1), 319-332, 2022. <https://doi.org/10.1007/s13296-021-00576-w>;

SOUZA, A.A.F.D.; ASSIS, W.S.D.; AMORIM, D.L.N.D.F. Deflection estimate of reinforced concrete beams by the lumped damage mechanics. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, 16, 2023. <https://doi.org/10.1590/S1983-41952023000500005>;

STANDARD, British. **Eurocode 2: Design of concrete structures – Part 1.1**, v. 1, n. 1, 230, 2004;

STRICKLIN, J.A.; HAISLER, W.E.; TISDALE, P.R.; GUNDERSON, R. A rapidly converging triangular plate element. **AIAA journal**, 7(1), 180-181, 1969. <https://doi.org/10.2514/3.5068>;

SUTTON, M. A.; HILD, F. Recent Advances and Perspectives in Digital Image Correlation. **Experimental Mechanics**, v.55, n.1, 1–8, 2015. <https://doi.org/10.1007/s11340-015-9991-6>;

TELES, D. V. C.; OLIVEIRA, M. C.; AMORIM, D. L. N. F. A simplified lumped damage model for reinforced concrete beams under impact loads. **Engineering Structures**, 205:110070, 2020. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2019.110070>;

TELES, D.V.D.C.; CUNHA, R.N.; AMORIM, D.L.N.F.; PICON, R.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Parametric study of dynamic behaviour of RC dual system design with the Brazilian Standard Code using the lumped damage model. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. 43, n. 5, 246, 2021. <https://doi.org/10.1007/s40430-021-02977-8>;

TELES, D. V.; CUNHA, R. N.; PICÓN, R. A.; AMORIM, D. L.; BAI, Y.; PROENÇA, S. P.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. A new formulation of cracking in concrete structures based on lumped damage mechanics. **Structural Engineering and Mechanics**, 88(5), 451-462, 2023. <https://doi.org/10.12989/sem.2023.88.5.451>;

TELES, Daniel Victor da Cunha. **Mecânica Do Dano Concentrado Para Meios Bidimensionais: Formulação Para Modo I com Lei de Dano Não Linear**. 108 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2022;

THAKKAR, B. K.; PANDEY, P. C. Damage-coupled progressive failure and yield line analyses of metal plates. **Journal of engineering mechanics**, 132(5), 487-497, 2006. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2006\)132:5\(487\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2006)132:5(487));

TOI, Y.; HASEGAWA, K.H. Element-size independent, elasto-plastic damage analysis of framed structures using the adaptively shifted integration technique. **Computers and Structures**, v. 89, 2162-2168, 2011. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2011.09.002>;

TRACKER. **Tracker video analysis and modeling tool**. Version 6.0.10. [S.l.]: Open Source Physics, 2008. Disponível em: < <https://physlets.org/tracker/>>;

UZCÁTEGUI, M. Y. **Desarrollo de un programa de elementos finitos tridimensional basado en la WEB**. 2012. - Universidad de Los Andes, Mérida, 2012;

VAN LANGENDONCK, T. **Teoria elementar das charneiras plásticas – Volume 1**. Associação Brasileira de Cimento Portland, 1970;

VAZ, Luiz Eloy. **Método dos elementos finitos em análise de estruturas**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2011;

WANG, J.; POH, L. H.; GUO, X. Localizing gradient damage model based on a decomposition of elastic strain energy density. **Engineering Fracture Mechanics**, 279 (2023) 109032. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2022.109032>;

WANG, J.; YANG, T. Damage Analysis of 3D Frame Structure under Impulsive Load. **Anais: Computational Structural Engineering**. Springer, Dordrecht, 743-754, 2009. https://doi.org/10.1007/978-90-481-2822-8_81;

WANG, L.; SU, H.; ZHOU, K. A phase-field model for mixed-mode cohesive fracture in fiber-reinforced composites. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 421, 2024. 116753. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2024.116753>;

WANG, Q. Z.; ZHANG, S.; XIE, H. P. Rock Dynamic Fracture Toughness Tested with Holed-Cracked Flattened Brazilian Discs Diametrically Impacted by SHPB and its Size Effect. **Experimental Mechanics**, v. 50, n. 7, 877–885, 2010. <https://doi.org/10.1007/s11340-009-9265-2>;

