UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS - CAMPUS A. C. SIMÕES
FÍSICA BACHARELADO

IGOR BEDER BURTI RIBEIRO

Propagação de fótons em guias de onda acoplados

MACEIÓ - AL
2024

IGOR BEDER BURTI RIBEIRO

Propagação de fótons em guias de onda acoplados

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Física Bacharelado da Universidade Federal de Alagoas - Campus A. C. Simões, como requisito para a obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Cesar Aguiar Brandão Filho

MACEIÓ - AL

2024

Catalogação na Fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

R484p Ribeiro, Igor Beder Burti.
Propagação de fótons em guias de onda acoplados / Igor Beder Burti Ribeiro. – 2024.
[66] f. : il.

Orientador: Paulo Cesar Aguiar Brandão Filho.
Monografia (Trabalho de conclusão de curso em física : bacharelado) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Física. Maceió, 2024.

Bibliografia: f. 46-52.
Anexos: f. 54-[66].

1. Óptica quântica. 2. Fótons - Propagação. 3. Guias de ondas. 4. Acoplamento. 5. Fidelidade (Estados quânticos). I. Título.

CDU: 539.122

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE FÍSICA

Ata da Defesa do Trabalho de Conclusão de Curso do aluno **IGOR BEDER BURTI RIBEIRO**, matrícula **20112511,** intitulado **PROPAGAÇÃO DE FÓTONS EM GUIAS DE ONDA ACOPLADOS**.

Às **9:30** horas do dia **vinte e um de novembro de dois mil e vinte e quatro**, foi instalada a sessão pública de defesa do Trabalho de Conclusão de Curso, no auditório do Instituto de Física da UFAL, a qual se submeteu o aluno **Igor Beder Burti Ribeiro** do Curso de Física Bacharelado. A banca foi composta pelos professores **Prof. Dr. Paulo Cesar Aguiar Brandão Filho (Orientador do trabalho, IF-UFAL), Profa. Dra. Solange Bessa Cavalcanti (IF/UFAL) e Prof. Dr. Guilherme Martins alves de Almeida (IF-UFAL).** Os membros desta banca avaliaram o referido trabalho e conferiram-lhe a seguinte menção APROVADA, atribuindo ao mesmo, respectivamente, as notas **_____________10,0______________**; **__________10,0_____________;** **____________10,0_____________**, computando assim média **___________10,0______________** e autorizando os trâmites legais. Por oportuno, tendo em vista a melhoria da qualidade do trabalho, a banca sugere a tomada das seguintes providências:

-Nenhuma providência foi sugerida

Estando todos de acordo, lavrou-se a presente Ata.

Maceió, 21 de novembro de 2024.

1º Examinador:

gov.br Documento assinado digitalmente
PAULO CESAR AGUIAR BRANDAO FILHO
Data: 21/11/2024 11:03:51-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Paulo Cesar Aguiar Brandão Filho (Orientador do trabalho, IF-UFAL)

2º Examinador:

gov.br Documento assinado digitalmente
SOLANGE BESSA CAVALCANTI
Data: 22/11/2024 11:22:09-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. Solange Bessa Cavalcanti (IF/UFAL)

3º Examinador:

gov.br Documento assinado digitalmente
GUILHERME MARTINS ALVES DE ALMEIDA
Data: 21/11/2024 18:13:48-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Guilherme Martins alves de Almeida(IF-UFAL)

Visto da Coordenação:

gov.br Documento assinado digitalmente
MARIA SOCORRO SEIXAS PEREIRA
Data: 26/11/2024 06:51:42-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a minha mãe Nora, meu pai Eduardo, minha irmã Luana, minha tia Beth, minha vó Eunice e meu tio Roberto, por todo o apoio ao longo da minha graduação. Sem vocês essa jornada teria sido impossível. Amo vocês.

A minha namorada Rayssa, minha parceira de final do curso que alegra meu dia todos os dias. A melhor coisa que o curso de física me proporcionou foi te conhecer. Eu te amo.

Aos meus companheiros de turma e amigos José Vinícius e Ramsés (só sobramos nós), pelos incontáveis momentos de tranquilidade e sossego!

Aos amigos que fiz durante o curso, Ayirton, Badú, Eloísa, Júlia, Laís, Lavínia, Mari e Rayssa. Muito obrigado pelos momentos de lazer e pelas discussões durante as disciplinas.

Ao meu amigo (praticamente co-orientador) Miquéias, pelos momentos no Discord durante a pandemia, que me traziam um pouco de sanidade; por ter me influenciado a mudar de área; pelo auxílio durante minha pesquisa e, principalmente, pela companhia durante esses anos.

As minhas amigas de longa data, Ana Júlia e Laís, obrigado por tudo. Vocês foram fundamentais para eu me tornar quem sou hoje.

Aos professores Marcelo Lyra, Sérgio Lira, Solange Bessa e Paulo Brandão, por terem me dado uma nova visão da física, através das discussões dentro e fora da sala de aula. Vocês me inspiram a continuar perseguindo a carreira de físico.

Ao meu orientador Paulo Brandão, agradeço imensamente pela paciência, pelo acompanhamento durante toda a iniciação científica e pelos trabalhos que pudemos publicar nesses anos.

À agência de fomento CNPq pela ajuda financeira durante toda a minha graduação.

Aos meus gatos Amor, Cura e Fé, pelo carinho, pelas mordidas e arranhões (Fé).

Resumo

Neste trabalho, foi estudada a propagação de fótons sistemas de guias de onda acoplados, com diferentes geometrias e parâmetros de acoplamento. A teoria da luz eletromagnética quantizada é capaz de explicar diversos fenômenos em que a teoria clássica da luz de Maxwell falha. Inicialmente, foi realizada a quantização do campo a partir do modelo clássico e foram definidos os estados quânticos da luz, mostrando algumas de suas aplicações. Em seguida, foi apresentada uma breve descrição sobre os guias de onda, em que foi explicado o fenômeno de acoplamento entre guias vizinhos, como representá-los no contexto da quantização do campo, além de ser dada uma definição de fidelidade e transferência perfeita de estado (PST). Com isso, foi possível realizar o estudo da propagação dos estados não clássicos da luz em sistemas compostos por esses guias de onda acoplados, utilizando um modelo com geometria linear e parâmetros de acoplamento não constantes e dois modelos com geometria anelar (ou circular), com dois parâmetros de acoplamentos distintos: (a) constante e (b) não constante. A fidelidade foi utilizada como critério para identificar a transferência perfeita de estado entre diferentes guias, em que estados de Fock de 1 e 2 fótons e o estado $\mathcal{N}00\mathcal{N}$ de 2 fótons foram inicialmente inseridos nos sistemas. Foi observado que o valor da fidelidade é altamente influenciado pela geometria do sistema, sendo possível observar PST em todos os modelos, para diferentes números de guias de onda.

Palavras-chave: Óptica Quântica, Fótons, Guias de Onda, Acoplamento, Fidelidade, Propagação.

Abstract

In this work, the propagation of photons in coupled waveguide systems with different geometries and coupling parameters was studied. The theory of quantized electromagnetic light is capable of explaining various phenomena where the classical theory of Maxwell's light fails. Initially, the field was quantized starting from the classical model, and the quantum states of light were defined, presenting some of their applications. Next, a brief description of waveguides was presented, explaining the phenomenon of coupling between neighboring waveguides, how to represent them in the context of field quantization, and providing a definition of fidelity and perfect state transfer (PST). With this in mind, it was possible to study the propagation of non-classical light in systems composed of these coupled waveguides, using a model with a linear geometry and non-constant coupling parameters, as well as two models with ring (or circular) geometry, each with two distinct coupling parameters: (a) constant and (b) non-constant. Fidelity was used as a parameter to identify perfect state transfer between different waveguides, where 2-photon and single-photon Fock states and the 2 photon $\mathcal{N}00\mathcal{N}$ state were initially injected into the systems. It was observed that the value of fidelity is highly influenced by the geometry of the system, and perfect state transfer was observed in all models, for different numbers of waveguides.

Keywords: Quantum Optics, Photons, Waveguides, Coupling, Fidelity, Propagation.

Lista de ilustrações

Sumário

1 INTRODUÇÃO

1.1 Surgimento da Teoria Quântica da Luz

A partir de 1820, com o revolucionário experimento de Oersted sobre a deflexão de uma agulha magnética sob a presença de uma corrente elétrica [1], foi feita uma conexão entre eletricidade e magnetismo, o que proporcionou diversas invenções inéditas e de extrema importância para a humanidade: no próprio ano de 1820 foi criado o ohmímetro, por Johann Schweigger [2]; em 1821, o motor, por Michael Faraday [3]; em 1824, o eletroímã, por William Sturgeon [4]; em 1832, o transformador e o gerador, ambos por Faraday [5], além do telégrafo eletromagnético, por Gauss e Weber [6]. É impressionante observar o quão rápido esse desenvolvimento ocorreu, a partir da descoberta inicial de Oersted.

A palavra eletromagnetismo, para se referir aos fenômenos de eletricidade e magnetismo de maneira conjunta, começou a ser utilizada especialmente após a descoberta da indução eletromagnética, por Michael Faraday. Os seus estudos experimentais sobre eletromagnetismo [5], a partir de 1831, marcam o início de seu desenvolvimento matemático, elaborado pelo cientista James Clerk Maxwell, em 1865 [7]. As equações de Maxwell[1] descrevem, classicamente, como os campos elétrico e magnético se comportam, tanto no vácuo, quanto na matéria. A partir das equações de Maxwell é possível mostrar que os campos elétrico e magnético satisfazem uma equação de onda, cuja velocidade de propagação é c, a velocidade da luz. Dessa maneira, a teoria eletromagnética de Maxwell consolidou a teoria ondulatória da luz, que foi amplamente aceita pela comunidade científica da época.

Entretanto, uma variedade de experimentos não conseguem ser explicados utilizando essa teoria clássica da luz. Um dos exemplos mais famosos é o problema da Radiação do Corpo Negro, para o qual a teoria clássica prevê que a distribuição espectral da densidade de energia tende a infinito quando $\lambda \to 0$, o que é um absurdo. Essa ficou conhecida como a catástrofe do ultravioleta. Para resolver esse problema, em 1900, Max Planck propôs uma natureza quântica da energia, sugerindo que a energia seria transferida em pacotes discretos [9]. Em 1905, Einstein generalizou a ideia ao dizer que a **luz** também tinha um caráter quântico: era composta por fótons[2], partículas de luz que possuem uma energia discreta hf [11], em que h é a constante de Planck e f é a frequência da luz. A partir disso, Einstein conseguiu explicar outro fenômeno em que a teoria clássica de

[1] Originalmente, Maxwell propôs vinte equações interconectadas para descrever o campo eletromagnético, o que mostra o alto nível de dificuldade de se trabalhar com elas. Ao longo dos anos, elas foram se reduzindo com o auxílio do formalismo do cálculo vetorial [8], até chegar em quatro (dessas quatro, duas são vetoriais, aumentando o número para oito equações, se forem contadas as componentes dos campos elétrico e magnético). Essas são as equações usadas atualmente nos cursos de eletromagnetismo.

[2] O termo fóton foi criado por Gilbert N. Lewis, em 1926 [10].

Maxwell falhava, o efeito fotoelétrico. Essa teoria teve um caráter revolucionário, pois confrontava com o modelo clássico da luz já estabelecido por Maxwell e não foi muito bem aceita pela comunidade científica, assim que o artigo foi publicado,[3] mas rendeu o prêmio Nobel de Física para Einstein em 1921. Esse foi o ponto de partida para o surgimento da mecânica quântica, que teve o seu desenvolvimento matemático feito por Schrödinger, Dirac e Heisenberg, que foram laureados com o Premio Nobel pelas suas contribuições [13]: Heisenberg recebeu o prêmio em 1932, devido à formulação matricial da mecânica quântica e pela proposição do princípio da incerteza, enquanto Schrödinger e Dirac dividiram o prêmio em 1933, o primeiro pela proposta da equação que rege o comportamento dos elétrons, que levou o seu nome, e o segundo pela formulação completamente relativística da teoria quântica (equação de Dirac). Com o formalismo da mecânica quântica bem consolidado, uma nova área da física havia sido criada, proporcionando uma gama de descobertas e desenvolvimentos científicos.

Alguns fenômenos só conseguem ser explicados quando os aspectos quânticos da luz são considerados, como por exemplo o Efeito Casimir, o desvio de Lamb ("*Lamb shift*") e a correção do fator de giromagnético do elétron (fator g), para citar alguns. Ao aproximar duas placas neutras, condutoras e paralelas no vácuo, observa-se a presença de uma força que as une. Esse efeito é conhecido como Efeito Casimir, introduzido em 1948 por Hendrik Casimir [14], e é explicado pelas flutuações quânticas do vácuo, um conceito fundamental na área de Óptica Quântica. Outros dois fenômenos que evidenciam a existência das flutuações do vácuo são a correção dos níveis de energia do átomo de hidrogênio (desvio de Lamb) [15], explicado por Hans Bethe, e a correção do valor do fator-g do spin do elétron, cuja equação relativística de Dirac propõe o valor de 2, entretanto, medições experimentais encontraram o valor de 2.00231930436182(52) [16]; esta pequena diferença, analisada pela eletrodinâmica quântica, existe devido às flutuações do vácuo [17].

Um dos conceitos mais básicos da óptica quântica, a quantização do campo eletromagnético, consiste em tratar a luz com o formalismo da mecânica quântica, definindo assim, os estados não clássicos da luz (ou os estados quânticos[4]). Na verdade, todos os estados da luz são fundamentalmente quânticos, pois são as leis da mecânica quântica que regem os sistemas. Entretanto, esse comportamento quântico é dificilmente observado, o que faz a teoria clássica ser extremamente útil para prever muitos fenômenos.

[3] O próprio Max Planck, que era revisor da revista em que Einstein submeteu o artigo, não se surpreendeu muito com as ideias de Einstein. Isso porque, para Planck, a concepção da quantização da energia era somente um artifício matemático que não tinha significado físico [12].

[4] Ao longo do texto, as expressões "luz não clássica", "estados não clássicos da luz" e "estados quânticos da luz" serão tratadas como sinônimos.

A ideia da quantização da luz é a base para aplicação de diversos sistemas em áreas como a metrologia [18], computação e informação quântica[5] [21], especialmente quando elementos da óptica linear são incorporados, como guias de onda, polarizadores, divisores de feixe e acopladores ópticos. Especificamente, os guias de onda são excelentes dispositivos para se estudar estados quânticos da luz [22, 23].

1.2 Organização do Trabalho

O presente trabalho tem como objetivo estudar a propagação da luz não clássica em sistemas compostos por guias de onda acoplados. Para isso, o texto foi dividido em cinco capítulos.

No Capítulo 2, serão estudados alguns conceitos básicos da Óptica Quântica, como a quantização do campo eletromagnético, em que serão definidos os estados não clássicos de Fock e entrelaçados.

No Capítulo 3, serão estudados os Guias de Onda, dispositivos que permitem a propagação da luz não clássica; quando acoplados entre si, eles servem de uma poderosa ferramenta para o estudo dos estados quânticos.

No Capítulo 4, três sistemas de guias de onda acoplados serão estudados. O primeiro trata-se de guias de onda acoplados em uma configuração tipo linear. Nos outros dois, o primeiro e último guia são conectados, formando assim, uma geometria tipo anel. Em um deles, o parâmetro de acoplamento é considerado constante; no outro, o parâmetro de acoplamento segue um formato parabólico (não constante).

Por fim, no Capítulo 5 são feitas as considerações finais, evidenciando perspectivas futuras e outros trabalhos realizados.

[5] É frequentemente dito que os fótons são "*qubits* voadores" [19, 20], devido a sua capacidade de carregar informação.

2 QUANTIZAÇÃO DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO

A quantização formal do campo eletromagnético, uma das ideias mais fundamentais da óptica quântica, foi primeiramente realizada por Dirac [24]. Neste capítulo, a quantização do campo será obtida a partir de ideias envolvendo o modelo clássico da luz e de uma analogia com o oscilador harmônico. Com isso, o fóton, o estado quântico de Fock e o estado entrelaçado serão definidos.

2.1 Modelo Clássico da Luz

Os campos elétrico ($\vec{E}$) e magnético ($\vec{B}$) devem satisfazer as equações de Maxwell; no espaço livre de cargas e correntes ($\rho = J = 0$), eles satisfazem as equações:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \tag{2.1}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \tag{2.2}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{2.3}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \tag{2.4}$$

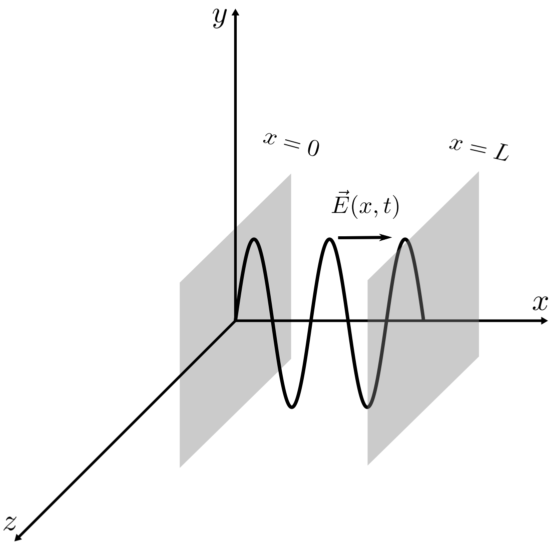
em que ε_0 é a constante de permissividade do vácuo e μ_0 é permeabilidade magnética do vácuo. Usando a identidade vetorial $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$ e as leis de Faraday (equação 2.3) e de Ampère-Maxwell (equação 2.4), obtém-se

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}, \\
\vec{\nabla} \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) &= 0 - \nabla^2 \vec{E}, \\
\frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\nabla} \times \vec{B} \right) &= \nabla^2 \vec{E}, \\
\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= \nabla^2 \vec{E}, \\
\nabla^2 \vec{E} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Note que a equação (2.5) é uma equação de uma onda, com velocidade de propagação igual a $c = (\mu_0 \varepsilon_0)^{-1/2}$, que é exatamente a velocidade da luz no vácuo. Um campo elétrico deve, portanto, satisfazer a equação (2.5). De maneira similar, é possível calcular $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B}$ e obter $\nabla^2 \vec{B} = (1/c^2)(\partial^2 \vec{B} / \partial t^2)$. Com isso, pode-se concluir que a luz é uma onda eletromagnética que se propaga com velocidade c no vácuo.

O objetivo é encontrar uma expressão para os campos elétrico e magnético. Neste Capítulo, será realizada a quantização do campo eletromagnético unidimensional de modo único, isto é, um campo com vetor de onda e vetor de polarização únicos. Dessa forma, vamos considerar um campo elétrico $\vec{E}(x,t)$ confinado em uma cavidade de tamanho L, variando na direção x e linearmente polarizado na direção y, conforme mostra a Figura 2.1.

Figura 2.1 – Representação gráfica de um campo elétrico $\vec{E}(x,t) = E_y\,\hat{\mathbf{y}}$ confinado pelos planos $x = 0$ e $x = L$.



Fonte: Autor, 2024.

Por meio do método de separação de variáveis, será considerada uma solução do tipo $\vec{E}(x,t) = Aq(t)p(x)\,\hat{\mathbf{y}}$, em que A é a amplitude do campo; $q(t)$ é a parte temporal da solução; $p(x)$ a parte espacial e $\hat{\mathbf{y}}$ é o versor de polarização do campo. Com isso, a equação (2.5) se torna

$$\begin{aligned} q(t)\frac{d^2p(x)}{dx^2} &= \frac{p(x)}{c^2}\frac{d^2q(t)}{dt^2}, \\ \frac{1}{p(x)}\frac{d^2p(x)}{dx^2} &= \frac{1}{q(t)c^2}\frac{d^2q(t)}{dt^2} = -k^2, \end{aligned} \tag{2.6}$$

em que $-k^2$ é a constante de separação. Dessa maneira, são obtidas as seguintes equações diferenciais

$$\frac{d^2p(x)}{dx^2} = -k^2\,p(x), \tag{2.7}$$

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} = -(ck)^2\,q(t), \tag{2.8}$$

o que mostra que ambas as soluções temporal e espacial devem ser oscilatórias. Portanto, considere a seguinte solução para o campo elétrico [25]:

$$\vec{E}(x,t) = \sqrt{\frac{2\omega^2}{\varepsilon_0 L}}\,q(t)\,\mathrm{sen}(kx)\,\hat{\mathbf{y}} = E_y\,\hat{\mathbf{y}}, \tag{2.9}$$

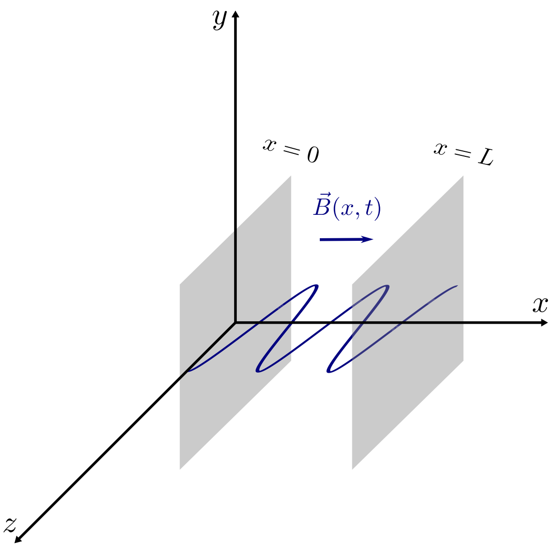
em que $\omega = ck$ é a frequência angular e L é o comprimento da cavidade. A condição de contorno $\vec{E}(x=0;\,t) = \vec{E}(x=L;\,t) = 0$ fornece $\mathrm{sen}(kL) = 0$, ou seja, $k = (m\pi)/L$, para $m = 1, 2, 3 \ldots$.

Para encontrar $\vec{B}$, basta usar a lei de Ampère-Maxwell (2.4), considerando que $\vec{B} = B_z(x,t)\,\hat{\mathbf{z}}$, assim como mostra a Figura 2.2:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{y}} &= \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E_y}{\partial t}\,\hat{\mathbf{y}},\\
-\frac{\partial B_z}{\partial x} &= \mu_0\varepsilon_0\sqrt{\frac{2\omega^2}{\varepsilon_0 L}}\,\dot{q}(t)\,\mathrm{sen}(kx),\\
B_z &= -\mu_0\varepsilon_0\sqrt{\frac{2\omega^2}{\varepsilon_0 L}}\,\dot{q}(t)\int \mathrm{sen}(kx)dx,\\
B_z &= \frac{\mu_0\varepsilon_0}{k}\sqrt{\frac{2\omega^2}{\varepsilon_0 L}}\,\dot{q}(t)\,\cos(kx),
\end{aligned} \tag{2.10}$$

com a constante de integração nula.

Figura 2.2 – Representação gráfica do campo magnético $\vec{B}(x,t) = B_z\,\hat{\mathbf{z}}$ confinado pelos planos $x = 0$ e $x = L$.



Fonte: Autor, 2024.

A energia contida na cavidade é dada pela soma da energia associada ao campo elétrico com a associada ao campo magnético, ou seja

$$
\begin{aligned}
H &= \int \left(\frac{\varepsilon_0 |\vec{E}|^2}{2} + \frac{|\vec{B}|^2}{2\mu_0} \right) dV = \int \left(\frac{\varepsilon_0 E_y^2}{2} + \frac{B_z^2}{2\mu_0} \right) dV, \\
&= \frac{\omega^2}{L} \int_0^L \left(q^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + \frac{(\mu_0\varepsilon_0)^2}{k^2} \dot{q}^2 \cos^2\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right) dx, \\
&= \frac{\omega^2}{L} \int_0^L \left(q^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + \frac{1}{\omega^2} \dot{q}^2 \cos^2\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right) dx, \\
&= \frac{\omega^2}{L} \left[\frac{q^2 L}{2} + \frac{\dot{q}^2 L}{2\omega^2} + \int_0^L \frac{\dot{q}^2}{\omega^2} \cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) dx - \int_0^L q^2 \cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) dx \right], \\
&= \frac{1}{2}\left(\dot{q}^2 + \omega^2 q^2\right),
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

em que foram utilizadas as relações trigonométricas: $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$ e $\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$. Identificando q e $p = \dot{q}$ como as coordenadas generalizadas desse sistema, é possível escrever o Hamiltoniano clássico como

$$
H = \frac{1}{2}\left(p^2 + \omega^2 q^2\right). \tag{2.12}
$$

Observe que essa é uma escolha razoável, tendo em vista que as equações de Hamilton são satisfeitas:

$$
\frac{\partial H}{\partial p} = p = \dot{q} \tag{2.13}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial q} &= \omega^2 q = -\dot{p}, \\
\Rightarrow \ddot{q} &= -\omega^2 q,
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

que é exatamente a equação (2.8).

Note que o Hamiltoniano de um oscilador harmônico (com coordenadas generalizadas q e p) é extremamente similar ao encontrado na equação (2.12):

$$
H_{\text{oscilador}} = \frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{m} + m\omega^2 q^2\right). \tag{2.15}
$$

Portanto, nesse contexto, pode-se dizer que o sistema de um campo eletromagnético confinado em uma caixa comporta-se como um oscilador harmônico de massa unitária.

