



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
CURSO EM MATEMÁTICA BACHARELADO
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

BÁRBARA AMORIM NETO

UMA INTRODUÇÃO À ANÁLISE DE FOURIER

MACEIÓ

2022

BÁRBARA AMORIM NETO

UMA INTRODUÇÃO À ANÁLISE DE FOURIER

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Colegiado do Curso de Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do título de bacharel em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Renan Dantas Medrado

MACEIÓ

2022

Catálogo na Fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

M524i

Amorim Neto, Bárbara.

Uma introdução à análise de Fourier / Bárbara Amorim Neto. - 2022.
63 f. : il.

Orientador: Renan Dantas Medrado.

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática :
Bacharelado) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática.
Maceió, 2022.

Bibliografia: f. 63.

1. Fourier, Análise de. 2. Teoria das medidas. 3. Interpolação. I. Título.

CDU: 517.518.5

A minha mãe, Quitéria, e aos meus irmãos, Salomé e Rodolfo.

AGRADECIMENTOS

Quero começar agradecendo ao meu orientador, Professor Renan Medrado, por todas as horas de dedicação a este trabalho, aos PIBICs e à minha formação. Agradeço por todo apoio enquanto eu tive dificuldades, por toda paciência com os percalços no caminho e por cada conversa descontraída ou puxões de orelha.

Agradeço a minha mãe, Quitéria, que quanto a vida me ensinou o que de melhor sei. Ela que é meu maior exemplo de coragem e nunca mediu esforços por mim.

Agradeço ao meu irmão, Rodolfo, por todo incentivo de sempre, desde lá, nos meus quatro anos, quando aprendi a ler.

Agradeço a minha irmã, Salomé, por todos os momentos de descontração entre um estudo e outro, principalmente durante a pandemia.

Agradeço ao meu irmão, Sidney, ao qual a matemática me trouxe, por sempre estar comigo, tornando essa caminhada mais leve, e por sempre acreditar tanto em mim.

Agradeço a minha dupla de estudo, Daniela, por todos os momentos, risadas e todas discussões matemáticas.

Agradeço ao meu namorado, Rayan, por ser meu apoio e refúgio. E, além disso, por toda a companhia nas madrugadas enquanto eu digitava esse trabalho, principalmente nesses últimos dias.

Agradeço aos bons amigos que a matemática me trouxe: Max, Gleydson, Jandir e Adson. Em especial o Gustavo, que me ensinou a digitar em LaTeX e inclusive me ajudou a corrigir esse trabalho.

Agradeço a Tia Marileide por sempre fazer os meus dias mais descontraídos e a Karen por sempre ser tão atenciosa e facilitar a minha vida em meio às burocracias.

Agradeço aos meus padrinhos, Mika e Rai, por sempre me motivarem tanto e por todo amor para comigo.

Agradeço à minha tia, Vânia, e ao meu tio, Luís, por me acolherem com tanto amor no seu lar.

Agradeço aos meus primos, Anderson e Vitor, às minhas tias, Cícera, Penha e Vera e também aos meu tios, Geraldo e Edson, por sempre torcerem tanto por mim.

De modo geral, agradeço a todos os professores que contribuíram para a minha formação.

Por fim, quero deixar um agradecimento especial para as minhas avós, Carmelita e Socorro, por serem as minhas maiores inspirações. Mulheres fortes que, em meio a tantas dificuldades, sempre se mantiveram firmes. E ao meu pai que, em meio a tudo, sempre me incentivou.

Saibam que vocês foram essenciais para que eu chegasse até aqui.

Quem acredita sempre alcança.

(Renato Russo)

RESUMO

No presente trabalho, faremos um estudo dos conceitos fundamentais e introdutórios para o estudo da Análise de Fourier. Estudamos os aspectos elementares dos espaços L^p e L^p fraco e desenvolvemos ferramentas necessárias para o estudo da Análise de Fourier, como por exemplo a aproximação da identidade e a convolução. Para ser mais preciso, o principal objetivo é a apresentação da definição de transformada de Fourier para funções em L^1 , em seguida usamos argumentos de aproximação para definir a transformada de Fourier em L^2 e por fim usamos o teorema de Riesz-Thorin para definir a transformada de Fourier de uma função em L^p com $p \in [1, 2]$.

Palavras-chave: Análise de Fourier, Espaços L^p , Interpolação.

ABSTRACT

This work is dedicated to study basic tools for Fourier Analysis. We studied the elementary aspects of the L^p and weak L^p spaces and we develop necessary tools for the study of Fourier Analysis, such as the approximation of identity and convolution. To be more precise, the aim is to state definition of Fourier transform for functions in L^1 , then we use approximation arguments to define the Fourier transform in L^2 and finally we use the theorem of Riesz-Thorin to define the Fourier transform in L^p with $p \in [1, 2]$.

Keywords: Fourier analysis, L^p spaces, Interpolation.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	CONHECIMENTOS PRELIMINARES	13
2.1	Teoria da Medida	13
2.2	Espaços Vetoriais Normados	16
3	L^p E L^p FRACO	18
3.1	Um pouco sobre os espaços L^p e L^p fraco	18
3.2	Funcionais Lineares Limitados e Definidos no Espaço L^p	21
3.3	A função distribuição	25
3.4	Convergência em Medida	30
3.5	Um primeiro vislumbre de interpolação	31
4	CONVOLUÇÃO E APROXIMAÇÕES DA IDENTIDADE	36
4.1	Grupos Topológicos	36
4.2	Convolução	37
4.3	Desigualdades Básicas da Convolução	39
4.4	Aproximação da Identidade	45
5	INTERPOLAÇÃO	49
5.1	O Teorema da Interpolação de Riesz-Thorin	49
6	A TRANSFORMADA DE FOURIER	56
6.1	A Transformada em L^1	56
6.2	A transformada de Fourier em L^2	59
6.3	A Transformada de Fourier em L^p , $1 < p < 2$	61
	REFERÊNCIAS	63

1 INTRODUÇÃO

Muitas propriedades de espaços de funções são expressas em termos da integral da potência do módulo de uma função. Por exemplo, é possível obter espaços de funções que são Banach. Por esta razão é desejável adquirir uma boa compreensão de espaços cujo o módulo a uma potência p é integrável. Esses espaços são chamados de espaços L^p , ao qual veremos algumas de suas propriedades fundamentais. A ênfase desse trabalho é a interpolação básica entre tais espaços. Muitos problemas na Análise de Fourier dizem respeito a espaços L^p e a interpolação fornece uma estrutura que, por muitas vezes, simplifica esse estudo. Embora estejamos preocupados principalmente com espaços L^p definidos em subespaços euclidianos, neste trabalho discutiremos algo mais geral, espaços L^p definidos em espaços de medidas arbitrárias, uma vez que esses configuram uma representação mais geral. Muitos resultados no texto são considerados com medidas gerais ao invés da medida de Lebesgue.

Nas seções 2.1 e 3.4 veremos uma breve revisão de teoria da medida, com algumas definições e teoremas importantes. Na seção 2.2 faremos uma breve revisão sobre operadores limitados, operadores contínuos e equivalências entre estes objetos para caracterizar o espaço dual do L^p , o qual será visto na seção 3.2. O Capítulo 3 é dedicado para o estudo de resultados básicos de espaços L^p e L^p fraco. Na seção 3.1 iremos definir uma norma para L^p . Para $0 < p < \infty$, definimos

$$\|f\|_{L^p(X,\mu)} = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}},$$

e para $p = \infty$ definimos

$$\|f\|_{L^\infty(X,\mu)} = \text{ess.sup}|f| = \inf\{B > 0 : \mu(\{|f(x)| > B\}) = 0\}.$$

E, provaremos então a famosa desigualdade de Minkowski 3.1.2 e a completude dos espaços munidos com tal norma será demonstrada no Teorema 3.1.4. Na seção 3.3 definiremos a função distribuição de uma função mensurável f , que será dada por $d_f(\alpha) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\})$. Através dessa função conseguiremos a seguinte caracterização $\|f\|_{L^p}^p = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} d_f(\alpha) d\alpha$. A função distribuição também será importante para definir alguns espaços, os quais chamaremos de espaço L^p fraco 3.3.2. Ainda neste capítulo veremos que se f pertence ao espaços L^p e L^q fracos então f pertence ao espaço L^r para todo $p < r < q$, nos mostrando assim, um fato útil para a definição de tais espaços.

No capítulo 4 veremos alguns exemplos de grupos topológicos. Para ser mais preciso, na seção

4.1 e definiremos a medida de Haar, que será fundamental para a definição de convolução (veja seção 4.2). Além disso, veremos desigualdades importantes, a saber a desigualdade de Young para espaços L^p e L^p fracos (veja Teorema 4.3.2 e Teorema 4.3.3). Além disso, ainda nesse capítulo, veremos o conceito de aproximação da identidade e a partir dessa definição conseguiremos construir sequências de funções regulares convergindo para funções em L^p (na norma L^p).

No capítulo 5 estudaremos o famoso Teorema de Interpolação de Riesz-Thorin (veja 5.1), destacamos que para a demonstração deste resultado será usado um resultado de análise complexa (lema das 3 retas 5.1.1).

Por fim, no capítulo 6, veremos a definição da transformada de Fourier na seção 6.1 para L^1 e, em 6.2 construiremos uma definição de transformada de Fourier para funções em L^2 , usando resultados de aproximações vistos nas seções anteriores. Encerraremos o capítulo com a definição da transformada de Fourier para espaços L^p , com $p \in [1, 2]$, para isso usaremos o Teorema da Interpolação de Riesz Thorin.

2 CONHECIMENTOS PRELIMINARES

Iniciaremos com uma breve revisão à Teoria da Medida, para um estudo mais amplo recomendamos [1] e [2].

2.1 Teoria da Medida

Definição 2.1.1. Uma sequência (finita ou infinita) de conjuntos $A_1, A_2, \dots$ tal que $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$ é dita crescente. A sequência tem limite $A = \bigcup_n A_n$, nesse caso dizemos que A_n cresce para A e escrevemos $A_n \uparrow A$. De modo similar, se $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$ a sequência é dita decrescente, nesse caso dizemos que A_n diminui até o seu conjunto limite $A = \bigcap_n A_n$ e escrevemos $A_n \downarrow A$.

Definição 2.1.2. Seja X um conjunto não vazio. Uma **álgebra** de conjuntos sobre X é uma coleção $\mathcal{A}$ não vazia de subconjuntos de X satisfazendo as seguintes propriedades

1. Se $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{A}$, então $E_1 \cup \dots \cup E_n \in \mathcal{A}$.
2. Se $E \in \mathcal{A}$, então $E^c \in \mathcal{A}$.

Uma álgebra $\mathcal{A}$ é chamada **σ - álgebra** quando é fechada por uniões contáveis (isto é, se $\{E_j\}_{j=1}^{+\infty} \subset \mathcal{A}$, então $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{A}$).

Definição 2.1.3. Seja X um conjunto com uma σ - álgebra $\mathcal{M}$. Uma medida em $\mathcal{M}$ é uma função $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty]$ que satisfaz as seguintes propriedades

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. Se $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos dois a dois disjuntos em $\mathcal{M}$, então vale

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n)$$

Nas notações da definição acima chamemos a tripla $(X, \mathcal{M}, \mu)$ de espaço de medida.

Proposição 2.1.1. Seja μ uma medida, segue que

1. Se $A, B \in \mathcal{M}$ com $A \subset B$, então $\mu(A) \leq \mu(B)$.
2. Se $A_i \in \mathcal{M}$ e $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, então $\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.
3. Suponha $A_i \in \mathcal{M}$ e $A_i \uparrow A$. Então, $\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$.
4. Suponha que $A_i \in \mathcal{M}$ e $A_i \downarrow A$. Se $\mu(A_1) < \infty$, então temos que $\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$.

Definição 2.1.4. Uma medida $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty)$ é completa quando $\mathcal{M}$ contém todos os subconjuntos de cada conjunto nulo.

Definição 2.1.5. A medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$ é a medida completa $\mu = \mu_F$ tal que $\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a)$, dizemos que μ_F está associada à função identidade $F(x) = x$.

Definição 2.1.6. Sejam $(X, \mathcal{M})$ e $(Y, \mathcal{N})$ espaços de medida. Dizemos que a função $f : X \rightarrow Y$ é mensurável quando $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$, para todo $E \in \mathcal{N}$.

Definição 2.1.7. Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ é dita simples quando é mensurável e a imagem de f é um subconjunto finito de $\mathbb{C}$.

Teorema 2.1.2. Seja $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável.

1. Se $f : X \rightarrow [0, \infty]$ é mensurável então existe uma sequência (ϕ_n) de funções simples tal que $0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \dots \leq f$ e $\phi_n \rightarrow f$ pontualmente. Mais ainda, $\phi_n \rightarrow f$ uniformemente sobre todo conjunto em que f é limitado.
2. Se $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ é mensurável, então existe uma sequência ϕ_n de funções simples tal que $0 \leq |\phi_1| \leq |\phi_2| \leq \dots \leq f$ e $\phi_n \rightarrow f$ pontualmente. Ainda mais, $\phi_n \rightarrow f$ uniformemente sobre todo conjunto no qual f é limitada.

Definição 2.1.8. $L^+ = \{f : X \rightarrow [0, +\infty] : f \text{ é mensurável}\}$.

Teorema 2.1.3 (Teorema da Convergência Dominada). Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, em L^+ , com $f_n \leq f_{n+1}$, para todo n , e $f = \lim f_n$. Então, $\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$.

Definição 2.1.9. Seja (X, μ) um espaço de medida

$$L^1(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ mensurável; } \int_X |f| d\mu(x) < \infty\}$$

Um elemento do espaço L^1 é chamado de função integrável.

Teorema 2.1.4 (Teorema da Convergência Monótona). Se (f_n) é uma sequência em L^1 satisfazendo:

1. $f_n \rightarrow f$ em quase todo ponto;
2. Existe uma função positiva $g \in L^1$ tal que $|f_n| \leq g$ em quase todo ponto, para todo n .

Então, $\lim \int f_n d\mu = \int f d\mu$.

Teorema 2.1.5. Sejam $f \in L^1(X, \mu)$ e $\varepsilon > 0$.

1. Existe uma função simples e integrável $\phi = \sum a_j X_{E_j}$ tal que $\int |f - \phi| d\mu < \varepsilon$

2. Suponhamos que μ é uma medida de Lebesgue-Stieltjes na reta real.

a) Os conjuntos E_j na definição de ϕ , em 1, podem ser escolhidas como uniões finitas de intervalos abertos.

b) Existe $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ contínua e de suporte compacto tal que $\int |f - g| d\mu < \varepsilon$.

Teorema 2.1.6 (Tonelli). Consideremos $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ dois espaços de medidas σ -finitos. Seja $f \in L^+(X \times Y)$. Então as funções $g(x) = \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ e $h(y) = \int_X f(x, y) d\mu(x)$ pertencem a $L^+(X)$ e $L^+(Y)$, respectivamente, e

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) = \int_X \left[\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right] d\mu(x). \quad (2.1)$$

Teorema 2.1.7 (Fubini). Consideremos $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ dois espaços de medidas σ -finitos. Consideremos uma função f integrável $X \times Y$. Então a função $f(x, \cdot) \in L^1(Y)$ q.t.p. sobre X e a função $f(\cdot, y) \in L^1(X)$ q.t.p. sobre Y . Escrevamos $g(x) = \int_Y f(x, \cdot) d\nu = \int_X f(x, y) d\nu(y)$ e $h(y) = \int_X f(\cdot, y) d\mu = \int f(x, y) d\mu(x)$, respectivamente definidas q.t.p. sobre X e Y . Segue então que a função $f \in L^1(X)$, a função $h \in L^1(Y)$ e a fórmula (2.1) é válida.

Teorema 2.1.8. Dado $a > 0$ considere $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < a\}$ e seja f uma função mensurável em $\mathbb{R}^n$.

1. Se $|f(x)| \leq C|x|^{-\alpha}$ em B para algum $C > 0$ e $\alpha < n$, então $f \in L^1(B)$. Se $|f(x)| \geq C|x|^{-n}$ em B , então $f \notin L^1(B)$.
2. Se $|f(x)| \leq C|x|^{-\alpha}$ em B^c para algum $C > 0$ e $\alpha > n$ então $f \in L^1(B^c)$. Se $|f(x)| \leq C|x|^{-n}$ em B^c , então $f \notin L^1(B^c)$.

Definição 2.1.10. Duas medidas com sinal ν e μ sobre $(X, \mathcal{M})$ são mutuamente singulares, se existem E e F tais que

1. $X = E \cup F$.
2. F é nulo para μ e E é nulo para ν .

Teorema 2.1.9. (Decomposição de Jordan) Se μ é uma medida com sinal em um espaço mensurável $(X, \mathcal{A})$, existem medidas positivas μ^+ e μ^- tais que $\mu = \mu^+ - \mu^-$ e μ^+ e μ^- são mutualmente singulares. Essa decomposição é única em certo sentido.

Definição 2.1.11. Uma medida ν é dita absolutamente contínua com respeito a medida μ se $\nu(A) = 0$ sempre que $\mu(A) = 0$. Denotamos por $\nu \ll \mu$.