WU, J. Y. New enriched finite elements with softening plastic hinges for the modeling of localized failure in beams. **Computers & structures**, 128, 203-218, 2013. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2013.06.011>;

XU, J.; LEE, C. K.; TAN, K. H. An XFEM frame for plate elements in yield line analyses. **International journal for numerical methods in engineering**, 96(3), 150-175, 2013. <https://doi.org/10.1002/nme.4535>;

XUE, L.; REN, X.; FREDDI, F. Analytical solution of a gradient-enhanced damage model for quasi-brittle failure. **Applied Mathematical Modelling**, 132 (2024) 342–365. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2024.04.053>;

ZHANG, Y. Q.; LU, Y.; YU, M. H. Investigation of strain localization in elastoplastic materials with transversely isotropic elasticity. **International Journal of Mechanical Sciences**, 45(2), 217-233, 2003. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(03\)00055-9](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(03)00055-9);

ZHANG, Y. X.; BRADFORD, M. A.; GILBERT, R. I. A new triangular layered plate element for the non-linear analysis of reinforced concrete slabs. **Communications in numerical methods in engineering**, 22(7), 699-709, 2006. <https://doi.org/10.1002/cnm.840>;

ZHU, H. H.; CAI, Y. C.; PAIK, J. K.; ATLURI, S. N. Locking-free thick-thin rod/beam element based on a von Karman type nonlinear theory in rotated reference frames for large deformation analyses of space-frame structures. **Computer Modeling in Engineering and Sciences**, 57(2), 175, 2010. <https://doi.org/10.3970/cmesc.2010.057.175>;

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The finite element method**: solid mechanics. Butterworth-heinemann, v.2, 2000;

APÊNDICE A: CAMPO DE DESLOCAMENTOS

A equação cinemática proposta do elemento DKT relaciona as rotações normais às arestas com os graus de liberdade do elemento finito. Para isto, com base na formulação proposta por Morley (1971), é necessário a definição do campo de deslocamentos verticais dos elementos finitos. Desta forma, por conveniência, o processo de elaboração e o equacionamento deste campo, em função dos graus de liberdade, é apresentado neste apêndice.

Considere que o campo de deslocamentos verticais pode ser definido de acordo com a equação (3.17) e que as rotações dos nós nas direções X e Y são dadas pela equação (3.14). Desta forma, é possível montar um sistema de equações lineares que relaciona as incógnitas do referido campo com os graus de liberdade dos elementos finitos (equação (A. 1)):

$$\begin{aligned}
 W(x_i, y_i) &= w_i \\
 \left. \frac{\partial W}{\partial y} \right|_{x=x_i, y=y_i} &= \theta_{x,i} \\
 \left. \frac{\partial W}{\partial x} \right|_{x=x_i, y=y_i} &= -\theta_{y,i} \\
 W(x_j, y_j) &= w_j \\
 \left. \frac{\partial W}{\partial y} \right|_{x=x_j, y=y_j} &= \theta_{x,j} \\
 \left. \frac{\partial W}{\partial x} \right|_{x=x_j, y=y_j} &= -\theta_{y,j} \\
 W(x_k, y_k) &= w_k \\
 \left. \frac{\partial W}{\partial y} \right|_{x=x_k, y=y_k} &= \theta_{x,k} \\
 \left. \frac{\partial W}{\partial x} \right|_{x=x_k, y=y_k} &= -\theta_{y,k}
 \end{aligned} \tag{A. 1}$$