2.2 Quantização do Campo

Nesta seção, será realizada a quantização do campo eletromagnético discutido na seção anterior (modo único com polarização linear). Há tratamentos mais rigorosos para a quantização de um campo multimodos e com polarização genérica [25, 26], porém não serão abordados neste trabalho.

O Hamiltoniano está relacionado com a energia total do sistema, que é uma quantidade física mensurável. Seguindo um dos postulados da mecânica quântica [27], deve existir um operador observável que descreve esta quantidade física. O mesmo deve acontecer para as variáveis canônicas q e p do sistema. Assim, considere que os operadores $\hat{q}$, $\hat{p}$ e $\hat{H}$ são associados, respectivamente, às variáveis canônicas q e p e ao Hamiltoniano H. Além disso, os operadores $\hat{q}$ e $\hat{p}$ devem obedecer a relação de comutação canônica [27]:

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar. \tag{2.16}$$

Com isso, são também escritos os operadores dos campos elétrico e magnético e do Hamiltoniano:

$$\hat{E}_y(x,t) = \sqrt{\frac{2\omega^2}{\varepsilon_0 L}}\, \hat{q}(t)\ \mathrm{sen}(kx), \tag{2.17}$$

$$\hat{B}_z(x,t) = \frac{\mu_0\varepsilon_0}{k}\sqrt{\frac{2\omega^2}{\varepsilon_0 L}}\, \hat{p}(t)\ \cos(kx), \tag{2.18}$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\left(\hat{p}^2 + \omega^2\hat{q}^2\right). \tag{2.19}$$

Outra maneira de escrever estes operadores é a partir da definição de dois novos operadores, o aniquilação ($\hat{a}$) e o criação ($\hat{a}^\dagger$), assim como é feito no oscilador harmônico quântico [25, 27]:

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}\left(\omega\hat{q} + i\hat{p}\right), \tag{2.20}$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}\left(\omega\hat{q} - i\hat{p}\right), \tag{2.21}$$

cuja relação de comutação é

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1. \tag{2.22}$$

A partir das equações (2.20) e (2.21), é evidente que os operadores de aniquilação e criação não são operadores hermitianos e, portanto, não correspondem a nenhuma quantidade física mensurável. Entretanto, eles são extremamente importantes para trazer uma nova interpretação física e simplificar, matematicamente, o mecanismo de interação dos campos (ver o Capítulo 3). Por esse motivo, é benéfico reescrever $\hat{E}_y$, $\hat{B}_z$ e $\hat{H}$ em termos desses operadores. Primeiramente, escrevem-se os operadores $\hat{q}$ e $\hat{p}$ em termos de $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$:

$$\hat{a} + \hat{a}^\dagger = \frac{2\omega\hat{q}}{\sqrt{2\hbar\omega}} \Rightarrow \hat{q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger\right), \tag{2.23}$$

$$\hat{a} - \hat{a}^\dagger = \frac{2i\hat{p}}{\sqrt{2\hbar\omega}} \Rightarrow \hat{p} = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}). \tag{2.24}$$

Agora, para reescrever o Hamiltoniano, faz-se

$$\hat{a}^\dagger\hat{a} = \frac{1}{2\hbar\omega}\left(\omega\hat{q} - i\hat{p}\right)\left(\omega\hat{q} + i\hat{p}\right) = \frac{1}{2\hbar\omega}(\omega^2\hat{q}^2 + \hat{p}^2 + i\omega[\hat{q}, \hat{p}]), \tag{2.25}$$

$$\Rightarrow \omega^2\hat{q}^2 + \hat{p}^2 = \hbar\omega(2\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1). \tag{2.26}$$

Assim, inserindo as equações (2.23), (2.24) e (2.26) nas equações (2.17), (2.18) e (2.19), são obtidos os operadores nas suas formas mais usuais:

$$\hat{E}_y = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0 L}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)\,\mathrm{sen}(kx) = E_0(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)\,\mathrm{sen}(kx), \tag{2.27}$$

$$\hat{B}_z = i\frac{\mu_0}{k}\sqrt{\frac{\hbar\varepsilon_0\omega^3}{L}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a})\cos(kx) = iB_0(\hat{a}^\dagger - \hat{a})\cos(kx), \tag{2.28}$$

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right), \tag{2.29}$$

em que $E_0 = \sqrt{\hbar\omega/\varepsilon_0 L}$, $B_0 = (\mu_0/k)\sqrt{\hbar\varepsilon_0\omega^3/L}$ e $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ é conhecido como o operador número, que é hermitiano: $\hat{N}^\dagger = \hat{a}^\dagger(\hat{a}^\dagger)^\dagger = \hat{a}^\dagger\hat{a} = \hat{N}$.

Dessa forma, as equações (2.27), (2.28) e (2.29) representam a quantização do campo eletromagnético unidimensional de modo único.

2.3 Estados de Fock

A partir da equação (2.29), é nítido que os autovetores de $\hat{H}$ são os mesmos de $\hat{N}$, pois os dois operadores comutam[1]. Definindo $|n\rangle$ como esse autovetor comum, obtém-se as duas equações:

$$\hat{N}\,|n\rangle = n\,|n\rangle\,, \tag{2.30}$$

$$\hat{H}\,|n\rangle = E_n\,|n\rangle = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)|n\rangle\,, \tag{2.31}$$

em que $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$, com $n = 0, 1, 2, ...$, são as energias do sistema.

O conjunto $\{|n\rangle\}$ forma, portanto, uma base, e as relações de ortonormalidade e completeza são satisfeitas:

$$\langle n|m\rangle = \delta_{nm}, \tag{2.32}$$

$$\sum_n |n\rangle\langle n| = 1. \tag{2.33}$$

O estado $|n\rangle$ é chamado de estado de Fock. Vale destacar a seguinte interpretação física: as energias dos estados de Fock são separadas por múltiplos de $\hbar\omega$ (assim como no oscilador harmônico), que é exatamente a energia de um fóton com frequência angular ω; dessa maneira, pode-se afirmar que o estado $|n\rangle$ possui n fótons [17, 25]. A partir desta interpretação, o fóton pode ser definido como a excitação elementar do campo eletromagnético quantizado, que assemelha-se a uma partícula com energia $\hbar\omega$ e momento $\hbar k$ [17]. Apesar do fóton ter sido definido nesse contexto, a sua definição formal ainda é um tema de debate na comunidade científica [28]; uma definição alternativa, bastante

[1] Se dois operadores hermitianos comutam, é possível escrever um autovetor em comum aos dois operadores.

interessante, é a seguinte: em experimentos com ondas eletromagnéticas de baixíssimas intensidades, os detectores detectam “cliques” singulares, um por vez, na tela de detecção. Esses são os fótons [29].

Da mesma forma que o oscilador harmônico quântico, os operadores $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ satisfazem as seguintes relações:

$$\hat{a}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle\,, \tag{2.34}$$

$$\hat{a}^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\,, \tag{2.35}$$

com $\hat{a}\,|0\rangle = 0$. Portanto, analisando as equações (2.34) e (2.35), pode-se afirmar que o operador aniquilação “destrói” um fóton e o criação “cria” um fóton na cavidade. A cada aplicação do operador criação, há o aumento de n em 1 unidade; portanto, após n aplicações desse operador no estado fundamental $|0\rangle$, deve-se obter o estado $|n\rangle$, ou seja:

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}\,|0\rangle\,, \tag{2.36}$$

em que $(n!)^{-1/2}$ é o fator de normalização. Assim, é possível obter o estado excitado a partir do estado fundamental, através de sucessivas aplicações do operador criação.

Além disso, o estado de Fock possui um número de fótons bem definido (com incerteza igual a 0). Para mostrar isso, basta calcular a incerteza de $\hat{n}$ no estado $|n\rangle$:

$$\Delta\hat{n} = \sqrt{\langle\hat{n}^2\rangle - \langle\hat{n}\rangle^2} = \sqrt{\langle n|\hat{n}^2|n\rangle - (\langle n|\hat{n}|n\rangle)^2} \tag{2.37}$$

$$= \sqrt{n\langle n|\hat{n}|n\rangle - (n\langle n|n\rangle)^2} \tag{2.38}$$

$$= \sqrt{n^2\langle n|n\rangle - n^2} \tag{2.39}$$

$$= 0. \tag{2.40}$$

O processo de conversão paramétrica descendente espontânea (CPDE)[2] é um dos métodos mais comuns para produzir um fóton único, que consiste na produção de dois fótons gêmeos (dois estados de Fock $|1\rangle$) através de uma interação não-linear entre um laser e um cristal [30]. Vale ressaltar que essa não é uma fonte de criação de fótons perfeita. Na verdade, atualmente, não há uma fonte capaz de seguir todos os requisitos de produção de um fóton único: (1) a fonte deve ser determinística (a produção de fótons deve ser feita por demanda do usuário); (2) a probabilidade de emitir um fóton é 100% e a de emitir múltiplos fótons é 0%; (3) fótons emitidos subsequentemente são indistinguíveis e (4) a taxa de repetição é relativamente alta (GHz) [17, 30]. Além de produzir fótons únicos, o método de SPDC também pode ser utilizado para produzir estados de Fock de alta ordem ($n \geq 2$) [31].

[2] “Spontaneous parametric down-conversion” (SPDC).

2.4 Estados Entrelaçados

Antes de definir o que são estados entrelaçados (ou emaranhados), faz-se necessário descrever um sistema com múltiplas partículas, descritas em espaços de Hilbert distintos. Por motivos de simplificação, suponha que existam 2 partículas independentes, cada uma definida em um espaço de Hilbert. Ou seja, a partícula 1 está definida no espaço $\mathcal{H}_1$, que é gerado pela base $\{|a_i\rangle\}$, e a partícula 2 é definida em $\mathcal{H}_2$, gerado pela base $\{|b_j\rangle\}$, em que os subíndices 1 e 2 representam as grandezas relacionadas, exclusivamente, às partículas 1 e 2, respectivamente. Dessa maneira, o espaço de Hilbert do sistema é dado pelo produto tensorial entre os espaços de Hilbert de cada partícula: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Um vetor pertencente a $\mathcal{H}$ possui a base $\{|a_i\rangle_1 \otimes |b_j\rangle_2\}$, que também pode ser escrita como $\{|a_i\rangle_1 |b_j\rangle_2\}$, em que o símbolo do produto tensor está implícito.

Então, por exemplo, supondo o caso simplificado em que $\{|a_i\rangle_1\} = \{|a_1\rangle_1, |a_2\rangle_1\} = \{|\alpha\rangle_1, |\beta\rangle_1\}$ e $\{|b_j\rangle_2\} = \{|b_1\rangle_2, |b_2\rangle_2\} = \{|\gamma\rangle_2, |\delta\rangle_2\}$, uma das bases do espaço $\mathcal{H}$ é, portanto, dada por $\{|\alpha\rangle_1 |\gamma\rangle_2, |\alpha\rangle_1 |\delta\rangle_2, |\beta\rangle_1 |\gamma\rangle_2, |\beta\rangle_1 |\delta\rangle_2\}$. Se a partícula 1 estiver no estado $|\alpha\rangle$ e a partícula 2 no estado $|\gamma\rangle$, o estado do sistema é escrito como $|\alpha\rangle_1 |\gamma\rangle_2$. Note que um estado mais complexo do sistema pode ser encontrado, ao considerar que as partículas estão em uma superposição de estados.

No Capítulo 3, serão estudados os dispositivos ópticos chamados de guias de onda, que permitem a propagação da luz em seu interior. Os estados entrelaçados serão definidos nesse contexto, considerando um sistema composto por dois guias de onda. O estado do guia de onda 1 será representado como $|\psi_1\rangle = |\cdots\rangle_1$, e o estado do guia 2 como $|\psi_2\rangle = |\cdots\rangle_2$. Se os estados dos guias **não** estiverem entrelaçados, então o estado do sistema pode ser escrito como um produto direto entre os dois vetores de estado, isto é, $|\psi_{\text{sistema}}\rangle = |\Psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$ (também chamado de estado fatorável). Para melhor ilustrar isso, considere o seguinte estado, escrito na base de Fock:

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \frac{1}{2}(|0\rangle_1 |0\rangle_2 + |0\rangle_1 |1\rangle_2 + |1\rangle_1 |0\rangle_2 + |1\rangle_1 |1\rangle_2) \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1 + |1\rangle_1)\right] \otimes \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_2 + |1\rangle_2)\right] = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle . \end{aligned} \tag{2.41}$$

Evidentemente, este é um estado fatorável e, portanto, não entrelaçado. Os guias estão em um estado de superposição entre os estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$: $|\psi_i\rangle = 1/\sqrt{2}(|0\rangle_i + |1\rangle_i)$, para $i = 1, 2$. Observe que, calculando o valor médio do número de fótons no guia 1, obtém-se

$$\langle \hat{n}_1 \rangle = \langle \Psi | \hat{n}_1 | \Psi \rangle = \frac{1}{2}\langle \Psi | (|1\rangle_1 |0\rangle_2 + |1\rangle_1 |1\rangle_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}. \tag{2.42}$$

Devido ao fato do sistema ser um estado fatorável, o mesmo cálculo pode ser feito considerando exclusivamente o estado do guia de onda 1, ou seja:

$$\langle \hat{n}_1 \rangle = \langle \psi_1 | \hat{n}_1 | \psi_1 \rangle = \frac{1}{2}. \tag{2.43}$$

Nesse sentido, pode-se afirmar que medições feitas sobre o guia de onda 1 não influenciam o estado do guia de onda 2. De fato, caso seja realizada uma medida de $\hat{n}_1$ e encontrado o valor de 1 fóton, o sistema colapsará no estado

$$|\Psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle_1 |0\rangle_2 + |1\rangle_1 |1\rangle_2) = |1\rangle_1 \otimes \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_2 + |1\rangle_2)\right] = |1\rangle_1 \otimes |\psi_2\rangle\,, \tag{2.44}$$

o que mostra que o estado do guia de onda 2 não sofreu alterações após a medida.

Em contrapartida, considere agora o estado:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|3\rangle_1 |1\rangle_2 + |2\rangle_1 |4\rangle_2). \tag{2.45}$$

Veja que é impossível escrevê-lo na forma fatorada $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$. Assim, o estado da equação (2.45) é um estado entrelaçado. Agora, uma medição feita sobre o guia 1 influenciará o estado do guia 2: caso sejam encontrados três fóton no guia 1, obrigatoriamente haverá um fóton no guia 2; se forem encontrados dois fótons no guia 1, o outro guia possuirá quatro fótons.

Há infinitos estados entrelaçados que podem ser criados em um sistema de dois guias de onda. Uma classe desses estados são os do tipo $\mathcal{N}00\mathcal{N}$, usualmente representados como[3]:

$$|\Psi\rangle_{\mathcal{N}00\mathcal{N}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|N\rangle_1 |0\rangle_2 + |0\rangle_1 |N\rangle_2). \tag{2.46}$$

Para $N \geq 2$, o estado da equação (2.46) é conhecido como estado $\mathcal{N}00\mathcal{N}$. Os estados entrelaçados são amplamente utilizados na área da informação quântica, especialmente na criptografia quântica, com a chave de distribuição quântica ("*Quantum Key Distribution*" - QKD) [32, 33]. Outra utilização desses estados é na metrologia[4] , em técnicas conhecidas como "Ghost Imaging" e "Interaction-Free Measurement". Na "Ghost Imaging", dois fótons entrelaçados são produzidos pelo processo SPDC; um deles é direcionado para um objeto e logo após é detectado pelo detector 1, enquanto o outro é detectado pelo detector 2, sem ter contato com o objeto. O fato dos fótons estarem entrelaçados permite a criação de uma imagem do objeto no detector 2 [35]. A técnica de "Interaction-Free Measurement" consiste na detecção de objetos sem que fótons interajam com eles! [36, 37].

2.5 Outros Estados Quânticos

Os estados apresentados nas seções 2.3 e 2.4 serão estudados no contexto de propagação em sistemas de guias de onda no Capítulo 4. Entretanto, há uma grande variedade de outros estados quânticos que não foram mencionados e têm uma grande importância.

[3] Uma outra notação comum é escrever $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|N0\rangle + |0N\rangle)$.

[4] A metrologia é uma ciência que engloba todos os aspectos teóricos e práticos da medição, qualquer que seja a incerteza de medição e o campo de aplicação [34].

Um exemplo é o estado coerente, que é definido como o autoestado do operador aniquilação:

$$\hat{a}\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle\,. \tag{2.47}$$

$|\alpha\rangle$ é conhecido como o estado coerente, e foi teorizado inicialmente por Roy J. Glauber[5] [38, 39], que foi laureado com o Prêmio Nobel em 2005, pelas suas contribuições para a teoria de coerência no contexto quântico [40]. Na base dos estados de Fock, o estado coerente é escrito como

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle\,. \tag{2.48}$$

Um exemplo de aplicação desse estado é na computação quântica, em que os estados coerentes podem ser utilizados como alternativa para implementar protocolos de comunicação quântica, pois eles são mais fáceis de se implementar com a tecnologia atual se comparados com os estados tradicionais de múltiplos *qubits* [41]. As Referências [42, 43] trazem mais detalhes e aplicações desses estados.

Além do estado coerente, pode ser citado o estado comprimido (ou espremido), cuja formulação foi inicialmente feita por Hollenhorst [44]. O operador de compressão ("*squeezing operator*") $\hat{S}(\xi)$ é definido como [25]

$$\hat{S}(\xi) = e^{(\xi^*\hat{a}^2-\xi\hat{a}^{\dagger 2})/2}, \tag{2.49}$$

em que $\xi = re^{i\theta}$; r é o parâmetro de compressão ("*squeezing parameter*"), com $0 \leq r < \infty$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

O estado comprimido de vácuo $|\xi\rangle = \hat{S}(\xi)\,|0\rangle$ pode ser escrito em termos da base de Fock, da seguinte maneira [25]:

$$|\xi\rangle = \frac{1}{\sqrt{\cosh r}}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{\sqrt{(2m)!}}{2^m m!}e^{im\theta}(\tanh r)^m\,|2m\rangle\,. \tag{2.50}$$

O estado comprimido, de maneira geral, tem como utilidade a alteração dos valores das incertezas dos operadores $\hat{q}$ e $\hat{p}$ (equações (2.23) e (2.24)), sendo, portanto, de extrema relevância na metrologia[6]. No Observatório de Ondas Gravitacionais por Interferômetro Laser (no inglês, *LIGO*), o estado comprimido da luz foi utilizado para melhorar a sensibilidade do interferômetro, em 2014 [45]. Citando o artigo,

> "With the injection of squeezed states, this LIGO detector demonstrated the best broadband sensitivity to gravitational waves ever achieved, with important implications for observing the gravitational wave Universe with unprecedented sensitivity."

[5] No contexto de quantização da luz; os estados coerentes já eram estudados no oscilador harmônico quântico.

[6] Ao reduzir a incerteza de um operador (obrigatoriamente aumentando a incerteza do outro, tendo em vista que eles devem seguir o princípio da incerteza), a medição sobre grandezas que dependem desse operador se tornam mais precisas.

> "Com a injeção de estados comprimidos, este detector LIGO demonstrou a melhor sensibilidade de banda larga a ondas gravitacionais já alcançada, com importantes implicações para a observação do Universo das ondas gravitacionais com uma sensibilidade sem precedentes."

No ano seguinte, em 2015, foram detectadas as primeiras ondas gravitacionais advindas da colisão de dois buracos negros, o que gerou um prêmio Nobel aos principais pesquisadores da área em 2017 [46, 47].

3 GUIAS DE ONDA

Nas áreas da computação e informação quântica, os fótons são regularmente referidos como "*qubits* voadores": eles apresentam uma alta capacidade de carregar informação [19, 20]. Dessa maneira, o estudo da propagação de fótons (e, por consequência, os estados quânticos da luz) se torna extremamente importante neste contexto [48], tendo em vista que os computadores quânticos prometem resolver problemas físicos de maneira muito mais eficiente [49, 50]. Um problema, entretanto, tornou-se aparente: para implementar as tecnologias fundamentais para a computação quântica, eram necessários acoplamentos fortes e não lineares entre as unidades de informação, em um ambiente com baixa dissipação [51], o que é experimentalmente difícil de se realizar.

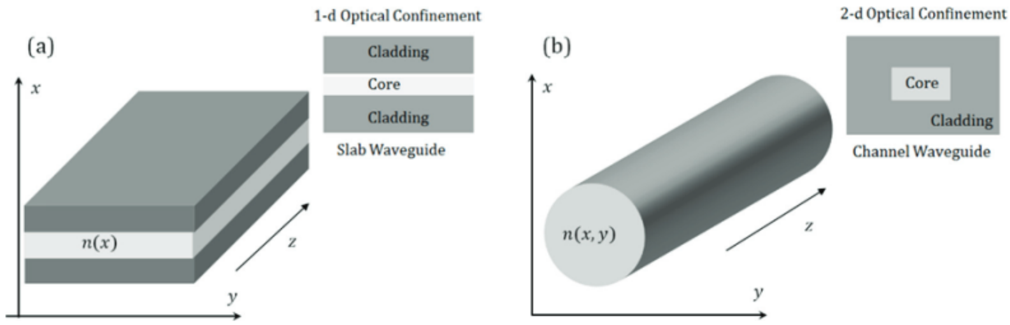
Porém, em 2001, Knill *et. al* [52] mostraram o surpreendente resultado que é possível construir um esquema de computação quântica utilizando elementos da óptica linear, como divisores de feixe, deslocadores de fase, fontes e detectores de fótons únicos. A partir disso, diversos avanços foram feitos com o uso desses dispositivos no contexto quântico; mais especificamente, sistemas de **guias de onda** acoplados fornecem uma rica plataforma para o estudo das propriedades dos estados quânticos da luz [53]. Avanços experimentais possibilitaram a criação desses circuitos quânticos integrados, através da inscrição de guias de onda (feitos de silício) em *chips* de sílica (dióxido de silício) [23], o que desencadeou uma série de descobertas e aplicações na área de informação quântica, junto com novos métodos de fabricação de circuitos quânticos integrados [54].

Considerando que o objetivo deste trabalho é estudar o comportamento dos estados não clássicos da luz em sistemas de guias de onda acoplados, neste Capítulo será dada uma breve descrição sobre os guias de onda: o que são, como acoplar guias de onda, a definição de fidelidade e de transferência perfeita de estado.

3.1 O que são Guias de Onda?

Guias de onda são dispositivos que têm a capacidade de guiar ondas eletromagnéticas numa direção paralela ao seu eixo, que pode inclusive ser curvo [55, 56]. Há diversos tipos de classificações de guias de onda, de acordo com a distribuição do índice de refração, com a geometria, o material, entre outros [57]. De maneira geral, eles são compostos por uma região interna chamada de núcleo, com um material de maior índice de refração e uma região externa chamada de revestimento, com um material de menor índice de refração. Dessa maneira, do ponto de vista clássico, a luz sofre reflexões internas totais no interior do guia, mantendo-se aprisionada nele. A Figura 3.1 ilustra dois tipos de guias de onda diferentes: na letra (a), um guia retangular e na letra (b) um guia cilíndrico.

Figura 3.1 – Exemplos de guias de onda (a) retangular e (b) cilíndrico.

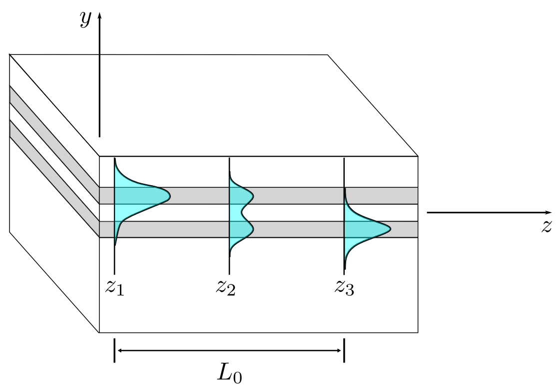


Fonte: Referência [57].

3.2 Acoplamento entre Guias de Onda

Apesar da luz sofrer reflexões internas totais à medida que se propaga, o seu campo eletromagnético pode se estender para fora do guia, decaindo exponencialmente [58]. Essas ondas que se estendem para fora do guia são chamadas de ondas evanescentes [59]. Portanto, se dois guias estiverem espacialmente próximos, o campo eletromagnético de um guia pode excitar uma onda no outro guia. Esse fenômeno é conhecido como acoplamento de ondas evanescentes. A Figura 3.2 mostra esse comportamento: inicialmente (posição z_1), a luz está principalmente concentrada no guia de onda superior e à medida que ela se propaga na direção z vai sendo distribuída entre os dois guias de onda, de maneira que, ao chegar na posição z_2, ela se encontra igualmente compartilhada; já na posição z_3, encontra-se majoritariamente localizada no guia inferior. Neste exemplo, pode-se dizer que os guias estão acoplados e, após uma distância percorrida L_0, a luz foi transferida do guia superior para o guia inferior.

Figura 3.2 – Acoplamento entre dois guias de onda retangulares (paralelepípedos cinzas). Na posição z_1, a luz (curva em ciano) é majoritariamente concentrada no guia de onda superior; em z_2, a luz está igualmente dividida entre os dois guias; na posição z_3, a luz está majoritariamente localizada no guia inferior.



