UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS - UFAL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA - IM
Programa de Pós-Graduação em Matemática em associação com a Universidade Federal da Bahia

Luiz Ricardo Abreu Melo

Contribuições à Geometria Espectral de Superfícies: Estimativas de Autovalores e Teoremas de Rigidez

MACEIÓ-AL
2024

Luiz Ricardo Abreu Melo

**Contribuições à Geometria Espectral de Superfícies:
Estimativas de Autovalores e Teoremas de Rigidez**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas em Associação com a Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Orientador:
Prof. Marcos Petrúcio Cavalcante

Maceió-AL
2024

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária: Taciana Sousa dos Santos – CRB-4 – 2062

M528c Melo, Luiz Ricardo Abreu.
Contribuições à geometria espectral de superfícies : estimativas de autovalores e teoremas de rigidez / Luiz Ricardo Abreu Melo. – 2024.
75 f.

Orientador: Marcos Petrúcio Cavalcante.
Tese (Doutorado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática, Maceió : UFAL ; Salvador : Universidade Federal da Bahia, 2024.

Bibliografia: f. 65-71.
Apêndice: f. 72-75.

1. Autovalores. 2.Hipersuperfícies com curvatura média constante. 3. Superfícies – Bordo livre. 4. Operador de Jacobi. 5. Problema de Steklov I. Título.

CDU: 51

Folha de Aprovação

Luiz Ricardo Abreu Melo

Contribuições à Geometria Espectral de Superfícies: Estimativas de Autovalores e Teoremas de Rigidez

Tese de doutorado submetida ao Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas em associação com a Universidade Federal da Bahia. Trabalho aprovado. Maceió, 19 de julho de 2024.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
gov.br MARCOS PETRUCIO DE ALMEIDA CAVALCANTE
Data: 15/08/2024 17:17:10-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

____

Orientador: Prof. Dr. Marcos Petrúcio de Almeida Cavalcante
Universidade Federal de Alagoas

Documento assinado digitalmente
gov.br MARCIO HENRIQUE BATISTA DA SILVA
Data: 16/08/2024 13:39:23-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

____

Examinador interno: Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva
Universidade Federal de Alagoas

Documento assinado digitalmente
gov.br ABRAAO MENDES DO REGO GOUVEIA
Data: 19/08/2024 13:12:16-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

____

Examinador interno Prof. Dr. Abraão Mendes do Rêgo Gouveia
Universidade Federal de Alagoas

Documento assinado digitalmente
gov.br IVALDO PAZ NUNES
Data: 15/08/2024 19:57:42-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

____

Examinador externo: Prof. Dr. Ivaldo Paz Nunes
Universidade Federal do Amazonas

____

Examinador externo: Prof. Dr. Almir Rogério Silva Santos
Universidade Federal de Sergipe

Documento assinado digitalmente
gov.br ALMIR ROGERIO SILVA SANTOS
Data: 15/08/2024 20:07:45-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Dedico este trabalho a meus pais Maria das Graças e José Ricardo (in memoriam) e aos meus queridos irmãos Victor e Íthalo vocês me trouxeram aqui.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha mãe, Maria das Graças Abreu, por todo o apoio e por ser a primeira pessoa que me apresentou à matemática. Agradeço ao meu pai, José Ricardo de Melo (in memoriam), por me educar e ser um exemplo. Aos meus irmãos, Victor e Íthalo, por sempre poder contar com eles e por todo apoio.

Aos professores Abraão Mendes, Almir Santos, Ivaldo Nunes e Cícero Tiarlos, por aceitarem participar da banca de defesa de Tese de Doutorado e pelas valiosas sugestões e correções, cujas contribuições enriquecem ainda mais este trabalho.

Aos professores Marcos Petrúcio de Almeida Cavalcante e Márcio Henrique Batista da Silva, a quem agradeço pelas lições, exemplos, paciência e orientação ao longo desses anos.

À minha namorada, Marine Nobre Andrade, pela parceria, paciência e por todos os momentos que compartilhamos, eles estarão sempre comigo, eu te amo.

Aos amigos que conheci na UFAL, em especial Deivid, Nemuel e Elaine, pelos momentos ímpares.

Aos meus amigos Ian Santos, Genilda e José Valdo, que estiveram sempre presentes. Não sei como agradecer o apoio.

Aos professores Renan Medrado, Hilário Alencar, Márcio Cavalcante e Feliciano Vitório do Instituto de Matemática da UFAL, por todos os seus esforços no ensino, que foram fundamentais para a escrita da tese. Também estendo meus agradecimentos a Ana e William, que sempre me ajudaram.

Ao professor Samuel Canevari e Samuel Silva, da UFS, por todo o apoio desde a graduação e por serem exemplos de professores.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES pelo suporte financeiro durante parte do meu doutorado.

