

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
CENTRO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

MATHEUS BARBOSA MOREIRA CEDRIM

**FUNDAMENTOS PARA O PROJETO DE VIGAS DE CONCRETO REFORÇADO  
COM FIBRAS DE AÇO COM SUPORTE DE TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO  
TOPOLÓGICA**

Maceió  
2024

MATHEUS BARBOSA MOREIRA CEDRIM

**FUNDAMENTOS PARA O PROJETO DE VIGAS DE CONCRETO REFORÇADO  
COM FIBRAS DE AÇO COM SUPORTE DE TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO  
TOPOLOGICA**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil.

Orientadora: Profa. Dra. Aline da Silva Ramos Barboza

Coorientador: Prof. Dr. Eduardo Nobre Lages

Maceió

2024

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**  
Bibliotecária: Taciana Sousa dos Santos – CRB-4 – 2062

C289f Cedrim, Matheus Barbosa Moreira.

Fundamentos para o projeto de vigas de concreto reforçado com fibras de aço com suporte de técnicas de otimização topológica / Matheus Barbosa Moreira Cedrim. – 2024.

182 f. : il. color.

Orientadora: Aline da Silva Ramos Barboza.

Coorientador: Eduardo Nobre Lages.

Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Alagoas. Centro de Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. Maceió, 2024.

Bibliografia: f. 172-182.

1. Vigas – Concreto reforçado. 2. Fibras de aço. 3. Otimização topológica. 4. Elastoplasticidade. I. Título.

CDU: 624.072.2



---

**"FUNDAMENTOS PARA O PROJETO DE VIGAS DE CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO COM SUPORTE DE TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO TOPOLOGICA**

**MATHEUS BARBOSA MOREIRA CEDRIM**

Tese de doutorado submetida à banca examinadora do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas e aprovada no dia 14 do mês de agosto do ano de 2024.

Banca Examinadora:

---

**Profa. Dra. Aline da Silva Ramos Barboza**  
(Orientadora – PPGEC/UFAL)

---

**Prof. Dr. Eduardo Nobre Lages**  
(Coorientador – PPGEC/UFAL)

---

**Prof. Dr. David Leonardo Nascimento de Figueiredo de Amorim**  
(Avaliador Interno – PPGEC/UFAL)

---

**Prof. Dr. Daniel de Lima Araújo**  
(Avaliador Externo à Instituição - UFG)

---

**Prof. Dr. Jesiel Cunha**  
(Avaliador Externo à Instituição - UFU)

---

**Prof. Dr. Valério da Silva Almeida**  
(Avaliador Externo à Instituição– USP)

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pela força para conquistar meus objetivos.

Aos meus familiares, em especial aos meus pais Tania e João e minha avó Elena, pelo apoio e incentivo durante mais uma etapa da minha educação. À Lyvia, pelo carinho, suporte e entendimento dos meus momentos de ausência.

À professora Dra. Aline da Silva Ramos Barboza, por ter aceitado mais esse desafio de pesquisa, sempre disponível e fundamental no meu crescimento pessoal e profissional.

Ao professor Dr. Eduardo Nobre Lages, por toda presteza e disponibilidade durante todo meu percurso acadêmico, com colaborações essenciais na minha trajetória.

A todos os professores e colegas de trabalho que fiz durante esses anos na engenharia.

A todos meus amigos de longa data e companheiros de vida.

Por fim, agradeço a todos ajudaram neste trabalho, direta ou indiretamente.

## RESUMO

Nos últimos anos, os elementos estruturais de concreto reforçado com fibras de aço (CRFA) tiveram sua utilização impulsionada em razão do desenvolvimento técnico e de pesquisas que possibilitaram a compreensão do comportamento mecânico deste material. Com o objetivo de melhorar a ductilidade e tenacidade do concreto, as fibras de aço incorporadas de maneira randômica à mistura são uma alternativa para reforçar o concreto em um estágio pós-fissuração. No entanto, apesar de diversos avanços nas aplicações, ainda há um campo de pesquisa aberto sobre o emprego de técnica de otimização estrutural para este material. Em termos de modelos constitutivos, o CRFA é considerado um material heterogêneo. Com a teoria de homogeneização, baseada na micromecânica dos campos médios, pode-se definir as propriedades elásticas efetivas para o material homogeneizado, de posse das propriedades dos constituintes e da dosagem da mistura. Buscando-se a previsão do comportamento pós-fissuração, pode-se adotar um critério de resistência para a caracterização do compósito. Nesse contexto, o modelo de Drucker-Prager é utilizado como um critério da avaliação dos parâmetros de resistência do material homogeneizado. Neste trabalho, contribui-se para os fundamentos de projeto de estruturas assistido por técnicas de otimização topológica, por meio da análise numérica em elementos finitos no *software* ABAQUS<sup>®</sup>, com a utilização de modelos de homogeneização em associação com o método SIMP. Nos exemplos apresentados, valida-se a otimização topológica para materiais elastoplásticos, especificamente para a análise de vigas. Observa-se nos resultados a influência dos parâmetros do procedimento de otimização, a dosagem da mistura e os requisitos de projeto de acordo com as referências normativas. Com o objetivo de fundamentar uma metodologia de análise que proporcione a utilização de elementos mais leves e resistentes, sem as tradicionais barras de aço incorporadas ao concreto, verifica-se no estudo de caso que, para os elementos de CRFA, as armaduras são necessárias para a garantia de uma ruptura dúctil.

**Palavras-chave:** Concreto com fibras de aço. SIMP. ABAQUS<sup>®</sup>. Plasticidade. Drucker-Prager.

## ABSTRACT

In recent years, the use of steel fiber-reinforced concrete (SRFC) structural elements has been driven by technical developments and research that have enhanced our understanding of the mechanical behavior of this material. Aimed at improving the ductility and toughness of concrete, randomly incorporating steel fibers into the mix presents an alternative for reinforcing concrete in a post-cracking stage. However, despite various advancements in applications, there is still an open research field regarding the application of structural optimization techniques for this material. In terms of constitutive models, SRFC is considered a heterogeneous material. Using homogenization theory, based on micromechanics of mean fields, effective elastic properties can be defined for the homogenized material, given the properties of the constituents and mix proportions. To predict post-cracking behavior, a strength criterion can be adopted for composite characterization. In this context, the Drucker-Prager model is used as a criterion for evaluating the strength parameters of the homogenized material. This study contributes to the fundamentals of structural design assisted by topology optimization techniques, through numerical analysis in finite element software ABAQUS®, employing homogenization models in conjunction with the SIMP method. In the presented examples, topology optimization is validated for elastoplastic materials, specifically for beam analysis. Results demonstrate the influence of optimization parameters, mix proportions, and design requirements in accordance with normative references. With the goal of establishing a methodology of analysis that facilitates the use of lighter and stronger elements, without the traditional incorporation of steel bars into concrete, the case study indicates that, for the elements of SFRC, reinforcements are necessary to ensure ductile failure.

**Keywords:** Steel fiber-reinforced concrete. SIMP. ABAQUS®. Plasticity. Drucker-Prager.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Longarina de concreto produzida com auxílio da impressão 3D.....	15
Figura 2 – Fluxograma da rotina de projeto otimizado .....	17
Figura 3 – Concreto reforçado com fibras curtas de aço .....	22
Figura 4 – Transferência de cargas em viga de concreto armado .....	23
Figura 5 – Diâmetro equivalente das fibras de acordo com o grupo e o tipo.....	25
Figura 6 – Geometria das fibras de acordo com a classificação.....	26
Figura 7 – Especificações das fibras de aço .....	26
Figura 8 - Distribuições de tensão ao longo de uma fibra em função do comprimento crítico	27
Figura 9 – Variação do teor de fibras no comportamento tensão-deformação.....	28
Figura 10 – Comportamento mecânico do CRF em função do volume de fibras .....	29
Figura 11 – Representação da microescala de um material.....	31
Figura 12 – Problema da inclusão equivalente de Eshelby .....	32
Figura 13 – Concreto reforçado com fibras híbridas .....	34
Figura 14 – Modelo de homogeneização por micromecânica.....	35
Figura 15 – Descrição da geometria do elemento de fibra .....	36
Figura 16 – Avaliação paramétrica do módulo de elasticidade homogeneizado .....	38
Figura 17 - Avaliação paramétrica do coeficiente de Poisson homogeneizado .....	38
Figura 18 - Representação gráfica do modelo de Drucker-Prager .....	41
Figura 19 – Ajuste do modelo de Drucker-Prager em relação ao modelo de Mohr-Coulomb	42
Figura 20 – Comparação de concentração de tensões para concreto reforçado com fibras .....	44
Figura 21 – Superfície de plastificação de Drucker-Prager com <i>cut-off</i> em tração do tipo Rankine.....	46
Figura 22 – Volume elementar representativo (VER) e célula periódica simplificada.....	46
Figura 23 – Obtenção do domínio de resistência considerando a interface .....	48
Figura 24 – Comparação da resistência à compressão biaxial .....	49
Figura 25 – Comparação da resistência à compressão uniaxial .....	50
Figura 26 – Resistência à tração do CRFA com a fração de fibras .....	51
Figura 27 – Validação experimental de Demeke e Tegos (1994) .....	52
Figura 28 – Curvas de ruptura biaxiais para diferentes frações volumétricas.....	53
Figura 29 – Resistência à compressão uniaxial do compósito .....	54
Figura 30 – Resistência à compressão biaxial do compósito .....	54
Figura 31 – Resistência à tração do compósito proposta por Dutra (2012) .....	55
Figura 32 - Resistência à tração do compósito proposta pelo <i>fib</i> (2013) .....	55
Figura 33 – Ângulo de atrito do compósito com <b>ftCRFA</b> de Dutra (2012).....	56
Figura 34 – Coesão do compósito com <b>ftCRFA</b> de Dutra (2012) .....	56
Figura 35 - Ângulo de atrito do compósito com <b>ftCRFA</b> do <i>fib</i> (2013) .....	57
Figura 36 - Coesão do compósito com <b>ftCRFA</b> do <i>fib</i> (2013).....	57
Figura 37 – Etapas para a homogeneização do CRFA .....	58
Figura 38 – Etapas para o projeto de elementos de CA-CRFA.....	60
Figura 39 – Curva de força x CMOD (medida da abertura do entalhe) .....	61
Figura 40 – Classificação do CRF .....	63
Figura 41 – Modelos constitutivos para o comportamento à tração.....	64
Figura 42 – Equilíbrio da seção em um elemento à flexão de CRFA .....	65
Figura 43 – Modelos constitutivos para pós-fissuração .....	66
Figura 44 – Técnicas de otimização topológica .....	69
Figura 45 – Abordagem multifísica em um problema de otimização .....	70
Figura 46 – Representação de uma estrutura multiescala.....	71

Figura 47 – Exemplo de otimização de uma viga .....	72
Figura 48 – Estrutura otimizada baseada no critério de Drucker-Prager e teste experimental	73
Figura 49 – Análise do padrão de fissuração e tensões máximas nas vigas otimizadas.....	73
Figura 50 – Ensaio de flexão para viga otimizada.....	74
Figura 51 – Etapas do projeto otimizado.....	74
Figura 52 – Exemplo de aplicação do método SIMP .....	75
Figura 53 - Domínio bidimensional para otimização (a) e domínio final otimizado (b) .....	76
Figura 54 – Topologia de materiais.....	78
Figura 55 – Exemplo de otimização topológica de estruturas multiescala.....	79
Figura 56 – Método <i>ground structure</i> de otimização .....	80
Figura 57 – Exemplo de otimização da viga MBB pelo GRAND .....	81
Figura 58 – Resultados da otimização híbrida com variação de malha.....	83
Figura 59 – Exemplo de domínio de referência para otimização .....	84
Figura 60 – Relações exponenciais do método SIMP .....	89
Figura 61 – Materiais não lineares .....	90
Figura 62 – Comportamento elastoplástico uniaxial .....	92
Figura 63 – Influência do algoritmo nas sensibilidades .....	95
Figura 64 – Resultados obtidos para diferentes comportamentos .....	97
Figura 65 – Topologias ótimas para um mesmo carregamento.....	98
Figura 66 – Topologias ótimas para diferentes carregamentos .....	98
Figura 67 – Convergência de dois modelos constitutivos .....	99
Figura 68 – Análise incremental para a primeira iteração.....	101
Figura 69 – Análise incremental para a segunda iteração .....	101
Figura 70 – Variação dos parâmetros $\mathbf{C0}$ e $\chi$ .....	103
Figura 71 – Instabilidades numéricas .....	106
Figura 72 – Densidade da malha e variação da topologia .....	107
Figura 73 – Dependência da malha e influência do filtro.....	107
Figura 74 – Variação da topologia a partir de diferentes densidades iniciais .....	109
Figura 75 – Distorção excessiva de malha .....	110
Figura 76 – Raio mínimo.....	113
Figura 77 – Fluxograma do processo de otimização .....	118
Figura 78 - Fluxograma da otimização no contexto da análise estrutural não linear .....	120
Figura 79 – Modelo da viga biengastada.....	122
Figura 80 – Topologias ótimas para diferentes energias prescritas.....	123
Figura 81 - Deformações plásticas equivalentes .....	124
Figura 82 – Comportamento estrutural da viga .....	124
Figura 83 – Distribuição ótima de material elástico linear ( $f = 25\%$ ).....	125
Figura 84 - Resultado da otimização estrutural elástico linear.....	126
Figura 85 – Distribuição ótima de material elastoplástico (Drucker-Prager) ( $f = 25\%$ ).....	127
Figura 86 - Resultado da otimização estrutural elastoplástico .....	127
Figura 87 - Restrição do deslocamento nodal .....	127
Figura 88 – Deformações plásticas equivalentes.....	128
Figura 89 - Distribuição ótima de material elastoplástico (Drucker-Prager) ( $f = 50\%$ ) .....	129
Figura 90 - Distribuição ótima de material elastoplástico (Drucker-Prager) ( $f = 75\%$ ) .....	129
Figura 91 - Distribuição ótima de material elastoplástico (Drucker-Prager) ( $p = 1$ ).....	130
Figura 92 - Distribuição ótima de material elastoplástico (Drucker-Prager) ( $p = 2$ ).....	130
Figura 93 - Distribuição ótima de material elastoplástico (Drucker-Prager) ( $p = 4$ ).....	130
Figura 94 - Distribuição ótima de material elastoplástico (Drucker-Prager) ( $r = 5\text{ mm}$ )...	131
Figura 95 - Distribuição ótima de material elastoplástico (Drucker-Prager) ( $r = 26\text{ mm}$ ).	131
Figura 96 - Distribuição ótima de material elastoplástico (Drucker-Prager) ( $r = 39\text{ mm}$ ).	131

Figura 97 – Distribuição das tensões equivalentes de von Mises.....	132
Figura 98 – Densidades para o modelo elástico linear .....	133
Figura 99 – Densidades para o modelo elastoplástico.....	133
Figura 100 – Superfícies extraídas .....	134
Figura 101 – Condições de contorno para as topologias analisadas.....	134
Figura 102 – Malhas adotadas para o problema .....	135
Figura 103 - Deformações plásticas equivalentes na topologia elástica linear .....	135
Figura 104 - Deformações plásticas equivalentes na topologia elastoplástica.....	135
Figura 105 - Capacidade de carga das vigas.....	136
Figura 106 – Condições de contorno do modelo.....	137
Figura 107 – Viga A: material elástico linear .....	139
Figura 108 – Viga A: material elastoplástico .....	140
Figura 109 – Viga B: material elástico linear.....	140
Figura 110 – Viga B: material elastoplástico .....	140
Figura 111 – Viga C: material elástico linear.....	141
Figura 112 – Viga C: material elastoplástico .....	141
Figura 113 – Viga D: material elástico linear .....	141
Figura 114 – Viga D: material elastoplástico .....	141
Figura 115 - Topologias ótimas para diferentes teores de fibras.....	142
Figura 116 - Distribuição ótima de material ( $f = 50\%$ , $p = 3$ , $r = 32,5mm$ ).....	143
Figura 117 – Distribuição ótima de material ( $f = 25\%$ ).....	143
Figura 118 - Distribuição ótima de material ( $f = 75\%$ ) .....	143
Figura 119 – Distribuição ótima de material ( $p = 2$ ) .....	144
Figura 120 - Distribuição ótima de material ( $p = 4$ ).....	144
Figura 121 - Distribuição ótima de material ( $r = 65mm$ ) .....	145
Figura 122 - Distribuição ótima de material ( $r = 97,5mm$ ).....	145
Figura 123 – Modelo adotado na análise paramétrica.....	146
Figura 124 - Energia de deformação das topologias ótimas.....	149
Figura 125 - Deformações plásticas equivalentes nas topologias ótimas.....	150
Figura 126 – Topologia elástica linear .....	150
Figura 127 - Topologias elastoplásticas .....	151
Figura 128 – Discretização da malha .....	151
Figura 129 - Dimensões para as topologias.....	152
Figura 130 - Capacidade de carga dos diferentes modelos .....	153
Figura 131 - Curva carga-deslocamento para os modelos otimizados ( $vf = 0,5\%$ ) .....	154
Figura 132 - Curva carga-deslocamento para os modelos otimizados ( $vf = 1,0\%$ ) .....	154
Figura 133 - Curva carga-deslocamento para os modelos otimizados ( $vf = 1,5\%$ ) .....	154
Figura 134 - Curva carga-deslocamento para os modelos otimizados ( $fc = 30MPa$ ) .....	155
Figura 135 - Curva carga-deslocamento para os modelos otimizados ( $fc = 35MPa$ ) .....	155
Figura 136 - Curva carga-deslocamento para os modelos otimizados ( $fc = 40MPa$ ) .....	156
Figura 137 - Curva carga-deslocamento para os modelos otimizados ( $fc = 45MPa$ ) .....	156
Figura 138 - Curva carga-deslocamento para os modelos otimizados ( $fc = 50MPa$ ) .....	157
Figura 139 – Diagrama de momento fletor característico (kNcm).....	158
Figura 140 – Modelo simplificado para determinação de $fFTu$ .....	159
Figura 141 - Momentos fletores resistentes para $As = 0$ .....	159
Figura 142 - Momentos fletores resistentes para $As = 4\text{ cm}^2$ .....	160
Figura 143 - Momentos fletores resistentes para $As = 8\text{ cm}^2$ .....	160
Figura 144 – Resistência à tração de projeto ( $fftud$ ) do CRFA.....	161
Figura 145 – Variação do esforço cortante resistente ( $VRd, f$ ).....	162
Figura 146 – Curva carga-deslocamento para elementos de CRF sem armadura.....	163

Figura 147 – Curva carga-deslocamento para $f_c = 30 \text{ MPa}$ e $v_f = 0,5\%$ .....	163
Figura 148 – Deslocamento vertical em metros ( $f_{cm} = 30 \text{ MPa}$ e $v_f = 0,5\%$ ) .....	164
Figura 149 – Deformações plásticas.....	165
Figura 150 – Tensões principais máximas em kPa .....	166

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Recomendações normativas para o módulo de elasticidade.....	35
Tabela 2 – Classificação do CRF em função da relação $fR3, k/fR1, k$ .....	63
Tabela 3 – Resumo das instabilidades numéricas .....	110
Tabela 4 – Diferenças entre os algoritmos de otimização topológica .....	115
Tabela 5 – Parâmetros da otimização topológica .....	125
Tabela 6 – Análise de resultados com variação da fração volumétrica.....	129
Tabela 7 - Análise de resultados com variação do fator de penalidade.....	130
Tabela 8 - Análise de resultados com variação do raio do filtro .....	131
Tabela 9 – Análise dos resultados das topologias .....	132
Tabela 10 – Propriedades dos ensaios de Demeke e Tegos (1994).....	137
Tabela 11 – Propriedades do modelo Drucker-Prager.....	138
Tabela 12 – Variação de geometria .....	138
Tabela 13 – Resultados da otimização das vigas biengastadas .....	139
Tabela 14 - Resultados para diferentes teores de fibras na seção total.....	142
Tabela 15 – Análise dos resultados com variação da fração volumétrica .....	144
Tabela 16 – Análise dos resultados com variação do fator de penalidade .....	144
Tabela 17 - Análise dos resultados com variação do raio do filtro .....	145
Tabela 18 - Variação de parâmetros do CRFA ( $\nu_f = 0,5\%$ ) .....	147
Tabela 19 - Propriedades do CRFA para $\nu_f = 0,5\%$ .....	147
Tabela 20 – Variação de parâmetros do CRFA ( $\nu_f = 1,0\%$ ).....	147
Tabela 21 – Propriedades do CRFA para $\nu_f = 1,0\%$ .....	148
Tabela 22 - Variação de parâmetros do CRFA ( $\nu_f = 1,5\%$ ) .....	148
Tabela 23 - Propriedades do CRFA para $\nu_f = 1,5\%$ .....	148
Tabela 24 – Volumes dos modelos otimizados .....	151
Tabela 25 – Deslocamento vertical máximo nos modelos otimizados.....	164

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>13</b>
1.1 Motivação .....	18
1.2 Objetivos.....	19
1.2.1 Objetivo geral .....	19
1.2.2 Objetivos específicos.....	19
1.3 Delimitação do trabalho.....	19
1.4 Organização do texto .....	19
<b>2 ESTRUTURAS DE CONCRETO REFORÇADO POR FIBRAS DE AÇO .....</b>	<b>21</b>
2.1 Métodos de homogeneização .....	30
2.1.1 Modelo de Mori-Tanaka.....	34
2.2 Modelos constitutivos.....	39
2.2.1 Modelo de Drucker-Prager .....	40
2.3 Avaliação das propriedades mecânicas .....	58
2.3.1 Avaliação no estado fresco .....	59
2.3.2 Avaliação no estado endurecido .....	60
2.3.2.1 Avaliação em Estado Limite Último (ELU).....	65
2.3.2.2 Avaliação em Estado Limite de Serviço (ELS).....	68
<b>3 TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA .....</b>	<b>69</b>
3.1 Otimização topológica contínua .....	75
3.2 Otimização topológica discreta .....	80
3.3 Otimização topológica híbrida .....	81
3.4 Boas práticas de otimização topológica.....	84
3.5 Otimização topológica de materiais elásticos lineares .....	88
3.6 Otimização topológica de materiais não lineares .....	89
3.7 Parâmetros de otimização e instabilidades numéricas.....	106
<b>4 UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE ABAQUS® .....</b>	<b>111</b>
<b>5 EXEMPLOS NUMÉRICOS .....</b>	<b>122</b>
5.1 Viga biengastada: modelo de Zhao <i>et al.</i> (2020).....	122
5.1.1 Modelo elástico linear .....	125
5.1.2 Modelo elastoplástico .....	126
5.1.2.1 Análise da fração volumétrica .....	128
5.1.2.2 Análise do fator de penalidade .....	129
5.1.2.3 Análise do raio do filtro.....	130
5.1.3 Análise estrutural dos modelos otimizados .....	131

5.2 Viga biengastada de CRFA: variação de altura.....	137
5.2.1 Viga A: $L/D = 2$ .....	139
5.2.2 Viga B: $L/D = 4$ .....	140
5.2.3 Viga C: $L/D = 5$ .....	140
5.2.4 Viga D: $L/D = 10$ .....	141
5.2.4.1 Modelo elastoplástico: viga D.....	142
5.2.4.1.1 Análise do teor de fibras.....	142
5.2.4.2 Análise dos parâmetros de otimização.....	143
5.2.4.2.1 Análise da fração volumétrica.....	143
5.2.4.2.2 Análise do fator de penalidade.....	144
5.2.4.2.3 Análise do raio do filtro.....	144
5.3 Viga biengastada de CRFA: análise dos parâmetros de resistência.....	146
5.3.1 Análise estrutural dos modelos otimizados.....	150
5.3.1.1 Análise do teor de fibras.....	153
5.3.1.2 Análise da classe de resistência do concreto.....	155
5.3.2 Verificações ELU e ELS.....	157
5.3.2.1 Flexão.....	158
5.3.2.2 Cisalhamento.....	161
5.3.2.3 Deflexão e limitação de tensão.....	162
<b>6 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>167</b>
6.1 Contribuições da tese.....	170
6.2 Sugestões de trabalhos futuros.....	171
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>172</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O concreto é um dos materiais de construção civil mais utilizado no mundo, devido a sua versatilidade e adaptação para diversas situações arquitetônicas. Conhece-se que suas características de resistência à compressão são extremamente satisfatórias, em contrapartida, em solicitações de tração, este material possui uma resistência inferior quando comparada àquela obtida pelas solicitações compressivas. Em virtude deste fato, para evitar o comportamento frágil de ruptura, são adicionadas barras de aço ao elemento estrutural, caracterizando o concreto armado.

As armaduras passivas constituídas pelas barras de aço, em geral, são a solução mais adotada para suprimir a deficiência do concreto à tração. Entretanto, com a evolução das técnicas construtivas e da tecnologia da construção civil, as fibras vêm sendo utilizadas como um material efetivo de reforço, auxiliando no controle da fissuração do concreto e evitando a ruína frágil à tração. A praticidade de utilização das fibras, que podem ser misturadas diretamente na confecção do concreto, é um ponto relevante para uma maior agilidade nas obras, além de se obter um desempenho satisfatório em algumas situações quando comparado à incorporação das barras de aço.

Em 2021, a Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) publicou as seguintes normas no referido tema: NBR 16935 (Projeto de estruturas de concreto reforçado com fibras – Procedimento), NBR 16938 (Concreto reforçado com fibras – Controle de qualidade), NBR 16939 (Concreto reforçado com fibras – Determinação das resistências à fissuração e residuais à tração por duplo puncionamento – Método de ensaio), NBR 16940 (Concreto reforçado com fibras – Determinação das resistências à tração a flexão (limite de proporcionalidade e resistências residuais) – Método de ensaio).

A norma brasileira NBR 16935 (ABNT, 2021a) conceitua que o concreto reforçado com fibras (CRF) é um material compósito, caracterizado por uma matriz cimentícia com fibras descontínuas estáveis em meio alcalino. Dentre as possibilidades de desenvolvimento de projetos de estruturas de concreto reforçado por fibras, a definição do teor de fibras e a resposta mecânica do compósito podem ser consideradas complexas e necessitam de experimentações e validações consistentes.

Com os recentes avanços na construção civil, os materiais cimentícios reforçados por fibras possuem destaque em diversos campos de pesquisa. A modelagem e análise estrutural, por meio de métodos numéricos, como por exemplo, o Método dos Elementos Finitos (MEF), é objeto de estudo de diversos pesquisadores.

As simulações numéricas auxiliam no entendimento e no projeto de elementos mais eficientes, podendo prever eventos e resultados. Para a calibração dos modelos numéricos, é necessário mensurar a variabilidade dos parâmetros de saída e determinar corretamente os parâmetros de entrada, sendo indispensável explorar o espaço das variáveis associadas para o problema a ser analisado. Com o aumento do poder de processamento computacional, tornou-se possível a simulação de diversos problemas complexos.

Com isto, a otimização de estruturas surgiu como uma ferramenta importante no desenvolvimento de projetos mais arrojados. A utilização dos métodos numéricos possibilitou a inclusão de novas metodologias de projetos que possibilitam a redução do peso total sem prejudicar a capacidade resistente.

A otimização topológica é uma poderosa ferramenta computacional que auxilia os projetistas na determinação de configurações estruturais eficientes. Na engenharia civil, a maioria das aplicações ainda são limitadas no campo da análise teórica/computacional e, geralmente, considera o comportamento elástico linear dos materiais. Esta limitação restringe o escopo e a aplicação dos conceitos de otimização topológica para problemas práticos. O concreto em um estágio pós-fissuração geralmente assume um comportamento intrinsecamente não linear, o que deve ser refletido nos modelos numéricos para simulação computacional.

Nos últimos anos, Da (2019) relata que houve um aumento no uso de materiais heterogêneos de alta performance, tais como compósitos reforçados por fibras, materiais cimentícios e materiais com fabricação auxiliada pela impressão 3D. As características físicas e mecânicas de materiais heterogêneos complexos podem ser determinadas pela composição dos seus constituintes, entretanto, pode haver uma drástica mudança nas propriedades do compósito devido à fração volumétrica das inclusões, sua forma geométrica e pela presença de interfaces.

Silva (2021) apresentou os potenciais da otimização topológica para o projeto de estruturas de concreto reforçado com fibras produzidas por meio da impressão 3D. Foi realizada uma análise paramétrica de otimização considerando o comportamento elástico linear, e, em seguida, verificou-se o comportamento resistente das peças otimizadas por meio de um modelo constitutivo não linear, considerando os critérios de plasticidade para concretos de diferentes classes de resistência.

As emissões globais de CO<sub>2</sub> vêm aumentando consideravelmente nas últimas décadas. A indústria do cimento assume papel relevante para a redução desses gases. Com o objetivo de implementar estratégias mais eficientes, os avanços na tecnologia dos materiais e os processos de manufatura são alternativas para a sustentabilidade. Pressmair *et al.* (2023) comentam que

existem diversas estratégias para reduzir o uso de cimento em estruturas de concreto enquanto preserva o desempenho. A otimização estrutural enquanto ferramenta matemática pode proporcionar projetos de estruturas mais leves e de elevada resistência.

Silva (2021) verificou que a associação dos conceitos de otimização em conjunto com a impressão 3D é promissora para contribuir na mitigação de impactos ambientais, favorecendo o potencial da indústria da construção civil. Contudo, apesar destes benefícios, enfatiza-se que a inserção de fibras prejudica a trabalhabilidade da matriz cimentícia no estado fresco.

Nesse contexto, as estruturas de concreto podem se beneficiar da utilização racional das matérias primas, atingindo os requisitos normativos, e promovendo o desenvolvimento sustentável. As estruturas convencionais podem ser substituídas por geometrias mais econômicas e duráveis por meio da impressão 3D (Figura 1). Com isto, o concreto reforçado por fibras se torna uma alternativa interessante para projetos.

**Figura 1** – Longarina de concreto produzida com auxílio da impressão 3D



Fonte: VANTYGHM *et al.*, 2020.

O concreto, considerado um material frágil, possui baixa capacidade de deformação, especificamente quando submetido a condições de tensões de tração. A presença de fissuras na zona de transição interfacial e na matriz de argamassa é um dos fatores que torna o material praticamente não resistente à tração.

Conhece-se que a inclusão de fibras distribuídas aleatoriamente no concreto, mas de maneira uniforme, contribui não apenas para um melhor desempenho em relação às cargas estáticas e quase-estáticas, mas também em relação à fadiga, impacto e cargas impulsivas. Destaca-se que as fibras utilizadas como reforço estrutural melhoram o comportamento do CRF em estado-limite último (ELU) e em estado-limite de serviço (ELS), desta forma, pode contribuir com o reforço total ou em conjunto com armadura passiva ou ativa (ABNT, 2021a).

Com o avanço das técnicas de impressão 3D e dos processos de manufatura aditiva, Da (2019) comenta que se tornou possível fabricar diretamente materiais projetados a partir de um arquivo numérico, possibilitando a abertura de rotinas para novos projetos. Não é exagero

ressaltar que a manufatura aditiva e a otimização topológica são uma ótima combinação. No campo das pesquisas, ainda é necessário um estudo sistemático e abrangente do projeto de estruturas com auxílio da otimização topológica para as aplicações de engenharia.

Recentemente, técnicas de otimização empregando conceitos de não linearidade física, bem como consideração de múltiplos casos de carregamento, são observadas na literatura. O desenvolvimento recente possibilita maiores possibilidades de simulação comportamentos estáticos e dinâmicos, podendo ser incorporados diferentes modelos constitutivos para variados problemas de otimização, com função objetivo e restrições definidas de acordo com a simulação proposta.

Com o intuito de avaliar o comportamento mecânico do concreto, de acordo com as diferentes dosagens de fibras, muitas vezes, os ensaios experimentais se tornam inviáveis devido aos custos elevados, necessidade de infraestrutura e demanda de tempo. Desta forma, com a implementação de ferramentas numéricas, pode-se realizar uma simulação prévia do comportamento do compósito com a variação de diversos parâmetros. Isto se constitui uma vantagem dos estudos numéricos em relação aos estudos experimentais.

Há uma lacuna de pesquisa nas aplicações dos métodos de otimização topológica para estruturas de concreto reforçado com fibras (STOIBER e KROMOSER, 2021). Liu *et al.* (2023) relatam que a tecnologia de impressão de 3D de estruturas de concreto é uma integração de preparação de material, modelagem geométrica, projeto estrutural e execução. O uso dessa técnica traz vantagens essenciais para uma construção verde, baixo carbono e inteligente. Devido à especificidade da anisotropia macroscópica do concreto, os autores comentam que ainda há diversas teorias de análise e métodos que devem ser estudados.

De acordo com Liu *et al.* (2023), o grande desafio de aliar a otimização topológica com as técnicas de impressão 3D consiste na consideração da formação da seção, no perfil estrutural e no processo de impressão. Diferentes tecnologias de impressão irão mudar a espessura das camadas, larguras, curvaturas das faixas extrudadas de concreto, de modo que isto afeta a utilização global do material.

No campo das aplicações da impressão 3D para edificações residenciais, Nguyen, Bui e Bui (2022) investigaram a viabilidade de construção de lajes de concreto reforçado com fibras de aço sem o reforço tradicional da armadura passiva. Os resultados experimentais, em conjunto com a análise numérica, possibilitaram a validação do uso de teores de fibra entre 25 e 100 kg/m<sup>3</sup> para a construção de lajes de piso com vãos na ordem de 4 a 5 metros.

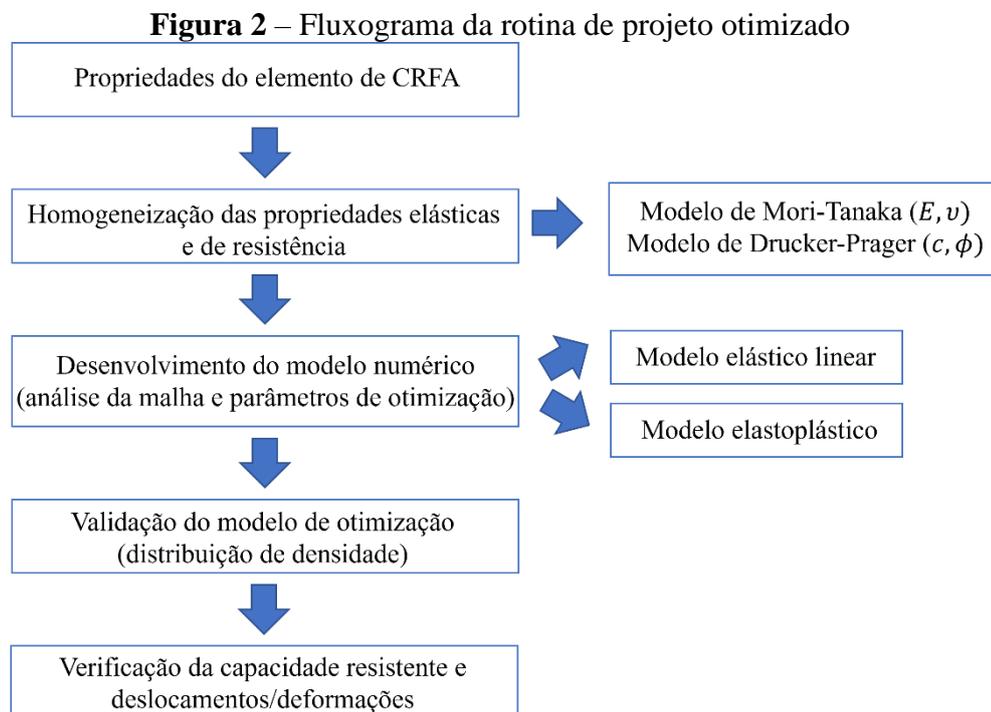
Este campo se torna particularmente vasto ao unir os conceitos de uma ferramenta matemática com os princípios executivos das estruturas, convencionalmente constituídas da

união proporcionado pela aderência do concreto simples e o reforço proporcionado pelas barras de aço.

A incorporação dos modelos constitutivos adequados para a simulação do comportamento mecânico das estruturas de concreto reforçado com fibras é uma realidade para os sistemas computacionais. Para as verificações normativas, de acordo com as metodologias baseadas em estados limites, pode-se estabelecer uma sequência de procedimentos de projeto para a otimização de elementos estruturais.

Este trabalho propõe o desenvolvimento de uma metodologia de análise numérica que auxilie o projeto de vigas de concreto reforçado com fibras de aço (CRFA). Esta sistemática consiste na verificação da capacidade resistente com o modelo obtido por meio da otimização topológica, incorporando o comportamento elástico linear homogeneizado e o comportamento elastoplástico do CRFA, baseado no modelo de Drucker-Prager.

Com isto, utiliza-se o fluxograma apresentado na Figura 2 de modo a ilustrar as etapas de solução do problema proposto neste trabalho. As técnicas de otimização topológica, em conjunto com a metodologia adotada, são apresentadas nos capítulos seguintes.



Fonte: Autor, 2024.

## 1.1 Motivação

A maioria das técnicas de otimização topológica baseia-se na hipótese do modelo constitutivo de material elástico linear. Entretanto, para as estruturas de concreto, identifica-se, em geral, um comportamento profundamente não linear, incluindo efeitos como fissuração, fluência e retração. Com isto, torna-se um desafio otimizar realisticamente este tipo de material (STOIBER e KROMOSER, 2021).

O emprego das análises não lineares, em virtude do comportamento do concreto, torna-se necessário para a definição de modelos otimizados mais assertivos. A observação das curvas carga-deslocamento em análise numéricas é um ponto crucial para a verificação do atendimento dos critérios de ELU e ELS, sendo assim, devem-se utilizar modelos constitutivos que se adequem ao comportamento esperado do compósito utilizado.

Da literatura, observa-se, de acordo com Stoiber e Kromoser (2021), que há uma extensiva área de pesquisa que enfatiza a otimização topológica com material isotrópico e de comportamento elástico linear, entretanto, há poucos estudos que detalhem as comparações entre o comportamento linear e não linear do material, o que se torna uma lacuna para a análise de resultados e para o campo de aplicação de estruturas de concreto.

Este trabalho dá continuidade aos estudos das técnicas de otimização topológica aplicadas para projetos, na linha de pesquisa de Mecânica de Materiais e Estruturas do PPGEC.

Na caracterização completa do comportamento elastoplástico do concreto reforçado com fibras de aço (CRFA), Dutra (2012) cita que é necessário formular o seu comportamento após atingir o limite elástico, ou seja, é necessário determinar o critério de plastificação e uma regra de endurecimento para o material.

Com isto, verifica-se neste trabalho a utilização de um modelo de homogeneização para a modelagem do CRFA por meio do critério de resistência de Drucker-Prager. Utiliza-se o modelo de Mori-Tanaka para a estimativa das propriedades elásticas, e com base no critério de resistência macroscópico do concreto com adição de fibras metálicas, utilizam-se as propriedades mecânicas de limite de resistência à tração e à compressão para a caracterização da fase plástica do material compósito.

## **1.2 Objetivos**

### **1.2.1 Objetivo geral**

Este trabalho tem como objetivo geral o desenvolvimento de uma metodologia de projeto otimizado para vigas de concreto reforçado com fibras de aço.

### **1.2.2 Objetivos específicos**

Os objetivos específicos deste trabalho são:

- a) Descrever o procedimento de homogeneização para obtenção das propriedades elásticas efetivas do concreto reforçado com fibras de aço por meio da micromecânica dos campos médios.
- b) Apresentar procedimentos de projeto otimizado para a verificação e dimensionamento de elementos estruturais de concreto reforçado com fibras de aço.
- c) Avaliar a influência das variáveis do procedimento de otimização topológica para o desenvolvimento dos modelos otimizados.
- d) Propor a utilização das análises não lineares por meio do Método dos Elementos Finitos (MEF) para a verificação das topologias ótimas.

## **1.3 Delimitação do trabalho**

Este trabalho não será de cunho experimental, sendo utilizado para validação dos modelos numéricos os resultados experimentais disponíveis na literatura.

Serão analisadas apenas estruturas reforçadas com fração volumétrica de fibras inferior a 5%, em virtude do modelo de homogeneização adotado. Considera-se que a distribuição de fibras na massa de concreto é aleatória. Além disto, armaduras passivas não são consideradas na análise não linear, analisando-se apenas o compósito homogeneizado.

## **1.4 Organização do texto**

Esta seção apresenta a organização dos capítulos do presente trabalho. Sendo este o primeiro capítulo, apresentou-se uma breve contextualização do problema, descrevendo a motivação, objetivos e delimitações do trabalho. Os conteúdos do segundo ao sexto capítulos são descritos a seguir.

O Capítulo 2 apresenta um referencial teórico sobre concreto reforçado com fibras, com conteúdos relacionados aos métodos de homogeneização, modelos constitutivos e avaliação das propriedades mecânicas do material.

O Capítulo 3 descreve as técnicas de otimização topológica desenvolvidas para análise de estruturas, com destaque para a otimização topológica contínua. Além disso, apresenta o procedimento de otimização topológica para materiais não lineares.

O Capítulo 4 apresenta o procedimento de otimização topológica utilizado por meio do *software* ABAQUS®, demonstrando o algoritmo baseado no método SIMP.

O Capítulo 5 demonstra as simulações numéricas no *software* ABAQUS® para as propostas de desenvolvimento de projetos otimizados de vigas de concreto reforçado com fibras de aço.

O Capítulo 6 expõe as considerações finais e as sugestões de atividades para trabalhos futuros.

## 2 ESTRUTURAS DE CONCRETO REFORÇADO POR FIBRAS DE AÇO

Considera-se material compósito aquele resultante da disposição de dois ou mais constituintes, com o objetivo de combiná-los, a fim de se obter melhorias nas características mecânicas, desempenho, vida útil e durabilidade. Em uma análise de comportamento mecânico, costuma-se considerar, inicialmente, duas fases: matriz e reforço, em que a matriz pode ser tratada como elemento em que se deseja melhorar suas propriedades físicas, e o reforço é considerado de acordo com o processo de fabricação e as características requeridas do compósito.

Na mecânica dos materiais compósitos, área de estudo da aplicação destes materiais na engenharia, de acordo com Vasiliev e Morozov (2018), pode-se dividir estes em dois grandes grupos: materiais preenchidos e materiais reforçados. A característica dos primeiros é a existência de uma matriz, que possui propriedades a serem melhoradas por meio do preenchimento de algumas partículas. Usualmente, a fração volumétrica da matriz é acima de 50% nesta classe de materiais, que é naturalmente modificada por meio do comportamento da matriz. Como regra, estes materiais podem ser tratados como homogêneos e isotrópicos.

O segundo grupo de materiais compósitos, para Vasiliev e Morozov (2018) são os compósitos reforçados por fibras. Estes tipos de materiais, também chamados de compósitos avançados, possuem geralmente como elemento de reforço as fibras longas e finas. As fibras são ligadas ao material da matriz, em geral com uma fração volumétrica inferior a 50%. As propriedades dos compósitos avançados permitem diversas aplicações, principalmente devido à resistência e rigidez das fibras. Atualmente, fibras de vidro, minerais, de carbono, orgânicas, cerâmicas e metálicas são utilizadas nos materiais reforçados.

O concreto, que tipicamente é considerado um material compósito pela sua composição heterogênea, pode ser reforçado com barras, fios, ou fibras de aço. Usualmente, na construção civil encontra-se o concreto reforçado com barras de aço, denominado de concreto armado. Entretanto, nota-se uma evolução na utilização das fibras como elemento de reforço, principalmente com o surgimento de diversos estudos técnicos e científicos, além do estabelecimento de referências normativas.

Com a evolução da utilização das fibras como elemento de reforço em concretos e argamassas e de acordo com as referências normativas, têm-se, no Brasil, as indicações para requisitos e desempenho das fibras de aço pela NBR 15530 (ABNT, 2019), fibras de vidro álcali-resistentes pela NBR 16941 (ABNT, 2021e) e fibras poliméricas pela NBR 16942 (ABNT, 2021f).

A NBR 15530 (ABNT, 2019) conceitua que as fibras de aço são constituídas por arames de aço trefilados a frio, retos ou em outras conformações; cortes, retos ou em outras conformações, de chapas; produzidas por fusão ou usinadas a partir de blocos de aço adequadas, com o intuito de formar misturas homogêneas com concretos e argamassas.

Registra-se que as fibras de aço são adequadas ao uso como material de reforço para concreto por possuírem coeficiente de dilatação térmica igual ao do concreto, módulo de elasticidade aproximadamente cinco vezes maior que o do concreto e deformação de fibras de aço-carbono regulares ocorrem somente acima de 370 °C (ABNT, 2019).

Para o *fib Model Code 2010* (fib, 2013), considera-se o CRFA um material caracterizado pela armadura descontínua. Por esta razão, em relação à distribuição de esforços axiais, as fibras de aço tendem a ser menos eficientes que os fios e barras contínuas. Em contrapartida, o pequeno espaçamento entre as fibras, que é embebida na matriz, proporciona um maior controle de abertura de fissuras, o que leva a uma diminuição na possibilidade de deterioração da estrutura por parte de agentes agressivos.

Figueiredo (2011) relaciona que essas características surgem devido à capacidade das fibras de redistribuir as tensões aplicadas ao concreto, em virtude do elevado módulo de elasticidade do aço, apesar de suas pequenas dimensões volumes. Singh (2017) considera que diferente das fibras de aço, as fibras sintéticas possuem baixo módulo de elasticidade, o que não permite a formação de um sistema estrutural “em forma de teia” (Figura 3) ao redor dos agregados no concreto endurecido, e conseqüentemente, contribui menos na comportamento pós-fissuração.

**Figura 3** – Concreto reforçado com fibras curtas de aço

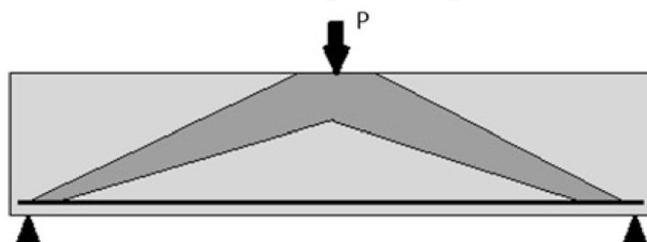


Fonte: SINGH, 2017.

Para Singh (2017), teoricamente seria melhor distribuir as fibras somente na região tracionada, porém, de maneira prática, é atividade difícil de ser executada. Utilizar as fibras em toda a seção do elemento estrutural geralmente leva a um aumento no consumo de fibras para um dado momento fletor atuante. Com o intuito de utilizá-las apenas nas regiões solicitadas à tração, busca-se aumento na capacidade de deformação e na resistência residual à tração. Apesar disso, verificam-se melhorias nas características na capacidade de resistência à flexão, cisalhamento e fadiga.

As estruturas de concreto armado convencionais, diferentemente das estruturas de concreto reforçado com fibras, tipicamente exibem um comportamento global similar ao de uma treliça para a transmissão das cargas (Figura 4). O concreto é imaginado como uma escora (elemento comprimido) em um sistema treliçado e a armadura é representada pelo tirante (elemento tracionado). Já para os elementos de CRF, este tipo de mecanismo atua em nível local, ao redor dos agregados graúdos presentes no concreto endurecido. Em função da formação de um sistema de treliça espacial, formada pela distribuição randômica das fibras, verifica-se que estas atuam como tirantes neste sistema hipotético, e a pasta hidratada da argamassa atua como escora.

**Figura 4** – Transferência de cargas em viga de concreto armado



Fonte: SINGH, 2017.

De forma representativa, nos elementos convencionais, as armaduras longitudinais se comportam de maneira diferente, dependendo do percentual de aço disponível na seção. Já para os elementos de CRFA, ocorre a falha a partir do momento em que a deformação na face tracionada atinge um valor crítico. Usualmente, o valor de projeto para a superfície de abertura de fissuras define o valor crítico para a deformação por tração permitida neste tipo de estrutura. Parâmetros das fibras, tais como: razão de aspecto, ancoragem e fração volumétrica, são determinados para o reforço pós-fissuração do concreto.

Diferentes tipos de fibras de aço estão disponíveis no mercado. Estas possuem diferentes geometrias, texturas, tipos de ancoragem e relação comprimento/diâmetro, também conhecida

como razão de aspecto. Convencionalmente, Matos (2021) relaciona diâmetros convencionais em intervalos entre 0,10 mm e 1,0 mm, comprimentos variando de 5 mm a 65 mm, módulo de elasticidade na faixa de 200 GPa a 210 GPa e tensões de ruptura podendo alcançar até 2100 MPa. Todas estas características podem influenciar na interação e aderência entre a fibra e o concreto, bem como há diferentes respostas mecânicas no comportamento global do compósito.

As fibras, em geral, são especificadas pelo seu tipo (material constituinte), pelo seu comprimento, pela razão de aspecto ( $L/D$ ) e fração volumétrica. A razão  $L/D$  é um dos principais parâmetros que indica a eficiência na melhoria da tenacidade do compósito. Mehta e Monteiro (2014) ressaltam que, em geral, quanto maior esta razão, melhor a resistência ao arrancamento da fibra, em virtude do aumento do comprimento de ancoragem, bem como, um aumento no número de fibras que podem interceptar uma fissura, em função da utilização de um número maior de fibras mais delgadas.

Para as fibras de aço, Figueiredo (2011) cita que o teor de fibras pode ser apontado como o principal parâmetro definidor do comportamento dos compósitos. Desta forma, quanto maior for o teor, maior será o número de fibras que atuarão como ponte de transferência de tensões ao longo das fissuras, o que aumenta o reforço pós-fissuração do concreto.

Os parâmetros usuais de fornecedores de fibras de aço estabelecem dosagem mínima de fibras entre 10 kg/m<sup>3</sup>, para fibras com elevada razão de aspecto ( $\frac{L}{D} > 80$ ), e 30 kg/m<sup>3</sup> para fibras com baixa razão de aspecto ( $\frac{L}{D} < 45$ ). Com isto, o conceito de fração volumétrica de fibras ( $v_f$ ) pode ser definido para as especificações em projeto, conforme Eq. (1):

$$v_f = \frac{t_{fibras}}{\rho_{aço}} \quad (1)$$

em que  $t_{fibras}$  é o teor de fibras, em kg/m<sup>3</sup> e  $\rho_{aço}$  é massa específica do aço, considerada igual a 7850 kg/m<sup>3</sup>.

A NBR 15530 (ABNT, 2019) define as especificações e requisitos para as fibras de aço com função de reforço para o concreto. Estes elementos devem ser classificados com pelo menos uma destas definições: fabricação, forma, revestimento, teor de carbono e tolerâncias geométricas.

A classificação dos grupos relaciona o tipo da fibra com suas características de geometria. O grupo, de acordo com o tipo de aço o qual originou o elemento, pode ser definido em função do diâmetro equivalente, conforme Figura 5. O conceito do diâmetro equivalente está associado ao diâmetro do círculo de área igual à área da seção transversal média de uma fibra. Desta forma, verifica-se que a norma desconsidera o formato da seção transversal.

Três grupos são apresentados na NBR 15530 (ABNT, 2019), o grupo I – arames trefilados a frio; grupo II – chapas cortadas e grupo III – arames trefilados a frio e escarificados. Os tipos previstos em requisitos normativos são três: tipo A – fibra com ancoragem nas extremidades; tipo C – fibra com ondulações no corpo (corrugada) e tipo R – fibra reta sem ancoragens.

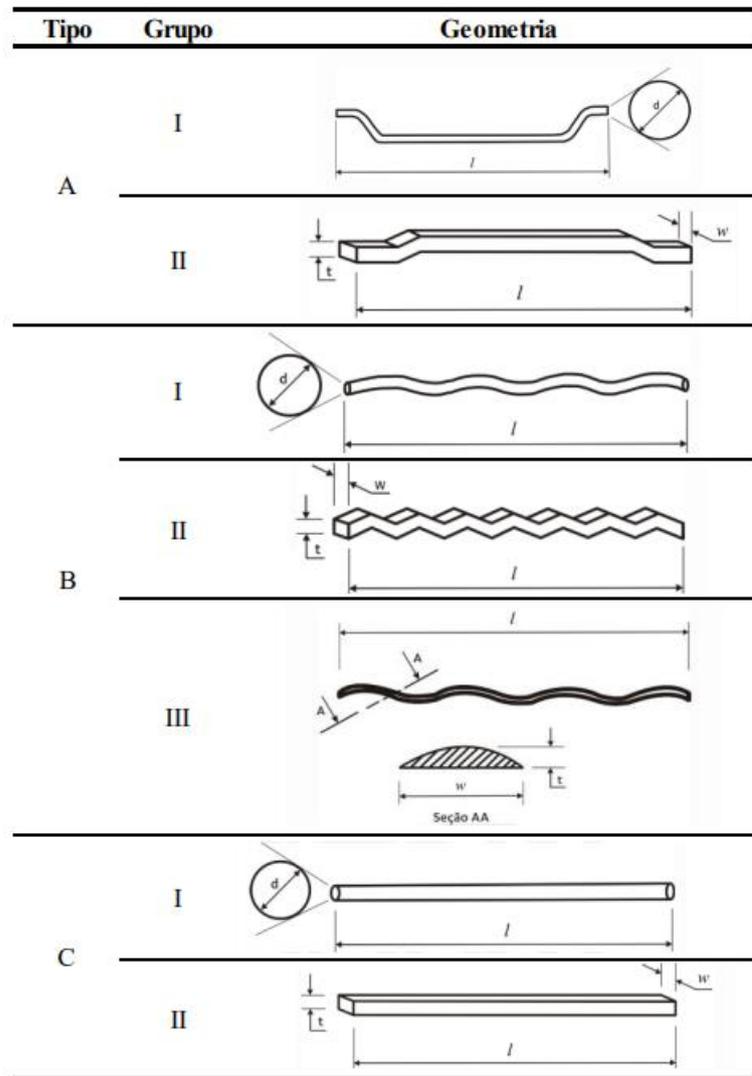
**Figura 5** – Diâmetro equivalente das fibras de acordo com o grupo e o tipo

<b>Grupo</b>	<b>Tipo</b>	<b>Diâmetro</b>
I	A	$d_e = \frac{d_1 + d_2}{2}$
	C	
	R	
II	A	$d_e = \frac{\sqrt{4 \cdot t \cdot w}}{\pi}$
	C	
	R	
II	C	$d_e = \frac{\sqrt{2 \cdot (3t^3 + 4w^2)}}{3 \cdot w \cdot \pi}$

Fonte: adaptado de ABNT, 2019.

em que  $d_e$  é o diâmetro equivalente.  $d_1$  e  $d_2$  são as medidas tomadas na região central da fibra em duas direções ortogonais entre si,  $t$  é a espessura da fibra,  $w$  é a largura da fibra retangular.

A Figura 6 apresenta esquematicamente a classificação das fibras de acordo com seus grupos e tipos. A definição da razão de aspecto ou fator de forma mínimo, em conjunto com os limites de resistência à tração do aço são apresentados na Figura 7. Verifica-se que, usualmente, fibras convencionais possuem fator de forma entre 20 a 100. A resistência à tração da fibra influencia particularmente no comportamento de transferência de tensões para a fibra oriundas da matriz, quando essa se rompe.

**Figura 6** – Geometria das fibras de acordo com a classificação

Fonte: adaptado de ABNT, 2019.

**Figura 7** – Especificações das fibras de aço

Tipo	Classe da fibra	Fator de forma mínimo	Limite de resistência à tração (MPa)
A	I	40	1000
	II	30	500
C	I	40	800
	II	30	500
	III	30	800
R	I	40	1000
	II	30	500

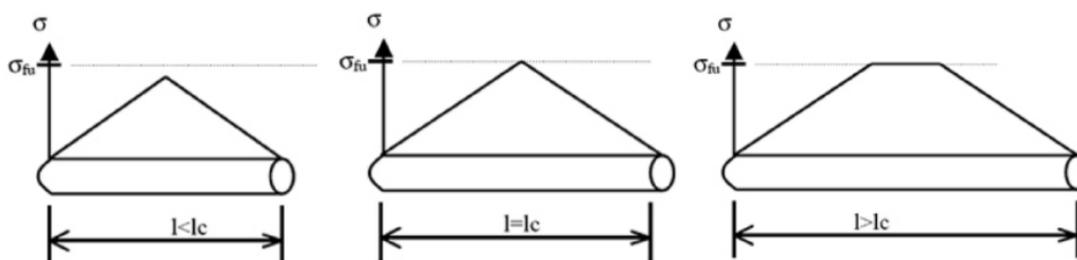
Fonte: adaptado de ABNT, 2019.

Associado ao conceito da razão de aspecto, identifica-se o comprimento crítico da fibra (Figura 8), em que se verifica a hipótese de que a tensão entre matriz e fibra aumente linearmente a partir dos extremos até o centro dela. Este comprimento  $l_c$  é definido como aquele em que é promovido o desenvolvimento da tensão na fibra de modo que a tensão em seu ponto médio seja igual à tensão de ruptura da fibra. Justifica-se que para o desenvolvimento de uma fissura perpendicular às fibras, haverá uma distribuição linear de tensão das extremidades até a região central, cujo limite máximo é definido em função do material constituinte da fibra. Desta forma, se a tensão máxima for observada antes do ponto central, ou caso esta não seja atingida, o limite de resistência da fibra não será plenamente aproveitado.

Buttignol *et al.* (2018) aponta que o comprimento  $l_c$ , quando não se possui resultados experimentais, pode ser determinado de maneira teórica pelo menor valor calculado entre o espaçamento médio entre as fissuras ( $s_{rm}$ ), que pode ser calculado pelas equações propostas pelo *fib Model Code 2010* (*fib*, 2013), e a distância entre a linha neutra e a fibra mais extrema solicitada à tração.

Para os elementos armados, a distância máxima entre as fissuras ( $l_{s,max}$ ) é definida como o comprimento da seção, obtido a partir da seção fissurada, em que a aderência entre concreto e aço é desenvolvida (região em que ocorre o escorregamento entre o concreto e as barras de aço). A equação sugerida pelo *fib Model Code 2010* (*fib*, 2013) para  $l_{s,max}$  depende de parâmetros empíricos, do cobrimento adotado, da tensão de aderência, da taxa de armadura, do diâmetro da barra, da resistência à compressão do concreto e da resistência residual de serviço.