Teorema 2.1.10 (Radon - Nikodyn). Suponha que μ é uma medida σ -finita positiva em um espaço mensurável $(X, \mathcal{A})$ e ν é finita positiva em $(X, \mathcal{A})$ tal que ν é absolutamente contínua com respeito a μ . Então existe uma função f integrável, não negativa e μ -integrável e que é mensurável com respeito a $\mathcal{A}$ tal que $\nu(A) = \int_A f d\mu$ para todo $A \in \mathcal{A}$. Além disso, se g é outra função com a mesma propriedade, então $f = g$ com respeito a μ para quase todo x .

Teorema 2.1.11 (Decomposição de Lebesgue). Suponha que μ é uma medida positiva σ -finita e ν uma medida positiva finita. Existem medidas positivas λ, ρ tais que $\nu = \lambda + \rho$, ρ é absolutamente contínua com respeito a μ , e λ e μ são mutuamente singulares.

Teorema 2.1.12 (Desigualdade de Chebyshev). Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida, $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ uma função mensurável e $g : f(X) \rightarrow [-\infty, +\infty]$ uma função mensurável não negativa e não decrescente. Então,

$$\mu(\{x \in X : f(x) \leq t\}) \geq \frac{1}{g(t)} \int_X g \circ f d\mu.$$

Um caso particular acontece quando substituimos f por $|f - c|$ e tomamos $g : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ como $g(x) = x^2$. Daí,

$$\mu(\{x \in X : |f(x) - c| \leq t\}) \geq \frac{1}{t^2} \int_X |f - c|^2 d\mu.$$

2.2 Espaços Vetoriais Normados

Definição 2.2.1. Um aplicação linear $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ entre dois espaços vetoriais normados é dita **aplicação limitada** quando existe $C \geq 0$ tal que

$$\|Tx\| \leq C\|x\|, \forall x \in \mathcal{X}.$$

Proposição 2.2.1. Se $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ são espaços vetoriais normados e $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ é um mapa linear, são equivalentes:

1. T é contínuo;
2. T é contínuo em 0;
3. T é limitado

Demonstração. (1) $\implies$ (2) Se T é contínuo em $\mathcal{X}$, então é contínuo em 0.

(2) $\implies$ (3) Se T é contínuo em 0 então dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada $x \in \mathcal{X}$ temos

$$\|x\| < \delta \implies \|T(x) - T(0)\| < \varepsilon \quad (2.2)$$

Seja $y \neq 0 \in \mathcal{X}$. Escrevendo $x = \frac{\delta}{\|y\|}y$ temos que $\|x\| = \left\| \frac{\delta y}{\|y\|} \right\| = \delta$. Daí, pela linearidade e por (2.2) segue que

$$\frac{\delta}{\|y\|} \|T(y)\| = \|T(\frac{\delta y}{\|y\|})\| = \|T(x) - T(0)\| = \|T(x - 0)\| < \varepsilon$$

Assim, $\|T(y)\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta} \|y\|$. Fixando um valor para ε (por exemplo, $\varepsilon = 1$) e considerando $c = \frac{\varepsilon}{\delta}$ temos que $\|T(y)\| \leq c\|y\|$. Portanto, T é limitada.

(3) $\implies$ (1) Se $\|Tx\| \leq c\|x\| \forall x$, então

$$\|T(x_1 - x_2)\| \leq c\|x_1 - x_2\|, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathcal{X}$$

Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, se $\|x_1 - x_2\| \leq \frac{1}{c}\varepsilon$ então

$$\|T(x_1 - x_2)\| \leq c\|x_1 - x_2\| \leq c \frac{1}{c} \varepsilon = \varepsilon$$

Daí, temos que T é uniformemente contínua. Assim, em particular, T é contínua. □

3 L^p E L^p FRACO

Ao longo deste capítulo iremos estudar os espaços L^p , bem como definições e propriedades que nos possibilitará caracterizar o espaço L^p fraco e relacioná-lo com o espaço L^p usual.

3.1 Um pouco sobre os espaços L^p e L^p fraco

Nesta seção iremos abordar algumas das principais propriedades dos espaços L^p e L^p fraco.

Definição 3.1.1. Para $0 < p < \infty$, definimos

$$\|f\|_{L^p(X,\mu)} = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

E, para $p = \infty$ definimos

$$\|f\|_{L^\infty(X,\mu)} = \text{ess.sup}|f| = \inf\{B > 0 : \mu(\{|f(x)| > B\}) = 0\}.$$

Quando no contexto estiver claro o espaço de medida (X, μ) escreveremos apenas $\|f\|_{L^p}$ e $\|f\|_{L^\infty}$.

Teorema 3.1.1 (Desigualdade de Hölder). Se $1 \leq p, q \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, e f e g são mensuráveis, então

$$\int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$$

Demonstração. Se $M = \|f\|_{L^\infty}$, então $|f| \leq M$ q.t.p. e $\int_X |fg| d\mu \leq M \int_X |g| d\mu$. Assim, o caso $p = \infty$ e $q = 1$ segue. Agora iremos assumir que $1 < p, q < \infty$. Se $\|f\|_{L^p} = 0$ então $f = 0$ q.t.p. e $\int_X |fg| d\mu = 0$, assim o resultado segue se $\|f\|_{L^p} = 0$ e, analogamente, para $\|g\|_{L^q} = 0$. O resultado é imediato se $\|f\|_{L^p}$ ou $\|g\|_{L^q}$ é infinito, então suponhamos que não. Sejam $F(x) = \frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p}}$ e $G(x) = \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^q}}$. Observe que $\|F\|_{L^p} = 1$ e $\|G\|_{L^q} = 1$, daí é suficiente mostrar que $\int_X FG d\mu \leq 1$. Agora, observe que, a segunda derivada de e^x é e^x , que é sempre não-negativa. Daí, e^x é convexa e, tomando $0 \leq \lambda \leq 1$, temos

$$e^{\lambda a + (1-\lambda)b} \leq \lambda e^a + (1-\lambda)e^b, \quad (3.1)$$

para cada par de reais a, b . Se $F(x), G(x) \neq 0$ sejam $a = p \log F(x)$, $b = \log G(x)$, $\lambda = \frac{1}{p}$ e $1 - \lambda = \frac{1}{q}$. Por (3.1) temos então que

$$F(x)G(x) \leq \frac{F(x)^p}{p} + \frac{G(x)^q}{q}.$$

Claramente essa desigualdade também vale se $F(x) = 0$ ou $G(x) = 0$. Integrando

$$\int_X FG d\mu \leq \frac{\|F\|_{L^p}^p}{p} + \frac{\|G\|_{L^q}^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad (3.2)$$

o que completa a prova. $\square$

Teorema 3.1.2 (Desigualdade de Minkowski). Dadas $f, g \in L^p(X, \mu)$ temos que

$$\|f + g\|_{L^p(X, \mu)} \leq \|f\|_{L^p(X, \mu)} + \|g\|_{L^p(X, \mu)},$$

sempre que $1 \leq p \leq \infty$.

Demonstração. Primeiro observemos que se $f = 0$ (ou $g = 0$) temos que $\|f + g\| = \|f\|$ (ou $\|f + g\| = \|g\|$), donde valerá a igualdade. Agora suponha que f e g sejam diferentes de zero. Primeiro, provaremos que $f + g$ tem norma L^p finita. De fato, usando o fato de que $h(x) = |x|^p$ é convexa sobre $\mathbb{R}^+$ para $p > 1$ temos que

$$\left| \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}g \right|^p \leq \left| \frac{1}{2}|f| + \frac{1}{2}|g| \right|^p \leq \frac{1}{2}|f|^p + \frac{1}{2}|g|^p.$$

Assim,

$$|f + g|^p \leq \frac{1}{2}|2f|^p + \frac{1}{2}|2g|^p = 2^{p-1}|f|^p + 2^{p-1}|g|^p.$$

Donde,

$$\|f + g\|_{L^p}^p \leq 2^{p-1} \left[\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p \right] < \infty.$$

Por outro lado, usando a desigualdade triangular temos

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{L^p}^p &= \int |f + g|^p d\mu = \int |f + g| |f + g|^{p-1} d\mu \leq \int (|f| + |g|) |f + g|^{p-1} d\mu \\ &= \int |f| |f + g|^{p-1} d\mu + \int |g| |f + g|^{p-1} d\mu \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder para p e $q = \frac{p}{p-1}$

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{L^p}^p &\leq \left(\left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \right) \left(\int |f + g|^{(p-1)\frac{p}{p-1}} d\mu \right)^{1-\frac{1}{p}} \\ &= (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}) \frac{\|f + g\|_{L^p}^p}{\|f + g\|_{L^p}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\|f + g\|_{L^p}^p \leq (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}) \frac{\|f + g\|_{L^p}^p}{\|f + g\|_{L^p}}.$$

Multiplicando ambos os lados por $\frac{\|f + g\|_{L^p}}{\|f + g\|_{L^p}^p}$ segue o resultado. $\square$

Como, além da desigualdade de Minkowski, temos que $\|f\|_{L^p(X, \mu)} = 0$ implica que $f = 0$ μ -q.t.p., os espaços L^p são espaços lineares normados para $0 \leq p \leq \infty$ (ao considerar L^p quocientando com a relação de equivalência $f = g$ q.t.p.) .

Observação 1. Veja que, para $0 < p < 1$, a desigualdade de Minkowski não é válida. De fato, suponha $a, b > 0$ e $0 < p < 1$. Para $t > 0$ temos que $t^{p-1} > (a+t)^{p-1}$ e, integrando de 0 até b obtemos que $a^p + b^p > (a+b)^p$. Então, se E e F são conjuntos finitos de medida finita positiva em X e tomarmos $a = \mu(E)^{\frac{1}{p}}$ e $b = \mu(F)^{\frac{1}{p}}$, vemos que

$$\|\chi_E + \chi_F\|_{L^p} = (a^p + b^p)^{\frac{1}{p}} > (a+b) = \|\chi_E\|_{L^p} + \|\chi_F\|_{L^p}$$

No entanto, de modo geral, o seguinte substituto da desigualdade de Minkowski é válido:

Teorema 3.1.3. Dadas $f, g \in L^p(X, \mu)$ temos que

$$\|f + g\|_{L^p(X, \mu)} \leq 2^{\frac{1-p}{p}} (\|f\|_{L^p(X, \mu)} + \|g\|_{L^p(X, \mu)})$$

sempre que $0 < p \leq \infty$.

Demonstração. De fato, usando a observação acima e que $|f + g| \leq |f| + |g|$. Temos que, $\|f + g\|_{L^p(X, \mu)}^p \leq \|f\|_{L^p(X, \mu)}^p + \|g\|_{L^p(X, \mu)}^p$. Além disso, usando a convexidade de $\psi(t) = t^{\frac{1}{p}}$

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{L^p(X, \mu)}^p &\leq \|f\|_{L^p(X, \mu)}^p + \|g\|_{L^p(X, \mu)}^p \\ &= 2\left(\frac{1}{2}\|f\|_{L^p(X, \mu)}^p + \frac{1}{2}\|g\|_{L^p(X, \mu)}^p\right) \\ &\leq 2\left(\frac{1}{2}\|f\|_{L^p(X, \mu)} + \frac{1}{2}\|g\|_{L^p(X, \mu)}\right)^p \\ &= 2^{1-p}(\|f\|_{L^p(X, \mu)} + \|g\|_{L^p(X, \mu)})^p \end{aligned}$$

Tirando a p -ésima raiz temos o resultado. $\square$

Consequentemente, $L^p(X, \mu)$ é um espaço linear quase-normado.

Teorema 3.1.4. Para todo $0 < p \leq \infty$ temos que toda sequência de Cauchy em $L^p(X, \mu)$ é convergente e assim o espaço $L^p(X, \mu)$ é completo.

Demonstração. Seja $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset L^p$ uma sequência de Cauchy. Podemos construir uma sub-sequência $\{f_{n_k}\}_k$ tal que $\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_{L^p}^p \leq \frac{1}{2^k}$. Defina

$$f = f_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k}).$$

Note que

$$\left\| \sum_{k=1}^N |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \right\|_{L^p} \leq \sum_{k=1}^N 2^{\frac{(1-p)k}{p}} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^p} \leq \sum_{k=1}^N 2^{-k} \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Segue do Teorema da Convergência Monótona que $|f_{n_1}| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \in L^p(X, \mu)$. Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada temos que $f \in L^p(X, \mu)$. Além disso,

$$f_1 + \sum_{k=1}^N (f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) = f_{n_{N+1}} \implies \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k} = f.$$

Como $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ é de Cauchy e f_{n_k} é subsequência convergente então $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ é convergente. $\square$

Portanto, os espaços L^p são espaços de Banach para $1 < p < \infty$. Um fato, também conhecido, é que o dual topológico $(L^p)^*$ de L^p é isométrico para $L^{p'}$ onde $1 \leq p < \infty$. Além disso, a norma L^p de uma função pode ser obtida em relação a dualidade quando $1 \leq p \leq \infty$ da seguinte forma:

$$\|f\|_{L^p} = \sup_{\|g\|_{L^{p'}}=1} \left| \int_X fg d\mu \right|.$$

3.2 Funcionais Lineares Limitados e Definidos no Espaço L^p

Um **funcional linear** em L^p é uma aplicação H de L^p em $\mathbb{C}$.

Observação 2. H é um **funcional linear limitado** se $\|H\| \doteq \sup\{|Hf| : \|f\|_p \leq 1\}$ é finito.

O **Espaço Dual** do L^p é a coleção de todos os funcionais lineares limitado definidos no espaço L^p com a norma usual. Nosso objetivo nesta seção é caracterizar o dual dos espaços L^p .

Definição 3.2.1. Definimos a função sinal por

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ -1, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Observe que $x \text{sgn}(x) = |x|$.

Teorema 3.2.1. Sejam $1 < p < \infty$ e q satisfazendo a equação $p^{-1} + q^{-1} = 1$, suponha $f \in L^p$. Então

$$\|f\|_p = \sup \left\{ \int fg d\mu : \|g\|_q \leq 1 \right\}.$$

O teorema continua válidos para os casos em que p é 1 ou ∞ . No caso $p = 1$ consideramos $q = \infty$ e no caso $p = \infty$ consideramos $q = 1$.

Demonstração. Pela desigualdade de Hölder $\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$. Assim, temos que

$$\sup \left\{ \int fg d\mu : \|g\|_{L^q} \leq 1 \right\} \leq \|f\|_{L^p}. \text{ Donde, nos resta mostrar que } \|f\|_{L^p} \leq \sup \left\{ \int fg d\mu : \|g\|_{L^q} \leq 1 \right\}.$$

1. Para $p = 1$. Escolha $g(x) = \text{sgn} f(x)$. Note que $\|g\|_{L^\infty} \leq 1$ e $fg = f(x) \text{sgn} f(x) = |f(x)|$.

Deste modo, $\|f\|_{L^1} = \int fg d\mu \leq \sup \left\{ \int fg d\mu : \|g\|_{L^q} \leq 1 \right\}$. Concluindo a demonstração para esse caso.

2. Para $p = \infty$. Se $\|f\|_\infty = 0$, temos que $|f| = 0$ q.t.p. e daí $0 = \|f\|_{L^\infty} = \int fg d\mu$. Agora suponha que $\|f\|_{L^\infty} > 0$. Como μ é σ -finta, existem conjuntos F_n crescendo para X tal que $\mu(F_n) < \infty$ para cada n . Sejam $M = \|f\|_{L^\infty}$ e $a \in \mathbb{R}$ tal que $a < M$. Pela definição da norma L^∞ , a medida de $A_n = \{x \in F_n : |f(x)| > a\}$ deve ser positiva para n suficientemente grande. Seja

$$g_n(x) = \frac{\text{sgn}(f(x)) \chi_{A_n}(x)}{\mu(A_n)}.$$

Então,

$$\|g_n(x)\|_{L^1} = \int |g_n| d\mu = \int \left| \frac{\text{sgn}(f(x)) \chi_{A_n}(x)}{\mu(A_n)} \right| d\mu = \int |\text{sgn}(f(x))| \frac{\chi_{A_n}(x)}{\mu(A_n)} d\mu = \frac{\mu(A_n)}{\mu(A_n)} = 1$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int fg_n d\mu &= \int f \frac{\text{sgn}(f(x)) \chi_{A_n}(x)}{\mu(A_n)} d\mu \\ &= \int |f| \frac{\chi_{A_n}}{\mu(A_n)} \geq a \end{aligned}$$

Como a é qualquer número estritamente menor que M (por um argumento de limite), temos que $\sup \left\{ \int fg d\mu : \|g\|_q \leq 1 \right\} = M$.