RESUMO

Nesta tese, obtemos estimativas superiores para o primeiro autovalor do operador de estabilidade de hipersuperfícies com curvatura média constante (CMC) e bordo livre. Como aplicação, obtemos resultados de rigidez para a área de hipersuperfícies CMC sob condições do primeiro autovalor e da curvatura do espaço ambiente. Ao mudar a condição de fronteira, obtemos uma estimativa para o primeiro autovalor do problema de Jacobi-Steklov e, como aplicação, obtemos um resultado de rigidez envolvendo o comprimento do bordo da hipersuperfície. Comentamos ainda alguns desses resultados no contexto ponderado. Notamos que parte dos resultados ainda se aplica para o autovalor principal de uma MOTS imersa em uma 3-variedade M tipo-espaço em um espaço-tempo, se a condição de energia dominante for imposta juntamente com uma condição sobre a curvatura de M. Estabelecemos a segunda variação da área para hipersuperfícies do tipo-espaço com bordo livre imersas em um espaço-tempo. Além disso, obtemos condições para que essa imersão seja estável em um espaço-tempo de Robertson-Walker. Por fim, apresentamos dois resultados de rigidez para superfícies CMC estáveis imersas em 3-variedades de curvatura com Ricci positiva quando a massa de Hawking é zero.
Palavras-chave: Hipersuperfícies com Curvatura Média Constante. Superfícies com Bordo livre. Operador de Jacobi. Problema de Steklov. Autovalores. Massa de Hawking. MOTS. Espaço-tempo.

ABSTRACT

In this thesis, we obtain upper bounds for the first eigenvalue of the stability operator of constant mean curvature (CMC) hypersurfaces with free boundary. As an application, we obtain rigidity results for the area of CMC hypersurfaces under conditions on the first eigenvalue and on the curvature of the ambient space. By changing the boundary condition, we obtain an estimate for the first eigenvalue of the Jacobi-Steklov problem and, as an application, we obtain a rigidity result involving the length of the hypersurface boundary. We also comment on some of these results in the weighted context. We note that part of the results still applies to the principal eigenvalue of a MOTS immersed in a 3-manifold M of spacelike in a spacetime if the dominant energy condition is imposed and a condition on the curvature of M is met. We establish the second variation of the area for spacelike hypersurfaces with free boundary immersed in a spacetime. Furthermore, we obtain conditions for this immersion to be stable in a Robertson-Walker spacetime. Finally, we present two rigidity results for stable CMC surfaces immersed in 3-manifolds with positive Ricci curvature when the Hawking mass is zero.
Keywords: Constant Mean Curvature Hypersurfaces. Free Boundary Surfaces. Jacobi Operator. Steklov Problem. Eigenvalues. Hawking Mass. MOTS (Marginally Outer Trapped Surfaces). Spacetime.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

No âmbito da teoria das superfícies mínimas, as superfícies estáveis ou de índice 1 têm um papel muito especial. Citamos, por exemplo, o famoso teorema de Schoen e Yau [60] que diz que se Σ é uma superfície mínima fechada orientável e estável em uma variedade Riemanniana M^3 com curvatura escalar não negativa $S \geq 0$, então Σ é uma esfera ou um toro. Além disso, uma rigidez infinitesimal é verificada quando Σ é um toro.

O índice de estabilidade de uma superfície mínima pode ser definido como o número de autovalores negativos do operador de Jacobi J de Σ. Geometricamente, esse índice representa o número de direções (normais) linearmente independentes cujas variações decrescem a área. De fato, cada autovalor é um invariante geométrico e, portanto, está diretamente relacionado com a geometria da superfície. Neste sentido, é natural investigar relações geométricas envolvendo o primeiro autovalor, que denotaremos por λ_1^J.

J. Simons em [64], obteve uma estimativa para λ_1^J de hipersuperfícies mínimas na esfera unitária. Munido desse resultado O. Perdomo em sua tese de doutorado publicada em [54] trabalhou resultado de rigidez, isto é, o caso da igualdade. Mais precisamente, Perdomo demonstrou que se Σ é uma superfície mínima compacta orientada e não totalmente geodésica na esfera $\mathbb{S}^3$, então o primeiro autovalor do operador de Jacobi, λ_1^J, satisfaz $\lambda_1^J \leq -4$. Além disso, $\lambda_1^J = -4$ se, e somente se, Σ é um toro de Clifford.

A partir deste trabalho, vários outros resultados de estimativas para o λ_1^J foram obtidos, mas sempre no caso de subvariedades fechadas. Citamos, por exemplo, os trabalhos [1, 19, 49, 2, 17, 23] e [24] para citar alguns. Destacamos o trabalho de M. Batista e I. Santos em [14], onde eles obtiveram estimativas gerais, assumindo apenas uma limitação da curvatura do ambiente.

Nossa primeira contribuição nesta tese é obter uma generalização destes resultados para o caso de superfícies com bordo livre. Mais precisamente, no Capítulo 2 obtivemos os seguintes resultados.