Com base na equação (A. 1) e considerando o sistema de coordenadas paramétricas para triângulos (equações (3.18) e (3.19)), é possível determinar os coeficientes que compõe o campo de deslocamentos transversais do elemento DKT:

$$\begin{aligned}
W(x, y) = & \frac{xy_2 - xy_3 - x_2y + x_2y_3 + x_3y - x_3y_2}{2A} w_i - \frac{xy_1 - xy_3 - x_1y + x_1y_3 + x_3y - x_3y_1}{2A} w_j + \frac{xy_1 - xy_2 - x_1y + x_1y_2 + x_2y - x_2y_1}{2A} w_k \\
& - \frac{(xy_2 - xy_3 - x_2y + x_2y_3 + x_3y - x_3y_2)(xy_1 - xy_3 - x_1y + x_1y_3 + x_3y - x_3y_1)(-x_1\theta_{y,j} + x_2\theta_{y,j} + y_1\theta_{x,j} - y_2\theta_{x,j} - w_i + w_j)}{4A^2} \\
& - \frac{(xy_1 - xy_3 - x_1y + x_1y_3 + x_3y - x_3y_1)(xy_1 - xy_2 - x_1y + x_1y_2 + x_2y - x_2y_1)(-x_2\theta_{y,k} + x_3\theta_{y,k} + y_2\theta_{x,k} - y_3\theta_{x,k} - w_j + w_k)}{4A^2} \\
& + \frac{(xy_1 - xy_2 - x_1y + x_1y_2 + x_2y - x_2y_1)(xy_2 - xy_3 - x_2y + x_2y_3 + x_3y - x_3y_2)(x_1\theta_{y,i} - x_3\theta_{y,i} - y_1\theta_{x,i} + y_3\theta_{x,i} + w_i - w_k)}{4A^2} \\
& - \frac{(xy_2 - xy_3 - x_2y + x_2y_3 + x_3y - x_3y_2)^2(xy_1 - xy_3 - x_1y + x_1y_3 + x_3y - x_3y_1)(x_1\theta_{y,i} + x_1\theta_{y,j} - x_2\theta_{y,i} - x_2\theta_{y,j} - y_1\theta_{x,i} - y_1\theta_{x,j} + y_2\theta_{x,i} + y_2\theta_{x,j} + 2w_1 - 2w_j)}{8A^3} \\
& + \frac{(xy_1 - xy_3 - x_1y + x_1y_3 + x_3y - x_3y_1)^2(xy_1 - xy_2 - x_1y + x_1y_2 + x_2y - x_2y_1)(x_2\theta_{y,j} + x_2\theta_{y,k} - x_3\theta_{y,j} - x_3\theta_{y,k} - y_2\theta_{x,j} - y_2\theta_{x,k} + y_3\theta_{x,j} + y_3\theta_{x,k} + 2w_j - 2w_k)}{8A^3} \\
& + \frac{(xy_1 - xy_2 - x_1y + x_1x_2 + x_2y - x_2y_1)^2(xy_2 - xy_3 - x_2y + x_2y_3 + x_3y - x_3y_2)(-x_1\theta_{y,i} - x_1\theta_{y,k} + x_3\theta_{y,i} + x_3\theta_{y,k} + y_1\theta_{x,i} + y_1\theta_{x,k} - y_3\theta_{x,i} - y_3\theta_{x,k} - 2w_i + 2w_k)}{8A^3} \\
& - \frac{w_i xy_2 - w_i xy_3 - w_i x_2 y + w_i x_2 y_3 + w_i x_3 y - w_i x_3 y_2 - w_j xy_1 + w_j xy_3 + w_j x_1 y - w_j x_1 y_3 - w_j x_3 y + w_j x_3 x_1 + w_k xy_1 - w_k xy_2 - w_k x_1 y + w_k x_1 y_2 + w_k x_2 y - w_k x_2 y_1}{2A}
\end{aligned}$$

APÊNDICE B: USO DO PROGRAMA ITOM

O programa computacional Itom é desenvolvido principalmente pelo Instituto de Óptica Técnica da Universidade de Stuttgart, na Alemanha. O Itom é um programa desenvolvido em Python que permite criar interativamente medições com equipamentos laboratoriais, até simples câmeras. É também capaz de geração, extração e análise de dados (ITOM, 2018).