3. $1 < p < \infty$. No caso em que $\|f\|_p = 0$ temos que $f = 0$ q.t.p. Deste modo, com um argumento semelhante ao que fizemos acima vemos que é suficiente supor $\|f\|_p > 0$. Seja F_n conjuntos mensuráveis de medidas finitas crescendo para X , q_n uma sequência de funções simples não negativas crescendo para f^+ (pelo Teorema 2.1.2), r_n uma sequência de funções simples não negativas crescendo para f^- (pelo Teorema 2.1.2) e,

$$s_n(x) = (g_n(x) - r_n(x)) \chi_{F_n}(x).$$

Note que, $s_n(x) \rightarrow f(x)$ para cada x , $|s_n(x)|$ cresce para $|f(x)|$ para cada x , pois r_n e q_n são crescentes em módulo, cada s_n é uma função simples, e $\|s_n\|_p < \infty$ para cada n . Então, $\|s_n\|_p \rightarrow \|f\|_p$, pelo Teorema da Convergência Monótona, ou $\|f\|_p$ não é finito. Para n suficientemente grande $\|s_n\|_p > 0$ já que estamos supondo $\|f\|_p > 0$. Seja

$$g_n(x) = \operatorname{sgn}(f(x)) \frac{|s_n(x)|^{p-1}}{\|s_n\|_p^{\frac{p}{q}}},$$

g_n é novamente uma função simples. Como $(p-1)q = p$, então

$$\|g_n\|_q = \frac{(\int |s_n|^{(p-1)q})^{\frac{1}{q}}}{\|s_n\|_p^{\frac{p}{q}}} = \frac{\|s_n\|_p^{\frac{p}{q}}}{\|s_n\|_p^{\frac{p}{q}}} = 1.$$

Por outro lado, como $|f| \geq |s_n|$, temos

$$\int f g_n d\mu = \frac{\int |f| |s_n|^{p-1}}{\|s_n\|_p^{\frac{p}{q}}} \geq \frac{\int |s_n|^p}{\|s_n\|_p^{\frac{p}{q}}} = \|s_n\|_p^{p-\frac{p}{q}}.$$

Como $p - \frac{p}{q} = 1$, então $\int f g_n \geq \|s_n\|_p$, donde temos que $\|s_n\|_p$ tende para $\|f\|_p$. $\square$

Corolário 1. Para $1 < p < \infty$ e $p^{-1} + q^{-1} = 1$, suponha f mensurável e $\int f g$ é definida para toda função simples g . Então,

$$\|f\|_p = \sup\left\{\int f g : \|g\|_q \leq 1, g \text{ simples}\right\}.$$

Provaremos agora que se H um funcional limitado de valor real em L^p , então existe $g \in L^q$ tal que $H(f) = \int f g$ e $\|g\|_q = \|H\|$. O Lema abaixo nos será útil para vermos que se s_n é uma sequência de funções simples convergindo para f , dado um funcional linear H , então $H(s_n)$ converge para $H(f)$.

Lema 3.2.1. Suponha que (X, μ) é um espaço de medida e $1 \leq p \leq \infty$ então as funções simples que pertencem a L^p são densas em L^p .

Demonstração. Basta provar que podemos aproximar uma função positiva $f : X \rightarrow [0, \infty]$ por funções simples, uma vez que uma função pode ser decomposta em suas partes positiva e negativa.

1. Em primeiro lugar suponha $f \in L^p$ com $1 \leq p < \infty$. Então (pelo Teorema 2.1.2 há uma sequência crescente de funções simples $\{\phi_n\}$ tal que $\phi_n \rightarrow f$ pontualmente. Essas funções simples pertencem a L^p , já que $\phi_1 \leq \phi_2 \leq \dots \leq \phi_n \leq f$, e $|f - \phi_n|^p \leq 2|f|^p \in L^1$.

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada temos que

$$\int |f - \phi_n|^p d\mu \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

2. Se $f \in L^\infty$, então denotando $M = \|f\|_{L^\infty}$ temos que $|f| < M$ q.t.p. Daí, podemos tomar uma sequência $\{\psi_n\}$ de funções simples crescente que converge para f uniformemente. De fato, observe que

$$\psi_1 \leq \psi_2 \leq \dots \leq \psi_n \leq f < |f| < M, \text{ q.t.p.}$$

Daí,

$$\psi_n - f < M, \text{ qtp} \implies |\psi_n - f| < |M| = M.$$

□

Por outro lado, se $f \rightarrow \int fg$ é um funcional linear limitado em L^p então $g \in L^q$. Na verdade, provaremos algo ainda mais forte. Este teorema junto com a proposição anterior nos permite identificar o espaço dual de L^p por L^q .

Teorema 3.2.2. Sejam $1 < p < \infty$ e q satisfazendo $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Se H é um funcional linear limitado em L^p , então existe $g \in L^q$ tal que $H(f) = \int fg$, para cada $f \in L^p$, e $\|g\|_q = \|H\|$.

Demonstração. Suponha que H é um funcional limitado em L^p , a prova será feita em duas partes.

1. Suponha $\mu(X) < \infty$. Defina $\nu(A) = H(\chi_A)$, para $A \subset X$ mensurável. Observe que $\chi_A \in L^p$ pois

$$\int |\chi_A|^p d\mu = \int (\chi_A)^p d\mu = \int \chi_A d\mu = \int_A 1 d\mu = \mu(A) \leq \mu(X) < \infty.$$

Mostraremos que ν é uma medida com sinal tal que $\nu \ll \mu$ e que $g = \frac{d\nu}{d\mu}$ (pelo Teorema 2.1.10) é a função que buscamos. Se A e B são disjuntos, então

$$\nu(A \cup B) = H(\chi_{A \cup B}) = H(\chi_A + \chi_B) = H(\chi_A) + H(\chi_B) = \nu(A) + \nu(B)$$

Para mostrar a aditividade, basta mostrar que se $A_n \uparrow A$ (ou seja $\{A_n\}$ é crescente e $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = A$), então $\nu(A_n) \rightarrow \nu(A)$ (pelo Teorema 2.1.1). Observe que, se $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = A$, dado $x \in A$ logo existe n tal que $x \in A_n$. Como é uma sequência crescente temos que $x \in A_k \forall k \geq n$. Assim, para $k \geq n$ temos que $\chi_{A_k} - \chi_A = 0$. Logo, $\chi_{A_k} - \chi_A$ converge a zero pontualmente. Daí, $\|\chi_{A_k} - \chi_A\|_p \rightarrow 0$. Dessa forma, como H é limitado, logo contínuo, temos que $\nu(A_n) = H(\chi_{A_n}) \rightarrow H(\chi_A) = \nu(A)$.

Concluimos que ν é uma medida com sinal aditiva. Além disso, se $\nu(A) = 0$ então $\chi_A = 0$ q.t.p., assim $\nu(A) = H(\chi_A) = 0$. Pelo o Teorema da Decomposição de Jordan existem duas medidas positivas ν^+ e ν^- tais que $\nu = \nu^+ - \nu^-$. Pelo o teorema de Radon Nikodym obtemos $g^+ = \frac{d\nu^+}{d\mu}$ e $g^- = \frac{d\nu^-}{d\mu}$. Defina $g = g^+ - g^-$. Portanto, temos uma função de valor real g tal que $\nu(A) = \int_A g d\nu$ para todos os conjuntos A mensuráveis.

Se $s = \sum_i a_i \chi_{A_i}$ é uma função simples, pela linearidade de H temos que

$$H(s) = \sum_i a_i H(\chi_{A_i}) = \sum_i a_i \nu(A_i) = \sum_i a_i \int g \chi_{A_i} = \int g \sum_i a_i \chi_{A_i} = \int g s. \quad (3.3)$$

Pelo corolário 1 e a igualdade (3.3)

$$\|g\|_q = \sup \left\{ \int g s : \|s\|_p \leq 1, s \text{ simples} \right\} = \sup \{ H(s) : \|s\|_p \leq 1, s \text{ simples} \} \leq \|H\|. \quad (3.4)$$

Se s_n são funções simples convergindo a $f \in L^p$, pelo Lema, então $H(s_n) \rightarrow H(f)$. Além disso, pela desigualdade de Hölder e usando o fato que $g \in L^q$ temos que

$$\left| \int s_n g - \int f g \right| = \left| \int (s_n - f) g \right| \leq \|s_n - f\|_p \|g\|_q \rightarrow 0. \quad (3.5)$$

pois s_n converge em L^p para f então $\int s_n g \rightarrow \int f g$. Portanto, pelas igualdades (3.4) e (3.5), pela unicidade do limite, temos que $H(f) = \int f g, \forall f \in L^p$ e $\|g\|_q \geq \|H\|$. Pela desigualdade de Hlder temos que $\|H\| \leq \|g\|_q$, já que $\|g\|_q$.

□

3.3 A função distribuição

Nesta seção veremos a definição e algumas propriedades importantes da função distribuição, a qual denotaremos por d_f . A função distribuição nos dará informações suficientes para calcularmos a norma L^p e através dela definiremos o espaço L^p fraco.

Definição 3.3.1. Seja f uma função mensurável em X , a **função distribuição** de f é a função d_f definida em $[0, \infty)$ por:

$$d_f(\alpha) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}).$$

A função distribuição d_f fornece informações sobre o tamanho de f , mas não sobre o comportamento de f próximo a um determinado ponto. Por exemplo, uma função f definida em

$\mathbb{R}^n$ e cada uma das suas translações têm a mesma função distribuição. Além disso, da definição de d_f temos que a função distribuição é decrescente para α . De fato, considere $\alpha > 0$ e $a > 0$ se $|f(x)| > \alpha + a$. Como $\alpha + a > \alpha$ então $|f(x)| > \alpha$. Dessa forma, $\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \alpha\} \supset \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \alpha + a\}$. Logo, $\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \alpha + a\}) \leq \mu(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \alpha\})$. Donde, $d_f(\alpha + a) \leq d_f(\alpha)$.

Exemplo 1. Lembre-se de que funções simples são combinações lineares finitas de funções características de conjuntos de medidas finitas. Vamos calcular a função distribuição d_f de uma função simples não negativa

$$f(x) = \sum_{j=1}^N a_j \chi_{E_j}(x),$$

onde os conjuntos E_j 's são dois a dois disjuntos e $a_1 > \dots > a_N > 0$. Em geral, se $a_{j+1} < \alpha < a_j$ e $|f(x)| > \alpha$ então $x \in E_1 \cup \dots \cup E_j$. Definindo

$$B_j = \sum_{k=1}^j \mu(E_k),$$

temos que

$$d_f(\alpha) = \sum_{j=0}^N B_j \chi_{[a_{j+1}, a_j)}(\alpha),$$

onde $a_0 = \infty$ e $B_0 = a_{N+1}$.

Proposição 3.3.1. Se f e g são funções mensuráveis em (X, μ) . Então para todo $\alpha, \beta > 0$ temos:

1. $|g| \leq |f|$ μ - q.t.p. implica que $d_g \leq d_f$;
2. $d_{cf}(\alpha) = d_f\left(\frac{\alpha}{|c|}\right)$, para todo $c \in \mathbb{C} - 0$;
3. $d_{f+g}(\alpha + \beta) \leq d_f(\alpha) + d_g(\beta)$;
4. $d_{fg}(\alpha\beta) \leq d_f(\alpha) + d_g(\beta)$.

Demonstração. 1. Se $|g| \leq |f|$ μ - q.t.p. então temos que existe um conjunto mensurável E tal que $\mu(E) = 0$ e $|g(x)| \leq f(x)$, para cada $x \in E^c$. Dessa forma,

$$\{x \in X : |g(x)| > \alpha\} \cap E^c \subset \{x \in X : |f(x)| > \alpha\} \cap E^c.$$

Daí,

$$\mu(\{x \in X : |g(x)| > \alpha\}) \leq \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}), \quad \forall \alpha > 0$$

Assim, $d_g \leq d_f$.

2. Observe que,

$$|cf(x)| > \alpha \iff |f(x)| > \frac{\alpha}{|c|}$$

Dessa forma, temos que

$$\{x \in X : |cf(x)| > \alpha\} = \left\{x \in X : |f(x)| > \frac{\alpha}{|c|}\right\}$$

Assim,

$$\mu(\{x \in X : |cf(x)| > \alpha\}) = \mu\left(\left\{x \in X : |f(x)| > \frac{\alpha}{|c|}\right\}\right)$$

Daí, $d_{cf}(\alpha) = d_f\left(\frac{\alpha}{|c|}\right)$

3. Observe que, se $x \in X$ é tal que $|f(x) + g(x)| > \alpha + \beta$ então $|f(x)| > \alpha$ ou $|g(x)| > \beta$, pois caso contrário teríamos $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \alpha + \beta$. O que é uma contradição.

Deste modo,

$$\{x \in X : |f + g| > \alpha + \beta\} \subset \{x \in X : |f| > \alpha\} \cup \{x \in X : |g| > \beta\}$$

Assim,

$$\begin{aligned} d_{f+g}(\alpha + \beta) &= \mu(\{x \in X : |f + g| > \alpha + \beta\}) \leq \mu(\{x \in X : |f| > \alpha\} \cup \{x \in X : |g| > \beta\}) \\ &\leq \mu(\{x \in X : |f| > \alpha\}) + \mu(\{x \in X : |g| > \beta\}) \\ &= d_f(\alpha) + d_g(\beta). \end{aligned}$$

□

O conhecimento da função distribuição d_f fornece informações suficientes para avaliar a norma L^p de uma função f com precisão. Provamos o seguinte resultado que descreve a norma L^p em termos da função distribuição.

Proposição 3.3.2. Se $f \in L^p(X, \mu)$, com $0 < p < \infty$, então

$$\|f\|_{L^p}^p = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} d_f(\alpha) d\alpha$$

Demonstração. Com efeito, temos que

$$\begin{aligned}
 p \int_0^\infty \alpha^{p-1} d_f(\alpha) d\alpha &= p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \int_X \chi_{\{|f(x)| > \alpha\}} d\mu(x) d\alpha \\
 &= \int_X \int_0^{|f(x)|} p \alpha^{p-1} d\alpha d\mu(x) \\
 &= \int_X |f(x)|^p d\mu(x) \\
 &= \|f\|_{L^p}^p
 \end{aligned}$$

onde usamos o Teorema de Tonelli na segunda igualdade. $\square$

Observação 3. O mesmo argumento produz o fato mais geral de que para qualquer função crescente continuamente diferenciável ϕ em $[0, \infty)$ com $\phi(0) = 0$ temos que

$$\int_X \phi(|f|) d\mu = \int_0^\infty \phi'(\alpha) d_f(\alpha) d\alpha$$

Agora, após a definição e propriedades da função distribuição, estamos prontos para definir espaços L^p fracos.

Definição 3.3.2. Dado $0 < p < \infty$, o espaço $L^p(X, \mu)$ fraco é definido como o conjunto de todas as funções f μ -mensuráveis tais que

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} = \inf \left\{ C > 0 : d_f(\alpha) \leq \frac{C^p}{\alpha^p} \forall \alpha > 0 \right\}$$

é finito. O espaço $L^\infty(X, \mu)$ fraco é por definição $L^\infty(X, \mu)$.

Observação 4. É importante notar que

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} = \inf \{ C > 0 : d_f(\alpha) \leq \frac{C^p}{\alpha^p} \forall \alpha > 0 \} = \sup \{ \gamma d_f(\gamma)^{\frac{1}{p}} : \gamma > 0 \}.$$

.

O espaço L^p fraco é denotado por $L^{p,\infty}(X, \mu)$. Duas funções em $L^{p,\infty}(X, \mu)$ são consideradas iguais se são iguais μ -q.t.p. A notação $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ é usada para $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$.

Observação 5. Usando as propriedades de função distribuição temos que

1. $\|cf\|_{L^{p,\infty}} = |c| \|f\|_{L^{p,\infty}}$ para toda constante complexa c diferente de zero.
2. $\|f+g\|_{L^{p,\infty}} \leq c_p (\|f\|_{L^{p,\infty}} + \|g\|_{L^{p,\infty}})$ onde $c_p = \max(2, 2^{\frac{1}{p}})$
3. $\|f\|_{L^{p,\infty}} = 0 \implies f = 0$ μ -q.t.p.

Demonstração. Fixe $\gamma > 0$ e $0 < p < 1$. Como $t^{\frac{1}{p}}$ é uma função crescente para $t > 0$, então usando a propriedade de distribuição temos que

$$\left(\frac{d_{f+g}(c)}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{d_f(\frac{c}{2}) + d_g(\frac{c}{2})}{2}\right)^{\frac{1}{p}}$$

. Como $t^{\frac{1}{p}}$ é uma função convexa então temos que

$$\left(\frac{d_f(\frac{c}{2}) + d_g(\frac{c}{2})}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \geq \frac{d_f\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{1}{p}} + d_g\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{1}{p}}}{2}$$

. Portanto, temos que

$$d_{f+g}(\gamma)^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{2}d_f\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{2}d_g\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$

Multiplicando por γ temos que

$$\gamma d_{f+g}(\gamma)^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\gamma}{2}d_f\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{\gamma}{2}d_g\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right) \leq 2^{\frac{1}{p}} (\|f\|_{L^{p,\infty}} + \|g\|_{L^{p,\infty}})$$

Logo, $\|f + g\|_{L^{p,\infty}} = \sup_{\gamma > 0} \{\gamma [d_{f+g}(\gamma)]^{\frac{1}{p}}\} \leq 2^{\frac{1}{p}} (\|f\|_{L^{p,\infty}} + \|g\|_{L^{p,\infty}})$ □

Em virtude de 1, 2 e 3, temos que $L^{p,\infty}$ é um espaço quase-normado para $0 < p < \infty$.