Teorema 1.1. *Seja (M^3, g) uma variedade Riemanniana com bordo e tal que a curvatura escalar e a curvatura média do bordo satisfazem* $\inf S = a > -\infty$ *e* $\inf H^{\partial M} = b > -\infty$, *respectivamente. Seja $\Sigma^2 \subset M^3$ uma superfície compacta de dois lados com bordo livre e curvatura média H constante. Então*

$$\lambda_1^J \leq -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}H^2 + a\right) - b\frac{|\partial\Sigma|}{|\Sigma|} + \frac{2\pi\chi(\Sigma)}{|\Sigma|}.$$

Além disso, a igualdade vale se, e somente se, as seguintes condições acontecem.

1. *Σ é totalmente umbílica e a curvatura geodésica de $\partial\Sigma$ em Σ é constante igual a b;*

2. *$S|_\Sigma = a$, $H^{\partial M}|_{\partial\Sigma} = b$ e a curvatura Gaussiana de Σ é constante;*

3. $\mathrm{Ric}_M(N,N) = -\lambda_1^J - \frac{1}{2}H^2$ *e* N *está no núcleo de* $II^{\partial M}$ *ao longo de* $\partial\Sigma$.

Fazendo uma estimativa menos fina no sentido que a norma da segunda forma fundamental é positiva, obtemos uma restrição maior no caso da igualdade. Mais precisamente:

Teorema 1.2. *Nas mesmas condições do Teorema 1.1, temos*

$$\lambda_1^J \leq -\frac{a}{2} - \frac{b}{|\Sigma|}|\partial\Sigma| + \frac{2\pi\chi(\Sigma)}{|\Sigma|}.$$

Além disso, a igualdade vale se, e somente se,

1. Σ *é totalmente geodésica,* $\partial\Sigma$ *consiste de geodésicas de* ∂M *e a curvatura geodésica de* $\partial\Sigma$ *em* Σ *é constante igual a* b*;*

2. $S|_\Sigma = a$, $H^{\partial M}|_{\partial\Sigma} = b$ *e a curvatura Gaussiana de* Σ *é constante;*

3. $\mathrm{Ric}_M(N,N) = -\lambda_1^J$ *e* N *está no núcleo do* $II^{\partial M}$ *ao longo de* $\partial\Sigma$.

Nossos resultados também se aplicam no caso fechado, ou seja, quando $\partial\Sigma = \emptyset$, simplesmente considerando $b = 0$ nas estimativas acima. Nesta linha, obtivemos o seguinte resultado de rigidez global:

Teorema 1.3. *Sejam* (M^3, g) *uma variedade Riemanniana fechada com curvatura escalar* $S \geq 6$ *e* $\Sigma^2 \subset M^3$ *uma superfície mergulhada, fechada e orientável com curvatura média constante. Se* $\lambda_1^J \geq -\left(\frac{H^2}{2} + 2\right)$, *então* Σ *tem gênero* 0 *e*

$$|\Sigma| \leq \frac{16\pi}{H^2 + 4}.$$

Além disso, se vale a igualdade na área e $Ric_M \geq 2$, *então a região convexa em média* $\Omega \subset M$, *cuja fronteira é* Σ, *é isométrica a uma bola geodésica em* $\mathbb{S}^3_+$, *cuja fronteira é* $\mathbb{S}^2(\sqrt{|\Sigma|/4\pi})$.

E novamente no caso com bordo livre:

Teorema 1.4. *Seja* (M^3, g) *uma variedade Riemanniana com curvatura escalar* $S \geq 6$ *e bordo convexo em média, no sentido de que* $H^{\partial M} \geq 0$. *Seja* $\Sigma^2 \subset M^3$ *uma superfície mergulhada, orientável, com curvatura média constante e bordo livre em* ∂M. *Se* $\lambda_1^J \geq -2$, *então* Σ *é topologicamente um disco e* $|\Sigma| \leq 2\pi$.

Se a igualdade for atingida e a curvatura de Ricci satisfazer $Ric_M \geq 2$, *então* Σ *é isométrica a* $\mathbb{S}^2_+$. *Além disso, se a curvatura Gaussiana do bordo satisfaz* $K^{\partial M} \geq 1$, *temos que* M^3 *é isométrica a* $\mathbb{S}^3_+$.

Por fim, enfraquecendo a condição na curvatura, temos:

Teorema 1.5. *Seja (M^3, g) uma variedade Riemanniana com curvatura escalar $S \geq 0$. Seja $\Sigma^2 \subset M^3$ uma superfície fechada, mergulhada e orientável com curvatura média constante H, tal que $\lambda_1^J \geq -\frac{H^2}{2}$. Então, Σ^2 tem gênero 0 e*

$$|\Sigma| \leq \frac{16\pi}{H^2}.$$

Além disso, se Σ é o bordo de uma região limitada Ω, com $H > 0$ em relação ao normal que aponta para o exterior de Ω, e a igualdade é satisfeita, então Σ é isométrica a uma esfera redonda e Ω é isométrica a uma bola Euclidiana.