Para seu uso, inicialmente deve-se conectar o equipamento de medição, seja células de carga, LVDTs ou *strain gauges*, ao equipamento Spider8. Além disso, é necessário conectar o Spider8 ao computador que será responsável pelo armazenamento dos dados, utilizando um cabo do tipo RS232-USB. Realizados estes procedimentos, é possível executar o programa Itom. Iniciada a interface do Itom é possível abrir códigos de Python, os quais são utilizados para a medição das análises. Para as atividades desenvolvidas, foi utilizado o código “measureSeries.py” para a calibração de todos os equipamentos (para mais detalhes, ver seção 6.4) e o código “measureSeriesLTM.py” para as medições dos ensaios. A principal diferença destes códigos é que no primeiro os pontos são salvos manualmente, de acordo com o interesse do usuário, enquanto no segundo, o usuário define uma frequência de salvamento dos dados e o programa os salva automaticamente. Este apêndice trata do uso do código “measureSeriesLTM.py”. Para mais detalhes sobre outros códigos e funcionalidades, consultar a documentação original do Itom.

Aberto o código de interesse, é possível executá-lo através da própria interface ou clicando na tecla “F5”. Feito isto será aberta uma nova janela para as medições. Em algumas ocasiões é possível que surja o erro apresentado na Figura B. 1:

Figura B. 1: Erro da interface do Itom.

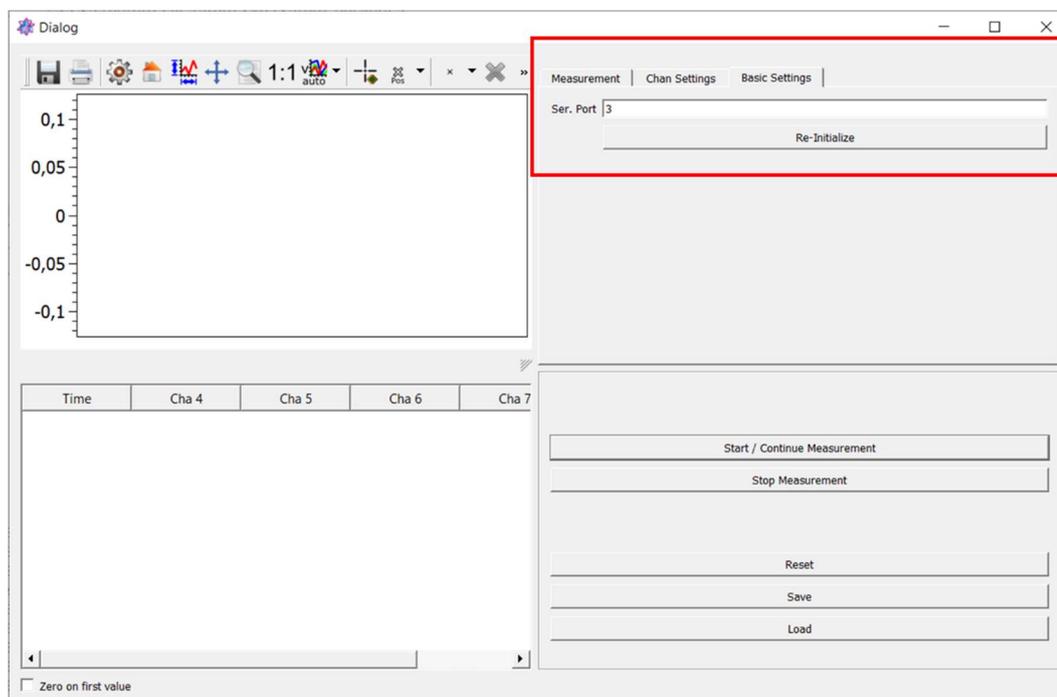


Fonte: Adaptado de Itom (2018).

Este erro pode se dar por 2 principais motivos: 1 – O Spider8 não foi ligado ou conectado ao computador; 2 – A porta USB em que o Spider8 está conectado não é a mesma informada

no código que foi executado. Para verificar isto, é necessário abrir o gerenciador de dispositivos e verificar em qual porta COM/LPT o Spider8 foi inserido. Feito isto, na janela que foi aberta no Itom, é possível ir a aba “*Basic Settings*”, alterar o número da porta conectada e solicitar reiniciar o código na opção “*Re-Initialize*” Figura B. 2.

Figura B. 2: Configuração de porta do Spider8.