Os espaços L^p fracos são maiores que os espaços L^p usuais. Para ser mais preciso:

Proposição 3.3.3. Para $0 < p < \infty$ e alguma $f \in L^p(X, \mu)$ temos que $\|f\|_{L^{p,\infty}} \leq \|f\|_{L^p}$. Assim, temos que $L^p(X, \mu) \subset L^{p,\infty}(X, \mu)$.

Demonstração. Pelo Teorema 2.1.12 temos que

$$d_f(\alpha) \leq \frac{1}{\alpha^p} \int_{\{x: |f(x)| > \alpha\}} |f(x)|^p d\mu(x)$$

Daí, temos que

$$\alpha^p d_f(\alpha) \leq \int_{\{x: |f(x)| > \alpha\}} |f(x)|^p d\mu(x)$$

Donde, $\int_{\{x: |f(x)| > \alpha\}} |f(x)|^p d\mu(x) \leq \|f\|_{L^p}^p$. Por outro lado,

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} = \sup\{\gamma d_f(\gamma)^{\frac{1}{p}} : \gamma > 0\}$$

Dessa forma, temos que

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} \leq \alpha^p d_f(\alpha) \leq \int_{\{x: |f(x)| > \alpha\}} |f(x)|^p d\mu(x) \leq \|f\|_{L^p}^p.$$

□

Observação 6. Em geral, $L^p \subset L^{p,\infty}$ é estrita. Por exemplo, em $\mathbb{R}^n$ com a medida de Lebesgue usual, considere $h(x) = |x|^{-\frac{n}{p}}$. É fácil ver que h não está em $L^p(\mathbb{R}^n)$, mas está em $L^{p,\infty}$ com $\|h\|_{L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} = v_n^{\frac{1}{p}}$, onde v_n é a medida de bola unitária em $\mathbb{R}^n$.

Os espaços L^p fracos são completos mas não demonstraremos por julgar que essa fugiria do escopo desse trabalho.

3.4 Convergência em Medida

Definição 3.4.1. Sejam $f, f_n, n = 1, 2, \dots$, funções mensuráveis em um espaço de medida (X, μ) . A sequência f_n **converge em medida** para f se $\forall \varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$n > n_0 \implies \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) < \varepsilon.$$

Observação 7. A definição anterior é equivalente à seguinte:

Para todo $\varepsilon > 0$ temos que

$$n \rightarrow \infty \implies \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \rightarrow 0.$$

De fato, se $n > n_0 \implies \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) < \varepsilon$ temos então que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0$. Para ver o outro lado considere $\varepsilon > 0$ e escolha $0 < \delta < \varepsilon$, aplicando a definição para δ temos que existe $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \delta\}) < \delta,$$

para $n > n_0$. Como $\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \leq \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \delta\})$, temos que $\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) < \delta$ para todo $n > n_0$. Fazendo $n \rightarrow \infty$ temos que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \leq \delta$$

Como tomamos δ arbitrário tal que $0 < \delta < \varepsilon$ temos que fazendo $\delta \rightarrow 0$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0$ para todo $\varepsilon > 0$.

Proposição 3.4.1. Seja $0 < p \leq \infty$ e $f_n, f \in L^{p,\infty}(X, \mu)$.

1. Se $f_n, f \in L^p$ e $f_n \rightarrow f$ em L^p , então $f_n \rightarrow f$ em $L^{p,\infty}$.
2. Se $f_n \rightarrow f$ em $L^{p,\infty}$, então f_n converge para f em medida.

Demonstração. 1. Considere $0 < p < \infty$. Por 3.3.3 para todo $\varepsilon > 0$ temos que

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \int_X |f_n - f|^p d\mu$$

Assim, temos que

$$\varepsilon^p \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \leq \int_X |f_n - f|^p d\mu$$

Fazendo $g = f_n - f$, temos que $\varepsilon^p \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = \varepsilon^p d_g(\varepsilon)$. Donde, usando a definição da norma em $L^{p,\infty}$ e como por hipótese f converge para f_n em L^p , temos que converge em $L^{p,\infty}$. O caso $p = \infty$ é imediato, já que nesse caso L^∞ fraco é definido como o espaço L^∞ .

2. Dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que $n > n_0$, temos que

$$\sup_{\alpha > 0} \alpha \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \alpha\})^{\frac{1}{p}} = \|f_n - f\|_{L^{p,\infty}} < \varepsilon^{\frac{1}{p}+1}$$

Tomando $\alpha = \varepsilon$, concluímos que a convergência em L^p implica a convergência em medida.

□

3.5 Um primeiro vislumbre de interpolação

Ao dividir X nas regiões em que uma função é maior que 1 e outra em que é menor que 1 podemos mostrar que se uma função f está em $L^p(X, \mu)$ e em $L^q(X, \mu)$ então ela também estará em $L^r(X, \mu)$ para todo $p < r < q$. A seguir obteremos um espaço mais forte usando espaços L^p fraco.

Proposição 3.5.1. Sejam $0 < p < q \leq \infty$ e $f \in L^{p,\infty}(X, \mu) \cap L^{q,\infty}(X, \mu)$. Então $f \in L^r(X, \mu)$ para todo $p < r < q$ e

$$\|f\|_{L^r} \leq \left(\frac{r}{r-p} + \frac{r}{q-r} \right)^{\frac{1}{r}} \|f\|_{L^{p,\infty}}^{\left(\frac{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \right)} \|f\|_{L^{q,\infty}}^{\left(\frac{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \right)},$$

com a interpretação adequada quando $q = \infty$.

Demonstração. Seja $q < \infty$. Observe que,

$$d_f(\alpha) \leq \min \left\{ \frac{\|f\|_{L^{p,\infty}}^p}{\alpha^p}, \frac{\|f\|_{L^{q,\infty}}^q}{\alpha^q} \right\}.$$

De fato, por definição temos que

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} = \inf \left\{ c > 0 : d_f(\alpha) \leq \frac{c^p}{\alpha^p} \forall \alpha > 0 \right\}$$

Seja $\{c_j\}_j \subset \left\{ c > 0 : d_f(\alpha) \leq \frac{c^p}{\alpha^p} \forall \alpha > 0 \right\}$ uma sequência tal que $c_j \searrow \|f\|_{L^{p,\infty}}$. Dessa forma, temos que $d_f(\alpha) \leq \frac{c_j^p}{\alpha^p}$. Donde, pela permanência do sinal e pela continuidade da função $h(t) = t^p$, temos que

$$d_f(\alpha) \leq \frac{(\lim_{j \rightarrow \infty} c_j)^p}{\alpha^p} = \frac{\|f\|_{L^{p,\infty}}^p}{\alpha^p}.$$

De maneira análoga temos que

$$d_f(\alpha) \leq \frac{\|f\|_{L^{q,\infty}}^q}{\alpha^q}.$$

Deste modo,

$$d_f(\alpha) \leq \min \left\{ \frac{\|f\|_{L^{p,\infty}}^p}{\alpha^p}, \frac{\|f\|_{L^{q,\infty}}^q}{\alpha^q} \right\}.$$

Agora estimaremos a norma L^r de f . Pelo Proposição 3.3.2

$$\|f\|_{L^r}^r = r \int_0^\infty \alpha^{r-1} d_f(\alpha) d\alpha.$$

Segue que

$$\|f\|_{L^r} \leq r \int_0^\infty \alpha^{r-1} \min \left\{ \frac{\|f\|_{L^{p,\infty}}^p}{\alpha^p}, \frac{\|f\|_{L^{q,\infty}}^q}{\alpha^q} \right\} d\alpha.$$

Por hipótese temos que $p < q$, utilizando o fato de $h(t) = t^{\frac{1}{q-p}}$ ser crescente temos que

$$\frac{\|f\|_{L^{p,\infty}}^p}{\alpha^p} \leq \frac{\|f\|_{L^{q,\infty}}^q}{\alpha^q} \iff \alpha^{q-p} \leq \frac{\|f\|_{L^{q,\infty}}^q}{\|f\|_{L^{p,\infty}}^p} \iff \alpha \leq \left(\frac{\|f\|_{L^{q,\infty}}^q}{\|f\|_{L^{p,\infty}}^p} \right)^{\frac{1}{q-p}}$$

Defina $B = \left(\frac{\|f\|_{L^{q,\infty}}^q}{\|f\|_{L^{p,\infty}}^p} \right)^{\frac{1}{q-p}}$. Dessa forma, temos que

$$\min \left\{ \frac{\|f\|_{L^{p,\infty}}^p}{\alpha^p}, \frac{\|f\|_{L^{q,\infty}}^q}{\alpha^q} \right\} = \frac{\|f\|_{L^{p,\infty}}^p}{\alpha^p}, \text{ se } \alpha \leq B$$

E, temos que

$$\min \left\{ \frac{\|f\|_{L^{p,\infty}}^p}{\alpha^p}, \frac{\|f\|_{L^{q,\infty}}^q}{\alpha^q} \right\} = \frac{\|f\|_{L^{q,\infty}}^q}{\alpha^q}, \text{ se } \alpha > B$$

Voltando para a integral temos que

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^r}^r &= r \int_0^\infty \alpha^{r-1} \min \left\{ \frac{\|f\|_{L^{p,\infty}}^p}{\alpha^p}, \frac{\|f\|_{L^{q,\infty}}^q}{\alpha^q} \right\} d\alpha = r \int_0^B \alpha^{r-1} \frac{\|f\|_{L^{p,\infty}}^p}{\alpha^p} d\alpha + r \int_B^\infty \alpha^{r-1} \frac{\|f\|_{L^{q,\infty}}^q}{\alpha^q} d\alpha \\ &= r \int_0^B \alpha^{r-p-1} \|f\|_{L^{p,\infty}}^p d\alpha + r \int_B^\infty \alpha^{r-1-q} \|f\|_{L^{q,\infty}}^q d\alpha \\ &= \|f\|_{L^{p,\infty}}^p \int_0^B \alpha^{r-p-1} d\alpha + r \|f\|_{L^{q,\infty}}^q \int_B^\infty \alpha^{r-1-q} d\alpha. \end{aligned}$$

Calculando as integrais separadamente temos que

$$\int_0^B \alpha^{r-p-1} d\alpha = \frac{\alpha^{r-p}}{r-p} \Big|_0^B = \frac{B^{r-p}}{r-p},$$

$$\begin{aligned} \int_B^\infty \alpha^{r-p-1} d\alpha &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_B^t \alpha^{r-q-1} d\alpha \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\alpha^{r-q}}{r-q} \Big|_B^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t^{r-q}}{r-q} - \frac{B^{r-q}}{r-q} \right), \end{aligned}$$

onde a integral converge para $r-p > 0$ e $r-q < 0$.

Donde, segue que

$$\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^{p,\infty}}^p \frac{B^{r-p}}{r-p} + \|f\|_{L^{q,\infty}} \frac{B^{r-q}}{q-r}$$

Substituindo $B = \left(\frac{\|f\|_{L^{q,\infty}}^q}{\|f\|_{L^{p,\infty}}^p} \right)^{\frac{1}{q-p}}$ segue o resultado. O caso $q = \infty$ é mais fácil. Por definição, temos que

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^\infty} &= \inf \left\{ B > 0 : \mu(\{x : |f(x)| > B\}) = 0 \right\} \text{ e,} \\ d_f(\alpha) &= \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}) \end{aligned}$$

Dessa forma, $d_f(\alpha) = 0$ quando $\alpha \leq \|f\|_{L^\infty}$. Pelo Teorema 2.1.12 temos que $d_f(\alpha) \leq \alpha^{-p} \|f\|_{L^{p,\infty}}^p$ quando $\alpha \leq \|f\|_{L^\infty}$. Daí,

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^r}^r &= r \int_0^\infty \alpha^{r-1} d_f(\alpha) d\alpha \\ &\leq r \int_0^{\|f\|_{L^\infty}} \alpha^{r-1} \alpha^{-p} \|f\|_{L^{p,\infty}}^p d\alpha \\ &= r \|f\|_{L^{p,\infty}}^p \int_0^{\|f\|_{L^\infty}} \alpha^{r-p-1} d\alpha \\ &= r \|f\|_{L^{p,\infty}}^p \frac{\alpha^{r-p}}{r-p} \Big|_0^{\|f\|_{L^\infty}} \\ &= \frac{r}{r-p} \|f\|_{L^{p,\infty}}^p \|f\|_{L^\infty}^{r-p}. \end{aligned}$$

Assim, tirando a r -ésima raiz temos que

$$\|f\|_{L^\infty} \leq \left(\frac{r}{r-p} \right)^{\frac{1}{r}} \|f\|_{L^{p,\infty}}^{\frac{p}{r}} \|f\|_{L^\infty}^{\frac{r-p}{r}}.$$

□

Observe que tomando $L^{p,\infty}$ e $L^{q,\infty}$ como L^p e L^q , respectivamente, a desigualdade é válida com constante igual 1.

Muitas vezes é conveniente trabalhar com funções que estão apenas localmente em algum espaço L^p . Isso nos leva a seguinte definição.

Definição 3.5.1. Seja $\omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, para $0 < p < \infty$, o espaço $L^p_{\text{loc}}(\Omega, |\cdot|)$ é o conjunto de todas as funções f Lebesgue-mensuráveis em $\mathbb{R}^n$ que satisfazem

$$\int_K |f(x)|^p dx < \infty,$$

para qualquer subconjunto compacto K de $\mathbb{R}^n$. Funções que satisfazem essa definição para $p = 1$ são chamadas de funções localmente integráveis em Ω e denotaremos por $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

Observação 8. A união de todas os espaços $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leq p \leq \infty$ está contida em $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Mostraremos mais que isso, se f está em $L^p(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$ e Ω é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, então f é localmente integrável.

De fato, caso $p = 1$ é imediato, pois dado $K \subset \Omega$, temos que

$$\int_K |f| d\mu \leq \int_{\Omega} |f| d\mu < \infty.$$

Assumindo $1 < p \leq \infty$ e q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, para qualquer $f \in L^p(\Omega)$ e $K \subset \Omega$ compacto, pela desigualdade de Hölder temos que

$$\begin{aligned} \int_K |f| dx &= \int_{\Omega} |f| \chi_K dx \\ &\leq \left| \int_{\Omega} |f|^p dx \right|^{\frac{1}{p}} \left| \int_K dx \right|^{\frac{1}{q}} \\ &= \|f\|_{L^p}(K)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Como $f \in L^p(\Omega)$ e K é compacto temos que $\|f\|_{L^p} \mu(K)^{\frac{1}{p}} < \infty$. Dessa forma, segue que $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Tomando $\Omega = \mathbb{R}^n$, já que $\mathbb{R}^n$ é aberto de $\mathbb{R}^n$, segue o resultado.

Observação 9. De modo geral, para $0 < p < q < \infty$ segue que

$$L^q(\mathbb{R}^n) \subset L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \subset L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$$

De fato, sejam $f \in L^q$ e K compacto.

1. Observe que $\int_K |f|^q d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} |\chi_K f|^q d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f|^q d\mu < \infty$. Assim, $L^q(\mathbb{R}^n) \subset L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.
2. Sejam $f \in L^q_{\text{loc}}$ e $E = \{x \in K : |f(x)| \leq 1\}$. Então,

$$\int_K |f|^p d\mu = \int_E |f|^p d\mu + \int_{E^c} |f|^p d\mu.$$

Agora veja que

$$\text{a) } \int_E |f|^p d\mu \leq \int_E 1 d\mu = \mu(E) < \mu(K) < \infty.$$

$$\text{b) } \text{Se } x \in E^c \text{ então } |f(x)| > 1 \text{ daí } |f(x)|^p \leq |f(x)|^q. \text{ Logo, } \int_{E^c} |f|^p d\mu \leq \int_{E^c} |f|^q d\mu < \int_K |f|^q d\mu < \infty, \text{ pois } E^c \subset K.$$

Assim,

$$\int_K |f|^p d\mu \leq \mu(E) + \int_{E^c} |f|^q d\mu < \infty.$$

Dessa forma, temos que $L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \subset L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Donde, $L^q(\mathbb{R}^n) \subset L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \subset L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Funções em $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $0 < p < 1$ podem não ser localmente diferenciáveis, como mostra o próximo exemplo.

Exemplo 2. Tome $f(x) = |x|^{-n-\alpha} \chi_{|x| \leq 1}$ que está em $L^p(\mathbb{R}^n)$ quando $\alpha > 0$ e $p < \frac{n}{n+\alpha}$. Observe que f não é diferenciável sobre nenhum conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$ contendo a origem. Segue diretamente do teorema 2.1.8.

4 CONVOLUÇÃO E APROXIMAÇÕES DA IDENTIDADE

A noção de convolução pode ser definida em espaços de medidas munidos de uma estrutura de grupo. Mas, o ambiente mais natural para definir convolução é o contexto de grupos topológicos. Isso nos permite estudar esse conceito em $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{Z}^n$ e $\mathbb{T}^n$ de forma unificada. Além disso, como as propriedades básicas de convoluções e aproximações da identidade não requerem comutatividade da operação de grupo, podemos supor que os grupos não são necessariamente abelianos. Assim, os resultados desta seção também podem ser aplicados a estruturas não abelianas como o grupo de Heisenberg.