Teorema 1.6. *Seja (M^3, g) uma variedade Riemanniana com curvatura escalar $S \geq -6$. Seja $\Sigma^2 \subset M^3$ uma superfície mergulhada, fechada e orientável com curvatura média constante H tal que $\lambda_1^J \geq 2 - \frac{H^2}{2}$. Então,*

$$|\Sigma| \leq \frac{16\pi(1-\gamma)}{H^2 - 4},$$

em que γ é o gênero de Σ. Além disso, se Σ é o bordo de uma região limitada Ω, com $H > 0$ em relação ao normal que aponta para o exterior de Ω, $\gamma = 0$ e a igualdade é satisfeita, então Σ é isométrica a uma esfera redonda e Ω é isométrica a uma bola do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3$.

Nós também obtemos teoremas para dimensões superiores.

Teorema 1.7. *Sejam (M^{n+1}, g) uma variedade Riemanniana fechada com curvatura escalar $S \geq n(n+1)$ e $\Sigma^n \subset M^{n+1}$ uma hipersuperfície fechada, mergulhada de dois lados com curvatura média H constante. Se $\lambda_1^J \geq -n$, então*

$$n(n-1) \leq \fint_\Sigma S_\Sigma da.$$

Além disso, se $K_M \geq 1$, Σ é simplesmente conexa e vale a igualdade, então M^{n+1} é isométrica a $\mathbb{S}^{n+1}$ com a métrica canônica.

Para o caso em que a variedade ambiente é completa e possui curvatura seccional não negativa, temos que

Teorema 1.8. *Seja (M^{n+1}, g) uma variedade Riemanniana completa com curvatura escalar $S \geq 0$. Se $n > 6$, assuma também que M é spin. Seja $\Sigma^n \subset M^{n+1}$ uma hipersuperfície fechada, mergulhada, de dois lados com curvatura média H constante tal que $H \geq n$. Se $\lambda_1^J \geq -n$, então*

$$n(n-1) \leq \fint_\Sigma S_\Sigma da.$$

Além disso, se a igualdade for atingida, Σ é simplesmente conexa, bordo de uma região e se a curvatura seccional de M^{n+1} for não-negativa, então a região delimitada por Σ em M^{n+1} é isométrica a uma bola do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$.

Na seção 2.5 discutimos o caso de variedades ponderadas. Uma variedade ponderada é uma variedade Riemanniana em que a medida de volume é a medida canônica associada à métrica Riemanniana multiplicada por uma função peso. Com isso, temos o seguinte teorema baseado nos trabalhos de Ambrozio [4], Castro e Rosales [16].

Teorema 1.9. *Seja (M^3, g, f) uma variedade ponderada com $a \leq S_\infty e^f$ e $0 \leq b = \inf H_f^{\partial M} e^f$. Seja $\Sigma^2 \subset M^3$ uma superfície compacta, de dois lados com bordo livre, f-mínima e fortemente f-estável satisfazendo*

$$a|\Sigma|_f = 4\pi\chi(\Sigma) - 2b|\partial\Sigma|_f$$

e suponhamos que uma das seguintes hipóteses acontece

1. *cada componente de $\partial\Sigma$ é localmente comprimento ponderado minimizante; ou*

2. $\inf H_f^{\partial M} = 0$.

Então existe uma vizinhança de Σ em M tal que é isométrica a $((-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma, ds^2 + g_\Sigma)$ com densidade constante, onde (Σ, g_Σ) tem curvatura Gaussinana constante igual a $\frac{a}{2}$ e $\partial\Sigma$ tem curvatura geodésica constante igual a b em Σ. Finalmente, se M é completa e Σ é área ponderada minimizante na classe de isotopia, então f é constante e a variedade produto $\mathbb{R} \times \Sigma$ é isométrica a um recobrimento de M.

No Capítulo 3 , introduzimos o problema Jacobi-Steklov para superfícies com bordo. Denotamos por σ_1^J o primeiro autovalor do operador de Jacobi-Steklov e obtemos a seguinte estimativa.

Teorema 1.10. *Seja (M^3, g) uma variedade Riemanniana com bordo e tal que $a = \inf S$ e $b = \inf H^{\partial M}$ são finitos. Seja $\Sigma^2 \subset M^3$ uma superfície compacta de dois lados com bordo livre, curvatura média H constante tal que σ_1^J satisfaz a caracterização variacional via quociente de Rayleigh. Então*

$$\sigma_1^J \leq -\frac{1}{2}\left(a + \frac{3}{2}H^2\right)\frac{|\Sigma|}{|\partial\Sigma|} + \frac{2\pi\chi(\Sigma)}{|\partial\Sigma|} - b.$$

Além disso, a igualdade vale se, e somente se,

1. *Σ é totalmente umbílica e tem curvatura Gaussiana constante;*

2. *$S|_\Sigma = a$, $H^{\partial M}|_{\partial\Sigma} = b$;*

3. *$\mathrm{Ric}_M(N, N) = -\frac{1}{2}H^2$ ao longo de Σ e $II^{\partial M}(N, N) = -\sigma_1^J$ ao longo de $\partial\Sigma$.*

Como consequência obtemos um teorema de rigidez para o comprimento do bordo inspirado no Teorema de Mendes (veja [48, Theorem 1.4]).