**Figura 8** - Distribuições de tensão ao longo de uma fibra em função do comprimento crítico



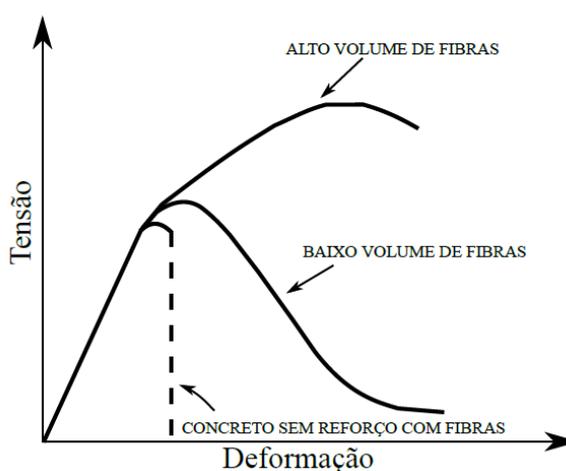
Fonte: FIGUEIREDO, 2000.

Mehta e Monteiro (2014) classificam o CRFA em função da fração volumétrica de fibras na sua composição. Pode ser classificado em três classes: misturas com baixa fração volumétrica (menor que 1%), em que se reduz a fissuração por retração, utilizada geralmente

em lajes e pavimentos com grandes superfícies expostas. Misturas com fração volumétrica moderada (entre 1% e 2%), em que se aumenta o módulo de tenacidade à fratura e de resistência ao impacto, sendo aplicadas em geral no concreto projetado. Por fim, misturas com alta fração volumétrica (maior que 2%), em que se têm o endurecimento por deformação do compósito, sendo conhecidos como compósitos de alto desempenho.

Faria (2017) relaciona que um dos principais fatores que interferem na interação fibra-matriz é o teor de fibras utilizado na confecção do compósito. Isto pode ser explicado pela função primordial desempenhada pela fase dispersa (fibra) na matriz (concreto), que está associada ao controle de fissuração após a abertura da primeira fissura. As fibras, portanto, funcionam como pontes de transferências de tensões. A Figura 9 demonstra a variação do incremento de fibras em uma curva típica de tensão-deformação para um elemento em flexão.

**Figura 9** – Variação do teor de fibras no comportamento tensão-deformação



Fonte: FARIA, 2017.

Na Figura 9 pode-se observar que a ausência de fibras configura um comportamento típico de um material frágil, em que há uma brusca diminuição de tensão para uma dada deformação. Já com um baixo de volume de fibras, nota-se que há uma redução suave na tensão para o aumento de deformação, caracterizando uma maior tenacidade em relação ao concreto sem fibras. Por sua vez, para um alto volume de fibras, pode-se perceber que a tensão aumenta mesmo após a ruptura, simbolizando um comportamento dúctil. Desta forma, além da verificação dos comportamentos pós-pico de resistência, ressalta-se que, no trecho elástico, não há mudanças significativas.

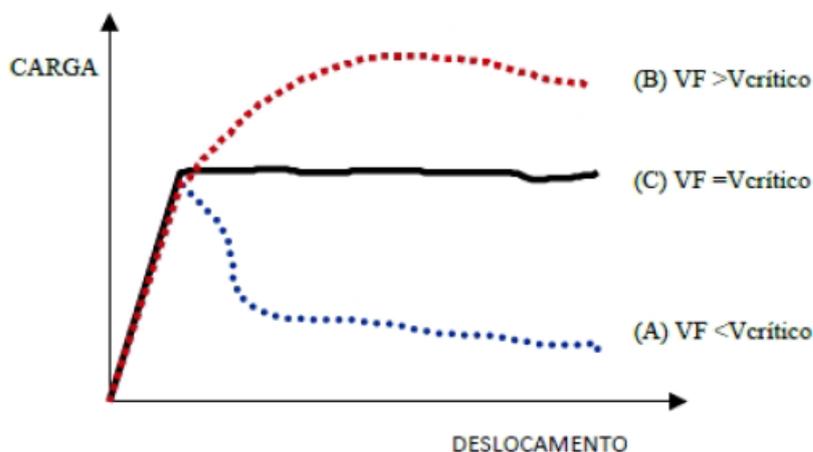
Em geral, elevados volumes de fibras, apesar de beneficiarem o comportamento mecânico no estágio pós-fissuração, podem gerar grandes problemas com o manuseio e

trabalhabilidade do concreto, sendo necessário utilizar técnicas especiais para a mistura e o lançamento, que podem afetar diretamente o custo final de produção.

Almeida (2023) cita que a grande maioria dos programas experimentais limitam a fração volumétrica a 1%. Uma alternativa para manter elevados teores de fibras sem prejudicar as propriedades no estado fresco é a utilização de matrizes constituídas apenas de partículas extremamente finas. No entanto, esta solução provoca uma redução no módulo de elasticidade do compósito, além de ter um elevado custo.

Para Figueiredo (2011), em relação à dosagem de fibras, pode-se definir o teor crítico (Figura 10). Este teor está relacionado ao volume de fibras adequado para a mistura, de modo a preservar a capacidade portante do concreto mesmo após a ruptura da matriz. Com isto, observa-se que adotando-se valores abaixo do volume crítico, ocorre o comportamento de amolecimento do CRF, também denominado como *strain-softening*. Com volumes acima do teor crítico, o material continua aceitando níveis crescentes de carregamento, mesmo após o estágio de ruptura da matriz. Com isto, verifica-se o comportamento de endurecimento, conhecido como *strain-hardening*.

**Figura 10** – Comportamento mecânico do CRF em função do volume de fibras



Fonte: FIGUEIREDO, 2011.

Bentur e Mindess (2006) apresentam que o volume crítico, para fibras distribuídas aleatoriamente em três direções, é dependente da resistência da matriz e do fator de forma das fibras. Para a fator de forma variando entre 50 e 100, o volume crítico é da ordem de 1 a 3%. Em relação ao comprimento da fibra, é importante que haja uma compatibilidade dimensional entre agregados e fibras, de forma que seja possibilitada, como um todo, a atuação destas enquanto reforço, e não como auxílio somente em segmentos da pasta (DUTRA, 2012).

A NBR 16935 (ABNT, 2021a) cita que para o projeto baseado em análises numéricas, leis constitutivas de tensão-deformação à tração mais avançadas são recomendadas, incluindo-se a resistência à tração de primeira fissura.

Para a análise estrutural de elementos de CRF, considera-se que os métodos podem ser de análise linear, análise plástica, análise não linear e análise por meio de modelos físicos.

Na análise linear, admite-se um comportamento elástico-linear para o CRF. Os valores para o módulo de elasticidade longitudinal e o coeficiente de Poisson podem ser adotados de acordo com o material concreto simples, sem a adição de fibras (ABNT, 2021a).

Para a análise não linear, admite-se o comportamento não linear físico do CRF. Neste tipo de análise, a geometria da estrutura, a distribuição da armadura (quando houver) e o comportamento mecânico do CRF precisam ser previamente conhecidos para que a análise não linear possa ser efetuada, pois a resposta da estrutura depende das fibras como reforço (material, tipo e dosagem), e de como ela foi armada.

Com estas definições de parâmetros, deve-se verificar o atendimento das condições de equilíbrio, de compatibilidade e de ductilidade. Pode-se adotar as análises não lineares para as verificações no ELU e no ELS. A NBR 16935 (ABNT, 2021a) admite que na análise não linear pode ser utilizado o método dos elementos finitos e admitir o comportamento do material com base na mecânica da fratura não linear.

Com o objetivo de realizar inicialmente uma análise elástica linear para a investigação do comportamento mecânico homogeneizado do concreto reforçado com fibras de aço, apresenta-se na seção seguinte os métodos de homogeneização baseados na micromecânica dos campos médios.

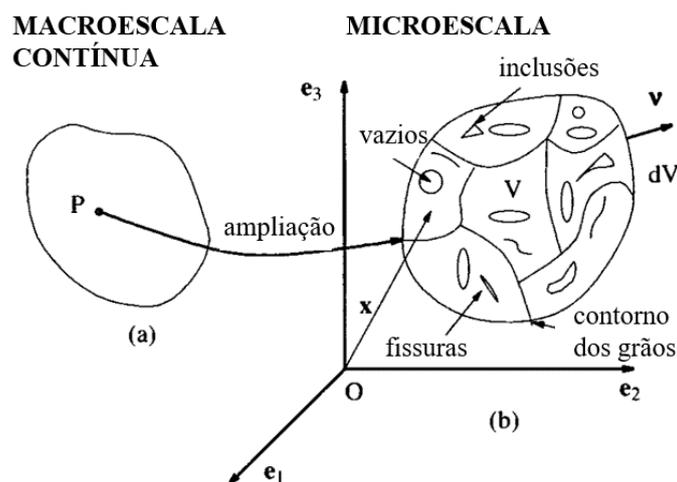
## **2.1 Métodos de homogeneização**

A análise estrutural de materiais heterogêneos, por meio de métodos numéricos, necessita da descrição das propriedades físicas que caracterizam o comportamento mecânico. Por exemplo, no regime elástico linear, considerando-se o comportamento isotrópico, utilizam-se parâmetros como o módulo de elasticidade longitudinal e o coeficiente de Poisson. Em virtude das características de heterogeneidade, é comum adotar um processo visando a homogeneização dos materiais, definindo desta forma as propriedades efetivas. Para os elementos de concreto reforçados com fibra, verifica-se na literatura o emprego dos métodos de homogeneização baseados na micromecânica dos campos médios.

Nemat-Nasser e Hori (1993) tratam que, por definição, a mecânica do contínuo aborda os materiais idealizados (Figura 11), na sua macroescala, consistindo em pontos materiais e suas vizinhanças. Assume-se que a distribuição de material, as tensões e as deformações, dentro de um corpo infinitesimal, podem ser tratadas de maneira essencialmente uniforme. Na microescala, entretanto, os constituintes não são, em geral, uniformes, possuindo diferentes propriedades e formas.

Com isto, na macroescala contínua, adota-se o conceito do Volume Elementar Representativo (VER), que corresponde, estatisticamente, à representação de um material contínuo e homogêneo. Para ser representativa, o VER deve incluir um grande número de heterogeneidade, tais como: vazios, inclusões, grãos e seus contornos, fissuras e defeitos similares.

**Figura 11** – Representação da microescala de um material



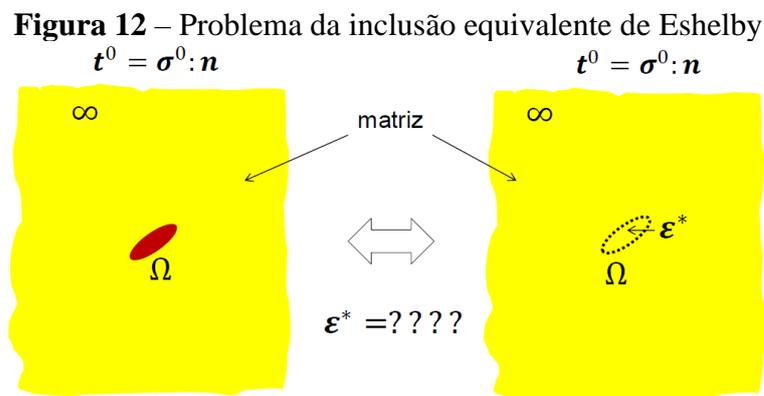
Fonte: adaptado de NEMAT-NASSER e HORI, 1993.

A utilização dos modelos micromecânicos para a previsão do comportamento de diversos materiais de engenharia cresceu ao longo dos anos. A microestrutura destes materiais é complexa, e de certa forma, randômica. Para a homogeneização dos materiais heterogêneos, os campos de tensões e deformações são definidos em termos de condições de contorno homogêneas. Com os teoremas da tensão média e deformação média, as equações básicas da micromecânica foram desenvolvidas. Desta forma, a estimativa das propriedades elásticas efetivas de materiais heterogêneos é um dos objetivos das análises micromecânicas baseadas nos teoremas dos campos médios.

Qu e Cherkaoui (2006) abordam que, na natureza, a maioria dos materiais de engenharia são heterogêneos. Geralmente, estes consistem em diferentes constituintes ou fases, que são

distinguíveis em escalas específicas. Para as aplicações em engenharia é relevante determinar as propriedades gerais ou efetivas dos materiais analisados em uma escala de interesse.

O problema da inclusão equivalente (Figura 12), também referido como método de Eshelby (1957) foi um marco na evolução da micromecânica. A ideia básica consiste em determinar o campo de deformação uniforme  $\varepsilon^*$  que deve ser imposto na inclusão, considerada como constituída pelo material da matriz, para que os campos de tensão e de deformação resultantes na mesma coincidam com aqueles gerados dentro da inclusão do problema original.



Fonte: MARQUES, 2020.

Os diversos métodos disponíveis na literatura para avaliação das propriedades efetivas de materiais heterogêneos são baseados na solução de Eshelby (1957) para a inclusão equivalente. Para a determinação das constantes elásticas efetivas do material compósito, os modelos consideram as frações volumétricas dos seus constituintes, como por exemplo, percentual de volume ocupado pela matriz e percentual de volume ocupado pelas inclusões.

Ressalta-se que a maioria dos métodos ignora a distribuição espacial das heterogeneidades, ou seja, assume-se que há uma distribuição uniforme das inclusões. Entretanto, as formas e orientações das heterogeneidades são levadas em consideração por meio do tensor de Eshelby (1957).

Deste modo, as propriedades elásticas efetivas previstas pelos modelos micromecânicos não dependem do tamanho das inclusões. As interações entre as heterogeneidades são levadas em consideração de forma diferente pelas diferentes abordagens. Em geral, o modelo de Eshelby (1957) é coerente para pequenas frações volumétricas de inclusão, enquanto os demais são aplicáveis para demais faixas de variação de volumes de inclusão.

Zhang *et al.* (2017) apresentaram uma metodologia de análise multiescala para um modelo micromecânico que envolve os níveis da pasta de cimento, do concreto e os reforços

com fibras híbridas. Para a homogeneização, considera-se as etapas de construção do compósito para a determinação das propriedades elásticas efetivas da macroestrutura de um concreto reforçado com fibras híbridas à temperatura ambiente. Com isto, têm-se que esta metodologia considera desde os produtos de hidratação do clínquer até a adição de diferentes fibras ao concreto. Verifica-se que o modelo autoconsistente generalizado pode ser empregado para as análises multiescala.

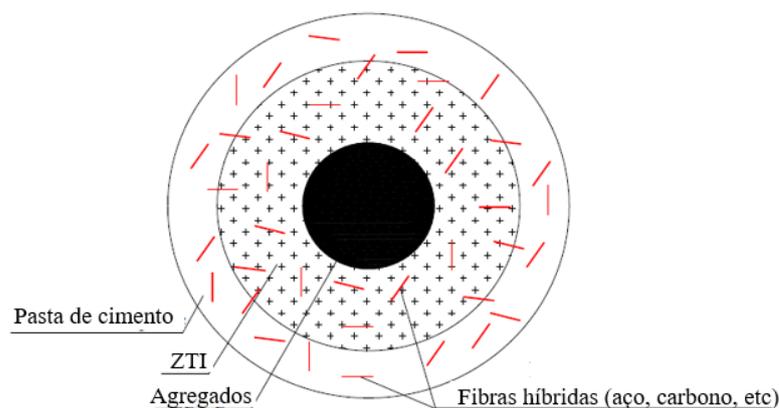
Chen *et al.* (2016) citam que formulações empíricas para avaliar as propriedades elásticas do concreto foram utilizadas por muito tempo, sendo estas obtidas por meio de testes de laboratório, consistindo em uma abordagem fenomenológica para formular o comportamento do material. Entretanto, uma alternativa interessante para lidar com este problema é a utilização da teoria da micromecânica, que pode reduzir os custos de laboratório e ainda proporcionar uma avaliação do comportamento estrutural em uma microescala.

De acordo com estudos prévios, os modelos micromecânicos utilizados para o concreto reforçado com fibras assumem a simplificação de que a forma do agregado é presumida como esférica, embora saiba-se que a geometria dos agregados é um pouco complexa na realidade. Além disto, as fibras podem ser distribuídas aleatoriamente na matriz e representadas por um conjunto de esferoides prolatos planos que podem diferir nas suas orientações.

Em geral, assume-se que a interface entre as fibras e a pasta de cimento possui aderência perfeita. No trabalho de Chen *et al.* (2016) é apresentado um modelo em que se considera a presença da zona de transição interfacial (ZTI) e a adição de mais de um tipo de fibra no concreto (Figura 13). Neste modelo, não se leva em consideração as relações geométricas da fibra (por exemplo, sua razão de aspecto). Com isto, apenas a fração volumétrica e as propriedades elásticas das fibras são utilizadas como características da inclusão.

Em virtude da homogeneização considerando-se diferentes níveis, Chen *et al.* (2016) realizam a interação das fibras com a matriz de concreto por meio de procedimento por etapas. Desta maneira, no primeiro nível considera-se a interação ZTI-agregado; no segundo, o resultado da homogeneização anterior com a matriz cimentícia; no terceiro, inicia-se a inclusão das fibras como elemento de reforço.

**Figura 13** – Concreto reforçado com fibras híbridas



Fonte: adaptado de CHEN *et al.*, 2016.

Para a consideração das propriedades elásticas efetivas do concreto reforçado com fibras de aço, o modelo de Mori-Tanaka pode ser considerado adequado (DUTRA, 2012). Uma vez que são identificadas duas fases: a matriz de concreto e as fibras, as quais se apresentam em moderada e baixa quantidade, outros modelos analíticos como: concentração diluída e autoconsistente, apresentam resultados semelhantes para baixas frações volumétricas de fibras (em geral, inferior a 5%). À medida que há uma proporção maior de fibras, estes modelos podem ter resultados diferentes.

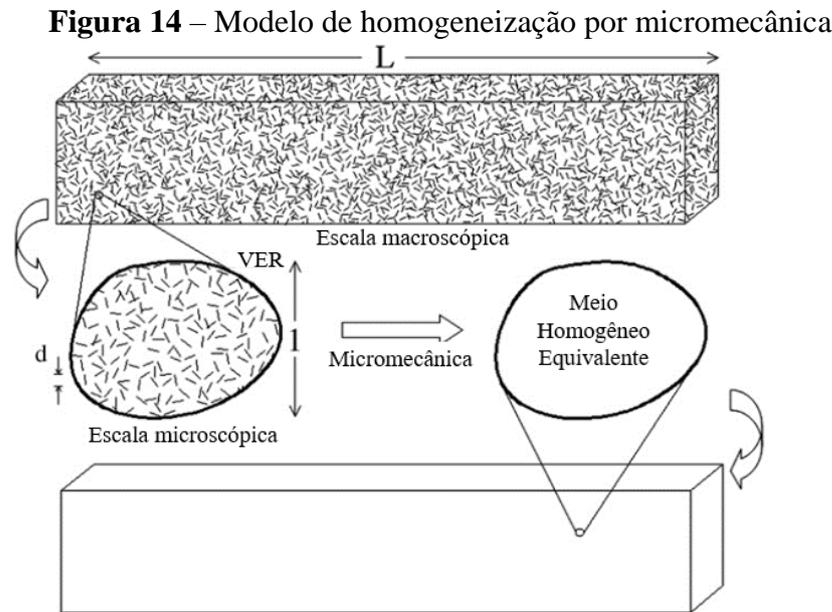
Dutra (2012) define que o CRFA pode ser considerado um material de comportamento isotrópico, uma vez que as fibras, que apresentam propriedades globais isotrópicas, são incorporadas aleatoriamente orientadas e distribuída na matriz de concreto. É possível obter por meio da homogeneização as constantes elásticas  $K^{hom}$  e  $G^{hom}$ , respectivamente, módulo de compressão volumétrica e módulo de elasticidade transversal. Ressalta-se que a homogeneidade assumida para a matriz de concreto resulta de um processo de homogeneização preliminar, a qual já considera as microfissuras existentes.

Considera-se ainda que, caso a dimensão da fibra seja grande em relação a uma ou duas dimensões do elemento de CRFA é observado uma distribuição na matriz de preferência bidimensional ou unidimensional, respectivamente. Com isto, obtém-se um material com comportamento anisotrópico (DUTRA, 2012).

### 2.1.1 Modelo de Mori-Tanaka

Por meio do modelo de homogeneização de Mori-Tanaka, busca-se a representação do CRFA em um meio homogêneo equivalente (Figura 14). O procedimento é baseado na definição

de um VER na escala microscópica, e por meio da micromecânica dos campos médios, realiza-se a homogeneização do compósito.



Fonte: adaptado de DUTRA *et al.*, 2010.

Neste trabalho, adota-se a média dos valores obtidos pelos códigos normativos (Tabela 1), em que  $\gamma$  é a massa específica do concreto considerada como  $2.500 \text{ kg/m}^3$ ,  $f_c$  é a resistência à compressão do concreto, em MPa;  $\alpha_E$  é um parâmetro que depende do tipo de agregado graúdo, sendo considerado 1,0 para granito e gnaiss.

**Tabela 1** – Recomendações normativas para o módulo de elasticidade

Módulo de elasticidade longitudinal ( $E_c$ ) em MPa	
CEB-FIP/Eurocode (2004)	$E_c = 22000 \cdot \left(\frac{f_c}{10}\right)^{1/3}$
ACI committee 363	$E_c = 21000 \cdot \left(\frac{\gamma}{2300}\right)^{1.5} \cdot \left(\frac{f_c}{20}\right)^{1/2}$
NBR 6118 (2023)	$E_c = \alpha_E \cdot 5600 \cdot \sqrt{f_c}$

Fonte: Autor, 2024.

As expressões analíticas para o modelo de Mori-Tanaka com a consideração de fibras com razão de aspecto ( $\alpha = a/b$ ) infinita ( $\alpha \rightarrow \infty$ ) são apresentadas em Dutra *et al.* (2010) (Figura 15), em que o módulo de compressão volumétrica é dado por

$$K^{hom} = \frac{N_K(k^m, g^m, k^f, g^f, f)}{D_K(k^m, g^m, k^f, g^f, f)} \quad (2)$$

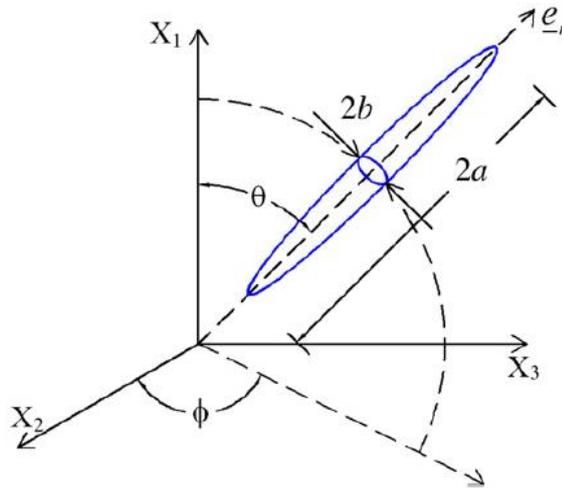
em que  $k^m$  e  $g^m$  são o módulo de compressão volumétrica e módulo de elasticidade transversal da matriz, respectivamente;  $k^f$  e  $g^f$  são o módulo de compressão volumétrica e módulo de elasticidade transversal das fibras, respectivamente;  $f$  é a fração volumétrica das fibras.

As funções  $N_K$  e  $D_K$  dependem das propriedades elásticas dos componentes do CRFA, assim como da fração volumétrica das fibras.

$$N_k = (3g^m + g^f)[(1 - f)k^m + fk^f] + 3k^mk^f \quad (3)$$

$$D_K = (3g^m + gf) + 3(fk^m + (1 - f)k^f) \quad (4)$$

**Figura 15** – Descrição da geometria do elemento de fibra



Fonte: DUTRA *et al.*, 2010.

O módulo de elasticidade transversal pode ser expresso por

$$G^{hom} = \frac{N_G(k^m, g^m, k^f, g^f, f)}{D_G(k^m, g^m, k^f, g^f, f)} \quad (5)$$

em que  $N_G = \sum_{i=1}^6 n_i$  e  $D_G = \sum_{i=1}^5 d_i$ , sendo

$$n_1 = 9fk^mk^f(g^f)^3 \quad (6)$$

$$n_2 = 3g^m(g^f)^2(7fg^f(k^m + k^f) + 15k^mk^f(1 + f) + 5g^fk^m) \quad (7)$$

$$n_3 = (g^m)^2g^f(35(g^f)^2(35 + 37f) + 15k^mg^f(5 + 3f) + 3k^fg^f(35 + 17f) + 10k^mk^f(9 - f)) \quad (8)$$

$$n_4 = (g^m)^3((g^f)^2(145 + 39f) + 21k^m g^f(5 - f) + 3k^f g^f(40 - 19f) + 45k^m k^f(1 - f)) \quad (9)$$

$$n_5 = (g^m)^4(45k^m(1 - f) + 15k^f(1 - f) + g^f(125 - 61f)) \quad (10)$$

$$n^6 = 15(g^m)^5(1 - f) \quad (11)$$

$$d_1 = 3k^m(g^f)^2(5g^f(1 - f) + 3k^f(5 - 4f)) \quad (12)$$

$$d_2 = g^m g^f(35(g^f)^2(1 - f) + 3k^m g^f(25 - 13f) + 21k^f g^f(5 - 4f) + 90k^m k^f) \quad (13)$$

$$d_3 = (g^m)^2((g^f)^2(145 - 73f) + 15k^m g^f(7 + f) + 12k^f g^f(10 + 3f) + 9k^m k^f(5 + 4f)) \quad (14)$$

$$d_4 = (g^m)^3(9k^m(5 + 4f) + 3k^f(5 + 16f) + g^f(125 + 59f)) \quad (15)$$

$$d_5 = (g^m)^4(15 + 49f) \quad (16)$$

De acordo com Sadd (2009), com a consideração de material isotrópico, pode-se utilizar as seguintes relações para as constantes elásticas do material homogeneizado, visto que estes parâmetros, módulo de elasticidade longitudinal dado por

$$E_{hom} = \frac{9 \cdot K_{hom} \cdot G_{hom}}{3 \cdot K_{hom} + G_{hom}} \quad (17)$$

e coeficiente de Poisson sendo expresso por

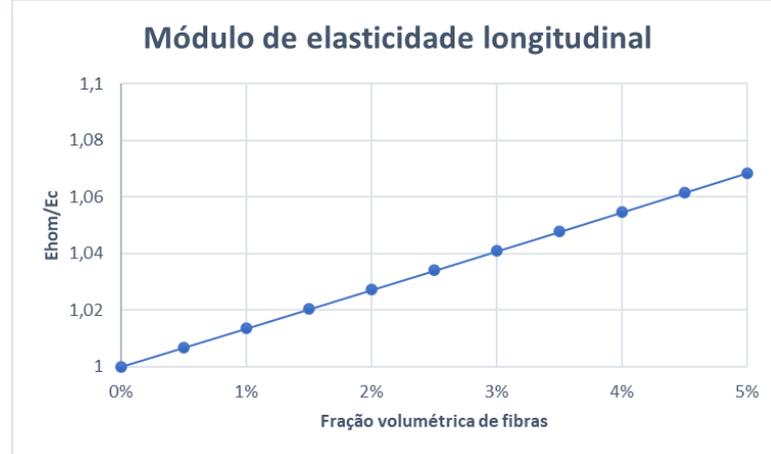
$$\nu_{hom} = \frac{3 \cdot K_{hom} - 2 \cdot G_{hom}}{6 \cdot K_{hom} + 2 \cdot G_{hom}} \quad (18)$$

são os mais comumente utilizados em análises numéricas.

Para a avaliação dos parâmetros efetivos com uma fração volumétrica de fibras de até 5%, considerando-se uma matriz de concreto ( $E_c = 31000 \text{ MPa}$ ,  $\nu_c = 0,20$ ) e a inclusão de fibras de aço ( $E_f = 210000 \text{ MPa}$ ,  $\nu_f = 0,30$ ), obtêm-se as Figura 16 e Figura 17, em que  $E_{hom}/E_c$  representa o módulo de elasticidade longitudinal homogeneizado dividido pelo

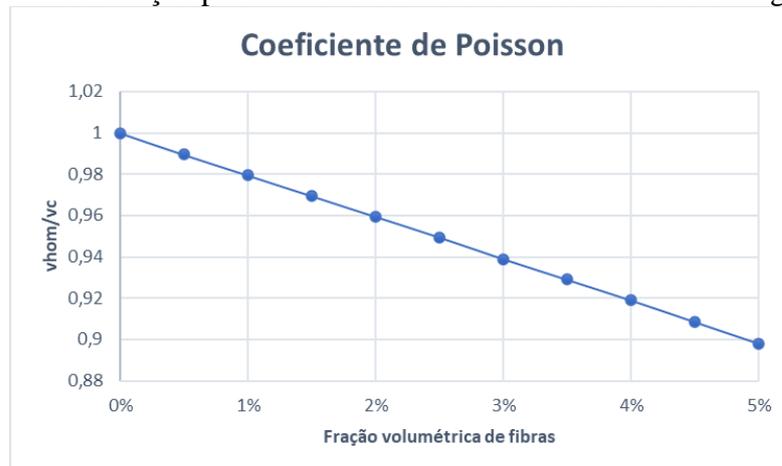
módulo de elasticidade da matriz (concreto);  $v_{hom}/v_c$  representa o coeficiente de Poisson homogeneizado dividido pelo coeficiente de Poisson da matriz (concreto).

**Figura 16** – Avaliação paramétrica do módulo de elasticidade homogeneizado



Fonte: Autor, 2024.

**Figura 17** - Avaliação paramétrica do coeficiente de Poisson homogeneizado



Fonte: Autor, 2024.

Observa-se que, de acordo com a Figura 16, utilizando-se o modelo de Mori-Tanaka, à medida que o percentual de fibras aumenta, o módulo de elasticidade tende a aumentar. Isto justifica que, para um teor de fibras de 5%, pode-se ter um aumento de cerca de 6% do módulo de elasticidade homogeneizado em comparação a este parâmetro elástico quando da ausência da adição das fibras. Neste modelo, nota-se que a consideração das fibras sempre resultará em um compósito com maior rigidez em relação à matriz original.

Matos (2021) relata que não há um consenso na literatura sobre a influência da adição de fibras de aço no módulo de elasticidade longitudinal do compósito. Contudo, há uma

concordância de que esta propriedade é definida em função do traço do concreto, especificamente pela adição de finos. Em alguns estudos, verifica-se que a adição de fibras de aço é capaz de diminuir o módulo de elasticidade, enquanto a adição de sílica tende a aumentar o valor desta propriedade.

Já para o coeficiente de Poisson, valores típicos na literatura identificam uma variação entre 0,18 e 0,22 para diversas classes de resistências analisadas. Este pequeno intervalo se justifica em função do procedimento experimental para determinação deste parâmetro, que é calculado a partir de observações nos estágios iniciais de carregamento, em que as fibras praticamente não contribuem com a capacidade resistente do compósito.

## **2.2 Modelos constitutivos**

A consideração de um modelo elástico linear para o concreto é válida apenas quando a curva carga-deslocamento se encontra em um regime de solitação à compressão, significando que a resistência à tração do concreto não pode ser alcançada e que fissuras não irão surgir. Desta forma, a favor da segurança na análise pós-fissuração, busca-se uma representação adequada por meio de modelos constitutivos mais realistas.

Dentre a variedade dos modelos constitutivos, que são capazes de descrever a relação tensão-deformação no concreto, basicamente, três áreas de estudo podem ser utilizadas para a modelagem do comportamento não linear do concreto: teoria da elasticidade não linear, teoria da plasticidade e mecânica do dano (STOIBER e KROMOSER, 2021).

Oliveira, Penna e Pitangueira (2020) destacam que a grande maioria dos modelos constitutivos adotam uma abordagem fenomenológica, isto é, descreve-se o material do ponto de vista macroscópico, desprezando os mecanismos microscópicos e considerando o material como contínuo e homogêneo.

Para a análise numérica do concreto, é comum adotar critérios de falha para a verificação dos parâmetros de resistência. Um critério de falha ou fratura é descrito em termo dos invariantes de tensões, que podem levar em consideração a superfície de escoamento do material. Uma quantidade considerável de trabalhos foi realizada considerando-se o critério de von Mises, o critério modificado de von Mises (ou critério de Drucker-Prager) e o critério de Coulomb ou critério de Coulomb modificado.

Com exceção do critério de von Mises, que em geral é utilizado para a modelagem do comportamento plástico de metais, Chen (2007) relata que todos os critérios desenvolvidos para concreto incorporam a dependência da tensão limite de escoamento na tensão normal média,

além da dependência do invariante da tensão de cisalhamento máxima. Estes critérios, por exemplo: Mohr-Coulomb e Drucker-Prager, são conhecidos na literatura como dependentes da pressão hidrostática.

Chen (2007) menciona que relações não lineares do concreto armado podem ser caracterizadas em três classes: o estágio elástico não fissurado, a propagação de fissuras e o estágio plástico. A resposta não linear é causa principalmente por dois efeitos da união dos materiais: a fissura do concreto e a plasticidade da armadura e do concreto à compressão.

Outras não linearidades independentes do tempo podem surgir das ações dos componentes do concreto armado individualmente. Por exemplo, Chen (2007) cita que o escorregamento da armadura em relação ao concreto, o efeito de intertravamento de agregados e o efeito de pino estão incluídos nessa classe. Demais efeitos dependentes do tempo também podem provocar uma resposta não linear, tal como a fluência, a retração e a variação de temperatura.

### 2.2.1 Modelo de Drucker-Prager

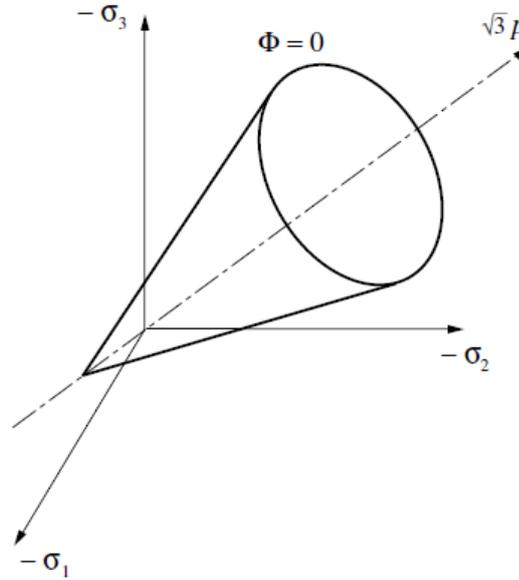
O critério proposto por Drucker e Prager (1952) pode ser considerado uma aproximação suave do critério de Mohr-Coulomb (SOUZA NETO; PERIĆ; OWEN, 2008). O modelo consiste em uma modificação do critério de von Mises em que é incluído um termo adicional para incluir a influência da pressão hidrostática. Estabelece-se que o escoamento plástico inicia quando o invariante  $J_2$  do estado de tensões deviatório e a tensão hidrostática  $p$  atingem uma combinação crítica, dada por

$$\sqrt{J_2(\bar{s})} + \eta p = \bar{c} \quad (19)$$

em que  $\eta$  e  $\bar{c}$  são parâmetros que dependem do tipo de material. Nota-se que no espaço das tensões principais, a superfície de escoamento deste critério é um cone circular cujo eixo é a linha hidrostática. Para  $\eta = 0$ , verifica-se que o cilindro de von Mises é recuperado.

Considerando-se o modelo de Drucker-Prager (1952) como um critério de resistência, pode-se utilizá-lo para a simulação de materiais frágeis, tais como concreto, solos e rochas. A Figura 18 apresenta a superfície do modelo.

**Figura 18** - Representação gráfica do modelo de Drucker-Prager



Fonte: SOUZA NETO; PERIĆ; OWEN, 2008.

Para aproximar a superfície de escoamento de Mohr-Coulomb, é conveniente definir a função de escoamento de Drucker-Prager como

$$\Phi(\sigma, c) = \sqrt{J_2(s(\sigma))} + \eta p(\sigma) - \xi c \quad (20)$$

em que  $c$  é a coesão do material e os parâmetros  $\eta$  e  $\xi$  são escolhidos de acordo com a aproximação requerida do critério de Mohr-Coulomb. Duas das mais clássicas aproximações são obtidas por meio das aproximações das bordas externas ou internas da superfície de Mohr-Coulomb.

Souza Neto, Perić e Owen (2008) exemplificam que em problemas de estado plano de tensão, uma aproximação que pode ser válida para estruturas de paredes de concreto, pode ser conveniente utilizar uma aproximação que satisfaça simultaneamente os critérios de Mohr-Coulomb e Drucker-Prager em estados de tensão uniaxial e compressão uniaxial. Para que o critério de Mohr-Coulomb tenha aderência para uma dada resistência à tração  $f'_t$  e uma dada resistência à compressão  $f'_c$ , os parâmetros  $c$  e  $\phi$  podem ser assumidos como

$$\begin{aligned} \phi &= \arcsin\left(\frac{f'_c - f'_t}{f'_c + f'_t}\right) \\ c &= \frac{f'_c \cdot f'_t}{f'_c - f'_t} \tan \phi \end{aligned} \quad (21)$$

Na Figura 19, apresenta-se o cone para o critério de ruptura de Drucker-Prager em estado plano de tensões. Para a previsão de ruptura uniaxial, ou seja,  $f'_t$  ou  $f'_c$ , a partir dos pontos coincidentes do critério de Mohr-Coulomb com Drucker-Prager, com as mesmas cargas, pode-se obter os parâmetros  $\eta$  e  $\xi$  por

$$\eta = \frac{3 \sin \phi}{\sqrt{3}}$$

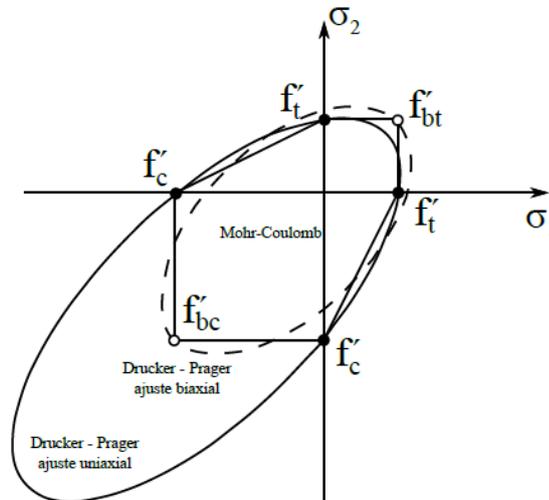
$$\xi = \frac{2 \cos \phi}{\sqrt{3}}$$
(22)

Considerando-se os pontos coincidentes para a tração biaxial ( $f'_{bt}$ ) e compressão biaxial ( $f'_{bc}$ ), os parâmetros  $\eta$  e  $\xi$  são definidos por

$$\eta = \frac{3 \sin \phi}{2\sqrt{3}}$$

$$\xi = \frac{2 \cos \phi}{\sqrt{3}}$$
(23)

**Figura 19** – Ajuste do modelo de Drucker-Prager em relação ao modelo de Mohr-Coulomb



Fonte: FARIA, 2017.

Ajmal *et al.* (2023) citam que ao expressar o modelo de Drucker-Prager em termos da coesão e ângulo de atrito, permite-se uma melhor interpretação física e elimina-se problemas numéricos associados aos cantos do plano deviatórico da superfície de falha do modelo de Mohr-Coulomb. Para que valores apropriados de  $c$  e  $\phi$  sejam obtidos, deve-se possuir informações sobre a resistência à compressão uniaxial ( $f'_c$ ), resistência à compressão biaxial ( $f'_{bc}$ ) e resistência à tração uniaxial ( $f'_t$ ). Com isto, observa-se que na literatura registra-se

variações do ângulo de atrito entre  $10^\circ$  a valores superiores a  $30^\circ$ , e a coesão é empiricamente determinada em uma variação de 13% a 43% de  $f'_c$ , de acordo com os autores.

Dutra (2012) propôs para o concreto reforçado com fibras de aço (CRFA), por meio de um modelo de homogeneização considerando o critério resistência de Drucker-Prager para matriz, as seguintes expressões para a resistência à compressão uniaxial ( $f_c^{CRFA}$ ) e biaxial ( $f_{cb}^{CRFA}$ ) do compósito, respectivamente

$$\alpha_m = \frac{f_{cbm} - f_{cm}}{2 \cdot f_{cbm} - f_{cm}} \quad (24)$$

$$\sigma_m = \frac{f_{cm} \cdot (1 - \alpha_m)}{(1 + \alpha_m)} \quad (25)$$

$$f_c^{CRFA} = \frac{(2 + \alpha_m) \cdot \left(\frac{f}{3}\right) \cdot \sigma_f^+ + (1 + \alpha_m) \cdot \sigma_m}{(\alpha_m - 1)} \quad (26)$$

$$f_{cb}^{CRFA} = \frac{(2 - \alpha_m) \cdot \left(\frac{f}{3}\right) \cdot \sigma_f^+ + (1 + \alpha_m) \cdot \sigma_m}{(2\alpha_m - 1)} \quad (27)$$

em que  $\alpha_m$  é um parâmetro escalar adimensional que varia entre 0 (critério de von Mises) e 1, o qual considera a dependência do critério em relação à tensão hidrostática;  $\sigma_m$  é o limite elástico do material sob o estado de tração uniaxial;  $f$  é a fração volumétrica de fibras e  $\sigma_f^+$  é a resistência à tração uniaxial das fibras.

Observa-se que para frações volumétricas inferiores a 5%, Dutra (2012) relata que a razão de aspecto das fibras tem uma pequena influência na determinação das resistências à compressão e tração uniaxial do compósito. Com isto, neste modelo, os estudos são limitados à porcentagem de fibras menores que o limite proposto. Desta forma, define-se como fatores determinantes a fração volumétrica das fibras e as características mecânicas das mesmas, além das características mecânicas da matriz cimentícia sem a adição das fibras.

Dutra (2012) apresenta o seguinte modelo para a estimativa da resistência à tração uniaxial do CRFA ( $f_t^{CRFA}$ )

$$f_t^{CRFA} = f_t + \frac{f \sigma_f^+}{3} \quad (28)$$

em que  $f_t$  é a resistência à tração da matriz cimentícia.

Verifica-se que o modelo analítico proposto para a estimativa de  $f_t^{CRFA}$  indica que pode ocorrer um aumento considerável na resistência do concreto ao se adicionar fibras. Conforme

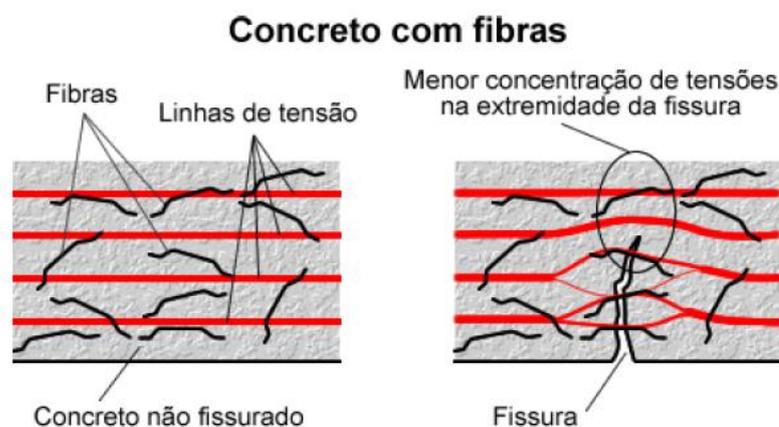
Dutra (2012), nota-se dos ensaios experimentais que ocorre esse aumento, entretanto, menor do que aquele previsto pelo modelo empregado.

Em geral, um critério de resistência para um material compósito pode ser determinado considerando-se as propriedades individuais de resistência de suas fases (matriz e fibras) e suas respectivas frações volumétricas. No trabalho de Dutra (2012), a formulação adotada permite a consideração de qualquer critério de resistência para os componentes do compósito. No caso das fibras, apenas suas resistências à compressão e à tração uniaxiais são necessárias. A resistência da matriz de concreto, na proposta da referida autora, é caracterizada pelo critério de Drucker-Prager.

Na definição do critério de resistência do CRFA, a consideração de aderência perfeita entre os constituintes equivale a igualar o material da interface fibra-matriz com resistência infinita e considerar qualquer fenômeno de falha que possa ocorrer no mesmo. Entretanto, por meio de observações experimentais, conclui-se que o CRFA pode, muitas vezes, ser influenciado pela falta de aderência entre suas fases. Uma abordagem mais apropriada, conforme sugerido por Dutra (2012) é de avaliar as propriedades limitadas de resistência da interface na formulação do domínio de resistência macroscópico.

Como o comportamento do concreto com reforço de fibras é controlado por processos de transferência de tensão da matriz para as fibras (Figura 20), diversos fatores condicionam este fenômeno, por exemplo: a condição da matriz, ou seja, no estágio pré-fissuração ou pós-fissuração; as propriedades mecânicas da matriz e da fibra; a geometria da fibra, isto é, seu comprimento, forma, diâmetro e mecanismo de ancoragem; a fração volumétrica de fibras, além das propriedades mecânicas da interface (DUTRA, 2012).

**Figura 20** – Comparação de concentração de tensões para concreto reforçado com fibras



Fontes: BARROS, 2009.

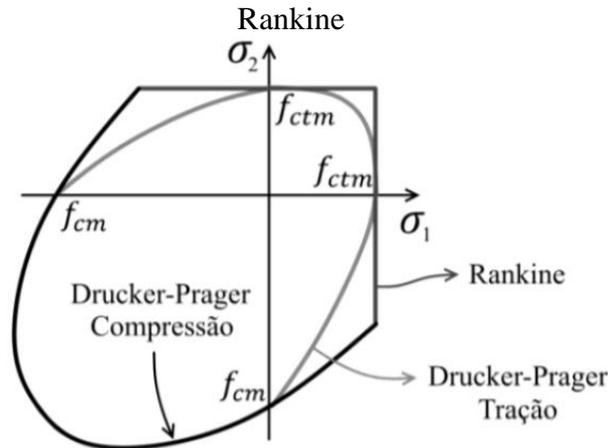
Para os compósitos cimentícios, sabe-se que a microestrutura ao redor da inclusão é diferente do restante da estrutura. Esta região é usualmente referida como zona de transição interfacial (ZTI). Sharma e Bishnoi (2020) comentam que a presença da zona de transição pode modificar o comportamento do concreto de frágil e elástico para quase dúctil, quando submetido à ação das forças externas. Diversos modelos com a abordagem micromecânica consideram a zona de transição como uma camada ao redor dos agregados. Entretanto, devido à indisponibilidade de ensaios experimentais para a determinação de suas características, tais como espessura e propriedades mecânicas, usualmente adota-se a estimativa de propriedades relativas à pasta de cimento.

A presença desta zona resulta em um gradiente de microestrutura, e em razão disso, um gradiente de propriedades mecânicas. Bentur e Mindess (2006) identificaram que duas situações podem surgir: uma interface porosa e fraca pode causar uma redução global do vínculo entre os materiais; uma interface fraca que não se encontra na superfície da fibra, mas sim na camada porosa da interface, um pouco longe da superfície da fibra. A primeira situação impacta diretamente a ligação e a resistência ao arrancamento, em contrapartida, a segunda tem um efeito indireto, influenciando o modo de descolagem, quando as fissuras se desenvolvem nestas partes da matriz e se propagam na direção das fibras (DUTRA, 2012).

Para quantificar a influência da ZTI na homogeneização do concreto reforçado com fibras, Chen *et al.* (2016) apresentam um modelo em que é apresentada uma proposta de quantificação da espessura e fração volumétrica da ZTI em uma abordagem multifásica. Verifica-se que há uma dependência direta dos parâmetros dos agregados, principalmente a distribuição granulométrica, que impacta no tamanho dos agregados e na fração volumétrica presente na composição do concreto.

Para as análises de resistência em problemas de engenharia, é usual adotar um critério de ruptura que represente o comportamento idealizado do material. O critério de Drucker-Prager pode ser considerado uma adaptação do critério de von Mises para materiais que possuem características de resistência diferentes quando solicitados à tração e à compressão (como o concreto), além de ser considerada a dependência da tensão hidrostática na ruptura do material. Entretanto, o supracitado modelo não permite a caracterização da sua resistência à tração e à compressão com os mesmos parâmetros. A sua associação com uma condição de *cut-off* em tração (tensões positivas) permite caracterizar de forma mais adequada o comportamento do concreto sob solicitações de tração (Figura 21) (MATOS, 2021).

**Figura 21** – Superfície de plastificação de Drucker-Prager com *cut-off* em tração do tipo

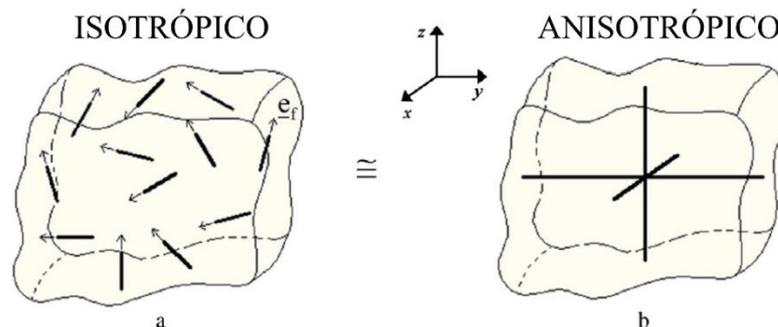


Fonte: MATOS, 2021.

Dutra (2012) introduziu os parâmetros  $\phi^{int}$  e  $c^{int}$ , que definem as propriedades da interface. Em virtude da impossibilidade de se realizar ensaios do material da interface diretamente, para a determinação destes parâmetros, é possível realizar uma análise inversa, em que conhecidas as propriedades de resistência do compósito e da matriz auxiliam na sua obtenção. Destaca-se que por meio desta abordagem, a influência da forma da fibra pode ser incorporada indiretamente ao modelo.

Para simplificação, assume-se que as fibras estão dispostas em três direções perpendicular entre si (Figura 22). Neste meio periódico fictício, as fibras são consideradas longas de acordo com  $p$  direções. De modo que, para a estimativa do meio homogeneizado, quanto maior for o número de direções consideradas, melhor é o resultado. Em particular, o domínio de resistência tende a ser isotrópico à medida que  $p$  aumenta. Entretanto, nesta modelagem não se considera diretamente o efeito da razão de aspecto no domínio de resistência homogeneizado (DUTRA, MAGHOUS e CAMPOS FILHO, 2013).

**Figura 22** – Volume elementar representativo (VER) e célula periódica simplificada



Fonte: adaptado de DUTRA, MAGHOUS e CAMPOS FILHO, 2013.

Pode-se definir, em função da simetria que ocorre em relação às três direções das fibras, a envoltória demonstrada na Figura 23. Em função das análises inversas realizadas para determinar as propriedades da interface, Dutra (2012) apresentou um modelo para a aproximação destes parâmetros demonstrado nas equações a seguir.

$$tg \phi^{int} = \frac{-(\Sigma^* + f_t^{CRFA})}{2 \cdot \sqrt{-(\Sigma^* + f_t^{CRFA})}} \quad (29)$$

$$c^{int} = \frac{-(\Sigma^* \cdot f_t^{CRFA})}{2 \cdot \sqrt{-(\Sigma^* + f_t^{CRFA})}} \quad (30)$$

em que

$$\Sigma^* = \frac{(-f_1 + f_2) \cdot (f_7 + f_8)}{f_9} \quad (31)$$

$$f_1 = \sqrt{3} \cdot (1 - \alpha_m^2)(-\sigma_x + \sigma_z) \quad (32)$$

$$f_2 = \sqrt{1 - \alpha_m^2} \cdot (3 \cdot \alpha_m \cdot (-\sigma_x - \sigma_z) - 2 \cdot \sigma_m \cdot (1 + \alpha_m)) \quad (33)$$

$$f_7 = 3 \cdot \alpha_m \cdot \sqrt{1 - \alpha_m^2} \quad (34)$$

$$f_8 = \sqrt{3} \cdot (1 - \alpha_m^2) \quad (35)$$

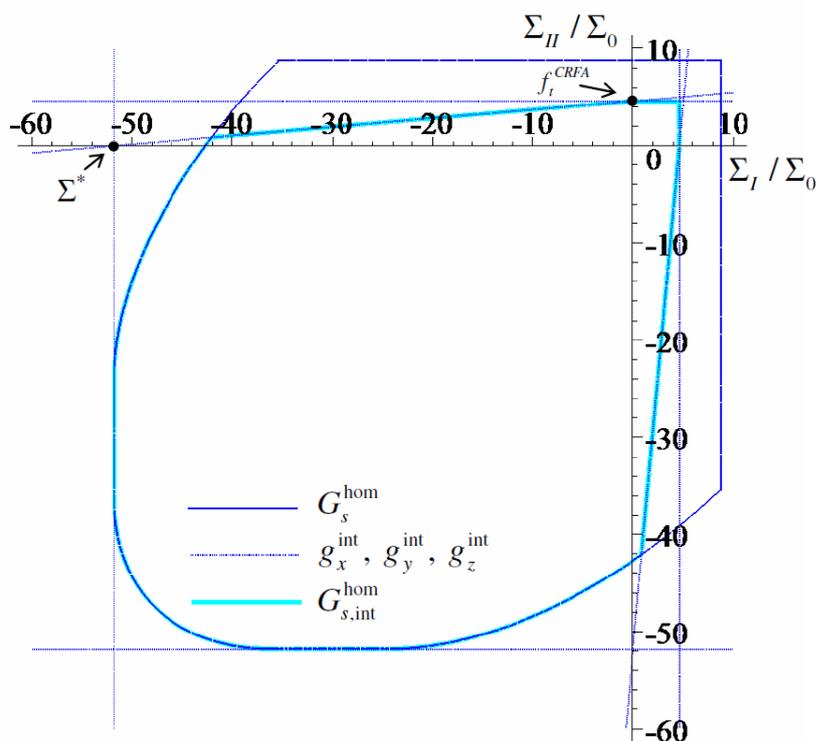
$$f_9 = 3 \cdot (1 - \alpha_m^2) \cdot (1 - 4 \cdot \alpha_m^2) \quad (36)$$

$$\sigma_x = f_x \sigma_x^- \quad (37)$$

$$\sigma_z = f_z \sigma_z^+ \quad (38)$$

em que  $\sigma^+$  e  $\sigma^-$  são as resistências à compressão e à tração, respectivamente, das fibras aplicadas ao CRFA.

**Figura 23** – Obtenção do domínio de resistência considerando a interface



Fonte: DUTRA, 2012.

Huang (2022) cita que diversos modelos para descrever o comportamento do concreto simples têm sido adotados nos estudos numéricos para as estruturas de concreto reforçado com fibras. Considerando que estes dois materiais possuem semelhanças na macroescala e que as fibras são distribuídas continuamente no concreto homogeneizado, pode-se adaptar os modelos de concreto simples por meio da calibração de parâmetros experimentais para o CRF ou por modelos constitutivos (curvas tensão-deformação) que possam refletir o comportamento dúctil melhorado pós-pico.

No trabalho de Huang (2022) usa-se o modelo de Drucker-Prager com a consideração do parâmetro escalar do módulo de endurecimento ( $H$ ). Para o modelo de endurecimento linear, o autor utiliza valores negativos para definir o comportamento de amolecimento ao cisalhamento, por exemplo, a coesão permanece com o seu valor inicial até que o fluxo plástico inicie, e então decresce conforme a deformação plástica equivalente acumula. Para destacar o comportamento aprimorado pós-escoamento do CRF, Huang (2022) descreve que o módulo de endurecimento do CRF é 1/10 do valor considerado para o concreto simples.

Dutra, Maghous e Campos Filho (2013) avaliaram as propriedades de resistência do CRFA com base na homogeneização e análise limite. A eficiência desta abordagem é comparada com soluções numéricas por meio do método dos elementos finitos, e em seguida, com

resultados experimentais da literatura. As aproximações para previsão do comportamento resistente do material são consideradas satisfatórias.

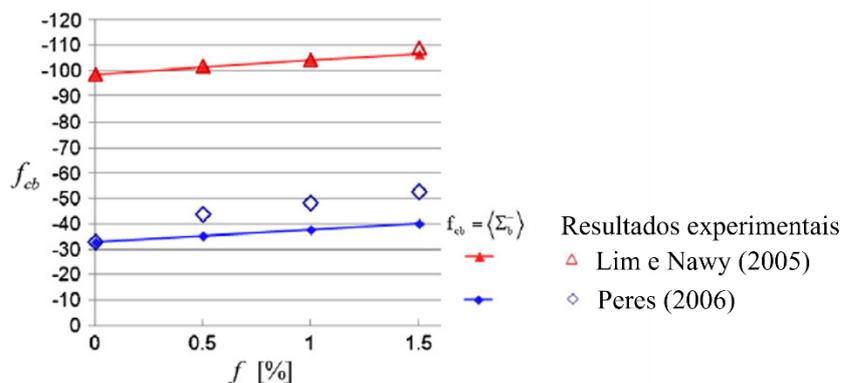
Dutra, Maghous e Campos Filho (2013) validaram os resultados obtidos por meio da homogeneização com resultados experimentais. Lim e Nawy (2005) utilizaram fibras com  $L/D = 70$  e resistência uniaxial de 1115 MPa. As resistências uniaxial e biaxial do concreto avaliado foram de  $f_{cm} = 82,3$  MPa e  $f_{cbm} = 1,20 \cdot f_{cm}$ . Os parâmetros do critério Drucker-Prager foram identificados como  $\alpha_m = 0,141$  e  $\sigma_m = 61,93$  MPa.

Peres (2006) utilizou fibras com  $L/D = 44$  e resistência uniaxial de 1200 MPa. As resistências uniaxial e biaxial do concreto avaliado foram de  $f_{cm} = 28,24$  MPa e  $f_{cbm} = 1,16 \cdot f_{cm}$ . Os parâmetros do critério Drucker-Prager foram identificados como  $\alpha_m = 0,121$  e  $\sigma_m = 23,13$  MPa.