Fonte: Autor, 2024 (inspirado em [60]).

Considere agora dois guias de onda idênticos (mesmo índice de refração e constante de propagação) próximos o suficiente para estarem acoplados. Sendo A_1 (A_2) a amplitude da onda no primeiro (segundo) guia, é possível demonstrar que as amplitudes satisfazem o seguinte conjunto de equações diferenciais [60]:

$$\frac{dA_1(z)}{dz} = -iJA_2(z), \tag{3.1}$$

$$\frac{dA_2(z)}{dz} = -iJA_1(z), \tag{3.2}$$

em que J é o parâmetro de acoplamento entre os guias. Como a proximidade entre os guias está diretamente relacionada com o acoplamento entre eles, pode-se dizer que J é inversamente proporcional à distância entre os guias. Assim, as equações (3.1) e (3.2) descrevem, matematicamente, como a amplitude da onda no guia 1 influencia a amplitude da onda no guia 2, evidenciando, dessa forma, o acoplamento.

3.3 Representação no Contexto Quântico

A luz dentro do guia de onda é um campo eletromagnético confinado transversalmente com relação à direção de propagação, o que implica que ela pode ser tratada com o formalismo de quantização do campo [61, 62, 63]. No restante deste trabalho, será considerado que o campo dentro do guia é de modo único, isto é, o formalismo desenvolvido no Capítulo 2 pode ser aplicado. Assim, cada guia de onda pode ser representado pelos operadores do campo eletromagnético: $\hat{a}, \hat{a}^\dagger, \hat{N}$. Para distinguir os operadores de diferentes guias de onda, será utilizado um índice em cada operador, de maneira que $\hat{a}_1$ representa o operador aniquilação do guia de onda 1, $\hat{a}_2$ o operador aniquilação do guia de onda 2, e assim por diante. Com isso, a relação de comutação (equação 2.22) é válida somente para operadores do mesmo guia:

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = 1, \text{ se } i = j, \tag{3.3}$$

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = 0, \text{ se } i \neq j, \tag{3.4}$$

ou, de maneira geral,

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}, \tag{3.5}$$

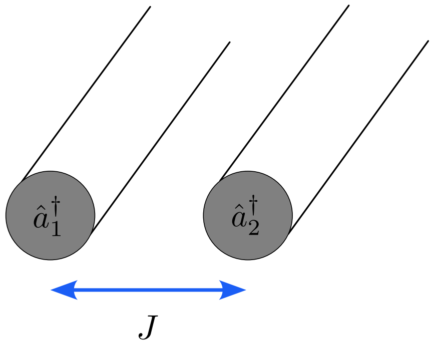
em que δ_{ij} é a delta de Kronecker. Da mesma maneira,

$$\langle n_i | m_j \rangle = \delta_{ij}\delta_{nm}. \tag{3.6}$$

Para caracterizar o acoplamento entre os guias, é utilizado um termo que contém os operadores aniquilação e criação de diferentes guias multiplicados entre si [64, 65]. Para ilustrar, considere a Figura 3.3, que mostra os guias 1 e 2 acoplados entre si, com o parâmetro de acoplamento igual a J. Para esse sistema, o Hamiltoniano de interação é dado por

$$H_{\text{int}} = J(\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2). \tag{3.7}$$

Figura 3.3 – Dois guias de onda (representados pelos operadores criação $\hat{a}^\dagger$) acoplados, cujo parâmetro de acoplamento é J.



Fonte: Autor, 2024.

Como foi discutido na seção 2.4, os estados da luz em cada guia serão representados com um índice: $|1\rangle_1 = |1_1\rangle$ é um estado de Fock de um fóton no guia 1, $|0\rangle_2 = |0_2\rangle$ é o estado de vácuo no guia 2, e assim por diante[1]. Dessa maneira, para N guias, a atuação dos operadores $\hat{a}_j$ e $\hat{a}_j^\dagger$ é

$$\hat{a}_j\Big[\,|n_1\rangle_1\,|n_2\rangle_2\cdots|n_j\rangle_j\cdots|n_N\rangle_N\,\Big] = \sqrt{n_j}\,\Big[\,|n_1\rangle_1\,|n_2\rangle_2\cdots|n_j-1\rangle_j\cdots|n_N\rangle_N\,\Big], \tag{3.8}$$

$$\hat{a}_j^\dagger\Big[\,|n_1\rangle_1\,|n_2\rangle_2\cdots|n_j\rangle_j\cdots|n_N\rangle_N\,\Big] = \sqrt{n_j+1}\,\Big[\,|n_1\rangle_1\,|n_2\rangle_2\cdots|n_j+1\rangle_j\cdots|n_N\rangle_N\,\Big]. \tag{3.9}$$

3.4 Fidelidade e Transferência Perfeita de Estado

Uma medida importante de ser analisada no contexto de transferência de estados quânticos em redes de guias de onda acoplados é a fidelidade. Dados dois estados quânticos, representados pelas matrizes densidade[2] ρ_1 e ρ_2, a fidelidade entre esses dois estados é definida como [66]

$$F(\rho_1,\rho_2) = \left(\mathrm{tr}\left(\sqrt{\sqrt{\rho_1}\rho_2\sqrt{\rho_1}}\right)\right)^2. \tag{3.10}$$

Para o caso particular em que os estados quânticos são puros, $\rho_1 = |\psi_1\rangle\langle\psi_1|$ e $\rho_2 = |\psi_2\rangle\langle\psi_2|$, a fidelidade entre esses estados toma a forma simplificada

$$F(|\psi_1\rangle\langle\psi_1|\,,|\psi_2\rangle\langle\psi_2|) = |\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2. \tag{3.11}$$

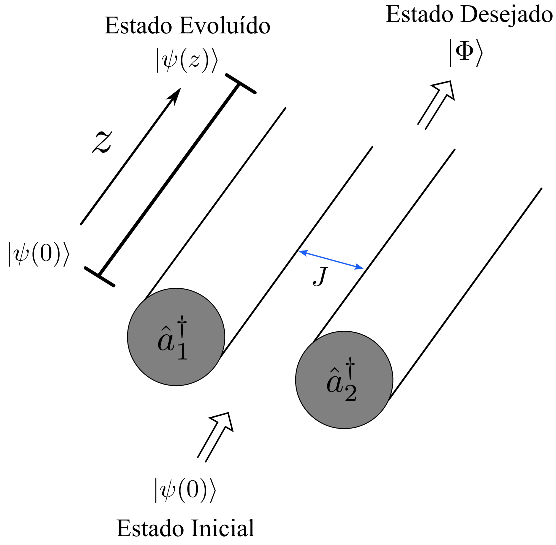
Para uma melhor explicação da definição de fidelidade no nosso contexto, considere dois guias de onda acoplados com um parâmetro J (Figura 3.4), em que o estado inicial $|\psi(0)\rangle$ é inserido no sistema e, após uma distância de propagação z, ele evolui para $|\psi(z)\rangle$. Se $|\Phi\rangle$ é o estado que se deseja obter após a distância de propagação z, então a fidelidade entre os estados $|\Phi\rangle$ e $|\psi(z)\rangle$ na distância z pode ser definida como

$$F(z) = |\langle\Phi|\psi(z)\rangle|^2. \tag{3.12}$$

[1] A notação do subíndice dentro do *ket* somente será utilizada em produtos internos: será escrito $\langle 2_i|2_j\rangle$ ao invés de ${}_i\langle 2|2\rangle_j$, por motivos óbvios de estética.

[2] Se $|\Psi\rangle$ é o estado do sistema, a matriz densidade que o representa é definida como $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$.

Figura 3.4 – Dois guias de onda acoplados, com parâmetro de acoplamento igual a J. Um estado inicial $|\psi(0)\rangle$ é inserido no sistema e, após uma distância z, o estado evoluído é $|\psi(z)\rangle$. Deseja-se medir, nessa distância, o estado desejado $|\Phi\rangle$.



Fonte: Autor, 2024.

Na maioria dos casos, $|\Phi\rangle$ é escolhido como o estado inicial, de maneira que a fidelidade pode ser interpretada como o grau de similaridade entre o estado inicial e o estado evoluído. Por exemplo, se for inserido no sistema um estado $|\psi(0)\rangle = |1\rangle_1$[3] e deseja-se encontrar esse fóton no guia de onda 2, a escolha para $|\Phi\rangle$ deve ser $|\Phi\rangle = |1\rangle_2$. Para os casos em que $F(z_1) = 1$, é dito que houve uma Transferência Perfeita de Estado (ou, do inglês, PST[4]) em $z = z_1$, pois, nesse caso, o estado inicial é idêntico ao estado evoluído.

3.5 Estudos de Sistemas de Guias de Ondas Acoplados utilizando Estados Quânticos da Luz

Sistemas de guias de onda acoplados são excelentes plataformas para estudar o transporte e o comportamento dos estados quânticos da luz [53]. Dentre as mais diversas aplicações, destacam-se as caminhadas quânticas aleatórias [67, 68], que são extremamente úteis para a área de computação quântica, sendo possível utilizá-las para realizar simulações quânticas, por exemplo. Perets *et al.* foram os primeiros a utilizar guias de onda como ferramenta para o estudo das caminhadas quânticas contínuas [69] e, 21 dias depois da publicação desse artigo, Amit Rai, Agarwal e Perk [64] submeteram um trabalho utilizando o estado quântico de fóton único, no mesmo sistema de guias acoplados, para estudar caminhada aleatória. Eles também mostraram que, ao introduzir nos guias um estado

[3] Ou seja, um fóton no guia de onda 1.
[4] *Perfect State Transfer*

comprimido, é possível observar um entrelaçamento entre modos dos campos de guias vizinhos.

Ao incluir desordem nos guias, observou-se que o fóton incidente tende a permanecer no mesmo guia, ao invés de se “espalhar” por toda a rede, o que remete à localização de Anderson [70]. Além disso, esses sistemas permitem o estudo de correlações entre pares de fótons [71], oscilações de Bloch de estados entrelaçados (mais especificamente, estados $\mathcal{N}00\mathcal{N}$) [72], e inclusive a sua geração [73].

Na área de computação e informação quântica, a transmissão de dados com altíssimas fidelidades é de extrema importância para se preservar o conteúdo da mensagem propagada [74]. Por isso, o estudo da transferência perfeita de estado em sistemas de guias de onda acoplados tornou-se atrativo nos últimos anos [75].

Em 2014, B. M. Rodríguez-Lara [76] estudou o transporte de alguns estados quânticos em um sistema de 2 guias de onda acoplados, utilizando a fidelidade como uma medida de transferência de estado. Considerando estados iniciais de Fock, entrelaçados, coerente e comprimido, ele percebeu que somente os dois primeiros são transferidos para o outro guia. Isso pode ser explicado pelo fato desses últimos estados possuírem uma componente do estado de vácuo, que não se acopla com os outros modos do campo. Assim, por mais que o número médio de fótons seja transferido, a fidelidade entre os guias não alcança o valor de 1, pois o estado de vácuo permanece no guia inicial.

Uma das primeiras realizações experimentais foi feita por Matthieu Bellec *et al.* [77] em 2012, mostrando a presença de PST em um sistema com nove guias de onda. E, em 2016, Robert J. Champman *et al.* [78] mostraram o PST de um *qubit* em um sistema com onze guias de ondas acoplados, além de preservar o entrelaçamento com outro *qubit*. A fidelidade obtida por eles não foi exatamente 1, possivelmente devido à erros experimentais intrínsecos, e sim em torno de 97%. Outras implementações experimentais podem ser encontradas em [79, 80].

4 ESTUDO DA LUZ NÃO CLÁSSICA EM SISTEMAS DE GUIAS DE ONDA ACOPLADOS

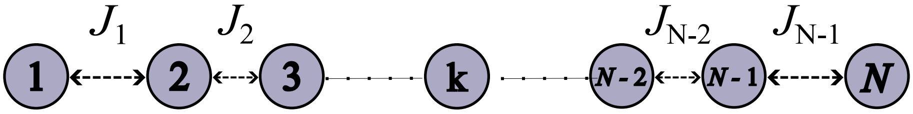
Neste Capítulo, será analisado o comportamento de alguns estados da luz não clássica ao se propagarem em diferentes sistemas de guias de onda acoplados entre si. O primeiro sistema estudado é o de N guias de onda acoplados com uma geometria linear. Depois, o primeiro e o último guia são acoplados, criando assim, uma geometria tipo anel. Dessa maneira, outros dois sistemas foram estudados com essa configuração, considerando que os parâmetros de acoplamento são (a) constantes e (b) não constantes. Em todos esses sistemas, o objetivo é estudar como os estados quânticos (mais especificamente, o estado de Fock e o estado $\mathcal{N}00\mathcal{N}$) se comportam ao se propagarem pelos guias.

4.1 Acoplamento de Guias de Onda em uma Configuração Linear

Swain e Rai [81] estudaram um sistema de N guias de onda acoplados, como mostra a Figura 4.1, de maneira que o parâmetro de acoplamento entre os guias k e $(k+1)$ é J_k e segue um comportamento parabólico, que foi inicialmente proposto por [82] (em um contexto de redes de spins):

$$J_k = J\sqrt{k(N-k)}. \tag{4.1}$$

Figura 4.1 – Representação de um sistema de N guias de onda acoplados com uma geometria linear. O círculo cinza com índice k representa o k-ésimo guia de onda. J_k é o parâmetro de acoplamento entre os guias k e $k+1$ e é descrito pela equação (4.1).



Fonte: Autor, 2024.

O Hamiltoniano de interação desse sistema é descrito por

$$\hat{H} = \hbar \sum_{k=1}^{N-1} J_k \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{k+1} + \hat{a}_k \hat{a}_{k+1}^\dagger \right), \tag{4.2}$$

em que $\hat{a}_k$ ($\hat{a}_k^\dagger$) representa o operador aniquilação (criação) para o k-ésimo guia de onda.

É possível obter a dinâmica do sistema a partir da representação de Heisenberg, em que os operadores evoluem temporalmente[1]. Nesta representação, a equação de movimento

[1] Diferentemente da representação de Schrödinger, em que os estados evoluem no tempo.

para um operador qualquer $\hat{A}$ é dada por

$$i\hbar\frac{d\hat{A}}{dt} = \left[\hat{A}, \hat{H}\right]. \tag{4.3}$$

O objetivo é observar se nesse sistema de guias de onda acoplados há PST entre dois guias, em algum instante t; para isso, calcula-se a fidelidade (equação 3.12). Vale ressaltar que no Capítulo 3, foram feitas interpretações espaciais (o estado evoluía conforme se propagava em z). Entretanto, a equação de Heisenberg (4.3) trata da evolução **temporal** dos operadores, então as análises devem ser feitas utilizando o tempo como a variável. É possível alternar entre as representações espacial e temporal, lembrando que $\eta = c/v = cdt/dz \rightarrow dz = cdt/\eta$, em que η é o índice de refração do guia (mais especificamente, do núcleo) e c é a velocidade da luz no vácuo. Assim, os parâmetros de acoplamento podem ser redefinidos e a mudança é justificada [71].

Para o operador de aniquilação do k-ésimo guia de onda $\hat{a}_k$, a equação de movimento de Heisenberg se torna

$$\begin{aligned} i\frac{d\hat{a}_k}{dt} &= \left[\hat{a}_k, \sum_{j=1}^{N-1} J_j \left(\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_{j+1} + \hat{a}_j \hat{a}_{j+1}^\dagger\right)\right] \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} J_j \Big\{ \left[\hat{a}_k, \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_{j+1}\right] + \left[\hat{a}_k, \hat{a}_j \hat{a}_{j+1}^\dagger\right] \Big\}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Porém, note que, usando a relação de comutação (3.5), é possível escrever:[2]

$$\left[\hat{a}_k, \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_{j+1}\right] = \hat{a}_j^\dagger \left[\hat{a}_k, \hat{a}_{j+1}\right] + \left[\hat{a}_k, \hat{a}_j^\dagger\right] \hat{a}_{j+1} = \delta_{kj}\, \hat{a}_{j+1}, \tag{4.5}$$

$$\left[\hat{a}_k, \hat{a}_j \hat{a}_{j+1}^\dagger\right] = \hat{a}_j \left[\hat{a}_k, \hat{a}_{j+1}^\dagger\right] + \left[\hat{a}_k, \hat{a}_j\right] \hat{a}_{j+1}^\dagger = \delta_{k,j+1}\, \hat{a}_j. \tag{4.6}$$

Assim, inserindo as equações (4.5) e (4.6) em (4.4), obtém-se

$$i\frac{d\hat{a}_k}{dt} = J_k\, \hat{a}_{k+1} + J_{k-1}\, \hat{a}_{k-1}. \tag{4.7}$$

Escrevendo explicitamente a equação para $k = 1$ e $k = N$, considerando que $J_{N+1} = J_0 = 0$, já que os guias de onda da extremidade só possuem um acoplamento,

$$i\frac{d\hat{a}_1}{dt} = J_1 \hat{a}_2, \tag{4.8}$$

$$i\frac{d\hat{a}_N}{dt} = J_{N-1} \hat{a}_{N-1}. \tag{4.9}$$

Dessa maneira, foram obtidas equações diferenciais que regem a evolução temporal dos *operadores* de aniquilação. Considere o caso particular em que $N = 3$. Neste caso, é possível escrever esse conjunto de equações como

[2] $\left[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}\right] = \hat{B}\left[\hat{A}, \hat{C}\right] + \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\hat{C}$.

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\hat{a}_1\\ \hat{a}_2\\ \hat{a}_3\end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix}0 & J_1 & 0\\ J_1 & 0 & J_2\\ 0 & J_2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{a}_1\\ \hat{a}_2\\ \hat{a}_3\end{pmatrix}, \tag{4.10}$$

cuja solução é, evidentemente, $\vec{a}(t) = e^{-i\mathbf{M}t}\vec{a}(0)$, em que $\vec{a} = [\hat{a}_1 \ldots \hat{a}_N]^T$ e a matriz $\mathbf{M}$ é definida como

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix}0 & J_1 & 0\\ J_1 & 0 & J_2\\ 0 & J_2 & 0\end{pmatrix}. \tag{4.11}$$

Ou, na forma de componentes:

$$\hat{a}_k(t) = \sum_{l=1}^{3} A_{k,l}(t)\,\hat{a}_l(0), \tag{4.12}$$

$$\hat{a}_k^\dagger(t) = \sum_{l=1}^{3} A_{k,l}^*(t)\,\hat{a}_l^\dagger(0), \tag{4.13}$$

em que $A_{k,l}(t) = [e^{-i\mathbf{M}t}]_{k,l}$ e $k = 1, 2, 3$. Dessa forma, generalizando para N guias:

$$\hat{a}_k(t) = \sum_{l=1}^{N} A_{k,l}(t)\,\hat{a}_l(0), \tag{4.14}$$

$$\hat{a}_k^\dagger(t) = \sum_{l=1}^{N} A_{k,l}^*(t)\,\hat{a}_l^\dagger(0). \tag{4.15}$$

Portanto, as equações (4.7), (4.8) e (4.9) podem ser escritas em termos de grandezas escalares:

$$i\frac{dA_{k,l}}{dt} = J_k A_{k+1,l} + J_{k-1}A_{k-1,l}, \text{ para } k \neq 1, N, \tag{4.16}$$

$$i\frac{dA_{1,l}}{dt} = J_1 A_{2,l}, \tag{4.17}$$

$$i\frac{dA_{N,l}}{dt} = J_{N-1}A_{N-1,l}. \tag{4.18}$$

Note que o sistema de equações diferenciais acopladas dado por (4.16), (4.17) e (4.18) descreve a evolução temporal dos *coeficientes* de expansão dos operadores de aniquilação. Para $N = 2$, há duas equações diferenciais acopladas; para $N = 3$, há três equações, e assim por diante. Avaliando a equação (4.14) em $t = 0$, é fácil ver que

$$A_{k,l}(0) = \delta_{kl}. \tag{4.19}$$

Com a condição inicial para os coeficientes $A_{k,l}(t)$ (equação 4.19), torna-se possível encontrar a solução para o sistema de equações acopladas (4.16-4.18). Para $N > 4$, a solução analítica torna-se extremamente complicada, devido à necessidade de calcular a exponencial de uma matriz 5x5 ou de ordem maior. Assim, os métodos computacionais mostram-se uma poderosa ferramenta para contornar esse problema. Para encontrar uma solução numérica, foi utilizado o método *Runge-Kutta de* 4^a *Ordem* (para mais detalhes do algoritmo, ver [83]).

Há uma infinidade de estados iniciais possíveis para serem estudados. Aqui, serão analisados os estados iniciais de Fock e $\mathcal{N}00\mathcal{N}$ de 2 fótons.

4.1.1 Estado de Fock de 2 fótons

Considere o estado inicial

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_k^\dagger(0))^2\Big[\,|0\rangle_1 \cdots |0\rangle_k \cdots |0\rangle_N\Big] = |0\rangle_1 \cdots |2\rangle_k \cdots |0\rangle_N\,. \tag{4.20}$$

Para simplificar a notação, os estados de vácuo dos outros guias serão omitidos. Assim, o estado inicial é

$$|\psi(0)\rangle = |2\rangle_k\,, \tag{4.21}$$

isto é, no instante $t = 0$, há dois fótons no guia de onda k e zero fótons nos demais.

O estado evoluído $|\psi(t)\rangle$ da representação de Schrödinger pode ser escrito na representação de Heisenberg como

$$\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_k^\dagger(t))^2\Big[\,|0\rangle_1 \cdots |0\rangle_N\Big] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sum_l A_{k,l}^*(t)\hat{a}_l^\dagger(0)\right)^2\Big[\,|0\rangle_1 \cdots |0\rangle_N\Big] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{l,m} A_{k,l}^*(t)A_{k,m}^*(t)\hat{a}_l^\dagger(0)\hat{a}_m^\dagger(0)\Big[\,|0\rangle_1 \cdots |0\rangle_N\Big] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{l,m} A_{k,l}^*(t)A_{k,m}^*(t)\hat{a}_l^\dagger(0)\,|1\rangle_m \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{l,m} A_{k,l}^*(t)A_{k,m}^*(t)\sqrt{2}\delta_{l,m}\,|2\rangle_m + \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{l,m} A_{k,l}^*(t)A_{k,m}^*(t)\,|1\rangle_l\,|1\rangle_m \\
&= \sum_l A_{k,l}^{*2}(t)\,|2\rangle_l + \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{l,m} A_{k,l}^*(t)A_{k,m}^*(t)\,|1\rangle_l\,|1\rangle_m\,.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Para que se tenha PST no guia de onda p, é necessário que

$$|\Phi\rangle = |2\rangle_p\,. \tag{4.23}$$

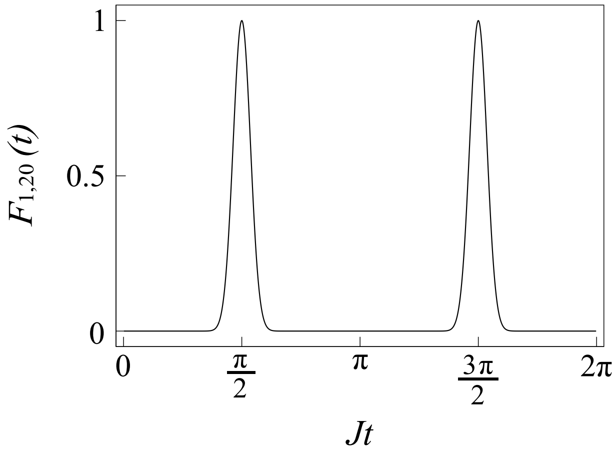
Assim, a fidelidade pode ser calculada como

$$F_{k,p}(t) = \left|\sum_l A_{k,l}^{*2}(t)\,\langle 2_p|2_l\rangle\right|^2 = \left|A_{k,p}^{*2}(t)\right|^2, \tag{4.24}$$

em que foi usada a relação (3.6). $F_{k,p}(t)$ representa a fidelidade entre os guias de onda k e p no instante t, onde o estado inicial foi inserido no k-ésimo guia.

Dessa maneira, conhecendo a expressão da fidelidade (equação 4.24), é possível montar os gráficos de $F_{k,p}(t)$ em função do tempo normalizado Jt. A Figura 4.2 mostra a fidelidade entre os guias 1 e 20 ($k = 1$ e $p = 20$), em um sistema com $N = 20$ guias de onda.

Figura 4.2 – Fidelidade entre os guias 1 e 20 em função do tempo normalizado Jt. Há PST para $Jt = n\pi/2$, com $n = 1, 3, 5, ...$.



Fonte: Autor, 2024.