Teorema 1.11. *Seja (M^3, g) uma variedade Riemanniana com bordo não vazio tal que $\mathrm{Ric}_M \geq 0$ e $II^{\partial M} \geq 1$. Seja $\Sigma^2 \subset M^3$ uma superfície mergulhada e orientável com curvatura média constante e bordo livre tal que σ_1^J satisfaz a caracterização variacional via quociente de Rayleigh com $\sigma_1^J \geq -1$. Então, Σ é topologicamente um disco cujo o bordo satisfaz*

$$|\partial\Sigma| \leq 2\pi.$$

Além disso, se vale a igualdade, Σ é isométrica ao disco $\overline{\mathbb{D}}$ e M^3 é isométrica à bola $\overline{\mathbb{B}}^3 \subset \mathbb{R}^3$.

Para dimensões superiores, temos o seguinte teorema:

Teorema 1.12. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta com curvatura seccional $K_M \geq 0$ e segunda forma fundamental do bordo $II^{\partial M} \geq 1$. Seja $\Sigma^{n-1} \subset M^n$ uma hipersuperfície mergulhada com curvatura média constante e bordo livre tal que σ_1^J satisfaz a caracterização variacional via quociente de Rayleigh com $\sigma_1^J \geq -1$. Então*

$$(n-2)|\partial\Sigma| \leq \frac{1}{2}\int_\Sigma S_\Sigma + \int_{\partial\Sigma} H^{\partial\Sigma,\Sigma}$$

e, se vale a igualdade, Σ é isométrica à bola fechada $\overline{\mathbb{B}}^{n-1}$. Além disso, se a curvatura de Ricci do bordo de M^n satisfaz $\mathrm{Ric}_{\partial M} \geq (n-1)g$, temos que M^n é isométrica à bola Euclidiana fechada $\overline{\mathbb{B}}^n$.

No Capítulo 4, obtemos versões de alguns teoremas provados no Capítulo 2 para o caso de MOTS em um conjunto de dados iniciais. Isto inclui uma estimativa superior para o autovalor principal do operador de estabilidade de MOTS, uma estimativa para a área da MOTS e a rigidez do conjunto de dados iniciais. Entre eles, temos:

Teorema 1.13. *Seja Σ^2 uma MOTS em um conjunto de dados iniciais (M^3, g, K). Suponha que exista uma constante c tal que $\mu - |J| \geq c$ sobre Σ. Então, o autovalor principal do operador de estabilidade de Σ satisfaz*

$$\lambda_1^L \leq -c + \frac{2\pi(2-2\gamma)}{|\Sigma|}.$$

Além disso, se vale a igualdade, a segunda forma fundamental luminosa χ_+ é identicamente nula, $\lambda_1^L = \lambda_1^{L_0}$ e a curvatura escalar de Σ é constante dada por $S_\Sigma = 2c + 2\lambda_1^L$.

Aqui, L_0 denota o operador de Jacobi simetrizado. Veja a seção 4.1 para definições.

No Capítulo 5, determinamos a primeira e a segunda variações da área para hipersuperfícies do tipo-espaço com bordo livre imersas em uma variedade Lorentziana.

Teorema 1.14 (Segunda variação da área)**.** *Sejam M^{n+1} uma variedade Lorentziana e $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma \to M$ uma variação de uma hipersuperfície do tipo-espaço Σ^n em M^{n+1},* *onde $int(\Sigma) \subset int(M)$ e $\partial\Sigma \subset \partial M$. Se Σ^n é estacionária com curvatura média constante H, então*

$$(A - HV)''(0) = \mathcal{I}(u, u),$$

onde $u = \langle X, N\rangle$ é a componente normal do vetor velocidade e $\mathcal{I}$ é a forma bilinear em $C^\infty(\Sigma)$ definida por

$$\mathcal{I}(v, w) := -\int_\Sigma \left\{\langle \nabla_\Sigma v, \nabla_\Sigma w\rangle + \left(\mathrm{Ric}_M(N, N) + |A|^2\right) vw\right\} da - \int_{\partial\Sigma} II^{\partial M}(N, N) vw d\ell.$$

Aqui, Ric_M *é o tensor de Ricci de M^{n+1} e $II^{\partial M}$ é a segunda forma fundamental de ∂M em M^{n+1}.*

Seguindo o trabalho de Barros, Brasil e Caminha em [12], onde eles estabeleceram condições de uma imersão do tipo-espaço com curvatura média constante no espaço generalizado de Robertson-Walker (GRW) seja maximal ou um slice do tipo-espaço, apresentaremos um resultado similar para hipersuperfícies do tipo-espaço com bordo livre.

Teorema 1.15. *Seja Σ^n uma hipersuperfície do tipo-espaço estacionária com bordo livre imersa em $\mathcal{N}^{n+1} = -I \times_\phi M^n$, de modo que nos pontos do bordo de Σ^n o vetor normal N coincida com ∂_t. Então*

(a) Se $H\phi' + n\phi''\Theta \geq 0$, então Σ é fortemente estável.