Para a resistência à compressão biaxial do CRFA, a Figura 24 demonstra as estimativas do método proposto e os resultados obtidos experimentalmente. Já para a resistência à compressão uniaxial, a Figura 25 aponta o comparativo, também em função da fração volumétrica de fibras. Os dois trabalhos utilizados para o confronto experimental possuem matrizes de resistências bem distintas.

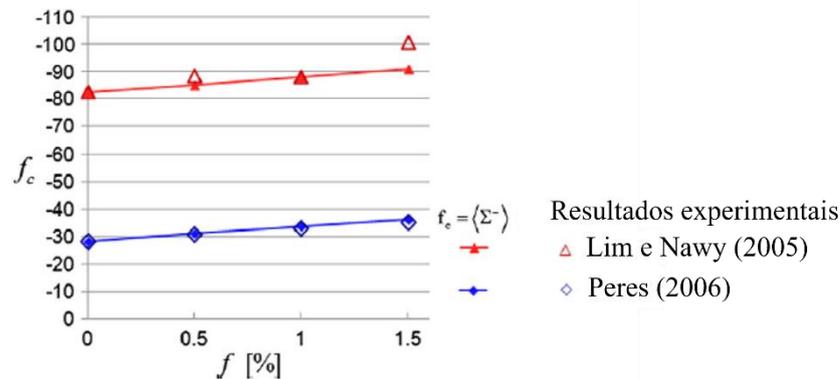
Além do fato que, para justificar a discrepância observada, pode-se analisar que foram utilizados cubos de dimensões  $10 \times 10 \times 10$  cm<sup>3</sup> por Lim e Nawy (2005), enquanto Peres (2006) utilizou cubos de  $15 \times 15 \times 5$  cm<sup>3</sup>. Em função das maiores dimensões paralelas à direção principal da solicitação biaxial, há uma maior concentração de fibras ao longo das maiores dimensões, que são coincidentes com a direção do carregamento (DUTRA, MAGHOUS e CAMPOS FILHO, 2013).

**Figura 24** – Comparação da resistência à compressão biaxial



Fonte: adaptado de DUTRA, MAGHOUS e CAMPOS FILHO, 2013.

**Figura 25** – Comparação da resistência à compressão uniaxial



Fonte: adaptado de DUTRA, MAGHOUS e CAMPOS FILHO, 2013.

Estes resultados podem ratificar que o uso do critério de Drucker-Prager é condizente para a análise do concreto sob o estado de compressão biaxial. Apresenta-se também como uma formulação mais simples do que, por exemplos, os critérios de Ottosen e Willian-Warnke, visto que não permite a caracterização do comportamento à tração e à compressão com os mesmos parâmetros.

Propõe-se, neste trabalho, utilizar o modelo de homogeneização de Mori-Tanaka para a caracterização elástica do CRFA, e adotar o critério de ruptura de Drucker-Prager, baseado em propriedades efetivas homogeneizadas do compósito, como modelo de resistência do CRFA.

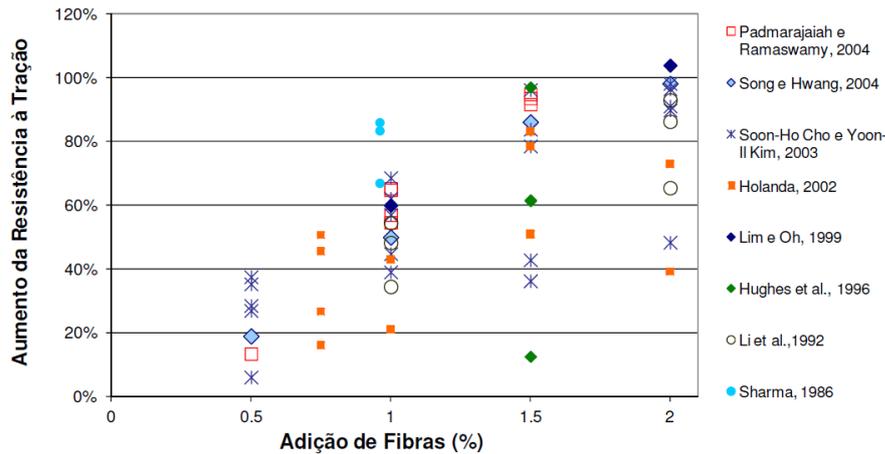
Para isto, é necessário conhecer individualmente as propriedades do concreto simples e as propriedades das fibras de aço. Com estas definições, em função de uma determinada fração volumétrica de fibras, pode-se utilizar princípios da micromecânica de campos médios para simplificar o comportamento deste material heterogêneo em um material homogêneo equivalente.

Nas propriedades mecânicas do material homogeneizado, tais como resistência à tração ( $f_t^{CRFA}$ ) e resistência à compressão ( $f_c^{CRFA}$ ), utiliza-se o critério de resistência de interface como método de análise inversa para definição do comportamento resistente às solicitações de compressão. De posse de  $f_t^{CRFA}$  e  $f_c^{CRFA}$ , a relação proposta por Souza Neto, Perić e Owen (2008) para ajuste uniaxial é utilizada (Eq. (21)) e, desta forma, ângulo de atrito ( $\phi$ ) e coesão ( $c$ ) podem ser estimados com base na aproximação do comportamento elastoplástico do material.

Para validação da consideração de um critério de *cut-off* em tração, a eq. (28), como já mencionado, superestima a resistência à tração uniaxial do CRFA. Experimentalmente, não se encontra aumentos da resistência à tração do CRFA superiores à ordem de 200% quando da

adição de fibras, o que pode ser verificado em diversos trabalhos (Figura 26). Entretanto, ao se utilizar as resistências obtidas por meio dos resultados experimentais, uma formulação alternativa simplificada pode ser empregada para a caracterização do CRFA sob solicitações de tração (DUTRA, 2012).

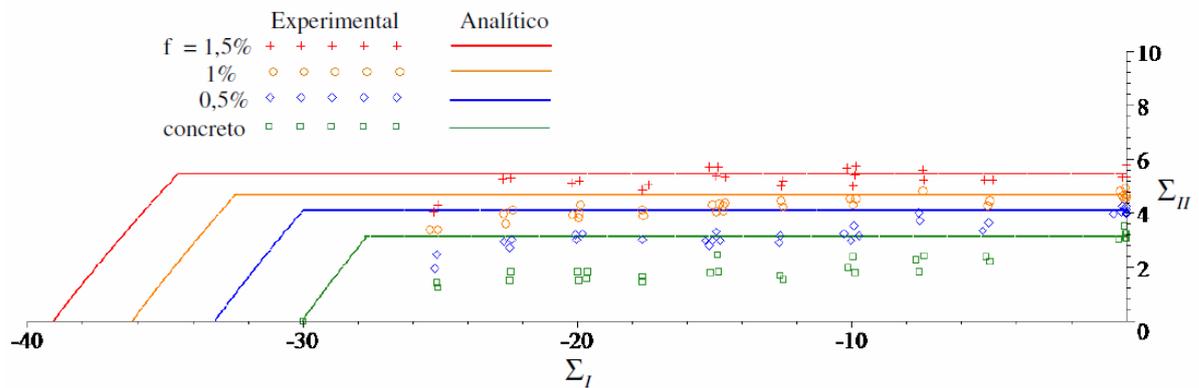
**Figura 26** – Resistência à tração do CRFA com a fração de fibras



Fonte: DUTRA, 2012.

O trabalho de Demeke e Tegos (1994) avaliou corpos de prova de CRFA solicitados, simultaneamente, a tensões de compressão e de tração. Os parâmetros analisados foram a combinação de duas tensões biaxialmente aplicadas e a fração volumétrica de fibras. Foram utilizadas fibras com  $L/D = 60$  e resistência uniaxial de 1000 MPa. As resistências uniaxial e biaxial do concreto avaliado foram de  $f_{cm} = 30,00$  MPa e  $f_{cbm} = 1,16 \cdot f_{cm}$ . Além disto, a resistência à tração uniaxial foi de  $f_t = 3,14$  MPa. Os parâmetros do critério Drucker-Prager foram identificados como  $\alpha_m = 0,123$  e  $\sigma_m = 23,46$  MPa.

Por meio de análise experimental, as resistências à tração uniaxial do CRFA foram as seguintes:  $f_t^{CRFA0,5\%} = 4,11$  MPa;  $f_t^{CRFA1,0\%} = 4,70$  MPa e  $f_t^{CRFA1,5\%} = 5,48$  MPa. Utilizando-se a proposta da eq. (28), têm-se  $f_t^{CRFA0,5\%} = 4,81$  MPa;  $f_t^{CRFA1,0\%} = 6,47$  MPa e  $f_t^{CRFA1,5\%} = 8,14$  MPa. A Figura 27 apresenta a comparação do modelo analítico de Dutra (2012) e os resultados experimentais de Demeke e Tegos (1994).

**Figura 27** – Validação experimental de Demeke e Tegos (1994)

Fonte: DUTRA, 2012.

Verifica-se que a formulação adotada se aproxima satisfatoriamente da análise experimental. Para maiores valores de tensões de compressão são encontradas maiores diferenças, principalmente para a tensão à compressão uniaxial, em que os autores encontraram apenas 5% de acréscimo para a adição de 1,5% de fibras. Em outros trabalhos é possível verificar acréscimos maiores para o aumento da resistência à compressão uniaxial. Pode-se explicar este fato devido à incorporação de ar no concreto e a ausência de aderência entre fibra-matriz, os quais não estão inclusos no modelo analítico proposto por Dutra (2012).

Matos (2021) realizou um estudo comparativo e de validação das previsões de resistência e de comportamento mecânico do CRFA com o modelo de Dutra (2012) e o modelo *Concrete Damaged Plasticity* (CDP), que está disponível no *software* ABAQUS/CAE®. Por exemplo, para o trabalho de Peres (2006) são apresentadas as superfícies de ruptura biaxiais (Figura 28).

Considera-se que a maioria dos dados disponíveis na literatura do CRFA sob solicitações biaxiais, com base em avaliações experimentais, apresentam pouco ou nenhum resultado referente ao material sob esforços de tração. Desta forma, considera-se que nas análises de Matos (2021) a resistência à tração para o CRFA e para o concreto simples é a mesma que a obtida para o compósito sob solicitações uniaxiais. Utilizou-se, portanto, a relação proposta pelo *fib Model Code 2010* (Eq. (39)) (*fib*, 2013).

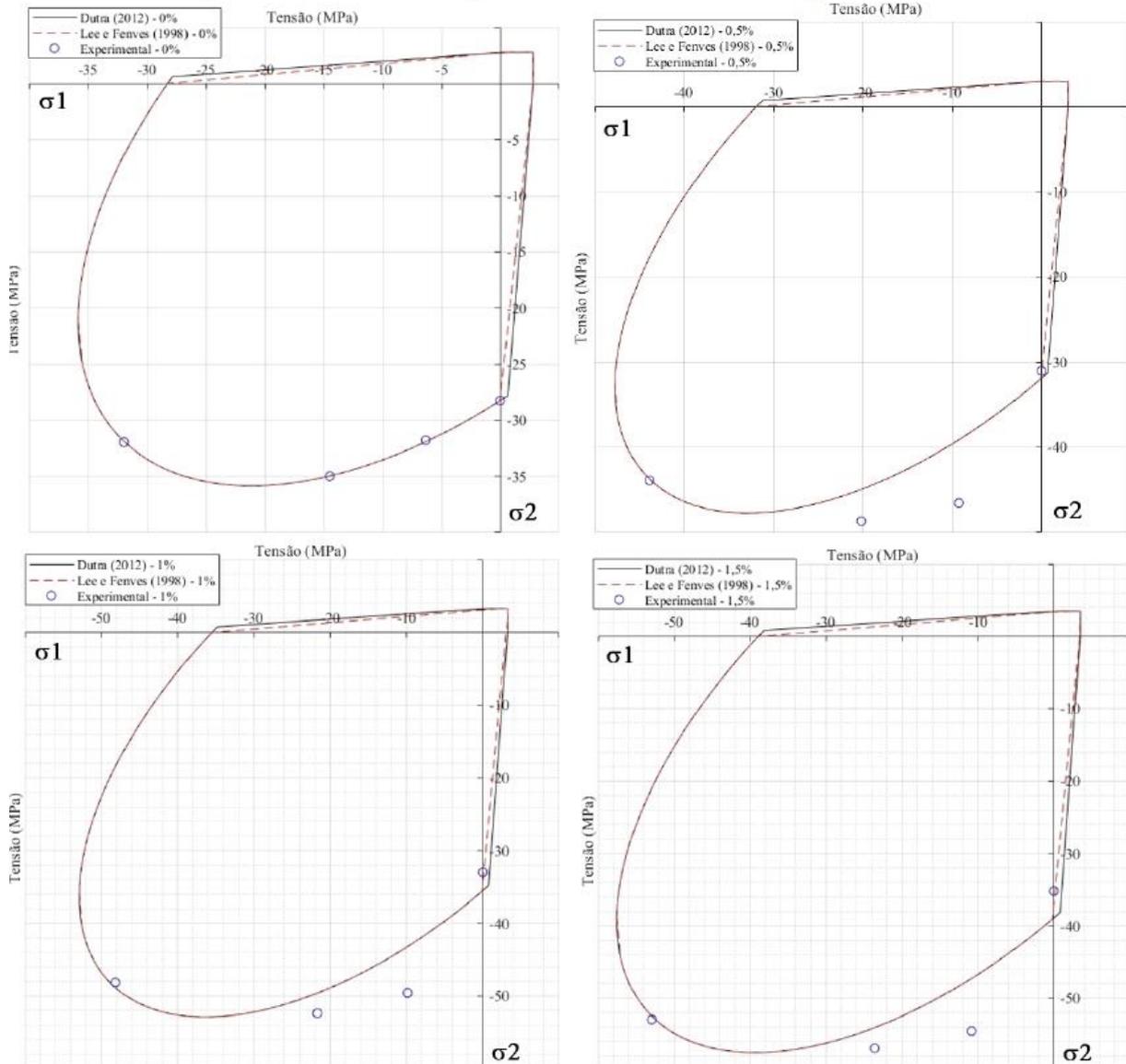
$$f_{ctm} = 0,3 \cdot (f_{cm})^{2/3} \quad (39)$$

em que  $f_{ctm}$  é a resistência média à tração do concreto e  $f_{cm}$  é a resistência à compressão média do concreto.

Para concretos com resistência à compressão acima de 50 MPa, o seguinte ajuste é proposto:

$$f_{ctm} = 2,12 \cdot \ln(1 + 0,11 \cdot f_{cm}) \quad (40)$$

**Figura 28** – Curvas de ruptura biaxiais para diferentes frações volumétricas

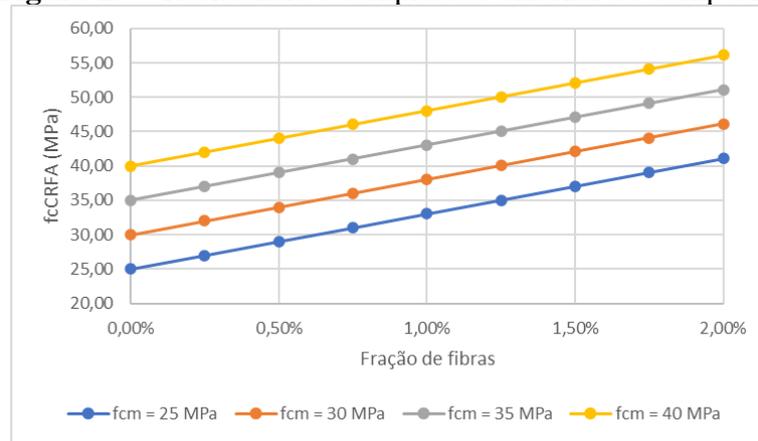


Fonte: MATOS, 2021.

Matos (2021) aponta que o modelo sugerido por Dutra (2012) apresenta considerável concordância, em relação à previsão de resistências à compressão uniaxial e biaxial do CRFA, com a maioria dos resultados experimentais da literatura. As curvas obtidas pelo modelo CDP são semelhantes ao modelo concebido por Dutra (2012), apresentando uma pequena diferença em relação ao ramo tração-compressão, no qual o modelo CDP se mostra um pouco menos resistente que o modelo de Drucker-Prager apresentado por Dutra (2012)

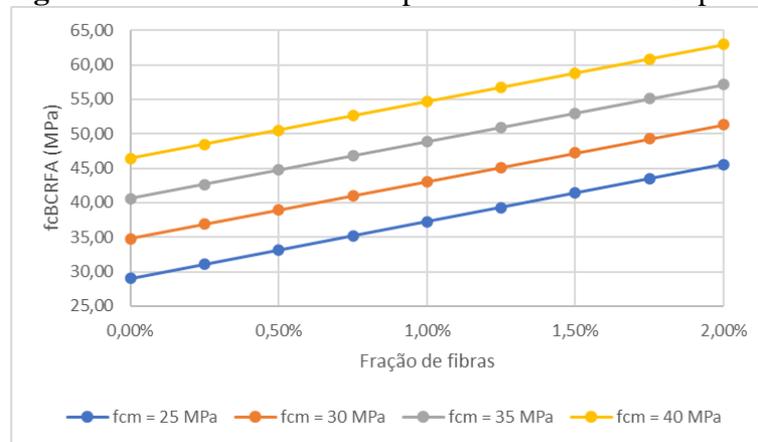
Exemplificando a proposta de homogeneização, realizou-se uma análise com concretos de resistência à compressão média de 25 a 40 MPa. A Figura 29 apresenta a resistência à compressão uniaxial do compósito, a Figura 30 demonstra a resistência à compressão biaxial do compósito.

**Figura 29** – Resistência à compressão uniaxial do compósito



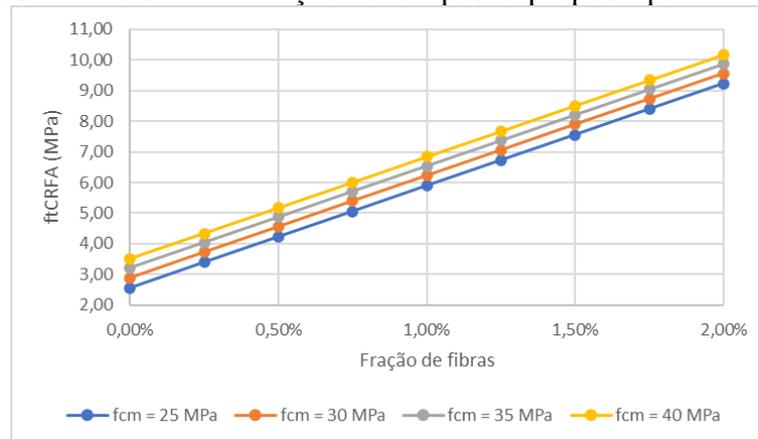
Fonte: Autor, 2024.

**Figura 30** – Resistência à compressão biaxial do compósito



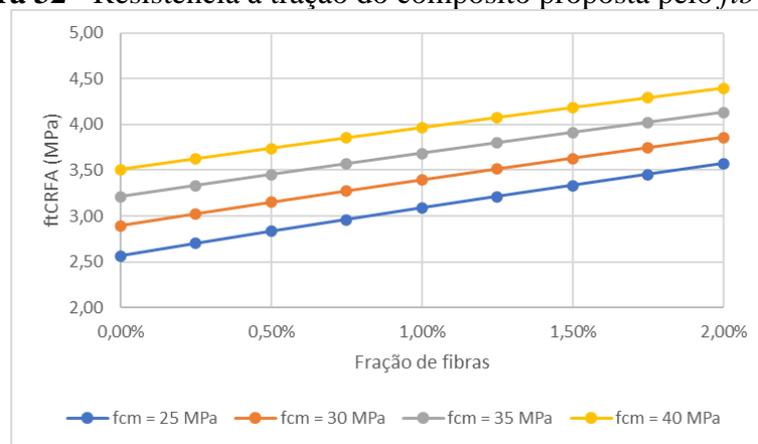
Fonte: Autor, 2024.

Para a obtenção da resistência à tração do material homogeneizado, com a proposta das fibras colineares, de acordo com a Eq. (28), observa-se a Figura 31.

**Figura 31** – Resistência à tração do compósito proposta por Dutra (2012)

Fonte: Autor, 2024.

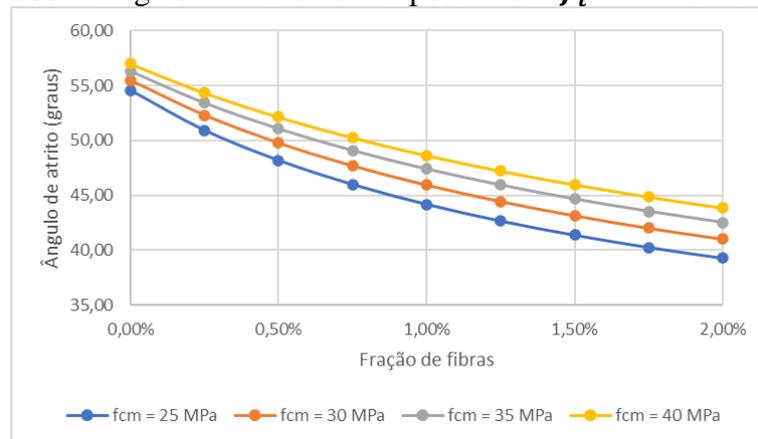
Por meio da Eq. (39), observa-se na Figura 32 que o aumento na resistência à tração, em função da fração de fibras, é menor do que o observado na proposta de Dutra (2012). Estes valores são mais realistas e representam a tendência da investigação experimental.

**Figura 32** - Resistência à tração do compósito proposta pelo *fib* (2013)

Fonte: Autor, 2024.

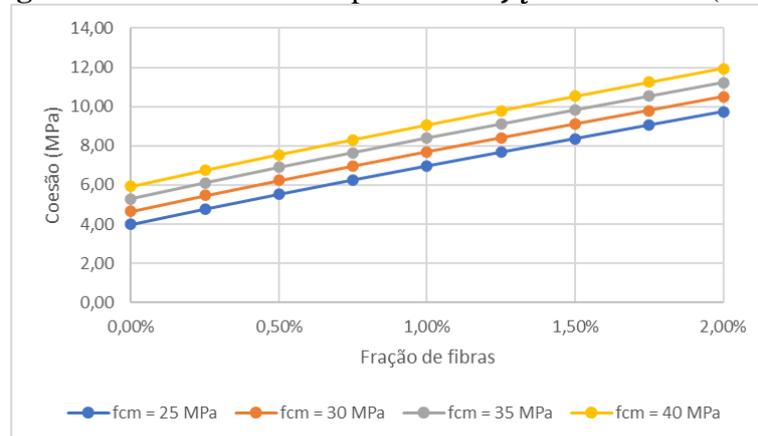
Para os parâmetros de resistência, obtidos por meio da determinação das resistências do material modelado com as propriedades efetivas, têm-se na Figura 33 a avaliação do ângulo de atrito e na Figura 34 a coesão. Conclui-se que, em razão do modelo empregado, à medida que a resistência à compressão do concreto aumenta, o ângulo de atrito decresce. Em contraste, a coesão aumenta em função do acréscimo na resistência à compressão.

**Figura 33** – Ângulo de atrito do compósito com  $f_t^{CRFA}$  de Dutra (2012)



Fonte: Autor, 2024.

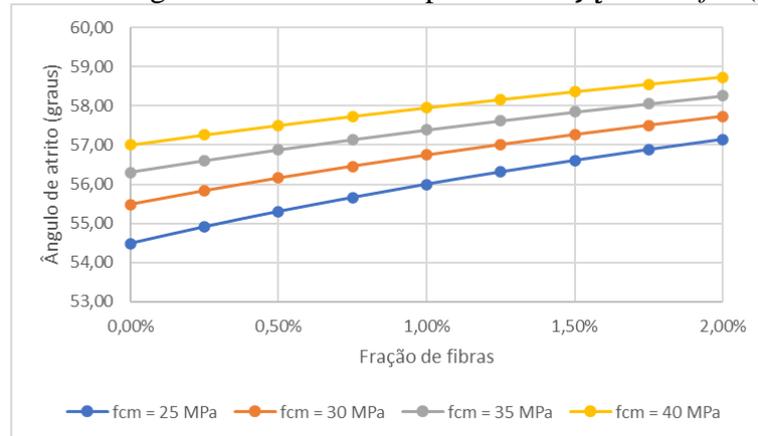
**Figura 34** – Coesão do compósito com  $f_t^{CRFA}$  de Dutra (2012)



Fonte: Autor, 2024.

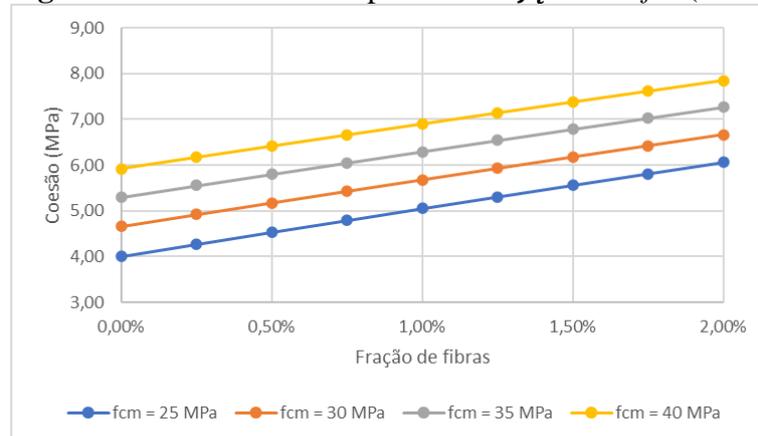
Analisa-se os parâmetros de resistência obtidos e com  $f_t^{CRFA}$  baseado na proposta do *fib* (2013), têm-se na Figura 35 a avaliação do ângulo de atrito e na Figura 36 a coesão. Infere-se que, com os novos parâmetros de resistência à tração, à medida que a resistência à compressão do concreto aumenta, o ângulo de atrito e a coesão tornam-se maiores.

**Figura 35** - Ângulo de atrito do compósito com  $f_t^{CRFA}$  do *fib* (2013)



Fonte: Autor, 2024.

**Figura 36** - Coesão do compósito com  $f_t^{CRFA}$  do *fib* (2013)

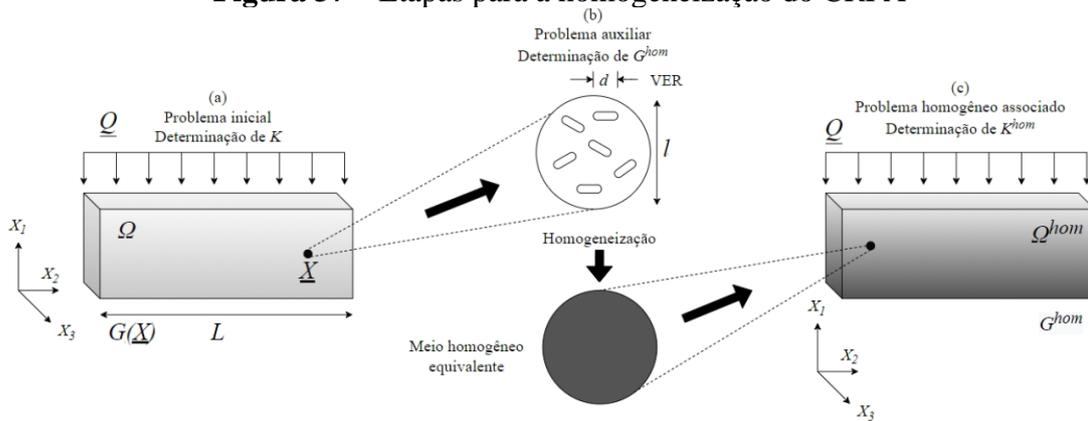


Fonte: Autor, 2024.

A justificativa apresentada para a estimativa da resistência à tração uniaxial com base no *fib Model Code 2010* (*fib*, 2013) torna-se mais indicada, visto que, de acordo com as curvas de ruptura apresentadas por Matos (2021), a formulação mostrou-se mais coerente com os resultados experimentais.

Em consonância com os trabalhos de Dutra (2012) e Matos (2021), utiliza-se a consideração de um meio contínuo homogêneo. Primeiramente, consideram-se fibras dispostas aleatoriamente na matriz de concreto, sendo ambos considerados homogêneos. Em seguida, define-se o VER do meio heterogêneo, que possui como objetivo a definição da resistência do material. Com estas propriedades do meio homogêneo definidas, na etapa final, é possível avaliar as propriedades mecânicas da estrutura.

**Figura 37** – Etapas para a homogeneização do CRFA



Fonte: MATOS, 2021.

Conclui-se que o modelo de Dutra (2012) possui limitações quanto a influência da resistência da interface no domínio de resistência macroscópico, direções das tensões principais distintas das direções de reforço e, inclusive, a consideração de uma distribuição não aleatória das fibras, o que possivelmente ocorreu em corpos de prova que foram avaliados experimentalmente.

Nota-se que os parâmetros de resistência obtidos com o modelo analítico, em geral, subestimam os valores da resistência à compressão biaxial e superestimam os valores da resistência à compressão uniaxial. Também se verifica que, ao se considerar na análise as tensões principais colineares às direções do reforço das fibras, as estimativas de resistência à tração uniaxial do compósito são superiores aos valores experimentais disponíveis na literatura. A abordagem simplificada permite uma alternativa, por meio do uso dos dados experimentais de caracterização da tração uniaxial, da definição adequada do critério de ruptura no trecho compressão-tração.

### 2.3 Avaliação das propriedades mecânicas

Para o concreto simples, Li *et al.* (2018) consideram que os agregados, a argamassa e zona de transição interfacial possuem o comportamento típico de materiais frágeis, e possuem diferentes comportamentos em relação à resistência à tração e a resistência à compressão. A ruptura por tração geralmente começa a se manifestar com o aparecimento de fissuras por meio das tensões principais de tração e a ruptura acontece de maneira frágil pela propagação das mesmas.

A ruptura por compressão, de acordo com Li *et al.* (2018) é causada tipicamente por coalescência das fissuras devido ao estado de compressão-cisalhamento no elemento de concreto. Com isto, é necessário considerar a influência da tensão confinante na resistência à compressão.

A adição de fibras descontínuas e aleatoriamente distribuídas na matriz atua como reforço estrutural e permite o controle da abertura e propagação de fissuras no elemento de concreto. Com isto, têm-se uma alteração no comportamento mecânico após a ruptura (fissuração) da matriz, aumentando a capacidade de absorção de energia do concreto e diminuindo o nível de fragilidade do material (ABNT, 2021a).

### **2.3.1 Avaliação no estado fresco**

A adição de fibras ao concreto proporciona alterações significativas no estado fresco, visto que altera consideravelmente a trabalhabilidade da mistura. Como alternativa para solucionar este problema, usualmente, utiliza-se aditivos superplastificantes para melhorar a fluidez do concreto. Com isto, têm-se uma maior estabilidade da mistura e há uma distribuição das fibras de maneira uniforme, sendo possível orientá-las em direções preferenciais.

Os estudos associados à orientação das fibras de aço apresentam destaque, pois verifica-se que a orientação está relacionada diretamente a um aumento na resistência à tração. Com um maior controle de qualidade do compósito, Bentur e Mindess (2006) afirmam que um volume de 5% de fibras de aço lisas e retas dispostas na direção da solicitação de tração podem incrementar em até 130% na resistência, enquanto o mesmo volume na direção aleatória apresenta um ganho de 60%.

Lima (2020) relaciona que a orientação das fibras é influenciada por diversos fatores, desde o modo de mistura até a fase final de endurecimento do concreto. Para o máximo aproveitamento das propriedades do concreto com fibras, devem ser adotados processo de produção que possibilitem a indução de direções e locais preferenciais das fibras em regiões submetidas às maiores tensões, pois verifica-se que quanto mais alinhadas à linhas de tensão, maior será o reforço proporcionado pelas fibras no elemento estrutural.

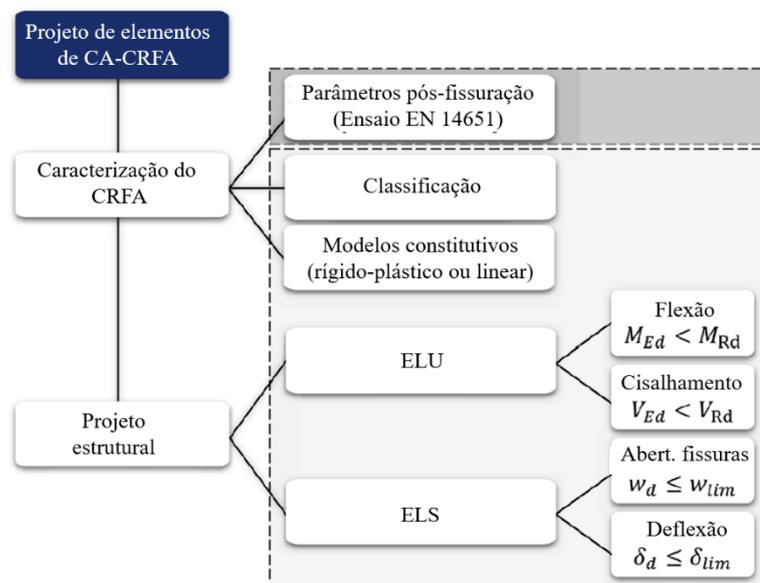
De maneira corrente, a forma de induzir as orientações preferenciais para as fibras é com o fluxo de lançamento do concreto, considerando-se as dimensões das fibras, o processo de lançamento e as dimensões dos moldes. Em função da tendência de as fibras ficarem paralelas ao fluxo, deve-se investigar a carga máxima suportada pelo material, visto que este parâmetro depende do tipo, orientação, tamanho e volume de fibra utilizada.

### 2.3.2 Avaliação no estado endurecido

O *fib Model Code 2010* (*fib*, 2013) apresenta os requisitos de projeto para as estruturas de concreto reforçado com fibras. Trindade, Bittencourt Jr. e Manzoli (2020) estabelecem as principais etapas para o dimensionamento e verificação dos elementos combinados de concreto armado e reforçados com fibras de aço (CA-CRFA), de acordo com a referência normativa do *fib Model Code 2010* (*fib*, 2013) (Figura 38). Primeiramente, definem-se os parâmetros de caracterização, que são utilizados para a classificação do material e o comportamento constitutivo adotado para o pós-fissuração.

Uma vez que a relação tensão-deformação é definida, o projeto deve satisfazer simultaneamente as condições de Estado Limite Último (ELU) e Estado Limite de Serviço (ELS), observando-se, necessariamente, os critérios de segurança baseados na abordagem semiprobabilística, para o atendimento dos requisitos de flexão e cisalhamento no ELU e os limites máximos para o estado de fissuração e deslocamentos no ELS.

**Figura 38** – Etapas para o projeto de elementos de CA-CRFA



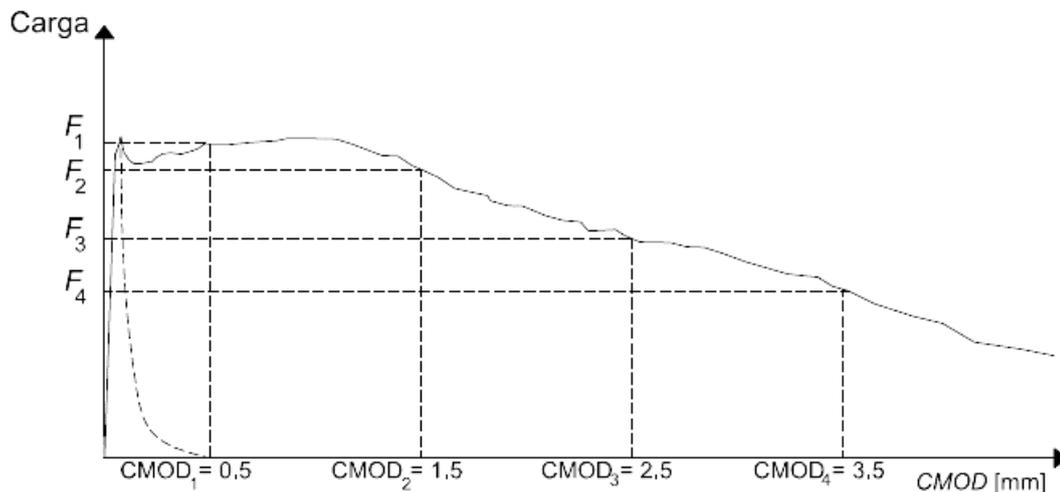
Fonte: adaptado de TRINDADE; BITTENCOURT JR.; MANZOLI, 2020.

A recomendação normativa da NBR 16935 (ABNT, 2021a) estabelece que se pode considerar que, em geral, para o comportamento resistente à compressão, as mesmas relações adotadas para o concreto simples (sem fibras) podem ser aplicáveis para o CRF. Já para o

comportamento resistente à tração, deve-se determinar as resistências à tração indiretas, também conhecidos como resistências à tração na flexão.

São parâmetros para as aplicações estruturais as resistências residuais  $f_{R1}$ ,  $f_{R2}$ ,  $f_{R3}$  e  $f_{R4}$ . Sendo determinadas por meio do ensaio de flexão em corpos de prova com entalhe, seguindo recomendação da NBR 16940 (ABNT, 2021d). A Figura 39 ilustra graficamente as relações entre as resistências residuais à tração do CRF correspondentes às aberturas dos entalhes CMOD (*crack mouth opening displacement*) de 0,5 mm, 1,5 mm, 2,5 mm e 3,5 mm, sendo estas  $f_{R1}$ ,  $f_{R2}$ ,  $f_{R3}$  e  $f_{R4}$ , respectivamente.

**Figura 39** – Curva de força x CMOD (medida da abertura do entalhe)



Fonte: ABNT, 2021a.

Para as aplicações estruturais dos elementos de CRF, a NBR 16935 (ABNT, 2021a) sugere que a substituição total ou parcial da armadura convencional nos elementos de concreto dimensionadas no estado-limite último com CRF pode ser feita, quando as seguintes relações forem atendidas:

$$\frac{f_{R1k}}{f_{Lk}} \geq 0,40 \quad (41)$$

$$\frac{f_{R3k}}{f_{R1k}} \geq 0,50 \quad (42)$$

em que  $f_{Lk}$  é a resistência característica à tração na flexão do CRF;  $f_{R1k}$  e  $f_{R3k}$  são as resistências residuais características à tração na flexão do CRF correspondentes ao  $CMOD_1$  e  $CMOD_3$ , respectivamente.

Venkateshwaran, Tan e Li (2018) afirmam que as propriedades mecânicas do CRFA são governadas pela resistência à compressão da matriz e do índice de reforço da fibra (RI), definido como o produto da fração volumétrica e a razão de aspecto das fibras. Relações empíricas são apresentadas neste trabalho para determinar as tensões residuais à flexão. Observou-se que as resistências encontradas são proporcionais ao RI, à raiz quadrada da resistência à compressão da matriz, e ao quadrado do número de ganchos nas pontas das fibras. O efeito de tamanho também é levado em consideração por meio de um fator que é função do comprimento da fibra.

Os valores característicos são apresentados nas equações a seguir:

$$f_{L,k} = 0,590 \cdot \sqrt{f_c'} + 0,915 \cdot RI \quad (43)$$

$$f_{R1,k} = \psi \cdot [0,226 \cdot \sqrt{f_c'} + 5,447 \cdot RI - 0,149 \cdot N^2] \quad (44)$$

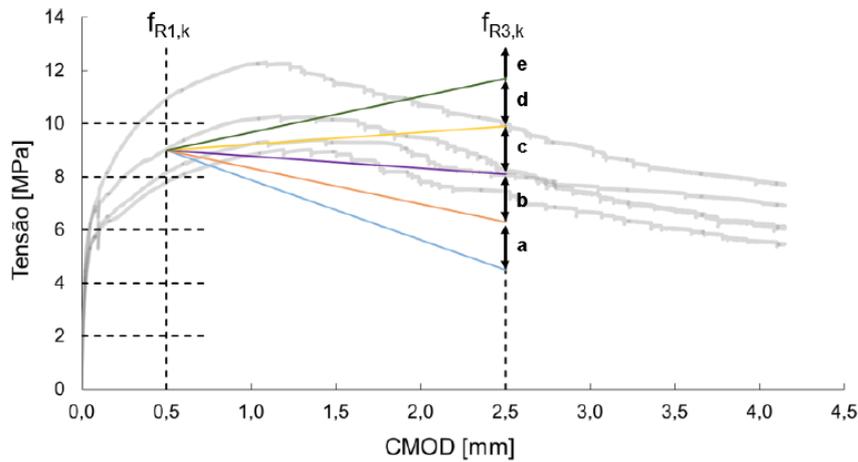
$$f_{R2,k} = \psi \cdot [0,250 \cdot \sqrt{f_c'} + 6,506 \cdot RI + 0,102 \cdot N^2] \quad (45)$$

$$f_{R3,k} = \psi \cdot [0,201 \cdot \sqrt{f_c'} + 6,830 \cdot RI + 0,182 \cdot N^2] \quad (46)$$

$$f_{R4,k} = \psi \cdot [0,177 \cdot \sqrt{f_c'} + 6,151 \cdot RI + 0,137 \cdot N^2] \quad (47)$$

em que  $f_c'$  é a resistência à compressão obtida por corpos de prova cilíndricos,  $\psi = \sqrt{1 + L_f/100}$ ,  $L_f$  é o comprimento da fibra em milímetros,  $N$  é o número de ganchos.

A classificação dos concretos pode ser determinada em função das resistências  $f_{R1,k}$  e  $f_{R3,k}$ . Utilizam-se dois parâmetros: o número correspondente à classe de  $f_{R1,k}$ ; a letra correspondente à relação  $f_{R3,k}/f_{R1,k}$ . De acordo com a razão das resistências, têm-se a representação das letras “a” até “e”, conforme Figura 40 e Tabela 2.

**Figura 40 – Classificação do CRF**

Fonte: ALMEIDA, 2023.

**Tabela 2 – Classificação do CRF em função da relação  $f_{R3,k}/f_{R1,k}$** 

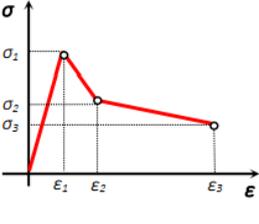
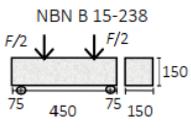
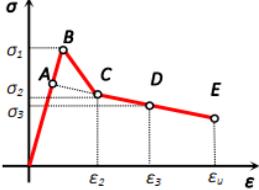
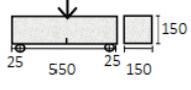
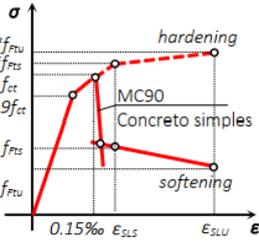
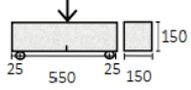
Letra	Classificação
a	$0,5 < \frac{f_{R3,k}}{f_{R1,k}} \leq 0,7$
b	$0,7 < \frac{f_{R3,k}}{f_{R1,k}} \leq 0,9$
c	$0,9 < \frac{f_{R3,k}}{f_{R1,k}} \leq 1,1$
d	$1,1 < \frac{f_{R3,k}}{f_{R1,k}} \leq 1,3$
e	$1,3 < \frac{f_{R3,k}}{f_{R1,k}}$

Fonte: adaptado de ALMEIDA, 2023.

Correia e Barboza (2023) forneceram estratégias para a modelagem numérica de vigas de CRFA. Para a avaliação em projetos, deve-se conhecer as características do material frente às diferentes solicitações. Para o comportamento à compressão, pode-se utilizar o modelo constitutivo do concreto simples, não considerando possíveis efeitos favoráveis da incorporação das fibras.

Já em função do comportamento à tração, diversos modelos constitutivos de representação pós-fissuração estão disponíveis na literatura (Figura 41). Estes podem variar desde os mais simples, baseados em diagramas multilineares, até os mais complexos, que utilizam diagramas não-lineares como funções parabólicas.

**Figura 41** – Modelos constitutivos para o comportamento à tração

Diagrama	Parâmetros	Caracterização	
	$\sigma_1 = f_{ctd} = \alpha_c' f_{ctk,fl} / \gamma_{ct}$ $\sigma_2 = f_{eq,ctd,I} = f_{eq,ctk,I} \alpha_c' \alpha_{sys} / \gamma_{ct}$ $\sigma_3 = f_{eq,ctd,II} = f_{eq,ctk,II} \alpha_c' \alpha_{sys} / \gamma_{ct} \leq f_{eq,ctd,I}$ $\epsilon_1 = \sigma_1 / E_{HRF}; \epsilon_2 = \epsilon_1 + 0.1\%; \epsilon_3 = \epsilon_U = 10\%$		DBV
	$\sigma_1 = 0.7 f_{ctm,fl} (1.6-d);$ $\sigma_2 = 0.45 \cdot K_h \cdot f_{R,1};$ $\sigma_3 = 0.37 \cdot K_h \cdot f_{R,4}$ $\epsilon_1 = \sigma_1 / E_{HRF}; \epsilon_2 = \epsilon_1 + 0.1\%; \epsilon_3 = \epsilon_U = 25\%$		RILEM
	$\sigma_1 = f_{ct,d} = 0.6 f_{ct,fl,d}$ $\sigma_2 = f_{ctR,1,d} = 0.45 f_{R,1,d}$ $\sigma_3 = f_{ctR,3,d} = k_1 (0.5 f_{R,3,d} - 0.2 f_{R,1,d})$ $\epsilon_2 = 0.1 + 1000 \cdot f_{ct,d} / E_{c,0}$ $\epsilon_3 = 2.5 / l_{cs} \quad (l_{cs}: \text{comprimento característico})$ $\epsilon_U = [20\% \text{ flexão}; 10\% \text{ tração pura}]$		EHE
	$f_{ctm} = 0.30 (f_{ck})^{2/3}$ $f_{FTS} = 0.45 f_{R,1}$ $f_{FTU} = k [f_{FTS} - (w_U / CMOD_3) (f_{FTS} - 0.5 f_{R,3} + 0.2 f_{R,1})]$ $\epsilon_{SL5} = CMOD_1 / l_{cs}$ $\epsilon_{SLU} = w_U / l_{cs} = \min(\epsilon_{FU}, 2.5 / l_{cs} = 2.5 / \gamma)$ $\epsilon_{FU} = [20\% \text{ softening}; 10\% \text{ hardening}]$		Model Code

Fonte: ALMEIDA, 2023.

Contudo, o comportamento pós-fissuração do CRF é geralmente representado por diagramas multilíneares devido à sua simplicidade, o que facilita sua aplicação prática em projetos de estruturas. Os parâmetros desses modelos são obtidos por meio de ensaios de flexão em três ou quatro pontos, com ou sem entalhes. Dada a importância dessa propriedade na elaboração de projetos, os modelos que representam adequadamente o comportamento pós-fissuração do concreto reforçado com fibras são objeto de constante pesquisa na literatura técnica, especialmente no que se refere às fibras de aço.

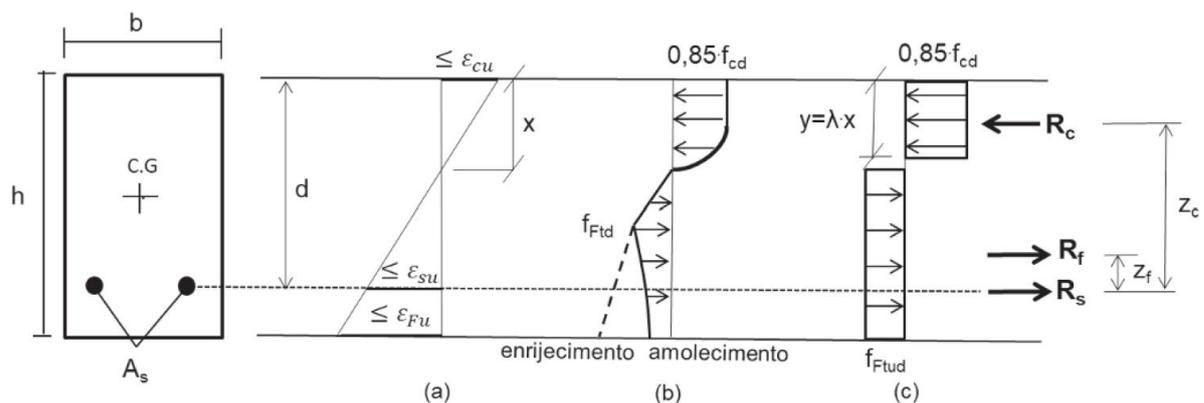
Quando a resistência à tração do compósito é avaliada indiretamente, como em ensaios de flexão de vigas, a classificação do comportamento é bastante semelhante. Nesse contexto, as terminologias *deflection-softening* e *deflection-hardening* são usadas para descrever comportamentos equivalentes a *strain-softening* e *strain-hardening* na tração direta, respectivamente. De acordo com Naaman (2018), classificar o compósito com base em seu comportamento na flexão é particularmente relevante, já que a flexão é a solicitação predominante na maioria das aplicações de concreto reforçado com fibras.

### 2.3.2.1 Avaliação em Estado Limite Último (ELU)

Buttignol *et al.* (2018) apresentaram as recomendações do *fib Model Code 2010* (fib, 2013) (Figura 42) para a verificação de vigas em ELU. As hipóteses de cálculo do CRFA são as mesmas consideradas para o concreto armado, ou seja, seções planas permanecem planas após a deformação, pequenos deslocamentos, aderência perfeita entre concreto e aço, além de modelos constitutivos idealizados. A principal diferença é que para o ELU, no concreto armado, as tensões de tração do concreto são desprezadas. Em contrapartida, para o CRFA, a contribuição das fibras para a resistência na pós-fissuração é considerada no cálculo da estrutura.

Os três principais modos de ruptura de vigas do ELU, de acordo com o *fib Model Code 2010* (fib, 2013), são: limite de deformação do concreto ( $\epsilon_{cu}$ ), limite de deformação do aço ( $\epsilon_{su}$ ) e limite de deformação do CRFA à tração ( $\epsilon_{Fu}$ ). Para o cálculo de vigas, é necessário transformar a curva característica à tração  $\sigma_N - w$  em  $\sigma_N - \epsilon$ . Para isto, o *fib Model Code 2010* (fib, 2013) adota o conceito de comprimento característico ( $l_{cs} = w/\epsilon$ ), que considera a abertura de fissuras com a deformação. Este comprimento é igual ao espaçamento médio entre as fissuras no estado de multifissuração, determinado por meio de ensaios de laboratório.

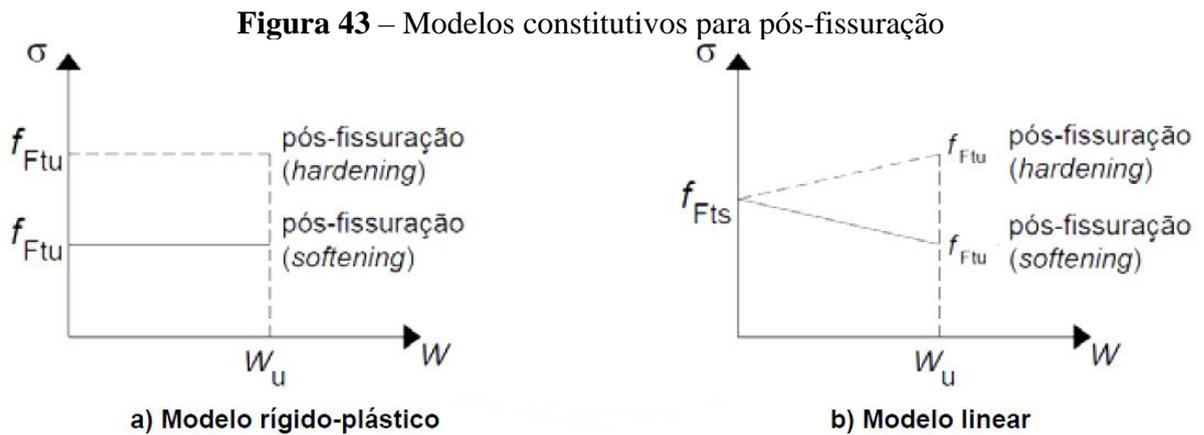
**Figura 42** – Equilíbrio da seção em um elemento à flexão de CRFA



Fonte: BUTTIGNOL *et al.*, 2018.

A recomendação da NBR 16935 (ABNT, 2021a) para o ELU é baseada em dois modelos. O diagrama de tensão-abertura de fissura sob tração direta pode ser definido pelo comportamento pós-fissuração do compósito. As duas hipóteses de leis constitutivas podem ser utilizadas para aplicação em seções solicitadas normalmente à tração, que podem ser extraídas a partir de ensaios de flexão.

O modelo rígido-plástico e o modelo linear, considerando o comportamento pós-fissuração de *hardening* ou *softening*, de acordo com a Figura 43, em que  $f_{Fts}$  representa a resistência à tração direta de serviço do CRF e  $f_{Ftu}$  representa a resistência à tração direta última do CRF. As linhas apresentadas representam o comportamento pós-fissuração típico de *hardening* (tracejada) e *softening* (contínuas).



Fonte: ABNT, 2021a.

No equilíbrio de forças da seção, considerando o modelo rígido-plástico, têm-se

$$R_{cd} - R_{fd} - R_{sd} = 0 \quad (48)$$

em que:

$$R_{cd} = b_w \cdot \lambda \cdot x \cdot \frac{\alpha_c \cdot f_{ck}}{\gamma_c} \quad (49)$$

$$R_{fd} = b_w \cdot (h - x) \cdot \frac{f_{Ftuk}}{\gamma_{CRF}} \quad (50)$$

$$R_{sd} = A_s \cdot \frac{\sigma_s}{\gamma_s} \quad (51)$$

Sendo  $\lambda$  o coeficiente que considera a equivalência do diagrama parábola-retângulo para o diagrama retangular no concreto, igual a 0,80 para  $f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$ ;  $\alpha_c$  igual a 0,85, um fator que considera o efeito Rüschi, o ganho de resistência do concreto ao longo do tempo, e o formato cilíndrico do corpo de prova; Os coeficientes minoradores são definidos como  $\gamma_c = 1,4$ ;  $\gamma_{CRF} = 1,5$ ;  $\gamma_s = 1,15$ .

Para definir o momento resistente da seção ( $M_{Rd}$ ), deve-se conhecer a profundidade da linha neutra ( $x$ ), que é obtida por meio da Eq. (52). Realizando-se o equilíbrio rotacional, têm-se a Eq. (53).

$$x = \frac{A_s \cdot \sigma_{sd} + f_{Ftud} \cdot b_w \cdot h}{\lambda \cdot \alpha_c \cdot f_{cd} \cdot b_w + f_{Ftud} \cdot b_w} \quad (52)$$

$$M_{Rd} = R_{cd} \cdot z_c - R_{fd} \cdot z_f \quad (53)$$

Para a seção sujeita a esforços cortantes (ABNT, 2021a), deve-se proceder a verificação a depender da configuração do elemento estrutural: a) somente com CRF; b) CRF e armadura longitudinal; c) CRF e armaduras longitudinal e transversal. Para o caso somente com CRF, a seção do elemento é considerada adequada quando a tensão principal de tração ( $\sigma_1$ ) é inferior à resistência à tração de projeto (Eq. (54)).

$$\sigma_1 \leq \frac{f_{Ftuk}}{\gamma_c} \quad (54)$$

Para a condição de CRF e armadura longitudinal, pode-se calcular a capacidade resistente por meio da Eq. (55).

$$V_{Rd,f} = \left\{ \frac{0,18}{\gamma_c} \cdot k \cdot \left[ 100 \cdot \rho_1 \cdot \left( 1 + 7,5 \cdot \frac{f_{Ftuk}}{f_{ctk}} \right) \cdot f_{ck} \right]^{\frac{1}{3}} + 0,15 \cdot \sigma_{cp} \right\} \cdot b_w \cdot d \quad (55)$$

$$\geq V_{Rd,fmin}$$

em que  $k = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \leq 2,0$ ;  $\rho_1 = A_{sl}/b_w \cdot d$ ;  $V_{Rd,fmin} = (v_{min} + 0,15 \cdot \sigma_{cp}) \cdot b_w \cdot d$ ;  $v_{min} = 0,035 \cdot k^{3/2} \cdot \sqrt{f_{ck}}$ . Sendo  $\gamma_c$  o coeficiente de ponderação do CRF;  $b_w$  é a menor largura da seção transversal na zona de tração, em mm;  $d$  a altura útil da seção transversal, em mm;  $A_{sl}$  a área da seção transversal da armadura longitudinal que se estende além da seção considerada, em mm<sup>2</sup>;  $\rho_1$  é a taxa de armadura longitudinal;  $f_{Ftuk}$  é a resistência característica à tração direta do CRFA no ELU para  $w_u = 1,5mm$ , em MPa;  $f_{ctk}$  é a resistência à tração direta, em MPa;  $\sigma_{cp}$  é a tensão média na seção transversal por ação de força axial devido ao carregamento ou a ações de pré-tensão, em MPa.

Na situação em que há CRF e armaduras longitudinal e transversal, a parcela referente à armadura transversal ( $V_{sw}$ ) deve ser adicionada à capacidade resistente da seção, sendo determinada de acordo com NBR 6118 (ABNT, 2023) (Eq. (56)).

$$V_{Rd} = V_{Rd,f} + V_{sw} \quad (56)$$

A norma ainda define que a armadura transversal mínima, constituída por estribos, pode ser dispensada nos elementos de CRF na condição da Eq (57).

$$f_{Ftuk} = 0,08 \cdot \sqrt{f_{ck}} \quad (57)$$

Para os projetos baseados em análise numéricas, a indicação da NBR 16.935 (ABNT, 2021a), é de que sejam utilizadas as leis constitutivas de tensão-deformação à tração mais avançadas, incluindo-se a resistência à tração de primeira fissura. Visto que as resistências à tração direta ( $f_{Ftu}$  e  $f_{Fts}$ ) podem ser obtidas por meio de análise inversa, a curva de tensão-deformação do CRF à tração direta deve ser obtida por métodos analíticos ou numéricos que aproximem, com o menor erro possível (definido por tolerância de projeto), da curva força-deslocamento ou força-abertura de fissura (CMOD) obtida desses métodos com a curva média obtida do ensaio de flexão em corpos de prova com entalhe, conforme recomenda a NBR 16940 (ABNT, 2021d).