Nesse caso, é perceptível que a fidelidade é igual a 1 quando $Jt = n\pi/2$, para $n = 1, 3, 5, ...$, evidenciando a Transferência Perfeita de Estado. Ou seja, para esses valores de tempo, é possível inferir que os dois fótons, inicialmente inseridos no guia de onda 1, foram transferidos para o guia 20. Para observar isso de outra maneira, é possível calcular o número médio de fótons no j-ésimo guia como

$$\langle \hat{n}_j \rangle = \langle \psi(0) | \hat{a}_j^\dagger(t) \hat{a}_j(t) | \psi(0) \rangle \tag{4.25}$$

$$= \sum_{p,q} A_{p,j}^*(t) A_{q,j}(t) \langle 2_k | \hat{a}_p^\dagger(0) \hat{a}_q(0) | 2_k \rangle \tag{4.26}$$

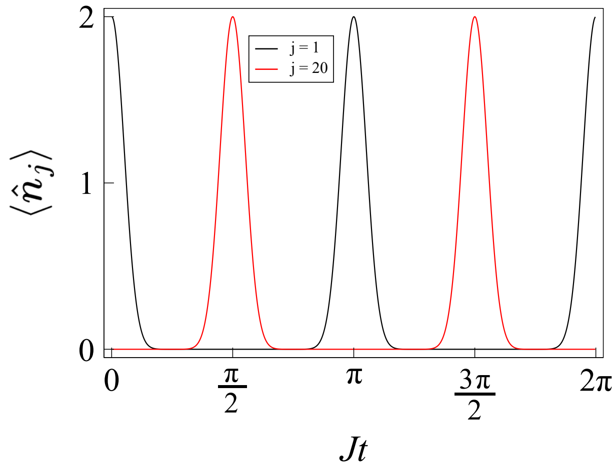
$$= 2 \sum_{p,q} A_{p,j}^*(t) A_{q,j}(t) \delta_{qk} \delta_{pk} \tag{4.27}$$

$$= 2 |A_{k,j}(t)|^2, \tag{4.28}$$

em que foi utilizado o estado inicial (4.21) e as expansões dos operadores (4.14 e 4.15).

Dessa maneira, plotando o gráfico de $\langle \hat{n}_j \rangle$ em função de Jt (Figura 4.3), é possível observar que, de fato, os dois fótons são transferidos do guia 1 para o guia 20 em $Jt = n\pi/2$. Em todos os outros guias de onda, em nenhum instante de t é possível observar o PST. Esse é um resultado geral: independente do tamanho da cadeia ($N = 3, 4, 5, \dots$), se o estado inicial de Fock for inserido no primeiro guia, só haverá PST entre o primeiro e o último. Entretanto, há também PST entre o 2° e o 19°, entre o 3° e o 18°, e assim por diante.

Figura 4.3 – Número médio de fótons no guia j, $\langle \hat{n}_j \rangle$, em função do tempo normalizado Jt, em que um estado inicial de 2 fótons foi inserido no guia de onda 1, ou no guia 2, com igual probabilidade. A linha preta representa o número médio de fótons no 1° e no 2° guia e a linha vermelha no 19° e 20° guia.



Fonte: Autor, 2024.

4.1.2 Estado $\mathcal{N}00\mathcal{N}$ de 2 fótons

Considere, agora, o estado:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}(\hat{a}_p^{\dagger\,2}(0) + \hat{a}_q^{\dagger\,2}(0))\Big[\,|0\rangle_1 \cdots |0\rangle_N\Big] = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\,|0\rangle_1 \ldots |2\rangle_p \ldots |0\rangle_N + |0\rangle_1 \ldots |2\rangle_q \ldots |0\rangle_N\Big]$$
$$\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle_p + |2\rangle_q). \tag{4.29}$$

Assim, o estado evoluído é dado por[3]

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_l A_{p,l}^{*2}(t)\,|2\rangle_l + \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_l A_{q,l}^{*2}(t)\,|2\rangle_l\,. \tag{4.30}$$

O objetivo é observar PST nos guias r e s, ou seja:

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle_r + |2\rangle_s), \tag{4.31}$$

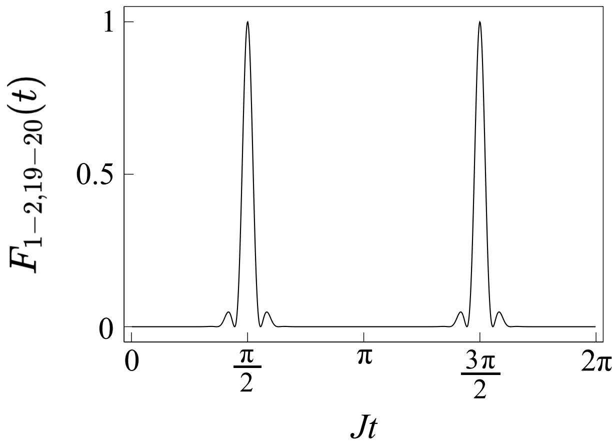
de maneira que a fidelidade entre os guias (p e q) e os guias (r e s) no instante t, $F_{p-q,r-s}(t)$, é

$$F_{p-q,r-s}(t) = |\langle\Phi|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{4}\left|A_{p,r}^{*2}(t) + A_{q,r}^{*2}(t) + A_{p,s}^{*2}(t) + A_{q,s}^{*2}(t)\right|^2. \tag{4.32}$$

Para $p = 1$ e $q = 2$, ou seja, um estado de 2 fótons é inserido no guia 1 ou no guia 2, com igual probabilidade, o gráfico da Figura 4.4 mostra a fidelidade nos guias 19 e 20 no instante t, $F_{1-2,19-20}(t)$. É notório que há PST, assim como no estado de Fock, em $Jt = n\pi/2$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$.

[3] Note que só foram escritos os termos que serão não-nulos ao calcular $\langle\Phi|\psi(t)\rangle$.

Figura 4.4 – Fidelidade em função da distância normalizada Jt, para um estado entrelaçado inicial inserido nos guias 1 e 2. O estado propagado é medido nos guias 19 e 20, para vinte guias acoplados.



Fonte: Autor, 2024.

Calculando, agora, o número médio de fótons no guia j:

$$\langle \hat{n}_j \rangle = \langle \psi(0)|\hat{a}_j^\dagger(t)\hat{a}_j(t)|\psi(0)\rangle \tag{4.33}$$

$$= \sum_{l,m} A^*_{l,j}(t)A_{m,j}(t)\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 2_p| + \langle 2_q|)\right]\hat{a}_l^\dagger(0)\hat{a}_m(0)\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|2_p\rangle + |2_q\rangle)\right] \tag{4.34}$$

$$= \sum_{l,m} A^*_{l,j}(t)A_{m,j}(t)\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 2_p| + \langle 2_q|)\right]\hat{a}_l^\dagger(0)\left[(\delta_{mp}|1_p\rangle + \delta_{mq}|1_q\rangle)\right] \tag{4.35}$$

$$= \sum_{l,m} A^*_{l,j}(t)A_{m,j}(t)\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 2_p| + \langle 2_q|)\right]\left[(\sqrt{2}\delta_{mp}\delta_{lp}|2_p\rangle + \sqrt{2}\delta_{mq}\delta_{lq}|2_q\rangle)\right] \tag{4.36}$$

$$= \sum_{l,m} A^*_{l,j}(t)A_{m,j}(t)(\delta_{mp}\delta_{lp} + \delta_{mq}\delta_{lq}) \tag{4.37}$$

$$= |A_{p,j}(t)|^2 + |A_{q,j}(t)|^2, \tag{4.38}$$

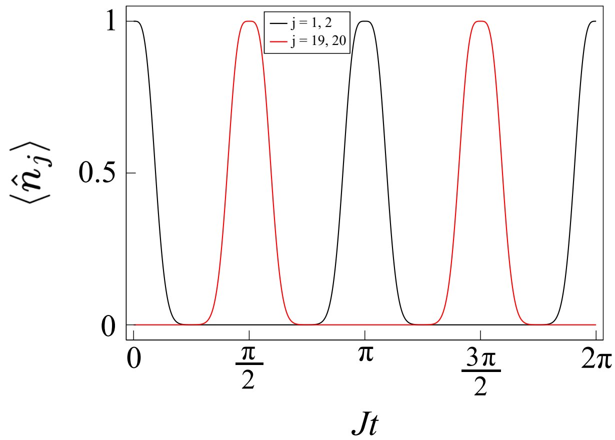
lembrando que $p \neq q$. Com a expressão (4.38), foi plotado o número médio nos guias 1,2,19 e 20 em função de Jt, como mostra a Figura 4.5. Como é possível ver, de fato há PST em $Jt = n\pi/2$.

Ao examinar a equação (4.29), é note que para o caso analisado ($p = 1$ e $q = 2$), os dois fótons tem uma igual probabilidade de 1/2 de serem encontrados tanto no guia 1 como no 2. Não é possível, portanto, encontrar um fóton em cada guia inicialmente. Entretanto, ao observar o gráfico da Figura 4.5, em $t = 0$ o valor do número médio de fótons no guia 1 e no guia 2 é igual a 1. À primeira vista, esse parece ser um resultado estranho, mas como a grandeza calculada é o número **médio** de fótons, isso é justificado. O número médio, no instante $t = 0$, no guia 1 (ou no guia 2), é calculado como

$$\sum_r n_r P(n_r) = 2 \cdot (1/2) + 0 \cdot (1/2) = 1, \tag{4.39}$$

em que n_r representa os valores possíveis para as medições do operador $\hat{N}$ e $P(n_r)$ as

Figura 4.5 – Número médio de fótons no guia j, $\langle \hat{n}_j \rangle$, em função do tempo normalizado Jt, em que um estado inicial de dois fótons foi inserido no guia de onda 1, ou no guia 2, com igual probabilidade. A linha preta representa o número médio de fótons no 1° e no 2° guia e a linha vermelha no 19° e 20° guia.



Fonte: Autor, 2024.

probabilidades associadas a esses valores. Assim, o número médio de fótons oscila à medida que o sistema evolui e tem o seu valor máximo em 1.

4.2 Acoplamento de Guias de Onda em uma Configuração Tipo Anel

Agora[4], acopla-se o último guia ao primeiro, de maneira que o sistema adquire uma geometria anelar, conforme mostra a Figura 4.6. J_k é o parâmetro de acoplamento entre os guias k e $k+1$. Esse tipo de configuração já foi realizada experimentalmente [84, 85].

Nesse caso, o Hamiltoniano desse sistema é muito parecido com o anterior (equação 4.2), bastando adicionar o acoplamento entre o primeiro e o último guia:

$$\hat{H} = \sum_{k=1}^{N-1} J_k \Big(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{k+1} + \hat{a}_{k+1}^\dagger \hat{a}_k \Big) + J_N \Big(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_N + \hat{a}_N^\dagger \hat{a}_1 \Big). \tag{4.40}$$

As equações de movimento para os operadores aniquilação podem ser facilmente deduzidas, utilizando o mesmo procedimento da Seção 4.1:

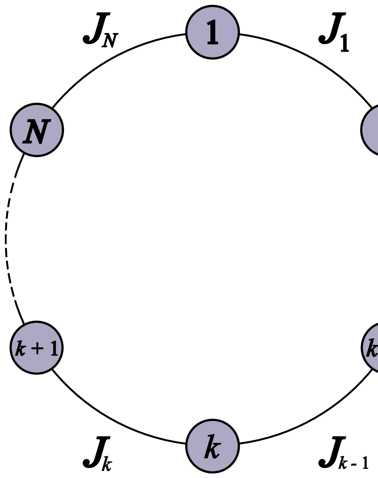
$$i\frac{d\hat{a}_1}{dz} = J_1 \hat{a}_2 + J_N \hat{a}_N, \tag{4.41}$$

$$i\frac{d\hat{a}_N}{dz} = J_{N-1} \hat{a}_{N-1}, \tag{4.42}$$

$$i\frac{d\hat{a}_k}{dz} = J_k\, \hat{a}_{k+1} + J_{k-1}\, \hat{a}_{k-1}, \;\text{ para } k \neq 1, N. \tag{4.43}$$

[4] Nesta seção, as derivações das expressões não serão feitas com detalhes, tendo em vista que o procedimento é o mesmo da seção 4.1.

Figura 4.6 – Representação de um sistema de N guias de onda acoplados com uma geometria anelar. O círculo cinza com índice k representa o k-ésimo guia de onda. J_k é o parâmetro de acoplamento entre os guias k e $k+1$.



Fonte: Autor, 2024.

Ou ainda, usando a equação 4.14,

$$i\frac{dA_{1,l}}{dz} = J_1 A_{2,l} + J_N A_{N,l}, \tag{4.44}$$

$$i\frac{dA_{N,l}}{dz} = J_{N-1} A_{N-1,l}, \tag{4.45}$$

$$i\frac{dA_{k,l}}{dz} = J_k A_{k+1,l} + J_{k-1} A_{k-1,l}, \text{ para } k \neq 1, N. \tag{4.46}$$

Da mesma maneira que anteriormente, o conjunto de equações (4.44, 4.45 e 4.46) pode ser resolvido para diferentes valores de N e, assim, encontrar os coeficientes $A_{k,l}$. Porém note que há uma infinidade de escolhas para o parâmetro de acoplamento J_k. Nesta seção, 2 parâmetros diferentes foram escolhidos.

4.2.1 $J_k = J$

Atmadev Rai e Amit Rai [86] resolveram este mesmo problema utilizando um acoplamento constante, ou seja, com a distância entre todos os guias sendo a mesma: $J_k = J$. Novamente, é calculada a fidelidade em função da distância normalizada Jz para alguns valores de N, considerando estados iniciais de Fock de 1 fóton e entrelaçado de 2 fótons, com o objetivo de observar se há, ou não, PST para algum N.

Estado de Fock de 1 fóton

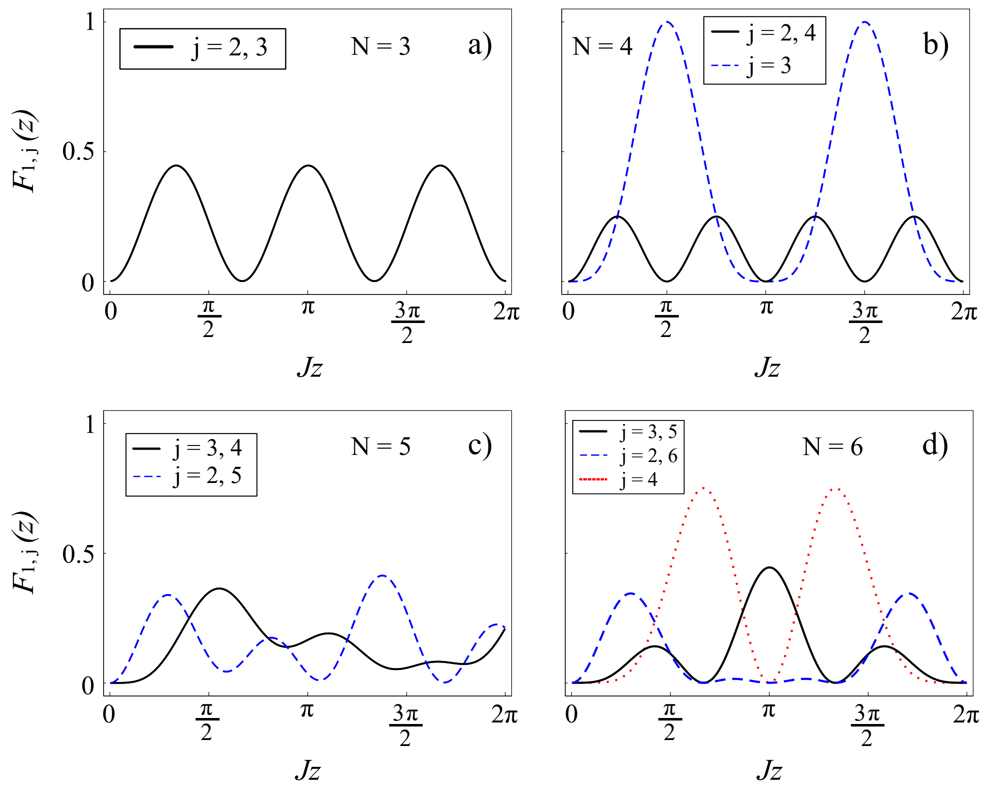
Com o estado inicial sendo:

$$|\psi(0)\rangle = |1\rangle_k\,, \tag{4.47}$$

a fidelidade $F_{k,l}(z)$ entre os guias k e l na distância z é dada por $F_{k,l}(z) = |A_{k,l}(z)|^2$. A Figura 4.7 mostra que há PST somente no caso de quatro guias acoplados, entre o 1° e o

3° guia. Para os outros valores de N, não foi possível observar a transferência perfeita de estado, e o valor da fidelidade é relativamente baixo (menos de 0.5, exceto entre o 1° e o 4°, quando há seis guias, que nesse caso a fidelidade máxima é de 0.7). Note que só foram calculadas as fidelidades $F_{1,j}(z)$, pois como os acoplamentos são todos iguais, não importa onde foi inserido o estado inicial: $F_{1,k}(z) = F_{2,k}(z) = F_{3,k}(z) = \cdots F_{N,k}(z)$.

Figura 4.7 – Fidelidade entre o 1° e o j-ésimo guia $F_{1,j}(z)$, em função da distância normalizada Jz, em que um estado inicial de 1 fóton foi inserido no guia de onda 1 em um sistema de N guias de onda acoplados. (a) Para três guias acoplados, a fidelidade entre o 1° e o 2° guia, e entre o 1° e o 3° guia (linha preta); (b) para quatro guias, a fidelidade entre o 1° e o 2° (ou 4°) guia (linha preta), e a fidelidade entre o 1° e o 3° guia (linha azul tracejada); (c) para cinco guias, a fidelidade entre o 1° e o 3° (ou 4°) guia (linha preta), e a fidelidade entre o 1° e o 2° (ou 5°) guia (linha azul tracejada); (d) para seis guias, a fidelidade entre o 1° e o 3° (ou 5°) guia (linha preta), entre o 1° e o 2° (ou 6°) guia (linha azul tracejada), e entre o 1° e o 4° guia (linha vermelha tracejada).



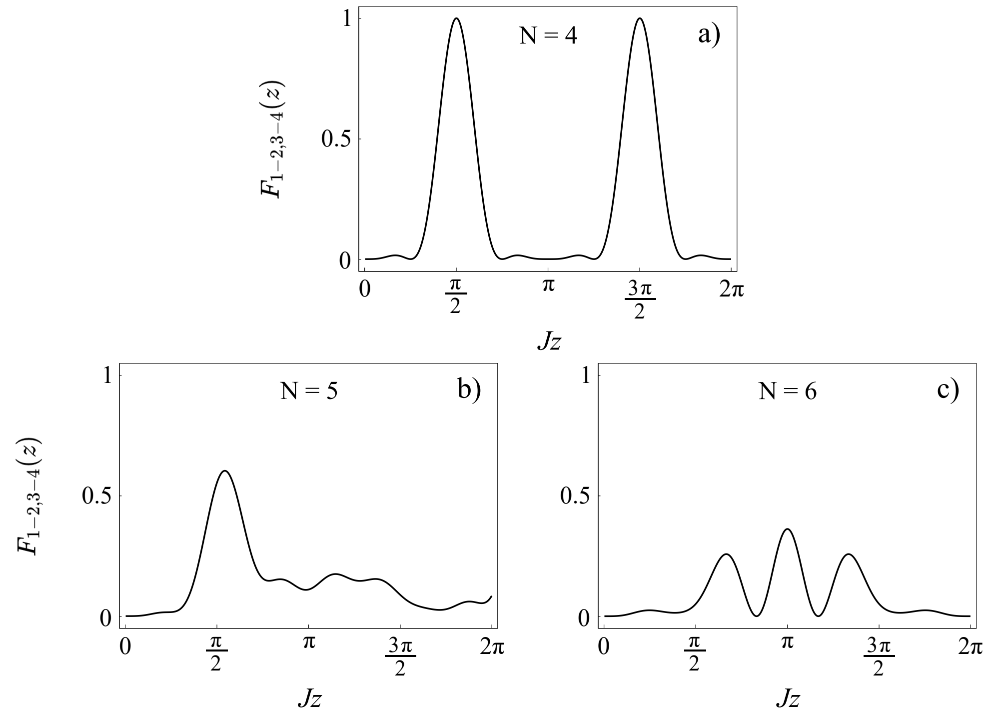
Fonte: Autor, 2024.

Estado $\mathcal{N}00\mathcal{N}$ de 2 fótons

Já para o estado entrelaçado dado pela equação (4.29), a fidelidade é dada pela mesma expressão encontrada anteriormente (equação 4.32): $F_{p-q,r-s}(z) = \frac{1}{4}|A^{*2}_{p,r}(z) + A^{*2}_{q,r}(z) + A^{*2}_{p,s}(z) + A^{*2}_{q,s}(z)|^2$. Escolhendo os guias 1 e 2 como os guias iniciais, a fidelidade nos guias 3 e 4 foram medidas (Figura 4.8), para (a) quatro, (b) cinco e (c) seis guias acoplados. Note que só é possível observar PST entre os guias 1 e 2 e 3 e 4 nas distâncias

$Jz = n\pi/2$, com $n = 1, 3, 5, ...$, quando há exatamente quatro guias acoplados. Esse resultado é muito parecido com o que foi encontrado nas outras seções.

Figura 4.8 – Fidelidade em função da distância normalizada Jz, para um estado entrelaçado inicial inserido nos guias 1 e 2. O estado propagado é medido nos guias 3 e 4, para (a) quatro; (b) cinco e (c) seis guias acoplados.



Fonte: Autor, 2024.

4.2.2 $J_k = J\sqrt{k(N-k+1)}$

Agora, finalmente, será estudada uma configuração em que o acoplamento entre os guias não é constante, assim como na seção 4.1, porém mantendo a geometria anelar [87]. Inspirados pelo acoplamento do modelo linear, consideramos a seguinte expressão:

$$J_k = J\sqrt{k(N-k+1)}. \tag{4.48}$$

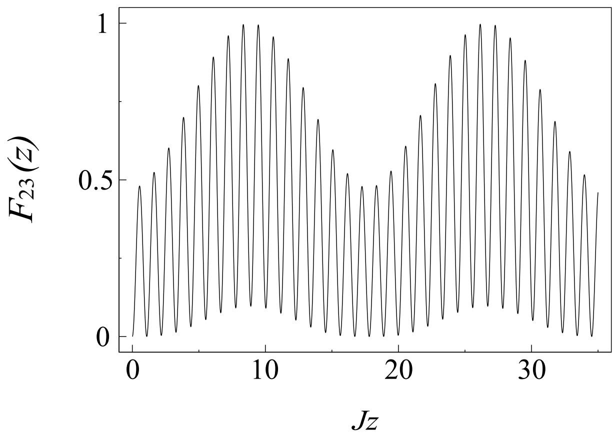
Note que foi preciso fazer uma pequena alteração na equação do parâmetro de acoplamento (equação 4.1). Naquela expressão, $J_N = 0$; entretanto, queremos que exista o acoplamento entre os guias N e 1. Para isso, substituímos $(N-k)$ por $(N-k+1)$. Assim, agora, $J_N = J\sqrt{N}$.

Estado de Fock de 1 fóton

Com o estado inicial (equação 4.47) e $F_{k,l}(z) = |A_{k,l}(z)|^2$, vamos analisar a fidelidade para diferentes valores de N. Agora, como os acoplamentos não são todos iguais, a depender de onde for inserido o estado inicial serão obtidas curvas distintas, diferentemente da seção 4.2.1.

Para $N = 3$, já é possível observar uma fidelidade muito alta entre os guias 2 e 3 (Figura 4.9). Esse padrão possui um máximo de aproximadamente 0.9969 em $Jz \approx 26.15$. Portanto, para essa configuração há um indício de PST, o que claramente não foi possível de ser obtido ao considerarmos o acoplamento constante (Figura 4.7) [86].

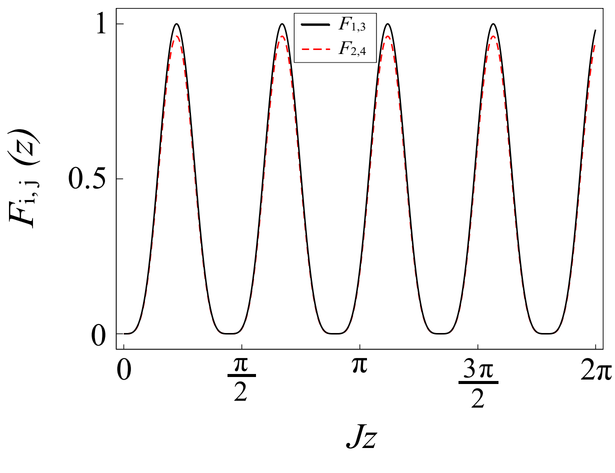
Figura 4.9 – Fidelidade entre os guias 2 e 3, $F_{2,3}(z)$, em função da distância normalizada Jz, em um sistema com $N = 3$ guias de onda acoplados com geometria anelar, cujo parâmetro de acoplamento é dado pela equação (4.48).



Fonte: Autor, 2024.

Na Figura 4.7 [86], foi observado um PST para $N = 4$, mas somente entre os guias 1 e 3. Utilizando um acoplamento não constante, além de ser observado um PST entre os guias 1 e 3, foi possível obter uma fidelidade muito alta entre os guias 2 e 4, conforme mostra a Figura 4.10.

Figura 4.10 – Fidelidade entre os guias i e j, $F_{i,j}(z)$, em função da distância normalizada Jz, em um sistema com $N = 4$, cujo parâmetro de acoplamento é pela equação (4.48). A linha preta representa a fidelidade entre os guias 1 e 3. A linha vermelha representa a fidelidade entre os guias 2 e 4.