4.1 Grupos Topológicos

Um grupo topológico G é um espaço topológico de Hausdorff que também é um grupo com a operação $\cdot : G \times G \rightarrow G$ que denotaremos por $\cdot(x, y) = xy$ tal que as aplicações $(x, y) \mapsto xy$ e $x \mapsto x^{-1}$ são contínuas. Além disso, diremos que G é localmente compacto quando a topologia subjacente é localmente compacta e de Hausdorff.

Exemplo 3. Os exemplos usuais são fornecidos pelos espaços $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{Z}^n$ com as topologias e operações usuais. Outro exemplo é o espaço $\mathbb{T}^n$ definido da seguinte forma

$$\mathbb{T}^n = [0, 1] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1]$$

com a topologia produto usual e a operação da adição do grupo de n -uplas mod 1, isto é,

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = ((x_1 + y_1) \bmod 1, \dots, (x_n + y_n) \bmod 1)$$

Seja G um grupo topológico localmente compacto. Sabe-se que G possui uma medida positiva λ nos conjuntos de Borel que é diferente de zero em todos os conjuntos abertos não vazios e é invariante à esquerda, o que significa que

$$\lambda(tA) = \lambda(A), \text{ (em que } ta \doteq \{ta : a \in A\} \text{).}$$

para todos os conjuntos mensuráveis A e todo $t \in G$. Tal medida λ é chamada de **medida de Haar** (à esquerda) de G . Para uma prova construtiva da existência da medida de Haar indicamos [5]. Além disso, a medida de Haar é única, a menos de multiplicações por constantes positivas. Se G é abeliano então toda medida de Haar invariante à esquerda também será invariante à direita. Isto é, $\lambda(tA) = \lambda(At) = \lambda(A) \forall A \subset G$ e $t \in G$ tal que A é mensurável.

4.2 Convolução

Ao longo desta seção veremos a definição de convolução e algumas das suas propriedades, para isso fixaremos um grupo localmente compacto G e uma medida de Haar invariante à esquerda em G . Os espaços $L^p(G, \lambda)$ e $L^{p,\infty}(G, \lambda)$ serão simplesmente denotados por $L^p(G)$ e $L^{p,\infty}(G)$.

A invariância à esquerda de λ garante que para cada $t \in G$ e $f \in L^1(G)$ temos

$$\int_G f(xt) d\lambda(x) = \int_G f(x) d\lambda(x).$$

Definição 4.2.1. Sejam $f, g \in L^1(G)$. Definamos a convolução $f * g$ por

$$(f * g)(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x) d\lambda(y)$$

Fazendo uma simples mudança de variáveis tomando $z = x^{-1}y$ temos que

$$(f * g)(x) = \int_G f(xz)g(z^{-1}) d\lambda(z)$$

usando a invariância à esquerda de λ . Observe que tomando $G = \mathbb{R}^n$ com a estrutura da adição usual, então $y^{-1} = -y$ e a convolução é escrita com

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y) dy$$

Observação 10. A integral $\int_G f(y)g(y^{-1}x) d\lambda(y)$ é bem definida (quando $f, g \in L^1(G)$), uma vez que a seguinte integral dupla converge absolutamente. De fato, usando o Teorema de Tonelli temos que

$$?? \int_G \int_G |f(y)||g(y^{-1}x)| d\lambda(y) d\lambda(x) = \int_G \int_G |f(y)||g(y^{-1}x)| d\lambda(x) d\lambda(y).$$

Donde, usando a invariância de λ temos

$$\begin{aligned} \int_G \int_G |f(y)||g(y^{-1}x)| d\lambda(x) d\lambda(y) &= \int_G |f(y)| \int_G |g(y^{-1}x)| d\lambda(x) d\lambda(y) \\ &= \int_G |f(y)| \int_G |g(x)| d\lambda(x) d\lambda(y) \\ &= \int_G |f(y)| \|g\|_{L^1(G)} d\lambda(y) \\ &= \|g\|_{L^1(G)} \int_G |f(y)| d\lambda(y) \\ &= \|g\|_{L^1(G)} \|f\|_{L^1(G)}. \end{aligned}$$

Como f e g pertencem a $L^1(G)$ temos que $\|g\|_{L^1(G)}\|f\|_{L^1(G)} < \infty$. O que nos permite concluir que

$$\|f * g\|_{L^1(G)} \leq \|f\|_{L^1(G)}\|g\|_{L^1(G)}. \quad (4.1)$$

Ou seja, a convolução de duas funções integráveis também é uma função integrável, e além disso, a sua norma L^1 é menor ou igual ao produto das normas L^1 de cada função.

Exemplo 4. Em $\mathbb{R}$ seja

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1, 1] \\ 0, & x \notin [-1, 1]. \end{cases}$$

Por definição, temos que

$$(f * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)f(x-y)dy.$$

Agora observe que,

$$f(x-y) = \begin{cases} 1, & y \in [x-1, x+1] \\ 0, & y \notin [x-1, x+1]. \end{cases}$$

Donde,

$$\begin{aligned} (f * f)(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(y)f(x-y)dy \\ &= \int_{[-1,1] \cap [x-1,x+1]} 1dy \\ &= |[-1,1] \cap [x-1,x+1]|. \end{aligned}$$

Veja que $[-1,1] \cap [x-1,x+1] = \emptyset$ para $x \leq -2$ ou $x \geq 2$. E, para $|x| \leq 2$ temos que $|[-1,1] \cap [x-1,x+1]| = 2 - |x|$.

Assim,

$$(f * f)(x) = 2 - |x|, \text{ se } |x| \leq 2.$$

Observe que $(f * f)$ é "mais suave" que f e, da mesma forma, obtemos que $f * f * f$ é "mais suave" que $f * f$.

Proposição 4.2.1. Para toda $f, g, h \in L^1(G)$ segue que

$$1. \quad f * (g * h) = (f * g) * h.$$

$$2. f * (g + h) = f * g + f * h \text{ e } (f + g) * h = f * h + g * h.$$

Demonstração. 1. Observe que

$$\begin{aligned} f * (g * h)(z) &= \int_G f(x)(g * h)(x^{-1}z) d\lambda(x) \\ &= \int_G f(x) \int_G g(y)h(y^{-1}x^{-1}z) d\lambda(y) d\lambda(x) \\ &= \int_G \int_G f(x)g(y)h(y^{-1}x^{-1}z) d\lambda(y) d\lambda(x) \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (f * g) * h(z) &= \int_G (f * g)(y)h(y^{-1}z) d\lambda(y) \\ &= \int_G \int_G f(x)g(x^{-1}y) d\lambda(x) h(y^{-1}z) d\lambda(y) \\ &= \int_G \int_G f(x)g(x^{-1}y)h(y^{-1}z) d\lambda(x) d\lambda(y) \\ &= \int_G \int_G f(x)g(y')h(y'^{-1}x^{-1}z) d\lambda(x) d\lambda(y'), \end{aligned}$$

onde no último passo foi feita a substituição $y' = x^{-1}y$, daí $y'y^{-1} = x^{-1}$ e $y^{-1} = y'^{-1}x^{-1}$.

Comparando $f * (g * h)$ com $(f * g) * h$ segue o que queríamos.

2.

$$\begin{aligned} (f * (g + h))(x) &= \int_G f(y)(g + h)(y^{-1}x) d\lambda(y) \\ &= \int_G f(y)[g(y^{-1}x) + h(y^{-1}x)] d\lambda(y) \\ &= \int_G f(y)g(y^{-1}x) d\lambda(y) + \int_G f(y)h(y^{-1}x) d\lambda(y) \\ &= (f * g)(x) + (f * h)(x). \end{aligned}$$

A outra parte segue de modo análogo.

□

4.3 Desigualdades Básicas da Convolução

Agora veremos algumas das principais desigualdades sobre convolução. A desigualdade fundamental envolvendo convolução é a seguinte.

Teorema 4.3.1. Seja $1 \leq p \leq \infty$. Para $f \in L^p(G)$ e $g \in L^1(G)$, temos que $g * f$ está bem definida em quase todo ponto e satisfaz

$$\|g * f\|_{L^p(G)} \leq \|g\|_{L^1(G)} \|f\|_{L^p(G)}$$

Demonstração. Podemos supor $1 < p < \infty$, pois os casos $p = 1$ (já fizemos na Observação 10) e $p = \infty$ são simples. Primeiro iremos mostrar que a convolução $|g| * |f|$ existe em quase todo ponto. De fato, por definição temos que

$$(|g| * |f|)(x) = \int_G |f(y^{-1}x)| |g(y)| d\lambda(y).$$

Aplicando a desigualdade de Hölder com respeito a medida $|g(y)| d\lambda(y)$ as funções $y \rightarrow f(y^{-1}x)$ e 1 com expoentes p e $p' = \frac{p}{p-1}$, respectivamente. Obtemos que

$$(|g| * |f|)(x) \leq \left(\int_G |f(y^{-1}x)|^p |g(y)| d\lambda(y) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_G |g(y)| d\lambda(y) \right)^{\frac{1}{p'}}$$

Tomando a norma L^p de ambos os lados e pela definição de p' temos que

$$\| |g| * |f| \|_{L^p} \leq \left(\|g\|_{L^1}^{p-1} \int_G \int_G |f(y^{-1}x)|^p |g(y)| d\lambda(y) d\lambda(x) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por 2.1.6 temos que,

$$\left(\|g\|_{L^1}^{p-1} \int_G \int_G |f(y^{-1}x)|^p |g(y)| d\lambda(y) d\lambda(x) \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\|g\|_{L^1}^{p-1} \int_G \int_G |f(y^{-1}x)|^p d\lambda(x) |g(y)| d\lambda(y) \right)^{\frac{1}{p}},$$

Daí,

$$\begin{aligned} \| |g| * |f| \|_{L^p} &\leq \left(\|g\|_{L^1}^{p-1} \int_G \int_G |f(y^{-1}x)|^p d\lambda(x) |g(y)| d\lambda(y) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\|g\|_{L^1}^{p-1} \int_G \int_G |f(x)|^p d\lambda(x) |g(y)| d\lambda(y) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\|f\|_{L^p}^p \|g\|_{L^1} \|g\|_{L^1}^{p-1} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^1} < \infty. \end{aligned}$$

Isto mostra que $|g| * |f|$ é finito λ -q.t.p. e satisfaz a desigualdade. Como $g * f \leq |g * f| \leq |g| * |f|$ segue que $g * f$ existe λ -q.t.p. e satisfaz a desigualdade. $\square$

Teorema 4.3.2 (Desigualdade de Young). Seja $1 \leq p, q, r \leq \infty$ satisfazendo $\frac{1}{q} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$. Então $f \in L^p(G)$ e $g \in L^r(G)$ satisfazendo $\|g\|_{L^r(G)} = \|\tilde{g}\|_{L^r(G)}$, onde $\tilde{g}(x) = g(x^{-1})$ temos que

$$\|f * g\|_{L^q(G)} \leq \|g\|_{L^r(G)} \|f\|_{L^p(G)}.$$

Demonstração. Observe que se $r < \infty$, temos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{q} + 1 + \frac{1}{p'} &= 1 + \frac{1}{r} \\ \frac{1}{q} + 1 + \frac{1}{r'} &= \frac{1}{p} + 1 \\ \frac{1}{q} + 1 + \frac{1}{r'} + \frac{1}{q'} &= 1 + 1.\end{aligned}$$

Assim, as hipóteses sobre os índices implicam que

$$\frac{1}{r'} + \frac{1}{q} + \frac{1}{p'} = 1, \quad \frac{p}{q} + \frac{p}{r'} = 1, \quad \frac{r}{q} + \frac{r}{p'} = 1.$$

Por definição temos que

$$|(f * g)(x)| = \left| \int_G f(y)g(y^{-1}x) d\lambda(y) \right|$$

Daí usando a desigualdade do módulo para integral, a hipótese sobre os índices e arrumando os termos

$$\begin{aligned}|(f * g)(x)| &\leq \int_G |f(y)| |g(y^{-1}x)| d\lambda(y) \\ &= \int_G |f(y)|^{\frac{p}{q} + \frac{p}{p'}} |g(y^{-1}x)|^{\frac{r}{q} + \frac{r}{p'}} d\lambda(y) \\ &= \int_G |f(y)|^{\frac{p}{p'}} \left(|f(y)|^{\frac{p}{q}} |g(y^{-1}x)|^{\frac{r}{q}} \right) |g(y^{-1}x)|^{\frac{r}{p'}} d\lambda(y).\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder (pois $\frac{1}{r'} + \frac{1}{p'} + \frac{1}{q} = 1$) segue que

$$\begin{aligned}&\int_G |f(y)|^{\frac{p}{p'}} \left(|f(y)|^{\frac{p}{q}} |g(y^{-1}x)|^{\frac{r}{q}} \right) |g(y^{-1}x)|^{\frac{r}{p'}} d\lambda(y) \\ &\leq \left[\int_G (|f(y)|^{\frac{p}{p'}})^{r'} d\lambda(y) \right]^{\frac{1}{r'}} \left[\int_G (|g(y^{-1}x)|^{\frac{r}{p'}})^{p'} d\lambda(y) \right]^{\frac{1}{p'}} \left[\int_G (|f(y)|^{\frac{p}{q}} |g(y^{-1}x)|^{\frac{r}{q}})^q d\lambda(y) \right]^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

Donde,

$$\begin{aligned}&\left[\int_G (|f(y)|^{\frac{p}{p'}})^{r'} d\lambda(y) \right]^{\frac{1}{r'}} \left[\int_G (|g(y^{-1}x)|^{\frac{r}{p'}})^{p'} d\lambda(y) \right]^{\frac{1}{p'}} \left[\int_G (|f(y)|^{\frac{p}{q}} |g(y^{-1}x)|^{\frac{r}{q}})^q d\lambda(y) \right]^{\frac{1}{q}} \\ &= \left[\int_G |f(y)|^p d\lambda(y) \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_G |g(y^{-1}x)|^r d\lambda(y) \right]^{\frac{1}{p'}} \left[\int_G |f(y)|^p |g(y^{-1}x)|^r d\lambda(y) \right]^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}\left[\int_G |f(y)|^p d\lambda(y) \right]^{\frac{1}{p}} &= \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{p}} \\ \left[\int_G |g(y^{-1}x)|^r d\lambda(y) \right]^{\frac{1}{p'}} &= \left[\int_G |\tilde{g}(x^{-1}y)|^r d\lambda(y) \right]^{\frac{1}{p'}}.\end{aligned}$$

Tomando $z = x^{-1}y$ temos que $xz = y$. Donde, pela invariância à esquerda temos que

$$\left[\int_G |\tilde{g}(x^{-1}y)|^r d\lambda(y) \right]^{\frac{1}{p'}} = \left[\int_G |\tilde{g}(z)|^r d\lambda(z) \right]^{\frac{1}{p'}} = \|\tilde{g}\|_{L^r}^{\frac{r}{p'}}.$$

Assim, temos que

$$|(f * g)(x)| \leq \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{p'}} \|\tilde{g}\|_{L^r}^{\frac{r}{p'}} \left[\int_G |f(y)|^p |g(y^{-1}x)|^r d\lambda(y) \right]^{\frac{1}{q}}.$$

Daí, aplicando a norma L^q e arrumando os termos temos que

$$\begin{aligned} \|(f * g)\|_{L^q} &\leq \| \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{p'}} \|\tilde{g}\|_{L^r}^{\frac{r}{p'}} \left[\int_G |f(y)|^p |g(y^{-1}x)|^r d\lambda(y) \right]^{\frac{1}{q}} \|_{L^q} \\ &= \left[(\|f\|_{L^p}^{\frac{p}{p'}})^q (\|\tilde{g}\|_{L^r}^{\frac{r}{p'}})^q \left[\int_G (|f(y)|^p |g(y^{-1}x)|^r d\lambda(y))^{\frac{1}{q}} \right]^q d\lambda(x) \right]^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{p'}} \|\tilde{g}\|_{L^r}^{\frac{r}{p'}} \left[\int_G \int_G (|f(y)|^p |g(y^{-1}x)|^r d\lambda(y))^{\frac{1}{q}} d\lambda(x) \right]^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Por Fubini, temos

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{p'}} \|\tilde{g}\|_{L^r}^{\frac{r}{p'}} \left[\int_G \int_G |f(y)|^p |g(y^{-1}x)|^r d\lambda(y) d\lambda(x) \right]^{\frac{1}{q}} &= \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{p'}} \|\tilde{g}\|_{L^r}^{\frac{r}{p'}} \times \\ &\times \left[\int_G \int_G |f(y)|^p |g(y^{-1}x)|^r d\lambda(x) d\lambda(y) \right]^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

Olhando apenas para o termo da integral temos

$$\left[\int_G \int_G |f(y)|^p |g(y^{-1}x)|^r d\lambda(x) d\lambda(y) \right]^{\frac{1}{q}} = \left[\|\tilde{g}\|_{L^r}^r \|f\|_{L^p}^p \right]^{\frac{1}{q}}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{p'}} \|\tilde{g}\|_{L^r}^{\frac{r}{p'}} \left[\int_G \int_G |f(y)|^p |g(y^{-1}x)|^r d\lambda(x) \right] &= \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{p'}} \|\tilde{g}\|_{L^r}^{\frac{r}{p'}} \left[\|\tilde{g}\|_{L^r}^r \|f\|_{L^p}^p \right]^{\frac{1}{q}} \\ &= \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{p'} + \frac{p}{q}} \|\tilde{g}\|_{L^r}^{\frac{r}{p'} + \frac{r}{q}} \\ &= \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^r} \\ &= \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^r}, \end{aligned}$$

pois por hipótese $\frac{p}{p'} + \frac{p}{q} = 1$, $\frac{r}{p'} + \frac{r}{q} = 1$ e $\|g\|_{L^r} = \|\tilde{g}\|_{L^r}$. Donde,

$$\|f * g\|_{L^q(G)} \leq \|g\|_{L^r(G)} \|f\|_{L^p(G)}$$

Por fim, observe que se $r = \infty$, as suposições em p e q implicam que $p = 1$ e $q = \infty$, caso em que a desigualdade é trivialmente válida. $\square$

Observação 11. O Teorema 4.3.1 é apenas um caso especial da desigualdade de Young em que a função g pode estar em qualquer espaço $L^r(G)$ para $1 \leq r \leq \infty$.