### 2.3.2.2 Avaliação em Estado Limite de Serviço (ELS)

Após o dimensionamento no ELU, deve-se efetuar as verificações no ELS. Para o CRF, admite-se que são necessárias três verificações: limitação de tensão, abertura de fissuras em elementos estruturais com armadura convencional e reforço mínimo para controle de fissuras (ABNT, 2021a).

Para a primeira verificação, devem-se limitar as tensões de compressão no concreto, tensões de tração no aço e tensões de tração no CRF. Sendo esta última uma medida adequada para reduzir a probabilidade de fissuras. Para os elementos em que o CRF apresenta um comportamento de *softening* pós-fissuração, a verificação das tensões de tração não é necessária se o elemento for verificado no ELU (ABNT, 2021a).

Para os elementos estruturais em que o CRF apresenta um comportamento de *hardening* pós-fissuração, deve-se verificar as tensões de tração pela imposição da limitação dada por

$$\sigma_1 \leq 0,6 \cdot f_{Ftuk} \quad (58)$$

A verificação de abertura de fissuras, como mencionado, é necessária para elementos com armadura convencional, não sendo este o objetivo de análise deste trabalho.

Para o reforço mínimo de controle de fissuras de elementos submetidos à flexão, deve-se verificar a seguinte condição

$$\sigma_1 \leq f_{Ftsm} \quad (59)$$

Caso a inequação não seja atendida, deve-se considerar uma armadura mínima definida pela recomendação normativa.

### 3 TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

A aproximação da modelagem de estruturas de concreto por meio do Método dos Elementos Finitos (MEF) depende de diversos aspectos, tais como: modelo constitutivo do material, comportamento do elemento finito na dependência da função da interpolação, além do comportamento global da estrutura, que pode ser expresso de acordo com o tipo do elemento e as características da discretização.

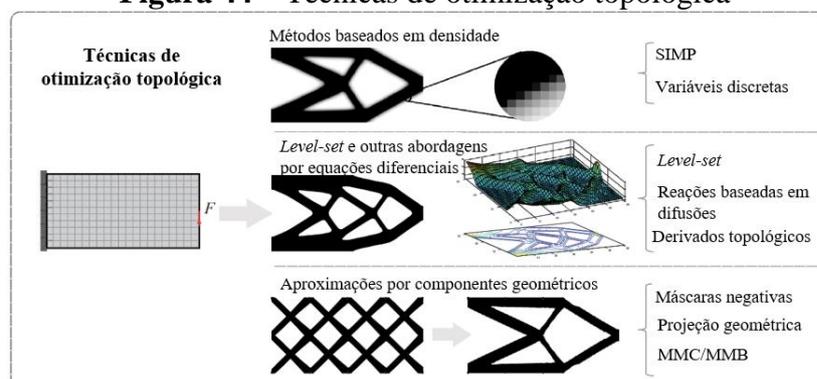
A evolução da utilização dos métodos de otimização topológica se deu por meio do desenvolvimento de códigos educacionais. A proposta de Sigmund (2001), com a utilização do método SIMP, é um dos grandes destaques da aplicação do método.

Sigmund e Maute (2013) salientam que a otimização topológica dá respostas para uma pergunta fundamental na engenharia: “como distribuir o material dentro de um domínio de projeto prescrito de maneira a obter a melhor performance estrutural?”.

Wang *et al.* (2021) registraram que o impacto do trabalho de Sigmund (2001) com seu código de 99 linhas pode ser notado com mais de 13.000 downloads e mais 2.000 citações na plataforma *Google Scholar*. A partir deste trabalho, o número de publicações de códigos computacionais teve um aumento expressivo nas diversas áreas da otimização estrutural.

Dentre as abordagens de otimização topológica, Wang *et al.* (2021) destacam (Figura 44): os métodos baseados em densidade (Bendsøe (1989); Zhou e Rozvany (1991); Bendsøe e Sigmund (1999); Xie e Steven (1993)), método *level-set* (Osher e Sethian (1988); Sethian (1999); Allaire *et al.* (2002); Wang *et al.* (2003)), métodos baseados em equações diferenciais (Eschenauer *et al.* (1994); Sokolowski e Zochowski (1999); Wallin *et al.* (2012); Wang e Zhou (2004); Burger e Stainko (2006)) e métodos baseados em componentes geométricos (Bai e Zuo (2020); Zhao *et al.* (2021); Zhang *et al.* (2016b)).

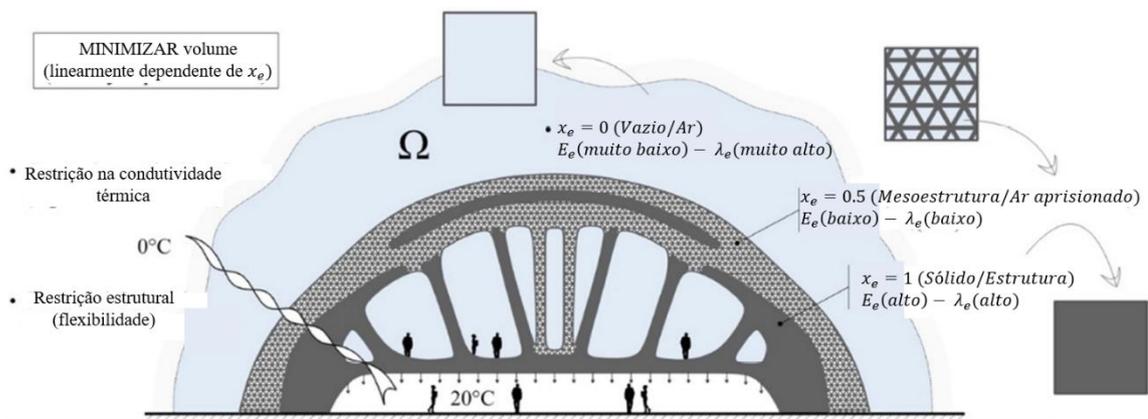
**Figura 44** – Técnicas de otimização topológica



Fonte: adaptado de WANG *et al.*, 2021.

Diversos estudos foram desenvolvidos para a elaboração de códigos educacionais para resolver problemas específicos de projeto, tais como a consideração de múltiplas escalas, problemas multifísicos (Figura 45), abordagem com múltiplos materiais, análise de confiabilidade, critérios de flambagem, restrição em tensões (ou definição como função objetivo), não linearidades físicas e/ou geométricas, controle geométrico local e análise dinâmica (WANG *et al.*, 2021).

**Figura 45** – Abordagem multifísica em um problema de otimização



Fonte: adaptado de VANTYGHM *et al.*, 2018.

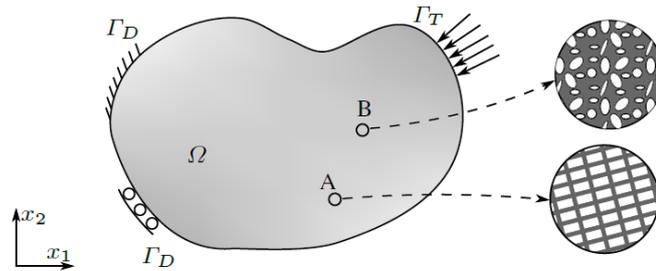
Destaca-se que há um esforço recente para a pesquisa e desenvolvimento de aplicações da otimização topológica para multimateriais (mais de um material considerado no domínio, podendo ter comportamentos mecânicos distintos), o que torna um caminho aberto para projetos aplicáveis para problemas práticos de engenharia (WANG *et al.*, 2021).

Neste sentido, um marco importante para a formulação multimaterial se encontra no modelo ZPR (Zhang-Paulino-Ramos) proposto por Zhang, Paulino e Ramos Jr (2017). Avalia-se a energia de deformação e a área da seção transversal de cada elemento, de modo a controlar o perfil do material (bem como o número de materiais) em cada subdomínio do projeto final. O algoritmo proposto seleciona iterativamente materiais para garantir um número arbitrário de restrições de volume e materiais candidatos, de forma a permitir uma otimização baseada em estruturas treliçadas.

Wu, Sigmund e Groen (2021) citam que o termo multiescala tem sido utilizado extensivamente na literatura para descrever estruturas, técnicas de modelagem numérica e abordagens de projeto. Conforme a Figura 46, cada ponto na estrutura na macroescala efetivamente representa uma repetição periódica de uma microestrutura local. Muitas

abordagens de projeto utilizam o conceito da modelagem multiescala, por exemplo, assumindo a separação de escalas. Entretanto, a modelagem monoescala também pode ser utilizada para a modelagem multiescala de estruturas.

**Figura 46** – Representação de uma estrutura multiescala



Fonte: WU, SIGMUND e GROEN, 2021.

O método SIMP, apesar de considerar em sua formulação um material homogêneo e isotrópico, baseado nas explicações de Wu, Sigmund e Groen (2021), pode ser interpretado como uma aproximação multiescala. Baseado em uma distribuição de material heterogêneo dentro do domínio do elemento, podem ser encontradas as propriedades dos materiais para uma densidade intermediária.

Com um parâmetro do fator de penalidade ( $p$ ) maior que 3, pode-se convergir para soluções do tipo 0-1, que representam as estruturas monoescala. Todavia, em um número de abordagem multiescala, quanto menor o  $p$ , maior será a quantidade de soluções contendo uma porção de densidades intermediárias, o que propicia uma base para as microestruturas porosas.

Gaganelis, Mark e Forman (2022) apresentam o conceito do projeto auxiliado por otimização (PAO). Isto é, o projeto e dimensionamento de estruturas e elementos estruturais por meio de métodos de otimização. Por exemplo, para o concreto armado, este conceito abrange a descoberta da melhor forma, a identificação da disposição das armaduras e o uso de seções transversais adequadas.

Esta linha de pesquisa (PAO) abrange uma metodologia generalista que pode ser aplicada para diferentes áreas de aplicações. Pode-se utilizar este recurso para qualquer tipo de concreto (de resistência normal a ultra-alta resistência), além de tipos arbitrários de reforço (aço, carbono, fibras), bem como, pode-se estender para inúmeros campos da engenharia estrutural, tal como estruturas de aço, madeira e fundações.

O projeto auxiliado por otimização utilizada o conceito da otimização matemática. Com isto, geralmente, o objetivo é minimizar a função objetivo formulada. Esta pode ser relacionada

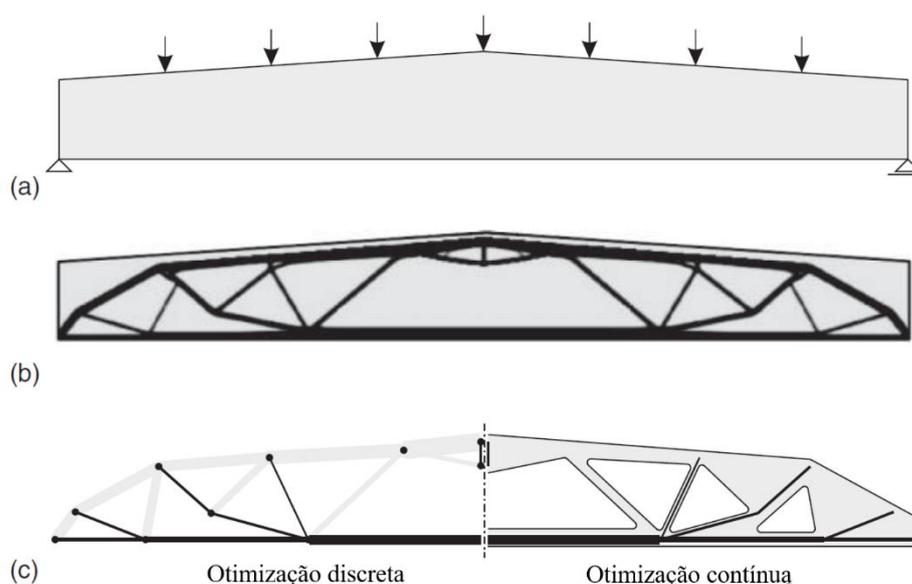
ao peso da estrutura, à quantidade de reforço, ou até mesmo a combinação de diversas funções. Adicionalmente, algumas restrições devem ser adicionadas ao problema. Tipicamente, restrições de igualdade são formuladas com base no equilíbrio das ações externas e dos esforços internos. Restrições de desigualdade podem incluir limites geométricos, limites de tensões ou um volume limite da quantidade de material.

Conceitualmente, o PAO segue a seguinte abordagem: buscar soluções de projeto em que se garanta a utilização das tensões de forma eficiente e acumular material apenas onde ele é mais efetivo como mecanismo de transferência de carregamento.

Em geral, por meio da otimização topológica, busca-se a distribuição de densidade em que se atende ao critério de transferência de cargas. Tipicamente, verifica-se que peças submetidas à flexão podem ser decompostas em um sistema similar ao de uma estrutura treliçada, em que os elementos são carregados axialmente, com esforços de tração e/ou compressão.

A Figura 47a demonstra a influência das condições de contorno geométricas para uma viga de cobertura, em que se pode utilizar o processo de otimização topológica para a definição da distribuição de densidade (Figura 47b). Com isto, o resultado obtido por meio da otimização discreta gerará um conjunto de barras interconectadas. Em contrapartida, a otimização contínua (Figura 47c) fornecerá a possibilidade de interpretação de distribuição de barras para o projeto, com liberdade de arranjo de seção transversal e de armadura.

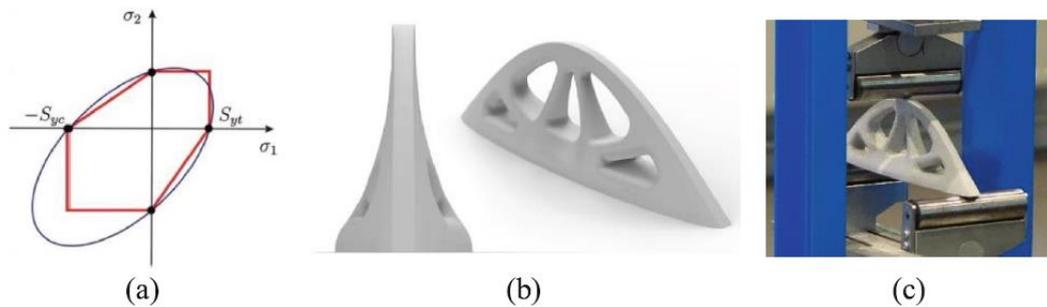
**Figura 47** – Exemplo de otimização de uma viga



Fonte: adaptado de GAGANELIS; MARK; FORMAN, 2022.

Vantyghe *et al.* (2018) discutiram a aplicação da otimização topológica baseada em tensões (Figura 48). Para estes autores, considera-se que as formas otimizadas devem considerar a assimetria das resistências à tração e à compressão do concreto reforçado por fibras. Considerando-se o critério tradicional, têm-se que as estruturas, em comportamento elástico linear, são superdimensionadas para a região compressiva e podem fissurar ou romper de forma fácil nas regiões tracionadas.

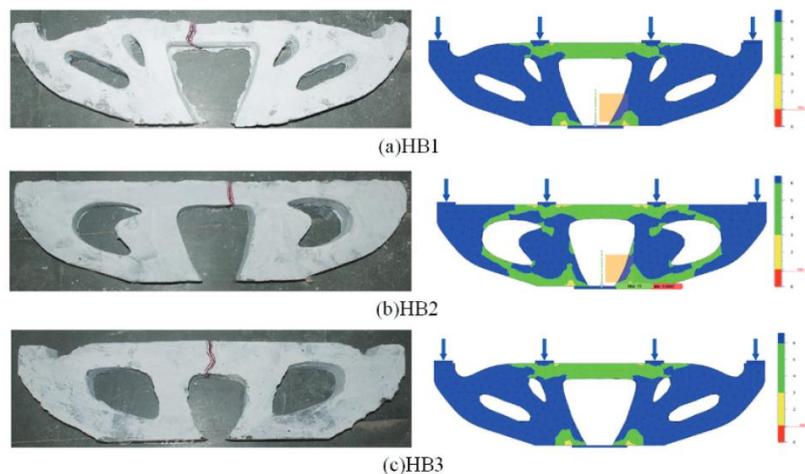
**Figura 48** – Estrutura otimizada baseada no critério de Drucker-Prager e teste experimental



Fonte: VANTYGHM *et al.*, 2018.

Por exemplo, Salaimanimagudam *et al.* (2020) investigaram a utilização de técnicas de otimização topológica para a produção de vigas “cabeça de martelo” por meio de um método baseado em distribuição de densidade. Utilizou-se o critério de minimização da massa (ou volume) com restrições de tensões com o critério de Drucker-Prager. Verificou-se o comportamento destas vigas, constituídas de concreto fibroso, por meio de ensaios estáticos (Figura 49), como também por meio de aplicações de cargas cíclicas.

**Figura 49** – Análise do padrão de fissuração e tensões máximas nas vigas otimizadas



Fonte: SALAIMANIMAGUDAM *et al.*, 2020.

Jaishankar *et al.* (2021) também analisaram a aplicação da otimização topológica para o projeto de uma viga “cabeça de martelo” (Figura 50). Neste estudo, conclui-se que para o concreto com fibras, o teor de fibras influenciou consideravelmente no aumento da capacidade resistente. Para a fabricação dos elementos, com o pós-processamento verificado no processo de otimização, os autores consideraram a confecção das vigas por meio de duas etapas, considerando-se inicialmente a mistura de fibras e agregados graúdos, e posteriormente, a adição do graute.

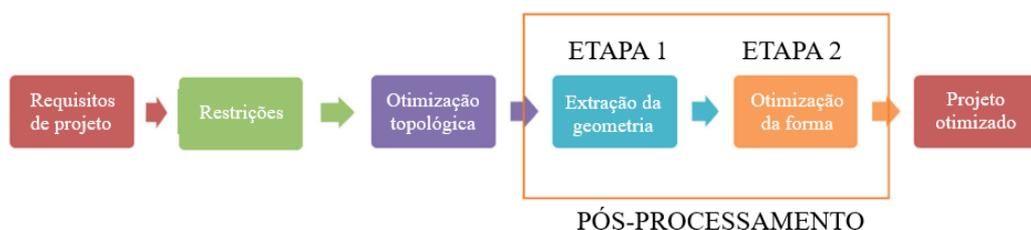
**Figura 50** – Ensaio de flexão para viga otimizada



Fonte: JAISHANKAR *et al.*, 2021.

O fluxograma apresentado na Figura 51 demonstra esquematicamente o projeto otimizado. A etapa de pós-processamento é destacada pela divisão da primeira etapa, extração da geometria, e a segunda, de otimização da forma. Isto acontece porque as descrições geométricas são diferentes entre a otimização de topologia e a otimização de forma. Esta etapa de análise é crucial para os detalhes das restrições de manufatura, que podem afetar a eficiência da estrutura otimizada.

**Figura 51** – Etapas do projeto otimizado



Fonte: JAISHANKAR *et al.*, 2021.

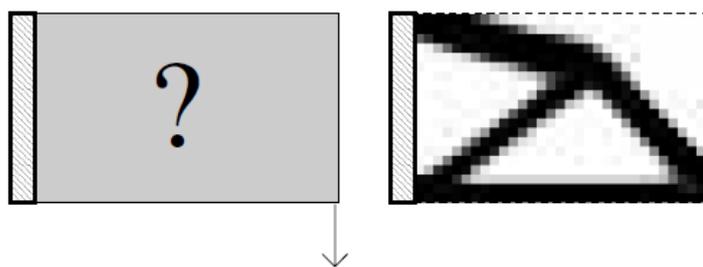
### 3.1 Otimização topológica contínua

O método numérico de otimização topológica baseado em elementos finitos mais conhecido é o método SIMP, que foi desenvolvido na década de 80 por Bendsøe e Kikuchi (1988). O termo **SIMP** significa *Solid Isotropic Material with Penalization*. Algumas vezes o método também é chamado de interpolação material, material artificial, lei de potência ou método da densidade, mas SIMP é a nomenclatura mais utilizada mundialmente (ROZVANY, 2009).

Neste método, a formulação do problema é desenvolvida tendo como principal objetivo a mínima flexibilidade do domínio de projeto, e, conseqüentemente, maximizar a rigidez, satisfazendo as restrições impostas. Sigmund (2001) apresenta a implementação computacional de um código em MATLAB® de 99 linhas utilizando este método, demonstrando sua eficiência para aplicações educacionais de problemas de otimização topológica.

A ideia básica do método SIMP (Figura 52) é de considerar apenas uma variável de projeto por elemento finito. A variável de projeto é a densidade artificial do elemento ( $\rho_e$ ), que assume qualquer valor na faixa de  $0 < \rho_{min} \leq \rho_e \leq 1$ . Isto significa que o volume de um elemento é multiplicado por uma densidade artificial para produzir o volume real (QUERIN *et al.*, 2017).

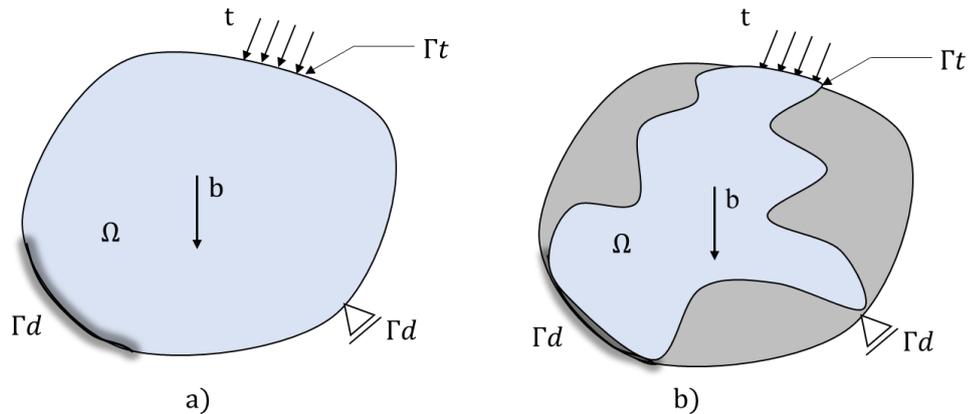
**Figura 52** – Exemplo de aplicação do método SIMP



Fonte: SIGMUND, 2001.

Considerando um elemento, em análise mecânica, como um corpo ocupando um domínio  $\Omega^{\text{mat}}$  (Figura 53), o qual é parte de um domínio maior  $\Omega$  de referência no  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ . O domínio de referência  $\Omega$  também é escolhido para permitir a definição das cargas aplicadas e as condições de contorno. Por meio deste, pode-se definir o problema de otimização como a escolha ótima do tensor constitutivo  $E_{ijkl}(x)$ , o qual é uma variável dentro de todo domínio (BENDSØE e SIGMUND, 2003).

**Figura 53** - Domínio bidimensional para otimização (a) e domínio final otimizado (b)



Fonte: CEDRIM, 2019.

A conservação da energia imposta pela primeira lei da termodinâmica determina que a taxa de variação temporal da energia cinética e da energia interna para um ponto fixo de um material é igual à soma da taxa de trabalho realizado pelas forças da superfície e do corpo (SIMULIA, 2022). A equação do equilíbrio de energia é determinada por:

$$E_I + E_V + E_{FD} + E_{KE} + E_{IHE} - E_W - E_{PW} - E_{CW} - E_{MW} - E_{HF} = E_{TOTAL} = cte \quad (60)$$

em que  $E_I$  é a energia interna,  $E_V$  é a energia viscosa dissipada,  $E_{FD}$  é a energia dissipada por atrito,  $E_{KE}$  é a energia cinética,  $E_{IHE}$  é a energia interna por calor,  $E_W$  é o trabalho realizado pelas forças externas aplicadas, e  $E_{PW}$ ,  $E_{CW}$  e  $E_{MW}$  são o trabalho realizado pelas penalidades por contato, pelas penalidades de restrições, e pela massa adicionada, respectivamente.  $E_{HF}$  é a energia de calor externa por meio dos fluxos externos. A soma destas energias é dada por  $E_{TOTAL}$ , que deve ser constante. Nos modelos numéricos, o erro aceito geralmente é em torno de 1%.

Se a simulação for quase estática, o trabalho realizado pelas forças externas é muito próximo do trabalho realizado pelas forças internas. As forças inerciais e viscosas podem ser desprezadas neste tipo de simulação, pois, em geral a velocidade é muito baixa e, se não houve a presença de amortecimento, a dissipação viscosa também é muito baixa.

Na formulação contínua, o problema da maximização da rigidez pode ser descrito da seguinte forma, com o objetivo de minimizar o trabalho das forças externas com as restrições de volume para atender a um tensor constitutivo dentro de um campo de deslocamentos cinematicamente admissíveis

$$\begin{aligned} \min W_{ext}(u) &= \int_{\Omega} bu \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} tu \, d\Gamma_t \\ \text{s. t. } E_{ijkl} &\in U_{adm} \end{aligned} \quad (61)$$

em que  $W_{ext}(u)$  é o trabalho das forças externas,  $u$  é o campo de deslocamentos na condição de equilíbrio,  $b$  são as forças de volume,  $t$  são as forças no contorno,  $U_{adm}$  é o conjunto de tensores elástico admissíveis.

Na formulação discreta do problema, minimizando a energia de deformação, tem-se

$$\begin{aligned} \min c(x) &= \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} = \sum_{e=1}^N (x_e)^p u_e^T k_e u_e \\ \text{s. t. } \frac{V(x)}{V_0} &= f \\ \mathbf{K} \mathbf{U} &= \mathbf{F} \\ 0 &< x_{min} \leq x \leq 1 \end{aligned} \quad (62)$$

em que  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{F}$  são os vetores de deslocamento e força globais, respectivamente,  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez global,  $u_e$  e  $k_e$  são o vetor de deslocamento do elemento e a matriz de rigidez do elemento, respectivamente,  $x$  é o vetor das variáveis de projeto,  $x_{min}$  é o vetor das mínimas densidades relativas (diferentes de zero para evitar singularidades),  $N$  é o número de elementos utilizados para discretizar o domínio,  $p$  é o fator de penalidade,  $V(x)$  e  $V_0$  são o volume de material e o volume do domínio de projeto, respectivamente e  $f$  é a fração volumétrica prescrita.

Com a formulação do método, as variáveis de projeto definidas no problema são as densidades relativas relacionadas com os elementos finitos ou nós da malha. O objetivo do problema de minimização da flexibilidade ou maximização da rigidez pode ser entendido então como um processo iterativo que busca uma melhor distribuição das variáveis de projeto pela malha definida.

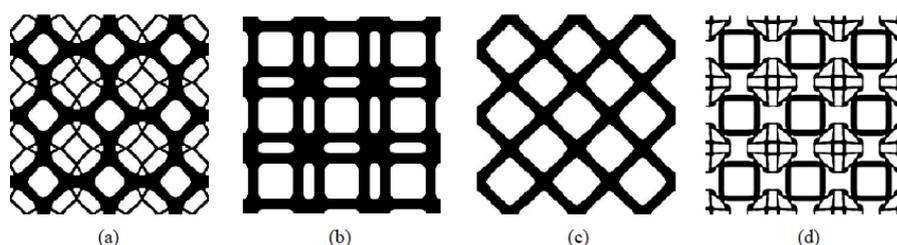
Posto que a fração volumétrica prescrita é uma restrição do problema, sua definição é essencial para a solução dele, podendo afetar a definição das topologias obtidas, uma vez que o problema de otimização consistirá em buscar a melhor distribuição de material em função do limite estabelecido pela fração volumétrica. Da mesma forma que o refinamento da malha, deve-se realizar uma análise comparativa com os resultados obtidos de forma a entender o comportamento do modelo.

Com o avanço das aplicações das técnicas de otimização topológica, pode-se verificar uma vasta disponibilidade de códigos educacionais, bem como *softwares* comerciais, baseados no método SIMP, que são apresentados no trabalho de Wang *et al.* (2021).

Da (2019) cita que, inicialmente restrita à otimização de geometria, as técnicas de otimização topológica têm sido estendidas para a otimização das fases dos materiais, como por exemplo, em microestruturas periódicas, em projetos de materiais de alta performance, materiais com propriedades não encontradas na natureza (ex.: coeficiente de Poisson negativo, zero compressibilidade, módulo volumétrico negativo), ou problemas multifísicos complexos.

Estas técnicas baseadas em otimizar as propriedades homogeneizadas de um volume elementar representativo com a utilização de soluções numéricas, como por exemplo, o método dos elementos finitos, podem fornecer a geometria das fases e suas propriedades microscópicas, como apresentado na Figura 54. Em que a Figura 54a e Figura 54b representam geometrias com máximo módulo volumétrico, a Figura 54c representa a geometria com máximo módulo de cisalhamento e Figura 54d representa a geometria com coeficiente de Poisson negativo.

**Figura 54** – Topologia de materiais.

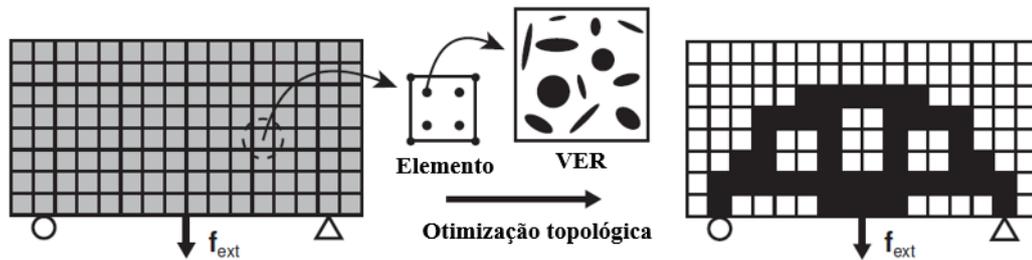


Fonte: DA, 2019.

Xia (2016) explica que o projeto por meio da otimização topológica de estruturas multiescala pode ser visto como uma extensão do projeto convencional monoescala, com a particularidade de que o modelo constitutivo é governado por uma ou múltiplas representações de um volume elementar representativo (VER) definido na escala microscópica. No caso da elasticidade linear, a otimização de uma estrutura composta por um VER é uma aplicação direta da rotina convencional, por causa do comportamento homogeneizado/efetivo do material determinado por meio de uma análise de homogeneização.

Quando as não linearidades estão presentes em uma escala microscópica, por exemplo, considera-se uma tarefa mais difícil. A otimização topológica não linear, conforme Xia (2016), não é uma tarefa fácil nem mesmo para as estruturas homogêneas, devido ao aumento do custo computacional e da solução requerida para a utilização de esquemas de estabilização, sem mencionar estruturas altamente heterogêneas na análise multiescala.

**Figura 55** – Exemplo de otimização topológica de estruturas multiescala



Fonte: adaptado de XIA, 2016.

Wang *et al.* (2021) apresentam que a otimização topológica para problemas multiescala, tipicamente se referem à maximização ou minimização de propriedades macroscópicas pela otimização topológica de cada microestrutura ou ambas macros e microestruturas concomitantemente. As abordagens baseadas em microestruturas podem alcançar o resultado otimizado de utilização das propriedades dos materiais por meio dos métodos numéricos de homogeneização.

Querin *et al.* (2017) enquadram os métodos de otimização topológica em duas categorias distintas: métodos de critério de otimalidade (*Optimality Criteria*) e métodos heurísticos ou intuitivos. Os métodos de critério de otimalidade são métodos indiretos de otimização, que satisfazem um conjunto de critérios relacionados com o comportamento da estrutura.

Para o método baseado em densidade com utilização de variáveis discretas, verifica-se que duas classes podem ser encontradas. A primeira classe constrói a formulação de otimização baseada em programação inteira, enquanto a segunda progride a otimização em um processo denominado evolucionário, com isto, recebe o nome de ESO (*Evolutionary Structural Optimization*). A estratégia ESO original apenas remove materiais ineficientes. Em contrapartida, a versão bidirecional BESO (*Bidirectional Evolutionary Structural Optimization*) pode evoluir o processo por meio de adição e remoção de materiais, simultaneamente (WANG *et al.*, 2021).

Sigmund (2001) argumenta que as aproximações evolucionárias se tornam mais complicadas, uma vez que objetivos mais complexos que a minimização da flexibilidade são considerados e que como é demonstrado no trabalho publicado por este autor, a minimização da flexibilidade, na sua forma matemática, é simples de ser implementada e computacionalmente eficiente.

Pantoja (2012) classifica os métodos de otimização topológica, no que diz respeito a estruturas contínuas, em dois grupos:

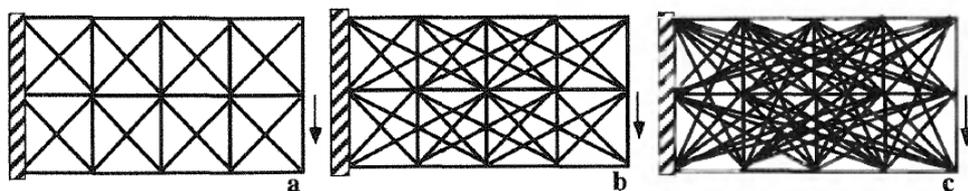
- Aproximação por microestrutura (material): o processo de otimização topológica é baseado no estabelecimento de uma relação entre a rigidez e a densidade associada ao domínio, assumindo qualquer valor na região, entre 0 (vazio) e 1 (material sólido), sendo os valores intermediários correspondentes a um material poroso. Os algoritmos baseados em microestruturas propõem encontrar a melhor disposição do material, de maneira a minimizar ou maximizar a função objetivo. São exemplos: método SIMP, material poroso homogeneizado, entre outros.

- Aproximação por macroestrutura (geométrica): a topologia da estrutura é modificada pela inserção de furos no domínio. Dentre os métodos existentes, pode-se citar os métodos baseados na inserção de furos em sistemas contínuos, tais como: TSA (*Topology Sensitive Analysis*) e *Bubble Method*, e os métodos baseados na inserção de furos em sistemas discretos, tais como ESO, BESO e SERA.

### 3.2 Otimização topológica discreta

Para as estruturas discretas, a otimização da geometria e topologia de treliças pode ser formulada com o método *ground structure*, de acordo com Bendsøe e Sigmund (2003). Nesta formulação, define-se uma malha de treliças com uma determinada conectividade em um conjunto de pontos nodais como uma estrutura preliminar, a exemplo da Figura 56. De certa forma, o problema pode ser visto como uma otimização paramétrica, em que o objetivo é encontrar as áreas de seção transversal que possibilitem a estrutura mais rígida possível. Wang *et al.* (2021), por exemplo, consideram que o método *ground structure* pode ser classificado como otimização de tamanho.

**Figura 56** – Método *ground structure* de otimização



Fonte: BENDSØE e SIGMUND, 2003.

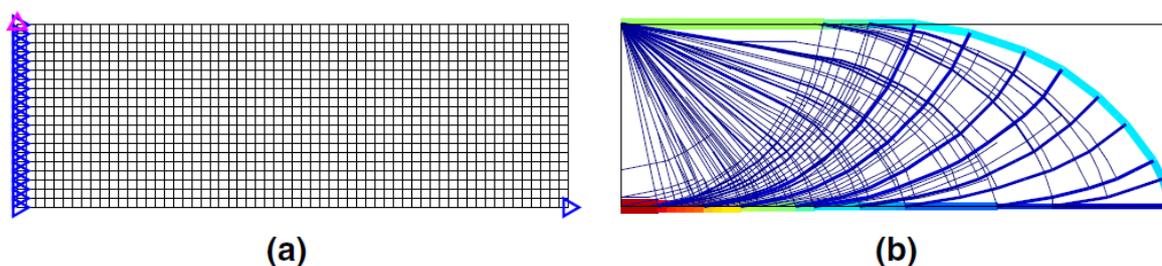
Um trabalho de destaque na utilização do método *ground structure*, traduzido livremente como método da estrutura base, foi publicado por Zegard e Paulino (2014). A formulação do

problema, que consiste em determinar uma treliça otimizada (com menor peso) em condições de carregamento único, sob condições e análise elástica linear e sujeita a restrições de tensões, pode ser dita como um problema de programação linear.

Por meio do *ground structure*, as barras desnecessárias para a configuração final são removidas de uma estrutura inicial altamente interconectada (conhecida como estrutura base), enquanto as localizações nodais são fixas. Pode-se comprovar que a treliça com a máxima rigidez é considerada também a treliça mais solicitada. Além disto, o problema em que há um único carregamento, considerando os limites de tensão iguais à compressão e à tração, pode-se assumir que é equivalente à minimização da flexibilidade para uma dada fração volumétrica, conforme Bendsøe e Sigmund (2003).

Com a implementação do GRAND (*GRound structure ANalysis and Design*), Zegard e Paulino (2014) (Figura 57) propõem a formulação no problema baseada na análise plástica, isto é, não é necessário utilizar matrizes de rigidez, equações de compatibilidade ou relações constitutivas. A solução do problema de programação linear consiste na resolução de uma treliça estaticamente determinada e com uma solução que é considerada também um ótimo global. Em virtude de se considerar uma estrutura plasticamente admissível, baseada em equilíbrio de forças, pode-se verificar que também são satisfeitas a compatibilidade cinemática e as relações constitutivas, logo, têm-se uma estrutura final que é elasticamente admissível.

**Figura 57** – Exemplo de otimização da viga MBB pelo GRAND



Fonte: ZEGARD e PAULINO, 2014.

### 3.3 Otimização topológica híbrida

Para a visualização das trajetórias de forças em elementos de concreto estrutural, a otimização topológica híbrida tem se tornado uma alternativa interessante ao projeto tradicional baseado em elementos contínuos. Nesta abordagem, utiliza-se o conceito de que a otimização contínua pode apresentar trajetórias de forças que tomam qualquer forma e que possuem

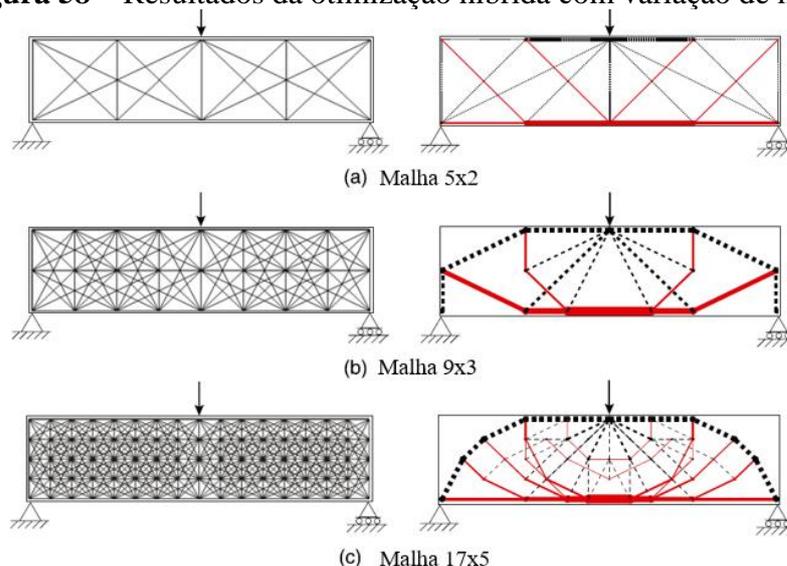
espessuras variáveis. Gaynor, Guest e Moen (2013) destacam que a liberdade de projeto pode auxiliar na eficiência da solução, como por exemplo, na definição de um modelo de bielas, porém, as soluções no método tradicional podem ser menos práticas do ponto de vista construtivo, potencialmente diminuindo qualquer economia de custos na execução.

Rodrigues (2020) apresentou a implementação do *HybridTopy*, um algoritmo de otimização híbrida para estruturas de concreto armado, baseado no trabalho de Gaynor, Guest e Moen (2013). Busca-se neste método utilizar as armaduras modeladas como barras de treliça, considerando apenas sua resistência à tração, e o concreto é modelado por elementos finitos contínuos bidimensionais, por sua vez, colaborando apenas com sua resistência à compressão.

Gaynor, Guest e Moen (2013) propuseram a utilização de um modelo constitutivo bilinear. Com isto, para o concreto, foi implementado um modelo ortotrópico, que combina as variações do módulo de elasticidade como uma função das tensões principais e da orientação do plano principal. Com isto, assume-se que o concreto possui um módulo de elasticidade longitudinal próximo de zero para as solicitações de tração. Deste modo, evita-se singularidades na matriz de rigidez global. Para o aço, como as barras são modeladas como elementos de treliça, o modelo constitutivo bilinear é implementado de maneira rápida, em que a matriz de rigidez do elemento varia de acordo com o sinal da solicitação recebida no elemento. Considerando-se apenas as solicitações de tração como sinal positivo, a matriz de rigidez será formada apenas pelo conjunto de barras tracionadas.

De acordo com Rodrigues (2020), a otimização híbrida (Figura 58) apresenta uma série de vantagens, descritas como: a obtenção de uma topologia mais realista para as estruturas de concreto armado do que as metodologias isoladas, por considerar uma interação dos dois materiais, além de adotar um modelo constitutivo ortotrópico para o concreto, representando melhor o seu comportamento real; pode oferecer uma maior liberdade e melhor visualização do fluxo dos campos das tensões de compressão que representam as escoras, além de apresentar uma praticidade com relação à disposição do aço.

**Figura 58** – Resultados da otimização híbrida com variação de malha



Fonte: adaptado de GAYNOR, GUEST e MOEN, 2013.

O método híbrido, entretanto, possui desvantagens apresentadas por Rodrigues (2020), como o aumento do custo computacional em relação às formulações tradicionais (contínua e discreta), porém, com os processadores atuais, não se inviabiliza a utilização deste. Para Gaynor, Guest e Moen (2013), contudo, o conceito da otimização híbrida supera uma limitação da otimização tradicional, considerada por muitos autores de que a hipótese de material isotrópico e elástico linear pode desprezar as tensões transversais de tração que são desenvolvidas no concreto, o que leva a um comportamento não representativo do material. Além disto, por exemplo, para concreto protendido, a ausência da ortotropia, pode invalidar os modelos de bielas que podem indicar falsamente onde não há necessidade de armaduras.

Por meio da formulação de análise limite, cujos teoremas de limite mínimo e limite máximo fornecem um intervalo para a carga limite da estrutura, é possível resolver problemas estruturais com suporte de técnicas de otimização topológica sem a necessidade do conhecimento do histórico do processo de deformação. Para Bortoluzzi (2020), a proposta de análise limite surge como uma alternativa para o cálculo da carga de colapso, sendo outra possibilidade a execução de uma análise elastoplástica incremental.

O emprego da teoria de análise limite se dá principalmente em aplicações específicas, como citadas por Bortoluzzi (2020): análise de estabilidade de solos sob atuação de carregamentos, sendo utilizada para projeto de fundações e estruturas de contenção. e também na análise das cargas atuantes em processos de conformação de ligas metálicas. Outra aplicação

relevante está associada na determinação da energia de deformação e nos modos de colapso de estruturas para absorção de energia.

Em seu trabalho, Bortoluzzi (2020) apresentou formulações de análise limite para otimização topológica, por meio da idealização de um material elastoplástico ideal. Com isto, dois problemas de ótimo foram formulados: maximização de fator de colapso com restrição de massa, e minimização de massa com restrição do fator de colapso.

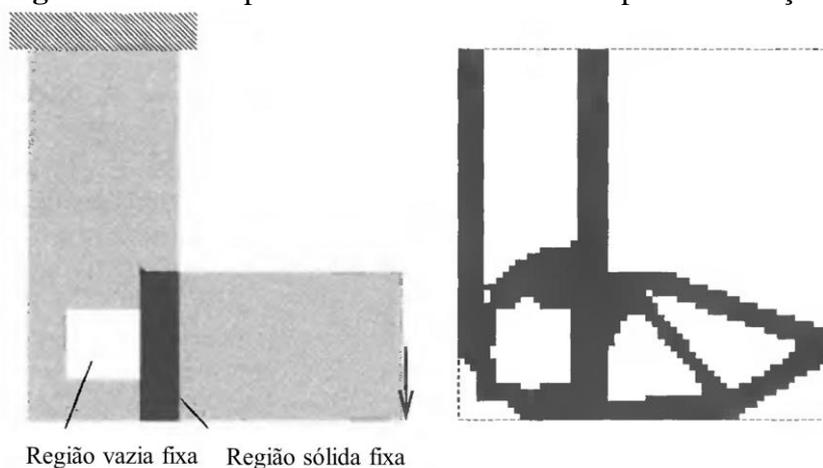
Com isto, identificam-se diferentes alternativas para a otimização matemática de um elemento estrutural em concreto estrutural. As ferramentas numéricas disponíveis e a atividade de interpretação dos resultados são fundamentais para a garantia de um projeto econômico, seguro e durável.

### 3.4 Boas práticas de otimização topológica

A otimização topológica contínua considera um domínio inicial (a área original de projeto), que também contém condições prescritas (tais como condições de contorno e carregamentos). O processo de otimização determina uma nova distribuição de material pela mudança da densidade e da rigidez dos elementos do domínio inicial, enquanto satisfaz as restrições de projeto, tais como: mínimo volume ou máximo deslocamento de uma região.

Para o caso em que partes da estrutura são consideradas fixas (sólidos ou vazios), o esquema de atualização das variáveis de projeto deve ser invocado apenas para as áreas da estrutura base que devem ser reprojatadas, de acordo com a Figura 59.

**Figura 59** – Exemplo de domínio de referência para otimização



Fonte: adaptado de BENDSØE e SIGMUND, 2003.

Simonetti (2016) apresenta que no campo da otimização estrutural, existem diversos métodos que podem ser utilizados para determinar o melhor conjunto de variáveis de projeto para proporcionar uma estrutura ótima. Estes podem ser divididos em dois grupos: métodos baseados em gradiente e métodos heurísticos.

Os métodos baseados em gradiente fazem uso das derivadas da função objetivo e as restrições em busca do ótimo. No entanto, a hipótese é sempre de que o problema seja convexo, para que a solução mínima possa ser encontrada e que esta exista. Por consequência, outros métodos que são independentes dos gradientes das funções foram desenvolvidos, conhecidos como métodos baseados na observação ou métodos heurísticos.

Por meio da percepção intuitiva do problema, ou a partir de argumentos plausíveis baseados em observações da natureza, os métodos heurísticos foram desenvolvidos. Embora tais métodos proporcionem boas soluções, apresentam uma aparente falta de rigor matemático (SIMONETTI, 2016).

As técnicas de otimização estocásticas, tais como os algoritmos genéticos, podem ser benéficas como alternativa aos métodos baseados em gradiente, uma vez que operam distribuindo variáveis aleatórias e aplicando a sobrevivência do “mais forte”. Entretanto, dado que o número de pontos a serem analisados depende fortemente do número de variáveis de projeto, caso este número seja grande, este método pode se tornar computacionalmente custosos.

Os algoritmos genéticos se destacam como uma técnica estocástica popular de otimização, de acordo com Simonetti (2016), já que as principais características deste método são: codificação de parâmetros, busca feita a partir de uma população de pontos (e não em um único ponto, como dos algoritmos determinísticos), utilização somente da função objetivo e uso das regras probabilísticas de transição.

Arora (2012) cita que um bom algoritmo de otimização para aplicações práticas deve seguir os seguintes requisitos:

- **Confiabilidade:** o algoritmo deve ser confiável para aplicações práticas, convergindo para um ponto de mínimo a partir de qualquer estimativa inicial;
- **Generalidade:** o algoritmo deve ser geral, ou seja, deve tratar restrições de igualdade assim como restrições de desigualdade. Não se deve impor nenhuma restrição na forma das funções do problema.
- **Facilidade de uso:** Deve ser fácil de uso tanto para os usuários experientes quanto para os usuários sem experiência. De um ponto de vista prático, quando há a exigência de muitos parâmetros, torna-se inviável a prática para aplicações em projetos.

- Eficiência: Para as aplicações mais gerais de engenharia, o algoritmo deve possuir tal eficiência que atinja a convergência de um ponto de mínimo em uma maior velocidade. Ainda é desejável que seja realizado um menor número de cálculos em uma única iteração.

Para Bendsøe e Sigmund (2003), o projeto ótimo utilizando o método de distribuição material é baseado no cálculo numérico da distribuição ótima global da densidade do material  $\rho$ , a qual é variável de projeto.

Sigmund (2022) listou diversas recomendações para as boas práticas de otimização topológica. Com o surgimento de diversos trabalhos na área, a definição de inovação e contribuição original aos artigos previamente publicados necessita de uma referência consistente para evitar interpretações equívocas. Com isto, baseado no método SIMP, alguns pontos devem ser observados:

- Comparação direta: os resultados devem ser claros, tanto quantitativamente quanto qualitativamente. Valores como rigidez dos vazios, refinamento da malha, comprimento de escala, esquema de interpolação material, entre outros, influenciam fortemente nos valores da função objetivo, e com isto, podem conduzir a desentendimentos.
- Condições de contorno: estas devem representar o problema do ponto de vista numérico e físico. A famosa viga MBB é um caso comum de *benchmark* que considera carga pontual e apoios pontuais. A consideração de condições de contorno contínuas, em geral, conduz a topologias mais realistas.
- Busca dos ótimos globais (valores de energia de deformação): Problemas não convexos, critério de parada prematuro, penalização muito forte e erros de programação, entre outros, podem impedir a convergência para um bom mínimo local. Sempre que possível, o problema deve ser investigado para garantir a qualidade dos resultados.
- Visualização: a suavidade da superfície otimizada deve ser analisada com cautela, visto que, a distribuição de material é o que representa a resolução do problema numérico.
- Avaliação das malhas extraídas: a maioria dos *softwares* comerciais possuem recursos para exportação das geometrias otimizadas, que podem ser convertidas em contornos suaves ou diretamente descritas por meio de polilinhas. A qualidade das soluções deve ser apreciada com cautela, pois diferentes malhas fornecem diferentes superfícies.
- Comprimento de escala e convergência de malha: para validar os resultados do pós-processamento, é fundamental identificar os comprimentos que descrevem os vazios e

os sólidos. Com o auxílio das técnicas de filtragem, quando bem utilizadas, este problema é minimizado.

- Resolução e refinamento dos resultados: diferentes malhas irão produzir diferentes resultados. O grau de refinamento das malhas influencia diretamente na quantidade de iterações e no pós-processamento.
- Convergência ou critério de parada? Esta pergunta deve ser respondida do ponto de vista matemático, pois, a forma rigorosa de concluir que um código convergiu é monitorando o cumprimento dos critérios de otimalidade.
- Estudos de caso de validação de exemplos da literatura: sempre que possível, deve-se utilizar exemplos da literatura para validar os casos analisados. Qualquer mudança nos exemplos existentes deve ser motivada e explicada. Observa-se que qualquer exemplo adicional a ser incluído na literatura deve trazer uma nova contribuição, uma vez que, para Sigmund (2022) a flexibilidade, enquanto função objetivo, é simples e tolera diferentes variações. No entanto, é recomendável a inclusão de problemas mais complexos para validação.
- Esquemas de interpolação e rigidez dos vazios: a escolha do fator de penalidade e do método de interpolação material influenciam diretamente na avaliação da função objetivo. Com isto, para estabilidade numérica e convergência aperfeiçoada nas análises numéricas, deve-se atentar para a escolha de maiores valores de rigidez mínima.
- Necessidade de análise multiescala: assim como a análise monoescala, os resultados da análise multiescala baseados na otimização topológica devem ser considerados com cautela. Uma forma simples de verificar a consistência e a otimalidade das abordagens multiescala é a de comparar os resultados obtido com a interpolação dos limites de Hashin-Strikhman.
- Análise 2D vs. Análise 3D: a realidade dos problemas é tridimensional. A simplificação para a análise 2D sempre deve ser efetuada com observação nas simplificações propostas pelos modelos.
- Avaliação crítica dos resultados: a literatura possui vários exemplos que não possuem significado físico. A necessidade de resultados palpáveis deve andar em conjunto com as comparações quantitativas.
- Reprodutibilidade: para a boa prática científica, é crucial que todos os resultados possam ser reproduzidos. Isto pode ser realizado por meio da listagem meticulosa de todos os

parâmetros, modelo e configurações de otimização. Ademais, códigos podem ser fornecidos como suplementos para a comunidade científica.

### 3.5 Otimização topológica de materiais elásticos lineares

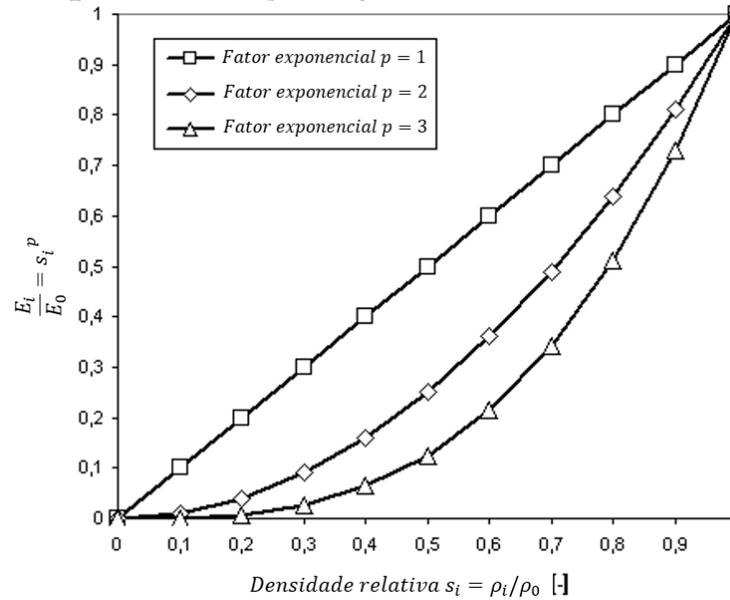
Em problemas de otimização topológica, considerando as relações lineares, a flexibilidade de uma estrutura pode ser entendida como a soma da energia de deformação de todos os elementos ( $\sum u^t ku$ ), em que  $u$  é o vetor dos deslocamentos e  $k$  é a matriz de rigidez global. Flexibilidade é recíproco para a rigidez, isto significa que minimizar a flexibilidade é equivalente a maximizar a rigidez global. Se o caso de carregamento é definido por forças ou tensões, deve-se escolher minimizar a energia de deformação para maximizar a rigidez global (SIMULIA, 2019).

Por exemplo, se o caso de carregamento é definido por um campo térmico, a energia de deformação decresce à medida que a otimização modifica a estrutura para torná-la menos rígida. Como resultado, deve-se sempre escolher para maximizar a energia de deformação em virtude de tentar minimizá-la para uma estrutura rígida. De forma adicional, deve-se escolher maximizar a energia de deformação quando há deslocamentos prescritos aplicados no modelo (SIMULIA, 2019).

A otimização topológica considera a energia de deformação total para todos os elementos, ou seja, se escolhida como função objetivo, deve-se aplicar para todo o modelo. Não é possível utilizar a energia de deformação como restrição no procedimento de otimização.

O volume do modelo é definido como a soma do volume dos elementos na região de projeto. Durante a otimização, os elementos são escalados com a densidade relativa atual definida no modelo. Para a maioria dos problemas de otimização, deve ser aplicada uma restrição de volume. Por exemplo, o objetivo é minimizar a energia de deformação, que equivale a maximizar a rigidez, se não for aplicada a restrição de volume, o procedimento geral preencherá toda a área de projeto com material.

Na otimização topológica, a massa do elemento estrutural é distribuída na área de projeto. Durante o processo iterativo, os elementos com a massa original coexistem com a rigidez original. Porém, elementos também existem sem massa e sem rigidez, bem como, elementos com massa intermediária e rigidez desconhecida. Para estes elementos, a relação entre a densidade e a rigidez deve ser determinada. Diversos métodos podem ser encontrados na literatura. Um dos mais comuns é o método SIMP (Figura 60), que pode ser reduzido para uma simples relação exponencial entre a densidade e a rigidez de um elemento.

**Figura 60** – Relações exponenciais do método SIMP

Fonte: adaptado de SIMULIA, 2014.

Tem-se para as relações do método SIMP

$$E_{ijkl} = f(\rho) \quad (63)$$

$$f(\rho) = E_{ijkl}^0 \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^p \quad (64)$$

em que  $E_{ijkl}^0$  é o tensor de rigidez do material original com densidade  $\rho_0$  e  $E_{ijkl}$  é o tensor de rigidez do material desconhecido com correspondente densidade  $\rho$ .

### 3.6 Otimização topológica de materiais não lineares

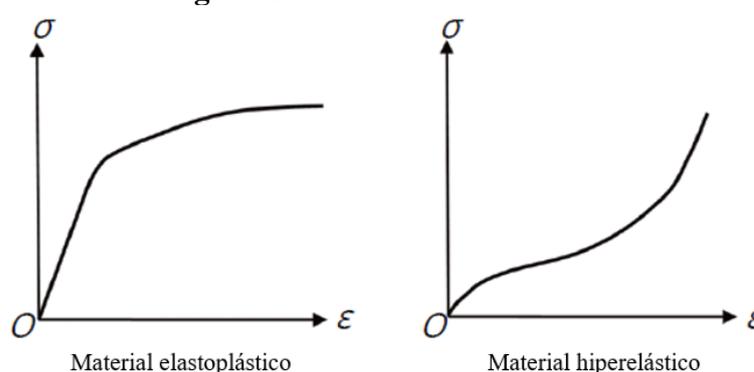
Wen *et al.* (2022) apresentam uma revisão da utilização dos métodos de otimização topológica para problemas não lineares. Na prática de engenharia, diversos problemas podem ser considerados não lineares, entretanto, é comum tratá-los como lineares. Esta simplificação pode acarretar erros significantes e até resultados errados, que podem causar acidentes que comprometam a integridade estrutural. Do ponto de vista computacional, introduzir a não linearidade traz desafios na resolução das equações de estudo, devido à instabilidade local e global, além da distorção excessiva de elementos de baixa densidade.

No campo da não linearidade física, Wen *et al.* (2022) relacionam o desenvolvimento da otimização topológica para materiais elastoplásticos e hiperelásticos (Figura 61). Para os materiais elastoplásticos, foram desenvolvidos métodos considerando restrições de tensões, considerando critérios de resistência tais como von Mises e Drucker-Prager. Na hipótese de

limitar a tensão de escoamento von Mises, por exemplo, duas formulações podem ser encontradas na literatura: maximização da energia de deformação e maximização do fator de carga.