(b) Se Σ é compacta e $H\phi' + n\phi''\Theta \leq 0$, então Σ é fortemente estável se, e somente se, $H\phi' + n\phi''\Theta = 0$.

(c) Se Σ é compacta e $H\phi' + n\phi''\Theta < 0$, então Σ não pode ser fortemente estável.

No Capítulo 6, exploramos o problema proposto por Bartnik [13], que investiga o que pode ser inferido sobre a variedade ambiente quando a massa de Hawking se anula para uma determinada superfície e o papel das 2-esferas (buracos negros) nesse contexto.

Em geral, a massa de Hawking de uma superfície imersa $\Sigma \subset M^3$ é definida como

$$m_{\mathrm{H}}(\Sigma) = \left(\frac{|\Sigma|}{16\pi}\right)^{1/2}\left(1 - \frac{1}{16\pi}\int_\Sigma H^2 da - \frac{\gamma}{24\pi}|\Sigma|\right), \tag{1.1}$$

onde $\gamma = \inf_M S_g$, $|\Sigma|$ denota a área de Σ e H denota a função da curvatura média de Σ (veja [46]).

Dentro do contexto de curvatura positiva, abordaremos o problema de rigidez relacionado a esferas estáveis de curvatura média constante (CMC). Para estabelecer a rigidez da variedade ambiente, assumiremos curvatura de Ricci positiva, o que nos permitirá aplicar o teorema de Hang-Wang, conforme delineado em [36]. Lembramos que uma superfície

Riemanniana Σ é *aproximadamente uma esfera redonda* se a curvatura Gaussiana K_Σ estiver em C^0 e

$$\left|\frac{|\Sigma|}{4\pi}K_\Sigma - 1\right|_{C^0} < \epsilon_0$$

para alguma constante universal $\epsilon_0 \ll 1$, onde $|\Sigma|$ denota a área de Σ.

Usando essa notação, e denotando por $\mathbb{S}^2(r)$ a esfera redonda de raio r em $\mathbb{R}^3$, temos a seguinte extensão do teorema de Sun [65]:

Teorema 1.16. *Seja (M^3, g) uma variedade Riemanniana completa com $S_g \geq 6$ e Σ uma esfera com curvatura média constante estável em M^3. Se $m_{\mathrm{H}}(\Sigma) = 0$ e Σ for aproximadamente uma esfera redonda, então Σ é isométrica a $\mathbb{S}^2(\sqrt{|\Sigma|/4\pi})$. Além disso, se assumirmos $\mathrm{Ric}_M \geq 2$, então a região convexa em média $\Omega \subset M$ cuja fronteira é Σ é isométrica a uma bola geodésica em $\mathbb{S}^3_+$ cuja fronteira é $\mathbb{S}^2(\sqrt{|\Sigma|/4\pi})$.*

O próximo resultado usa as ideias apresentadas em [63, Teorema 2] para o caso de curvatura positiva. Lembramos que Σ tem simetria par, se existe uma isometria $\rho : \Sigma \to \Sigma$ satisfazendo as condições $\rho^2 = \mathrm{id}$ e $\rho(x) \neq x$ para $x \in \Sigma$.

Teorema 1.17. *Sejam (M^3, g) uma variedade Riemanniana completa com $S_g \geq 6$, e Σ seja uma esfera estável com curvatura média constante em M^3. Se $m_{\mathrm{H}}(\Sigma) = 0$ e Σ tem simetria par, então Σ é isométrica a $\mathbb{S}^2(\sqrt{|\Sigma|/4\pi})$. Além disso, se assumirmos $\mathrm{Ric}_M \geq 2$, então a região convexa em média $\Omega \subset M$ cuja fronteira é Σ é isométrica a uma bola geodésica em $\mathbb{S}^3_+$ cuja fronteira é $\mathbb{S}^2(\sqrt{|\Sigma|/4\pi})$.*

2 ESTIMATIVAS DE ÁREA E RIGIDEZ EM VARIEDADES RIEMANNIANAS COM BORDO

Neste capítulo, apresentamos uma série de estimativas superiores para o primeiro autovalor do operador de estabilidade de hipersuperfícies com curvatura média constante, tanto no caso de hipersuperfícies com bordo livre quanto no caso de hipersuperfícies fechadas. Além disso, obtemos resultados relativos à rigidez infinitesimal e à rigidez do ambiente quando ocorre igualdade em nossas estimativas.

2.1 O primeiro autovalor do operador de Jacobi

Seja M^{n+1} uma variedade Riemanniana com bordo suave e seja Σ uma hipersuperfície de dois lados, com curvatura média constante e bordo livre, imersa em M^{n+1}. Denotamos por N o campo normal unitário ao longo de Σ e por ν o campo conormal unitário ao longo do bordo de Σ.