Daremos agora uma versão do teorema anterior para espaços L^p fracos.

Teorema 4.3.3 (Desigualdade de Young para espaços fracos). Sejam G um grupo localmente compacto e λ uma medida de Haar invariante à esquerda satisfazendo $\lambda(A) = \lambda(A^{-1})$, para cada $A \subset G$. Considere $1 \leq p < \infty$ e $1 < q, r < \infty$, satisfazendo $\frac{1}{q} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$. Então existe uma constante $C_{p,q,r} > 0$ tal que dados $f \in L^p(G)$ e $g \in L^{r,\infty}(G)$, a convolução $f * g$ existe λ -q.t.p., e satisfaz

$$\|f * g\|_{L^{q,\infty}(G)} \leq C_{p,q,r} \|g\|_{L^{r,\infty}(G)} \|f\|_{L^p(G)}.$$

Demonstração. Como nas demonstrações anteriores, primeiros iremos obter a desigualdade para a convolução dos valores absolutos das funções. Isso implica que $|f| * |g| < \infty$ λ -q.t.p., e assim, $f * g$ existe λ -q.t.p. e satisfaz $|f * g| < |f| * |g|$. Podemos portanto assumir que $f, g \geq 0$ λ -q.t.p. A prova é baseada numa divisão adequada da função g . Seja M um número real positivo a ser escolhido posteriormente. Defina $g_1 = g\chi_{|g| \leq M}$ e $g_2 = g\chi_{|g| > M}$. Observe que

$$d_{g_1}(\alpha) = \begin{cases} 0, & \alpha \geq M \\ d_g(\alpha) - d_g(M), & \alpha < M \end{cases}$$

$$d_{g_2}(\alpha) = \begin{cases} d_g(\alpha), & \alpha > M \\ d_g(M), & \alpha \leq M \end{cases}$$

Agora observe que $g = g_1 + g_2$. Donde, $f * g = f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2$. Daí, pela proposição 3.3.1, temos que para cada $\beta > 0$ segue que

$$d_{f*g}(\beta) = d_{(f*g_1)+(f*g_2)}(\beta) \leq d_{f*g_1}\left(\frac{\beta}{2}\right) + d_{f*g_2}\left(\frac{\beta}{2}\right).$$

Assim é suficiente mostrar a desigualdade para as funções distribuições de $f * g_1$ e $f * g_2$. Observe que, utilizando a definição temos que

$$\|g_1\|_{L^s}^s = \int_G |g_1(x)|^s d\lambda(x) = \int_G (g_1(x))^s d\lambda(x)$$

Pela caracterização da norma L^p utilizando a função distribuição e pela definição de g_1 segue que

$$\begin{aligned} \int_G (g_1(x))^s d\lambda(x) &= s \int_0^\infty \alpha^{s-1} d_{g_1}(\alpha) d\alpha \\ &= s \int_0^M \alpha^{s-1} (d_g(\alpha) - d_g(M)) d\alpha \\ &= s \int_0^M \alpha^{s-1} d_g(\alpha) d\alpha - s \int_0^M \alpha^{s-1} d_g(M) d\alpha. \end{aligned}$$

Agora, pela definição da norma $L^{r,\infty}$

$$s \int_0^M \alpha^{s-1} d_g(\alpha) d\alpha - s \int_0^M \alpha^{s-1} d_g(M) d\alpha \leq s \int_0^M \alpha^{s-1-r} \|g\|_{L^{r,\infty}}^r d\alpha - s \int_0^M \alpha^{s-1} d_g(M) d\alpha.$$

Assim, calculando as integrais segue que

$$\begin{aligned} & s \int_0^M \alpha^{s-1-r} \|g\|_{L^{r,\infty}}^r d\alpha - s \int_0^M \alpha^{s-1} d_g(M) d\alpha \\ &= \|g\|_{L^{r,\infty}}^r s \int_0^M \alpha^{s-1-r} d\alpha - d_g(M) s \int_0^M \alpha^{s-1} d\alpha \\ &= \|g\|_{L^{r,\infty}}^r \frac{s}{s-r} (\alpha^{s-r}) \Big|_{\alpha=0}^{\alpha=M} - d_g(M) \frac{s}{s} (\alpha^s) \Big|_{\alpha=0}^{\alpha=M} \\ &= \|g\|_{L^{r,\infty}}^r \frac{s}{s-r} M^{s-r} - d_g(M) M^s \\ &= \frac{s}{s-r} \|g\|_{L^{r,\infty}}^r M^{s-r} - d_g(M) M^s, \end{aligned}$$

quando $s < \infty$.

Daí, temos que $\|g_1\|_{L^s}^s \leq \frac{s}{s-r} \|g\|_{L^{r,\infty}}^r M^{s-r} - d_g(M) M^s$, quando $s < \infty$.

Analogamente $\|g_2\|_{L^t}^t \leq M^{t-r} \|g\|_{L^{r,\infty}}^r (\frac{r}{r-t})$. Como $\frac{1}{r} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{q}$ e segue que $1 < r < p'$. Fazendo $t = 1$, $s = p'$ e aplicando a desigualdade de Hölder, quando $p' < \infty$, temos que

$$|(f * g)(x)| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}.$$

Daí, utilizando a desigualdade encontrada para $\|g_1\|_{L^p}$ temos que se $p' < \infty$

$$|(f * g)(x)| \leq \|f\|_{L^p}^p \left(\frac{p'}{p'-r} M^{p'-r} \|g\|_{L^{r,\infty}}^r \right)^{\frac{1}{p'}},$$

e,

$$|(f * g)(x)| \leq \|f\|_{L^p} M, \text{ se } p' = \infty.$$

Se $p' < \infty$ escolha M tal que

$$M = (\beta^{p'} 2^{-p'} r q^{-1} \|f\|_{L^p}^{-p'} \|g\|_{L^{r,\infty}}^{-r})^{\frac{1}{p'-r}},$$

e se $p' = \infty$ tome $M = \frac{B}{2\|f\|_{L^1}}$. Para essa escolha de M temos que $d_{f*g_1}(\frac{\beta}{2}) = 0$. Agora, pelo teorema anterior, tomando $t = 1$ temos que

$$\|f * g_2\| \leq \|f\|_{L^p} \|g_2\|_{L^1}.$$

Daí,

$$\|f * g_2\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^r} \frac{r}{r-1} M^{1-r} \|g\|_{L^{r,\infty}}^r.$$

Assim, para o valor M escolhido e utilizando o Teorema 2.1.12, obtemos

$$\begin{aligned}
 d_{f*g}(\beta) &\leq d_{f*g_2}\left(\frac{\beta}{2}\right) \\
 &\leq (2\|f * g_2\|_{L^p} B^{-1})^p \\
 &\leq (2r\|f\|_{L^p} M^{1-r}\|g\|_{L^{r,\infty}}(r-1)^{-1}\beta^{-1})^p \\
 &= C_{p,q,r}^q \beta^{-q} \|f\|_{L^p}^q \|g\|_{L^{r,\infty}}^q,
 \end{aligned}$$

que é a desigualdade necessária. Esta prova dá que a constante $C_{p,q,r}$ explode com $(r-1)^{-\frac{p}{q}}$ quando $r \rightarrow 1$. $\square$

4.4 Aproximação da Identidade

Introduziremos agora a noção de aproximação da identidade. Note que $L^1(G)$ pode não ter um elemento unitário, para a convolução. Isto é, não necessariamente existe $f_0 \in L^1(G)$ tal que

$$f_0 * f = f = f * f_0,$$

para cada $f \in L^1(G)$. Em particular, este é o caso quando $G = \mathbb{R}$, de fato, a única f_0 que satisfaz a propriedade não é uma função, mas sim a distribuição delta de Dirac. É razoável, portanto, introduzir a noção de unidade ou aproximações da identidade. Uma família de funções k_ε com a propriedade $k_\varepsilon * f \rightarrow f$ em L^1 quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Definição 4.4.1. Uma aproximação da identidade (quando $\varepsilon \rightarrow 0$) é uma família de funções $\{k_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ em $L^1(G)$ com três propriedades

1. Existe uma constante $c > 0$ tal que $\|k_\varepsilon\|_{L^1(G)} \leq c$, $\forall \varepsilon > 0$
2. $\int_G k_\varepsilon(x) d\lambda(x) = 1$, $\forall \varepsilon > 0$
3. Para qualquer vizinhança V do elemento identidade e do grupo G temos que

$$\int_V |k_\varepsilon(x)| d\lambda(x) \rightarrow 0 \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0$$

Observação 12. É comum usar uma sequência ao invés de uma família. Neste caso, a terceira propriedade 3 vale quando $n \rightarrow \infty$.

Exemplo 5. Em $\mathbb{R}$, seja $P(x) = (\pi(x^2 + 1))^{-1}$ e $P_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}P(\varepsilon^{-1}x)$ para $\varepsilon > 0$. Como P_ε e P tem a mesma norma L^1 e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\arctan(x) - \arctan(-x)] = \left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

A propriedade 2 é satisfeita. A propriedade 3 segue do fato que

$$\frac{1}{\pi} \int_{|x| \geq \delta} \frac{1}{\varepsilon \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2 + 1} dx = 1 - \frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{\delta}{\varepsilon} \right) \rightarrow 0, \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

A função P_ε é chamada **núcleo de Poisson**. O núcleo de Poisson pode ser substituído por qualquer função integrável de integral 1.

Teorema 4.4.1. Seja k_ε uma aproximação da identidade em um grupo localmente compacto G com λ medida de Haar à esquerda.

1. Se $f \in L^p(G)$ para $1 \leq p < \infty$, então $\|k_\varepsilon * f - f\|_{L^p(G)} \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.
2. Quando $p = \infty$, o seguinte é válido: Se f é contínua em uma vizinhança de um subconjunto compacto K de G , então $\|k_\varepsilon * f - f\|_{L^\infty(K)} \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Demonstração. Começamos com o caso $1 \leq p < \infty$. Recordamos que as funções contínuas com suporte compacto são densas em L^p para espaços de Hausdorff localmente compacto munido com medidas decorrentes de funcionais lineares não negativos (veja [4]). Para uma função contínua g suportada em um conjunto compacto L , pelo Teorema da Convergência Dominada, temos que

$$\int_G |g(h^{-1}x) - g(x)|^p d\lambda(x) \rightarrow 0,$$

quando $h \rightarrow e$. Agora, dada $f \in L^p(G)$, usando a densidade das funções contínuas de suporte compacto em L^p e o limite descrito acima temos

$$\int_G |f(h^{-1}x) - f(x)|^p d\lambda(x) \rightarrow 0,$$

quando $h \rightarrow e$. Daí, dado $\delta > 0$ existe uma vizinhança V de e tal que

$$h \in V \implies \int_G |f(h^{-1}x) - f(x)|^p d\lambda(x) < \left[\frac{\delta}{2c} \right]^p,$$

onde c é a constante da Definição 4.4.1. E, pelo terceiro item da definição 4.4.1, existe ε_0 tal que $\int_{V^c} |k_\varepsilon(y)| d\lambda(y) \leq \frac{\delta}{4\|f\|_{L^p}}$, para cada $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Como k_ε tem integral constante igual 1 para todo $\varepsilon > 0$, temos

$$\begin{aligned} (k_\varepsilon * f)(x) - f(x) &= (k_\varepsilon * f)(x) - f(x) \int_G h_\varepsilon(y) d\lambda(y) \\ &= \int_G (f(y^{-1}x) - f(x)) k_\varepsilon(y) d\lambda(y) \\ &= \int_V (f(y^{-1}x) - f(x)) k_\varepsilon(y) d\lambda(y) + \int_{V^c} (f(y^{-1}x) - f(x)) k_\varepsilon(y) d\lambda(y). \end{aligned}$$

Tomando a norma L^p e usando a desigualdade de Minkowski para integral (veja [4]) temos que

$$\begin{aligned}
 \left\| \int_V (f(y^{-1}x) - f(x))k_\varepsilon(y)d\lambda(y) \right\|_{L^p(G, d\lambda(x))} &\leq \int_V \|f(y^{-1}x) - f(x)\|_{L^p(G, d\lambda(x))} |k_\varepsilon(y)| d\lambda(y) \\
 &\leq \int_V \frac{\delta}{2c} |k_\varepsilon(y)| d\lambda(y) \\
 &\leq \frac{\delta}{2c} \int_G |k_\varepsilon(y)| d\lambda(y) \\
 &= \frac{\delta}{2c} \|k_\varepsilon\|_{L^1(G)} \leq \frac{\delta}{2}.
 \end{aligned}$$

Além disso,

$$\left\| \int_{V^c} (f(y^{-1}x) - f(x))k_\varepsilon(y)d\lambda(y) \right\|_{L^p(G, d\lambda(x))} \leq \int_{V^c} 2\|f\|_{L^p(G)} |k_\varepsilon(y)| d\lambda(y) < \frac{\delta}{2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \left\| \int_V (f(y^{-1}x) - f(x))k_\varepsilon(y)d\lambda(y) \right\|_{L^p(G, d\lambda(x))} &< \frac{\delta}{2}, \text{ e} \\
 \left\| \int_{V^c} (f(y^{-1}x) - f(x))k_\varepsilon(y)d\lambda(y) \right\|_{L^p(G, d\lambda(x))} &< \frac{\delta}{2}.
 \end{aligned}$$

Concluindo que

$$\begin{aligned}
 \|(k_\varepsilon * f)(x) - f(x)\|_{L^p(G, d\lambda(x))} &\leq \left\| \int_V (f(y^{-1}x) - f(x))k_\varepsilon(y)d\lambda(y) \right\|_{L^p(G, d\lambda(x))} \\
 &\quad + \left\| \int_{V^c} (f(y^{-1}x) - f(x))k_\varepsilon(y)d\lambda(y) \right\|_{L^p(G, d\lambda(x))} \\
 &< \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = 2\frac{\delta}{2} = \delta.
 \end{aligned}$$

O caso $p = \infty$ segue de forma similar. Como f é contínua, logo é uniformemente contínua em K , dado $\delta > 0$ considere uma vizinhança V de $e \in G$ tal que

$$h \in V \implies |f(h^{-1}x) - f(x)| < \frac{\delta}{2c},$$

para todo $x \in K$ onde c é como na propriedade 1 da Definição da aproximação da identidade, daí considere $\varepsilon_0 > 0$ tal que $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ temos que

$$\int_{V^c} |k_\varepsilon(y)| d\lambda(y) < \frac{\delta}{4\|f\|_{L^\infty}}.$$

Dessa forma, podemos concluir

$$\begin{aligned}
 \sup_{x \in K} |(k_\varepsilon * f)(x) - f(x)| &\leq \int_V |k_\varepsilon(y)| \sup_{x \in K} |f(y^{-1}x) - f(x)| d\lambda(y) \\
 &\quad + \int_{V^c} |k_\varepsilon(y)| \sup_{x \in K} |f(y^{-1}x) - f(x)| d\lambda(y) \\
 &\leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.
 \end{aligned}$$

o que mostra que $k_\varepsilon * f$ converge uniformemente para f em K quando $\varepsilon \rightarrow 0$

□

Uma simples modificação no teorema anterior nos dá o resultado seguinte.

Teorema 4.4.2. Seja k_ε uma família de funções em um grupo localmente compacto que satisfaz as propriedades 1 e 3 da definição da aproximação da identidade e, além disso,

$$\int_G k_\varepsilon(x) d\lambda(x) = a \in \mathbb{C}, \forall \varepsilon > 0.$$

Seja $f \in L^p(G)$ para $1 \leq p \leq \infty$.