Para materiais hiperelásticos, também conhecidos como materiais elásticos não lineares, modelos clássicos como Mooney-Rivlin, Neo-Hookean e Ogden, são apresentados em pesquisas. Em geral, para estes modelos, acopla-se além da não linearidade física, a não linearidade geométrica.

**Figura 61** – Materiais não lineares



Fonte: adaptado de WEN *et al.*, 2022.

Bendsøe *et al.* (1996) investigaram a formulação combinada de otimização de material e de estrutura para materiais não lineares com comportamento de amolecimento. Constatou-se que, em contraste ao problema que considera material elástico linear, a distribuição otimizada das propriedades dos materiais depende da intensidade do carregamento.

Buhl, Pedersen e Sigmund (2000) estudaram o efeito da não linearidade geométrica na otimização topológica. Para estruturas submetidas a grandes deformações, verificou-se que a minimização da flexibilidade foi ineficiente para pequenos ou grandes carregamentos. Para o caso linear, independentemente do carregamento aplicado, as topologias obtidas são as mesmas. Entretanto, os autores concluíram que, para grandes deslocamentos, as topologias tendem a ficarem menos simétricas, e que, as energias de deformações encontradas para o caso não linear sempre são menores do que as resultantes das topologias com a consideração de pequenas deformações.

Lotfi (2013) ressalta que outras instabilidades numéricas podem surgir devido à não linearidade nos problemas estruturais. Por exemplo, algumas instabilidades podem estar associadas à modelagem de elementos com baixa densidade e distorção excessiva de elementos. O custo computacional também deve ser enfatizado, visto que a análise iterativa não linear por

elementos finitos, em geral, domina cerca de 90% do esforço para a solução de um problema de otimização.

Lotfi (2013) afirma que para a desvantagem da flexibilidade final enquanto função objetivo é que a estrutura pode colapsar na aplicação do carregamento, antes de alcançar a deformação final. A flexibilidade complementar (energia de deformação) é definida como a energia total que a estrutura pode dissipar durante a deformação mecânica. Para otimizar a flexibilidade complementar, é necessário minimizar negativamente a energia de deformação. A Eq. (65) indica que a otimização não linear é um problema que possui dependência da trajetória.

$$\begin{aligned} \text{minimizar } \phi \quad f &= - \iint_{\Omega} \sigma^T d\epsilon d\Omega = \iint_{\Omega} K^T dU d\Omega \\ \text{sujeito a } \sum_{e=1}^{nelem} \rho_i v_i &\leq V \\ 0 \leq \phi_i &\leq \phi_{max} \quad \forall_i \in \Omega \end{aligned} \quad (65)$$

Estabelecendo as equações do trabalho virtual para a função objetivo, considerando as condições de contorno, Lotfi (2013) apresenta a Eq. (66), em que  $\sigma$  é a tensão,  $\epsilon$  é a deformação,  $u$  é o deslocamento,  $\ddot{u}$  é a aceleração e  $t$  é a força de superfície no contorno. Despreza-se as forças de volume e a aceleração na próxima etapa.

$$\int_{\Omega} \delta \epsilon^T \sigma d\Omega - \int_{\Omega} \delta u^T \rho b d\Omega + \int_{\Omega} \delta u^T \rho \ddot{u} d\Omega - \int_{\Omega} \delta u^T \bar{t} d\Omega = 0 \quad (66)$$

Adicionando as restrições nas condições de Kuhn-Tucker, chega-se a:

$$\frac{\partial}{\partial \rho_i} \iint_{\Omega} \sigma^T d\epsilon d\Omega + \lambda v_i = 0 \quad (67)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho_i} \iint_{\Omega} K^T dU d\Omega + \lambda v_i = 0 \quad (68)$$

em que  $\lambda$  é o multiplicador de Lagrange,  $v_i$  é o volume do elemento. Aplica-se uma análise não linear por elementos finitos e um método de controle de deslocamento iterativo. Quando a análise não linear é finalizada, uma nova estrutura é proposta de acordo com a sensibilidade dos elementos. Se  $\rho^e$  é a densidade do elemento, assume-se a relação exponencial do método SIMP.

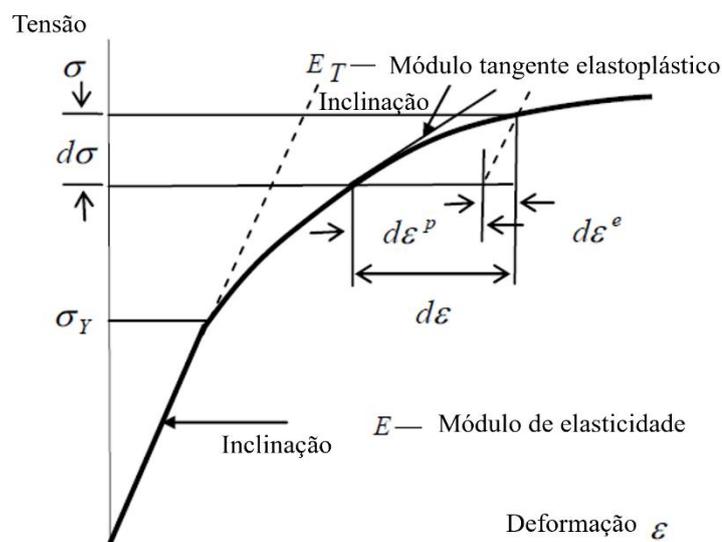
$$D = \rho_i^\beta D_0; \quad H = \rho_i^\beta H_0; \quad \sigma_y = \rho_i^\beta \sigma_{y0} \quad (69)$$

em que  $D$  é a matriz constitutiva elástica,  $H$  é a matriz de enrijecimento plástico,  $\sigma_y$  é a tensão de escoamento.

As relações constitutivas incrementais para diversos materiais de engenharia são formuladas de acordo com um critério de escoamento, que indica um nível de tensão no qual o fluxo plástico deve ser postulado. Uma relação entre tensão e deformação deve ser desenvolvida para o comportamento pós-escoamento (YU, 2006).

Para o caso uniaxial, a curva tensão-deformação de um material elastoplástico é apresentada na Figura 62. O comportamento pode ser caracterizado por uma região elástica, com módulo de elasticidade  $E$ , até o início do escoamento dado pela tensão  $\sigma_y$ . A partir desta região, o regime plástico variará de acordo com o módulo tangente elastoplástico  $E_T$ .

**Figura 62** – Comportamento elastoplástico uniaxial



Fonte: adaptado de YU, 2006.

Os elementos fundamentais da deformação plástica incluem o início do escoamento do material, a deformação por endurecimento/amolecimento e subsequente escoamento, equações constitutivas incrementais e critérios de carregamento de descarregamento, entre outros (YU, 2006).

Para análise elastoplástica, em que há parcelas de deformação elástica e deformação plástica,

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \quad (70)$$

em que  $d\varepsilon^e$  são as deformações elásticas e  $d\varepsilon^p$  são as deformações plásticas, que precisam ser determinadas em cada ponto de escoamento, têm-se que

$$d\varepsilon = BdU \quad (71)$$

$$D^{ep} = D^e - \frac{D^e \cdot n \cdot n^T \cdot D^e}{H + n^T \cdot D^e \cdot n} \quad (72)$$

$$d\sigma = D^{ep}d\varepsilon \quad (73)$$

$$K^T = \int_{\Omega} BD^{ep}Bd\Omega \quad (74)$$

em que  $D^{ep}$  é a matriz constitutiva elastoplástica,  $B$  é matriz deslocamento-deformação,  $n$  é o vetor de fluxo plástico,  $K^T$  é a matriz de rigidez.

Em seguida, define-se as derivadas das funções objetivos e das restrições em relação às variáveis de projeto.

$$\frac{\partial D}{\partial \rho_i} = \beta \rho_i^{\beta-1} D_0; \quad \frac{\partial H}{\partial \rho_i} = \beta \rho_i^{\beta-1} H_0; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial \rho_i} = \beta \rho_i^{\beta-1} \sigma_{y0} \quad (75)$$

A derivada da função objetivo é dada por:

$$\frac{\partial f}{\partial \rho_i} = -\frac{\partial}{\partial \rho_i} \int_{\Omega} \int_{\hat{\varepsilon}} \sigma^T d\varepsilon d\Omega = -\frac{\partial}{\partial \rho_i} \int_{\Omega} \int_{\hat{\varepsilon}} \int_{\sigma} d\sigma^T d\varepsilon d\Omega \quad (76)$$

$$\frac{\partial d\sigma}{\partial \rho_i} = \frac{\partial(D^{ep}d\varepsilon)}{\partial \rho_i} = \frac{D^{ep}}{\partial \rho_i} d\varepsilon + D^{ep} \frac{\partial d\varepsilon}{\partial \rho_i} \quad (77)$$

Então, substitui-se na equação do trabalho virtual o coeficiente de Kuhn-Tucker e resolve a equação para encontrar as derivadas

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon^T \sigma d\Omega - \lambda \int_{\Gamma} \int_{\hat{\varepsilon}} \delta u^T \hat{t} d\Omega = 0 \quad (78)$$

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon^T D^{ep} \frac{\partial d\varepsilon}{\partial \rho_i} d\Omega - \frac{\partial \lambda}{\partial \rho_i} \int_{\Gamma} \int_{\hat{\varepsilon}} \delta u^T \hat{t} d\Omega = 0 \quad (79)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \rho_i} = - \int_{\Omega} \int_{\hat{\varepsilon}} d\varepsilon^T \frac{\partial D^{ep}}{\partial \rho_i} d\varepsilon d\Omega - 2 \iint_{\Gamma} \frac{\partial d\lambda}{\partial \rho_i} \hat{t} du d\Gamma \quad (80)$$

em que  $d\lambda$  é igual a zero para o algoritmo de carregamento controlado, o que se verifica que a equação de sensibilidade depende apenas de  $\frac{\partial D^{ep}}{\partial \rho_i}$ . Porém, é difícil utilizar uma análise de carregamento controlado para a otimização topológica não linear, porque rigidez durante as iterações iniciais é tipicamente pequena. Aplicar carregamento ao invés de deslocamentos prescritos pode levar alguns elementos a grandes deformações e pode conduzir a instabilidades numéricas.

Ao se aplicar um campo de deslocamentos prescritos, os valores de deslocamentos no contorno substituem as forças constantes. Neste caso, a sensibilidade para  $\frac{\partial d\lambda}{\partial \rho_i}$  não é nula e  $\frac{\partial d\hat{u}}{\partial \rho_i} = 0$ . Com isto, pode-se simplificar

$$\frac{\partial d\lambda}{\partial \rho_i} = - \int d\varepsilon^T \frac{\partial D^{ep}}{\partial \rho_i} d\varepsilon \frac{\partial \Omega}{\hat{t}} du = \int dU^T \frac{\partial K^T}{\partial \rho_i} dU \frac{\partial \Omega}{\hat{t}} du \quad (81)$$

Com isto, pode-se calcular as sensibilidades de  $D^{ep}$  em relação às densidades. As derivadas de cada parâmetro em relação às variáveis de projeto podem ser calculadas por meio da regra da cadeia ou as equações de projeção Heaviside. A derivada da normal em relação à superfície de escoamento é zero  $\frac{\partial n}{\partial \rho_i} = 0$ .

$$\frac{\partial D^{ep}(D)}{\partial \rho_i} = \frac{\partial D}{\partial \rho_i} - \frac{\left( \frac{\partial D}{\partial \rho_i} nn^T + Dnn^T \frac{\partial D}{\partial \rho_i} \right) (H + n^T Dn) - (H + n^T \frac{\partial D}{\partial \rho_i} n) (Dnn^T D)}{(H + n^T Dn)^2} \quad (82)$$

A parte da tensão de escoamento do módulo tangente elastoplástico não depende da densidade. Enquanto o endurecimento é relacionado com as densidades, como segue:

$$\frac{\partial D^{ep}(\sigma_y)}{\partial \rho_i} = 0 \quad (83)$$

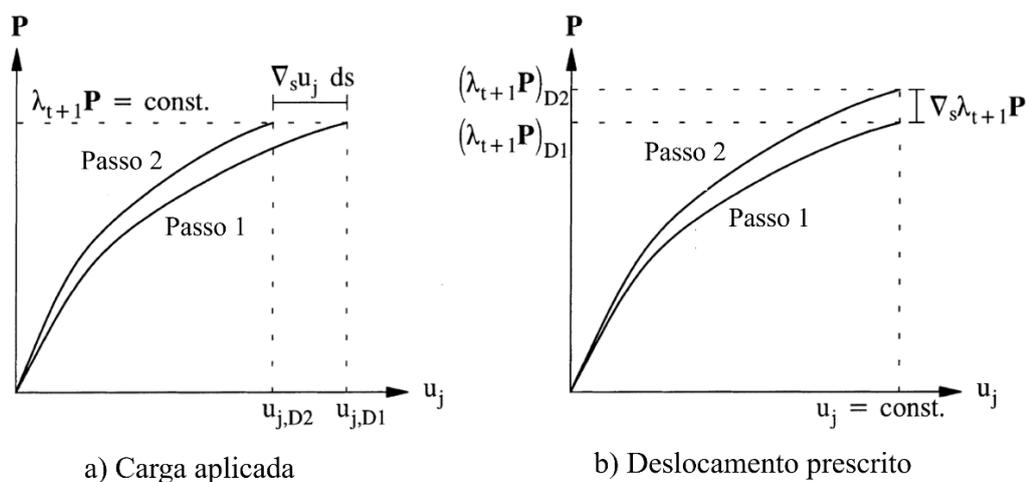
$$\frac{\partial D^{ep}(H)}{\partial \rho_i} = \frac{\left( \frac{\partial H}{\partial \rho_i} \right) (Dnn^T D)}{(H + n^T Dn)^2} \quad (84)$$

Das relações apresentadas, pode-se proceder a otimização topológica não linear.

Schwarz, Maute e Ramm (2001) comentam que em problemas de não linearidade física, em que a resposta do material depende da intensidade da carga aplicada, isto caracteriza a necessidade um processo incremental. Conseqüentemente, as sensibilidades envolvidas no processo de otimização precisam ser calculadas após o passo incremental. Analogamente às variáveis de estado, as derivadas são atualizadas por meio dos incrementos adicionados aos passos anteriores.

Os autores sugerem que o problema elastoplástico seja baseado em deslocamentos prescritos. A sensibilidade do fator de carga incremental  $\Delta_s d\lambda$  desaparece no caso do algoritmo de cargas prescritas. Para o caso dos deslocamentos aplicados, a sensibilidade do fator de carregamento incremental é determinada de forma que o deslocamento do grau de liberdade controlado não varia, isto é,  $\Delta_s d\hat{u}_j = 0$ . Para o caso de cargas aplicadas (Figura 63a) e deslocamentos prescritos (Figura 63b), as curvas carga-deslocamento são apresentadas. Verifica-se que o passo 2 pode ser obtido pela variação do passo 1 em relação a  $ds$ .

**Figura 63** – Influência do algoritmo nas sensibilidades



Fonte: adaptado de SCHWARZ, MAUTE e RAMM, 2001.

Em função do grande número de variáveis, Schwarz, Maute e Ramm (2001) reforçam que a avaliação destas nas condições de escoamento devido aos deslocamentos incrementais  $\Delta_s d\mathbf{u}$  podem ser muito custosas.

Schwarz, Maute e Ramm (2001) abordaram uma combinação da otimização topológica e de forma, incluindo a não linearidade física, para materiais dúcteis, tais como aço e alumínio. Comumente, estes materiais são modelados pelo critério de escoamento elastoplástico de von Mises com endurecimento linear isotrópico para pequenas deformações. Os autores citam que

para tirar vantagem do comportamento estrutural na faixa elastoplástica, a ductilidade estrutural é maximizada enquanto a massa no espaço de projeto é prescrita.

Para Schwarz, Maute e Ramm (2001), o *layout* estrutural é determinado primeiramente pela otimização topológica. Por meio da distribuição de material, obtém-se uma aproximação para a geometria otimizada do elemento estrutural. Posteriormente, um processo de suavização das superfícies, por exemplo, por meio de um processo adaptativo, pode fornecer um *layout* final que é interpretado como um arquivo CAD. Para a otimização de forma, outros critérios adicionais podem ser considerados, como por exemplo, limites de deslocamento e/ou tensão.

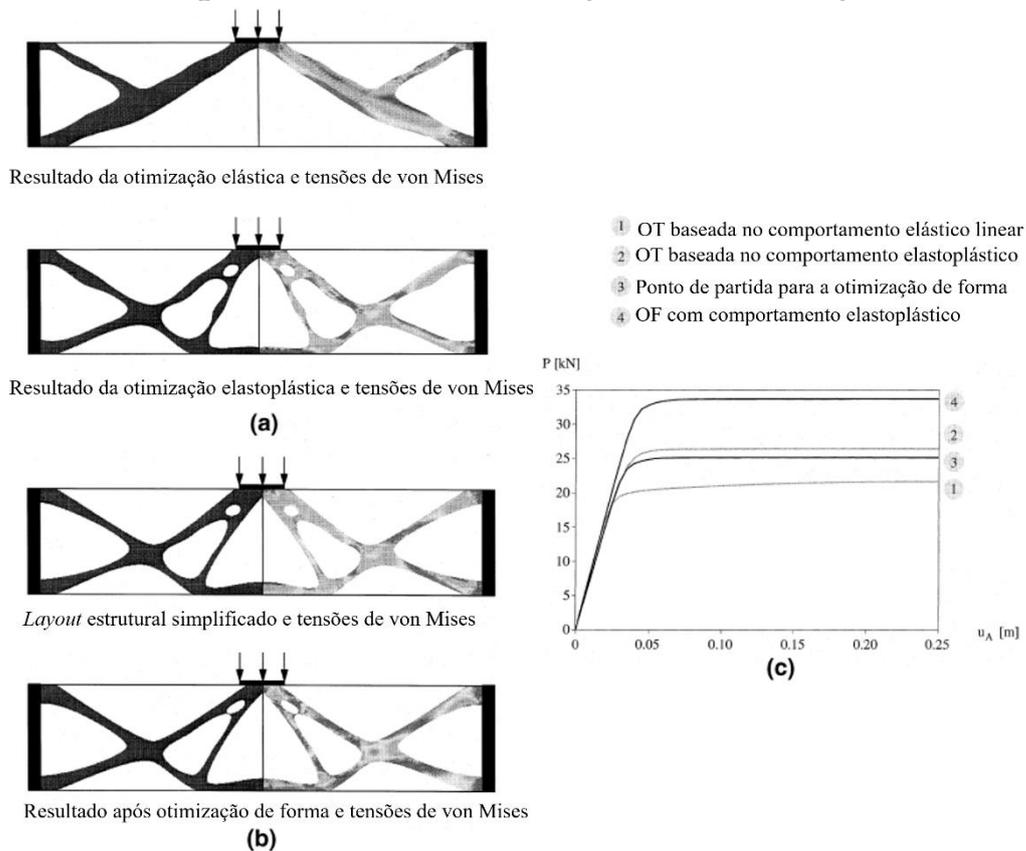
Schwarz, Maute e Ramm (2001) investigaram uma viga biengastada com deslocamento prescrito na porção superior do meio do vão. Duas análises de otimização topológica (OT) foram realizadas, baseadas na análise elástica e elastoplástica, respectivamente. A distribuição otimizada de material pode ser verificada na Figura 64 (a). Os resultados diferem consideravelmente um do outro. Para o caso elastoplástico, o carregamento é igualmente distribuído para os apoios superiores e inferiores, o que causa um diferente *layout* interno. A solução elástica, em contrapartida, apresenta uma distribuição mais simples.

Para fins de comparação, o *layout* obtido com o material elástico é analisado também com o comportamento elastoplástico. As curvas carga-deslocamento 1 e 2 da Figura 64 (c) são dados para o deslocamento vertical prescrito. A rigidez do “ótimo elástico” é maior na faixa de comportamento elástico, porém, inicia-se o escoamento a um menor nível de carregamento. A ductilidade do “elástico ótimo” é cerca de 27% menor do que o “elastoplástico ótimo”.

Baseado no *layout* estrutural obtido por meio do processo adaptável de otimização topológica, o *layout* estrutural é refinado por meio da otimização de forma (OF). O *layout* estrutural simplificado, antes e depois da otimização de forma, e as tensões de von Mises são representados na Figura 64 (b). Durante a etapa final de otimização, a ductilidade é aumentada em cerca de 35% em comparação ao projeto obtido por meio da otimização topológica.

O estudo realizado por Schwarz, Maute e Ramm (2001) corrobora que é essencial considerar o comportamento não linear físico no processo de otimização para aumentar a ductilidade da estrutura. Isto significa que a qualidade das topologias obtidas com a consideração do comportamento elástico linear é de valor limitado sempre que as respostas não elásticas do material são levadas em conta.

**Figura 64** – Resultados obtidos para diferentes comportamentos

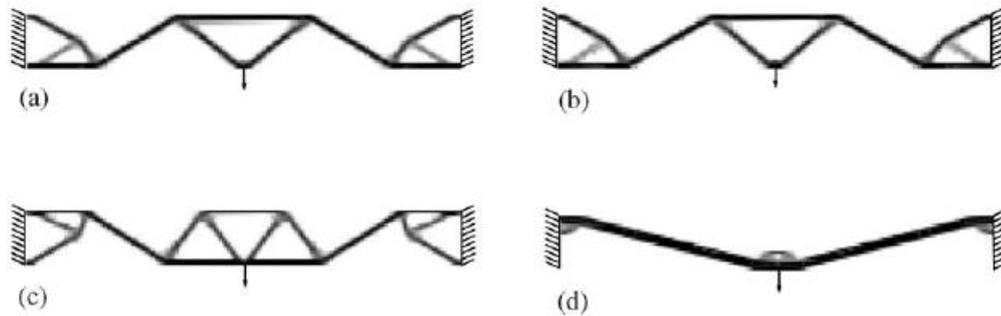


Fonte: adaptado de SCHWARZ, MAUTE e RAMM, 2001.

Jung e Gea (2004) consideraram o problema de otimização topológica com o comportamento não linear físico e geométrico simultaneamente. As relações constitutivas foram derivadas em termos do 2º tensor de tensão de Piola-Kirchhoff e os tensores de deformação de Green-Lagrange, e o modelo não linear do material foi modelado por meio de uma função definida pela relação entre a tensão efetiva e a deformação.

A Figura 65 demonstra os resultados obtidos para as diferentes análises consideradas para uma viga biengastada com 160 cm de vão e 20 cm de altura. Jung e Gea (2004) analisaram as topologias obtidas para uma carga concentrada de 30 N no meio do vão, levando-se em conta de que esta força é suficiente para garantir a não linearidade física nas áreas com maiores deformações. Os modelos adotados são: (a) análise elástica linear; (b) análise não linear física; (c) análise não linear geométrica; (d) análise não linear física e geométrica.

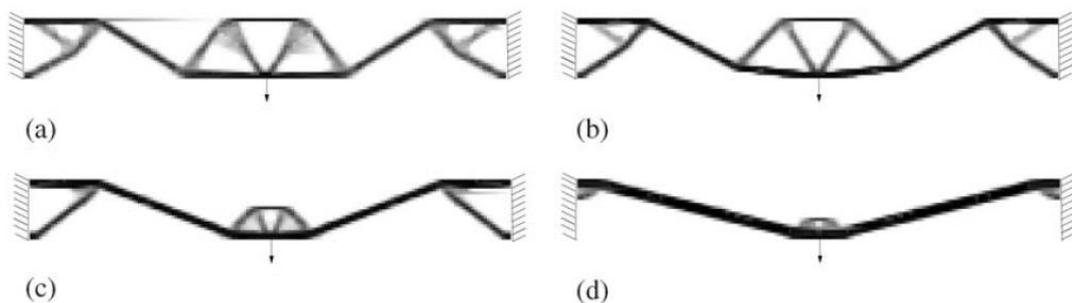
**Figura 65** – Topologias ótimas para um mesmo carregamento



Fonte: JUNG e GEA, 2004.

Em seguida, Jung e Gea (2004) simularam as análises com as duas não linearidades presentes, para o acréscimo de carregamento e o efeito disto nas topologias obtidas. Quatro magnitudes de força foram consideradas na Figura 66: (a) 10 N; (b) 15 N; (c) 20 N; (d) 30N. Encontra-se que à medida que a deformação aumenta, o efeito da não linearidade física começa a alterar as configurações otimizadas da estrutura. Os autores realçam que quando as aplicações estruturais requisitarem o comportamento não linear e a presença de grandes deformações, a análise não linear física e geométrica deve ser utilizada de modo a garantir o melhor projeto.

**Figura 66** – Topologias ótimas para diferentes carregamentos



Fonte: JUNG e GEA, 2004.

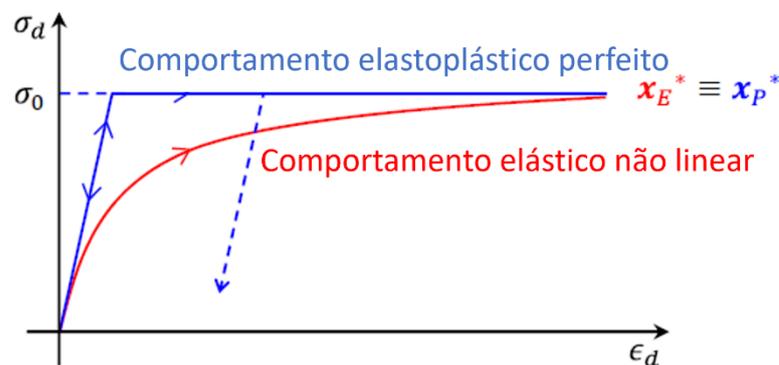
Xia, Fritzen e Breitkopf (2017) observaram a utilização da otimização topológica evolucionária para o projeto multiescala de estruturas elastoplásticas. Para os exemplos analisados, os autores reforçam uma estratégia de variação do raio do filtro. Com uma abordagem de redução gradual do raio combinada com um esquema de amortecimento, durante o procedimento de otimização, as topologias resultantes são mais suaves. Ao iniciar o processo com um raio maior, e em seguida, reduzi-lo, há uma eliminação de elementos redundantes (finos) na topologia final.

Foi demonstrado por Xia, Fritzen e Breitenkopf (2017) que o resultado numérico com material elástico linear resulta em grandes concentrações de tensões, o que pode levar ao colapso devido ao escoamento na análise plástica. No entanto, considerando-se o comportamento plástico, pode-se prevenir o surgimento de regiões altamente plastificadas durante o procedimento de otimização ao se distribuir material ao redor das maiores concentrações, e com isto, obter eventualmente uma melhor performance na análise não linear.

Chi *et al.* (2019) propuseram a utilização do modelo hiperelástico de Ogden para a análise da otimização topológica em estado plano de tensão e estado plano de deformação. A formulação adotada para pequenas deformações correspondeu à maximização da energia potencial total da estrutura, objetivando a maximização da rigidez.

Zhao *et al.* (2020) propuseram a otimização topológica com a utilização de um modelo elástico não linear substituído ao modelo elastoplástico de Drucker-Prager (Figura 67). Os resultados numéricos apresentados validam que, em um estado limite, o modelo elástico não linear é equivalente à solução plástica. O modelo de Drucker-Prager vem sendo utilizado para a otimização topológica com o objetivo de restrição em termos de tensões (STOIBER e KROMOSER, 2021). Em razão da sua possibilidade de consideração de diferentes níveis de resistência em comparação com o critério de von Mises, verifica-se uma maior aplicabilidade para as estruturas de concreto.

**Figura 67** – Convergência de dois modelos constitutivos



Fonte: ZHAO, 2021.

Zhao (2021) cita que no método SIMP o módulo de elasticidade longitudinal é o único parâmetro interpolado. Alternativamente, demais parâmetros podem ser interpolados para se alcançar uma convergência mais robusta no processo numérico de otimização. Por exemplos, os parâmetros de Drucker-Prager são apresentados no trabalho do autor como extensão do

esquema de interpolação material. O caso 1 é considerado o padrão do método SIMP (Eq. (64)). O caso 2 (Eq. (85)) considera a interpolação do módulo de elasticidade e a coesão. Por fim, o caso 3 (Eq. (86)) considera a interpolação do módulo de elasticidade, da coesão e do ângulo de atrito.

$$E_e = \rho_e^p \cdot E; c_e = \rho_e^p \cdot c \quad (85)$$

$$E_e = \rho_e^p \cdot E; c_e = \rho_e^p \cdot c; \psi_e = \rho_e^p \psi \quad (86)$$

Considera-se que à medida que a densidade decresce, o estado de tensão muda no caso elastoplástico. Com isto, as soluções obtidas por diferentes modelos de interpolação material podem influenciar na análise elastoplástica.

Para análise não linear, SIMULIA (2014) demonstra o processo de solução por meio do método de Newton. Em um problema mecânico, tem-se que para o equilíbrio estático, a soma das forças em um ponto seja zero.

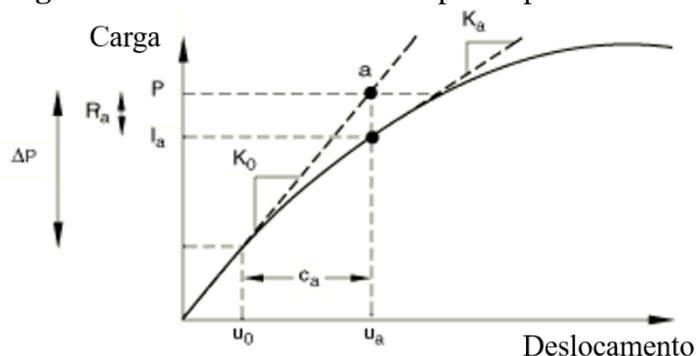
A resposta não linear de uma estrutura para um pequeno incremento de carregamento,  $\Delta P$ , de acordo com SIMULIA (2014), para o método de Newton, utiliza-se a rigidez tangente  $K_0$ , calculada na configuração  $u_0$  e  $\Delta P$  é calculado para uma correção de deslocamento  $c_a$ . Utilizando-se  $c_a$ , têm-se a configuração da estrutura atualizada para  $u_a$ .

Calculando-se as forças internas para a configuração atualizada, têm-se que  $R_a = P - I_a$ , sendo  $R_a$  a força residual para a iteração,  $P$  a força externa e  $I$  a força interna. Se  $R_a$  for zero para cada grau de liberdade no modelo, o ponto  $a$  estaria coincidente com a curva, e a estrutura estaria em equilíbrio. Para os problemas tipicamente não lineares,  $R_a$  nunca será exatamente zero, sendo necessário introduzir valores de tolerância para convergência. Por padrão, utiliza-se o valor de 0.5% como uma média da força residual na estrutura, na média do tempo de carregamento.

Se  $R_a$  for menor que o atual valor de tolerância,  $P$  e  $I_a$  são consideradas em equilíbrio, e, portanto,  $u_a$  é uma configuração válida de equilíbrio para a estrutura com o carregamento aplicado (Figura 68). Entretanto, antes do ABAQUS/CAE® considerar a solução como aceita, deve ser verificado se a última correção de deslocamento  $c_a$  é pequena em relação ao incremento total do deslocamento  $\Delta u_a = u_a - u_0$ . Se  $c_a$  for maior que uma fração do incremento de deslocamento (1% do por padrão), o processamento irá para uma outra iteração. Ambos os critérios de convergência (força e deslocamento) devem ser satisfeitos antes da solução ser dita convergente para aquele incremento de tempo.

Caso a solução da iteração não seja convergente, o ABAQUS/CAE® realiza uma nova iteração em busca do equilíbrio das forças internas e forças externas. Primeiramente, considera-se uma nova rigidez para estrutura,  $K_a$ , baseada na configuração atualizada,  $u_a$ . A rigidez, em conjunto com a força residual  $R_a$ , determina uma nova correção de deslocamento  $c_b$ , que faz com que o sistema esteja próximo ao equilíbrio (Figura 68).

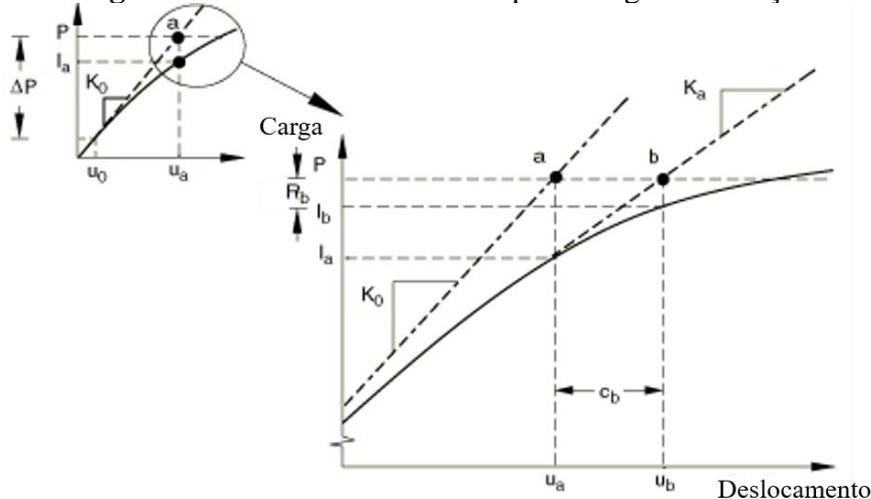
**Figura 68** – Análise incremental para a primeira iteração



Fonte: adaptado de SIMULIA, 2014.

Com a nova força residual  $R_b$ , determinada na configuração  $u_b$ , verifica-se a maior força residual em qualquer grau de liberdade e compara-se com a tolerância de força residual. A correção de deslocamento  $c_b$  para a segunda iteração é comparada com o incremento de deslocamento  $\Delta u_b$ . Se necessário, para satisfazer os critérios de convergência, o processamento irá para mais iterações (Figura 69).

**Figura 69** – Análise incremental para a segunda iteração



Fonte: adaptado de SIMULIA, 2014.

Para cada iteração nas análises não lineares, o processador padrão do ABAQUS/CAE® monta a matriz de rigidez do modelo e resolve o sistema de equações. O custo computacional de cada iteração é próximo ao custo de uma análise linear completa, o que faz com que a demanda computacional de uma análise não linear seja potencialmente maior do que o custo de uma análise linear.

Por padrão, o método de Newton para solução de problemas não lineares é implementado no ABAQUS/CAE®. Em alguns casos é utilizada a implementação exata deste método, especificamente quando a matriz Jacobiana ou a matriz de rigidez são definidas exatamente, e a convergência quadrática é obtida quando a estimativa da solução está dentro do raio de convergência do algoritmo. Em outros casos, quando a matriz Jacobiana é aproximada, o método iterativo não é considerado um método exato. Por exemplo, em alguns materiais e modelos de interface de superfície (como modelos de plasticidade não associativos ou atrito de Coulomb), é criada uma matriz Jacobiana não simétrica, porém pode ser escolhida uma aproximação desta matriz por sua parte simétrica.

Podem ser utilizados outros métodos em alternativa ao método de Newton. À disposição de processamento no ABAQUS/CAE®, há o método quasi-Newton, em que são empregadas técnicas de redução de custo computacional associadas à montagem da matriz Jacobiana e sua subsequente fatoração durante cada iteração.

Em se tratando de problemas não lineares, a formulação adotada por Zhao *et al.* (2020) considera uma abordagem baseada em controle de energia. Esta ideia utiliza o recurso de prescrição de um dado valor de energia  $C_0$  em todos os ciclos de projeto até que a topologia ótima seja alcançada. Quando se utiliza este critério, o parâmetro adotado depende do comportamento não linear esperado. Escolher este parâmetro pode também ser considerado uma maneira de controlar quando o material atinge seu estado último. Além disto, comprovou-se que esta abordagem direciona a convergências robustas em problemas não lineares.

O parâmetro de energia prescrita  $C_0$ , apresentado por Zhao *et al.* (2020) foi utilizado para a otimização de vigas em estado plano de deformação. Para o problema de estado, tem-se

$$\begin{aligned} T(\rho, u(\rho)) &= \chi(\rho, u(\rho))f_0 \\ f_0^T u(\rho) &= 2C_0 \end{aligned} \tag{87}$$

em que  $T(\rho, u(\rho))$  é o vetor de forças internas,  $\chi(\rho, u(\rho))$  é fator de escala das reações de apoio e  $f_0$  é o vetor das forças externas e  $C_0$  é a energia prescrita para o sistema estrutural.

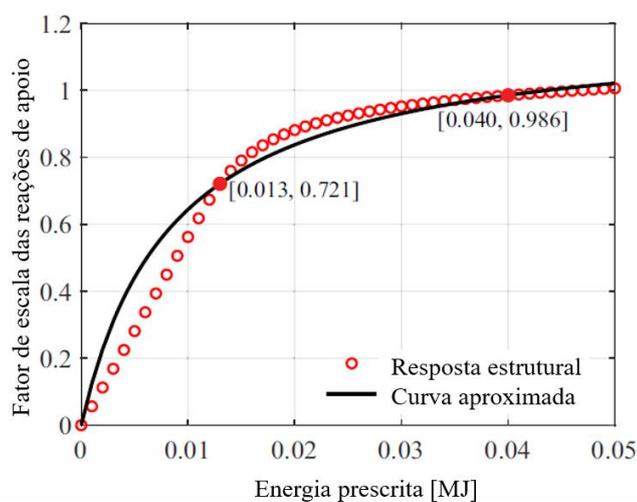
Para a análise de vigas, sabe-se que pela teoria da elasticidade linear, é possível aproximar o cálculo da energia de deformação em função da equação da linha elástica e da tensão normal na flexão.

$$U_i = \int_V \frac{\sigma^2}{2 \cdot E} dV = \int_0^L \frac{M^2}{2 \cdot E \cdot I} dx \quad (88)$$

Deste modo, pode-se atribuir ao problema os valores de energia prescritas associados aos deslocamentos requeridos para o regime elástico e/ou regime plástico.

Com isto, espera-se que em problemas típicos de flexão, à medida que o parâmetro  $C_0$  aumenta, em função de uma determinada restrição de deslocamento no ponto de aplicação de carga, verifica-se que há um aumento no fator de escala  $\chi$ , como verificado por Zhao *et al.* (2020) (Figura 70).

**Figura 70** – Variação dos parâmetros  $C_0$  e  $\chi$



Fonte: adaptado de ZHAO *et al.*, 2020.

Para uma pequena energia prescrita, verifica-se que a topologia é idêntica ao resultado obtido pela análise com material elástico linear. À medida que são consideradas energias maiores, observa-se a presença do comportamento não linear do material. No trabalho de Zhao *et al.* (2020), é descrito que acima de determinados valores de  $C_0$ , a topologia das soluções otimizadas permanece a mesma, entretanto, verifica-se uma variação na forma destas topologias.

Para os modelos elástico lineares, verifica-se que não há dependência do parâmetro de energia prescrita, visto que a relação carga-deslocamento se mantém linear durante todas as iterações dos ciclos de projeto e a distribuição de material no domínio de projeto independe da intensidade das cargas aplicadas, e sim, somente do seu ponto de aplicação.

Entretanto, para a consideração do comportamento não linear, em particular com o modelo de Drucker-Prager, antes do processo de otimização, deve-se verificar se há deformações plásticas no elemento estrutural. Não havendo transição do comportamento elástico para o comportamento plástico, espera-se que a topologia ótima seja a mesma obtida com a consideração dos parâmetros elásticos.

Com isto, a abordagem baseada em restrição de energia prescrita e/ou deslocamento nodal é válida para o controle de deslocamentos e/ou deformações excessivas, de modo a garantir que a topologia ótima acompanhe as características de resistência (à compressão e à tração) do modelo constitutivo adotado.

O método de critério de otimalidade para achar a topologia ótima de uma estrutura constituída de um único material isotrópico (domínio homogeneizado) consiste nos seguintes passos:

#### Pré-processamento da geometria e carregamento

- Escolher um domínio de referência adequado (estrutura base) que permita a definição das condições de contorno;
- Escolher as partes do domínio de referência que devem ser otimizadas e quais partes devem ser definidas como domínios sólidos ou vazios;
- Construir uma malha de elementos finitos para a estrutura base. Esta malha deve ser refinada o suficiente para representar a estrutura em uma resolução razoável de representação. A malha também deve tornar possível a definição de áreas que possam atribuir às variáveis de projeto fixas para tais áreas. Durante todo o processo de otimização, não há variação dimensional da malha.
- Construir espaços de elementos finitos para campos de deslocamentos independentes e variáveis de projeto.

### Otimização matemática

Para calcular a distribuição ótima de material no domínio de referência, a otimização utiliza uma análise em elementos finitos baseada em deslocamentos e o critério de atualização para a densidade. A estrutura do algoritmo é a seguinte:

- Definir o domínio inicial de projeto para distribuição homogênea de material. A parte iterativa do algoritmo então é definida:
- Para a distribuição da densidade, calcular via MEF os deslocamentos e deformações.
- Calcular a flexibilidade do projeto. Se houver pouca melhora no domínio (da flexibilidade) em relação à iteração anterior, parar as iterações. Caso contrário, continuar. Para estudos detalhados, parar quando as condições necessárias de otimalidade são satisfeitas.
- Calcular a atualização da densidade, baseado nas condições de otimalidade. Este passo também consiste em uma repetição de iteração interna para achar o valor do multiplicador de Lagrange para uma restrição de volume.
- Repetir o loop de iteração.

### Pós-processamento

- Interpretar a distribuição ótima de material como definição de forma, por exemplo em uma representação CAD ou como modelo para manufatura.

Nesta etapa, quando o processo de otimização é completado, pode-se extrair uma superfície suave para a representação do modelo otimização, de modo que o arquivo pode ser transferido para um sistema CAD ou de volta para o *software* de análise estrutural.

O modelo otimizado é usualmente uma combinação de elementos tetraédricos e hexaédricos e pode incluir um número significativo de elementos interiores que não inclusos na geração da representação da superfície. Esta superfície pode ser totalmente irregular, a depender da densidade do elemento. O processo de suavização é um processo iterativo que desloca os nós da superfície e gera uma malha triangular suave na superfície do modelo.

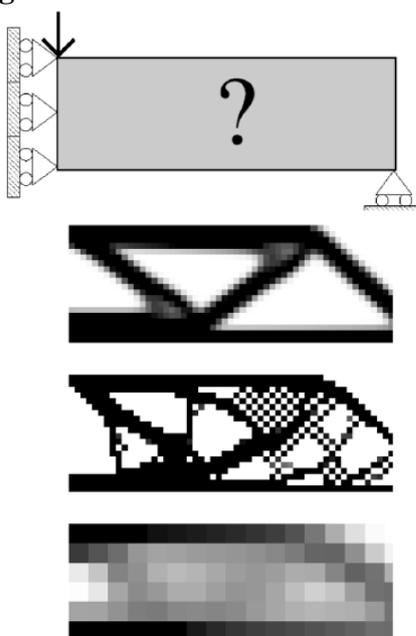
A operação de suavização pode ser seguida de uma operação de redução de dados que combinam triângulos adjacentes com planos coincidentes e reduz o número de superfícies triangulares. A redução de dados continua iterativamente até que o decréscimo no número de triângulos atinja uma porcentagem especificada no número original de triângulos. Finalmente,

pode-se escolher aplicar uma técnica de filtragem para remover as irregularidades locais. Esta filtragem é aplicada antes da operação de suavização.

### 3.7 Parâmetros de otimização e instabilidades numéricas

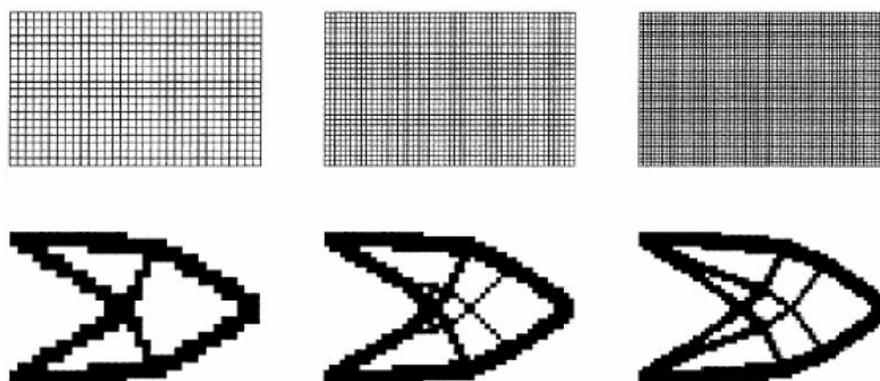
Bendsøe e Sigmund (2003) relatam que a análise via MEF oferece a possibilidade de instabilidades numéricas (Figura 71) ao modelo. Basicamente, estas podem ser divididas em três categorias: as irregularidades do tabuleiro de xadrez, a dependência de malha e o problema de ótimos locais. Desta forma, consideram-se relevantes as alternativas para evitar estas instabilidades, associando-as com o custo computacional necessário para cada problema.

**Figura 71** – Instabilidades numéricas



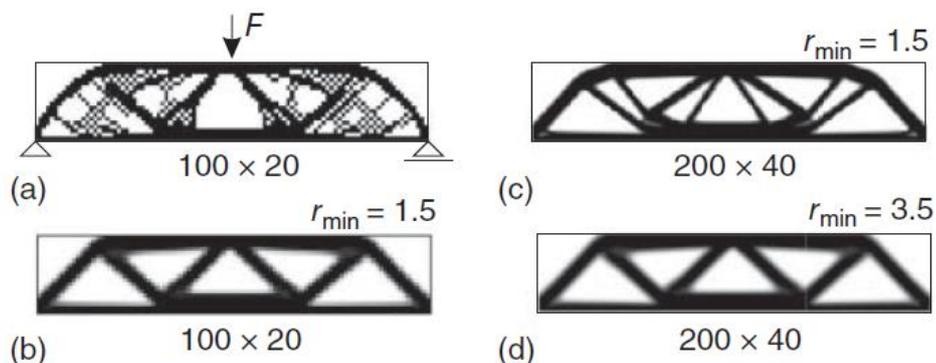
Fonte: adaptado de STOIBER e KROMOSER, 2021.

O refinamento da malha está diretamente ligado com a distribuição de material (Figura 72). Neste processo, é possível obter variações na forma de microestruturas que melhoram o uso do material. Bendsøe e Sigmund (2003) indicam que quanto mais refinada a malha do domínio de referência, mais similar a estrutura será ao layout previsto na teoria de microestruturas. Entretanto, a dependência de soluções para a discretização escolhida leva a um melhor ou pior detalhamento e descrição dos contornos, sendo esta etapa uma definição baseada na experiência do projetista, de modo a obter resultados coerentes para a solução requerida.

**Figura 72** – Densidade da malha e variação da topologia

Fonte: PORTO, 2006.

Uma situação particular citada por Bendsøe e Sigmund (2003) é a de pequenas frações volumétricas adotadas como restrição do problema, tendo como consequência a necessidade de malhas extremamente refinadas para a solução ótima de distribuição de material, visto que as grosseiras, em geral, não serão representativas, como pode-se obter na Figura 73. Em contrapartida, para grandes frações volumétricas, com malhas menos refinadas, há um bom indicativo para a topologia estimada.

**Figura 73** – Dependência da malha e influência do filtro

Fonte: GAGANELIS; MARK; FORMAN, 2022.

Para evitar o problema de tabuleiro de xadrez, Bendsøe e Sigmund (2003) sugerem a utilização de elementos finitos de ordem superior para a representação dos deslocamentos. Usualmente, elementos quadriláteros de 8 ou 9 nós podem prevenir esta instabilidade, devido ao enriquecimento do campo de deslocamentos, porém, aumentam substancialmente o custo computacional. Embora isto não seja um sério problema para casos 2D, ainda é produtivo empregar soluções alternativas e mais econômicas do ponto de vista computacional.

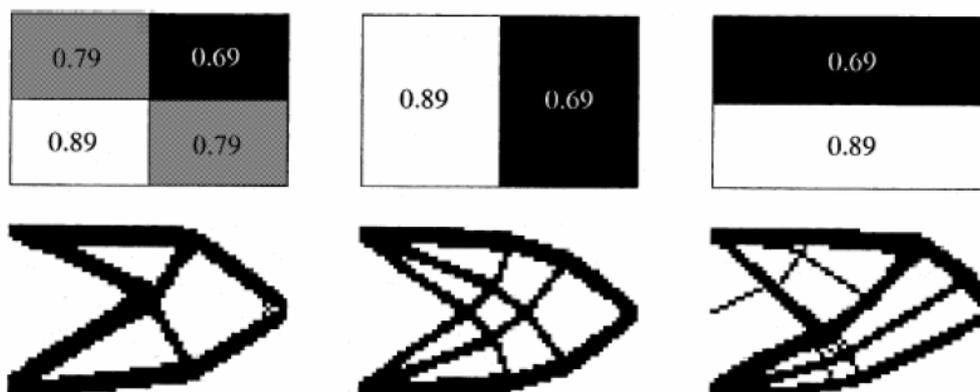
Dentre as técnicas utilizadas para a eliminação da instabilidade de tabuleiro de xadrez, Porto (2006) destaca, além do uso dos elementos de alta ordem, as técnicas de processamento de imagem, o uso do filtro da densidade, a introdução de “superelementos” para as funções densidade e deslocamento, técnicas baseadas no processo de difusão, algoritmo de redistribuição da densidade e o uso do conceito de força gravitacional. Além disto, Porto (2006) cita que, diferentemente das demais, as técnicas de processamento de imagem não abordam a causa do problema do aspecto de tabuleiro, mas sim, a consequência deste, e, portanto, devem ser evitadas.

Em relação ao problema de ótimos locais, pode-se assumir que estão associados com a natureza não convexa dos projetos de otimização topológica, uma vez que estão propícios a inúmeros resultados com soluções localizadas. Há uma forte dependência dos parâmetros iniciais escolhidos para um mesmo problema, possibilitando com que muitos ótimos possam ser encontrados, tornando a otimização estrutural topológica extremamente sensível a essas modificações. No entanto, quando as demais instabilidades numéricas são controladas, o problema original não convexo tende a tornar-se convexo, fazendo com que a topologia final possa ser reproduzida.

Porto (2006) enfatiza que a existência de vários mínimos locais, por sua vez, está associada ao problema de se obter diferentes soluções, para uma mesma densidade de malha, a partir da escolha de diferentes parâmetros do algoritmo de otimização, como por exemplo, os valores iniciais de densidade atribuídos a cada elemento da malha (Figura 74). Para contornar esta variabilidade, destacam-se os métodos de continuação, nos quais a ideia básica é gradualmente abordar o problema não-convexo original, partindo-se de um problema convexo artificial. Os procedimentos encontrados na literatura são: a penalidade gradual das densidades intermediárias e o aumento gradual do expoente  $p$ .

Como relatado na literatura, o fator de penalidade ( $p$ ) é um parâmetro importante para evitar as instabilidades numéricas. Por exemplo, a sugestão de aumento gradual deste parâmetro, durante o procedimento de otimização, reduz os efeitos de mínimos locais ao fornecer uma convergência progressiva para o problema global. Christensen e Klarbring (2009) sugerem que o valor de  $p$  possa ser aumentado gradativamente de 1 a 4, o que auxilia a convergência. Entretanto, neste trabalho, com o uso do ABAQUS<sup>®</sup>, considera-se o fator de penalidade constante ao longo de todo o procedimento de otimização.

**Figura 74** – Variação da topologia a partir de diferentes densidades iniciais

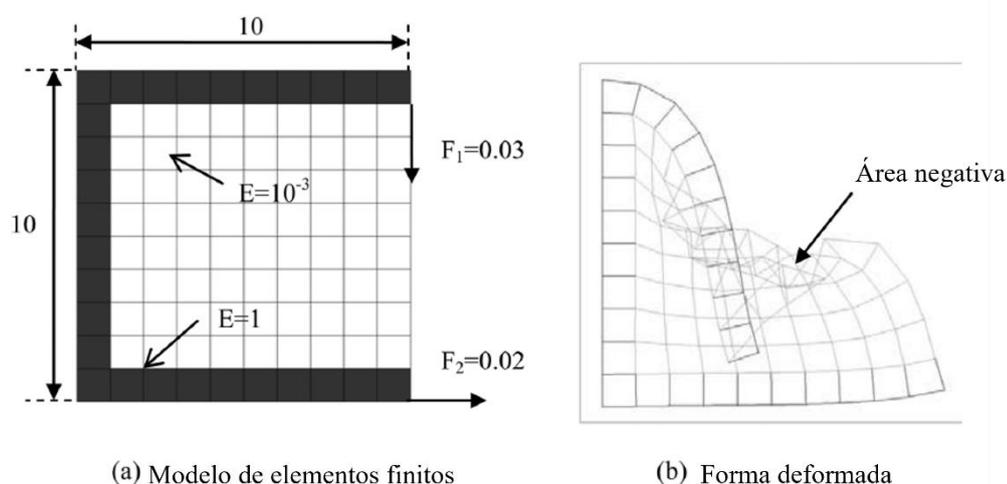


Fonte: PORTO, 2006.

Lee e Park (2012) apresentam que em análises de otimização topológica envolvendo não linearidades, a análise de sensibilidade é custosa computacionalmente. Ao se adotar métodos para reduzir esse custo, ainda se pode deparar com outros problemas, em função do método baseado nas densidades dos elementos. Isto porque, ao se considerar elementos com baixa densidade durante o procedimento de otimização, pode-se ter problemas de distorção de forma e distorção de malha, que podem deteriorar a convergência do processo.

O problema de distorção de malha é ocasionado em função de elementos instáveis. Conforme a Figura 75, quando a resposta não linear geométrica é performada, Lee e Park (2012) evidenciam que alguns elementos possuem os valores definidos pelo limite inferior, e outros, pelo limite superior. Ao se realizar a análise não linear com estes resultados, os elementos de baixa densidade podem se tornar invertidos e possuírem volumes negativos ou áreas com grandes deformações. Este fenômeno resulta na necessidade muitas iterações ou até mesmo divergência na análise numérica.

Deve-se atentar para os limites de densidade dos elementos, uma vez que densidades muito pequenas podem resultar em distorções extremas de elementos e matrizes de rigidez destes elementos podem se tornar zero ou negativas (LEE e PARK, 2012).

**Figura 75** – Distorção excessiva de malha

Fonte: adaptado de LEE e PARK, 2012.

Christensen e Klarbring (2009) apresentam de forma resumida na Tabela 3 as instabilidades numéricas e as suas possíveis soluções. Em que  $\rho^*$  é a densidade obtida na solução ótima e  $\rho_h^*$  é a densidade na discretização da malha, sendo  $h$  a dimensão da malha.

**Tabela 3** – Resumo das instabilidades numéricas

<b>Instabilidades numéricas</b>	<b>Razão matemática</b>	<b>Possível solução</b>
Algoritmo termina em um mínimo não global	Problema não convexo	Aumentar $p$ gradualmente. Tentar diferentes inícios de projeto.
Tabuleiro de xadrez	Não convergência de $\rho_h^*$ para $\rho^*$ quando $h \rightarrow 0$ .	Aumentar o número de nós para representar o campo de deslocamentos. Usar restrição.
Dependência da malha	Não existência de $\rho^*$ .	Usar restrição.

Fonte: adaptado de CHRISTENSEN e KLARBRING, 2009.

#### 4 UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE ABAQUS®

Para realizar as etapas descritas anteriormente, na simulação computacional dos exemplos deste trabalho, utiliza-se o *software* ABAQUS® 2019 para uma análise integrada em elementos finitos e realização dos processos de otimização. Este é reconhecido e conceituado no meio acadêmico devido a sua capacidade de customização e modelagem, podendo ser aplicado para análise de diversos problemas de engenharia.

Com o ABAQUS/CAE®, o usuário pode rapidamente e eficientemente criar, editar, monitorar, verificar e visualizar análises avançadas em elementos finitos. A interface intuitiva integra modelagem, análise, processamento e visualização de resultados em uma plataforma simples para novos usuários e extremamente produtiva para usuários avançados.

Simulia (2014) define a otimização como uma ferramenta para encurtamento do desenvolvimento de projetos agregando a experiência do projetista, aliada com a intuição, em um procedimento automatizado. Para otimizar seu modelo, é necessário saber o que otimizar, englobando a definição da função objetivo e suas restrições.

A plataforma de otimização disponível no ABAQUS® é o TOSCA, que proporciona poderosas e rápidas soluções de otimização estrutural baseadas em elementos finitos. O TOSCA *Structure* fornece estratégias para novos conceitos de projetos, possibilitando estruturas mais leves, rígidas e duráveis. O ciclo de desenvolvimento do projeto pode ser direcionado para maximizar ou minimizar alguma medida de performance, sendo possível auxiliar os projetistas a descobrirem novas possibilidades. São oferecidas as funcionalidades para otimização de topologia, forma e tamanho.

A utilização do TOSCA integrado ao ABAQUS® possibilita um rápido desenvolvimento de produtos, devido a facilidade de criação de projetos evitando modificações intermediárias em um ambiente CAD, e ainda possui uma grande capacidade de processamento para otimização de problemas não lineares, dinâmicos e termomecânicos.

O ABAQUS® disponibiliza no módulo de otimização uma série de respostas de projetos, para as funções objetivo e restrições, dentre elas: energia de deformação, volume, peso, deslocamento, rotação, autofrequências da análise modal, entre outras.

Tyflopoulos e Steinert (2022) destacam que o módulo de otimização topológica do ABAQUS®. Há uma variedade de valores de projeto, que podem ser utilizados como funções objetivos ou restrições, o que torna a ferramenta potente para problemas complexos multioptimização. Entretanto, as restrições disponíveis para manufatura são focadas apenas para métodos convencionais de produção, e não para manufatura aditiva. Os autores ainda

argumentam que, comparando com Solidworks e ANSYS, o ABAQUS é o que possui mais saídas gráficas disponíveis no pós-processamento, fornecendo informações sobre: distribuição de densidade dos elementos, tensões, deslocamentos e deformações.