Neste caso, $\partial\Sigma$ intersecta ∂M ortogonalmente, o que implica que Σ é ponto crítico do funcional área para variações que mantêm o bordo de Σ sobre o bordo de M (veja [57]). Além disso, a fórmula da segunda variação é dada pela forma quadrática:

$$\mathcal{I}(\phi,\rho) = -\int_\Sigma \phi J\rho da + \int_{\partial\Sigma} \phi \left\{ \frac{\partial\rho}{\partial\nu} - II^{\partial M}(N,N)\rho \right\} d\ell, \tag{2.1}$$

onde $J = \Delta + \mathrm{Ric}_M(N,N) + |A|^2$ é o operador de Jacobi de Σ e $II^{\partial M}$ denota a segunda forma fundamental de ∂M. Aqui Ric_M é curvatura de Ricci de M e A é a segunda forma fundamental de Σ.

Dizemos que $\rho \in C^\infty(\Sigma)$ é uma *autofunção* do operador de Jacobi associada ao autovalor λ^L se ρ não é identicamente nula e resolve o problema de fronteira do tipo Robin

$$\begin{cases} J\rho + \lambda^J\rho = 0, & \text{em } \Sigma, \\ \frac{\partial\rho}{\partial\nu} = II^{\partial M}(N,N)\rho, & \text{sobre } \partial\Sigma. \end{cases} \tag{2.2}$$

Note que isto é equivalente a dizer que $\mathcal{I}(\rho,\phi) = \lambda^J\langle\rho,\phi\rangle_{L^2(\Sigma)}$, para todo $\phi \in C^\infty(\Sigma)$. Pela teoria elíptica clássica, sabemos que os autovalores do problema (2.2) são dados por uma sequência divergente que denotamos por

$$\lambda_1^J < \lambda_2^J \leq \lambda_3^J \leq \ldots \nearrow \infty.$$

O primeiro autovalor λ_1^J pode ser obtido variacionalmente pela fórmula de Rayleigh

$$\lambda_1^J = \inf_{\phi\in C^\infty(\Sigma)\setminus\{0\}} \frac{\mathcal{I}(\phi,\phi)}{\int_\Sigma \phi^2 da}. \tag{2.3}$$

Em particular,

$$\lambda_1^J \leq \frac{\int_\Sigma |\nabla\phi|^2 - (\mathrm{Ric}_M(N,N) + |A|^2)\phi^2 da - \int_{\partial\Sigma} II^{\partial M}(N,N)\phi^2 d\ell}{\int_\Sigma \phi^2 da},$$

para toda $\phi \in C^\infty(\Sigma) \setminus \{0\}$.

O lema a seguir é conhecido entre os especialistas, mas incluímos aqui uma prova para fins de completude do trabalho. Este resultado será fundamental na caracterização da igualdade em nossas estimativas.

Lema 2.1. *Suponha que existe $\rho \in C^\infty(\Sigma) \setminus \{0\}$ tal que $\mathcal{I}(\rho,\rho) = \lambda_1^J \int_\Sigma \rho^2\, da$. Então, ρ é uma autofunção de $\mathcal{I}$ associada ao autovalor λ_1^J.*

Demonstração. Dada $v \in C^\infty(\Sigma)$, considere a função

$$f(t) := \mathcal{I}(\rho + tv, \rho + tv) - \lambda_1^J \int_\Sigma (\rho + tv)^2\, da, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Segue da definição de λ_1^J que $f(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Além disso, por hipótese, $f(0) = 0$ e, portanto, $t = 0$ é um ponto de mínimo global de f. Logo,

$$0 = f'(0) = 2\mathcal{I}(\rho, v) - 2\lambda_1^J \int_\Sigma \rho v\, da.$$

Ou seja, para todo $v \in C^\infty(\Sigma)$, temos

$$-\int_\Sigma vJ\rho\, da + \int_{\partial\Sigma} v\left\{\frac{\partial\rho}{\partial\nu} - II^{\partial M}(N,N)\rho\right\} d\ell = \lambda_1^J \int_\Sigma \rho v\, da.$$

Em particular, tomando funções $v \in C^\infty(\Sigma)$ com suporte compacto no interior de Σ, concluímos que $-J\rho = \lambda_1^J\rho$ e assim

$$\int_{\partial\Sigma} v\left\{\frac{\partial\rho}{\partial\nu} - II^{\partial M}(N,N)\rho\right\} d\ell = 0,$$

para $v \in C^\infty(\Sigma)$. E mais uma vez, pela arbitrariedade de $v \in C^\infty(\Sigma)$, concluímos que

$$\frac{\partial\rho}{\partial\nu} - II^{\partial M}(N,N)\rho = 0,$$

e portanto ρ é uma autofunção associada ao autovalor λ_1^J. □

Definição 2.1. Uma superfície Σ de curvatura média constante e bordo livre é dita *fortemente estável* se sua segunda variação da área for não-negativa para qualquer variação. Isto é equivalente a

$$\mathcal{I}(\phi,\phi) \geq 0 \tag{2.4}$$

para todo $\phi \in C^\infty(\Sigma)$. Dizemos que ela é *estável* se a segunda variação da área for não-negativa para variações que preservam volume. Ou seja, (2.4) é realizada para todo $\phi \in C^\infty(\Sigma)$ com $\int_\Sigma \phi\, da = 0$.