1. Se $1 \leq p < \infty$, então $\|k_\varepsilon * f - af\|_{L^p(G)} \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.
2. Se $p = \infty$ e f é contínua em um compacto $K \subset G$, então

$$\|k_\varepsilon * f - af\|_{L^\infty(K)} \rightarrow 0$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

5 INTERPOLAÇÃO

A teoria de interpolação de operadores é vasta e extensa. Nesta seção estamos preocupados apenas com o Teorema da Interpolação de Riesz-Thorin. Começamos estabelecendo os requisitos necessários para formular tal resultado. Sejam (X, μ) e (Y, ν) dois espaços de medida. Suponha que nos seja dado um operador linear T , inicialmente definido no conjunto das funções simples em X , tal que para toda f simples, $T(f)$ é uma função μ mensurável em Y . Sejam $0 < p < \infty$ e $0 < q < \infty$. Se existe uma constante $C_{p,q} > 0$ tal que para todas funções simples de f em X temos

$$\|T(f)\|_{L^q(Y, \nu)} \leq C_{p,q} \|f\|_{L^p(X, \mu)}$$

então, por densidade, T admite uma única extensão limitada de $L^p(X, \mu)$ a $L^q(Y, \nu)$. Esta extensão também será denotada por T . Os operadores contínuos em L^p com valores em L^q são chamados do tipo (p, q) forte.

5.1 O Teorema da Interpolação de Riesz-Thorin

O Teorema de Interpolação de Riesz-Thorin assume estimativas forte de um operador definido em L^p e L^q , mas produz uma limitação natural na norma do operador nos espaços intermediários. Infelizmente, é mais aplicável para operadores lineares e, em alguns casos, para operadores sublineares (geralmente por um processo de linearização), mas não se aplica a operadores quase lineares sem uma perda na limitação.

Lembre-se que uma função simples é dita finitamente simples se for suportada em um conjunto de medidas finitas. Funções finitamente simples são densas em $L^p(X, \mu)$, para $0 < p < \infty$ sempre que (X, μ) é um espaço σ -finito.

Definição 5.1.1. Seja T um operador definido em um espaço linear de funções mensuráveis (a valor complexo e definidos em um espaço (X, μ)) e tomando valores no conjunto de todas funções mensuráveis de valor complexo que são finitas, para quase todo ponto, em um espaço de medida $(\mathcal{Y}, \nu)$. Então,

1. T é chamada **linear** se para todas funções f, g e $\lambda \in \mathbb{C}$, temos

$$T(f + g) = T(f) + T(g) \text{ e } T(\lambda f) = \lambda T(f)$$

2. T é dita **sublinear** se para todas funções f, g e $\lambda \in \mathbb{C}$, temos

$$|T(f+g)| \leq |T(f)| + |T(g)| \text{ e } |T(\lambda f)| = |\lambda| |T(f)|$$

3. T é chamada **quase linear** se para todas funções f, g e $\lambda \in \mathbb{C}$, temos

$$|T(f+g)| \leq k(|T(f)| + |T(g)|) \text{ e } |T(\lambda f)| = |\lambda| |T(f)|$$

para alguma constante $k > 0$. A sublinearidade é um caso especial da quase linearidade.

Com o objetivo de apresentar a demonstração do Teorema de Interpolação de Riezs-Thorin primeiro nós apresentaremos um resultado de análise complexa. Para mostrar Lema 5.1.1 precisaremos de um resultado auxiliar no qual demonstraremos abaixo.

Proposição 5.1.1. Seja $\bar{S} = \mathbb{R} \times [0, 1]$. Se $f(z)$ é analítica em $\bar{S}$ e contínua e limitada em S . Então,

$$\sup_{z \in S} |f(z)| \leq \max \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(it)|, \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(1+it)| \right).$$

Demonstração. Primeiro, suponha que $f(z) \rightarrow 0$ quando $|\Re z| \rightarrow \infty$. Considere a aplicação $h : S \mapsto \mathbb{C}$ definida por

$$h(z) = \frac{e^{i\pi z} - i}{e^{i\pi z} + i}, \quad z \in S$$

Note que h é uma aplicação bijetiva de S em $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\} - \{\pm 1\}$, é analítica em $\bar{S}$ e mapeia ∂S em $\{|z| = 1\} - \{\pm 1\}$. Portanto, $G(z) := f(h^{-1}(z))$ é limitada e contínua em U e analítica no interior de $\bar{U}$. Além disso, por causa de $\lim_{\Re(z) \rightarrow \infty} f(z) = 0$, $\lim_{z \rightarrow \pm 1} G(z) = 0$ e podemos estender G para uma função contínua em $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. Assim, pelo o princípio do módulo máximo, temos que

$$|G(z)| \leq \max_{|\omega|=1} |G(\omega)| = \max \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(it)|, \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(1+it)| \right),$$

o que implica a afirmação neste caso.

Em seguida, se f é uma função geral como na suposição, então consideramos

$$f_{\delta, z_0}(z) = e^{\delta(z-z_0)^2} f(z), \quad \delta > 0, \quad z_0 \in \bar{S}.$$

Como $|e^{\delta(z-z_0)^2}| \leq e^{\delta(x^2-y^2)}$ com $z-z_0 = x+iy$, $-1 \leq x \leq 1$ e $y \in \mathbb{R}$, temos que $f_{\delta, z_0} \rightarrow 0$ quando $|\Re z| \rightarrow \infty$. Portanto,

$$|f(z_0)| = |f_{\delta, z_0}(z_0)| \leq \max \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} |f_{\delta, z_0}(it)|, \sup_{t \in \mathbb{R}} |f_{\delta, z_0}(1+it)| \right) \leq e^{\delta} \max \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(it)|, \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(1+it)| \right).$$

Passando o limite para $\delta \rightarrow 0$, como $z_0 \in S$ é arbitrário, obtemos o resultado desejado. $\square$

Lema 5.1.1 (Lema das Três Retas). Seja F uma função analítica na faixa aberta $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \Re(z) < 1\}$, contínua e limitada no fecho de S tal que $|F(z)| \leq B_0$ quando $\Re(z) = 0$ e $|F(z)| \leq B_1$ quando $\Re(z) = 1$ com $0 < B_0 < B_1 < \infty$. Então, $|F(z)| \leq B_0^{1-\theta} B_1^\theta$ quando $\Re(z) = \theta$, para qualquer $0 \leq \theta \leq 1$.

Demonstração. Sejam $B_0 := \sup_{t \in \mathbb{R}} |F(it)|$, $B_1 := \sup_{t \in \mathbb{R}} |F(1+it)|$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Defina

$$F_\lambda(z) = e^{\lambda z} F(z).$$

Então, pela Proposição 5.1.1, segue que $|F_\lambda(z)| \leq \max(B_0, e^\lambda B_1)$. Assim,

$$|F(\theta + it)| \leq e^{-\lambda \theta} \max(B_0, e^\lambda B_1) = e^{-\lambda \theta} B_0 = e^{-\theta \ln \left(\frac{B_0}{B_1} \right)} B_0 = \left(\frac{B_1}{B_0} \right)^\theta B_0 = B_1^\theta B_0^{1-\theta}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. e escolhendo $\lambda = \ln \left(\frac{B_0}{B_1} \right)$ (logo, $e^\lambda B_1 = B_0$). □

A seguir apresentaremos o famoso Teorema de Riez-Thorin

Teorema 5.1.2. Sejam (X, μ) e (Y, ν) dois espaços de medidas σ -finitas. Seja T um operador linear definido sobre todas as funções finitamente simples em X e tomando valores no conjunto das funções mensuráveis em Y . Seja $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ e suponha que

$$\|T(f)\|_{L^{q_0}} \leq M_0 \|f\|_{L^{p_0}},$$

$$\|T(f)\|_{L^{q_1}} \leq M_1 \|f\|_{L^{p_1}},$$

para todas as funções f finitamente simples em X . Então para todo $0 < \theta < 1$ temos

$$\|T(f)\|_{L^q} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_{L^p}$$

para todas as funções finitamente simples em X , com

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad \text{e} \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Consequentemente, quando $p < \infty$, por densidade, T tem uma única extensão única limitada de $L^p(X, \mu)$ para $L^q(Y, \nu)$ para p e q satisfazendo a condição acima.

Demonstração. Seja

$$f = \sum_{k=1}^m a_k e^{i\alpha_k} \chi_{A_k}$$

uma função finitamente simples em X , onde $a_k > 0$, α_k são reais e A_k são subconjuntos disjuntos de X com medida finita. Precisamos controlar

$$\|T(f)\|_{L^q(Y, \nu)} = \sup \left\{ \left| \int_Y T(f)(y)g(y)d\nu(y) \right| : g \text{ simples e } \|g\|_{q'} \leq 1 \right\},$$

Escreva

$$g = \sum_{j=1}^n b_j e^{i\beta_j} \chi_{\beta_j},$$

onde $b_j > 0$, β_j são reais e B_j são subconjuntos disjuntos de Y com $\nu(B_j) < \infty$. Sejam

$$P(z) = \frac{p}{p_0}(1-z) + \frac{p}{p_1}z \text{ e } Q(z) = \frac{q'}{q'_0}(1-z) + \frac{q'}{q'_1}z.$$

Para $z \in \bar{S} = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \Re(z) \leq 1\}$, defina

$$f_z = \sum_{k=1}^m a_k^{P(z)} e^{i\alpha_k} \chi_{A_k}, \quad g_z = \sum_{j=1}^n b_j^{Q(z)} e^{i\beta_j} \chi_{\beta_j},$$

$$F(z) = \int_Y T(f_z)(y)g_z(y)d\nu(y).$$

Observe que,

$$f_\theta = \sum_{k=1}^m a_k^{P(\theta)} e^{i\alpha_k} \chi_{A_k} = \sum_{k=1}^m a_k e^{i\alpha_k} \chi_{A_k} = f,$$

já que,

$$P(\theta) = \frac{p}{p_0}(1-\theta) + \frac{p}{p_1}\theta = p \left(\frac{1}{p_0}(1-\theta) + \frac{1}{p_1}\theta \right) = p \left(\frac{1}{p} \right) = 1.$$

De maneira similar temos que $g_\theta = g$. Usando a linearidade de T e da integral, temos que

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_Y T \left(\sum_{k=1}^m a_k^{P(z)} e^{i\alpha_k} \chi_{A_k} \right) (y) \sum_{j=1}^n b_j^{Q(z)} e^{i\beta_j} \chi_{\beta_j} d\nu(y) \\ &= \int_Y \sum_{k=1}^m T \left(a_k^{P(z)} e^{i\alpha_k} \chi_{A_k} \right) (y) \sum_{j=1}^n b_j^{Q(z)} e^{i\beta_j} \chi_{\beta_j} d\nu(y) \\ &= \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \int_Y a_k^{P(z)} e^{i\alpha_k} T(\chi_{A_k})(y) b_j^{Q(z)} e^{i\beta_j} \chi_{\beta_j} d\nu(y) \\ &= \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n a_k^{P(z)} b_j^{Q(z)} e^{i\alpha_k} e^{i\beta_j} \int_Y T(\chi_{A_k})(y) \chi_{\beta_j}(y) d\nu(y). \end{aligned}$$

Como $a_k, b_j > 0$, F é analítica em z , e aplicando a desigualdade de Hölder em

$$\int_Y T(\chi_{A_k})(y) \chi_{\beta_j}(y) d\nu(y),$$

para q_0 e q'_0 temos que

$$\begin{aligned} \left| \int_Y T(\chi_{A_k})(y) \chi_{\beta_j}(y) d\mathbf{v}(y) \right| &\leq \left(\int_Y |T(\chi_{A_k})|^{q_0} d\mathbf{v}(y) \right)^{\frac{1}{q_0}} \left(\int_Y |\chi_{\beta_j}|^{q'_0} d\mathbf{v}(y) \right)^{\frac{1}{q'_0}} \\ &\leq \|T(\chi_{A_k})\|_{q_0} \left(\int_{B_j} d\mathbf{v}(y) \right)^{\frac{1}{q'_0}} \\ &\leq M_0 \|f\|_{L^{p_0}(\mathbf{v}(B_j))}^{\frac{1}{q'_0}} < \infty. \end{aligned}$$

já que $f \in L^{p_0}$ e $\mathbf{v}(B_j) < \infty$. Agora relembremos que

$$a^z = e^{z \log(a)} = e^{x+iy \log(a)}, z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Logo,

$$|a^z| = |e^{x+iy \log(a)}| = |e^{\Re(z) \log(a)}| |e^{\Im(z) \log(a)}| = |e^{\Re(z) \log(a)}| = e^{\Re(z) \log(a)} = a^{\Re(z)}.$$

Usando o fato dos A_k 's serem disjuntos temos que $\|f_{it}\|_{L^{p_0}} = \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{p_0}}$. De fato,

$$\|f_{it}\|_{L^{p_0}} = \left(\int |f_{it}|^{p_0} d\mathbf{v} \right)^{\frac{1}{p_0}}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} |f_{it}|^{p_0} &= \left| \sum_{k=1}^m a_k^{P(it)} e^{i\alpha_k} \chi_{A_k} \right|^{p_0} \\ &= \sum_{k=1}^m \left| a_k^{P(it)} e^{i\alpha_k} \chi_{A_k} \right|^{p_0} \\ &= \sum_{k=1}^m |a_k^{p_0 P(it)}| |e^{i\alpha_k}|^{p_0} |\chi_{A_k}|^{p_0}. \end{aligned}$$

Veja que $|e^{i\alpha_k}| = 1$, daí, $|e^{i\alpha_k}|^{p_0} = 1$. Além disso,

$$p_0 P(it) = p_0 \left(\frac{p}{p_0} (1 - it) + \frac{p}{p_1} it \right).$$

Daí, $\Re(p_0 P(it)) = p$. Assim, $|a_k^{p_0 P(it)}| = a^p$. Logo,

$$\begin{aligned} |f_{it}|^{p_0} &= \sum_{k=1}^m a^p |\chi_{A_k}|^{p_0} \\ &= \sum_{k=1}^m |a^p| |\chi_{A_k}|^{p_0}, \text{ já que } |\chi_{A_k}|^{p_0} = 1 = |\chi_{A_k}|^p \\ &= \sum_{k=1}^m |a^p| |\chi_{A_k}|^p |e^{i\alpha_k}|^p, \text{ já que } |e^{i\alpha_k}|^p = 1 \\ &= \sum_{k=1}^m |a \chi_{A_k} e^{i\alpha_k}|^p. \end{aligned}$$

Donde,

$$\begin{aligned}\|f_{it}\|_{L^{p_0}} &= \left(\int \sum_{k=1}^m |a\chi_{A_k} e^{i\alpha_k}|^p dv \right)^{\frac{1}{p_0}} \\ &= (\|f\|_{L^p}^p)^{\frac{1}{p_0}} \\ &= \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{p_0}}.\end{aligned}$$

De maneira similar, temos que

$$\|g_{it}\|_{L^{q'_0}} = \|g\|_{L^{q'}}^{\frac{q'}{q'_0}}.$$

Aplicando a desigualdade de Hölder para q_0 e q'_0 e utilizando a hipótese, temos que

$$\begin{aligned}|F(it)| &= \left| \int_Y T(f_{it})(y) g_{it}(y) dv(y) \right| \\ &\leq \|T(f_{it})\|_{L^{q_0}} \|g_{it}\|_{L^{q'_0}} \\ &\leq M_0 \|f_{it}\|_{L^{p_0}} \|g_{it}\|_{L^{q'_0}} \\ &= M_0 \|f\|_{L^{p_0}}^{\frac{p}{p_0}} \|g\|_{L^{q'}}^{\frac{q'}{q'_0}}.\end{aligned}$$

De modo semelhante encontramos que

$$\|f_{1+it}\|_{L^p} = \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{p_1}} e \|g_{1+it}\|_{L^{q'_1}} = \|g\|_{L^{q'}}^{\frac{q'}{q'_1}}.$$

Aplicando a desigualdade de Hölder temos que

$$|F(1+it)| \leq M_1 \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{p_1}} \|g\|_{L^{q'}}^{\frac{q'}{q'_1}}.$$

Observe que F é analítica no aberto S e contínua em $\bar{S}$. Além disso, F é limitada na faixa unitária fechada (para alguma constante que depende de f e g). Portanto, pelo Lema anterior temos que

$$\begin{aligned}|F(z)| &\leq \left(M_0 \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{p_0}} \|g\|_{L^{q'}}^{\frac{q'}{q'_0}} \right)^{1-\theta} \left(M_1 \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{p_1}} \|g\|_{L^{q'}}^{\frac{q'}{q'_1}} \right)^{\theta} \\ &\leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} (\|f\|_{L^p})^{\frac{p}{p_0}(1-\theta) + \frac{p}{p_1}\theta} (\|g\|_{L^{q'}})^{\frac{q'}{q'_0}(1-\theta) + \frac{q'}{q'_1}\theta} \\ &= M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{q'}},\end{aligned}$$

quando $\Re(z) = \theta$. Observe que

$$P(\theta) = \frac{p}{p_0}(1-\theta) + \frac{p}{p_1}\theta = 1$$

e,

$$Q(\theta) = \frac{q'}{q'_0}(1 - \theta) + \frac{q'}{q'_1}\theta = 1.$$

Donde,

$$|F(\theta)| = \int_Y T(f)g(y)d\nu(y).$$

Tomando o supremo sobre todas as funções finitamente simples g em X com norma $L^{q'}$ menor ou igual a 1. □

Observação 13. Pode-se provar a desigualdade de Young usando o Teorema da Interpolação de Riez-Thorin. Fixando uma função $g \in L^r$ e seja $T(f) = f * g$. Como $T : L^1 \rightarrow L^r$ com norma no máximo $\|g\|_{L^r}$ e $T : L^r \rightarrow L^\infty$ com norma no máximo $\|g\|_{L^r}$, o teorema anterior dá que T aplica L^p em L^q com norma no máximo $\|g\|_{L^r}^\theta \|g\|_{L^r}^{1-\theta} = \|g\|_{L^r}$, onde

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{r} \text{ e } \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{r} + \frac{\theta}{\infty}.$$

6 A TRANSFORMADA DE FOURIER

Ao longo desse capítulo iremos fixar $G = \mathbb{R}^n$, nosso objetivo é definir a transformada de Fourier para funções em L^p , com $1 \leq p \leq 2$. Para isso faremos uma construção, a começar definindo a transformada para o espaço L^1 , mais adiante estenderemos para o espaço L^2 e, por fim, usando interpolação definiremos para L^p com $1 \leq p \leq 2$.