Para a otimização topológica, o *software* utiliza as densidades dos elementos na área de projeto como as variáveis de projeto. Durante cada iteração realizada pelo módulo de otimização, as densidades são modificadas em cada elemento. De maneira prática, a otimização remove elementos do modelo, fornecendo-os uma massa e uma rigidez que é menor o suficiente para garantir que eles não irão participar da resposta global da estrutura.

As derivadas parciais das respostas definidas o problema de otimização (função objetivo e restrições) são tratadas na análise de sensibilidade (GAGANELIS, MARK e FORMAN, 2022).

A restrição da equação de equilíbrio do problema é atendida de forma indireta pela análise via MEF, enquanto as duas outras restrições têm gradiente igual à unidade. Assim, a análise do problema se resume à sensibilidade da função objetivo à luz da condição de equilíbrio, a qual é avaliada pelo método adjunto, chegando-se à equação (89), conforme apresentado em Bendsøe e Sigmund (2003).

$$\frac{\partial c}{\partial \rho_e} = -p \rho_e^{p-1} u_e^T k_e u_e \quad (89)$$

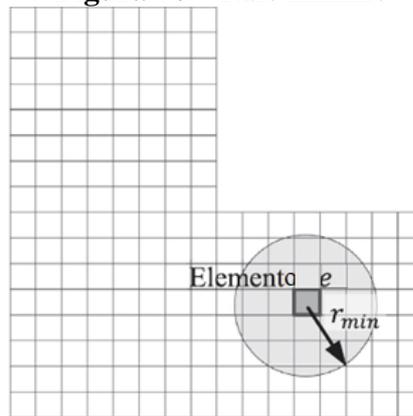
Conforme observa Pantoja (2012), as derivadas para o problema de minimização de trabalho de deformação são fáceis de obter. Vale notar que as derivadas envolvem informações apenas no nível do elemento, entretanto, sua repercussão se dará pelo efeito da variável de projeto na forma de deslocamentos. A análise física para a sensibilidade está relacionada com a adição de material, no caso específico para o problema com decréscimo de flexibilidade, a consequência é que a estrutura se torna mais rígida.

O cálculo das sensibilidades no ABAQUS<sup>®</sup> é realizado diretamente no *solver*. Tradicionalmente, o *solver* é chamada em cada iteração de otimização e é fornecido o arquivo de entrada modificado para calcular os resultados necessários para o sistema de otimização. Cada vez que as licenças são verificadas, o pré-processador é acionado, uma análise de elementos finitos é realizada, os resultados são escritos nos arquivos de saída, e então o *solver* é desligado. Isto significa que neste procedimento há uma sequência de chamadas do *solver*.

Bendsøe e Sigmund (2003) citam que o raio para o filtro ( $r$ ) é fixo na formulação e isto implica no cumprimento de uma distribuição de rigidez em um comprimento definido pela dimensão característica da malha (Figura 76). O processo de filtragem significa que a rigidez

em um ponto  $x$  depende da densidade  $\rho(x)$  em todos os pontos da vizinhança de  $x$ . Isto indica em uma suavização do campo de rigidez em uma maneira similar à filtragem de uma imagem. A suavidade e a escala fixa significam que o método fornece soluções e convergência com o refinamento da malha.

**Figura 76 – Raio mínimo**



Fonte: adaptado de SIMULIA, 2014.

Sigmund (2001) descreve a aplicação da técnica de filtragem baseada no cálculo das sensibilidades. O filtro que é adotado para diminuição da instabilidade numérica de dependência da malha é descrito pela modificação das sensibilidades do elemento:

$$\frac{\widehat{\partial c}}{\partial x_e} = \frac{1}{x_e \sum_{f=1}^N \widehat{H}_f} \sum_{f=1}^N \widehat{H}_f x_f \frac{\partial c}{\partial x_f} \quad (90)$$

e o operador de convolução é descrito por

$$\widehat{H}_f = r_{min} - dist(e, f) \quad (91)$$

$$\{f \in N \mid dist(e, f) \leq r_{min}\}, \quad e = 1, \dots, N$$

em que o operador  $dist(e, f)$  é definido como a distância entre o centro do elemento  $e$  e o centro do elemento  $f$ . O operador de convolução  $\widehat{H}_f$  é zero na área fora do filtro. O operador de convolução decai linearmente com a distância do elemento  $f$ .

Em geral, Morelli (2019) relata que o algoritmo de filtro implementado no TOSCA *Structure* adota como valor padrão para o raio do filtro igual a 1,3 vezes o comprimento médio

da aresta do elemento no domínio de projeto. Este comprimento corresponde à inclusão de todos os elementos próximos à vizinhança do filtro. O valor padrão do raio do filtro pode ser definido manualmente no arquivo de parâmetro (\*.par), entretanto, não há opções para controlar o filtro utilizado a partir da interface do ABAQUS®/CAE.

Bendsøe e Sigmund (2003) apresentam que a experiência computacional tem mostrado que a filtragem das informações das sensibilidades do problema de otimização é uma maneira altamente eficiente de garantir a independência da malha. Isto significa a modificação da sensibilidade do projeto de um elemento específico, baseado no peso ponderado das sensibilidades dos elementos em uma vizinhança fixa. Tal técnica é puramente heurística, contudo, verifica-se que há resultados muito semelhantes àqueles obtidos por uma restrição local do gradiente, além de que requer um pequeno custo computacional e é simples de se implementar, assim como não adiciona complexidade ao problema de otimização.

Gaganelis, Mark e Forman (2022) explicam que, do ponto de vista matemático, a utilização de filtros durante o procedimento de otimização limita o espaço de soluções permissíveis em um determinado subespaço de atuação do raio mínimo. Já do ponto de vista de engenharia, o valor de  $r_{min}$  pode definir um limite inferior para a espessura admissível de elementos estruturais durante o processo de construção. Com isto, pode-se interpretar o raio do filtro como uma espécie de uma restrição de manufatura.

A aplicação do método de interpolação material para obtenção de soluções ótimas 0-1 é extremamente útil e permite o uso de métodos de programação matemática para problemas contínuos (suaves) como citam Bendsøe e Sigmund (2003). É importante ressaltar que a solução depende da escolha da geometria, carregamento e condições de contorno, podendo resultar em mudanças drásticas no projeto ótimo que o algoritmo produz.

São disponibilizados dois algoritmos para a otimização topológica. O algoritmo geral, que é mais flexível e que pode ser aplicado para a maioria dos problemas, e o algoritmo *condition-based*, que é mais eficiente, mas possui capacidades limitadas. Por padrão, o ABAQUS® utiliza o algoritmo geral.

O algoritmo geral de otimização topológica ajusta a densidade e a rigidez das variáveis de projeto enquanto tenta satisfazer a função objetivo e as restrições. É descrito no trabalho de Bendsøe e Sigmund (2003). Em contraste, o algoritmo *condition-based* torna-se mais eficiente pois utiliza a energia de deformação e as tensões nos nós como dados de entrada e não precisa calcular a rigidez local das variáveis de projeto. Este foi desenvolvido na Universidade de Karlsruhe na Alemanha e é descrito em Bakhtiary *et al.* (1996).

Em razão das limitações de configurações dos parâmetros do procedimento, o algoritmo *condition-based* não foi utilizado neste trabalho. Como o algoritmo geral permite ao usuário determinar os parâmetros de otimização necessários para o método SIMP, utiliza-se este, pois possui os requisitos descritos na obra de Bendsøe e Sigmund (2003).

No TOSCA, existem dois principais algoritmos para solução dos problemas de otimização topológica, o baseado em sensibilidade (*sensitivity-based*) e o baseado em controle (*controller-based*). A Tabela 4 destaca as principais diferenças entre eles.

**Tabela 4** – Diferenças entre os algoritmos de otimização topológica

<b>Propriedade</b>	<b>Baseado em sensibilidade</b>	<b>Baseado em controle</b>
Elementos com densidades intermediárias (elementos cinzas)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Possui elementos no ciclo final de projeto com densidades intermediárias.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Direciona os elementos no ciclo final de projeto a serem vazios (densidade muito próxima de zero) ou sólidos (densidade igual a um).</li> </ul>
Número de iterações de otimização	<ul style="list-style-type: none"> <li>• O número de iterações é desconhecido antes do procedimento iniciar, mas normalmente o número de iterações é cerca de 30 a 45.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Por padrão, 15 iterações são utilizadas.</li> </ul>
Tipos de análise	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Suporta as respostas de análises de elementos finitos não linear estática (forças não conservativas) e autofrequência linear (não permitido para protensão). Carregamento com temperatura constante é permitido no ANSYS, Nastran e ABAQUS.</li> <li>• Suporta não linearidades geométricas (NLGEOM).</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Suporta a análise não linear estática, tais como simulação de contato, mesmo quando as zonas de contato são nas superfícies do espaço de projeto.</li> <li>• Tensões de von Mises devem ser válidas e de valores não constantes</li> </ul>

---

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Alguns materiais não lineares são suportados.</li> <li>• Deslocamentos prescritos são permitidos no modelo CAE para análise estática de otimização. Entretanto, não são permitidos na análise modal.</li> <li>• Geralmente, materiais laminados (formação e orientação) não podem ser projetados na otimização topológica. Entretanto, elementos com uma única camada são permitidos no Nastran e no ABAQUS.</li> </ul>	<p>ao longo da área de otimização</p>
<p>Tipos de funções objetivos e restrições</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pode possuir uma função objetivo e várias restrições, em que todas as restrições sejam de desigualdade.</li> <li>• A função objetivo e as restrições podem ser baseadas na rigidez, deslocamentos, reações de apoio, esforços internos, autofrequências e volume do material.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Possui a flexibilidade como função objetivo e o volume do material como restrição de igualdade.</li> </ul>

---

Fonte: adaptado de SIMULIA, 2022.

O processo de otimização gera elementos rígidos com densidades próximas a um ou elementos vazios com densidades próximas a zero. Como a otimização topológica introduz elementos com densidades entre zero e um, é necessário utilizar modelos de interpolação material para estes elementos intermediários.

As técnicas de interpolação material calculam as relações entre a densidade e a rigidez dos elementos intermediários. Estão disponíveis as opções no módulo de otimização: *default*, SIMP e RAMP (*Rational Approximation of Material Properties*). Sendo a última adequada para problemas dinâmicos e não adotada nas análises apresentadas.

O fator de penalidade ( $p$ ) deve ser maior que zero para produzir bons resultados. Na opção *default*, o módulo de otimização do ABAQUS<sup>®</sup> adota o método SIMP para problemas estáticos e o método RAMP se ao menos um caso de carregamento dinâmico for adotado no modelo.

O modelo de interpolação material RAMP, proposto por Stolpe e Svanberg (2001), baseia-se em uma função racional, parametrizada por um escalar  $q$ , de tal forma que a flexibilidade seja uma função convexa quando  $q$  é zero e uma função côncava para um valor finito e conhecido de  $q$ . Por meio deste método, a probabilidade de se obter uma solução 0-1 para o problema é aumentada.

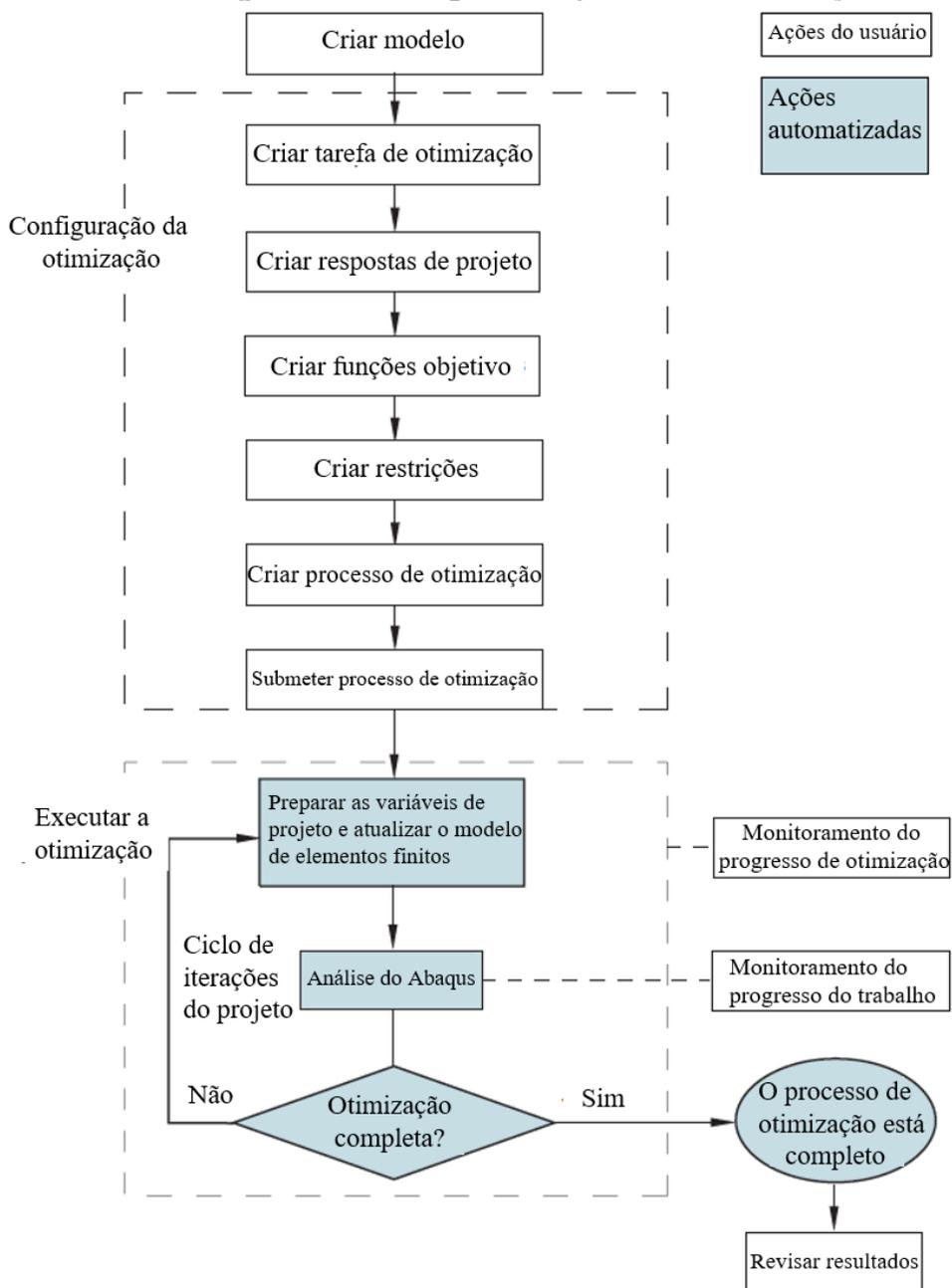
Rodríguez (2015) relaciona que a aproximação dada para o módulo de elasticidade do material de um projeto baseado em soluções 0-1 é dada por

$$E_i = \phi(x_i)E^1 \quad (92)$$

em que  $E_i$  é o módulo de elasticidade do elemento finito,  $\phi(x_i) = \frac{x_i}{1+q(1-x_i)}$  é a função interpoladora,  $E^1$  é o módulo de elasticidade do material sólido.

Um fluxograma do procedimento para obtenção da topologia ótima é apresentado na Figura 77. Nele, são destacadas as ações do usuário e ações realizadas pela rotina do *software*.

**Figura 77** – Fluxograma do processo de otimização



Fonte: adaptado de SIMULIA, 2014.

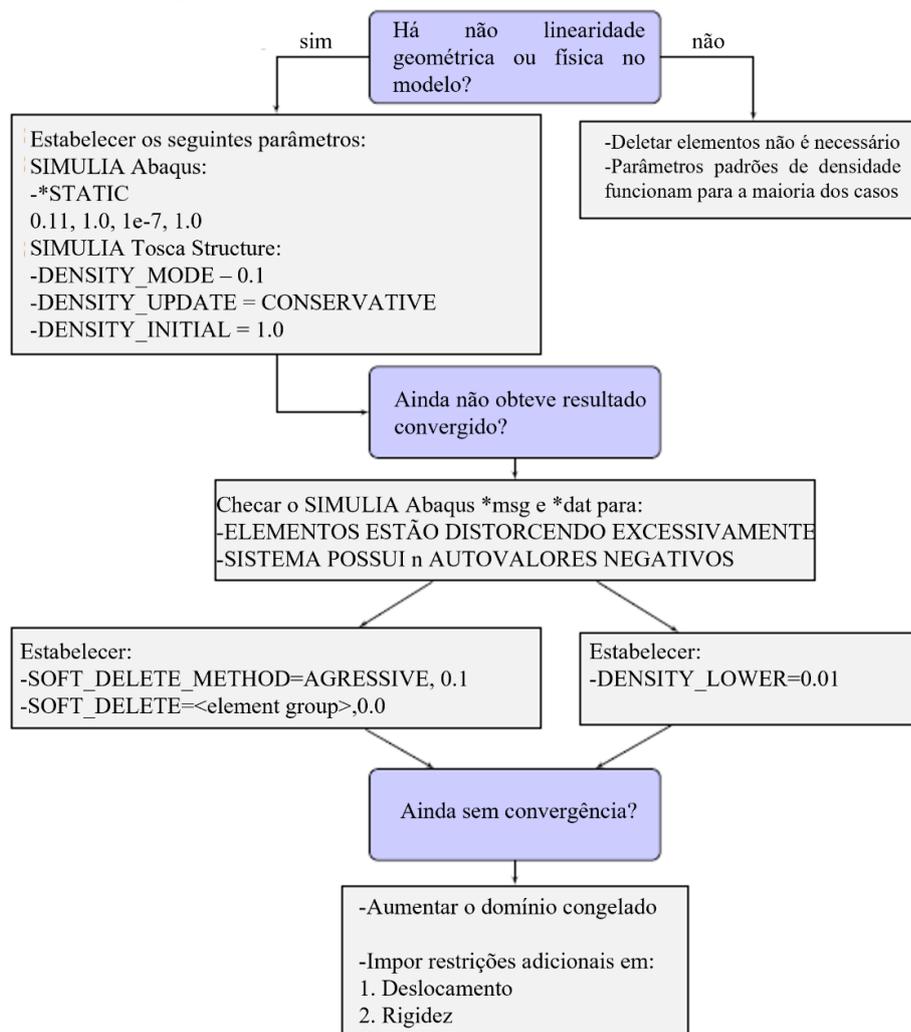
O procedimento padrão é considerar o projeto de um elemento estrutural como um problema de otimização somente em termos das variáveis de projeto, e o campo de deslocamentos é considerado como uma função destas. Estes campos são dados implicitamente em termos das variáveis de projeto por meio da equação de equilíbrio. A análise de encontrar as derivadas dos deslocamentos em relação às variáveis de projeto é denominada análise de sensibilidade (BENDSØE e SIGMUND, 2003).

Para o ABAQUS<sup>®</sup>, definindo-se a função objetivo como a energia de deformação, têm-se que, para os materiais não lineares, a energia de deformação obtida no processo de otimização, é igual à soma da energia de deformação armazenada, também chamada de energia recuperável (ALLSE) e a energia de deformação pela dissipação plástica (ALLPD).

A Figura 78 (SIMULIA, 2019) apresenta as recomendações do ABAQUS<sup>®</sup> para os problemas estruturais de otimização topológica com comportamento não linear. Embora as configurações demandem mais tempo para a convergência, a otimização pode convergir na primeira tentativa. Como parâmetros recomendados, têm-se: incremento inicial de tempo pequeno, mudança de densidade = 0.1, estratégia de atualização da densidade conservadora, densidade inicial = 1. Se ainda não há convergência, deve-se verificar os avisos nos arquivos \*.msg e \*.dat. Se estes avisos forem encontrados, o procedimento de remoção suave pode ser ativado. Este procedimento oferece a possibilidade de remover elementos que possam sofrer distorção durante o processo de otimização.

Uma alternativa é alterar a densidade no limite inferior para 0.01. Um dos métodos mais triviais para estabilizar uma atividade de otimização não linear é aumentar o domínio congelado. Se os problemas de convergência ainda persistirem, adicione restrições em deslocamento ou rigidez para estabilizar o procedimento.

**Figura 78** - Fluxograma da otimização no contexto da análise estrutural não linear



Fonte: adaptado de SIMULIA, 2019.

Na etapa de pós-processamento e extração do domínio do modelo otimizado pode ser realizada, de modo a exportar a malha órfã para as análises posteriores. Zhao *et al.* (2020) e Silva (2021) utilizaram o ABAQUS® para análises não lineares das superfícies otimizadas. Por meio de uma condição de *cutoff* de densidades, Zhao *et al.* (2020) consideram densidades  $\rho > 0,5$  como elementos sólidos. Com isto, obtêm-se um modelo que pode ser trabalhado para a análise mecânica da superfície 2D resultante do procedimento de otimização. Além disto, pode-se extrair esta malha no formato STL, que é difundido e utilizado na indústria de modelagem e manufatura (SILVA, 2021).

Nesta opção de extração de superfície, pode-se trabalhar com formatos .inp, .istl, .igs, \*\_2.igs e \*\_3.igs. O isovalor é um parâmetro entre 0 e 1 essencial para definir qual superfície será gerada. Neste processo, determina-se quais elementos estarão no modelo e usa o isovalor para calcular onde os vértices interiores destes novos elementos e novos nós serão criados.

Aumentar o isovalor significa direcionar a superfície para dentro do modelo, preenchendo-a com mais elementos. Em contraste, ao reduzir esse parâmetro, pode-se ter componentes muito finos, o que pode levar a uma estrutura desconectada (SIMULIA, 2022).

Além do isovalor, outros parâmetros como redução de porcentagem e redução de ângulo podem ser configurados para a avaliação do modelo otimizado. A redução de porcentagem define o percentual das faces que devem ser removidos durante a operação de redução de dados. Um valor de 0 indica que nenhuma das faces deve ser removida. Um valor de 100 indica que a redução de dados finaliza quando não há mais faces a serem removidas, dado o valor de redução do ângulo (SIMULIA, 2022).

A redução de ângulo é um valor entre 0 e 90 que define o máximo ângulo entre as faces adjacentes no nó tal que este nó possa ser removido durante a redução de dados. O número de ciclos de suavização também pode ser definido pelo usuário, visto que maiores valores direcionam a modelos suaves, porém resultam em um acréscimo do custo computacional. Na prática, 5 a 10 ciclos de suavização são suficientes para a maioria dos modelos (SIMULIA, 2022).

O volume alvo é a razão, entre 0 e 1, que é definida pela superfície e o volume original (calculado pelo volume gerado pela otimização). O volume calculado não leva em consideração os vazios dentro de um modelo sólido. Ao considerar modelos de cascas, a área alvo é definida como a razão entre a área definida pela superfície extraída e a área original. Se for especificado um volume alvo, o processo de redução de dados calcula o isovalor que irá resultar no volume especificado, isto é, o isovalor previamente considerado será ignorado (SIMULIA, 2022).

Em alguns casos, o modelo otimizado possui pequenas irregularidades, e com isto pode-se escolher a opção de removê-las. Desta forma, pode-se considerar um processo opcional de operação de filtragem. A filtragem é aplicada antes do processo de suavização e resulta em uma distribuição mais homogênea de material. A filtragem moderada é aplicada em um único ciclo de filtro, e a filtragem completa é aplicada em 5 ciclos de filtro (SIMULIA, 2022).

Para avaliação da superfície extraída, Sigmund (2022) propõe, para comparações justas, utilizar o volume corrigido pelos valores das energias de deformação. Por exemplo, deve-se escalar a energia de deformação pela taxa de violação do volume ( $V_{extraído}/V_{original}$ ) ou comparar o produto da fração da energia de deformação pelo volume ( $C_{extraído} \cdot V_{extraído}/C_{original} \cdot V_{original}$ ). Entretanto, ambos os métodos são precisos para pequenos desvios.

## 5 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Para a obtenção dos resultados, utiliza-se um notebook com processador IntelCore i7-12700H com 16 GB de memória RAM e sistema operacional Windows 11 Home-64 bit.

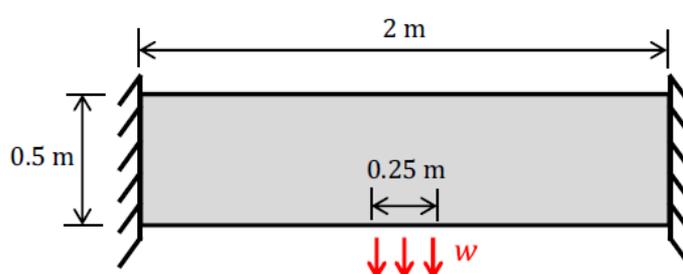
Nesta etapa, valida-se a utilização do modelo de Drucker-Prager no exemplo proposto por Zhao *et al.* (2020) e propõe-se uma análise paramétrica para vigas com variação de altura e diferentes parâmetros de resistência, de acordo com a dosagem do CRFA.

### 5.1 Viga biengastada: modelo de Zhao *et al.* (2020)

O exemplo a seguir ilustra a aplicação de uma viga biengastada (Figura 79) submetida a um carregamento distribuído na região inferior. Com diferentes valores da energia prescrita ( $C_0$ ), o material pode estar em diversos estados, o que leva a diferentes sensibilidades. Esta observação verifica que o significado físico da função objetivo é de maximizar a capacidade de carregamento da estrutura.

Para a modelagem, considera-se uma malha de elementos finitos de tamanho aproximado de 10 mm para análise em estado plano de deformação do tipo CPE4 (elemento quadrilateral de 4 nós com interpolação bilinear, sem integração reduzida), 10050 elementos e 10032 nós. Esta estrutura é simétrica, entretanto, utiliza-se sua integralidade neste modelo.

**Figura 79** – Modelo da viga biengastada



Fonte: ZHAO *et al.*, 2020.

Nas considerações da viga biengastada analisada por Zhao *et al.* (2020), busca-se uma comparação dos resultados por meio do *software* ABAQUS®. Para este modelo, em que foi definido  $\sigma_t = 144 \text{ MPa}$  e  $\sigma_c = 1440 \text{ MPa}$  adota-se para os parâmetros de resistência do modelo linear de Drucker-Prager  $\psi = 67,83^0$  e  $c = 261,82 \text{ MPa}$ . O carregamento distribuído aplicado é de  $w = 80 \text{ MN/m}$ .

Para o modelo linear de Drucker-Prager, SIMULIA (2014) introduz três parâmetros para sua definição. O ângulo de atrito do material ( $\beta$ ), dado em graus. O parâmetro  $K$ , que representa a razão do fluxo de tensões no estado triaxial de tração em relação ao fluxo de tensões no estado triaxial de compressão, sendo limitado por  $0.778 \leq K \leq 1$ . E, por último, o ângulo de dilatação ( $\psi$ ), dado em graus.

Para o caso particular de  $K = 1$ , significa que a superfície de escoamento é a de von Mises no plano das tensões deviatóricas, ou seja, isto implica que as tensões de escoamento para o estado triaxial de tração e de compressão são as mesmas.

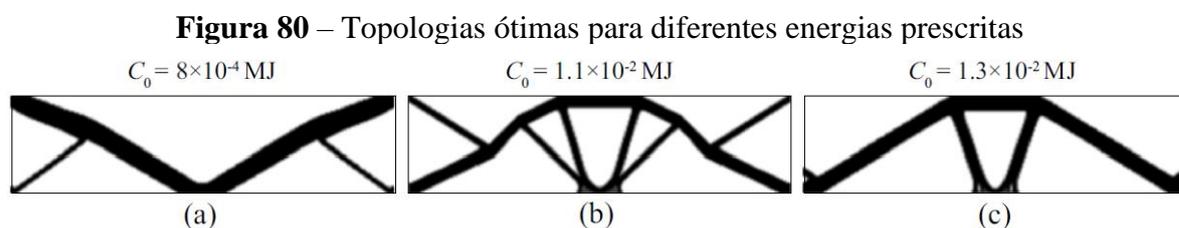
Para a definição do endurecimento linear em termos das tensões de cisalhamento, deve-se definir a coesão do material ( $d$ ), em função da deformação plástica por cisalhamento equivalente ( $\bar{\epsilon}_{pl}$ ).

$$d = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \tau \cdot \left(1 + \frac{1}{K}\right) \quad (93)$$

$$\bar{\epsilon}_{pl} = \frac{\gamma_{pl}}{\sqrt{3}} \quad (94)$$

em que  $\tau$  é a tensão de escoamento no cisalhamento,  $K$  é a razão entre os comportamentos de tração e compressão e  $\gamma_{pl}$  é a deformação plástica de engenharia por cisalhamento.

Considerando o comportamento elástico linear, têm-se para o material da viga analisada  $E = 1,8 \cdot 10^5 \text{ MPa}$  e  $\nu = 0,3$ . A Figura 80 apresenta os resultados obtidos por Zhao *et al.* (2020) para diferentes valores de  $C_0$ , em que a solução obtida na extremidade esquerda se aproxima ao resultado do modelo elástico linear.



Fonte: ZHAO *et al.*, 2020.

Para o carregamento proposto no artigo de Zhao *et al.* (2020), verifica-se que com a hipótese de um modelo elastoplástico, a viga entrará no regime plástico a partir de 60% do nível de carregamento, o que justifica a necessidade da consideração de uma função de escoamento

para o cálculo das deformações plásticas. Entretanto, não se encontra uma não linearidade acentuada na curva carga-deslocamento.

A Figura 81 demonstra o panorama das deformações plásticas para a viga antes do procedimento de otimização, em que 113 nós apresentam valores superiores a zero. O maior valor encontrado é de  $5,435 \cdot 10^{-4}$  na região superior dos apoios.

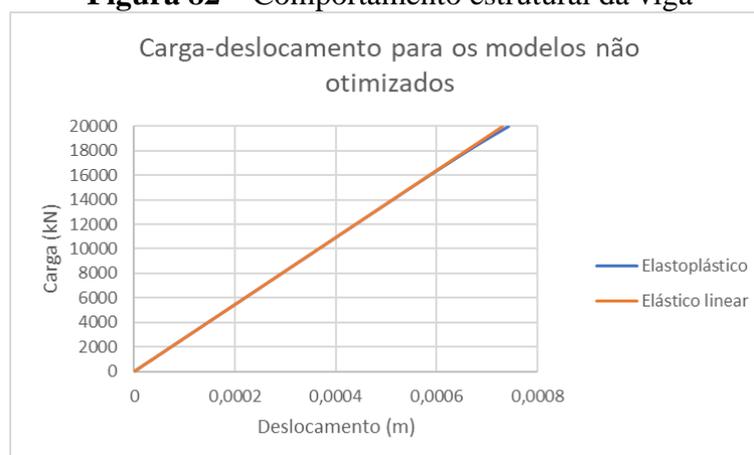
**Figura 81** - Deformações plásticas equivalentes



Fonte: Autor, 2024.

A Figura 82 traz a curva carga-deslocamento para ambos os modelos. Verifica-se que não há grande diferença entre os dois. No entanto, para o nível de carregamento aplicado, e com o surgimento de deformações plásticas, nota-se que é relevante tratar o problema de otimização com a consideração de um modelo elastoplástico.

**Figura 82** – Comportamento estrutural da viga



Fonte: Autor, 2024.

Para o processo de otimização, a região de aplicação de carga não é considerada. A estratégia de atualização da densidade é normal. O algoritmo de solução é o geral, o filtro de

sensibilidade é definido automaticamente de acordo com a dimensão característica da malha, a técnica de interpolação material utilizada é a SIMP, em que é definido um fator de penalidade constante durante todo o procedimento, e as demais informações estão listadas na Tabela 5.

**Tabela 5** – Parâmetros da otimização topológica

Parâmetros do método SIMP	
Densidade mínima ( $\rho_{min}$ )	0,001
Densidade máxima ( $\rho_{max}$ )	1
Máxima mudança da densidade por ciclo de projeto	0,25
Fator de penalidade ( $p$ )	3
Critérios de convergência	
Tolerância máxima para função objetivo	0,001
Tolerância máxima para a densidade do elemento	0,005

Fonte: Autor, 2024.

### 5.1.1 Modelo elástico linear

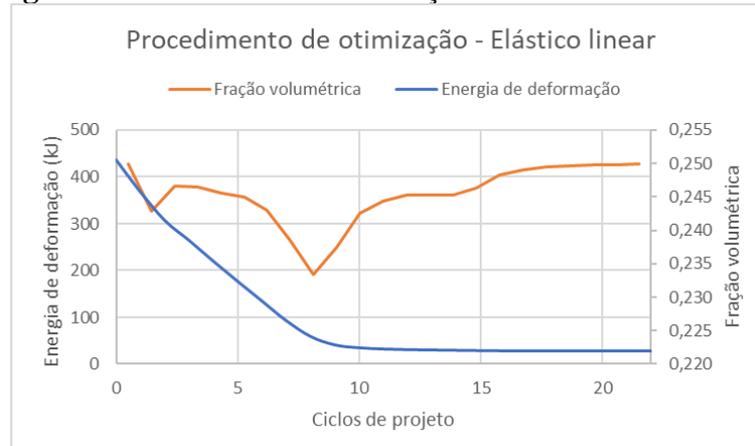
Para o modelo elástico linear, verifica-se que não há variação da topologia com a intensidade do carregamento aplicado (Figura 83). Não há deformações plásticas no elemento estrutural, significando que a distribuição de densidade pode ser interpretada como um domínio homogêneo de um material que possui resistências equivalentes à tração e à compressão.

**Figura 83** – Distribuição ótima de material elástico linear ( $f = 25\%$ )



Fonte: Autor, 2024.

Com o objetivo de determinar a distribuição ótima de material, minimiza-se a energia de deformação do modelo, com restrição de fração volumétrica. A Figura 84 demonstra o procedimento de otimização durante os ciclos de projeto.

**Figura 84** - Resultado da otimização estrutural elástico linear

Fonte: Autor, 2024.

### 5.1.2 Modelo elastoplástico

Para o modelo elastoplástico, constata-se que há variação da topologia com o carregamento (Figura 85), em consequência das deformações plásticas. Desta forma, busca-se por meio da restrição de deslocamento, baseada na analogia da energia prescrita, limitar os deslocamentos no modelo otimizado, de modo a evitar deformações excessivas.

Para determinadas frações volumétricas, é importante verificar os critérios de convergência para a análise plástica, visto que há uma dependência destes para a busca da solução durante o procedimento de otimização.

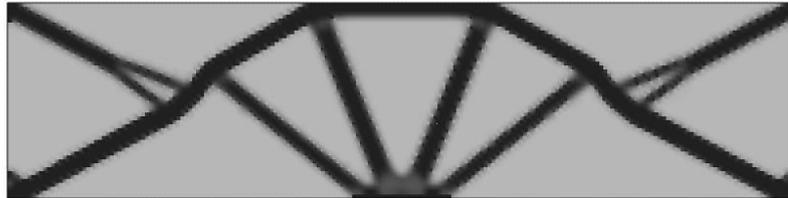
Adotou-se, neste exemplo, a restrição (análoga ao parâmetro  $C_0$ ) de que o deslocamento nodal no centro da carga distribuída na face inferior da viga deve ser  $U_2 \leq 1 \cdot 10^{-4}$  m.

Como o material empregado apresenta uma resistência à compressão maior que a resistência à tração, nota-se que há uma tendência de direcionamento da distribuição de densidade para as regiões comprimidas. Além disto, deve-se identificar se o nível de carregamento está condizente com as dimensões adotadas para o elemento. Verifica-se que nas regiões de maior plastificação, há uma maior necessidade de material resultante do procedimento de otimização.

A Figura 86 apresenta a maximização da rigidez e a restrição de fração volumétrica no problema elastoplástico proposto. A Figura 87 demonstra a variação da restrição de deslocamento nodal no problema. A Figura 88 demonstra as deformações plásticas equivalentes no modelo apresentado, com destaque para maiores deformações para a região tracionada, com valor máximo de  $3,367 \cdot 10^{-3}$ .

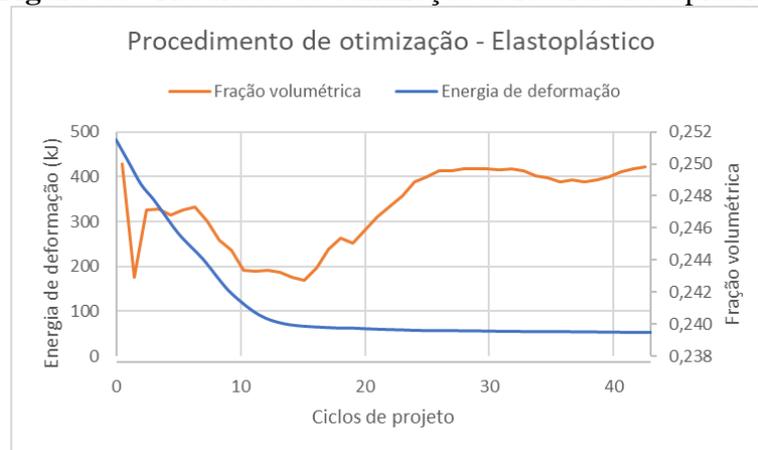
A função objetivo no caso em tela foi maior do que o valor obtido pelo modelo elástico linear. Na literatura, observa-se que em geral, para o modelo elastoplástico, a energia de deformação, ao final do procedimento de otimização, tende a ser maior.

**Figura 85** – Distribuição ótima de material elastoplástico (Drucker-Prager) ( $f = 25\%$ )



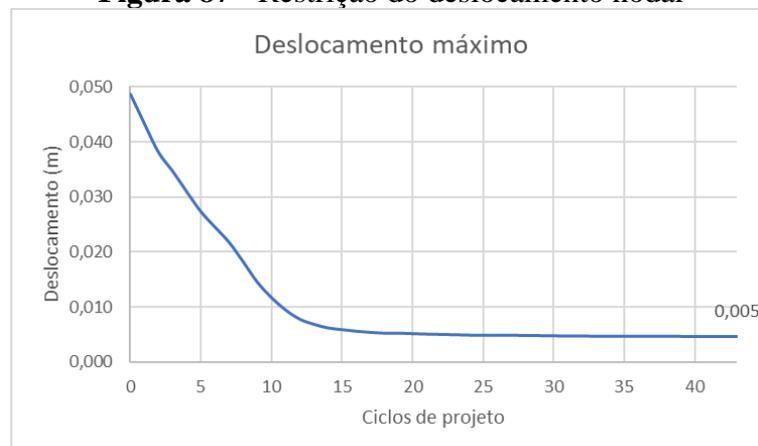
Fonte: Autor, 2024.

**Figura 86** - Resultado da otimização estrutural elastoplástico



Fonte: Autor, 2024.

**Figura 87** - Restrição do deslocamento nodal



Fonte: Autor, 2024.

**Figura 88** – Deformações plásticas equivalentes

Fonte: Autor, 2024.

Neste exemplo, observa-se a influência do comportamento elastoplástico no modelo otimizado. Entretanto, à medida que o material se torna mais resistente, há uma tendência de diminuição e até mesmo ausência das deformações plásticas, o que caracterizaria a topologia inicial obtida com o modelo elástico linear.

Verifica-se que a restrição de deslocamento adotada no modelo  $U_2 \leq 1 \cdot 10^{-4} m$  não foi atendida ao final do procedimento de otimização, sendo observado um deslocamento  $5 \cdot 10^{-3} m$ . Este deslocamento obtido, 50 vezes maior que o requerido na restrição, pode ser justificado em função da capacidade resistente do material adotado. Para que o deslocamento no ponto central obedeça a restrição, é necessário que os parâmetros  $c$  e  $\phi$  sejam maiores que os apresentados. Como os critérios de convergência para a função objetivo e para a distribuição de densidade são atendidos, as iterações são paradas e obtém-se a topologia ótima.

Diversos parâmetros podem influenciar nos resultados apresentados neste modelo, desde a dimensão característica da malha utilizada até os critérios de convergência e a técnica de filtragem utilizada. Busca-se visualizar com este exemplo as possibilidades da otimização topológica para materiais com comportamento não linear e analisa-se sua influência na distribuição de densidade, o que reflete em uma busca de reforço de material nas regiões em que há menor resistência.

#### 5.1.2.1 Análise da fração volumétrica

Nas Figura 89 e Figura 90 têm-se o modelo analisado com diferentes restrições de frações volumétricas. Na Tabela 6 observa-se os resultados obtidos com os modelos apresentados. A energia de deformação equivalente decresce à medida que há um maior volume de material. Em contraste, quanto menos material há na região de projeto, as deformações plásticas e os deslocamentos verticais tendem a aumentar.

**Figura 89** - Distribuição ótima de material elastoplástico (Drucker-Prager) ( $f = 50\%$ )

Fonte: Autor, 2024.

**Figura 90** - Distribuição ótima de material elastoplástico (Drucker-Prager) ( $f = 75\%$ )

Fonte: Autor, 2024.

**Tabela 6** – Análise de resultados com variação da fração volumétrica

Modelos	$f = 25\%$	$f = 50\%$	$f = 75\%$
Energia de deformação (kJ)	54,269	15,338	9,460
Deformação plástica	$4,023 \cdot 10^{-3}$	$2,036 \cdot 10^{-3}$	$1,103 \cdot 10^{-3}$
Deslocamento vertical (m)	$5,0 \cdot 10^{-3}$	$1,554 \cdot 10^{-3}$	$9,666 \cdot 10^{-4}$

Fonte: Autor, 2024.

### 5.1.2.2 Análise do fator de penalidade

Com o intuito de observar a variação dos parâmetros de otimização ( $f = 25\%$ ) em função do fator de penalidade, que é definido como constante em todo o procedimento. As Figura 91, Figura 92 e Figura 93 apresentam, respectivamente, a topologia obtida com os fatores de penalidade  $p = 1$ ,  $p = 2$  e  $p = 4$ , respectivamente. Visualmente, para fatores de penalidade inferior a 3, não há uma nítida distribuição de material no domínio de projeto. Esta característica se reflete numericamente na energia de deformação, de acordo com a Tabela 7.

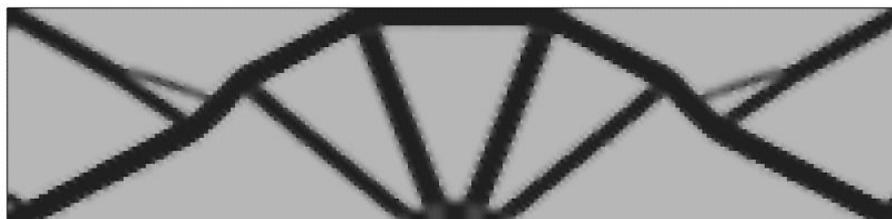
Para uma mesma fração volumétrica, pode-se notar que para fatores de penalidade inferior a 3, têm-se o aumento das deformações plásticas e dos deslocamentos verticais. Verifica-se que o fator de penalidade igual a 4 não provoca mudanças significativas na topologia obtida com o parâmetro usualmente recomendado de 3.

**Figura 91** - Distribuição ótima de material elastoplástico (Drucker-Prager) ( $p = 1$ )

Fonte: Autor, 2024.

**Figura 92** - Distribuição ótima de material elastoplástico (Drucker-Prager) ( $p = 2$ )

Fonte: Autor, 2024.

**Figura 93** - Distribuição ótima de material elastoplástico (Drucker-Prager) ( $p = 4$ )

Fonte: Autor, 2024.

**Tabela 7** - Análise de resultados com variação do fator de penalidade

Modelos	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$
Energia de deformação (kJ)	29,6071	47,0334	54,269	59,157
Deformação plástica	$1,252 \cdot 10^{-2}$	$1,693 \cdot 10^{-2}$	$4,023 \cdot 10^{-3}$	$3,929 \cdot 10^{-3}$
Deslocamento vertical (m)	$3,0 \cdot 10^{-3}$	$4,714 \cdot 10^{-3}$	$5,0 \cdot 10^{-3}$	$5,03 \cdot 10^{-3}$

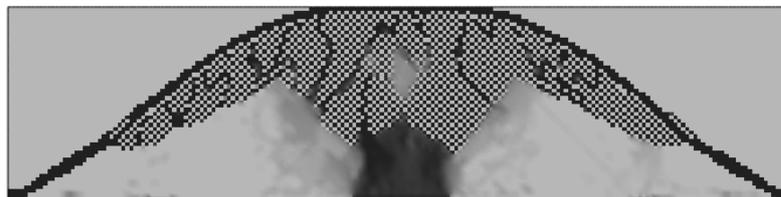
Fonte: Autor, 2024.

### 5.1.2.3 Análise do raio do filtro

Nestes modelos, adotou-se o fator de penalidade ( $p$ ) igual a 3 e uma fração volumétrica  $f = 25\%$ . A Figura 94 demonstra a aparência de tabuleiro de xadrez, ratificando a instabilidade numérica em virtude de raios menores que o tamanho do elemento adotado. No entanto, as Figura 95 e Figura 96 evidenciam que raios maiores do que o recomendado pela literatura não

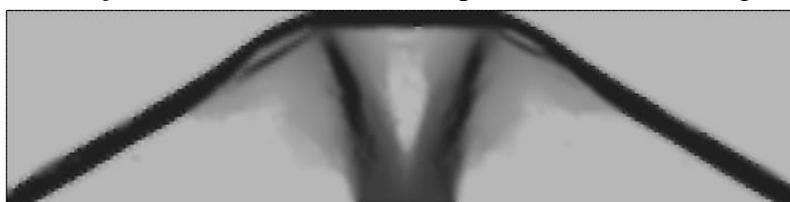
proporcionam um procedimento de otimização eficiente, aumentando as deformações plásticas, em conformidade com os resultados apresentados na Tabela 8.

**Figura 94** - Distribuição ótima de material elastoplástico (Drucker-Prager) ( $r = 5 \text{ mm}$ )



Fonte: Autor, 2024.

**Figura 95** - Distribuição ótima de material elastoplástico (Drucker-Prager) ( $r = 26 \text{ mm}$ )



Fonte: Autor, 2024.

**Figura 96** - Distribuição ótima de material elastoplástico (Drucker-Prager) ( $r = 39 \text{ mm}$ )



Fonte: Autor, 2024.

**Tabela 8** - Análise de resultados com variação do raio do filtro

Modelos	$r = 5 \text{ mm}$	$r = 13 \text{ mm}$	$r = 26 \text{ mm}$	$r = 39 \text{ mm}$
Energia de deformação (kJ)	60,1692	54,269	47,0334	147,562
Deformação plástica	$5,297 \cdot 10^{-2}$	$4,023 \cdot 10^{-3}$	$1,693 \cdot 10^{-2}$	$6,425 \cdot 10^{-1}$
Deslocamento vertical (m)	$6,240 \cdot 10^{-3}$	$5,0 \cdot 10^{-3}$	$4,714 \cdot 10^{-3}$	$3,948 \cdot 10^{-2}$

Fonte: Autor, 2024.

### 5.1.3 Análise estrutural dos modelos otimizados

Com os modelos analisados para a obtenção de deslocamentos, tensões e deformações (Figura 83 e Figura 85), o modelo elástico linear finaliza aos 22 ciclos de projeto, enquanto o elastoplástico aos 43. Conforme apreciado nas referências da literatura, em geral, com a

consideração da não linearidade física, a energia de deformação do modelo tende a aumentar. A Tabela 9 destaca a comparação dos resultados.

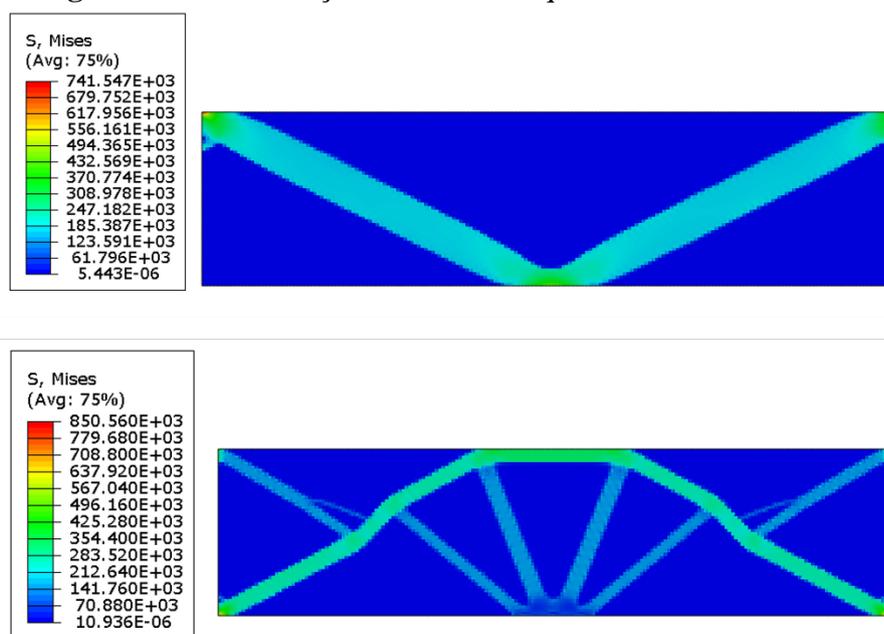
**Tabela 9** – Análise dos resultados das topologias

Modelos	Elástico linear	Drucker-Prager
Energia de deformação (kJ)	27,962	54,269
Deformação plástica	0	$4,023 \cdot 10^{-3}$
Deslocamento vertical (m)	$2,89 \cdot 10^{-3}$	$5,0 \cdot 10^{-3}$

Fonte: Autor, 2024.

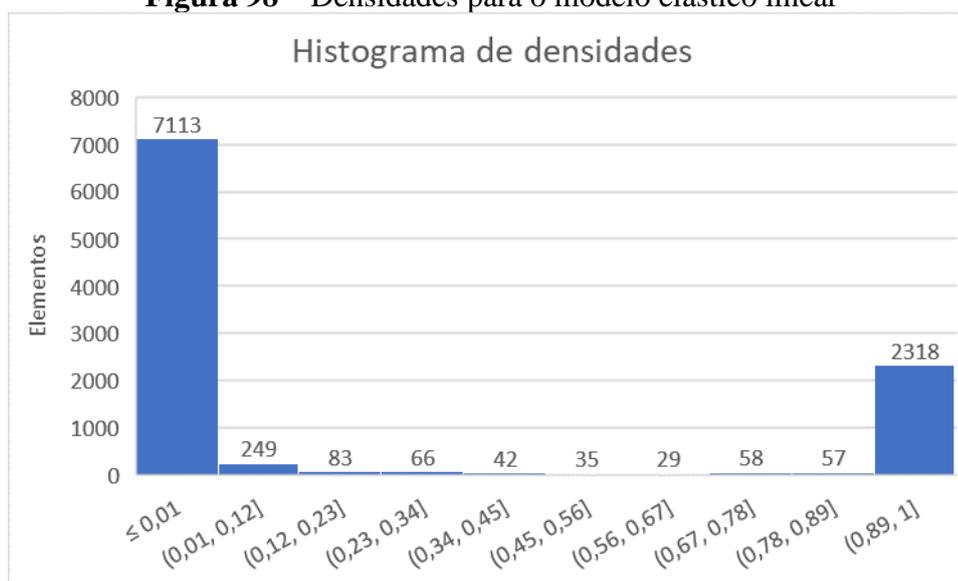
Na Figura 97 têm-se a representação das tensões de von Mises, em kPa, nos dois modelos. Nota-se que o modelo elastoplástico está solicitado em um maior nível em comparação (cerca de 14,7% a mais) ao modelo elástico.

**Figura 97** – Distribuição das tensões equivalentes de von Mises

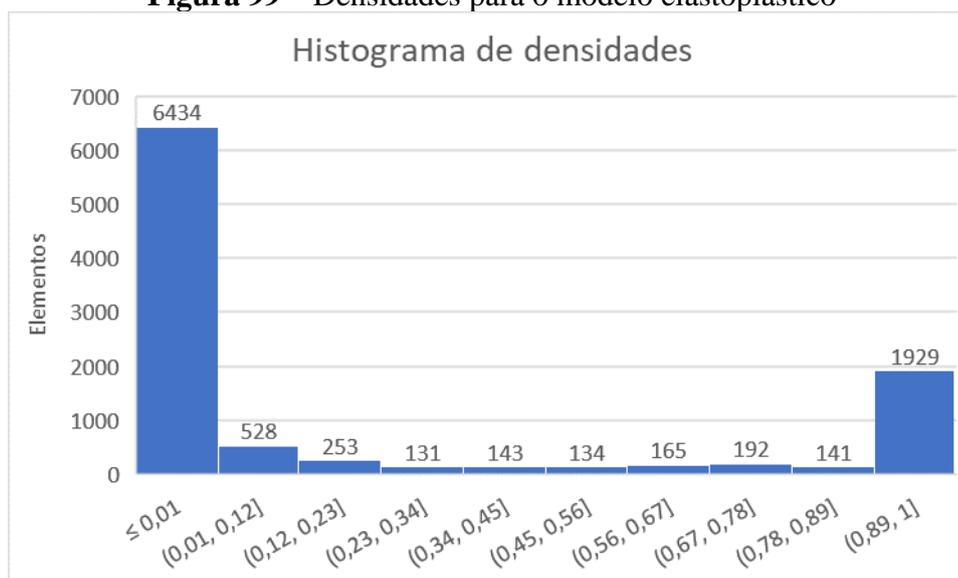


Fonte: Autor, 2024.

Nas Figura 98 e Figura 99 estão descritos os histogramas de densidades para as topologias obtidas. Em ambos os casos, considera-se a propriedade no centroide dos 10050 elementos. Nota-se que o modelo elástico linear possui um maior percentual de elementos sólidos ( $\rho > 0,89$ ), no total de 23,06% do volume considerado. Por outro lado, o modelo elastoplástico possui um percentual de 19,19%.

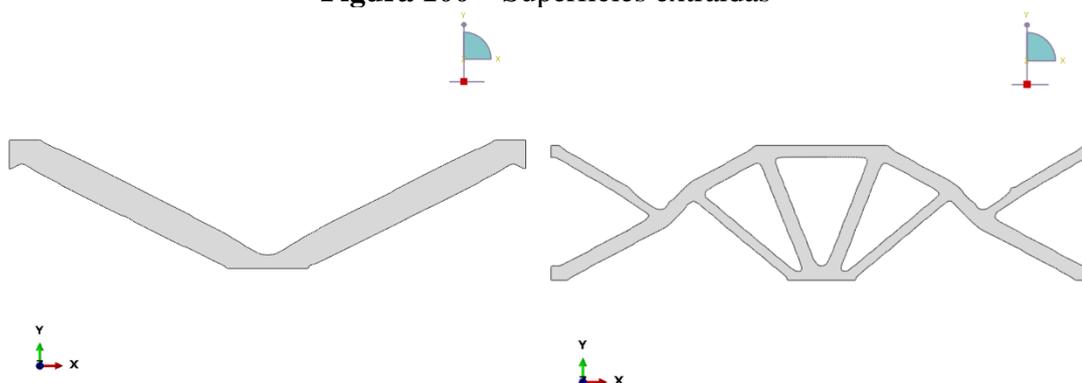
**Figura 98** – Densidades para o modelo elástico linear

Fonte: Autor, 2024.

**Figura 99** – Densidades para o modelo elastoplástico

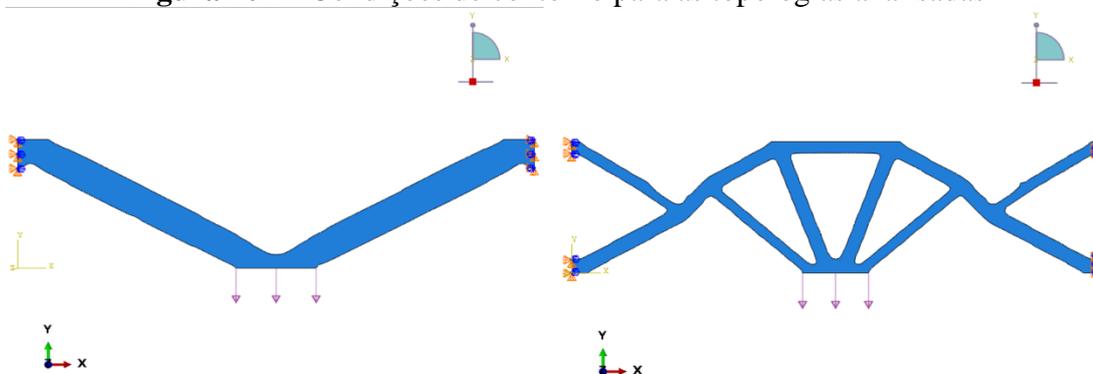
Fonte: Autor, 2024.

Com as superfícies extraídas na etapa de pós-processamento (Figura 100), considerando valores de densidades acima de  $\rho > 0,50$  e utilizando uma técnica de filtragem moderada, procedeu-se a análise do comportamento estrutural das topologias ótimas. Para ambos os modelos, adota-se os parâmetros elastoplásticos para verificação da capacidade resistente dos elementos.

**Figura 100** – Superfícies extraídas

Fonte: Autor, 2024.

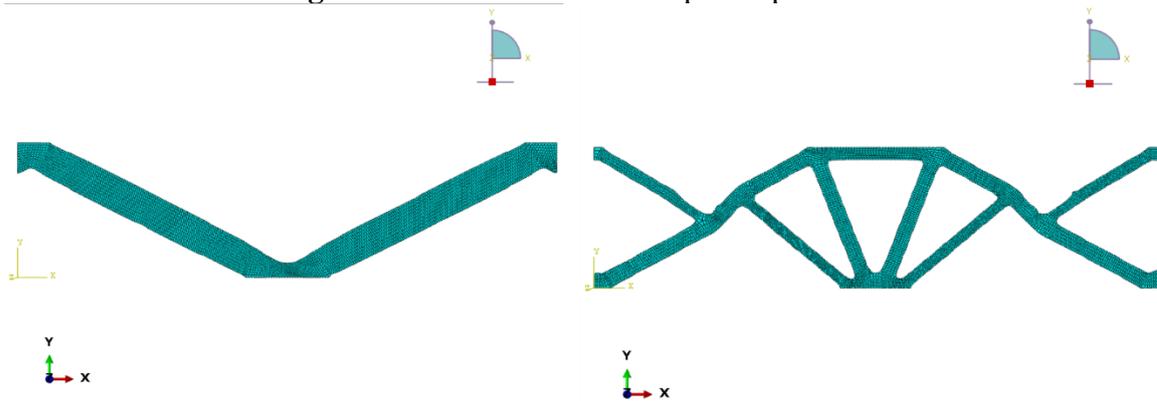
A geometria original, ou seja, antes do procedimento de otimização, possui um volume unitário. Após o processamento, para o modelo elástico, o volume final é de 0,247. Para o modelo elastoplástico, o volume final é de 0,244. As condições de contorno estão apresentadas Figura 101. Consideram-se os apoios nas regiões laterais da viga, e a carga uniformemente distribuída na região central inferior.