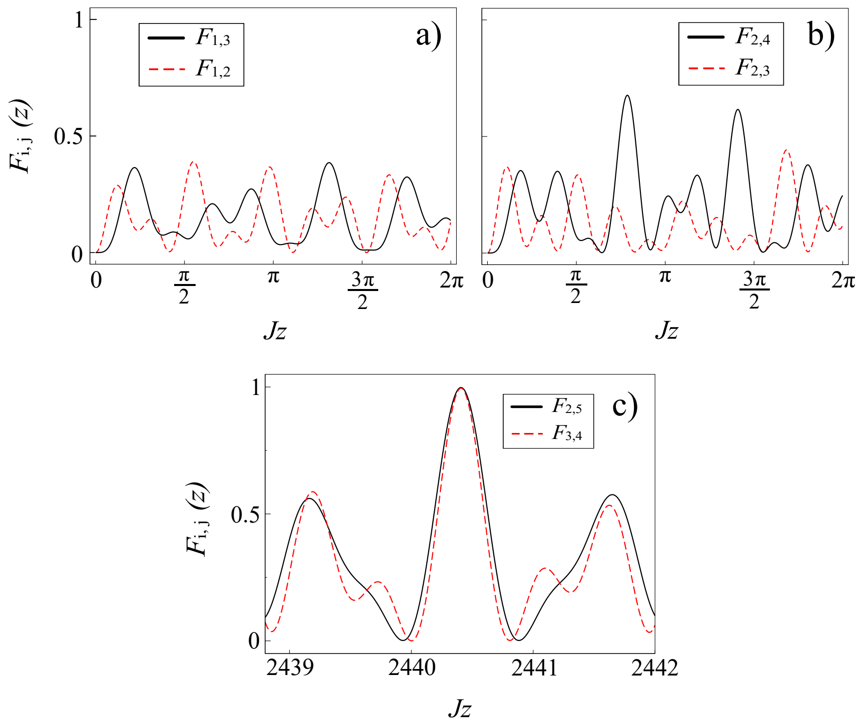


Fonte: Autor, 2024.

Para $N = 5$, a fidelidade entre os guias 1 e 2 e entre os guias 1 e 3 é relativamente baixa, cujo valor máximo não ultrapassa 0.5 (Figura 4.11 (a)), assim como na Figura 4.7

(c) [86]. Por outro lado, $F_{2,3}$ e $F_{2,4}$ são um pouco maior. No intervalo de 0 a 2π, somente $F_{2,4}$ ultrapassa o valor de 0.5 (Figura 4.11 (b)), mas para intervalos maiores, ambos têm o pico em valores próximos de 0.7. Agora, analisando $F_{2,5}$ e $F_{3,4}$ é possível notar altíssimos valores para a fidelidade, entre $Jz = 0$ e $Jz = 2450$; mais especificamente, em $Jz = 2440.41$ foi encontrado $F_{2,5}^{max} = 0.99799418$ e $F_{3,4}^{max} = 0.99570868$ (Figura 4.11 (c)), o que mostra o contraste com [86].

Figura 4.11 – Fidelidade entre os guias i e j, $F_{i,j}(z)$, na distância z, em função da distância normalizada Jz, em um sistema com $N = 5$, cujo parâmetro de acoplamento é dado pela equação (4.48). (a) A linha preta representa a fidelidade entre os guias 1 e 3; a linha vermelha representa a fidelidade entre os guias 1 e 2. (b) A linha preta representa a fidelidade entre os guias 2 e 4; a linha vermelha representa a fidelidade entre os guias 2 e 3. (c) A linha preta representa a fidelidade entre os guias 2 e 5, cujo valor máximo obtido é de ≈ 0.998, em $Jz = 2440.41$; a linha vermelha representa a fidelidade entre os guias 3 e 4, com o valor máximo de ≈ 0.996, em $Jz = 2440.41$.

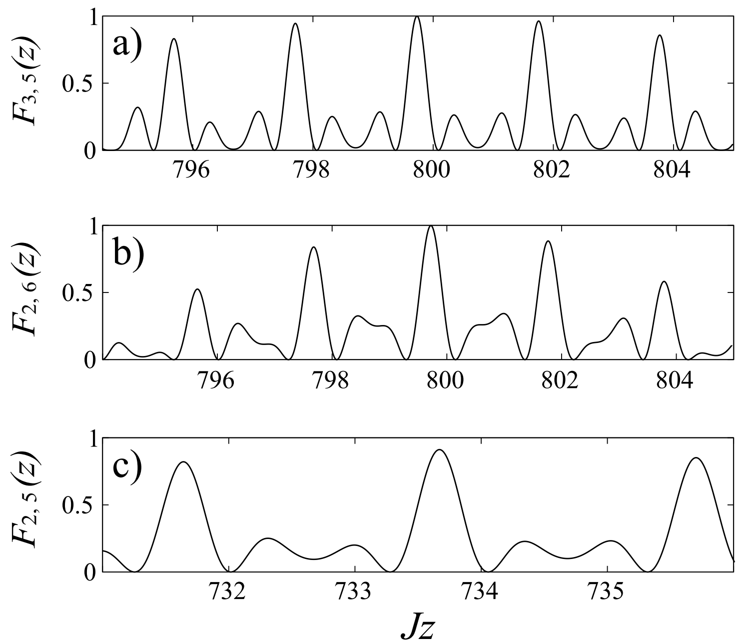


Fonte: Autor, 2024.

Para $N = 6$, altíssimos valores foram encontrados para $F_{2,5}$, $F_{2,6}$ e $F_{3,5}$, como mostra a Figura 4.12. Nesse caso, $F_{3,5}^{max} = 0.99934383$, $F_{2,6}^{max} = 0.9987154$ e $F_{2,5}^{max} = 0.91152602$.

Portanto, utilizando um acoplamento não constante dado pela equação (4.48), foi possível observar um aumento da fidelidade entre alguns guias de onda, se comparado com o acoplamento constante, para um estado inicial de Fock.

Figura 4.12 – Fidelidade entre os guias i e j, $F_{i,j}(z)$, na distância z, em função da distância normalizada Jz, em um sistema com $N = 6$, cujo parâmetro de acoplamento é dado pela equação (4.48). (a) $F_{3,5}$, com o valor máximo de ≈ 0.999. (b) $F_{2,6}$, com o valor máximo de ≈ 0.999. (c) $F_{2,5}$, com o valor máximo de ≈ 0.911.



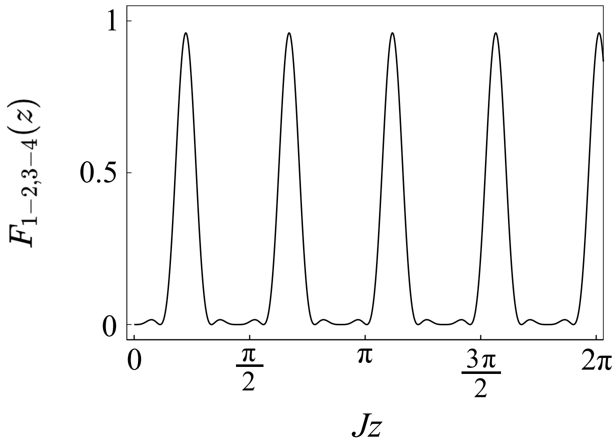
Fonte: Autor, 2024.

Estado $\mathcal{N}00\mathcal{N}$ de 2 fótons

Por fim, vamos analisar as fidelidades (equação 4.32), considerando um estado inicial igual ao da equação (4.29).

Para $N = 4$, a fidelidade $F_{1-2,3-4}$ máxima tem um alto valor de 0.963 (Figura 4.13). Porém, note que ao usar o acoplamento constante (Figura 4.8) [86], foi observado PST entre os guias 1-2 e 3-4 ($N = 4$), o que não foi possível de se obter ao considerar o acoplamento não constante (equação 4.48).

Figura 4.13 – Fidelidade em função da distância normalizada Jz, cujo parâmetro de acoplamento é dado pela equação (4.48), em um sistema com $N = 4$. O estado inicial entrelaçado é inserido nos guias 1 e 2; o estado é medido nos guias 3 e 4.

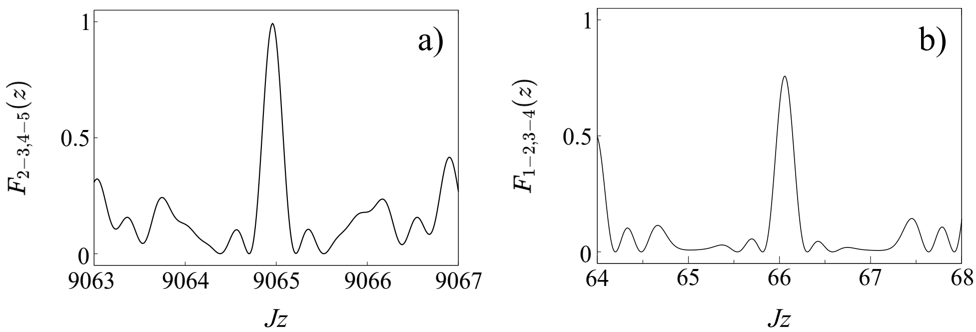


Fonte: Autor, 2024.

Agora, para $N = 5$, considerando um estado inicial nos guias 2 e 3 e o estado medido nos guias 4 e 5 (Figura 4.14 (a)), foi obtido um valor muito alto para a fidelidade, de aproximadamente 0.993. E um estado inicial nos guias 1 e 2, com a medição nos guias 3 e 4, com $N = 6$ (Figura 4.14 (b)), produz uma fidelidade máxima de 0.757.

Com esses resultados, podemos observar que o acoplamento não constante possui melhorias significativas, se comparado ao acoplamento constante. Dessa forma, o acoplamento dado pela equação (4.48) promove uma propagação de fótons com altíssimas fidelidades entre alguns guias de onda. Apesar disso, para o caso específico em que $N = 4$, com um estado $\mathcal{N}00\mathcal{N}$ de 2 fótons, o acoplamento constante é uma escolha mais vantajosa.

Figura 4.14 – Fidelidade em função da distância normalizada Jz, cujo parâmetro de acoplamento é dado pela equação (4.48). (a) Para $N = 5$, o estado inicial entrelaçado é inserido nos guias 2 e 3; o estado é medido nos guias 4 e 5. (b) Para $N = 6$, o estado inicial entrelaçado é inserido nos guias 1 e 2; o estado é medido nos guias 3 e 4.



Fonte: Autor, 2024.

5 CONCLUSÃO

A quantização do campo eletromagnético de modo único foi obtida a partir do modelo clássico e de uma analogia com o oscilador harmônico. Com isso, foram definidos os estados não clássicos da luz: o estado de Fock, o estado entrelaçado, o estado coerente e o estado comprimido, que trazem uma gama de aplicações nas áreas de metrologia, computação e informação quântica.

Além disso, foi visto que sistemas de guias de onda acoplados, se associados aos estados quânticos, são ferramentas muito poderosas para estudar caminhadas quânticas, localização de Anderson, geração de estados entrelaçados, oscilações de Bloch, entre vários outros fenômenos. O transporte fidedigno dos estados não clássicos é de interesse da computação quântica, portanto, medidas como a fidelidade tornam-se aliadas para identificar transferências perfeitas de estado (PST).

Nesse contexto, foram estudados três sistemas de guias de onda acoplados. A partir do primeiro modelo, com uma geometria linear, foi possível observar uma transferência perfeita do estado de Fock de 2 fótons do primeiro para o último guia, utilizando $N = 20$. Já o estado $\mathcal{N}00\mathcal{N}$ de 2 fótons, inserido no primeiro e segundo guias, foi perfeitamente transferido para os guias 19 e 20.

Por fim, utilizando um modelo com geometria circular, o acoplamento constante fornece uma transferência perfeita entre o primeiro e terceiro guias, em um sistema com exatamente quatro guias de onda. Além disso, o estado $\mathcal{N}00\mathcal{N}$ de 2 fótons é perfeitamente transferido dos guias 1 e 2 para os guias 3 e 4, quando há $N = 4$ guias de onda. As fidelidades entre os outros guias de onda são relativamente baixas. Em contrapartida, o acoplamento não constante, dado pela equação (4.48), além de fornecer uma transferência perfeita do estado de Fock de 1 fótons entre o primeiro e terceiro guias, para $N = 4$, fornece altíssimas fidelidades entre outros guias, para $N = 5$ e $N = 6$. Entretanto, para o estado $\mathcal{N}00\mathcal{N}$ de 2 fótons, não foi obtido uma transferência perfeita entre os guias de onda, o que mostra que, para esses estados, o acoplamento constante é mais benéfico.

Portanto, conclui-se que a geometria do sistema de guias de onda acoplados influencia na propagação dos estados quânticos da luz, sendo possível observar PST com diferentes configurações.

Referências

[1] Hans Christian Oersted. "Experiments on the effect of a current of electricity on the magnetic needle". Em: *Annals of Philosophy* 16.1820 (1820), pp. 273–276. DOI: 10.1515/9781400864850.417 (ver p. 10).

[2] Wikipedia. *Johann Schweigger — Wikipedia, The Free Encyclopedia*. http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Johann%20Schweigger&oldid=1228739699. [Online; accessed 02-November-2024]. 2024 (ver p. 10).

[3] Michael Faraday. "New electro-magnetic apparatus". Em: *Quarterly Journal of Science, Literature and the Arts* 12 (1821), pp. 186–187. URL: https://archive.org/details/quarterlyjournal12jour/page/186/mode/2up (ver p. 10).

[4] William Sturgeon et al. "No. III. Improved Electro-Magnetic Apparatus". Em: *Transactions of the Society, Instituted at London, for the Encouragement of Arts, Manufactures, and Commerce* 43 (1824), pp. 37–52. URL: https://www.jstor.org/stable/41325678 (ver p. 10).

[5] Michael Faraday. "V. Experimental researches in electricity". Em: *Philosophical transactions of the Royal Society of London* 122 (1832), pp. 125–162. URL: https://royalsocietypublishing.org/doi/epdf/10.1098/rstl.1832.0006 (ver p. 10).

[6] Wikipedia. *Carl Friedrich Gauss — Wikipedia, The Free Encyclopedia*. http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Carl%20Friedrich%20Gauss&oldid=1254751519. [Online; accessed 02-November-2024]. 2024 (ver p. 10).

[7] James Clerk Maxwell. "VIII. A dynamical theory of the electromagnetic field". Em: *Philosophical transactions of the Royal Society of London* 155 (1865), pp. 459–512. DOI: https://doi.org/10.1098/rstl.1865.0008 (ver p. 10).

[8] Kathy Joseph. *Quaternions to Vector Analysis - Kathy Loves Physics — kathylovesphysics.com*. https://kathylovesphysics.com/quaternions-to-vector-analysis. [Accessed 02-11-2024]. 2023 (ver p. 10).

[9] Max Planck. "On the theory of the energy distribution law of the normal spectrum". Em: *Verh. Deut. Phys. Ges* 2.237 (1900), pp. 237–245. URL: http://materias.df.uba.ar/f4ba2015c1/files/2012/08/papers-planck.pdf (ver p. 10).

[10] Gilbert N Lewis. "The conservation of photons". Em: *Nature* 118.2981 (1926), pp. 874–875. DOI: https://doi.org/10.1038/118874a0 (ver p. 10).

[11] Albert Einstein. "On a heuristic point of view concerning the production and transformation of light". Em: *Annalen der Physik* 17.132 (1905), pp. 1–16. DOI: https://doi.org/10.1515/9781400889167-052 (ver p. 10).

[12] Max Planck. *Scientific autobiography: And other papers*. Open Road Media, 2014, p. 41 (ver p. 11).

[13] *All Nobel Prizes in Physics — nobelprize.org*. https://www.nobelprize.org/prizes/lists/all-nobel-prizes-in-physics/1939-1930/. [Accessed 02-11-2024] (ver p. 11).

[14] Hendrick BG Casimir. "On the attraction between two perfectly conducting plates". Em: *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.* Vol. 51. 1948, p. 793 (ver p. 11).

[15] Willis E Lamb Jr e Robert C Retherford. "Fine structure of the hydrogen atom by a microwave method". Em: *Physical Review* 72.3 (1947), p. 241. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRev.72.241 (ver p. 11).

[16] Ji-Huan He, Dan Tian e Hans Hermann Otto. "Is the half-integer spin a first level approximation of the golden mean hierarchy?" Em: *Results in Physics* 11 (2018), pp. 362–363. DOI: https://doi.org/10.1016/j.rinp.2018.09.027 (ver p. 11).

[17] Ray LaPierre. *Getting Started in Quantum Optics*. Vol. 1. 7. Springer, 2022 (ver pp. 11, 18, 19).

[18] Brendon L Higgins et al. "Entanglement-free Heisenberg-limited phase estimation". Em: *Nature* 450.7168 (2007), pp. 393–396. DOI: https://doi.org/10.1038/nature06257 (ver p. 12).

[19] Yuan Liang Lim et al. "Repeat-until-success quantum computing using stationary and flying qubits". Em: *Physical Review A—Atomic, Molecular, and Optical Physics* 73.1 (2006), p. 012304. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevA.73.012304 (ver pp. 12, 24).

[20] Klaus M Gheri et al. "Photon-Wavepackets as Flying Quantum Bits". Em: *Fortschritte der Physik: Progress of Physics* 46.4-5 (1998), pp. 401–415. DOI: https://doi.org/10.1002/(SICI)1521-3978(199806)46:4/5%3C401::AID-PROP401%3E3.0.CO;2-W (ver pp. 12, 24).

[21] Sebastien Tanzilli et al. "A photonic quantum information interface". Em: *Nature* 437.7055 (2005), pp. 116–120. DOI: https://doi.org/10.1038/nature04009 (ver p. 12).

[22] Markus Gräfe e Alexander Szameit. "Integrated photonic quantum walks". Em: *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* 53.7 (2020), p. 073001. DOI: 10.1088/1361-6455/ab6cfc (ver p. 12).

[23] Alberto Politi et al. "Silica-on-silicon waveguide quantum circuits". Em: *Science* 320.5876 (2008), pp. 646–649. DOI: https://doi.org/10.1126/science.1155441 (ver pp. 12, 24).

[24] Paul Adrien Maurice Dirac. "The quantum theory of the emission and absorption of radiation". Em: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character* 114.767 (1927), pp. 243–265. DOI: https://doi.org/10.1098/rspa.1927.0039 (ver p. 13).

[25] L Mandel. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1995 (ver pp. 14, 16–18, 22).

[26] Christopher C Gerry e Peter L Knight. *Introductory quantum optics*. Cambridge university press, 2023 (ver p. 16).

[27] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu e Franck Laloë. *Quantum mechanics; 1st ed.* Trans. of : Mécanique quantique. Paris : Hermann, 1973. New York, NY: Wiley, 1977. URL: https://cds.cern.ch/record/101367 (ver p. 17).

[28] Chandra Roychoudhuri, Al F Kracklauer e Kathy Creath. *The nature of light: what is a photon?* CRC Press, 2017. URL: https://books.google.com/books?hl=pt-BR&lr=&id=Z6hWmaHZFigC&oi=fnd&pg=PP1&dq=Chandra+Roychoudhuri,+Al+F+Kracklauer+e+Kathy+Creath.+The+nature+of+light:+what+is+a+photon%3F+CRC+Press,+2017&ots=JJSOOA28W5&sig=UKQCon4V9q8thpY4KSITZEc8uDc (ver p. 18).

[29] Robert Bennett, Thomas M Barlow e Almut Beige. "A physically motivated quantization of the electromagnetic field". Em: *European Journal of Physics* 37.1 (2015), p. 014001. DOI: 10.1088/0143-0807/37/1/014001 (ver p. 19).

[30] Matthew D Eisaman et al. "Invited review article: Single-photon sources and detectors". Em: *Review of scientific instruments* 82.7 (2011). DOI: https://doi.org/10.1063/1.3610677 (ver p. 19).

[31] Johannes Tiedau et al. "Scalability of parametric down-conversion for generating higher-order Fock states". Em: *Physical Review A* 100.4 (2019), p. 041802. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevA.100.041802 (ver p. 19).

[32] Anne Broadbent e Christian Schaffner. "Quantum cryptography beyond quantum key distribution". Em: *Designs, Codes and Cryptography* 78 (2016), pp. 351–382. DOI: https://doi.org/10.1007/s10623-015-0157-4 (ver p. 21).

[33] Ray LaPierre. *Introduction to quantum computing*. Springer Nature, 2021 (ver p. 21).

[34] Inmetro. *Portaria n° 232, de 08 de maio de 2012*. http://inmetro.gov.br/legislacao/detalhe.asp?seq_classe=1&seq_ato=1826. [Accessed 05-11-2024]. 2012 (ver p. 21).

[35] T. B. Pittman et al. "Optical imaging by means of two-photon quantum entanglement". Em: *Phys. Rev. A* 52 (5 nov. de 1995), R3429–R3432. DOI: 10.1103/PhysRevA.52.R3429. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.52.R3429 (ver p. 21).

[36] Avshalom C Elitzur e Lev Vaidman. "Quantum mechanical interaction-free measurements". Em: *Foundations of physics* 23 (1993), pp. 987–997. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00736012 (ver p. 21).

[37] Andrew G White et al. ""Interaction-free" imaging". Em: *Physical Review A* 58.1 (1998), p. 605. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevA.58.605 (ver p. 21).

[38] Roy J Glauber. "Photon correlations". Em: *Physical Review Letters* 10.3 (1963), p. 84. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.10.84 (ver p. 22).

[39] Roy J Glauber. "Coherent and incoherent states of the radiation field". Em: *Physical Review* 131.6 (1963), p. 2766. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRev.131.2766 (ver p. 22).

[40] *The Nobel Prize in Physics 2005 — nobelprize.org*. https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2005/summary/. [Accessed 14-11-2024] (ver p. 22).

[41] Juan Miguel Arrazola e Norbert Lütkenhaus. "Quantum communication with coherent states and linear optics". Em: *Physical Review A* 90.4 (2014), p. 042335. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevA.90.042335 (ver p. 22).

[42] Wei-Min Zhang, Robert Gilmore et al. "Coherent states: Theory and some applications". Em: *Reviews of Modern Physics* 62.4 (1990), p. 867. DOI: https://doi.org/10.1103/RevModPhys.62.867 (ver p. 22).

[43] John R Klauder e Bo-Sture Skagerstam. *Coherent states: applications in physics and mathematical physics*. World scientific, 1985 (ver p. 22).

[44] James N Hollenhorst. "Quantum limits on resonant-mass gravitational-radiation detectors". Em: *Physical Review D* 19.6 (1979), p. 1669. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevD.19.1669 (ver p. 22).

[45] Junaid Aasi et al. "Enhanced sensitivity of the LIGO gravitational wave detector by using squeezed states of light". Em: *Nature Photonics* 7.8 (2013), pp. 613–619. DOI: https://doi.org/10.1038/nphoton.2013.177 (ver p. 22).

[46] *The Nobel Prize in Physics 2017 — nobelprize.org*. https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2017/summary/. [Accessed 07-11-2024] (ver p. 23).

[47] *The Nobel Prize in Physics 2017 — nobelprize.org*. https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2017/advanced-information/. [Accessed 07-11-2024] (ver p. 23).

[48] TE Northup e R Blatt. "Quantum information transfer using photons". Em: *Nature photonics* 8.5 (2014), pp. 356–363. DOI: https://doi.org/10.1038/nphoton.2014.53 (ver p. 24).

[49] Jeremy L O'brien, Akira Furusawa e Jelena Vučković. "Photonic quantum technologies". Em: *Nature Photonics* 3.12 (2009), pp. 687–695. DOI: https://doi.org/10.1038/nphoton.2009.229 (ver p. 24).

[50] Alberto Peruzzo et al. "A variational eigenvalue solver on a photonic quantum processor". Em: *Nature communications* 5.1 (2014), p. 4213. DOI: https://doi.org/10.1038/ncomms5213 (ver p. 24).

[51] Quentin A Turchette et al. “Measurement of conditional phase shifts for quantum logic”. Em: *Physical review letters* 75.25 (1995), p. 4710. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.75.4710 (ver p. 24).

[52] Emanuel Knill, Raymond Laflamme e Gerald J Milburn. “A scheme for efficient quantum computation with linear optics”. Em: *nature* 409.6816 (2001), pp. 46–52. DOI: https://doi.org/10.1038/35051009 (ver p. 24).

[53] Jianwei Wang et al. “Integrated photonic quantum technologies”. Em: *Nature Photonics* 14.5 (2020), pp. 273–284. DOI: https://doi.org/10.1038/s41566-019-0532-1 (ver pp. 24, 28).

[54] Fulvio Flamini, Nicolo Spagnolo e Fabio Sciarrino. “Photonic quantum information processing: a review”. Em: *Reports on Progress in Physics* 82.1 (2018), p. 016001. DOI: 10.1088/1361-6633/aad5b2 (ver p. 24).

[55] Andrea Melloni et al. “Design of curved waveguides: the matched bend”. Em: *JOSA A* 20.1 (2003), pp. 130–137. DOI: https://doi.org/10.1364/JOSAA.20.000130 (ver p. 24).