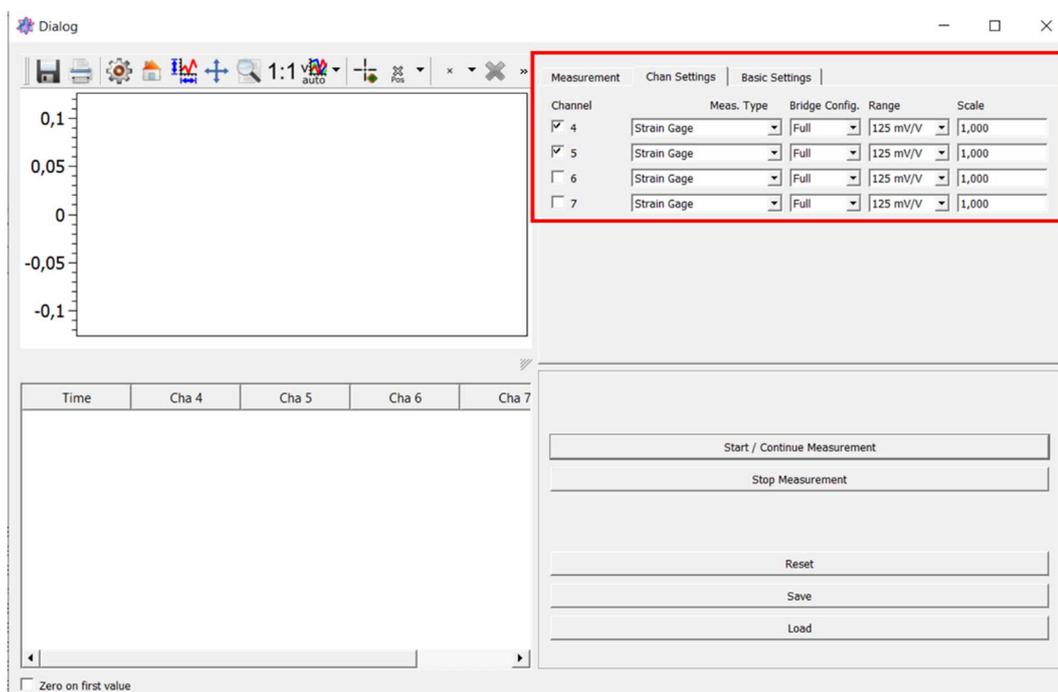


Fonte: Adaptado de Itom (2018).

Após a reinicialização da janela é necessário definir as configurações de cada equipamento conectado ao Spider8. É possível captar a resposta de até 4 equipamentos por vez usando o Itom, conforme apresentado na Figura B. 3, na aba “*Chan Settings*”.

Deve-se conhecer qual é a ordem das entradas de equipamentos no Spider8, a fim de deixar selecionadas no Itom apenas as caixas referentes aos canais em que há equipamentos conectados. Na caixa de seleção “*Meas. Type*” é possível escolher entre duas opções: *strain gauges* ou LVDT. A primeira opção serve para *strain gauges* e para células de carga, enquanto a segunda, é recomendada apenas para LVDTs. Além disso, é importante definir a opção “*Range*”, que corresponde a voltagem de saída de cada equipamento, valor informado nos manuais das fabricantes dos mesmos. Este valor influencia na precisão dos resultados obtidos pelo equipamento durante as medições.