**Figura 101** – Condições de contorno para as topologias analisadas

Fonte: Autor, 2024.

Em ambas as análises, adota-se elementos em estado plano de deformação (CPE4), com tamanho médio de 10 mm (Figura 102). Para o caso elástico linear, têm-se o total de 3179 elementos, para o caso elastoplástico, têm-se 4083 elementos.

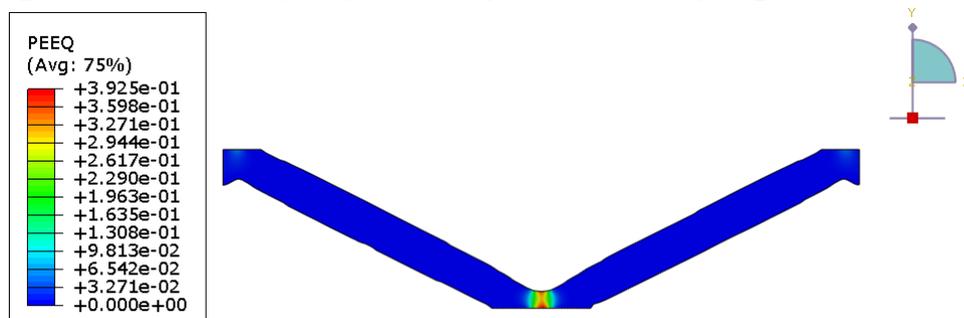
**Figura 102** – Malhas adotadas para o problema



Fonte: Autor, 2024.

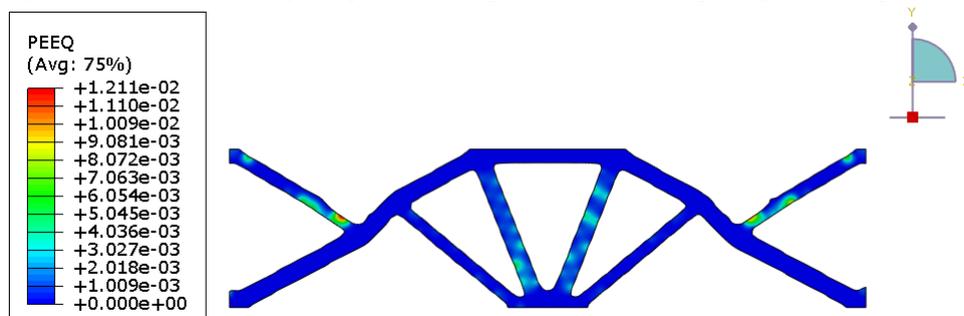
Nas Figura 103 e Figura 104, têm-se o cenário de distribuição das regiões plastificadas. No modelo elástico linear, identifica-se uma maior tendência de concentração na região da aplicação do carregamento. Contudo, no modelo elastoplástico, a área mais tracionada está localizada nas diagonais superiores, guardando-se semelhança com a Figura 88.

**Figura 103** - Deformações plásticas equivalentes na topologia elástica linear



Fonte: Autor, 2024.

**Figura 104** - Deformações plásticas equivalentes na topologia elastoplástica



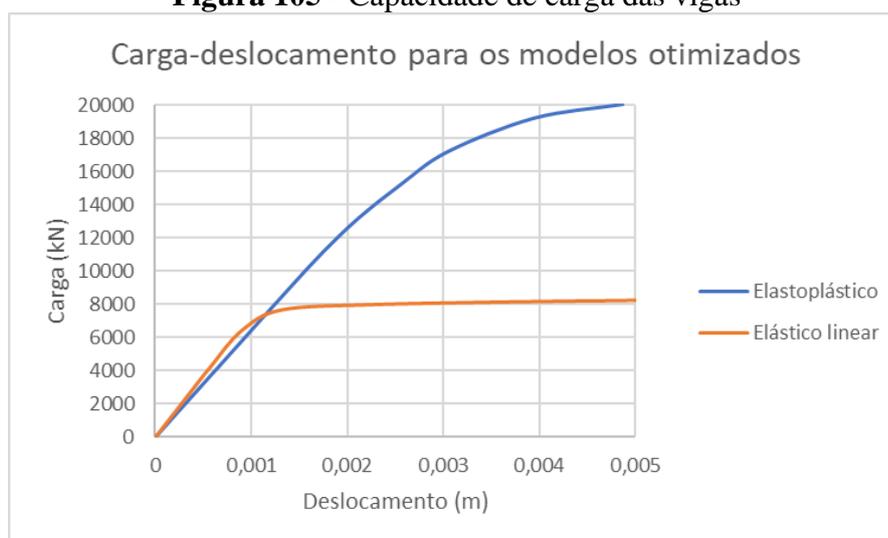
Fonte: Autor, 2024.

Observa-se que na Figura 105 a partir de uma carga de aproximadamente 7.650,67 kN, o modelo obtido pela topologia elástica linear começa a entrar no regime plástico, com um aumento de deslocamentos incessantes até a carga última de 8.193,17 kN, em que para um baixo acréscimo de carregamentos há um aumento de até 10x nos deslocamentos. Isso se justifica pela presença de grandes deformações plásticas no modelo, o que provoca uma redistribuição de esforços no elemento estrutural.

O deslocamento máximo obtido pelo modelo elástico é de  $4,53 \cdot 10^{-3}$  m para uma carga de 8.193,17 kN. Em contrapartida, para o modelo elastoplástico, o deslocamento máximo é de  $4,86 \cdot 10^{-3}$  m para uma carga de 20.000 kN.

No modelo elástico linear, ressalta-se que não se encontra a convergência para a carga máxima aplicada de 20.000 kN. Com isto, a topologia ótima elástica linear é capaz de atingir uma capacidade de carga de 40,97% do modelo elastoplástico.

**Figura 105** - Capacidade de carga das vigas



Fonte: Autor, 2024.

Yoon e Kim (2006) citam que a rigidez, representada pela curva carga-deslocamento  $dP/du$ , tende a ser menor para a topologia obtida com o comportamento elastoplástico no regime elástico, entretanto, é maior no regime plástico, quando comparado ao modelo obtido pela topologia elástica linear.

Zhao (2021) aborda que é esperado que a solução da topologia obtida pela análise elástica linear seja mais rígida do que as topologias obtidas pela análise elastoplástica no estado elástico. Assim que a estrutura inicia as deformações não lineares, as estruturas baseadas nas soluções plásticas tendem a atingir maiores capacidades de carga.

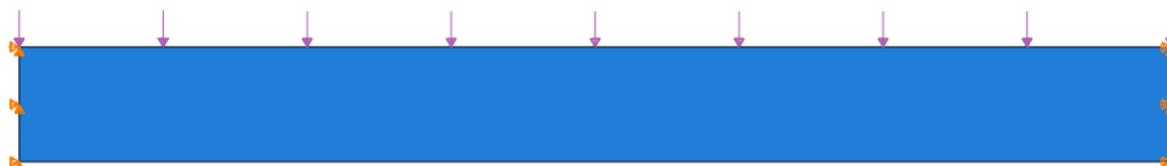
## 5.2 Viga biengastada de CRFA: variação de altura

Para este exemplo, uma viga biengastada de comprimento  $L = 5,0\text{ m}$ , e seção transversal com largura unitária foi modelada com os parâmetros de resistência obtidos por meio de Dutra (2012) de acordo com os ensaios de Demeke e Tegos (1994) (Tabela 10). Utiliza-se a homogeneização de Mori-Tanaka para a definição do módulo de elasticidade  $E = 31\text{ GPa}$  e  $\nu = 0,19$ . O carregamento aplicado é uniformemente distribuído no topo e as extremidades possuem restrições de deslocamentos em duas direções (Figura 106). Para esta análise, pode-se tirar proveito da simetria da estrutura. Entretanto, utiliza-se como consideração de modelagem todo o comprimento da viga.

Comercialmente, as fibras podem ter variação no comprimento de 30 a 60 mm. Deste modo, utiliza-se dimensões características da malha com valores superiores a no mínimo o comprimento das fibras. Deste modo, garante-se que a interpretação dos resultados numéricos seja coerente com a realidade executiva dos elementos reforçados com fibras de aço.

Neste exemplo, duas malhas são consideradas para a verificação dos resultados da viga de menor altura. Uma mais refinada, com 25 mm, a mais grosseira, com 50 mm.

**Figura 106** – Condições de contorno do modelo



Fonte: Autor, 2024.

**Tabela 10** – Propriedades dos ensaios de Demeke e Tegos (1994)

Parâmetros mecânicos	
Resistência à compressão uniaxial ( $f_c$ )	30 MPa
Resistência à tração uniaxial ( $f_t$ )	3,14 MPa
Resistência à compressão biaxial ( $f_{cb}$ )	$1,16f_c$
Resistência à tração uniaxial das fibras ( $\sigma_f$ )	1.000 MPa
Parâmetros do concreto com fibras ( $\frac{l_f}{d_f} = 60$ )	
$v_f^{0,5\%}$	4,11 MPa
$v_f^{1,0\%}$	4,70 MPa
$v_f^{1,5\%}$	5,48 MPa

Fonte: adaptado de DUTRA, 2012.

Para o modelo linear de Drucker-Prager, adota-se a razão das tensões ( $K$ ) igual a 1, além de um modelo associativo, em que o ângulo de atrito ( $\phi$ ) é igual ao ângulo de dilatação ( $\psi$ ). Por meio da proposta de Dutra (2012), as seguintes propriedades são utilizadas na modelagem, de acordo com a Tabela 11.

**Tabela 11** – Propriedades do modelo Drucker-Prager

Parâmetros de resistência do compósito			
Teor de fibras ( $v_f$ )	$f_c^{CRFA}$	$c$	$\phi$
0,5%	34,02 MPa	5,91 MPa	51,67°
1,0%	38,04 MPa	6,68 MPa	51,27°
1,5%	42,07 MPa	7,59 MPa	50,31°

Fonte: Autor, 2024.

A Tabela 12 apresenta a proposta de análise de 4 vigas, em função da relação L/D. Os carregamentos são definidos a partir dos quais há a presença de deformações plásticas equivalentes, afirmando-se que a consideração de um critério de resistência é necessária para a obtenção de topologias em que o comportamento do compósito possa ser representado.

**Tabela 12** – Variação de geometria

Parâmetros das vigas analisadas				
Viga	L	D	Relação L/D	Carregamento aplicado (kN/m <sup>2</sup> )
A	5	2,5	2	3000
B	5	1,25	4	1500
C	5	1,00	5	1000
D	5	0,5	10	300

Fonte: Autor, 2024.

O efeito de escala nos modelos é utilizado como referência para a obtenção da topologia e na observação das mudanças da distribuição de densidade em função do modelo elastoplástico, com teor de fibras de 1,0%, visto que este possui dependência com o carregamento aplicado. Os parâmetros de otimização e os critérios de convergência são apresentados na Tabela 5. Nestes exemplos, não foi adotado o critério de restrição de deslocamento nodal na região central das vigas.

Para estes modelos, considera-se a análise em estado plano de tensão com elementos CPS4 (elemento quadrilateral de 4 nós com interpolação bilinear, sem integração reduzida) de 50 mm. Adota-se a restrição de fração volumétrica de 50% em todos os resultados apresentados. Considerando o disposto na Tabela 13, pode-se perceber que os modelos elastoplásticos

apresentam maiores energias de deformação e maiores deslocamentos verticais, o que implica em uma estrutura menos rígida, podendo ser justificado em virtude da consideração das deformações plásticas equivalentes ao comportamento estrutural do elemento.

**Tabela 13** – Resultados da otimização das vigas biengastadas

Análise da variação de altura					
Modelos	Energia de deformação (kJ)		Deformações plásticas	Deslocamento vertical (m)	
	Elástico	Elastoplástico		Elástico	Elastoplástico
L/D = 2	4,86	5,73	$2,720 \cdot 10^{-3}$	$1,156 \cdot 10^{-3}$	$1,220 \cdot 10^{-3}$
L/D = 4	3,69	6,59	$4,269 \cdot 10^{-3}$	$1,952 \cdot 10^{-3}$	$2,879 \cdot 10^{-3}$
L/D = 5	2,76	4,60	$3,326 \cdot 10^{-3}$	$2,214 \cdot 10^{-3}$	$3,215 \cdot 10^{-3}$
L/D = 10	1,27	4,70	$7,222 \cdot 10^{-3}$	$3,418 \cdot 10^{-3}$	$8,823 \cdot 10^{-3}$

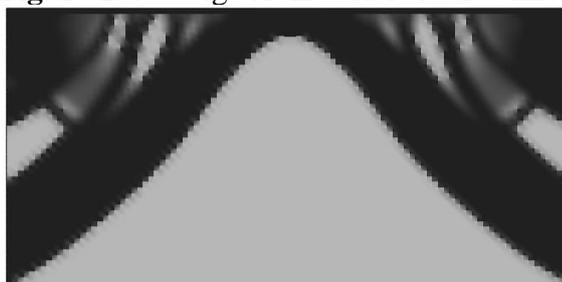
Fonte: Autor, 2024.

Nas referências encontradas na literatura para otimização topológica com material elastoplástico, a energia de deformação deste é sempre maior quando comparada ao material elástico linear.

### 5.2.1 Viga A: L/D = 2

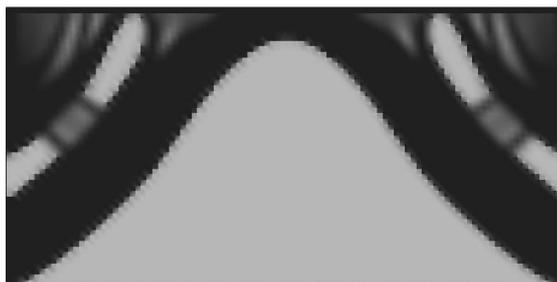
Esta viga, em função de suas dimensões, caracteriza-se como uma viga-parede, visto que a relação entre seu vão e a altura é igual a 2 (ABNT, 2023). Há uma predominância de topologia em forma de arco, otimizando a transferência de cargas para a região inferior. As Figura 107 e Figura 108 demonstram as topologias ótimas obtidas para o modelo elástico linear e o modelo elastoplástico, respectivamente.

**Figura 107** – Viga A: material elástico linear



Fonte: Autor, 2024.

**Figura 108** – Viga A: material elastoplástico



Fonte: Autor, 2024.

### 5.2.2 Viga B: $L/D = 4$

Similar ao caso da viga A, têm-se para a viga B tanto a topologia ótima para o material elástico linear (Figura 109) quanto a topologia ótima para o material elastoplástico (Figura 110) com a distribuição de material em região arqueada.

**Figura 109** – Viga B: material elástico linear



Fonte: Autor, 2024.

**Figura 110** – Viga B: material elastoplástico



Fonte: Autor, 2024.

### 5.2.3 Viga C: $L/D = 5$

No modelo elástico linear (Figura 111), nota-se a existência de um padrão de estrutura treliçada. Por outro lado, com a presença das deformações plásticas, a topologia (Figura 112) torna-se semelhante às vigas A e B, com o padrão de representação de um arco.

**Figura 111** – Viga C: material elástico linear



Fonte: Autor, 2024.

**Figura 112** – Viga C: material elastoplástico



Fonte: Autor, 2024.

#### 5.2.4 Viga D: $L/D = 10$

Para a viga D, com dimensões usuais de acordo com recomendações de projeto (altura cerca de 10% do vão), observa-se que a topologia obtida a partir da consideração do comportamento pós-fissuração possui uma tendência de trajetória de carga de maneira inclinada até os apoios.

**Figura 113** – Viga D: material elástico linear



Fonte: Autor, 2024.

**Figura 114** – Viga D: material elastoplástico



Fonte: Autor, 2024.

### 5.2.4.1 Modelo elastoplástico: viga D

Para a análise elastoplástica, utiliza-se as propriedades indicadas na Tabela 11. A viga é submetida a um carregamento uniformemente distribuído de 300 kN/m<sup>2</sup>. Para a seção 5.2.4.1.1, considera-se o fator  $p = 3$ , fração volumétrica de 50% e raio do filtro definido automaticamente em função do tamanho da malha de 50 mm.

Os modelos que obtiveram deformações plásticas equivalentes significativas possuem uma topologia ótima similar à de uma estrutura em arco. No entanto, em modelos com pequenas deformações, observa-se uma distribuição de material similar à de uma treliça, com a presença de diversas barras no interior da estrutura.

#### 5.2.4.1.1 Análise do teor de fibras

Utiliza-se teores de fibras de 0,5%, 1,0% e 1,5% distribuídas em toda altura do elemento (Figura 115). Para o procedimento de otimização, nota-se que a energia de deformação decresce com o aumento do teor de fibras (Tabela 14), caracterizando o ganho de rigidez do elemento estrutural.

**Figura 115** - Topologias ótimas para diferentes teores de fibras



Fonte: Autor, 2024.

**Tabela 14** - Resultados para diferentes teores de fibras na seção total

Modelos	$v_f = 0,5\%$	$v_f = 1,0\%$	$v_f = 1,5\%$
Energia de deformação (kJ)	15,37	4,70	2,56
Deformação plástica	$3,693 \cdot 10^{-2}$	$7,222 \cdot 10^{-3}$	$3,420 \cdot 10^{-3}$
Deslocamento vertical (m)	$2,378 \cdot 10^{-2}$	$8,823 \cdot 10^{-3}$	$5,531 \cdot 10^{-3}$

Fonte: Autor, 2024.

#### 5.2.4.2 Análise dos parâmetros de otimização

Com a malha refinada para elementos de 25 mm, analisa-se a influência da fração volumétrica de material, o fator de penalidade e o raio do filtro. Nesta investigação, o teor de fibras adotado é 1,5%. O carregamento aplicado e as propriedades mecânicas são as mesmas listadas na seção anterior. A Figura 116 apresenta a topologia de referência para a comparação dos resultados nas seções subsequentes.

**Figura 116** - Distribuição ótima de material ( $f = 50\%$ ,  $p = 3$ ,  $r = 32,5mm$ )



Fonte: Autor, 2024.

##### 5.2.4.2.1 Análise da fração volumétrica

Com diferentes restrições na fração volumétrica do problema de otimização, verifica-se que há sempre uma diminuição na energia de deformação com o aumento do volume de material (Tabela 15). Com essa investigação, pode-se notar que as deformações plásticas para a fração acima de 50% são similares (Figura 118). Em oposição, na Figura 117 têm-se que as deformações plásticas são excessivas, ocasionando em grandes deslocamentos e uma grande energia de deformação.

**Figura 117** – Distribuição ótima de material ( $f = 25\%$ )



Fonte: Autor, 2024.

**Figura 118** - Distribuição ótima de material ( $f = 75\%$ )



Fonte: Autor, 2024.

**Tabela 15** – Análise dos resultados com variação da fração volumétrica

Modelos	$f = 25\%$	$f = 50\%$	$f = 75\%$
Energia de deformação (kJ)	61,126	2,330	1,482
Deformação plástica	$1,485 \cdot 10^{-1}$	$5,950 \cdot 10^{-3}$	$5,390 \cdot 10^{-3}$
Deslocamento vertical (m)	$9,930 \cdot 10^{-2}$	$4,690 \cdot 10^{-3}$	$2,910 \cdot 10^{-3}$

Fonte: Autor, 2024.

#### 5.2.4.2.2 Análise do fator de penalidade

Analisa-se a influência do fator de penalidade constante no procedimento de otimização. Nota-se que há pouca variação na energia de deformação (Tabela 16). A topologia obtida com o fator  $p = 2$  (Figura 119) apresenta características de instabilidades numéricas, diferentemente do que é observado na Figura 120.

**Figura 119** – Distribuição ótima de material ( $p = 2$ )

Fonte: Autor, 2024.

**Figura 120** - Distribuição ótima de material ( $p = 4$ )

Fonte: Autor, 2024.

**Tabela 16** – Análise dos resultados com variação do fator de penalidade

Modelos	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$
Energia de deformação (kJ)	2,248	2,330	2,377
Deformação plástica	$6,323 \cdot 10^{-3}$	$5,950 \cdot 10^{-3}$	$5,664 \cdot 10^{-3}$
Deslocamento vertical (m)	$4,575 \cdot 10^{-3}$	$4,690 \cdot 10^{-3}$	$4,697 \cdot 10^{-3}$

Fonte: Autor, 2024.

#### 5.2.4.2.3 Análise do raio do filtro

Para a variação do valor do raio do filtro, utiliza-se para fins de comparação, o dobro e o triplo, do raio mínimo recomendado (1,3 vezes a dimensão do elemento). Nas Figura 121 e Figura 122, têm-se que as topologias obtidas guardam as proporções com àquela obtida com o

raio mínimo. Em termos dos resultados (Tabela 17), não há variação significativa nos parâmetros de saída analisados.

Para os elementos apresentados, pode-se perceber que o resultado exposto pode ter relação direta com a razão de aspecto das fibras utilizadas. Especificamente para o CRFA, deve-se ter cautela ao definir o raio do filtro, de modo que as regiões com material possuam espessuras, no mínimo, do valor do comprimento da fibra. Por exemplo, em função do tipo e classe da fibra, exige-se a razão de aspecto mínima, o que influenciará na distribuição de material resultante no modelo otimizado.

**Figura 121** - Distribuição ótima de material ( $r = 65mm$ )



Fonte: Autor, 2024.

**Figura 122** - Distribuição ótima de material ( $r = 97,5mm$ )



Fonte: Autor, 2024.

**Tabela 17** - Análise dos resultados com variação do raio do filtro

Modelos	$r = 32,5 mm$	$r = 65mm$	$r = 97,5mm$
Energia de deformação (kJ)	2,330	2,541	2,804
Deformação plástica	$5,950 \cdot 10^{-3}$	$6,027 \cdot 10^{-3}$	$5,835 \cdot 10^{-3}$
Deslocamento vertical (m)	$4,690 \cdot 10^{-3}$	$4,973 \cdot 10^{-3}$	$5,423 \cdot 10^{-3}$

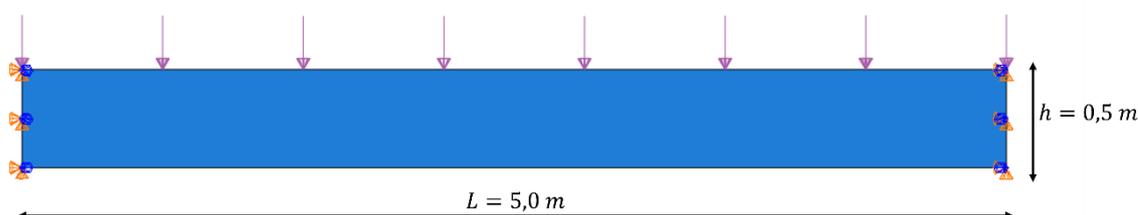
Fonte: Autor, 2024.

Com estas análises, consegue-se compreender que os parâmetros de otimização podem influenciar diretamente na obtenção da topologia ótima do elemento estrutural. A geometria obtida para a análise é totalmente dependente da escolha das dimensões da malha, da restrição da fração volumétrica e de demais dados necessários para o método SIMP de otimização topológica. A partir de uma análise de convergência e de acordo com as recomendações da literatura, pode-se definir os parâmetros que garantam os princípios estabelecidos no procedimento de otimização, buscando-se uma estrutura mais rígida e com redução de volume.

### 5.3 Viga biengastada de CRFA: análise dos parâmetros de resistência

Para esta análise, modela-se uma viga biengastada de comprimento  $L = 5,0 \text{ m}$ , e seção transversal com largura de 20 cm e altura de 50 cm (Figura 123). O carregamento aplicado é de 60 kN/m uniformemente distribuído no topo (equivalente a uma tensão de 300 kN/m<sup>2</sup>) e as extremidades possuem restrições de deslocamentos em duas direções. A dimensão característica da malha de elementos em estado plano de tensão é de 60 mm. Adota-se a restrição de fração volumétrica de 50% e fator de penalidade  $p = 3$  em todos os resultados apresentados.

**Figura 123** – Modelo adotado na análise paramétrica



Fonte: Autor, 2024.

Para todos os casos, considera-se  $f_{cbm} = 1,16 \cdot f_{cm}$ . A resistência à tração é considerada pela equação do *fib Model Code 2010* (*fib*, 2013). Para o módulo de elasticidade longitudinal da matriz, adota-se a média dos valores obtidos pelas referências normativas (Tabela 1).

Com as equações (43) a (47), a proposta de Venkateshwaran, Tan e Li (2018) é escolhida para a previsão empírica das resistências residuais características à flexão. Nesta análise, considera-se a razão de aspecto  $L/D = 60$ , comprimento de fibra de 60 mm e ganchos nas extremidades ( $N = 2$ ). Para a resistência  $f_c'$ , utiliza-se o valor de resistência médio à compressão  $f_{cm}$ .

Com isto, verifica-se que a resistência à tração uniaxial das fibras não possui efeito preponderante nas resistências residuais. No entanto, fibras mais longas, mantendo-se a razão de aspecto, tendem a desenvolverem maiores resistências quando comparadas às fibras mais curtas, indicando a presença do efeito de tamanho.

Para a NBR 16935 (ABNT, 2021a), as relações mínimas entre resistências são atendidas ( $\frac{f_{R1k}}{f_{Lk}} \geq 0,40$  e  $\frac{f_{R3k}}{f_{R1k}} \geq 0,50$ ), de modo que é permitida a substituição total ou parcial da armadura convencional nos elementos estruturais dimensionados no estado-limite último.

Para um teor de fibras de 0,5%, a seguir, têm-se as propriedades elásticas efetivas obtidas por meio da homogeneização de Mori-Tanaka e as propriedades de resistência, além

dos parâmetros indicados pelo critério elastoplástico de Drucker-Prager proposto por Dutra (2012) (Tabela 18). As classes dos concretos são determinadas de acordo com o *fib Model Code 2010* (fib, 2013) (Tabela 19).

**Tabela 18** - Variação de parâmetros do CRFA ( $v_f = 0,5\%$ )

Parâmetros de resistência do compósito							
$f_{cm}$ (MPa)	$f_c^{CRFA}$ (MPa)	$f_{cb}^{CRFA}$ (MPa)	$f_t^{CRFA}$ (MPa)	E (MPa)	$\nu$	$c$ (MPa)	$\phi$ (°)
30	34,02	38,93	3,15	30832,63	0,2	5,18	56,15
35	39,02	44,73	3,45	32994,25	0,2	5,80	56,88
40	44,02	50,53	3,74	34993,57	0,2	6,42	57,50
45	49,02	56,33	4,02	36861,19	0,2	7,02	58,05
50	54,02	62,13	4,29	38619,22	0,2	7,61	58,53

Fonte: Autor, 2024.

**Tabela 19** - Propriedades do CRFA para  $v_f = 0,5\%$

Características do CRFA								
$f_{cm}$ (MPa)	$f_{lk}$ (MPa)	$f_{r1k}$ (MPa)	$f_{r2k}$ (MPa)	$f_{r3k}$ (MPa)	$f_{r4k}$ (MPa)	$f_{r1k}/f_{lk}$ (MPa)	$f_{r3k}/f_{r1k}$ (MPa)	Classe
30	3,51	2,88	4,72	4,91	4,25	0,82	1,70	2e
35	3,76	3,00	4,86	5,02	4,35	0,80	1,67	3e
40	4,01	3,12	4,98	5,12	4,44	0,78	1,64	3e
45	4,23	3,23	5,11	5,22	4,53	0,76	1,62	3e
50	4,45	3,33	5,22	5,31	4,61	0,75	1,59	3e

Fonte: Autor, 2024.

Com um teor de fibras de 1,0 %, as propriedades elásticas efetivas obtidas por meio da homogeneização de Mori-Tanaka e as propriedades de resistência, além dos parâmetros indicados pelo critério elastoplástico de Drucker-Prager proposto por Dutra (2012), estão representadas na Tabela 20. De acordo com o *fib Model Code 2010* (fib, 2013), têm-se a classe dos respectivos concretos (Tabela 21).

**Tabela 20** – Variação de parâmetros do CRFA ( $v_f = 1,0\%$ )

Parâmetros de resistência do compósito							
$f_{cm}$ (MPa)	$f_c^{CRFA}$ (MPa)	$f_{cb}^{CRFA}$ (MPa)	$f_t^{CRFA}$ (MPa)	E (MPa)	$\nu$	$c$ (MPa)	$\phi$ (°)
30	38,04	43,06	3,39	31151,14	0,20	5,68	56,74
35	43,04	48,86	3,68	33319,09	0,20	6,30	57,38
40	48,04	54,67	3,96	35323,91	0,20	6,90	57,95
45	53,04	60,47	4,23	37196,35	0,20	7,50	58,44
50	58,04	66,24	4,50	38958,65	0,20	8,08	58,89

Fonte: Autor, 2024.

**Tabela 21** – Propriedades do CRFA para  $v_f = 1,0\%$ 

Características do CRFA								
$f_{cm}$ (MPa)	$f_{lk}$ (MPa)	$f_{r1k}$ (MPa)	$f_{r2k}$ (MPa)	$f_{r3k}$ (MPa)	$f_{r4k}$ (MPa)	$f_{r1k}/f_{lk}$ (MPa)	$f_{r3k}/f_{r1k}$ (MPa)	Classe
30	3,78	4,95	7,19	7,50	6,59	1,31	1,52	4e
35	4,04	5,07	7,32	7,61	6,69	1,26	1,50	5e
40	4,28	5,19	7,45	7,71	6,78	1,21	1,49	5e
45	4,51	5,30	7,58	7,81	6,86	1,18	1,47	5e
50	4,72	5,40	7,69	7,90	6,94	1,14	1,46	5e

Fonte: Autor, 2024.

Por fim, para teor de fibras de 1,5 %, as propriedades elásticas efetivas obtidas por meio da homogeneização de Mori-Tanaka e as propriedades de resistência, além dos parâmetros indicados pelo critério elastoplástico de Drucker-Prager proposto por Dutra (2012), estão representadas na Tabela 22. Para o *fib Model Code 2010* (fib, 2013), considerou-se a classe 7e (Tabela 23).

**Tabela 22** - Variação de parâmetros do CRFA ( $v_f = 1,5\%$ )

Parâmetros de resistência do compósito								
$f_{cm}$ (MPa)	$f_c^{CRFA}$ (MPa)	$f_{cb}^{CRFA}$ (MPa)	$f_t^{CRFA}$ (MPa)	E (MPa)	$\nu$	$c$ (MPa)	$\phi$ (°)	
30	42,07	47,2	3,63	31471,62	0,2	6,18	57,27	
35	47,07	53	3,91	33645,91	0,2	6,78	57,84	
40	52,07	58,8	4,18	35656,22	0,2	7,38	58,35	
45	57,07	64,6	4,47	37533,47	0,2	7,96	58,81	
50	62,07	70,4	4,70	39300,04	0,2	8,54	59,22	

Fonte: Autor, 2024.

**Tabela 23** - Propriedades do CRFA para  $v_f = 1,5\%$ 

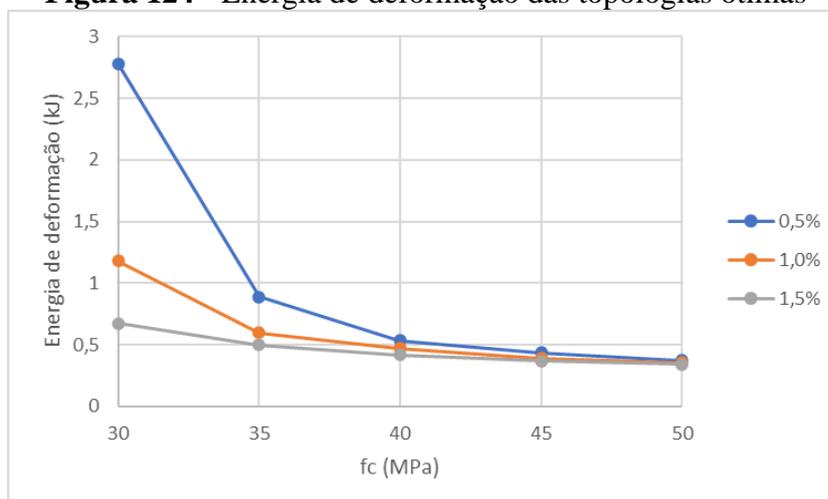
Características do CRFA								
$f_{cm}$ (MPa)	$f_{lk}$ (MPa)	$f_{r1k}$ (MPa)	$f_{r2k}$ (MPa)	$f_{r3k}$ (MPa)	$f_{r4k}$ (MPa)	$f_{r1k}/f_{lk}$ (MPa)	$f_{r3k}/f_{r1k}$ (MPa)	Classe
30	4,06	7,01	9,65	10,09	8,92	1,73	1,44	7e
35	4,31	7,14	9,79	10,20	9,02	1,65	1,43	7e
40	4,55	7,26	9,92	10,30	9,11	1,59	1,42	7e
45	4,78	7,36	10,04	10,40	9,20	1,54	1,41	7e
50	5,00	7,47	10,16	10,49	9,28	1,50	1,41	7e

Fonte: Autor, 2024.

Ao total, 15 modelos são processados, 5 para cada um dos 3 teores de fibras em relação à resistência da matriz de concreto. Nota-se que o comportamento do CRFA possui uma tendência de *hardening* em função das previsões das resistências residuais. Para diversos autores, isso significa que seu comportamento à tração pode ser considerado, no mínimo, como elastoplástico perfeito.

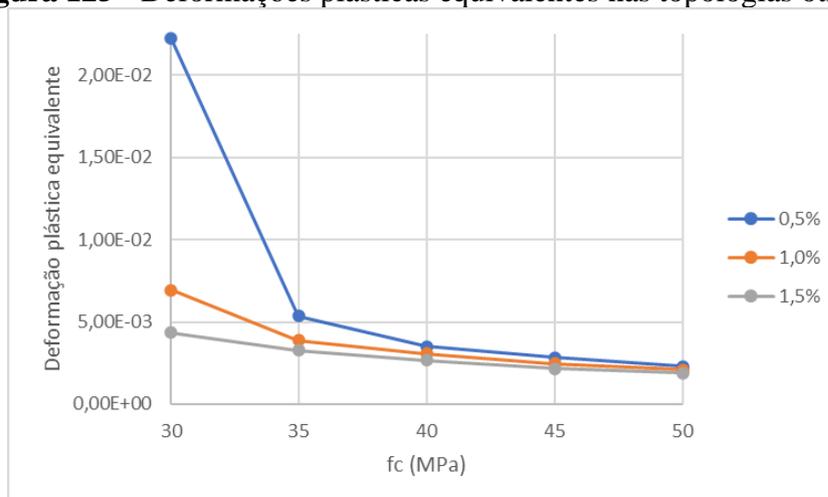
Neste procedimento, por meio do método SIMP, pode-se observar na Figura 124 que à medida que a resistência do concreto aumenta, há uma tendência de diminuição na energia de deformação. Isto também se verifica para o teor de fibras, uma vez que quanto mais fibras estão presentes no elemento, maior será sua rigidez. Observa-se que não se verifica grandes variações na proporção em que o  $f_{cm}$  tende para 50 MPa.

**Figura 124** - Energia de deformação das topologias ótimas



Fonte: Autor, 2024.

Na Figura 125, com o procedimento de otimização topológica não linear, têm-se os valores das deformações plásticas equivalentes nos modelos. Uma vez que estas deformações são diferentes de zero, deve-se proceder a análise do material considerando-se o comportamento pós-fissuração, ratificando a escolha do modelo constitutivo adotado. Verifica-se que há uma tendência de redução destas deformações à medida que a resistência da matriz e o teor de fibras aumentam.

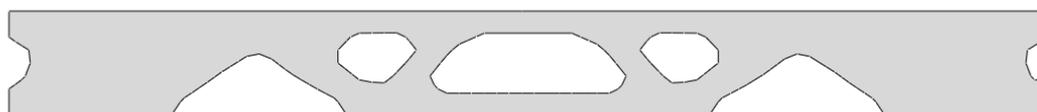
**Figura 125** - Deformações plásticas equivalentes nas topologias ótimas

Fonte: Autor, 2024.

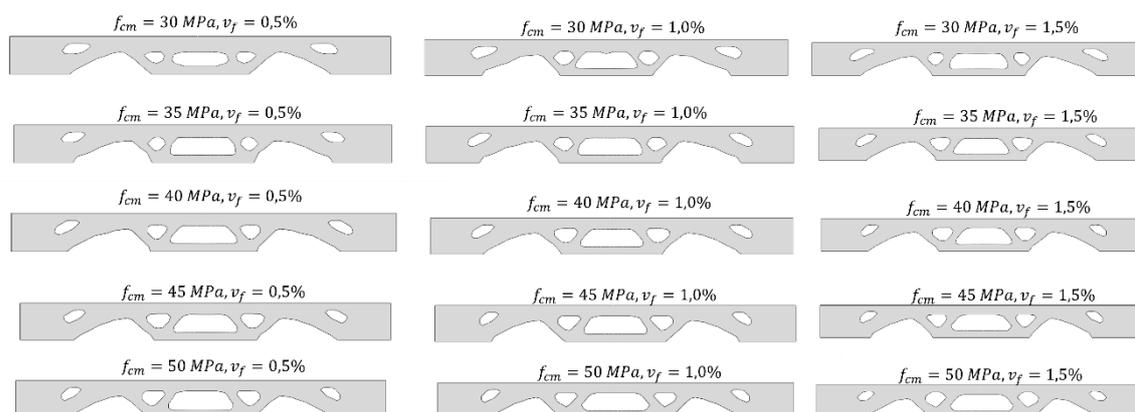
### 5.3.1 Análise estrutural dos modelos otimizados

Com as superfícies extraídas na etapa de pós-processamento, considerando valores de densidades acima de  $\rho > 0,25$  e utilizando uma técnica de filtragem moderada, procede-se a análise do comportamento estrutural das topologias ótimas (Figura 126 e Figura 127).

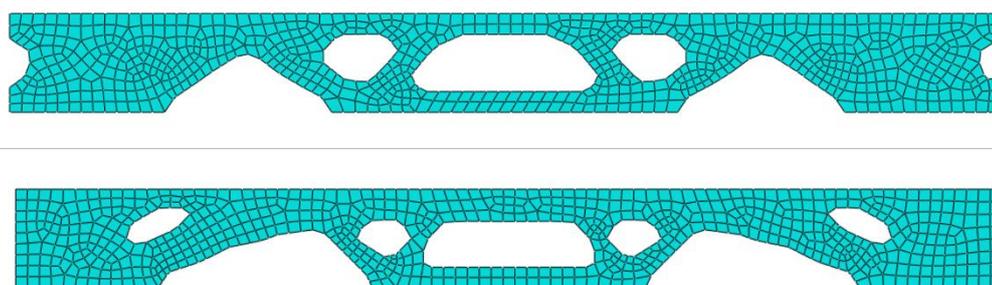
Para cada superfície, de posse dos dados do material homogeneizado, efetua-se a análise não linear para a construção das curvas carga-deslocamento, bem como a identificação das máximas deformações plásticas. Utiliza-se elementos CPS4 (elemento quadrilateral de 4 nós com interpolação bilinear, sem integração reduzida) com dimensão característica de malha de 60 mm (Figura 128). Em todos os casos, o deslocamento monitorado é considerado na parte inferior no meio do vão.

**Figura 126** – Topologia elástica linear

Fonte: Autor, 2024.

**Figura 127 - Topologias elastoplásticas**

Fonte: Autor, 2024.

**Figura 128 – Discretização da malha**

Fonte: Autor, 2024.

Os modelos otimizados apresentam descontinuidades geométricas significativas, que podem afetar o comportamento estrutural de maneira global. Assim como os exemplos pioneiros de otimização topológica, pode-se avaliar a capacidade resistente por meio de um modelo de treliça equivalente, em que o mecanismo de transferência de cargas poderá ser avaliado por meio de uma análise de escoras e tirantes.

Com o modelo original, antes do procedimento de otimização, a viga possuía um volume de  $0,5 \text{ m}^3$ . Após a extração das superfícies com o isovalor de 0,25, encontram-se os novos volumes após a minimização da energia de deformação (Tabela 24). Para o elástico linear, o volume é de  $0,363 \text{ m}^3$ .

**Tabela 24 – Volumes dos modelos otimizados**

Volumes obtidos ( $\text{m}^3$ )			
$f_{cm}$ (MPa)	$v_f = 0,5\%$	$v_f = 1,0\%$	$v_f = 1,5\%$
30	0,374	0,353	0,355
35	0,359	0,352	0,351

40	0,355	0,352	0,354
45	0,353	0,356	0,358
50	0,358	0,361	0,360

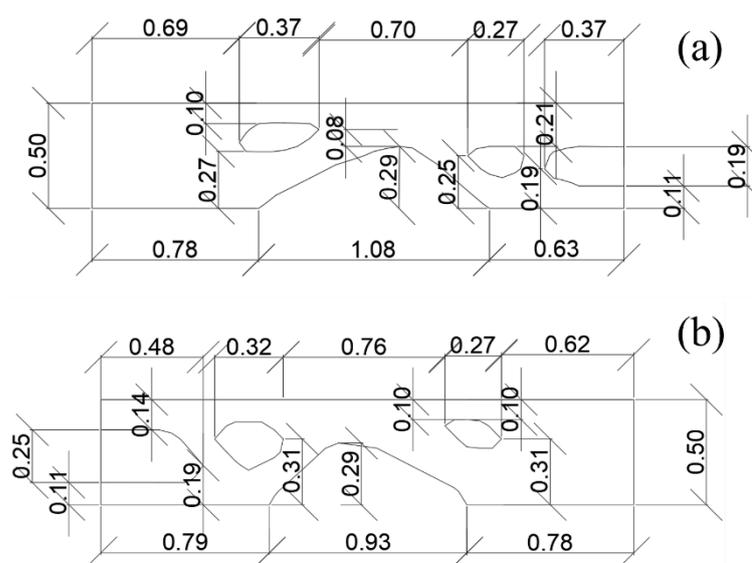
Fonte: Autor, 2024.

Por meio da exportação do arquivo “.igs”, pode-se observar as medidas das topologias exemplos, que possuem suas dimensões representadas na Figura 129. Neste exemplo, apenas metade da seção é analisada. Consta-se que a área de vazios em toda viga é de 0,63 m<sup>2</sup> para (a) e para (b) é de 0,70 m<sup>2</sup>. As distâncias máximas da face superior e da face superior são de 10 cm e 11 cm, respectivamente, para os dois casos.

**Figura 129** - Dimensões para as topologias

(a)  $f_{cm} = 30 \text{ MPa}$  e  $v_f = 0,5\%$

(b)  $f_{cm} = 50 \text{ MPa}$  e  $v_f = 1,5\%$



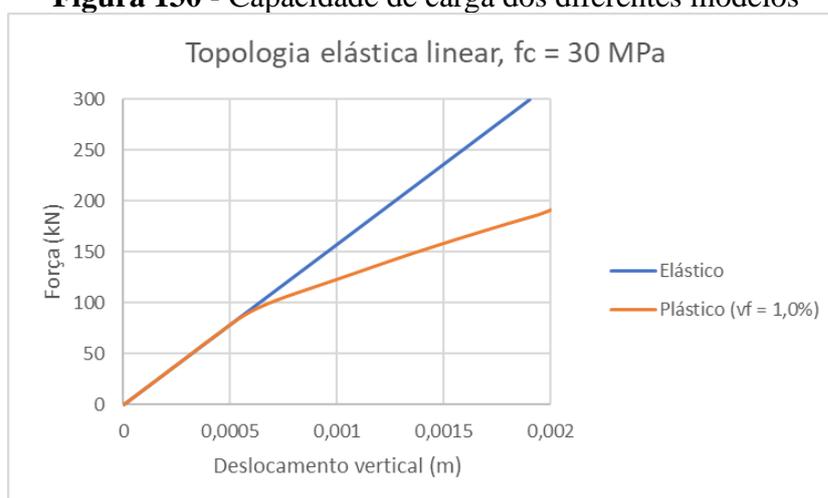
Fonte: Autor, 2024.

Nessa análise não linear, a geometria da estrutura, a distribuição da armadura (quando houver) e o comportamento mecânico do CRFA precisam ser previamente conhecidos para que esse estudo possa ser efetuado, pois a resposta da estrutura depende das fibras como reforço (material, tipo e dosagem), e de como ela foi armada (ABNT, 2021a).

Ademais, as condições de equilíbrio, de compatibilidade e de ductilidade devem ser necessariamente atendidas. Com isto, análises não lineares podem ser adotadas para verificações no estado-limite último e no estado-limite de serviço.

Na Figura 130 têm-se uma análise comparativa da topologia elástica linear, com os parâmetros elásticos e elastoplásticos ( $v_f = 1,0\%$ ). Para cerca de 33% da carga total, ao se considerar o comportamento plástico, observa-se que a estrutura entra em regime de escoamento.

**Figura 130** - Capacidade de carga dos diferentes modelos



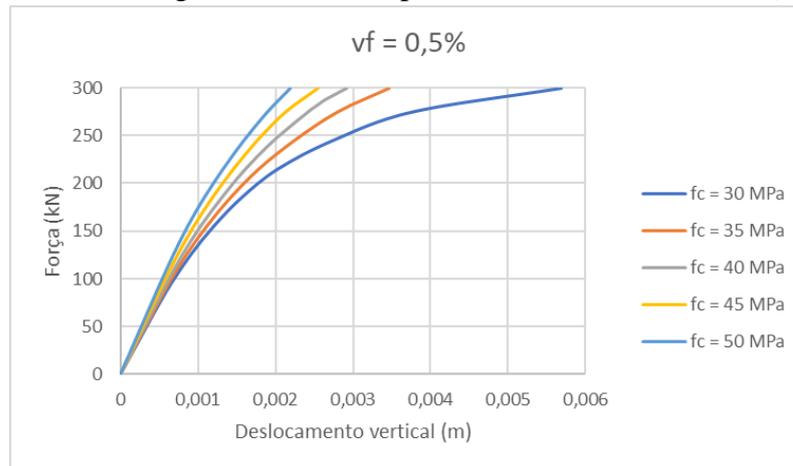
Fonte: Autor, 2024.

### 5.3.1.1 Análise do teor de fibras

De modo a realizar uma análise sobre a influência do teor de fibras nos modelos otimizados, utiliza-se três valores diferentes (0,5%; 1,0% e 1,5%) para cinco classes de resistência de concreto (30 a 50 MPa). Em função dos parâmetros de resistência adotados na seção 5.3, têm-se que para as curvas carga-deslocamento apresentadas (Figura 131, Figura 132 e Figura 133), à medida que a resistência da matriz aumenta, em conjunto com o crescente teor de fibras, observa-se menores deslocamentos.

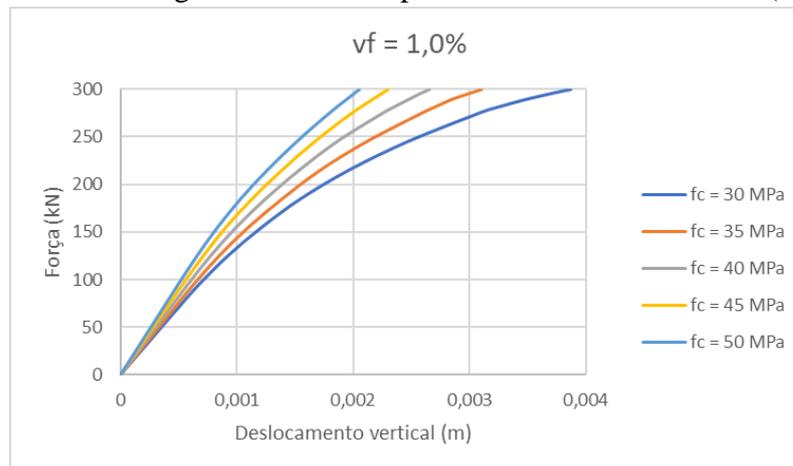
Na Figura 131 observa-se que o maior deslocamento é o obtido pelo modelo com  $f_c = 30 \text{ MPa}$ , em torno de 5,69 mm. Para a Figura 132, têm-se o valor máximo de 3,87 mm. Por fim, na Figura 133, o maior valor registrado é de 3,31 mm.

**Figura 131** - Curva carga-deslocamento para os modelos otimizados ( $v_f = 0,5\%$ )



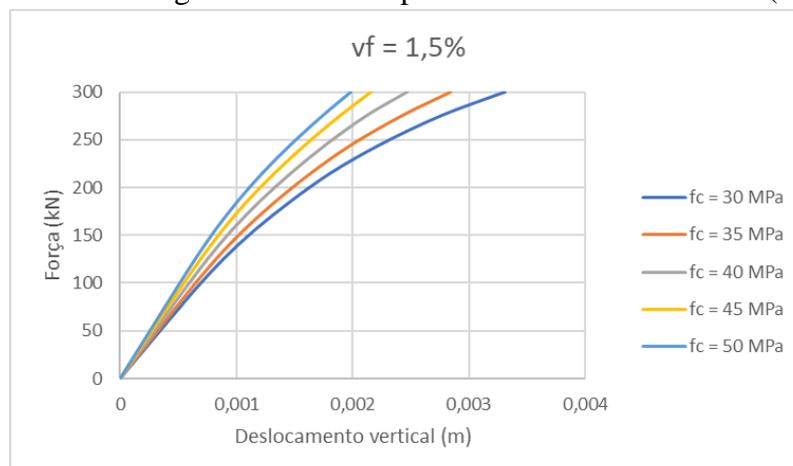
Fonte: Autor, 2024.

**Figura 132** - Curva carga-deslocamento para os modelos otimizados ( $v_f = 1,0\%$ )



Fonte: Autor, 2024.

**Figura 133** - Curva carga-deslocamento para os modelos otimizados ( $v_f = 1,5\%$ )



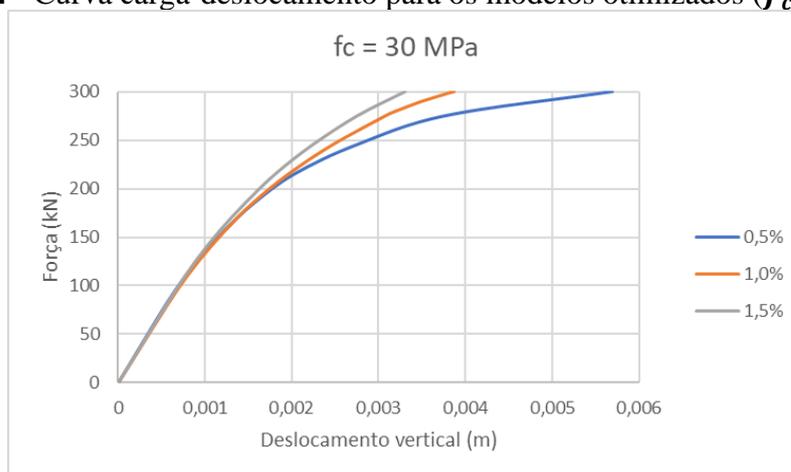
Fonte: Autor, 2024.

### 5.3.1.2 Análise da classe de resistência do concreto

Para a variação da resistência do concreto utilizado como matriz, com diferentes teores de fibras (Figura 134 a Figura 137), observa-se que o aumento no percentual de reforço distribuído aleatoriamente contribui para a diminuição do deslocamento máximo nos modelos analisados.

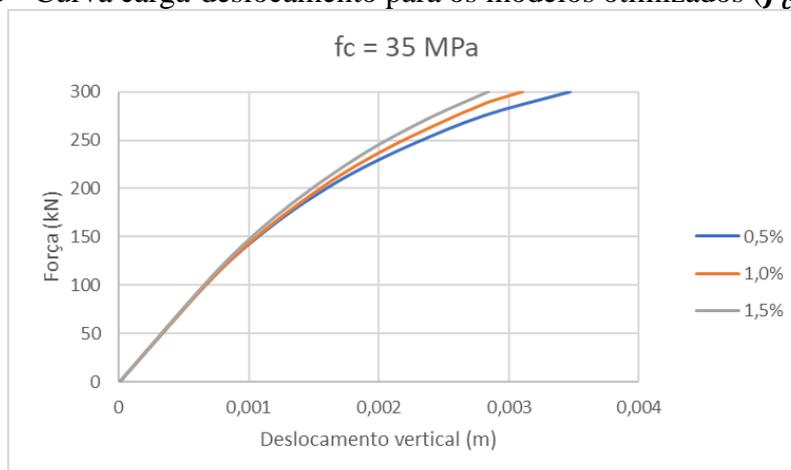
Para a mesma carga última, registra-se que os modelos com  $v_f = 1,5\%$  possuem uma tendência de serem mais rígidos quando comparados aos demais. Para os elementos com o reforço de  $v_f = 0,5\%$ , registram-se os maiores deslocamentos. Com o aumento da classe de resistência do concreto, há uma tendência de convergência dos valores de deslocamentos, indicando que o acréscimo do teor de fibras não muda drasticamente o valor máximo constatado.

**Figura 134** - Curva carga-deslocamento para os modelos otimizados ( $f_c = 30\text{MPa}$ )



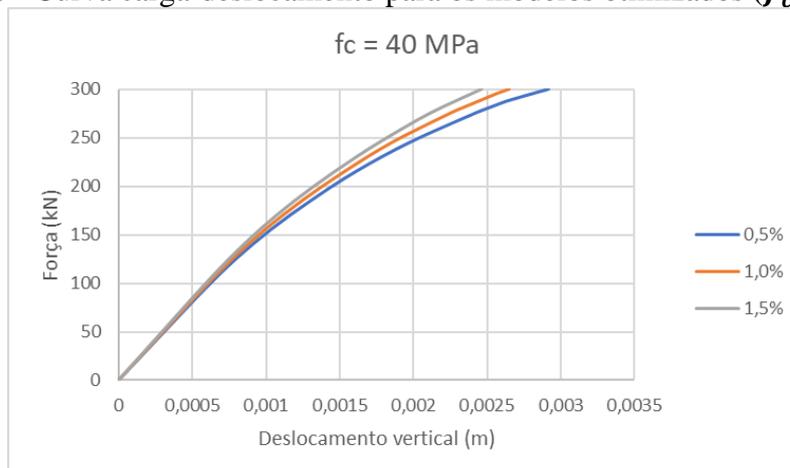
Fonte: Autor, 2024.

**Figura 135** - Curva carga-deslocamento para os modelos otimizados ( $f_c = 35\text{MPa}$ )



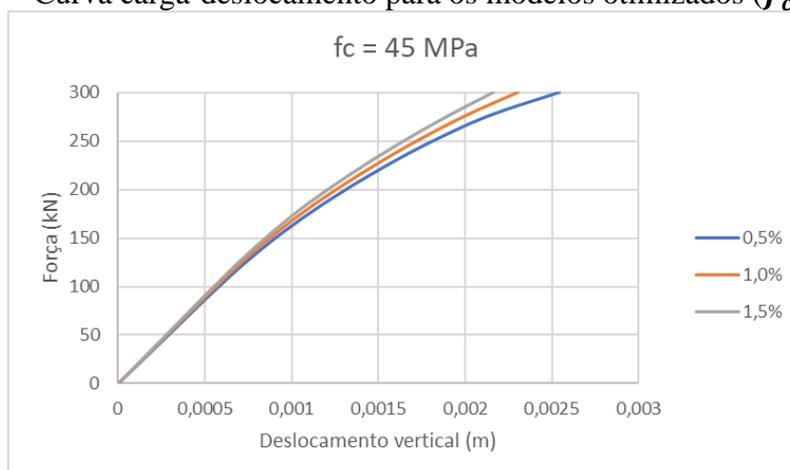
Fonte: Autor, 2024.

**Figura 136** - Curva carga-deslocamento para os modelos otimizados ( $f_c = 40MPa$ )



Fonte: Autor, 2024.

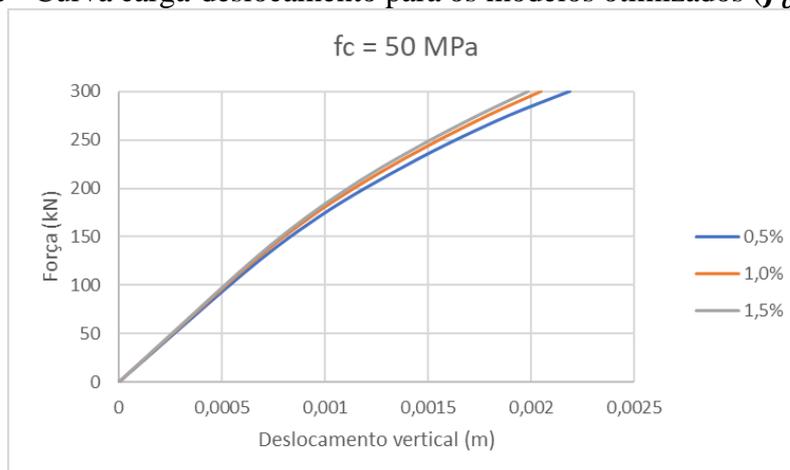
**Figura 137** - Curva carga-deslocamento para os modelos otimizados ( $f_c = 45MPa$ )



Fonte: Autor, 2024.

Na Figura 138, para um concreto com  $f_c = 50 MPa$ , têm-se que para os três teores de fibras considerados, o deslocamento máximo possui uma redução de apenas 9,23% do deslocamento com  $v_f = 0,5\%$  (2,19 mm) para o valor analisado com  $v_f = 1,5\%$  (1,98 mm). Este fato corrobora que há forte influência da classe de resistência no comportamento da viga em questão.