[56] Welm M Pätzold, Ayhan Demircan e Uwe Morgner. “Low-loss curved waveguides in polymers written with a femtosecond laser”. Em: *Optics express* 25.1 (2017), pp. 263–270. DOI: https://doi.org/10.1364/OE.25.000263 (ver p. 24).

[57] Shankar Kumar Selvaraja e Purnima Sethi. “Review on optical waveguides”. Em: *Emerging Waveguide Technology* 95 (2018), p. 458. URL: https://books.google.com/books?hl=pt-BR&lr=&id=H3eQDwAAQBAJ&oi=fnd&pg=PA95&dq=Review+on+optical+waveguides&ots=k55ejTAjXW&sig=pDW1Qb2KOTEvhorFE7G0nFe8xx0 (ver pp. 24, 25).

[58] Chris Rowe Taitt, George P Anderson e Frances S Ligler. “Evanescent wave fluorescence biosensors”. Em: *Biosensors and Bioelectronics* 20.12 (2005), pp. 2470–2487. DOI: https://doi.org/10.1016/j.bios.2004.10.026 (ver p. 25).

[59] Daniel Axelrod, Thomas P Burghardt e Nancy L Thompson. “Total internal reflection fluorescence”. Em: *Annual review of biophysics and bioengineering* 13.1 (1984), pp. 247–268. DOI: 10.1146/annurev.bb.13.060184.001335 (ver p. 25).

[60] Bahaa EA Saleh e Malvin Carl Teich. *Fundamentals of photonics*. john Wiley & sons, 2019 (ver pp. 25, 26).

[61] WK Lai, V Buek e PL Knight. “Nonclassical fields in a linear directional coupler”. Em: *Physical Review A* 43.11 (1991), p. 6323. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevA.43.6323 (ver p. 26).

[62] J Janszky et al. “Non-classical light in a linear coupler”. Em: *Journal of Modern Optics* 35.11 (1988), pp. 1757–1765. DOI: https://doi.org/10.1080/09500348814551931 (ver p. 26).

[63] M Bertolotti et al. “Quantum theory of nonlinear planar devices”. Em: *Nonlinear Waves in Solid State Physics* (1990), pp. 409–433. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4684-5898-5_13 (ver p. 26).

[64] Amit Rai, G. S. Agarwal e J. H. H. Perk. “Transport and quantum walk of nonclassical light in coupled waveguides”. Em: *Phys. Rev. A* 78 (4 out. de 2008), p. 042304. DOI: 10.1103/PhysRevA.78.042304. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.78.042304 (ver pp. 26, 28).

[65] Lee E Estes, Thomas H Keil e Lorenzo M Narducci. “Quantum-mechanical description of two coupled harmonic oscillators”. Em: *Physical Review* 175.1 (1968), p. 286. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRev.175.286 (ver p. 26).

[66] Richard Jozsa. “Fidelity for mixed quantum states”. Em: *Journal of modern optics* 41.12 (1994), pp. 2315–2323. DOI: https://doi.org/10.1080/09500349414552171 (ver p. 27).

[67] Alberto Peruzzo et al. “Quantum walks of correlated photons”. Em: *Science* 329.5998 (2010), pp. 1500–1503. DOI: https://doi.org/10.1126/science.1193515 (ver p. 28).

[68] Markus Gräfe et al. “Integrated photonic quantum walks”. Em: *Journal of Optics* 18.10 (2016), p. 103002. DOI: 10.1088/2040-8978/18/10/103002 (ver p. 28).

[69] Hagai B Perets et al. “Realization of quantum walks with negligible decoherence in waveguide lattices”. Em: *Physical review letters* 100.17 (2008), p. 170506. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.100.170506 (ver p. 28).

[70] Yoav Lahini et al. “Quantum correlations in two-particle Anderson localization”. Em: *Physical review letters* 105.16 (2010), p. 163905. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.105.163905 (ver p. 29).

[71] Yaron Bromberg et al. “Quantum and classical correlations in waveguide lattices”. Em: *Physical review letters* 102.25 (2009), p. 253904. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.102.253904 (ver pp. 29, 31).

[72] Yaron Bromberg, Yoav Lahini e Yaron Silberberg. “Bloch oscillations of path-entangled photons”. Em: *Physical review letters* 105.26 (2010), p. 263604. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.105.263604 (ver p. 29).

[73] Markus Gräfe et al. “On-chip generation of Einstein-Podolsky-Rosen states with arbitrary symmetry”. Em: *Applied Physics Letters* 106.18 (2015). DOI: https://doi.org/10.1063/1.4920934 (ver p. 29).

[74] Alastair Kay. “Perfect, efficient, state transfer and its application as a constructive tool”. Em: *International Journal of Quantum Information* 8.04 (2010), pp. 641–676. DOI: https://doi.org/10.1142/S0219749910006514 (ver p. 29).

[75] Armando Perez-Leija et al. "Perfect transfer of path-entangled photons in Jx photonic lattices". Em: *Physical Review A—Atomic, Molecular, and Optical Physics* 87.2 (2013), p. 022303. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevA.87.022303 (ver p. 29).

[76] BM Rodríguez-Lara. "Propagation of nonclassical states of light through one-dimensional photonic lattices". Em: *JOSA B* 31.4 (2014), pp. 878–881. DOI: https://doi.org/10.1364/JOSAB.31.000878 (ver p. 29).

[77] Matthieu Bellec, Georgios M Nikolopoulos e Stelios Tzortzakis. "Faithful communication Hamiltonian in photonic lattices". Em: *Optics letters* 37.21 (2012), pp. 4504–4506. DOI: https://doi.org/10.1364/OL.37.004504 (ver p. 29).

[78] Robert J Chapman et al. "Experimental perfect state transfer of an entangled photonic qubit". Em: *Nature communications* 7.1 (2016), p. 11339. DOI: https://doi.org/10.1038/ncomms11339 (ver p. 29).

[79] Guillermo F Peñas, Ricardo Puebla e Juan José García-Ripoll. "Multiplexed quantum state transfer in waveguides". Em: *Physical Review Research* 6.3 (2024), p. 033294. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.6.033294 (ver p. 29).

[80] Armando Perez-Leija et al. "Coherent quantum transport in photonic lattices". Em: *Physical Review A—Atomic, Molecular, and Optical Physics* 87.1 (2013), p. 012309. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevA.87.012309 (ver p. 29).

[81] Manoranjan Swain e Amit Rai. "Non-classical light in a J x photonic lattice". Em: *Journal of Optics* 23.3 (2021), p. 035202. DOI: 10.1088/2040-8986/abbaba (ver p. 30).

[82] Matthias Christandl et al. "Perfect state transfer in quantum spin networks". Em: *Physical review letters* 92.18 (2004), p. 187902. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.92.187902 (ver p. 30).

[83] Igor Beder. *Waveguides/LinearWaveguide.c at main · iBeder/Waveguides — github.com*. https://github.com/iBeder/Waveguides/blob/main/LinearWaveguide.c. [Accessed 13-11-2024] (ver p. 33).

[84] James O Owens et al. "Two-photon quantum walks in an elliptical direct-write waveguide array". Em: *New journal of Physics* 13.7 (2011), p. 075003. DOI: 10.1088/1367-2630/13/7/075003 (ver p. 37).

[85] Thomas Meany et al. "Non-classical interference in integrated 3D multiports". Em: *Optics express* 20.24 (2012), pp. 26895–26905. DOI: https://doi.org/10.1364/OE.20.026895 (ver p. 37).

[86] Atmadev Rai e Amit Rai. "Transfer of non-classical features and quantum states of light in circularly coupled waveguide arrays". Em: *Journal of Optics* 24.12 (2022), p. 125801. DOI: 10.1088/2040-8986/ac9915 (ver pp. 38, 41, 42, 44).

[87] I Beder e PA Brandão. “Quantum state transfer in a ring geometry of optical waveguides having nonuniform couplings”. Em: *Physics Letters A* 525 (2024), p. 129926. DOI: https://doi.org/10.1016/j.physleta.2024.129926 (ver p. 40).

Anexos

ANEXO A – Artigos Publicados

A.1 Quantum state transfer in a ring geometry of optical waveguides having nonuniform couplings

Physics Letters A 525 (2024) 129926

Contents lists available at ScienceDirect

Physics Letters A

journal homepage: www.elsevier.com/locate/pla

Letter

Quantum state transfer in a ring geometry of optical waveguides having nonuniform couplings

I. Beder, P.A. Brandão [*]

Instituto de Física, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, AL, Brazil

ARTICLE INFO

Communicated by M.G.A. Paris

Keywords:
Quantum state transfer
Waveguide arrays
Fidelity
Circular waveguides

ABSTRACT

The quantum state transfer of a system of N coupled waveguides in a ring geometry, where the last waveguide is coupled to the first one is considered. The coupling parameters are chosen not to be equal, but to vary according to the position of the waveguides. We examine the fidelity between different waveguides in order to check if it is possible to achieve a perfect state transfer (PST). We focused our analysis on the single-photon Fock state and the two-photon $\mathcal{N}00\mathcal{N}$ state. Very high values of fidelity ($> 95\%$) were found for both cases, but the PST was only observed for the single-photon Fock state.

1. Introduction

In the realm of integrated photonics, a primary objective is to conceptualize and fabricate devices with the ability to manipulate optical fields effectively [16]. This objective is accomplished through the integration of numerous optical components, which serve as the fundamental building blocks, including polarizers, beam splitters, and optical couplers. Among the experimentally available physical systems suited for such purposes, arrays of evanescently coupled waveguides appear to offer the most efficient and versatile approach to generating desired effects [32].

Regarding the quantum nature of light, the use of arrays of coupled waveguides persist as an exceptionally valuable platform for quantum information processing [33,15]. Some experimental applications involving the use of waveguides have been demonstrated, such as the implementation of two-photon quantum interference and a CNOT gate [25], a variational eigenvalue solver in quantum circuits [24], manipulation of multiphoton entanglement [18], generation, manipulation and analysis of two-qubit entangled states [30], quantum state transfer of polarization-encoded photons [6] and quantum key distributions [31], to cite a few.

Despite the advances made in manufacturing large-scale quantum photonic devices, progress in theoretical modeling remains equally crucial. Clear and precise definitions within quantum theory are essential for every physical measurement. Moreover, the position of each waveguide plays a crucial role, and employing numerical modeling before fabricating quantum structures is imperative. In this respect, theoretical models have been proposed to study quantum transport of squeezed states [26], quantum and classical correlations [3], Bloch oscillations of $\mathcal{N}00\mathcal{N}$ states [4], Anderson localization [14], transport in dissipative coupled waveguides [27,10,12], PST [23], Hong-Ou-Mandel effect [17] and many others.

More recently, the study of quantum transport properties of photons in circular waveguide arrangements has been considered. The possibility of perfect quantum state transfer of Fock, $\mathcal{N}00\mathcal{N}$ and squeezed states [28] and the generation of continuous variable entanglement [2] have been addressed. By introducing one extra waveguide at the center of these ring-type configurations, one is able to create the so-called W states, which are known to be very robust against losses [9,22]. Clearly, the ring configuration can take great advantages over the usual linear coupled array depending on the specific task pursued. It is important to note that this specific type of ring configuration can be experimentally created in laboratories [21,19].

The objective of this paper is to explore the possibility of a perfect quantum state transfer in a system composed of coupled waveguides in a ring configuration having nonuniform coupling coefficients. We adopt a specific model for the coupling coefficients and explore the transfer dynamics of Fock and $\mathcal{N}00\mathcal{N}$ states. Depending on the number of waveguides, analytic expressions can be found in closed form, which is very useful to grasp the general features of the evolution process. Section 2 is devoted to the presentation of the general theory, including Heisenberg and Schrödinger representations. In section 3 we present the results for the quantum state transfer of Fock and $\mathcal{N}00\mathcal{N}$ states and section 4 is devoted to the conclusions.

* Corresponding author.
E-mail address: paulo.brandao@fis.ufal.br (P.A. Brandão).

https://doi.org/10.1016/j.physleta.2024.129926
Received 13 June 2024; Received in revised form 19 September 2024; Accepted 20 September 2024
Available online 23 September 2024
0375-9601/

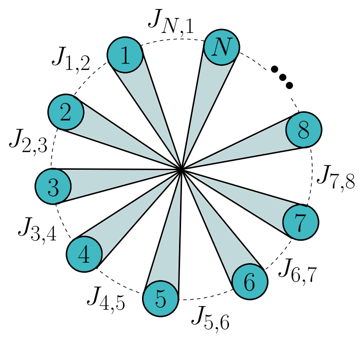


Fig. 1. Ring-shaped waveguide array with nonuniform coupling coefficients $J_{k,k+1}$.

2. Theory

Consider an array of single-mode optical waveguides that are coupled according to the geometry shown in Fig. 1. The Hamiltonian ($\hbar = 1$) in the interaction picture is given by

$$\hat{H} = \sum_{k=1}^{N-1} J_{k,k+1}\left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{k+1} + \hat{a}_{k+1}^\dagger \hat{a}_k\right) + J_{1,N}\left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_N + \hat{a}_N^\dagger \hat{a}_1\right), \tag{1}$$

where $\hat{a}_k$ ($\hat{a}_k^\dagger$) is the annihilation (creation) operator for waveguide k and $J_{k,k+1} = J_{k+1,k}$ is the coupling coefficient between waveguides k and $k+1$. The last term in (1) accounts for the coupling between the first and last waveguide. The Heisenberg equations of motion can be used to obtain the coupled mode equations for the modes $a_k^\dagger$,

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{a}_1^\dagger}{dz} &= i\left(J_{1,2}\hat{a}_2^\dagger + J_{1,N}\hat{a}_N^\dagger\right),\\
\frac{d\hat{a}_k^\dagger}{dz} &= i\left(J_{k-1,k}\hat{a}_{k-1}^\dagger + J_{k,k+1}\hat{a}_{k+1}^\dagger\right) \quad (k = 2, ..., N-1),\\
\frac{d\hat{a}_N^\dagger}{dz} &= i\left(J_{N-1,N}\hat{a}_{N-1}^\dagger + J_{N,1}\hat{a}_1^\dagger\right),
\end{aligned} \tag{2}$$

where z is the propagation distance [15].

The system of equations (2) can be rewritten as a matrix equation of the form $(d/dz)\vec{a} = i\mathbf{M}_N\vec{a}$, where $\vec{a} = [\hat{a}_1^\dagger \dots \hat{a}_N^\dagger]^T$ and $\mathbf{M}_N$ is constructed from the coefficients of Eq. (2). For example, in the case $N = 3$, we obtain

$$\mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} 0 & J_{1,2} & J_{1,3} \\ J_{1,2} & 0 & J_{2,3} \\ J_{1,3} & J_{2,3} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

and so on. The solution of the system of equations can formally be written as $\vec{a}(z) = e^{i\mathbf{M}_N z}\vec{a}(0)$ or, in component form,

$$\hat{a}_k^\dagger(z) = \sum_{p=1}^{N} A_{kp}(z)\hat{a}_p^\dagger(0), \tag{4}$$

where $A_{kp}(z) = [e^{i\mathbf{M}_N z}]_{kp}$, which can be obtained by diagonalization of the matrix $\mathbf{M}_N$. All the dynamical quantum properties of this system can be expressed in terms of the matrix elements $A_{kp}(z)$.

It is also instructive to consider the Schrödinger representation. Suppose the initial state is expanded in the basis of Fock states,

$$\begin{aligned}
|\psi(0)\rangle &= \sum_{n_1 \dots n_N} c_{n_1 \dots n_N} |n_1 \dots n_N\rangle \\
&= \sum_{n_1 \dots n_N} \frac{c_{n_1 \dots n_N}}{\left(n_1! \dots n_N!\right)^{1/2}} (\hat{a}_1^\dagger)^{n_1} \dots (\hat{a}_N^\dagger)^{n_N} |0\rangle,
\end{aligned} \tag{5}$$

where $|c_{n_1 \dots n_N}|^2$ gives the probability of finding n_1 photons in waveguide 1, n_2 photons in waveguide 2, etc, and $\sum_{n_1 \dots n_N} |c_{n_1 \dots n_N}|^2 = 1$ such that the initial state is normalized. The evolved quantum state $|\psi(z)\rangle$ is given by

$$\begin{aligned}
|\psi(z)\rangle &= \hat{U}(z)|\psi(0)\rangle \\
&= \sum_{n_1 \dots n_N} \frac{c_{n_1 \dots n_N}}{\left(n_1! \dots n_N!\right)^{1/2}} \hat{U}(z)(\hat{a}_1^\dagger)^{n_1} \dots (\hat{a}_N^\dagger)^{n_N} |0\rangle \\
&= \sum_{n_1 \dots n_N} \frac{c_{n_1 \dots n_N}}{\left(n_1! \dots n_N!\right)^{1/2}} \left[\hat{a}_1^\dagger(-z)\right]^{n_1} \dots \left[\hat{a}_N^\dagger(-z)\right]^{n_N} |0\rangle,
\end{aligned} \tag{6}$$

where $\hat{U}(z) = e^{-i\hat{H}z}$ is the evolution operator and the identities $\hat{b}(z) = \hat{U}^\dagger(z)\hat{b}(0)\hat{U}(z)$ and $\hat{U}(z)|0\rangle = |0\rangle$ were used. After substitution of Eq. (4) into the last line of Eq. (6), the evolved ket can be calculated for any initial state $|\psi(0)\rangle$. This shows explicitly that the quantum dynamics depends on the initial configuration, determined by $c_{n_1 \dots n_N}$, and the matrix elements $A_{kp}(z)$, as mentioned above.

There are numerous possibilities for the choices of the coupling coefficients $J_{k,k+1}$. Inspired by previous models, we consider the following formula [23,5]

$$J_{k,k+1} = J\sqrt{k(N-k+1)} \quad \left(J_{N,N+1} = J_{N,1} = J\sqrt{N}\right), \tag{7}$$

where J is a positive constant. Since our interest is in the study of perfect quantum state transfer, we characterize the state dynamics by using the fidelity $F(z)$ of the evolved state. This means that if $|\Phi\rangle$ is the state we ought to observe at the output of the waveguides, $F(z) = |\langle\Phi|\psi(z)\rangle|^2$ must be equal to one in order for a PST to occur.

3. Results

The theory developed in section 2 is applied in this section to explore the possibility of obtaining a PST between coupled waveguides for two types of input states. Section 3.1 focuses on the fidelity of single photons incident at specific waveguides and section 3.2 discusses the fidelity for the $\mathcal{N}00\mathcal{N}$ state.

3.1. Fidelity for single photons

Suppose the input state is prepared such that $c_{n_1 \dots n_N} = \delta_{n_1,0} \dots \delta_{n_q,1} \dots \delta_{n_N,0}$, that is, only one photon is present at waveguide q. In this case, Eq. (6) returns

$$\begin{aligned}
|\psi(z)\rangle &= \hat{a}_q^\dagger(-z)|0\rangle \\
&= \sum_{p=1}^{N} A_{qp}(-z)\hat{a}_p^\dagger(0)|0\rangle.
\end{aligned} \tag{8}$$

The fidelity of finding again one single photon at waveguide r at distance z is thus $F_{qr}(z) = |A_{qr}(-z)|^2$. Consider the simplest case of $N = 2$ coupled waveguides. In this situation,

$$e^{i\mathbf{M}_2 z} = \begin{pmatrix} \cos(J_{1,2}z) & -i\sin(J_{1,2}z) \\ -i\sin(J_{1,2}z) & \cos(J_{1,2}z) \end{pmatrix} \tag{9}$$

and the fidelity of finding the photon at waveguide 2 if it started at waveguide 1 is given by $F_{1,2}(z) = \sin^2(J_{1,2}z)$. Notice that in this case, the dynamics is reminiscent of a 2D rotation. Thus, there is PST at distances $z_n = n\pi/2J_{1,2}$ with odd n.

The case with $N = 3$ already displays a rich dynamics. Atmadev Rai and Amit Rai have demonstrated that no PST can occur if all coupling coefficients are equal [28]. By considering the model described by Eq. (7), the coupling coefficients between waveguide 1 and waveguides 2 and 3 are both equal to $J_{1,2} = J_{1,3} = J\sqrt{3}$ and the coupling between waveguides 2 and 3 is given by $J_{2,3} = 2J$. The quantities $F_{qr}(z) = F_{rq}(z)$, describing the fidelities of finding a photon at waveguide r when one photon is incident in the waveguide $q \neq r$ are given by

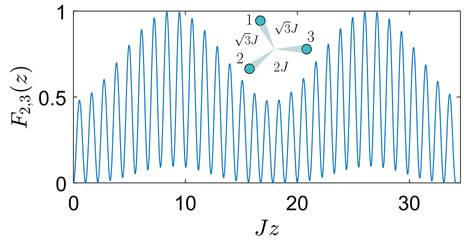


Fig. 2. Fidelity $F_{2,3}(z)$ as a function of Jz of finding one photon at waveguide 3 starting with one photon at waveguide 2 (or vice-versa). The maximum value of $F_{2,3}(z)$ is approximately 0.9969.

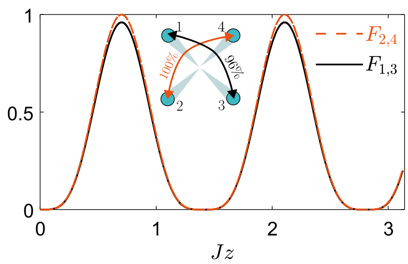


Fig. 3. Fidelity for $N = 4$ coupled waveguides. A PST was observed between waveguides 2 and 4 and a quantum state transfer between waveguides 1 and 3 with high fidelity ($\sim 96\%$).

$$
\begin{aligned}
F_{1,2}(z) &= \frac{3}{7}\sin^2\left(\sqrt{7}Jz\right),\\
F_{1,3}(z) &= F_{1,2},\\
F_{2,3}(z) &= \frac{1}{28}\left\{ 11 + 3\cos\left(2\sqrt{7}Jz\right) + (\sqrt{7}-7)\cos\left[\left(\sqrt{7}-3\right)Jz\right]\right.\\
&\quad \left. -\left(\sqrt{7}+7\right)\cos\left[\left(\sqrt{7}+3\right)Jz\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{10}
$$

Several interesting results follow from the set of equations (10). For the case where the incident photon is localized in waveguide 1, there can be no PST to waveguides 2 and 3. The maximum value of the fidelity in this case being $\max(F_{1,k}) = 3/7$ for $k = 2$ and 3. However, if the incident photon is initially coupled to waveguide 2 or 3, numerical analysis reveals that the fidelity F_{23} reaches the maximum value of 0.9969. Fig. 2 displays the plot of $F_{2,3}$ as a function of Jz. Thus, high values of the fidelity between waveguides 2 and 3 can occur in three waveguides having nonuniform coupling coefficients.

Let us now turn to the situation with $N = 4$ coupled waveguides. The fidelities F_{qr} for $q \neq r$ are now given by $F_{1,2}(z) = \frac{1}{5}\sin^2(2\sqrt{5}Jz)$, $F_{1,3}(z) = \frac{24}{25}\sin^4(\sqrt{5}Jz)$, $F_{1,4}(z) = F_{1,2}(z)$, $F_{2,3}(z) = \frac{3}{10}\sin^2(2\sqrt{5}Jz)$, $F_{2,4}(z) = \sin^4(\sqrt{5}Jz)$ and $F_{3,4}(z) = F_{2,3}(z)$. High fidelities are achieved for quantum state transfer between waveguides $1 \longleftrightarrow 3$ and $2 \longleftrightarrow 4$, as shown in Fig. 3. There is a PST between waveguides 2 and 4 and a quantum state transfer between waveguides 1 and 3 with high fidelity (96%) at propagation distances $z_n = n\pi/\sqrt{5}J$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Considering five coupled waveguides ($N = 5$), the authors in [28] have demonstrated the impossibility of achieving PST using uniform coupling coefficients. They found a maximum value of 0.41 for the fidelity. Fig. 4 illustrates the fidelity $F_{qr}(z)$ for single photons in $N = 5$ waveguides having nonuniform couplings. The highest fidelity values were observed between waveguides $2 \leftrightarrow 5$ and $3 \leftrightarrow 4$. At $Jz = 2440.41$, $F_{2,5} = 0.99799418$ and $F_{3,4} = 0.99570868$ were obtained. The maximum fidelity value within the interval $Jz = 0$ to $Jz = 2500$ was not attained, thus indicating the absence of PST for this model.

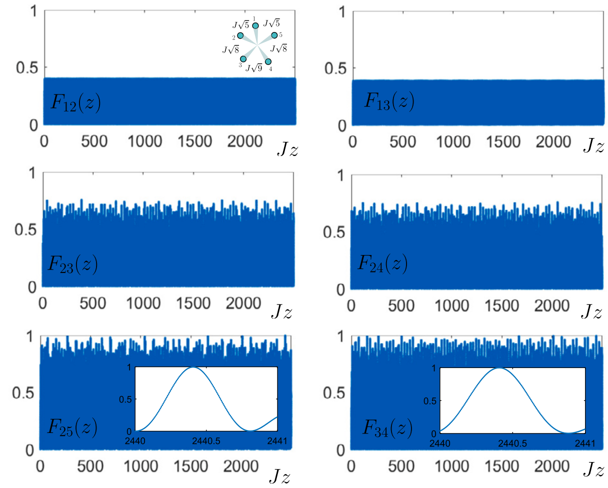


Fig. 4. Fidelity for $F_{1,2}(z) = F_{1,5}(z)$, $F_{1,3}(z) = F_{1,4}(z)$, $F_{2,3}(z) = F_{4,5}(z)$, $F_{2,4}(z) = F_{3,5}(z)$, $F_{2,5}(z)$ and $F_{3,4}(z)$ in a system consisting of $N = 5$ coupled waveguides.