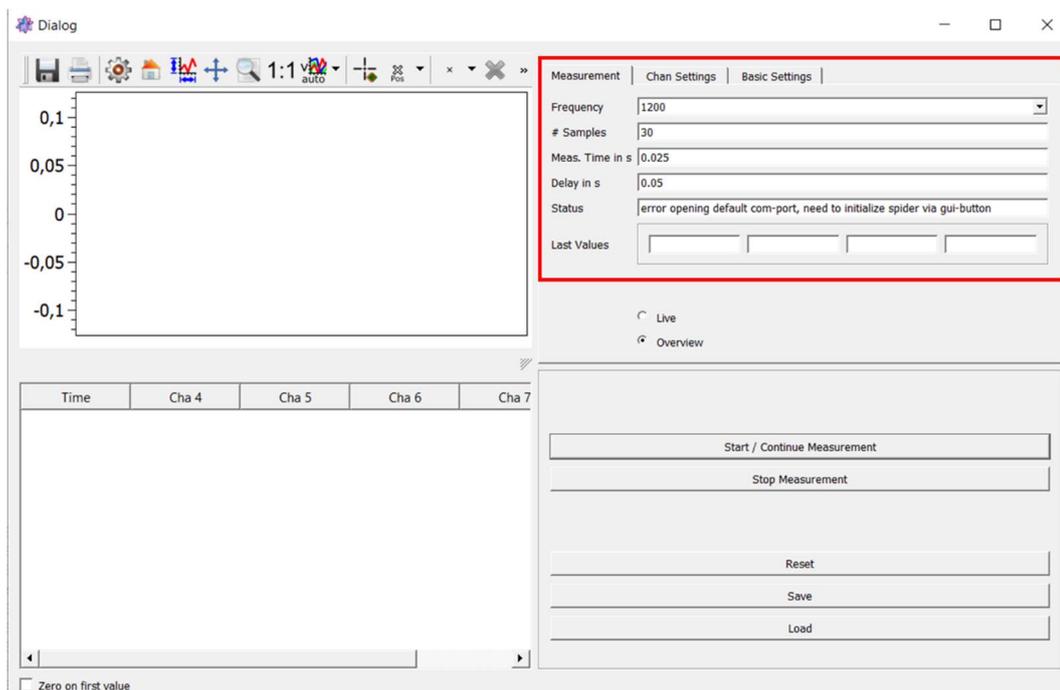
Figura B. 3: Configuração dos equipamentos conectados ao Spider8.



Fonte: Adaptado de Itom (2018).

Realizada esta etapa é possível ir para a aba “*Measurement*”, a qual é dividida em 4 áreas: área de plotagem dos dados ao longo do tempo, definições de frequência de aquisição, dados numéricos salvos pelo programa e comandos para iniciar ou pausar medições, além de exportar os dados (Figura B. 4).

Figura B. 4: Definição da frequência de aquisição dos dados.



Fonte: Adaptado de Itom (2018).

Na primeira região é possível alterar a escala do gráfico. Na segunda região, alterar a frequência de salvamento, bem como o número de amostras que o usuário deseja salvar, de modo que a aba informa de modo automático o tempo em segundos entre aquisições. Além disso, nesta segunda parte existem caixas que permitem visualizar os últimos valores medidos em cada canal da Spider8 ativa (*Last Values*). Alteradas estas opções, é necessário voltar a aba “*Basic Settings*” e reiniciar novamente antes de iniciar as medições.

Na terceira parte observam-se todos os dados medidos pelo Itom, em todos 4 canais (se ativos), ao longo do tempo, porém não é possível copiar para outros programas. Por fim, a última parte desta janela permite iniciar e pausar as medições, bem como resetar os dados medidos até o momento. A última parte também permite exportar os dados medidos, com a opção “*Save*”. Vale ressaltar que o Itom exporta os dados como um arquivo com extensão “.py”. Desta forma, o arquivo exportado deve ser aberto com o Python e então pode ser salvo como arquivo de texto (.txt) ou arquivo de planilha (.xlsx ou .csv).

ANEXO A: MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO CINEMÁTICA (DKT)

A matriz de transformação cinemática clássica do elemento finito DKT relaciona as curvaturas de cada elemento finito com os seus respectivos graus de liberdade (equação (3.15)). Por conveniência, esta matriz é apresentada neste anexo.

$$[\mathbf{B}(\xi, \eta)] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{ki}\mathbf{H}_{x,\xi}^T + y_{ij}\mathbf{H}_{x,\eta}^T \\ -x_{ki}\mathbf{H}_{y,\xi}^T - x_{ij}\mathbf{H}_{y,\eta}^T \\ -x_{ki}\mathbf{H}_{x,\xi}^T - x_{ij}\mathbf{H}_{x,\eta}^T + y_{ki}\mathbf{H}_{y,\xi}^T + y_{ij}\mathbf{H}_{y,\eta}^T \end{bmatrix} \quad (\text{Anexo A. 1})$$

onde $\mathbf{H}_{x,\xi}^T$, $\mathbf{H}_{x,\eta}^T$, $\mathbf{H}_{y,\xi}^T$, $\mathbf{H}_{y,\eta}^T$ são as derivadas dos vetores que contêm as 9 componentes das funções de forma do elemento DKT, em função das coordenadas paramétricas ξ e η , apresentadas nas equações (Anexo A. 2) ao (Anexo A. 5), respectivamente.