**Figura 138** - Curva carga-deslocamento para os modelos otimizados ( $f_c = 50\text{MPa}$ )

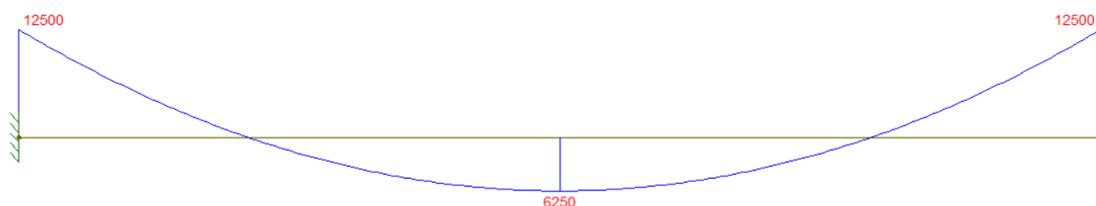


Fonte: Autor, 2024.

### 5.3.2 Verificações ELU e ELS

As hipóteses adotadas para a análise dos esforços resistentes de uma seção de viga devem atender as premissas estabelecidas na NBR 16935 (ABNT, 2021a), e em complemento, a NBR 6118 (ABNT, 2023). Por exemplo, considera-se no equacionamento dos momentos resistentes a teoria de vigas de Euler-Bernoulli, em que as seções transversais se mantêm planas após a deformação. Para os exemplos apresentados, em que há descontinuidade geométrica nas topologias obtidas, o procedimento mais adequado para a análise da capacidade resistente supõe a utilização dos modelos de bielas, em que as escoras representam o concreto comprimido e os tirantes representam a contribuição da seção com fibras e barras de aço.

Procede-se as verificações em Estado Limite Último (ELU) e Estado Limite de Serviço (ELS) de maneira simplificada para a viga maciça. Para a obtenção dos esforços solicitantes (Figura 139), trata-se o modelo como um elemento linear de viga biengastada, de modo a realizar as verificações para a segurança estrutural. Utiliza-se os parâmetros do CRFA listados na seção anterior para os diferentes teores de fibra.

**Figura 139** – Diagrama de momento fletor característico (kNcm)

Fonte: Autor, 2024.

Apesar de na modelagem em elementos finitos não ter as armaduras tradicionais incorporadas, para as verificações de flexão e cisalhamento são utilizados os princípios da flexão simples para o concreto estrutural e em alguns casos específicos, considera-se a presença da armadura passiva para a simulação da capacidade resistente. Ademais, considera-se que a deformação das barras passivas aderentes deve ser a mesma do concreto em seu entorno.

### 5.3.2.1 Flexão

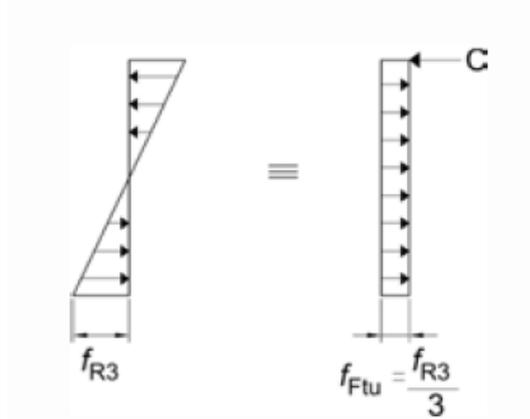
Utiliza-se o modelo rígido plástico (ABNT, 2021a) para a verificação dos esforços resistentes devido ao momento fletor. Apesar da norma NBR 16935 também sugerir um modelo linear, opta-se neste trabalho por analisar somente com o modelo rígido-plástico, que é mais simples. Almeida (2023) cita que o modelo rígido-plástico apresenta menores valores de tenacidade, o que tende a ser mais conservador.

Além disso, o aumento do teor de fibras, que tende a aumentar as resistências residuais, pode proporcionar um comportamento *deflection-hardening*, ou seja, a tensão máxima pós-fissuração é maior que a tensão associada ao surgimento da primeira fissura ou limite de proporcionalidade. Para teores de fibra acima do valor crítico, observa-se que há uma tendência de transição para o comportamento de *hardening*.

Para se garantir a capacidade resistente no modelo rígido-plástico, o momento pode ser calculado com base na equivalência estática (Figura 140), conforme Eq. (95). O valor adotado de  $f_{FTu}$  parte do pressuposto de que toda a resistência de compressão é concentrada na parte superior da seção. Com isto, o momento resistente é dado pela equação a seguir:

$$M_U = \frac{f_{R3} \cdot b \cdot h^2}{6} = \frac{f_{FTu} \cdot b \cdot h^2}{2} \quad (95)$$

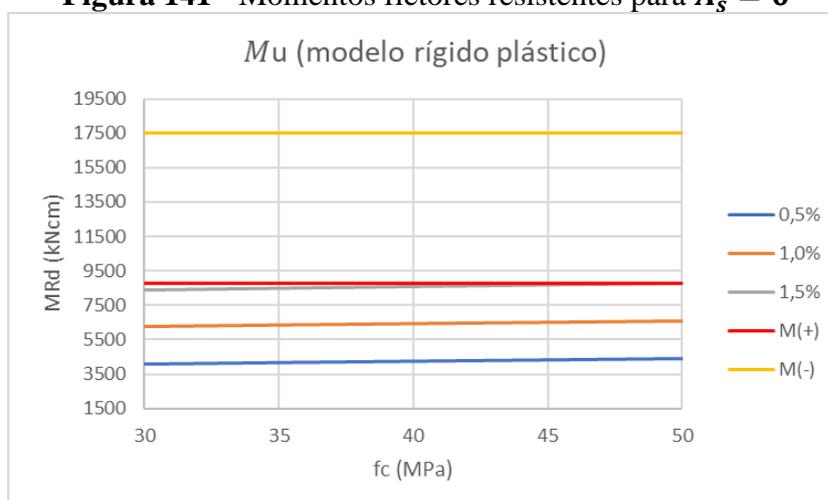
**Figura 140** – Modelo simplificado para determinação de  $f_{FTu}$



Fonte: ABNT, 2021a.

Inicialmente, investiga-se o comportamento resistente com  $A_s = 0$ , o que leva à condição de ruptura dos elementos, independente da classe de concreto analisada (Figura 141). Conseqüentemente, apesar da norma permitir a substituição total ou parcial da armadura convencional, verifica-se que com a ausência desta haverá a ruptura por flexão.

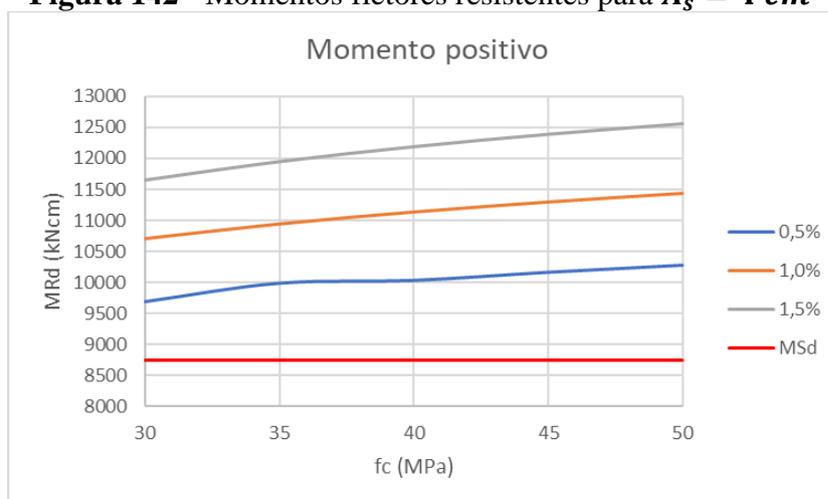
**Figura 141** - Momentos fletores resistentes para  $A_s = 0$



Fonte: Autor, 2024.

Para o momento positivo máximo ( $qL^2/24$ ), adota-se  $A_s = 4,0 \text{ cm}^2$ , o que corresponde a duas barras de  $\phi = 16 \text{ mm}$ . Em função do teor de fibras e da classe de resistência do concreto (Figura 142), atende-se a premissa  $MSd \leq MRd$ .

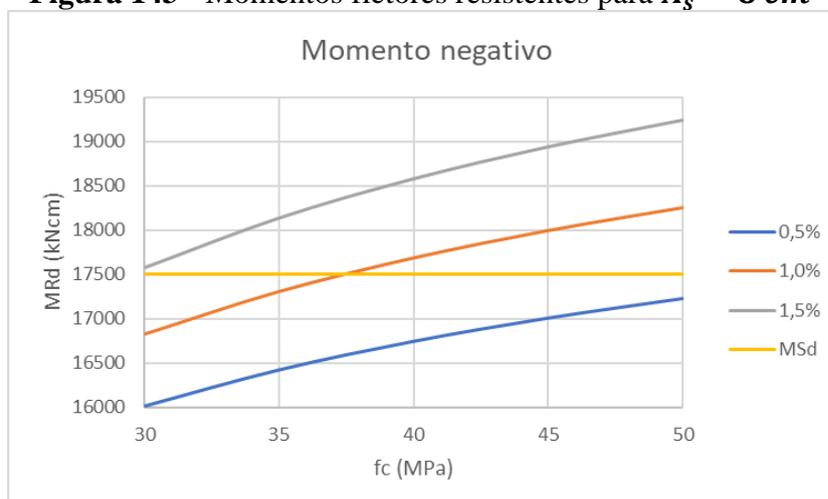
**Figura 142** - Momentos fletores resistentes para  $A_s = 4 \text{ cm}^2$



Fonte: Autor, 2024.

Para o momento negativo máximo ( $qL^2/12$ ), considerando  $A_s = 8,0 \text{ cm}^2$ , o que corresponde a quatro barras de  $\phi = 16 \text{ mm}$ , têm-se a Figura 143, verifica-se que apenas para o teor de fibras de 1,5% a condição de segurança será atendida em todas as situações.

**Figura 143** - Momentos fletores resistentes para  $A_s = 8 \text{ cm}^2$



Fonte: Autor, 2024.

Pode-se concluir que as fibras pouco contribuem para a capacidade resistente ao momento fletor quando comparadas com a parcela associada à armadura longitudinal. Desta forma, quando se tem esforços de flexão preponderantes na seção, a substituição total da armadura passiva por fibras pode não ser a solução de projeto mais viável.

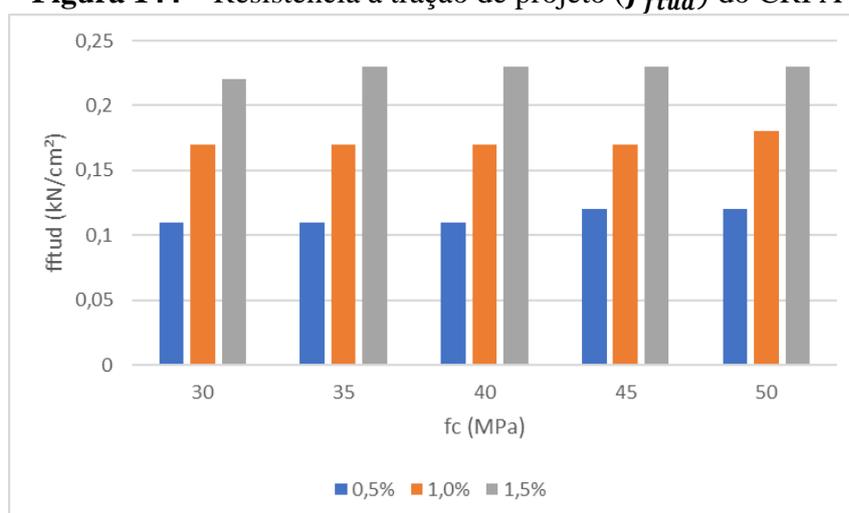
Para cargas de menor intensidade, pode-se pensar em reduzir ou até inutilizar a armadura longitudinal, possibilitando o uso das fibras na seção plena. Ao analisar as vigas (elementos lineares) que estão preponderantemente submetidos à flexão, a necessidade de armadura longitudinal para garantir a ruptura dúctil é notável para a garantia da segurança.

Observa-se nesta análise específica que apesar de ser possível, com a estimativa dos parâmetros de resistência, garantir que a peça seja constituída apenas de concreto e fibras, ainda há um caminho a ser percorrido e que o dimensionamento esteja de acordo com as prescrições normativas. Nesta direção, tende-se a utilização de concretos de ultra-alto-desempenho, para que o ganho de resistência residual possa permitir as aplicações para elementos lineares fletidos.

### 5.3.2.2 Cisalhamento

Considerando-se a ausência de armadura transversal na peça, calcula-se para o esforço cortante solicitante  $V_{sd} = 210 \text{ kN}$  as duas hipóteses: somente com fibras; fibras e armadura longitudinal. Para elementos lineares de CRFA, sem armaduras longitudinal e transversal, a resistência à tração de projeto é apresentada na Figura 144. Como as tensões principais máximas nos modelos otimizados são da ordem de  $0,5 \text{ kN/cm}^2$ , elimina-se a possibilidade de garantir a resistência ao esforço cortante sem armaduras longitudinais.

**Figura 144** – Resistência à tração de projeto ( $f_{ftud}$ ) do CRFA

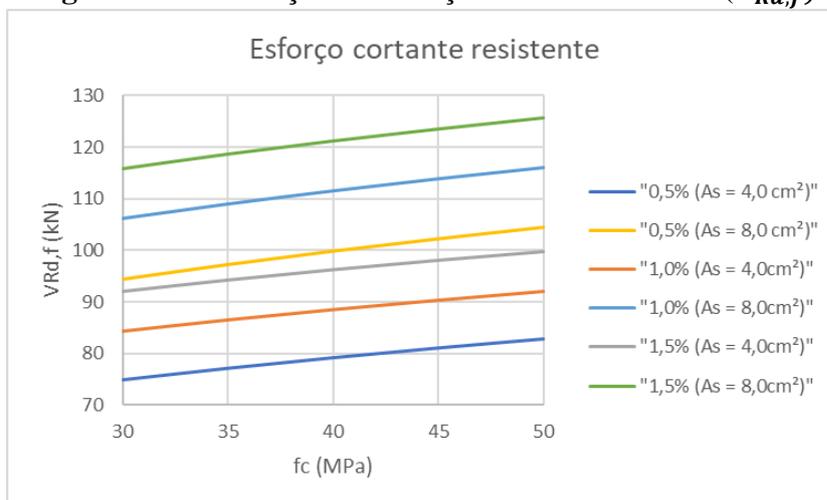


Fonte: Autor, 2024.

Para o cálculo do esforço cortante resistente com fibras e armadura longitudinal, utiliza-se as recomendações de Almeida, Parsekian e Carnio (2022). Para fins comparativos (Figura 145), mesmo com a maior área de aço e o maior teor de fibras na seção crítica, a viga romperá

por cisalhamento, pois para todas as situações têm-se que  $VRd,f < V_{Sd}$ . Com isto, deve-se calcular a quantidade de armadura transversal necessária para a garantia da segurança.

**Figura 145** – Variação do esforço cortante resistente ( $V_{Rd,f}$ )



Fonte: Autor, 2024.

Santos (2023) ressalta que, apesar das diversas vantagens da substituição dos estribos convencionais por fibras de aço, ainda há uma certa complexidade na definição de modelos analíticos que consigam capturar o efeito conjunto das fibras de aço com outros parâmetros relevantes na previsão da resistência ao cisalhamento. Por exemplo, a autora sugere que a força cortante máxima  $V_{max}$  é função do somatório dos mecanismos resistentes atuando na fissura diagonal crítica: zona comprimida não fissurada ( $V_{cz}$ ), engrenamento dos agregados ( $V_{agg}$ ), efeito de pino ( $V_d$ ), tensão residual ( $V_{res}$ ) e fibras de aço ( $V_f$ ). Usualmente, os três primeiros são difíceis de estimar e são agrupados e denominados por resistência do concreto ( $V_c$ ).

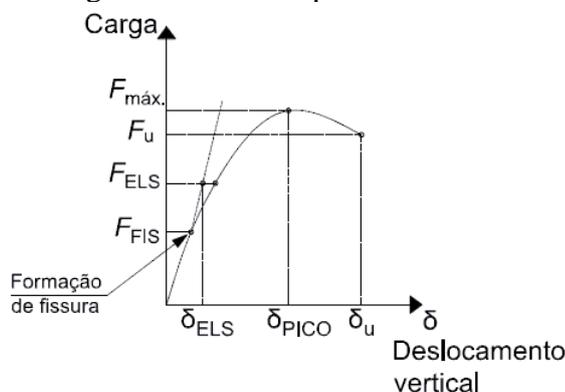
Conclui-se que, para esta configuração de elemento estrutural, são necessárias as armaduras longitudinais e transversais para que a capacidade resistente aos esforços tangenciais seja atingida. A utilização das fibras auxilia no comportamento geral do elemento, todavia, não é suficiente para evitar a ruptura por esforço cortante.

### 5.3.2.3 Deflexão e limitação de tensão

Em todas as estruturas de CRF sem nenhuma armadura convencional, uma das seguintes condições deve ser atendida  $\delta_u \leq 20\delta_{ELS}$  ou  $\delta_{PICO} \geq 5\delta_{ELS}$ . Em que  $\delta_u$  é deslocamento último correspondente à força última ( $F_u$ );  $\delta_{PICO}$  é o deslocamento de pico correspondente à carga

máxima ( $F_{m\acute{a}x.}$ );  $\delta_{ELS}$  é o deslocamento de estado-limite de serviço de força obtida pela realização da análise linear com hipótese de não fissuração na condição inicial.

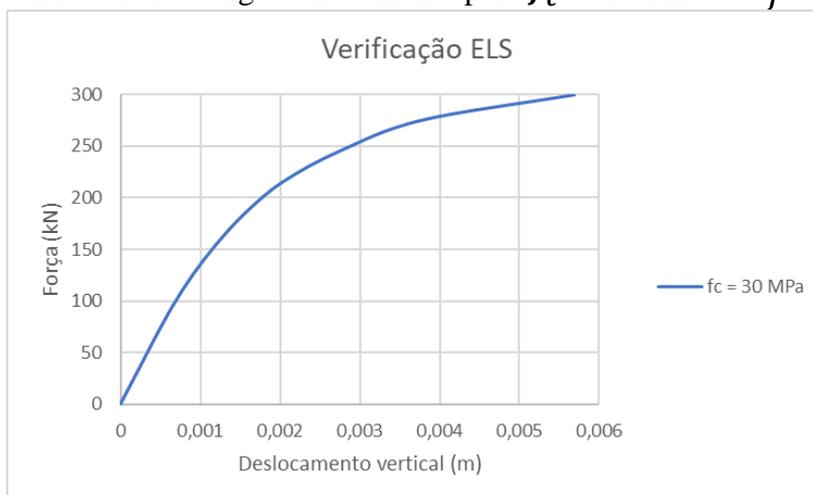
**Figura 146** – Curva carga-deslocamento para elementos de CRF sem armadura



Fonte: ABNT, 2021a.

Para o modelo  $f_c = 30 \text{ MPa}$  e  $v_f = 0,5\%$  (Figura 147), visualiza-se os seguintes parâmetros:  $F_{FIS} = 65,34 \text{ kN}$ ,  $\delta_{ELS} = 0,65 \text{ mm}$ ,  $F_{ELS} = 95,34 \text{ kN}$ ,  $\delta_u = \delta_{PICO} = 5,69 \text{ mm}$ . Como  $5,69 \text{ mm} \leq 20 \cdot 0,65 = 13 \text{ mm}$  e  $5,69 \text{ mm} \geq 5 \cdot 0,65 = 3,25 \text{ mm}$ , têm-se o atendimento simultâneo para as duas condições prescritas pela NBR 16935 (ABNT, 2021a).

**Figura 147** – Curva carga-deslocamento para  $f_c = 30 \text{ MPa}$  e  $v_f = 0,5\%$

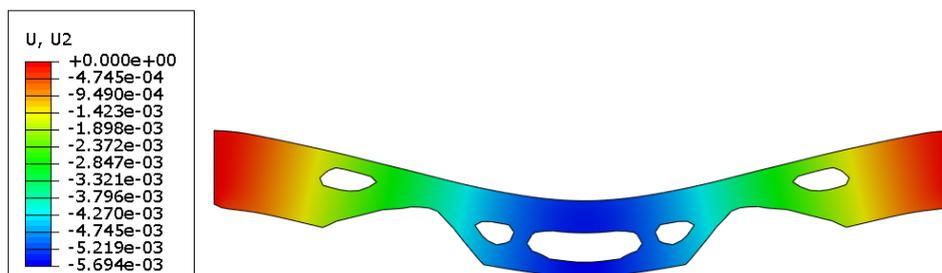


Fonte: Autor, 2024.

De acordo com a NBR 6118 (ABNT, 2023), a flecha limite ( $L/250$ ) é de 20mm. Com isto, pode-se verificar as condições de deslocamentos excessivos. Mesmo para o pior caso (Figura 148), têm-se a garantia de que nenhum modelo (Tabela 25) violará a condição de flecha máxima. Como os modelos analisados não consideram a presença de armaduras, têm-se que os

deslocamentos obtidos são mais conservadores do que aqueles que seriam obtidos com a hipótese da presença das barras longitudinais, auxiliando o comportamento em serviço.

**Figura 148** – Deslocamento vertical em metros ( $f_{cm} = 30 \text{ MPa}$  e  $v_f = 0,5\%$ )



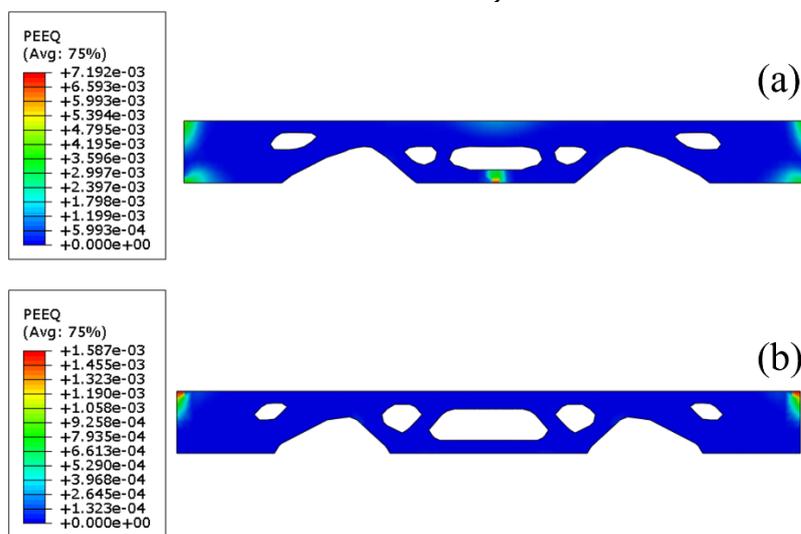
Fonte: Autor, 2024.

**Tabela 25** – Deslocamento vertical máximo nos modelos otimizados

Deslocamentos máximos (mm)			
$f_{cm}$ (MPa)	$v_f = 0,5\%$	$v_f = 1,0\%$	$v_f = 1,5\%$
30	5,69	3,87	3,33
35	3,47	3,10	2,84
40	2,92	2,65	2,47
45	2,54	2,30	2,16
50	2,19	2,00	1,98

Fonte: Autor, 2024.

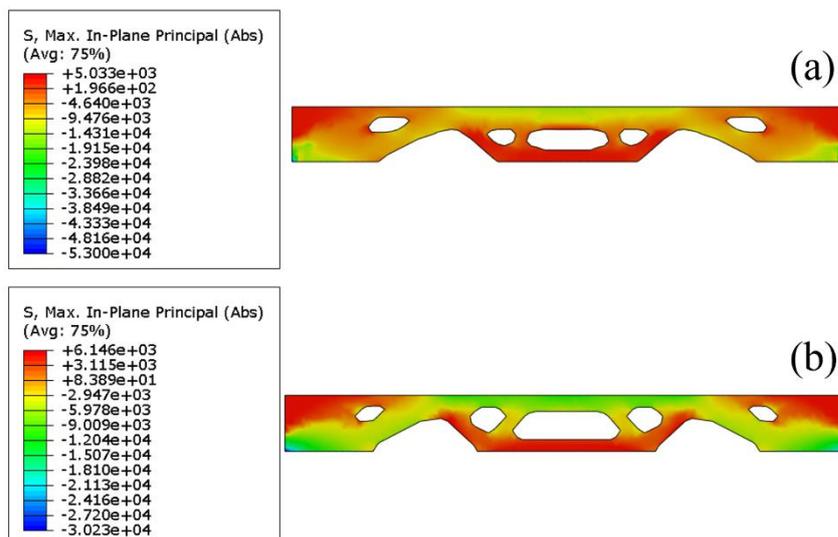
O panorama das deformações plásticas pode ser descrito por meio da Figura 149. Percebe-se que para um concreto de menor resistência, as maiores deformações surgem na região central. Por outro lado, com um ganho de resistência, a região dos apoios tende a localizar as maiores deformações. Em todos os casos, garante-se que as deformações máximas são menores que a deformação última do CRF de  $10\%_0$ .

**Figura 149** – Deformações plásticas(a)  $f_{cm} = 30 \text{ MPa}$  e  $v_f = 0,5\%$ (b)  $f_{cm} = 50 \text{ MPa}$  e  $v_f = 1,5\%$ 

Fonte: Autor, 2024.

Para os elementos de CRFA sem armadura convencional, considerando o comportamento de endurecimento pós-fissuração, deve-se verificar as tensões de tração pela imposição da limitação  $\sigma_1 \leq 0,6 \cdot f_{Ftuk}$ . Para o aumento do teor de fibras e da resistência da matriz, têm-se o conseqüente aumento das tensões principais (Figura 150).

Conforme verificado na seção 5.3.2.1, sem a presença da armadura passiva haverá ruptura por flexão. Desta maneira, também se cumpre o esperado para a limitação de tensão em serviço para o CRFA. As tensões principais máximas, da ordem de 5 a 6 MPa, são superiores ao valor de  $0,6 \cdot f_{Ftuk} = 0,6 \cdot 1,64 = 0,98 \text{ MPa}$ , para o concreto de  $f_c = 30 \text{ MPa}$  e teor de fibras  $v_f = 0,5\%$ .

**Figura 150** – Tensões principais máximas em kPa(a)  $f_{cm} = 30 \text{ MPa}$  e  $v_f = 0,5\%$ (b)  $f_{cm} = 50 \text{ MPa}$  e  $v_f = 1,5\%$ 

Fonte: Autor, 2024.

Com isto, conclui-se que a presença das armaduras longitudinais e transversais são indispensáveis para o caso em análise. Apesar de ter sido realizada uma análise estrutural com o material homogeneizado, a incorporação das barras de aço no modelo pode trazer uma resposta mais realista, colaborando para o entendimento das peças fletidas em CRFA.

No âmbito dos concretos convencionais, analisou-se peças com  $f_{cm} \leq 50 \text{ MPa}$ , o que se tornou uma limitação para as aplicações investigadas. Em virtude do modelo de resistência adotado, também foi limitado o teor de fibras até 5%. Na prática das construções usuais, pode-se considerar este teor até 1%. Entretanto, conforme as equações e modelos descritos, as fibras auxiliam não somente no comportamento pós-fissuração, propiciando um ganho de resistência para os elementos correntes de concreto armado.

Para que as verificações de ELU e ELS sejam cumpridas plenamente, recomenda-se que algumas soluções sejam adotadas, tais como: aumentar a altura da seção, reduzir o carregamento aplicado, aumentar as resistências residuais do concreto, disponibilidade de arranjo (*layout*) de armaduras longitudinais e transversais no modelo otimizado.

Apesar da otimização topológica ser uma ferramenta de apoio ao processo de decisão em projetos de concreto reforçado com fibras de aço, é recomendado que as verificações normativas sejam efetuadas, pois o modelo numérico deve refletir a realidade. Como se constata, apesar de garantir a ductilidade, faz-se necessária a validação do projeto.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho investigou a problemática da utilização da otimização topológica para o projeto de vigas de concreto reforçado com fibras de aço. Diante disto, uma metodologia de análise foi desenvolvida, objetivando o entendimento do material estudado e da ferramenta matemática utilizada. Buscou-se a utilização de modelos de previsão de resistência baseados em homogeneização, associado a critérios empíricos, para a validação da aplicação sugerida.

Com a revisão bibliográfica, iniciou-se a análise da mecânica do concreto reforçado com fibras de aço. Conclui-se que o comportamento deste compósito pode ser influenciado por diversos parâmetros, tais como: a microestrutura da matriz de concreto; forma e geometria da fibra; teor de fibras; distribuição das fibras e interface matriz-fibra, o que justifica uma variabilidade na resposta estrutural deste tipo de material.

Para a definição dos modelos constitutivos, em função da dosagem do CRFA, foram utilizados modelos de homogeneização para o comportamento elástico linear (Mori-Tanaka) e o comportamento elastoplástico, com ênfase no critério de resistência de Drucker-Prager (proposta de Dutra). Destaca-se que publicações anteriores validaram resultados experimentais e numéricos, ratificando a justificativa dos modelos adotados. Apesar das limitações encontradas nos modelos, tais como a orientação e distribuição das fibras, verificou-se uma boa aderência de resultados para a realidade de concretos convencionais.

Com a utilização das fibras como material de reforço, garante-se uma maior ductilidade para os elementos de concreto, entretanto, ressalta-se que as técnicas empregadas, em geral, não garantem uma direção preferencial de reforço, o que pode fragilizar a peça em determinados pontos localizados.

Aliado ao desafio de caracterização do CRFA, foi realizada uma revisão sobre os métodos de otimização topológica, em especial, para as estruturas de concreto. Previamente utilizado apenas como método conceitual, notou-se que ao longo dos anos há uma intensificação de pesquisas com o objetivo de aliar os fundamentos matemáticos para as práticas de projeto. Com isto, têm-se uma maximização da eficiência estrutural e um melhor entendimento do comportamento mecânico em diversas áreas da engenharia, a exemplo dos problemas multifísicos.

No campo da otimização topológica de materiais não lineares, com o uso do ABAQUS®, buscou-se esclarecer os principais pontos nos aspectos teóricos e numéricos para o procedimento da distribuição da densidade em um domínio de projeto. Com o auxílio desta ferramenta, investigou-se o comportamento dos modelos otimizados frente ao modelo

elastoplástico de Drucker-Prager, contribuindo para a disseminação do uso de modelos não lineares, que trazem respostas mais realistas para diversos tipos de materiais. Como o CRFA tem sua utilização justificada para um maior controle de fissuração, entende-se que o modelo elastoplástico é o mais coerente para simulação deste material, desde que o comportamento *tension hardening* seja apresentado, o que acontece nos volumes usuais para uso em edificações.

Em conjunto com as variáveis de otimização (tamanho da malha, raio do filtro, critérios de convergência etc.) definidas pelo método SIMP, verificou-se que a dosagem do CRFA influencia na definição de diversos parâmetros de resistência do material, que por sua vez provocam mudanças na topologia encontrada. Cada caso é único e deve ser definido com cautela para as análises posteriores. Diferentemente do que se encontra na literatura, em que muitos exemplos são puramente numéricos, a proposição da união de aspectos de projeto para um material específico é um ponto de inovação deste trabalho.

As análises realizadas não se preocuparam apenas com aspectos computacionais, visto que a realidade do CRFA é de um material complexo. Em virtude da necessidade de diversos parâmetros para a obtenção dos modelos otimizados, buscou-se restringi-los para as análises em dois estudos de caso: variação da altura e variação dos parâmetros de resistência. Além disto, identifica-se que a metodologia proposta foi baseada em carregamento prescrito, enquanto na literatura a aplicação de deslocamentos prescritos é mais comum para o procedimento de otimização de material não linear.

Ademais, as opções para extração da superfície otimizada devem ser avaliadas com atenção, visto que a resposta do modelo estará diretamente ligada com as escolhas realizadas na etapa de pós-processamento. Em se tratando dos elementos avaliados, buscou-se a manutenção dos parâmetros para todas as superfícies extraídas, de modo a garantir com que houvesse uma menor variabilidade nas respostas encontradas.

Na abordagem numérica utilizada, os dados do material homogeneizado foram utilizados com o suporte de equações empíricas de previsão de resistência do compósito. No entanto, ensaios de laboratório devem ser adotados para a caracterização mais realista do problema e para evitar grandes variações estatísticas na compreensão do modelo em elementos finitos. Objetivou-se com estas análises ter diferentes materiais (por exemplo: classes 3e, 5e, 7e) classificados pelas referências normativas, estabelecendo uma relação de causalidade da evolução da resistência com o comportamento perante as solicitações.

As respostas numéricas encontradas por meio da abordagem apresentada podem auxiliar os projetistas no processo de decisão para soluções otimizadas, visto que a distribuição de material é encontrada por um critério matemático rigoroso, possibilitando uma redução de

tempo em relação a testes físicos. Na análise específica para o CRFA, as propostas de superfícies otimizadas podem servir como um indicativo de regiões preferenciais de distribuição das fibras.

No âmbito das vigas, verificou-se que estes elementos fletidos, geralmente, possuem parte das armaduras convencionais substituídas por fibras. Buscou-se por meio da otimização topológica uma geometria equivalente de um material homogeneizado, sem as barras de aço incorporadas. Entretanto, verificou-se no estudo de caso (para concretos com  $f_c \leq 50 \text{ MPa}$ ) que, as seções analisadas somente com fibras, falharam por flexão e cisalhamento. Enfatiza-se que há espaço de pesquisa para concretos de ultra alto desempenho, os quais comumente já utilizam quantidade mínima de armadura.

Para as aplicações usuais de edifícios, em que a relação altura/vão é em torno de 1/10, as barras de aço incorporadas ao concreto garantem a ruptura dúctil. No entanto, a utilização apenas das fibras não se mostrou viável para a substituição total das armaduras. Isso justifica porque o CRFA é mais aplicado em outros segmentos, sendo comumente utilizado em elementos de placa, tais como as práticas em pavimentos industriais, concreto projetados para revestimento de túneis e elementos pré-moldados. Para as vigas, de acordo com os critérios de previsão de Estado Limite Último, o reforço tradicional de armadura passiva e/ou ativa ainda deve ser utilizado para a garantia da segurança.

A verificação da capacidade de cargas das peças de acordo com as referências normativas possibilita o entendimento da segurança das peças analisadas. Na maior parte dos casos, percebe-se que os dados obtidos pelos modelos otimizados podem ser essenciais para a contribuição do projeto de elementos de concreto reforçado com fibras. Com o surgimento de diversos *softwares* de análise integrada e a difusão de conhecimento do CRFA, pode-se direcionar o avanço para aplicações mais robustas, tais como a impressão 3D.

Os resultados demonstraram que a adição de fibras de aço pode aumentar a capacidade resistente, ductilidade e diminuição da formação de fissuras. No entanto, em função do teor de fibras, os modelos constitutivos devem ser avaliados com cautela para a caracterização correta dos elementos analisados.

Os diferentes métodos de avaliação de projetos, propostos pelas referências normativas, podem conduzir a resultados mais realistas ou mais conservadores. Pode-se também verificar que os esforços resistentes à flexão e ao cisalhamento tendem a aumentar de acordo com a quantidade de fibras distribuídas na matriz. O teor de fibras é um parâmetro essencial para que se atinja resultados de alta performance. Todavia, deve-se ter um cuidado adicional no estado fresco.

O trabalho não esgota o tema, visto que há uma possibilidade de investigações mais aprofundadas e experimentações práticas. A implementação destes conceitos em projetos reais pode contribuir para a evolução das práticas de engenharia estrutural.

## 6.1 Contribuições da tese

O trabalho possibilitou uma melhor compreensão das ferramentas de análise numérica em elementos finitos para as aplicações de CRFA, em especial o referencial teórico dedicado à otimização topológica de materiais não lineares. A inquietação da pesquisa desse trabalho foi motivada por meio da leitura do trabalho de Zhao *et al.* (2020), e então se pensou sobre a possibilidade de modelos elastoplásticos para concretos no procedimento de otimização topológica.

Aliado a este anseio de estudar o comportamento elastoplástico e sua influência nos modelos de otimização topológica, buscou-se na literatura as publicações associadas ao concreto reforçado com fibras de aço. Este material, que está sendo mais difundido nos últimos anos, teve como destaque a publicação de diversas normas técnicas brasileiras no ano de 2021.

No âmbito da Universidade Federal de Alagoas (UFAL), este trabalho segue a linha de publicações relacionadas à otimização topológica. Nos últimos anos, este tema tem se tornado pauta em trabalhos do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PPGEC), demonstrando a variedade de aplicações e desenvolvimento de possibilidades associadas aos conceitos da melhor distribuição de material.

Com a micromecânica de campos médios, já se tem a consolidação da previsão de propriedades elásticas efetivas para diversos compósitos. Com o CRFA não foi diferente, demonstrando-se que o modelo de Mori-Tanaka é útil para a destacar a consideração das fibras no comportamento elástico linear do concreto.

Para o estudo do comportamento elastoplástico, a abordagem utilizada para a obtenção das propriedades de resistência, em geral, superestimou os resultados de compressão uniaxial e subestimou os valores de compressão biaxial. Para a resistência à tração uniaxial, pelo fato das fibras se encontrarem concentradas de acordo com as direções principais, também se encontrou uma superestimativa em relação ao caso com fibras curtas distribuídas aleatoriamente.

Todo modelo numérico deve ser validado experimentalmente. Por mais que as variáveis sejam estudadas em ambiente controlado, toda representação numérica, em se tratando de concreto, está sujeita a oscilações. Em razão da limitação do modelo de Dutra (2012), deve-se

ter cautela com os parâmetros de entrada nos *softwares*, pois eles irão conduzir a parâmetros de saída que serão coerentes com a proposta adotada.

No meio acadêmico e profissional, destaca-se o uso do ABAQUS® como uma das principais plataformas integradas de análise estrutural e de otimização topológica. Este *software* auxilia na simulação e previsão do comportamento estrutural em diversos elementos. Para as aplicações em projetos, verifica-se que o engenheiro projetista deve ter domínio na base teórica e prática, uma vez que por se tratar de um *software* de análise, não haverá normas técnicas para dimensionamento e verificações de estruturas de concreto.

## 6.2 Sugestões de trabalhos futuros

As seguintes propostas são apresentadas para a continuidade de pesquisas:

- Analisar a metodologia proposta com outros modelos constitutivos para diferentes tipos de fibra (ex.: vidro, polimérica, basalto etc.).
- Analisar as aplicações para vigas de concreto de alta resistência ( $f_c \geq 50$  MPa) em conjunto com altos teores de fibra ( $v_f > 2\%$ ).
- Comparar os resultados apresentados com outros métodos de homogeneização que considerem diferentes critérios de resistência para a matriz.
- Avaliar a calibração de dados de diferentes critérios de resistência para o material homogeneizado (William-Warnke, Ottosen etc.).
- Considerar o comportamento ortotrópico do CRFA na modelagem numérica.
- Aplicar os conceitos da mecânica da fratura coesiva para a avaliação numérica dos elementos fletidos.
- Empregar modelos constitutivos de dano contínuo, a exemplo do *Concrete Damaged Plasticity* (CDP) no estudo da otimização topológica.
- Considerar as condições de escorregamento das fibras no critério de resistência da interface.
- Aplicar diferentes métodos numéricos para a obtenção da topologia otimizada, a exemplo da Teoria dos Volumes Finitos.
- Validar experimentalmente os modelos otimizados por meio da impressão 3D.
- Propor um método de direcionamento (alinhamento) das fibras para a impressão 3D e localização da força resistente mobilizada pelas fibras.

## REFERÊNCIAS

AJMAL, M.; AHMED, D.; BALUCH, M. H.; RAHMAN, M. K.; AYADAT, T. Consistent choice for cohesion and internal friction for concrete constitutive models. **Innovative Infrastructure Solutions**, v. 8, n. 1, p. 43, 2023.

ALMEIDA, R. L. J. **Comportamento mecânico do concreto de alta resistência reforçado com fibras**. Tese de doutorado. Programa de pós-graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de São Carlos. 2023.

ALMEIDA, R. L. J.; PARSEKIAN, G.; CARNIO, M. A. Concreto reforçado com fibras: projeto de viga em ELU. **CONCRETO & Construções**. v. 105, p. 90-97, 2022.

ARORA, J. S. **Introduction to optimum design**. 3. ed. Alemanha: Elsevier, 2012.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto. Rio de Janeiro, 2023.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 15530**: Fibras de aço para concreto – Requisitos e métodos de ensaio. Rio de Janeiro, 2019.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 16935**: Projeto de estruturas de concreto reforçado com fibras – Procedimento. Rio de Janeiro, 2021a.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 16938**: Concreto reforçado com fibras – Controle de qualidade. Rio de Janeiro, 2021b.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 16939**: Concreto reforçado com fibras – Determinação das resistências à fissuração e residuais à tração por duplo pontocionamento – Método de ensaio. Rio de Janeiro, 2021c.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 16940**: Concreto reforçado com fibras – Determinação das resistências à tração na flexão (limite de proporcionalidade e resistências residuais) – Método de ensaio. Rio de Janeiro, 2021d.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 16941**: Fibras de vidro álcali-resistentes (AR) para concreto e argamassa – Requisitos e métodos de ensaio. Rio de Janeiro, 2021e.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 16942**: Fibras poliméricas para concreto – Requisitos e métodos de ensaio. Rio de Janeiro, 2021f.

BAKHTIARY, N.; ALLINGER, P.; FRIEDRICH, M.; MULTFINGER, F.; SAUTER, J. A new approach for size, shape and topology optimization. In: SAE International Congress and Exposition, 1996, Detroit. **Proceedings...** Michigan, USA, 1996.

BARROS, A. B. **Avaliação do comportamento de vigas de concreto auto-adensável reforçado com fibras de aço**. Dissertação de mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Alagoas. Alagoas, Brasil. 2009.

BENDSØE, M. P.; GUEDES, J. M.; PLAXTON, S.; TAYLOR, J. E. Optimization of structure and material properties for solids composed of softening material. **International Journal of Solids and Structures**, v. 33, n. 12, p. 1799-1813, 1996.

BENDSØE, M. P.; KIKUCHI, N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**. v. 71, n. 2, p. 197-224, 1988.

BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. **Topology Optimization: Theory, Methods and Applications**. Alemanha: Springer, 2003.

BENTUR, A.; MINDESS, S. **Fibre Reinforced Cementitious Composites**. 2. ed. Reino Unido: Taylor and Francis, 2007.

BORTOLUZZI, L. I. **Estudo sobre aplicação de otimização topológica ao problema de análise limite para obtenção de componentes estruturais**. Dissertação de mestrado. Universidade Federal de Santa Catarina. 2020.

BUHL, T.; PEDERSEN, C. B. W.; SIGMUND, O. Stiffness design of geometrically nonlinear structures using topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 19, p. 93-104, 2000.

BUTTIGNOL, T. E. T.; FERNANDES, J. F.; BITTENCOURT, T. N.; SOUSA, J. L. A. O. Verificação de vigas de concreto armado reforçadas com fibras de aço no estado limite último. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, v. 11, p. 997-1024, 2018.

CEDRIM, M. B. M. **Aplicação do método das bielas para o dimensionamento de consolos curtos com suporte da otimização topológica**. Dissertação de mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Alagoas. Alagoas, Brasil. 2019.

CORREIA, V. C.; BARBOZA, A. S. R. Análise numérica de vigas de CRFA com base na ABNT NBR 16935 (2021). **Concreto & Construções**. v. 111, p. 61-67, 2023.

CHEN, Q.; ZHU, H.; YAN, Z.; JU, J. W.; JIANG, Z.; WANG, Y. A multiphase micromechanical model for hybrid fiber reinforced concrete considering the aggregate and ITZ effects. **Construction and Building Materials**. v. 114, p. 839-850, 2016.

CHEN, W. F. **Plasticity in reinforced concrete**. Estados Unidos: J. Ross Publishing, 2007.

CHI, H.; RAMOS, D. L.; RAMOS JR., A. S.; PAULINO, G. H. On structural topology optimization considering material nonlinearity: Plane strain versus plane stress solutions. **Advances in Engineering Software**. v. 131, p. 217-231, 2019.

CHRISTENSEN, P. W.; KLARBRING, A. **An introduction to structural optimization**. Alemanha: Springer, 2009.

DA, D. **Topology Optimization Design of Heterogeneous Materials and Structures**. Reino Unido: Wiley, 2019.

DEMEKE, A.; TEGOS, I. A. Steel fiber reinforced concrete in biaxial stress tension-compression conditions. **ACI Materials Journal**, v. 91, n. 5, p. 579-584, 1994.

DRUCKER, D. C.; PRAGER, W. Soil mechanics and plastic analysis for limit design. **Journal of Applied Mathematics**, v. 10, n. 2, p. 157-165, 1952.

DUTRA, V. P.; MAGHOUS, S.; CAMPOS FILHO, A.; PACHECO, A. R. A micromechanical approach to elastic and viscoelastic properties of fiber reinforced concrete. **Cement and Concrete Research**. v. 40, n. 3, p. 460-472, 2010.

DUTRA, V. F. P.; MAGHOUS, S.; CAMPOS FILHO, A. A homogenization approach to macroscopic strength criterion of steel fiber reinforced concrete. **Cement and Concrete Research**. v. 44, p. 34-45, 2013.

DUTRA, V. F. P. **Um modelo constitutivo para o concreto reforçado com fibras de aço via Teoria da Homogeneização**. Tese de doutorado. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. 2012.

ESHELBY, J. D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems. **Proceedings of the royal society of London. Series A. Mathematical and physical sciences**. v. 241, n. 1226, p. 376-396, 1957.

FARIA, T. M. **Estudo numérico em concreto reforçado com fibras de aço utilizando o método dos elementos finitos e modelos constitutivos**. Dissertação de mestrado. Universidade de Brasília. 2017.

FIGUEIREDO, A. D. **Concreto com fibras de aço**. Boletim Técnico (BT/PCC/260). Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo. 2000.

FIGUEIREDO, A. D. **Concreto reforçado com fibras**. Tese de livre-docência. Universidade de São Paulo. 2011.

GAGANELIS, G.; MARK, P.; FORMAN, P. **Optimization Aided Design: Reinforced Concrete**. Alemanha: John Wiley & Sons, 2022.

GAYNOR, A. T.; GUEST, J. K.; MOEN, C. D. Reinforced concrete force visualization and design using bilinear truss-continuum topology optimization. **Journal of Structural Engineering**. v. 139, n. 4, p. 607-618, 2013.

HUANG, W. **A comparative study on approaches to numerical modelling of fiber-reinforced concrete**. Tesi di laurea magistrale in Civil Engineering. Politecnico di Milano. 2022.

INTERNATIONAL FEDERATION FOR STRUCTURAL CONCRETE. **fib Model Code for Concrete Structures 2010**. Wiley, 2013.

JAISHANKAR, P.; MURALI, G.; SALAIMANIMAGUDAM, M. P.; AMRAN, Y. H. M.; FEDIUK, R.; KARTHIKEYAN, K. Study of topology optimized hammerhead pier beam made with novel preplaced aggregate fibrous concrete. **Periodica Polytechnica Civil Engineering**. v. 65, n. 1, p. 287-298, 2021.

JUNG, D.; GEA, H. C. Topology optimization of nonlinear structures. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 40, n. 11, p. 1417-1427, 2004.

LEE, H. A.; PARK, G. J. Topology optimization for structures with nonlinear behavior using the equivalent static loads method. **Journal of Mechanical Design**. v. 134, p. 031004, 2012.

LI, D.; LI, Z.; YIN, Y.; DU, X.; ZHANG, G. Prediction of cracking, yield and ultimate strengths based on the concrete three-phase micromechanics model. **Construction and Building Materials**. v. 193, p. 416-425, 2018.

LIM, D. H.; NAWY, E. G. Behaviour of plain and steel-fibre-reinforced high-strength concrete under uniaxial and biaxial compression. **Magazine of Concrete Research**. v. 57, n. 10, p. 603-610, 2005.

LIMA, I. E. P. **Estudo dos aspectos de dimensionamento de elementos estruturais reforçados com fibras com base na teoria de flexão em vigas**. Dissertação de mestrado. Universidade Federal de Alagoas. 2020.

LIU, D.; ZHANG, Z.; ZHANG, X.; CHEN, Z. 3D printing concrete structures: State of the art, challenges, and opportunities. **Construction and Building Materials**. v. 405, p. 133364, 2023.

LOTFI, R. **Topology optimization under nonlinear mechanics**. Dissertation. John Hopkins University. 2013.

MARQUES, S. P. C. **Micromecânica de materiais heterogêneos: Notas de aula**. Universidade Federal de Alagoas. 2020.

MATOS, C. C. D. **Análise numérica de vigas em concreto reforçado com fibras de aço via método dos elementos finitos**. Dissertação de mestrado. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. 2021.

MEHTA, P. K; MONTEIRO, P. J. M. **Concreto: microestrutura, propriedades e materiais**. São Paulo: Ed. IBRACON, 2014.

MORELLI, J. A. **Evaluation of Topology Optimization Filtering with Numeric Examples**. Virginia Tech, 2019.

NAAMAN, E. A. **Fiber Reinforced Cement and Concrete Composites**. Estados Unidos: Techno Press 3000, 2018.

NEMAT-NASSER, S.; HORI, M. **Micromechanics: Overall properties of heterogeneous materials**. Japão: Elsevier, 1993.

NGUYEN, N. T.; BUI, T. T.; BUI, Q. B. Fiber reinforced concrete for slabs without steel rebar reinforcement: Assessing the feasibility for 3D-printed individual houses. **Case Studies in Construction Materials**. v. 16, p. e00950, 2022.

OLIVEIRA, L. F. **Formulação híbrida para a obtenção dos caminhos de força em estruturas de concreto armado utilizando otimização de topologia e elementos finitos poligonais**. Dissertação de mestrado. Universidade Federal de Goiás. 2021.

OLIVEIRA, D. B.; PENNA, S. S.; PITANGUEIRA, R. L. S. Elastoplastic constitutive modeling for concrete: a theoretical and computational approach. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**. v. 13, p. 171-182, 2020.

PANTOJA, J. C. **Geração automática via otimização topológica e avaliação de segurança de modelos de bielas e tirantes**. Tese de doutorado. Programa de pós-graduação em engenharia civil. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, Brasil. 2012.

PERES, M. V. N. N. **Aparatos de Baixo Custo para Ensaio Biaxiais em Concretos Reforçados com Fibras de Aço**. Dissertação de mestrado. Programa de pós-graduação em engenharia civil. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, Brasil. 2006.

PORTO, E. C. B. **Método da Homogeneização Aplicado À Otimização Estrutural Topológica**. Dissertação de mestrado. Universidade Estadual de Campinas. 2006.

PRESSMAIR, N.; XIA, Y.; WU, H.; LANGELAAR, M.; HENDRIKS, M. A.; MAJDOUBA, A.; MOGRA, M.; GRISARO, H.; AMIR, O.; KROMOSER, B. Bridging the gap between mathematical optimization and structural engineering: Design, experiments and numerical simulation of optimized concrete girders. **Structural Concrete**. v. 4, p. 5314-5330, 2023.

QU, J.; CHERKAOUI, M. **Fundamentals of micromechanics of solids**. Reino Unido: John Wiley & Sons, 2006.

QUERIN, O. M.; VICTORIA, M.; ALONSO, C.; ANSOLA, R.; MARTÍ, P. **Topology design methods for structural optimization**. Países Baixos: Elsevier, 2017.

RODRIGUES, P. V. C. **Um método híbrido de otimização topológica para estruturas de concreto armado**. Dissertação de mestrado. Universidade Federal de Sergipe. 2020.

RODRÍGUEZ, S. M. **Otimização topológica multiobjectivo de estruturas submetidas a carregamentos termo-mecânicos**. Dissertação de mestrado. Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas. São Paulo, Brasil. 2015.

ROZVANY, G. I. N. A critical review of established methods of structural topology optimization. **Structural and multidisciplinary optimization**, v. 37, n. 3, p. 217-237, 2009.

SADD, M. H. **Elasticity: Theory, Applications and Numerics**. 2a ed. Países Baixos: Elsevier, 2009.

SCHWARZ, S.; MAUTE, K.; RAMM, E. Topology and shape optimization for elastoplastic structural response. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 190, n. 15-17, p. 2135-2155, 2001.

SALAIMANIMAGUDAM, M. P.; SURIBABU, C. R.; MURALI, G.; ABID, S. R. Impact response of hammerhead pier fibrous concrete beams designed with topology optimization. **Periodica Polytechnica Civil Engineering**, v. 64, n. 4, p. 1244-1258, 2020.

SANTOS, L. C. D. **Análise do comportamento à força cortante do concreto reforçado com fibras de aço**. Tese de doutorado. Universidade Federal do Paraná. 2023.

SHARMA, M.; BISHNOI, S. Influence of properties of interfacial transition zone on elastic modulus of concrete: Evidence from micromechanical modelling. **Construction and Building Materials**, v. 246, p. 118381, 2020.

SIGMUND, O. A 99 line topology optimization code written in MatLab. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 21, n. 2, p. 120-127, 2001.

SIGMUND, O. On benchmarking and good scientific practise in topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 65, n. 11, p. 315, 2022.

SIGMUND, O.; MAUTE, K. Topology optimization approaches: A comparative review. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 48, n. 6, p. 1031-1055, 2013.

SILVA, G. C. A. **Topological optimization of structures produced through 3D printing of fiber-reinforced cementitious materials**. Dissertação de mestrado. Universidade do Minho. Portugal. 2021.

SIMONETTI, H. L. **Otimização topológica de estruturas elásticas 2D via MEC baseada em uma nova abordagem evolucionária**. Tese de doutorado. Programa de pós-graduação em engenharia civil. Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, Brasil, 2016.

SIMULIA. **Abaqus User's Manual volume 2**. 2014.

SIMULIA. **Guidelines for Optimization of Structures with Non-Linear Behavior**. 2019.

SIMULIA. **SIMULIA User Assistance**. 2022.

SINGH, H. **Steel Fiber Reinforced Concrete: Behavior, Modelling and Design**. Singapura: Springer, 2017.

SOUZA NETO, E. A.; PERIC, D.; OWEN, D. R. J. **Computational methods for plasticity: theory and applications**. Reino Unido: John Wiley & Sons, 2008.

STOIBER, N.; KROMOSER, B. Topology optimization in concrete construction: a systematic review on numerical and experimental investigations. **Structural and Multidisciplinary Optimization**. v. 64, n. 4, p. 1725-1749, 2021.

STOLPE, M.; SVANBERG, K. An alternative interpolation scheme for minimum compliance topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 22, p. 116–124, 2001.

TRINDADE, Y. T.; BITENCOURT JR, L. A. G.; MANZOLI, O. L. Design of SFRC members aided by a multiscale model: Part II–Predicting the behavior of RC-SFRC beams. **Composite Structures**, v. 241, p. 112079, 2020.

TYFLOPOULOS, E.; STEINERT, M. A comparative study of the application of different commercial software for topology optimization. **Applied Sciences**, v. 12, n. 2, p. 611, 2022.

VANTYGHM, G.; BOEL, V.; DE CORTE, W.; STEEMAN, M. Compliance, stress-based and multi-physics topology optimization for 3D-printed concrete structures. **RILEM International Conference on Concrete and Digital Fabrication**. Springer, Cham, pp. 323-332, 2018.

VANTYGHM, G.; DE CORTE, W.; SHAKOUR, E.; AMIR, O. 3D printing of a post-tensioned concrete girder designed by topology optimization. **Automation in Construction**. v. 112, p. 103084, 2020.

VASILIEV, V. V.; MOROZOV, E. V. **Advanced Mechanics of Composite Materials and Structures**. Países Baixos: Elsevier, 2018.

VENKATESHWARAN, A.; TAN, K. H.; LI, Y. Residual flexural strengths of steel fiber reinforced concrete with multiple hooked-end fibers. **Structural Concrete**, v. 19, n. 2, p. 352-365, 2018.

WANG, C.; ZHAO, Z.; ZHOU, M.; SIGMUND, O.; ZHANG, X. S. A comprehensive review of educational articles on structural and multidisciplinary optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**. v. 64, n. 5, p. 2827-2880, 2021.

WEN, G.; LIU, J.; CHEN, Z.; WEI, P.; LONG, K.; WANG, H.; RONG, J.; XIE, Y. A survey of nonlinear continuum topology optimization methods. **Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics**. v. 54, n. 9, p. 1-17, 2022.

WU, J.; SIGMUND, O.; GROEN, J. P. Topology optimization of multi-scale structures: a review. **Structural and Multidisciplinary Optimization**. v. 63, p. 1455-1480, 2021.

XIA, L. **Multiscale structural topology optimization**. Reino Unido: Elsevier, 2016.

XIA, L.; FRITZEN, F.; BREITKOPF, P. Evolutionary topology optimization of elastoplastic structures. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 55, p. 569-581, 2017.

YOON, G. H.; KIM, Y. Y. Topology optimization of material-nonlinear continuum structures by the element connectivity parameterization. **International journal for numerical methods in engineering**, v. 69, n. 10, p. 2196-2218, 2006.

YU, M. H. **Generalized plasticity**. Alemanha: Springer Science & Business Media, 2006.

ZEGARD, T.; PAULINO, G. H. GRAND—Ground structure based topology optimization for arbitrary 2D domains using MATLAB. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 50, n. 5, p. 861-882, 2014.

ZHANG, Y.; YAN, Z. G.; JU, J. W.; ZHU, H. H.; CHEN, Q. A multi-level micromechanical model for elastic properties of hybrid fiber reinforced concrete. **Construction and Building Materials**. v. 152, p. 804-817, 2017.

ZHANG, X. S.; PAULINO, G. H.; RAMOS JR., A. S. Multimaterial topology optimization with multiple volume constraints: Combining the ZPR update with a ground-structure algorithm to select a single material per overlapping set. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**. v. 14, p. 1053-1073, 2017.

ZHAO, T. **Nonlinear topology optimization: theory and applications**. Dissertation. Georgia Institute of Technology. 2021.

ZHAO, T.; LAGES, E. N.; RAMOS JR., A. S.; PAULINO, G. H. Topology optimization considering the Drucker–Prager criterion with a surrogate nonlinear elastic constitutive model. **Structural and Multidisciplinary Optimization**. v. 62, n. 6, p. 3205-3227, 2020.