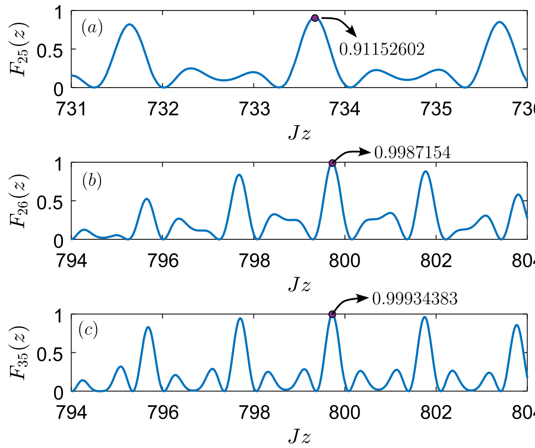


Fig. 5. Fidelity for (a) $F_{2,5}(z)$, (b) $F_{2,6}(z)$ and (c) $F_{3,5}(z)$ in a system consisting of $N = 6$ coupled waveguides. The largest value found was 0.99934383 for the quantum state transfer between waveguides $3 \leftrightarrow 5$.

In a ring configuration having $N = 6$ waveguides with uniform couplings, it is impossible to achieve a high fidelity in quantum state transfer [28]. Fig. 5 demonstrates that high-fidelity values can be found in the ring configuration with nonuniform couplings.

3.2. Fidelity for $\mathcal{N}00\mathcal{N}$ states

The class of quantum states referred to as $\mathcal{N}00\mathcal{N}$ states has proven exceptionally useful in various quantum tasks [8]. These states find significant applications in quantum metrology and sensing, showcasing their ability to surpass the shot-noise limit [29,13]. Experimental validation of $\mathcal{N}00\mathcal{N}$ states across a spectrum of low values of $\mathcal{N}$ has been reported [7,20,11], alongside instances where high values are achieved [1].

The $\mathcal{N}00\mathcal{N}$ states involving two pairs of entangled photons are considered as input to the waveguide system in this section. The initial state is given by

$$
|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|2_r\rangle + |2_s\rangle \right), \tag{11}
$$

where $|2_q\rangle$ indicates two photons in waveguide q. In terms of the expansion coefficients of Eq. (5), $c_{n_1\ldots n_N} = (\delta_{n_r,2_r} + \delta_{n_s,2_s})/\sqrt{2}$. We explore the possibility of a PST between the initial $|\psi(0)\rangle$ and the final state

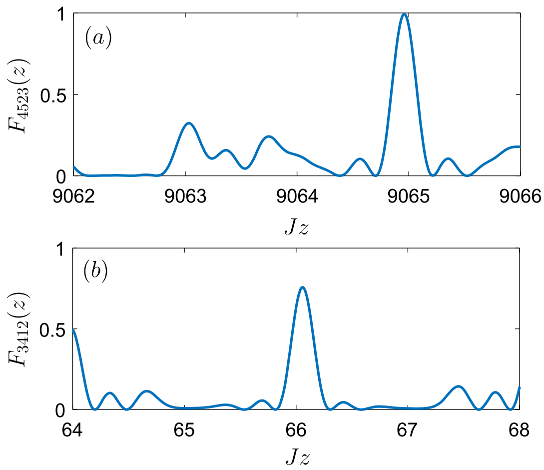


Fig. 6. Fidelity for $\mathcal{N}00\mathcal{N}$ states with (a) $N = 5$ and (b) $N = 6$ waveguides. There is an almost PST ($\max F_{4523} = 0.99279741$) between waveguides $\{2,3\} \to \{4,5\}$ for $N = 5$ waveguides. The maximum value obtained for F_{3412} is 0.75747391.

$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2_p\rangle + |2_q\rangle)$. The fidelity $F_{pqrs}(z) = |\langle\Phi|\psi(z)\rangle|^2$, which represents the probability of finding the entangled state at waveguides p and q after they originated from waveguides r and s, is expressed as

$$F_{pqrs}(z) = \frac{1}{4}\left[A_{rq}^2(-z) + A_{sq}^2(-z) + A_{rp}^2(-z) + A_{sp}^2(-z)\right]^2, \tag{12}$$

which can be obtained directly from Eq. (6) after taking the inner product with $\langle\Phi|$.

Consider $N = 4$ waveguides. If the initial state (11) is chosen with $r = 1$ and $s = 2$, it is easy to demonstrate that the fidelity for finding the same state distributed between waveguides $p = 3$ and $q = 4$ is given by

$$F_{3412}(z) = \frac{\left[1 + 99\cos\left(2\sqrt{5}Jz\right)\right]^2 \sin^4\left(\sqrt{5}Jz\right)}{10000}. \tag{13}$$

Numerical analysis reveals that the maximum value of $F_{3412}(z)$ is $2401/2500 \approx 0.9603$ (the value $F_{3412} = 0.9603$ appears first at $Jz = 0.702$). We point out that in the case of uniform coupling coefficients, the fidelity for this case can reach the maximum value of 1 with a period of π, in units of J [28]. If the incident photons are coupled to waveguides $r = 1$ and $s = 3$, the fidelity of finding the same state distributed between waveguides $p = 2$ and $q = 4$ is given by $F_{2413} = \frac{1}{4}\sin^4(2\sqrt{5}Jz)$, which can be less or equal to $1/4$. We notice that, for this specific case of $N = 4$ coupled waveguides only, the constant coupling configuration seems to be more advantageous to use when compared to the coupling given by Eq. (7).

For $N = 5$ and $N = 6$ waveguides with uniform coupling, the fidelities remained below $\frac{1}{2}$ as reported by [28]. Fig. 6 demonstrates that large values of fidelity can be achieved by using arrays with nonuniform couplings. Particularly, $F_{4523} = 0.99279741$ for state transfer between waveguides $\{2,3\} \to \{4,5\}$ with a total of $N = 5$ waveguides. Various sets of initial states were analyzed, but they did not show any significant improvements over the results displayed in Fig. 6.

A few clarifications are needed regarding the scales of the horizontal axes used in Figs. 2, 4, 5, and 6. When plotting a periodic function $f(z) = f(z + z_P)$, with period z_P, it is visually simpler to consider only a few multiples of z_P on the horizontal axis to observe the general behavior of the function, as demonstrated in Fig. 3, for example. However, the remaining plots involve quasiperiodic functions, such as $F_{2,3}$ in Eq. (10) and Eq. (13). For cases with $N \geq 5$, the periodicity is unknown due to the lack of analytical solutions. Numerically identifying the periodic (or quasiperiodic) nature of a data set is quite challenging. Therefore, we chose large scales to ensure no abrupt behavior occurred and analyzed the fidelities over a finite range of Jz values.

4. Conclusions

Our results illustrate that significant progress in quantum state transfer can be achieved by considering nonuniform couplings between the waveguides. Naturally, there are infinitely many ways to couple them. An alternative strategy involves adopting a method where the coupling coefficients remain unknown in the analysis, and one selects them to achieve the desired effect [22]. However, as the number of waveguides increases, this approach becomes cumbersome since it involves dealing with a large number of related coupling coefficients that must be determined. It is more suitable to have a predetermined model constructed to apply to all cases of interest. However, accomplishing this is not an easy task. We study only one particular model that may be useful in some circumstances but not in others.

In conclusion, our investigation into nonuniform coupling has shown that perfect and nearly perfect quantum state transfer can indeed be achieved within a ring geometry for both Fock and $\mathcal{N}00\mathcal{N}$ input states. Furthermore, this system can be enhanced through the consideration of various input states, including squeezed, coherent, and any superposition thereof. This suggests promising avenues for further engineering and exploration within this framework.

CRediT authorship contribution statement

I. Beder: Writing – review & editing, Investigation, Formal analysis, Conceptualization. **P.A. Brandão:** Writing – original draft, Methodology, Investigation, Formal analysis, Conceptualization.

Declaration of competing interest

The authors declare that they have no known competing financial interests or personal relationships that could have appeared to influence the work reported in this paper.

Data availability

All data that support the findings of this study are included within the article.

Acknowledgements

The authors would like to acknowledge the financial support of Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) and Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Alagoas (FAPEAL).

References

[1] I. Afek, O. Ambar, Y. Silberberg, High-noon states by mixing quantum and classical light, Science 328 (2010) 879–881.
[2] T. Anuradha, A. Rai, Bipartite and tripartite continuous variable entanglement in a circular array of coupled optical waveguides, J. Opt. 25 (2023) 095801.
[3] Y. Bromberg, Y. Lahini, R. Morandotti, Y. Silberberg, Quantum and classical correlations in waveguide lattices, Phys. Rev. Lett. 102 (2009) 253904.
[4] Y. Bromberg, Y. Lahini, Y. Silberberg, Bloch oscillations of path-entangled photons, Phys. Rev. Lett. 105 (2010) 263604.
[5] M. Christandl, N. Datta, A. Ekert, A.J. Landahl, Perfect state transfer in quantum spin networks, Phys. Rev. Lett. 92 (2004) 187902.
[6] G. Corrielli, A. Crespi, R. Geremia, R. Ramponi, L. Sansoni, A. Santinelli, P. Mataloni, F. Sciarrino, R. Osellame, Rotated waveplates in integrated waveguide optics, Nat. Commun. 5 (2014) 4249.
[7] M. D'Angelo, M.V. Chekhova, Y. Shih, Two-photon diffraction and quantum lithography, Phys. Rev. Lett. 87 (2001) 013602.
[8] J.P. Dowling, Quantum optical metrology–the lowdown on high-n00n states, Contemp. Phys. 49 (2008) 125–143.
[9] W. Dür, G. Vidal, J.I. Cirac, Three qubits can be entangled in two inequivalent ways, Phys. Rev. A 62 (2000) 062314.
[10] M. Gräfe, R. Heilmann, R. Keil, T. Eichelkraut, M. Heinrich, S. Nolte, A. Szameit, Correlations of indistinguishable particles in non-Hermitian lattices, New J. Phys. 15 (2013) 033008.
[11] H. Kim, H.S. Park, S.K. Choi, Three-photon n00n states generated by photon subtraction from double photon pairs, Opt. Express 17 (2009) 19720–19726.

[12] F. Klauck, L. Teuber, M. Ornigotti, M. Heinrich, S. Scheel, A. Szameit, Observation of pt-symmetric quantum interference, Nat. Photonics 13 (2019) 883–887.

[13] P. Kok, H. Lee, J.P. Dowling, Creation of large-photon-number path entanglement conditioned on photodetection, Phys. Rev. A 65 (2002) 052104, https://doi.org/10.1103/PhysRevA.65.052104, https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.65.052104.

[14] Y. Lahini, Y. Bromberg, D.N. Christodoulides, Y. Silberberg, Quantum correlations in two-particle Anderson localization, Phys. Rev. Lett. 105 (2010) 163905.

[15] W. Lai, V. Buek, P. Knight, Nonclassical fields in a linear directional coupler, Phys. Rev. A 43 (1991) 6323.

[16] G. Lifante, Integrated Photonics: Fundamentals, John Wiley & Sons, 2003.

[17] S. Mährlein, J. Von Zanthier, G.S. Agarwal, Complete three photon Hong-Ou-Mandel interference at a three port device, Opt. Express 23 (2015) 15833–15847.

[18] J.C. Matthews, A. Politi, A. Stefanov, J.L. O'brien, Manipulation of multiphoton entanglement in waveguide quantum circuits, Nat. Photonics 3 (2009) 346–350.

[19] T. Meany, M. Delanty, S. Gross, G.D. Marshall, M. Steel, M.J. Withford, Non-classical interference in integrated 3d multiports, Opt. Express 20 (2012) 26895–26905.

[20] M.W. Mitchell, J.S. Lundeen, A.M. Steinberg, Super-resolving phase measurements with a multiphoton entangled state, Nature 429 (2004) 161–164.

[21] J.O. Owens, M.A. Broome, D.N. Biggerstaff, M.E. Goggin, A. Fedrizzi, T. Linjordet, M. Ams, G.D. Marshall, J. Twamley, M.J. Withford, et al., Two-photon quantum walks in an elliptical direct-write waveguide array, New J. Phys. 13 (2011) 075003.

[22] A. Perez-Leija, J. Hernandez-Herrejon, H. Moya-Cessa, A. Szameit, D.N. Christodoulides, Generating photon-encoded w states in multiport waveguide-array systems, Phys. Rev. A 87 (2013) 013842.

[23] A. Perez-Leija, R. Keil, H. Moya-Cessa, A. Szameit, D.N. Christodoulides, Perfect transfer of path-entangled photons in j_x photonic lattices, Phys. Rev. A 87 (2013) 022303.

[24] A. Peruzzo, J. McClean, P. Shadbolt, M.H. Yung, X.Q. Zhou, P.J. Love, A. Aspuru-Guzik, J.L. O'brien, A variational eigenvalue solver on a photonic quantum processor, Nat. Commun. 5 (2014) 4213.

[25] A. Politi, M.J. Cryan, J.G. Rarity, S. Yu, J.L. O'brien, Silica-on-silicon waveguide quantum circuits, Science 320 (2008) 646–649.

[26] A. Rai, G.S. Agarwal, J.H. Perk, Transport and quantum walk of nonclassical light in coupled waveguides, Phys. Rev. A 78 (2008) 042304.

[27] A. Rai, S. Das, G. Agarwal, Quantum entanglement in coupled lossy waveguides, Opt. Express 18 (2010) 6241–6254.

[28] A. Rai, A. Rai, Transfer of non-classical features and quantum states of light in circularly coupled waveguide arrays, J. Opt. 24 (2022) 125801.

[29] B.C. Sanders, Quantum dynamics of the nonlinear rotator and the effects of continual spin measurement, Phys. Rev. A 40 (1989) 2417.

[30] R. Santagati, J.W. Silverstone, M. Strain, M. Sorel, S. Miki, T. Yamashita, M. Fujiwara, M. Sasaki, H. Terai, M.G. Tanner, et al., Silicon photonic processor of two-qubit entangling quantum logic, J. Opt. 19 (2017) 114006.

[31] S. Tanzilli, W. Tittel, H. De Riedmatten, H. Zbinden, P. Baldi, M. DeMicheli, D.B. Ostrowsky, N. Gisin, Ppln waveguide for quantum communication, Eur. Phys. J. D 18 (2002) 155–160.

[32] P. Tien, Integrated optics and new wave phenomena in optical waveguides, Rev. Mod. Phys. 49 (1977) 361.

[33] J. Wang, F. Sciarrino, A. Laing, M.G. Thompson, Integrated photonic quantum technologies, Nat. Photonics 14 (2020) 273–284.

A.2 Quantum theory of loss-induced transparency in coupled waveguides

Quantum theory of loss-induced transparency in coupled waveguides

I. Beder and P. A. Brandão*
Instituto de Física, Universidade Federal de Alagoas, Maceió 57072-900, Brazil

(Received 21 May 2024; accepted 21 August 2024; published 3 September 2024)

Several years ago, Guo *et al.* [Phys. Rev. Lett. **103**, 093902 (2009)] demonstrated a counterintuitive phenomenon wherein the transmission of classical light through a coupled pair of waveguides is enhanced as the level of loss in one waveguide surpasses a critical threshold. In this paper, we employ the Heisenberg-Langevin formalism to explore a quantum perspective of this phenomenon. In the case where light is incident in both waveguides, a generally nonzero interference term in the presence of loss appears. Our analysis reveals that loss-induced transparency can manifest at the single-photon level for both separable and entangled photonic states.

DOI: 10.1103/PhysRevA.110.033503

I. INTRODUCTION

The seminal work of Bender and Boettcher suggesting that non-Hermitian Hamiltonians having parity-time (PT) symmetry could have real-valued spectra has initiated an intense debate regarding possible descriptions of open quantum systems [1–4]. The main characteristics of PT-symmetric physical models is that they possess an equilibrium between loss and gain and they highlight in a very clear way the role of exceptional points [5]. In general, for a Hamiltonian that depends on some parameter, say ε, there is a critical value ε_c such that for $\varepsilon > \varepsilon_c$ all eigenvalues are real valued and for $\varepsilon < \varepsilon_c$ they become complex conjugate of each other [6,7]. By introducing a new definition for the inner product between PT-symmetric states, it has been demonstrated that it is possible to retain all the essential characteristics of quantum theory in a consistent framework [8,9].

The concept of open systems achieving equilibrium between gain and loss has found applications in several contexts such as in acoustics [10], optomechanics [11], phase transitions [12], and sensors [13], to cite a few. Notably, in the realm of classical photonic systems, intriguing effects have been reported [14–16]. Optics serves as a convenient platform for exploring PT symmetry largely due to the relative ease of creating dielectric materials with desired dissipative optical properties [17,18]. The pioneering experimental demonstration of a non-Hermitian optical system involved a coupled pair of single-mode waveguides, with a dissipative element (chromium atoms) introduced into one of the waveguides to account for losses [19]. By measuring the transmitted intensities in both waveguides, the authors noted an increase in transmission as the width of the chromium layer passed through a critical value. This counterintuitive phenomenon is commonly referred to as loss-induced transparency.

In the realm of integrated optics, the utilization of arrays of coupled waveguides represents the most promising platform for both classical and quantum photonics applications [20,21]. These arrays are relatively easy to fabricate and enable a description of light propagation (both classical and quantum) analogous to the dynamics of electrons in discrete lattices [22,23]. This analogy has prompted a plethora of classical analog effects that manifest in quantum systems [17]. In fact, the very first experimental demonstration of a truly PT-symmetric optical system was achieved using a pair of coupled waveguides and a two-wave mixing process to attain gain [24].

Recent studies have delved into quantum effects within non-Hermitian optical systems. Utilizing single-photon states, researchers have measured coincidence counts in a pair of coupled waveguides, thereby observing the non-Hermitian version of the Hong-Ou-Mandel dip [25]. The role of loss has been explored in a pair of quantum qubits [26], in arrays of coupled waveguides [23,27–29], in systems displaying high-order exceptional points [30], in anti-parity-time symmetric coupled waveguides [31], and disordered lattices [32].

Drawing inspiration from the counterintuitive phenomenon of loss-induced transparency and the quantum model explaining light propagation in interconnected waveguides, we address the potential for enhancing transmission through the utilization of quantum light states. Specifically, we compute the transmission coefficient for a pair of coupled waveguides incorporating a lossy element. Our analysis reveals that the overall transmission is influenced not solely by the initial number of photons entering each waveguide but also by the nonseparability characteristics of the incoming quantum state. We would like to point out that the formalism developed here is based entirely on conventional quantum mechanics with Hermitian Hamiltonians. The introduction of a dissipative system, consisting of one large waveguide (or several waveguides) generates the effective loss that simulates the PT-symmetric system under consideration [33].

Section II is devoted to a discussion of the Heisenberg-Langevin formalism applied to the coupled waveguide system and Sec. III defines the transmission coefficient and highlights the presence of a loss-induced interference term. Several examples involving entangled and separable states are given in Sec. IV and in Sec. V we present our conclusions.

*Contact author: paulo.brandao@fis.ufal.br

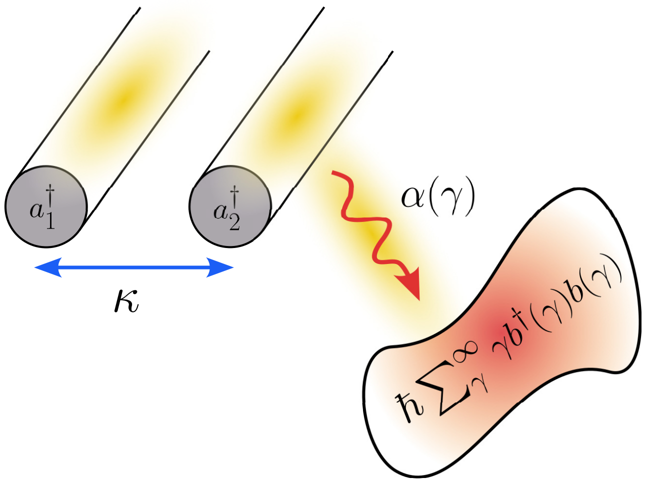


FIG. 1. Two coupled waveguides are represented by creation operators $a_1^\dagger$ and $a_2^\dagger$, featuring a coupling constant κ. The waveguide $a_2^\dagger$ interacts with a reservoir $b^\dagger(\gamma)$, characterized by frequencies γ, through the coupling constant $\alpha(\gamma)$ at each frequency.

II. HEISENBERG-LANGEVIN EQUATIONS

The coupled waveguide system is described by the total Hamiltonian $H = H_0 + H'$, where

$$H_0 = \hbar\beta\sum_{j=1}^{2} a_j^\dagger a_j + \hbar\sum_{\gamma}^{\infty}\gamma b^\dagger(\gamma)b(\gamma) \tag{1}$$

and

$$H' = \hbar\kappa(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1) + \hbar\sum_{\gamma}^{\infty}\alpha(\gamma)[a_2^\dagger b(\gamma) + a_2 b^\dagger(\gamma)]. \tag{2}$$

The Hamiltonian H describes two coupled waveguides, represented by the operators a_1 and a_2, where the second waveguide is coupled to a reservoir [it could be another large waveguide, whose annihilation operator is $b(\gamma)$, having several frequencies γ]. The parameter $\alpha(\gamma)$ characterizes the interaction between waveguide 2 and the mode γ of the reservoir, and the parameter κ describes the interaction between the two waveguides (see Fig. 1) with frequency β.

In the Heisenberg picture, the operators $a_j^\dagger(z)$ and $b^\dagger(\gamma, z)$ satisfy the following set of coupled differential equations:

$$\frac{da_1^\dagger}{dz} = i\beta a_1^\dagger + i\kappa a_2^\dagger, \tag{3}$$

$$\frac{da_2^\dagger}{dz} = i\beta a_2^\dagger + i\kappa a_1^\dagger + i\sum_{\gamma}\alpha(\gamma)b^\dagger(\gamma), \tag{4}$$

$$\frac{db^\dagger(\gamma)}{dz} = i\gamma b^\dagger(\gamma) + i\alpha(\gamma)a_2^\dagger. \tag{5}$$

After transforming Eq. (5) to an integral relation and substituting the result into Eq. (4), we obtain

$$\frac{da_2^\dagger}{dz} = i\beta a_2^\dagger + i\kappa a_1^\dagger + i\sum_{\gamma}\alpha(\gamma)b^\dagger(\gamma,0)e^{i\gamma z} - \sum_{\gamma}[\alpha(\gamma)]^2\int_0^z e^{i\gamma(z-s)}a_2^\dagger(s)\,ds. \tag{6}$$

The last term in the above expression can be written as

$$\begin{aligned}
&\sum_{\gamma}[\alpha(\gamma)]^2\int_0^z e^{i\gamma(z-s)}a_2^\dagger(s)ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\rho(\gamma)[\alpha(\gamma)]^2 d\gamma\int_0^z e^{i\gamma(z-s)}a_2^\dagger(s)ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^z \rho(\beta+\gamma')[\alpha(\beta+\gamma')]^2 \\
&\quad\times e^{i(\beta+\gamma')\tau}a_2^\dagger(z-\tau)d\tau\, d\gamma' \\
&= \int_0^z\left[\int_{-\infty}^{\infty}S(\beta+\gamma')e^{i\gamma'\tau}\,d\gamma'\right]e^{i\beta_k\tau}a_2^\dagger(z-\tau)d\tau \\
&= 2\pi\int_0^z \Gamma(\tau)e^{i\beta_k\tau}a_2^\dagger(z-\tau)d\tau,
\end{aligned} \tag{7}$$

where $\rho(\gamma)$ is the density of states of the reservoir, $S(\gamma) = \rho(\gamma)[\alpha(\gamma)]^2$ is the spectral density, $\Gamma(\tau) = (1/2\pi)\int_{-\infty}^{\infty}S(\beta+\gamma')e^{i\gamma'\tau}\,d\gamma'$ is obtained from $S(\gamma)$ by using the Wiener-Khinchin theorem, and the substitutions $\gamma = \beta + \gamma'$ and $\tau = z - s$ were used. Assuming that the spectral density $S(\gamma)$ of the reservoir has a large distribution consisting of many oscillator modes, it is natural to approximate $S(\beta_k + \gamma') \approx S(\beta_k)$ such that $\Gamma(\tau) = S(\beta_k)\delta(\tau)$ (Markov approximation) and write for $z > 0$

$$\sum_{\gamma}[\alpha(\gamma)]^2\int_0^z e^{i\gamma(z-s)}a_2^\dagger(s)ds \approx \sigma a_2^\dagger(z), \tag{8}$$

where $\sigma = 2\pi S(\beta_k)$ is a positive constant describing the loss rate.