$$\mathbf{H}_{x,\xi}^T = \begin{bmatrix} P_6(1 - 2\xi) + (P_5 - P_6)\eta \\ q_6(1 - 2\xi) - (q_5 + q_6)\eta \\ -4 + 6(\xi + \eta) + r_6(1 - 2\xi) - \eta(r_5 + r_6) \\ -P_6(1 - 2\xi) + \eta(P_4 + P_6) \\ q_6(1 - 2\xi) - \eta(q_6 - q_4) \\ -2 + 6\xi + r_6(1 - 2\xi) + \eta(r_4 - r_6) \\ -\eta(P_5 + P_4) \\ \eta(q_4 - q_5) \\ -\eta(r_5 - r_4) \end{bmatrix} \quad (\text{Anexo A. 2})$$

$$\mathbf{H}_{x,\eta}^T = \begin{bmatrix} -P_5(1 - 2\eta) - \xi(P_6 - P_5) \\ q_5(1 - 2\eta) - \xi(q_5 + q_6) \\ -4 + 6(\xi + \eta) + r_5(1 - 2\eta) - \xi(r_5 + r_6) \\ \xi(P_4 + P_6) \\ \xi(q_4 - q_6) \\ -\xi(r_6 - r_4) \\ P_5(1 - 2\eta) - \xi(P_4 + P_5) \\ q_5(1 - 2\eta) + \xi(q_4 - q_5) \\ -2 + 6\eta + r_5(1 - 2\eta) + (r_4 - r_5) \end{bmatrix} \quad (\text{Anexo A. 3})$$

$$\mathbf{H}_{y,\xi}^T = \begin{bmatrix} t_6(1 - 2\xi) + \eta(t_5 - t_6) \\ 1 + r_6(1 - 2\xi) - \eta(r_5 + r_6) \\ -q_6(1 - 2\xi) + \eta(q_5 + q_6) \\ -t_6(1 - 2\xi) + \eta(t_4 + t_6) \\ -1 + r_6(1 - 2\xi) + \eta(r_4 - r_6) \\ -q_6(1 - 2\xi) - \eta(q_4 - q_6) \\ -\eta(t_4 + t_5) \\ \eta(r_4 - r_5) \\ -\eta(q_4 - q_5) \end{bmatrix} \quad (\text{Anexo A. 4})$$

$$\mathbf{H}_{y,\eta}^T = \begin{bmatrix} -t_5(1 - 2\eta) - \xi(t_6 - t_5) \\ 1 + r_5(1 - 2\eta) - \xi(r_5 + r_6) \\ -q_5(1 - 2\eta) + \xi(q_5 + q_6) \\ \xi(t_4 + t_6) \\ \xi(r_4 - r_6) \\ -\xi(q_4 - q_6) \\ t_5(1 - 2\eta) - \xi(t_4 + t_5) \\ -1 + r_5(1 - 2\eta) + \xi(r_4 - r_5) \\ -q_5(1 - 2\eta) - \xi(q_4 - q_5) \end{bmatrix} \quad (\text{Anexo A. 5})$$

em que P_a , t_a , q_a e r_a podem ser definidos de acordo com a equação (Anexo A. 6), em que $a = 4, 5$ e 6 , para $mn = jk, ki$, e ij , respectivamente.

$$P_a = -\frac{6x_{mn}}{L_{mn}^2}$$

$$t_a = -\frac{6y_{mn}}{L_{mn}^2}$$

$$q_a = \frac{3x_{mn}y_{mn}}{L_{mn}^2}$$

$$r_a = \frac{3y_{mn}^2}{L_{mn}^2}$$

(Anexo A. 6)