6.1 A Transformada em L^1

Nesta seção iremos definir a transformada de Fourier para o espaço L^1 e veremos algumas propriedades importantes que surgem da definição relacionando com definições que já nos foram apresentadas anteriormente.

Definição 6.1.1. Dada $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definimos $\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \xi} dx$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. $\widehat{f}$ é chamada **Transformada de Fourier** de f .

Observação 14. Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ então

$$|\widehat{f}(\xi)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \xi} dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) e^{-2\pi i \xi}| dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| |e^{-2\pi i \xi}| dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx = \|f\|_{L^1}.$$

Logo, $\|\widehat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$. Além disso, $\widehat{f + \lambda g} = \widehat{f} + \lambda \widehat{g}$, $\forall f, g \in L^1$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Deste modo,

$$\begin{aligned} \wedge : L^1 &\rightarrow L^\infty \\ f &\mapsto \widehat{f}, \end{aligned}$$

é linear e contínua.

Exemplo 6. Se $g(x) = e^{-4\pi^2 x^2}$, com $x \in \mathbb{R}^n$, então por definição temos que

$$\widehat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi^2 x^2} e^{-2\pi i x \xi} dx.$$

Utilizando Fubini, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi^2 x^2} e^{-2\pi i x \xi} dx = \prod_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi^2 x_j^2 - 2\pi i x_j \xi_j} dx_j = \prod_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{(2\pi x_j + i \frac{\xi_j}{2})^2} dx_j e^{-\frac{\xi_j^2}{4}}.$$

Por Cauchy-Gorsat

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(2\pi x_j + i \frac{\xi_j}{2})^2} dx_j = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(2\pi x_j)^2} dx_j.$$

Fazendo $y = 2\pi x_j$, segue que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(2\pi x_j)^2} dx_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\pi} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \widehat{g}(\xi) &= \prod_{j=1}^n \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\xi_j^2}{4}} \\ &= 2^{-n} \pi^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4}}. \end{aligned}$$

Exemplo 7. Se $g_t(x) = e^{-4\pi^2 t x^2}$, com $t > 0$, então

$$\begin{aligned} \widehat{g}_t(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi^2 (\sqrt{t}x)^2} e^{-2\pi i \sqrt{t}x \frac{\xi}{\sqrt{t}}} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-4x^2 y^2} e^{-2\pi i y \frac{\xi}{\sqrt{t}}} dy \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}}, \text{ fazendo } y = \sqrt{t}x \\ &= \widehat{g}\left(\frac{\xi}{\sqrt{t}}\right) \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} \\ &= 2^{-n} \pi^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4t}} \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\widehat{g}_t(\xi) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\xi^2}{4t}}.$$

O próximo teorema nos mostra que a transformada da convolução de duas funções é o produto da transformada de cada uma.

Teorema 6.1.1. Se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ então $\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi)$.

Demonstração. Por definição, temos que

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x - y) dy e^{-2\pi i x \xi} dx. \end{aligned}$$

Como $\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y) g(x - y) e^{-2\pi i x \xi}| dx dy = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$, por Fubini temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x - y) dy e^{-2\pi i x \xi} dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x - y) e^{-2\pi i x \xi} dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i y \xi} \int_{\mathbb{R}^n} g(x - y) e^{-2\pi i (x - y) \xi} dx dy. \end{aligned}$$

Fazendo a substituição $w = x - y$ temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i y \xi} \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y) e^{-2\pi i (x-y) \xi} dx dy &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i y \xi} \int_{\mathbb{R}^n} g(w) e^{-2\pi i w \xi} dw dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i y \xi} \widehat{g}(\xi) dy = \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi). \end{aligned}$$

□

A seguir vemos que em algum sentido a transformada de Fourier pode ser interpretada como um operador auto adjunto.

Teorema 6.1.2. Seja $f, g \in L^1$. Temos que

$$\int f(\xi) \widehat{g}(\xi) d\xi = \int \widehat{f}(\xi) g(\xi) d\xi.$$

Demonstração. Por definição, temos que

$$\int f(\xi) \widehat{g}(\xi) d\xi = \int f(\xi) \int e^{-2\pi i x \xi} g(x) dx d\xi.$$

Por Fubini segue que

$$\begin{aligned} \int f(\xi) \int e^{-2\pi i x \xi} g(x) dx d\xi &= \int \int f(\xi) e^{-2\pi i x \xi} g(x) d\xi dx \\ &= \int g(x) \int f(\xi) e^{-2\pi i x \xi} d\xi dx \\ &= \int g(x) \widehat{f}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

□

A seguir apresentaremos uma fórmula de inversão.

Teorema 6.1.3. Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ então

$$f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \xi} e^{-4\pi^2 t \xi^2} \widehat{f}(\xi) d\xi \text{ em } L^1.$$

Demonstração. Seja $k(x) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\left(\frac{x}{2}\right)^2}$. Note que, fazendo $y = \frac{x}{2}$

$$\int k(x) dx = \int \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-y^2} 2^n dy = \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int e^{-y^2} dy = 1.$$

Daí, pelo exemplo 6, $k_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ é aproximação da identidade. Pelo teorema acima dada $f \in L^1$ temos que $k_\varepsilon * f \rightarrow f$ em L^1 .

Por outro lado,

$$k_\varepsilon * f(x) = \int \frac{1}{\varepsilon^n} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4\varepsilon^2}}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} f(y) dy = \int (4\pi\varepsilon^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{(y-x)^2}{4\varepsilon^2}} f(y) dy.$$

Lembre-se que dado $g_t(x) = e^{-4\pi^2 t x^2}$ temos que $\widehat{g}(\xi) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\xi^2}{4t}}$. Assim,

$$\begin{aligned} \int (4\pi \varepsilon^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{(y-x)^2}{4\varepsilon^2}} f(y) dy &= \int \widehat{g_{\varepsilon^2}}(y-x) f(y) dy \\ &= \int \int g_{\varepsilon^2}(\xi) e^{-2\pi i \xi (y-x)} d\xi f(y) dy. \end{aligned}$$

Usando o Teorema de Fubini segue que

$$\begin{aligned} \int \int g_{\varepsilon^2}(\xi) e^{-2\pi i \xi (y-x)} d\xi f(y) dy &= \int g_{\varepsilon^2}(\xi) e^{2\pi i \xi x} \int e^{-2\pi i \xi y} f(y) dy d\xi \\ &= \int e^{-4\pi^2 \varepsilon^2 \xi^2} e^{2\pi i \xi x} \widehat{f}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Em particular, fazendo $t = \varepsilon^2$, temos

$$\int e^{-4\pi^2 t \xi^2} e^{2\pi i \xi x} \widehat{f}(\xi) d\xi = k_{\sqrt{t}} * f \rightarrow f, t \rightarrow 0^+,$$

em L^1 . □

No caso em que $\widehat{f}$ também está em L^1 a fórmula de inversão pode ser melhorada.

Corolário 2. Se $f, \widehat{f} \in L^1$ e f é contínua em x_0 então $f(x_0) = \int e^{2\pi i \xi x_0} \widehat{f}(\xi) d\xi$.

Demonstração. Pelo Teorema da Convergência Dominada, temos que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int e^{-4\pi^2 t \xi^2} e^{2\pi i \xi x} \widehat{f}(\xi) d\xi = \int e^{2\pi i \xi x} \widehat{f}(\xi) d\xi.$$

Pela unicidade do limite e o teorema acima, temos que

$$f(x) = \int e^{2\pi i \xi x} \widehat{f}(\xi) d\xi,$$

em quase todo ponto. Como f é contínua em x_0 e $F(x) = \int e^{2\pi i \xi x} \widehat{f}(\xi) d\xi$ é contínua, temos que

$$f(x_0) = \int e^{2\pi i \xi x_0} \widehat{f}(\xi) d\xi$$

□

6.2 A transformada de Fourier em L^2

Nessa seção estenderemos a definição de transformada para o espaço L^2 . Faremos uma construção, através de observações, começando com uma propriedade na interseção dos espaços L^1 e L^2 .

Teorema 6.2.1 (Plancherel). Se $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ então $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\|\widehat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$.

Demonstração. Seja $g(x) = \overline{f(-x)}$. Note que $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Usando a Desigualdade de Young, pois $\left(\frac{1}{1} + 1 = \frac{1}{1} + \frac{1}{1}\right)$, segue que

$$\|f * g\|_1 \leq \|g\|_1 \|f\|_1 = (\|f\|_1)^2 < \infty.$$

Assim $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Consequentemente $\widehat{f * g}$ está bem definida. Por outro lado,

$$\widehat{g}(\xi) = \int \overline{f(-x)} e^{-2\pi i x \xi} dx = \int \overline{f(-x)} e^{2\pi i x \xi} dx = \int \overline{f(y)} e^{-2\pi i y \xi} dy = \overline{\widehat{f}(\xi)}.$$

Assim, lembrando que $\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi)$, temos

$$\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{f}(\xi)} = |\widehat{f}(\xi)|^2.$$

Logo,

$$\|\widehat{f}\|_{L^2}^2 = \int |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int \widehat{f * g}(\xi) d\xi = \int e^{2\pi i 0 \xi} \widehat{f * g}(\xi) d\xi.$$

Mais ainda, note que $f * g(x) = \int g(x-y) f(y) dy = \int \overline{f(y-x)} f(y) dy$ é contínua em $x_0 = 0$. Deste modo, pelo o corolário 2 temos

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2}^2 &= \int e^{2\pi i 0 \xi} \widehat{f * g}(\xi) d\xi = f * g(0) \\ &= \int f(x) g(0-x) dx \\ &= \int f(x) \overline{f(-(-x))} dx = \int f(x) \overline{f(x)} dx = \|f\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

□

A seguir definiremos a transformada de Fourier em L^2 . Para isso, note que dada $f \in L^2$ existe $\{h_j\}_{j=1}^\infty \subset L^1 \cap L^2$ tal que $h_j \rightarrow f$ em L^2 .

De fato, se $a_j(X) = f(x) \chi_{|x| \leq j}$ então

$$\int |h_j| dx \leq \|\chi_{|x| \leq j}\|_{L^2} \|f\|_{L^2} < \infty \implies h_j \in L^1.$$

E, $|h_j - f|^2 \leq (2|f|)^2 \in L^2$. Já que $f \in L^2$ temos

$$\int |h_j - f|^2 dx = \int_{|x| > j} |f(x)|^2 dx \rightarrow 0, j \rightarrow \infty.$$

Observação 15. Podemos obter $\mathcal{F} : L^2 \rightarrow L^2$ linear, contínua e tal que $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$, para cada, $f \in L^1 \cap L^2$.

De fato, dada $f \in L^2$ existe $\{h_j\}_{j=1}^\infty \subset L^1 \cap L^2$ tal que $h_j \rightarrow f$ em L^2 . Em particular, h_j é de Cauchy em L^2 e, pelo teorema acima,

$$\|h_j - h_k\|_{L^2} = \|\widehat{h_j - h_k}\|_{L^2} = \|\widehat{h_j} - \widehat{h_k}\|_{L^2}.$$

Assim, $\{\widehat{h_j}\}$ é de Cauchy em L^2 . Pela completude de L^2 existe $\mathcal{F}(f) \in L^2$ tal que $\widehat{h_j} \rightarrow \mathcal{F}(f)$. Mais ainda, podemos mostrar que $\mathcal{F}(f)$ independe da escolha da sequência. Por definição vemos que $\mathcal{F} : L^2 \mapsto L^2$ tal que $f \rightarrow \mathcal{F}(f)$ está bem definida, é linear, e

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(f) - \widehat{f}\|_{L^2} &= \|\mathcal{F}(f) - \widehat{h_j}\|_{L^2} + \|\widehat{h_j} - \widehat{f}\|_{L^2} \\ &\leq \|\mathcal{F}(f) - \widehat{h_j}\|_{L^2} + \|\widehat{h_j} - \widehat{f}\|_{L^2} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Logo $\|\mathcal{F}(f)\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$. Consequentemente, $\mathcal{F}$ é linear e contínua em L^2 . Abusando a notação denotaremos $\widehat{f} = \mathcal{F}(f)$ quando $f \in L^2$, $\mathcal{F}(f)$ é chamada de **Transformada de Fourier** de f .

6.3 A Transformada de Fourier em L^p , $1 < p < 2$

Podemos definir $\wedge : L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow F(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ (funções com domínio em $\mathbb{R}^n$ e contra-domínio em $\mathbb{C}$) tal que $f \mapsto \widehat{f}$.

Dada $f \in L^1 + L^2$ existem $g \in L^1$ e $h \in L^2$ tais que $f = g + h$. Defina $\widehat{f} = \widehat{g} + \widehat{h}$, é fácil ver que $\wedge$ é linear. Além disso,

$$\|\widehat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}, \forall f \in L^1(\mathbb{R}^n) \text{ e } \|\widehat{f}\|_{L^2} \leq \|f\|_2, \forall f \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Pela interpolação de Riesz-Thorin temos $\|\widehat{f}\|_q \leq 1^{1-\theta} 1^\theta \|f\|_p$ para cada $\theta \in [0, 1]$ com p e q definidos por

$$\frac{1}{p} = (1-\theta)\frac{1}{1} + \theta\frac{1}{2} \text{ e } \frac{1}{q} = (1-\theta)0 + \theta\frac{1}{2}.$$

Observação 16. Se $p \in [1, 2]$ e q satisfaz $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ então $\|\widehat{f}\|_q \leq \|f\|_p$, para todo $f \in L^1 + L^2$.

De fato, note que $\theta = \frac{2(p-1)}{p} \in [0, 1]$, pois $p \in [1, 2]$. Além disso,

$$\begin{aligned} (1-\theta)\frac{1}{1} + \theta\frac{1}{2} &= \frac{p-2p-2}{p} + \frac{p-1}{p} = \frac{1}{p} \text{ e} \\ (1-\theta)0 + \theta\frac{1}{2} &= \frac{p-1}{p} = 1\frac{1}{p} = \frac{1}{q} \end{aligned}$$

Pela observação acima concluímos que $\|\widehat{f}\|_q \leq \|f\|_p$ para todo $f \in L^1 + L^2$.

Por fim, note que se $p \in [1, 2]$ e $f \in L^p$ então $f \in L^1 + L^2$. De fato, sendo $f_1 = f \chi_{\{x: |f(x)| > 1\}}$ e $f_2 = f \chi_{\{x: |f(x)| \leq 1\}}$. Temos que $f = f_1 + f_2$. Além disso,

$$\begin{aligned} \|f_1\|_1 &= \int_{|f(x)| > 1} |f(x)| dx \\ &\leq \int_{|f(x)| > 1} |f(x)|^p dx, \text{ já que } p > 1 \\ &\leq \int |f|^p dx = \|f\|_p^p < \infty. \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \|f_2\|_{L^2} &= \int |f \chi_{\{x: |f(x)| < 1\}}|^2 dx \\ &= \int_{|f(x)| < 1} |f(x)|^2 dx \\ &\leq \int_{|f(x)| < 1} |f(x)|^p dx, \text{ já que } p < 2 \\ &\leq \int |f(x)|^p dx = \|f\|_{L^p}^p < \infty. \end{aligned}$$

Juntando esse fato com as observações acima, finalizamos o texto com o importante teorema Hausdorff-Young

Teorema 6.3.1 (Hausdorff-Young). Sejam $p \in [1, 2]$ e q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ então $\|\widehat{f}\|_q \leq \|f\|_p$

Observação: O teorema acima garante que dados $p \in [1, 2]$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ então $\wedge : L^p \rightarrow L^q$ é linear e contínua.

REFERÊNCIAS

- [1] AHLFORS L. Complex Analysis. McGraw-Hill, New York, 1979.
- [2] BASS, R. F. Real analysis for graduate students, version 4.2, 2020.
- [3] FOLLAND, G.B., RealAnalysis, modern techniques and their applications, Pure and Applied Mathematics -Willey Interscience Series of Texts, 1999.
- [4] GRAFAKOS, L. , Classical Fourier Analysis, Third Edition, 2014.
- [5] Lang, S., Real Analysis, 2nd edition, Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Reading, MA, 1983.
- [6] STEIN E. M. Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. Princeton Univ. Press, Princeton, 1970.
- [7] STEIN, E. e WEISS, G. - Introduction to Fourier Analisis on Euclidean Spaces, Princenton University Press, Princeton,New Jersey, 1971.
- [8] STEIN, E. - Harmonic Analisis, Princeton Universisty Press, Princeton, New Jersey, 1993.