We finally obtain the system of coupled equations for the dynamics of propagating photons in two coupled waveguides with dissipation,

$$\frac{da_1^\dagger}{dz} = i\beta a_1^\dagger + i\kappa a_2^\dagger, \tag{9}$$

$$\frac{da_2^\dagger}{dz} = i\beta a_2^\dagger - \sigma a_2^\dagger + i\kappa a_1^\dagger + f^\dagger(z), \tag{10}$$

where $f^\dagger(z) = i\sum_\gamma \alpha(\gamma)b^\dagger(\gamma,0)e^{i\gamma z}$ is the noise operator describing the reservoir fluctuations. The fact that it appears together with the dissipation parameter σ is a manifestation of the fluctuation-dissipation theorem.

Assuming that both waveguides are identical and have the same propagation constant β, it is possible to simplify the equations by using the transformation $a_{1,2}^\dagger = A_{1,2}^\dagger e^{i\beta z}$, where $A_{1,2}^\dagger$ are slowly varying operators compared to $a_{1,2}^\dagger$. They satisfy

$$\frac{dA_1^\dagger}{dz} = i\kappa A_2^\dagger, \tag{11}$$

$$\frac{dA_2^\dagger}{dz} = -\sigma A_2^\dagger + i\kappa A_1^\dagger + F^\dagger(z), \tag{12}$$

where $F^\dagger(z) = e^{-i\beta z}f^\dagger(z) = i\sum_\gamma \alpha(\gamma)b^\dagger(\gamma,0)e^{i(\gamma-\beta)z}$. This system can be written as a matrix equation of the form

$d\mathcal{A}^\dagger/dz = \mathcal{M}\cdot\mathcal{A}^\dagger + \mathcal{F}^\dagger$, where $\mathcal{A}^\dagger = (A_1^\dagger \quad A_2^\dagger)^T$ and $\mathcal{F}^\dagger = (0 \quad F^\dagger)^T$ are one column matrices and

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & i\kappa \\ i\kappa & -\sigma \end{pmatrix}. \tag{13}$$

The solution $\mathcal{A}^\dagger(z)$ to this nonhomogeneous system of equations is given by

$$\mathcal{A}^\dagger(z) = e^{z\mathcal{M}}\cdot\mathcal{A}^\dagger(0) + \int_0^z e^{(z-s)\mathcal{M}}\cdot\mathcal{F}^\dagger(s)\,ds. \tag{14}$$

The exponential of the matrix $\mathcal{M}$ is easily evaluated,

$$e^{z\mathcal{M}} = e^{-\sigma z/2}\begin{bmatrix} \cos(z\Delta) + \frac{\sigma}{2\Delta}\sin(z\Delta) & \frac{i\kappa}{\Delta}\sin(z\Delta) \\ \frac{i\kappa}{\Delta}\sin(z\Delta) & \cos(z\Delta) - \frac{\sigma}{2\Delta}\sin(z\Delta) \end{bmatrix}, \tag{15}$$

where $\Delta = \sqrt{\kappa^2 - \sigma^2/4}$. Finally, the solutions for $A_1^\dagger(z)$ and $A_2^\dagger(z)$ are given by

$$A_1^\dagger(z) = \Theta_+(z)A_1^\dagger(0) + \Phi(z)A_2^\dagger(0) + \sum_\gamma \Omega_1(\gamma, z)b^\dagger(\gamma, 0), \tag{16}$$

$$A_2^\dagger(z) = \Phi(z)A_1^\dagger(0) + \Theta_-(z)A_2^\dagger(0) + \sum_\gamma \Omega_2(\gamma, z)b^\dagger(\gamma, 0), \tag{17}$$

where

$$\Theta_\pm(z) = e^{-\sigma z/2}\Big[\cos(z\Delta) \pm \frac{\sigma}{2\Delta}\sin(z\Delta)\Big], \tag{18}$$

$$\Phi(z) = \frac{i\kappa e^{-\sigma z/2}}{\Delta}\sin(z\Delta), \tag{19}$$

$$\Omega_1(\gamma, z) = \frac{\kappa\alpha(\gamma)}{\Delta}\int_0^z e^{-\sigma(z-s)/2}e^{i(\gamma-\beta)s}\sin[(s-z)\Delta]ds, \tag{20}$$

and

$$\Omega_2(\gamma, z) = i\alpha(\gamma)\int_0^z e^{-\sigma(z-s)/2}e^{i(\gamma-\beta)s} \times \Big\{\cos[(z-s)\Delta] - \frac{\sigma}{2\Delta}\sin[(z-s)\Delta]\Big\}ds. \tag{21}$$

Given our primary interest lies in the averaged number of photons departing from both waveguides, namely the transmission coefficient, the noise operator $F^\dagger$ will not be relevant for the analysis, as noted in Ref. [29]. Hence, the integrals represented by Eqs. (20) and (21) need not be explicitly computed. All the pertinent information regarding the total transmission through the waveguides is encapsulated in Eqs. (18) and (19) along with the initial state ket.

III. TRANSMISSION COEFFICIENT FOR QUANTUM AND CLASSICAL LIGHT

To connect the formalism developed in the previous section to the loss-induced transparency effect verified in classical settings, we define the transmission coefficient as

$$T = \frac{n_1(z) + n_2(z)}{n_1(0) + n_2(0)}, \tag{22}$$

where $n_j(z) = \langle\Psi_0|A_j^\dagger(z)A_j(z)|\Psi_0\rangle$ is the average number of photons in waveguide j at propagation distance z. They are given explicitly by

$$n_1(z) = |\Theta_+(z)|^2 n_1(0) + |\Phi(z)|^2 n_2(0) + 2\,\mathrm{Re}[\Theta_+(z)\Phi^*(z)\langle A_1^\dagger(0)A_2(0)\rangle], \tag{23}$$

$$n_2(z) = |\Phi(z)|^2 n_1(0) + |\Theta_-(z)|^2 n_2(0) + 2\,\mathrm{Re}[\Theta_-^*(z)\Phi(z)\langle A_1^\dagger(0)A_2(0)\rangle]. \tag{24}$$

Substitution of Eqs. (23) and (24) into Eq. (22) gives

$$T = \frac{P(z)n_1(0) + Q(z)n_2(0) + I(z)}{n_1(0) + n_2(0)}, \tag{25}$$

where $P(z) = |\Theta_+(z)|^2 + |\Phi(z)|^2$, $Q(z) = |\Theta_-(z)|^2 + |\Phi(z)|^2$, and

$$I(z) = 2\,\mathrm{Re}[(\Theta_+\Phi^* + \Theta_-^*\Phi)\langle A_1^\dagger(0)A_2(0)\rangle] = \frac{\sigma\kappa e^{-\sigma z}}{\Delta^2}[1 - \cos(2z\Delta)]\mathrm{Re}\Bigg[\frac{\langle A_1^\dagger(0)A_2(0)\rangle}{i}\Bigg]. \tag{26}$$

The transmission T evidently depends on the type of input state $|\Psi_0\rangle$ provided to the waveguide system. The presence of an "interference term" $I(z)$ suggests that loss can introduce a more intricate dynamic, where the transmission is influenced not only by the averaged number of incident photons $n_j(0)$ but also by the nonseparability properties of the initial state $|\Psi_0\rangle$, as depicted in Eq. (26). It is noteworthy that in the absence of loss ($\sigma = 0$), $I(z) = 0$ as well, and consequently, the overall transmission would solely rely on the initial averaged number of photons. For an input state expanded in terms of the Fock basis,

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{N_1,N_2} c_{N_1,N_2}\,|N_1\rangle_1\,|N_2\rangle_2\,|0\rangle_R\,,$$

where $A_j^\dagger A_j\,|N_j\rangle_j = N_j\,|N_j\rangle_j$ and $\sum_{N_1,N_2}|c_{N_1,N_2}|^2 = 1$, it is straightforward to demonstrate that

$$\langle A_1^\dagger(0)A_2(0)\rangle = \sum_{N_1,N_2} c^*_{N_1+1,N_2-1}c_{N_1,N_2}\sqrt{N_2(N_1+1)}. \tag{27}$$

Thus, the interference term also vanishes if the expansion coefficients c_{N_1,N_2} are real valued.

It is valuable to conduct a comparative analysis between quantum and classical descriptions. Let $E_1(z)$ and $E_2(z)$ represent the single-mode *classical* electric fields in waveguides

1 and 2, respectively. They satisfy the following system of equations:

$$i\frac{dE_1}{dz} + \kappa E_2 = 0, \tag{28}$$

$$i\frac{dE_2}{dz} + i\sigma E_2 + \kappa E_1 = 0. \tag{29}$$

The general solution is expressed as $E_1(z) = \Theta_+(z)E_1(0) + \Phi(z)E_2(0)$ and $E_2(z) = \Phi(z)E_1(0) + \Theta_-(z)E_2(0)$, where $\Theta_\pm$ and Φ are defined by Eqs. (18) and (19). The transmission for this classical system can be defined analogously to Eq. (25), except that $n_j(0) \to I_j(0)$, with $I_j(0) = |E_j(0)|^2$ representing the initial intensities, and the interference term is now given by

$$\begin{aligned} I_{\text{cl}}(z) &= \frac{\sigma\kappa e^{-\sigma z}}{\Delta^2}[1 - \cos(2z\Delta)]\text{Re}\left[\frac{E_1^*(0)E_2(0)}{i}\right] \\ &= \frac{\sqrt{I_1(0)I_2(0)}\sigma\kappa e^{-\sigma z}}{\Delta^2}[1 - \cos(2z\Delta)]\sin\phi, \end{aligned} \tag{30}$$

where the last line is written assuming the general representations $E_1(0) = \mathcal{E}_1$ and $E_2(0) = \mathcal{E}_2 e^{i\phi}$ with $\mathcal{E}_1$ and $\mathcal{E}_2$ real and positive numbers. The interference term is thus proportional to the sine of the phase difference between the incident field components.

In classical experiments, it is typically assumed that light initially couples only to one of the waveguides (usually the lossless one). Consequently, the absence of the interference term $I_{\text{cl}}(z)$ in these analyses becomes evident.

IV. EXAMPLES

This section is dedicated to applying the formalism developed in the preceding sections to clarify the enhancement of transmission of quantum light through lossy structures. We examine the loss-induced transparency effect for coherent states, separable Fock states, and entangled Fock states.

A. Coherent states

It should be expected that for an initial input state given in terms of coherent states, the overall behavior of the system must be quasiclassical. To see that this is indeed the case, consider the initial state $|\Psi_C\rangle = |\eta\rangle_1 |\zeta\rangle_2 |0\rangle_R$, where $A_1(0)|\eta\rangle_1 = \eta|\eta\rangle_1$, $A_2(0)|\zeta\rangle_2 = \zeta|\zeta\rangle_2$, and $|0\rangle_R$ is the initial state of the reservoir. In this case, the interference term has exactly the same form as Eq. (30) by making the identifications $I_1(0) \to |\eta|^2 = n_1(0)$, $I_2(0) \to |\zeta|^2 = n_2(0)$, and $\phi \to \arg(\zeta)$. The quantum and classical versions thus coincide regarding the behavior of the transmission coefficient.

Notice that the interference term vanishes in the classical and quasiclassical cases if the phase difference between $\mathcal{E}_1(0)$ and $\mathcal{E}_2(0)$ (or η and ζ) is a multiple of π. In this case, the transmission only depends on the initial intensities (or the initial average number of photons) present in both waveguides.

B. Separable Fock states

Before delving into the implications of a genuinely quantum input state, it is worth noting that if no photons are initially coupled in the lossy waveguide, resulting in $I_2(0) = 0$ or $|\Psi_0\rangle = |\cdots\rangle_{1,R}|0\rangle_2$, both the classical and quantum interference terms disappear. In either scenario, the transmission coefficient remains determined solely by $T = P(z)$, regardless of the nature of the field input in the lossless waveguide.

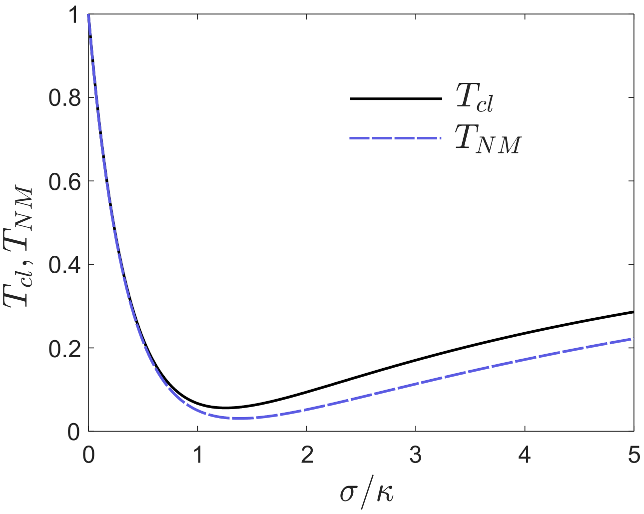


FIG. 2. Loss-induced transparency comparison between classical and separable Fock states. The initial classical state is characterized by $I_1(0) = 10$, $I_2(0) = 5$, and $\theta = \pi/2$. The input quantum state is given by $|\psi_{NM}\rangle = |10\rangle_1 |5\rangle_2 |0\rangle_R$, where $N = 10$ ($M = 5$) photons are coupled to the lossless (lossy) waveguide.

Consider now an input quantum state where N photons are coupled to the lossless waveguide and M photons are coupled to the lossy one, the reservoir being in the vacuum state $|0\rangle_R$. The state ket is given by the separable product of number states $|\Psi_0\rangle = |\psi_{NM}\rangle = |N\rangle_1 |M\rangle_2 |0\rangle_R$, where $A_1^\dagger(0)A_1(0)|N\rangle_1 = N|N\rangle_1$ and $A_2^\dagger(0)A_2(0)|M\rangle_2 = M|M\rangle_2$. In this case, the interference term vanishes $I(z) = 0$, regardless of the initial presence of photons in the waveguides, and the transmission coefficient is given by

$$T_{NM} = \frac{NP(z) + MQ(z)}{N + M}. \tag{31}$$

Hence, the transmission coefficient for separable number states solely relies on the input number of photons at each waveguide and is independent of the interference term $I(z)$. This stands in stark contrast to the classical scenario, where the interference term $I_{\text{cl}}(z)$ can be made nonzero. Naturally, both transmission profiles coincide in scenarios where ϕ (the phase of the classical field components) is a multiple of π. However, in cases where an experiment is designed such that $\phi \neq \pi$, the quantum and classical versions produce different results. Figure 2 displays an example of this situation.

C. Entangled states

The preceding example addressed an input state in which the location and the number of photons is precisely known at $z = 0$. If this condition is relaxed, implying a state of uncertainty regarding the initial photons' localization, we can then consider the entangled initial state

$$|\psi_{NM,e}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|N\rangle_1 |M\rangle_2 + e^{i\theta}|M\rangle_1 |N\rangle_2)|0\rangle_R, \tag{32}$$

where θ is the phase angle. The initial averaged number of photons in the waveguides is given by $n_1(0) = n_2(0) = (N + M)/2$ and it can be demonstrated that the interference term is nonzero if $M = N - 1$, where it is given by

$$I(z) = \frac{N\sigma\kappa e^{-\sigma z}}{2\Delta^2}[1 - \cos(2z\Delta)]\sin\theta. \tag{33}$$

Hence, states of the form $(|N\rangle_1 |N-1\rangle_2 + e^{i\theta}|N-1\rangle_1 |N\rangle_2)/\sqrt{2}$ interfere (in the sense of the transmission coefficient) if $\theta \neq n\pi$ for integer n.

To show that this produces different experimental outcomes even when a single photon is present in the waveguides, consider three input states of the form $|\Psi_a\rangle = |1\rangle_1 |0\rangle_2 |0\rangle_R$, $|\Psi_b\rangle = |0\rangle_1 |1\rangle_2 |0\rangle_R$, and $|\Psi_c\rangle = (1/\sqrt{2})(|1\rangle_1 |0\rangle_2 + e^{i\theta}|0\rangle_1 |1\rangle_2)|0\rangle_R$, the difference being that the initial photon localization is known with unit probability in $|\Psi_a\rangle$ and $|\Psi_b\rangle$ but not in the state ket $|\Psi_c\rangle$. Even though in all cases there is one photon propagating in the system, Fig. 3 reveals that (1) the transmittance is enhanced for the case where the photon is initially coupled to the lossless waveguide and (2) there is a critical value of $\theta = \pi/2$ for which the transmission is enhanced in comparison with $|\Psi_b\rangle = |0\rangle_1 |1\rangle_2 |0\rangle_R$ and other values of θ.

We conclude this section by noting that the propagation of photons through dissipative waveguides has already been demonstrated under laboratory conditions [25]. The authors observed the non-Hermitian HOM dip effect using coincident measurements of arriving photons. Therefore, in principle, the theoretical predictions presented here can be verified in the near future with existing technologies.

V. CONCLUSIONS

Our findings show that using the quantum formalism, it is also possible to observe the phenomenon of loss-induced transparency. We have demonstrated that incorporating a dissipative element into a pair of coupled waveguides yields an interference term, denoted as $I(z)$, within the transmission coefficient. This coefficient's behavior hinges upon the inseparable attributes of the initial quantum state, presenting an avenue to probe the phase characteristics of entangled states. Through our investigation, we have illustrated that loss-induced transparency phenomena manifest particularly under the circumstances where dissipation adheres to the Markov approximation. Furthermore, in scenarios where strong dissipative propagation dominates ($\sigma/\kappa \gg 1$), distinct single-photon states emerge with heightened transmittance, indicating a preferential state transmission. Given the indispensable role of loss in large-scale quantum computational tasks, our findings hold promise for tailoring waveguide applications in quantum information and computation. In real life situations, dissipation is always present. Thus, the present theory could be used to devise optimal incident photonic states that give more transmitted energy and, therefore, information.

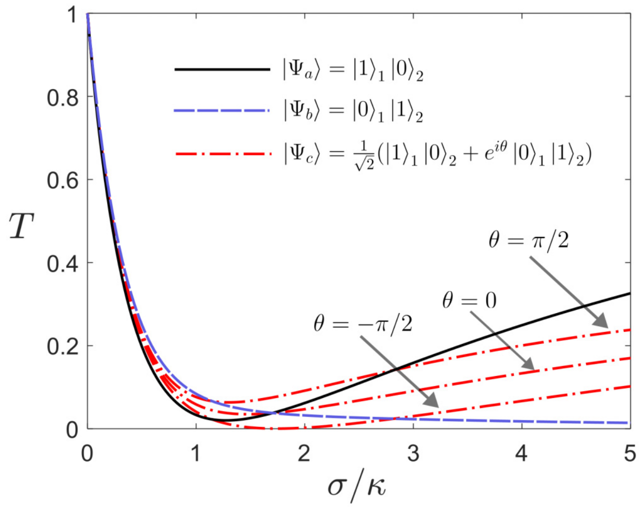


FIG. 3. Loss-induced transparency with single-photon states is demonstrated here. The continuous black curve illustrates the enhancement of transmission when a single photon is coupled to the lossless waveguide, represented by the ket $|\Psi_a\rangle$. The dashed blue curve depicts the initial coupling in the lossy waveguide, represented by $|\Psi_b\rangle$, while the dotted-dashed red curve represents the transmission for the entangled state $|\Psi_c\rangle$ for three values of the phase θ.

ACKNOWLEDGMENT

The authors acknowledge the financial support of the Brazilian agencies CNPq and FAPEAL.

[1] C. M. Bender and S. Boettcher, Real spectra in non-Hermitian Hamiltonians having $\mathcal{PT}$ symmetry, Phys. Rev. Lett. **80**, 5243 (1998).

[2] C. M. Bender, Making sense of non-Hermitian Hamiltonians, Rep. Prog. Phys. **70**, 947 (2007).

[3] A. Mostafazadeh, Pseudo-Hermiticity versus PT symmetry: The necessary condition for the reality of the spectrum of a non-Hermitian Hamiltonian, J. Math. Phys. **43**, 205 (2002).

[4] A. Mostafazadeh, Pseudo-Hermitian representation of quantum mechanics, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. **07**, 1191 (2010).

[5] W. Heiss, The physics of exceptional points, J. Phys. A: Math. Theor. **45**, 444016 (2012).

[6] C. M. Bender, *PT Symmetry: In Quantum and Classical Physics* (World Scientific, Singapore, 2018).

[7] C. M. Bender, Introduction to $\mathcal{PT}$-symmetric quantum theory, Contemp. Phys. **46**, 277 (2005).

[8] C. M. Bender, D. C. Brody, and H. F. Jones, Complex extension of quantum mechanics, Phys. Rev. Lett. **89**, 270401 (2002).

[9] C.-Y. Ju, A. Miranowicz, G.-Y. Chen, and F. Nori, Non-Hermitian Hamiltonians and no-go theorems in quantum information, Phys. Rev. A **100**, 062118 (2019).

[10] X. Zhu, H. Ramezani, C. Shi, J. Zhu, and X. Zhang, $\mathcal{PT}$-symmetric acoustics, Phys. Rev. X **4**, 031042 (2014).

[11] X.-W. Xu, Y.-X. Liu, C.-P. Sun, and Y. Li, Mechanical $\mathcal{PT}$ symmetry in coupled optomechanical systems, Phys. Rev. A **92**, 013852 (2015).

[12] M. Fruchart, R. Hanai, P. B. Littlewood, and V. Vitelli, Non-reciprocal phase transitions, Nature (London) **592**, 363 (2021).

[13] J. Wiersig, Review of exceptional point-based sensors, Photonics Res. **8**, 1457 (2020).

[14] K. G. Makris, R. El-Ganainy, D. N. Christodoulides, and Z. H. Musslimani, Beam dynamics in $\mathcal{PT}$ symmetric optical lattices, Phys. Rev. Lett. **100**, 103904 (2008).

[15] M.-A. Miri and A. Alu, Exceptional points in optics and photonics, Science **363**, eaar7709 (2019).

[16] R. El-Ganainy, M. Khajavikhan, D. N. Christodoulides, and S. K. Ozdemir, The dawn of non-Hermitian optics, Commun. Phys. **2**, 37 (2019).

[17] S. Longhi, Parity-time symmetry meets photonics: A new twist in non-Hermitian optics, Europhys. Lett. **120**, 64001 (2017).

[18] L. Feng, R. El-Ganainy, and L. Ge, Non-Hermitian photonics based on parity-time symmetry, Nat. Photonics **11**, 752 (2017).

[19] A. Guo, G. J. Salamo, D. Duchesne, R. Morandotti, M. Volatier-Ravat, V. Aimez, G. A. Siviloglou, and D. N. Christodoulides, Observation of $\mathcal{PT}$-symmetry breaking in complex optical potentials, Phys. Rev. Lett. **103**, 093902 (2009).

[20] H. S. Eisenberg, Y. Silberberg, R. Morandotti, and J. S. Aitchison, Diffraction management, Phys. Rev. Lett. **85**, 1863 (2000).

[21] S. Somekh, E. Garmire, A. Yariv, H. Garvin, and R. Hunsperger, Channel optical waveguide directional couplers, Appl. Phys. Lett. **22**, 46 (1973).

[22] Y. Chen, X. Chen, X. Ren, M. Gong, and G.-c. Guo, Tight-binding model in optical waveguides: Design principle and transferability for simulation of complex photonics networks, Phys. Rev. A **104**, 023501 (2021).

[23] Y. N. Joglekar, C. Thompson, D. D. Scott, and G. Vemuri, Optical waveguide arrays: Quantum effects and PT symmetry breaking, Eur. Phys. J. Appl. Phys. **63**, 30001 (2013).

[24] C. E. Rüter, K. G. Makris, R. El-Ganainy, D. N. Christodoulides, M. Segev, and D. Kip, Observation of parity–time symmetry in optics, Nat. Phys. **6**, 192 (2010).

[25] F. Klauck, L. Teuber, M. Ornigotti, M. Heinrich, S. Scheel, and A. Szameit, Observation of PT-symmetric quantum interference, Nat. Photonics **13**, 883 (2019).

[26] C. A. Downing and O. I. R. Fox, Unbalanced gain and loss in a quantum photonic system, J. Opt. **25**, 095201 (2023).

[27] J. Zhou, Characterization of PT-symmetric quantum interference based on the coupled mode theory, Opt. Express **30**, 23600 (2022).

[28] J. Zhou, Analytical formulation of quantum interference inside coupled waveguides with unequal losses, Opt. Express **30**, 38357 (2022).

[29] M. Gräfe, R. Heilmann, R. Keil, T. Eichelkraut, M. Heinrich, S. Nolte, and A. Szameit, Correlations of indistinguishable particles in non-Hermitian lattices, New J. Phys. **15**, 033008 (2013).

[30] K. Tschernig, K. Busch, D. N. Christodoulides, and A. Perez-Leija, Branching high-order exceptional points in non-Hermitian optical systems, Laser Photonics Rev. **16**, 2100707 (2022).

[31] Y. Qin, H. Chen, D. Luo, C. Pan, H. Hu, Y. Zhang, and D. Wei, Quantum interference in anti-parity-time symmetric coupled waveguide system, Opt. Express **29**, 29175 (2021).

[32] L. Xu, Y. Dou, F. Bo, J. Xu, and G. Zhang, Two-photon correlation and photon transport in disordered passive parity-time-symmetric lattices, Phys. Rev. A **91**, 023817 (2015).

[33] M. Ornigotti and A. Szameit, Quasi-symmetry in passive photonic lattices, J. Opt. **16**, 065501 (2014).