A seguir apresentamos alguns exemplos. O primeiro relata uma superfície com bordo livre que não é fortemente estável.

Exemplo 2.1. Seja $M^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}_+ = \{x_1 \geq 0\}$ e $\Sigma^n = \mathbb{S}^n_+$. Observamos que $\mathcal{I}(1,1) < 0$ indicando que Σ^n não é fortemente estável. Porém, é estável (com funções de média zero).

Um exemplo bem conhecido de uma superfície fortemente estável é uma folha de um cilindro, que é um exemplo de uma superfície que minimiza a área.

Exemplo 2.2. Seja $M^{n+1} = I \times N$ em que N é uma variedade e I é um intervalo aberto. Segue que $\Sigma^n = \{t_0\} \times N$, para todo $t_0 \in I$, é fortemente estável.

No próximo exemplo, temos uma superfície fechada que é estável, porém, não é fortemente estável.

Exemplo 2.3. Seja $M^{n+1} = \mathbb{S}^{n+1}$ e seja $\Sigma^n = \mathbb{S}^n$. Nós temos que Σ^n é totalmente geodésica e os autovalores do operador de Jacobi $\Delta_\Sigma + n$ são dados por $\lambda = k(k+n-1)-n$, e as autofunções são conhecidas como harmônicos esféricos de grau k. Como o harmônico esférico de grau zero é uma função constante e produz um autovalor negativo, temos que Σ não é fortemente estável. Porém, segue da fórmula de Rayleigh que

$$0 = \lambda_2^J = \inf_{\phi \in C^\infty(\Sigma)\setminus\{0\} : \int_\Sigma \phi \, dA = 0} \frac{\mathcal{I}(\phi,\phi)}{\int_\Sigma \phi^2 \, dA}.$$

Logo, Σ^n é estável.

2.2 Estimativas de área e rigidez do primeiro autovalor de Jacobi para superfícies

Aqui nos restringimos ao caso de superfícies compactas imersas em 3-variedades. Nesta dimensão, podemos usar a equação de Gauss na forma tratada por Schoen e Yau em [60], e também utilizar o teorema de Gauss-Bonnet.

Usando a equação de Gauss para uma hipersuperfície, podemos escrever como

$$\mathrm{Ric}_M(N,N) = \frac{1}{2}(S - S_\Sigma + H^2 - |A|^2), \tag{2.5}$$

onde $H = \operatorname{tr} A$ é a curvatura média de Σ. Note que se ρ é uma primeira autofunção, usando (2.2) e (2.5) temos que

$$\begin{aligned} \Delta\rho &= -\left(\lambda_1^J + \mathrm{Ric}_M(N,N) + |A|^2\right)\rho \\ &= -\left(\lambda_1^J + \frac{1}{2}S - K_\Sigma + \frac{1}{2}H^2 + \frac{1}{2}|A|^2\right)\rho. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Nós estamos interessados em obter estimativas superiores para o primeiro autovalor λ_1^L de Σ em termos de invariantes geométricos de Σ e do bordo $\partial\Sigma$.

Para isso, inspirados no clássico teorema de Schoen-Yau [60, Teorema 5.1], vamos tomar a função teste $\phi = 1$ na caracterização variacional (2.3). Assim, usando a equação de Gauss para Σ em M e a definição de curvatura média de ∂M em M dada por $H^{\partial M} = \operatorname{tr} II^{\partial M}$, temos

$$\begin{aligned}\lambda_1^J &\leq \frac{\mathcal{I}(1,1)}{\int_\Sigma 1 da} = -\frac{\int_\Sigma (\operatorname{Ric}_M(N,N) + |A|^2)\, da + \int_{\partial\Sigma} II^{\partial M}(N,N) d\ell}{|\Sigma|} \\ &= -\frac{1}{2|\Sigma|}\int_\Sigma \left(S - 2K_\Sigma + H^2 + |A|^2\right) da - \frac{1}{|\Sigma|}\int_{\partial\Sigma}\left(H^{\partial M} - \kappa\right) d\ell,\end{aligned}$$

onde $\kappa = \langle \nabla_T \nu, T\rangle = II^{\partial M}(T,T)$ é a curvatura geodésica de $\partial\Sigma$ em Σ e T é um vetor unitário tangente a $\partial\Sigma$.

Finalmente, utilizando o Teorema de Gauss-Bonnet, temos

$$\lambda_1^J \leq -\frac{1}{2|\Sigma|}\int_\Sigma \left(S + H^2 + |A|^2\right) da - \frac{1}{|\Sigma|}\int_{\partial\Sigma} H^{\partial M} d\ell + \frac{2\pi\chi(\Sigma)}{|\Sigma|}. \tag{2.7}$$

Enunciaremos agora o nosso primeiro resultado.

Teorema 2.1. *Seja (M^3, g) uma variedade Riemanniana com bordo e tal que a curvatura escalar e a curvatura média do bordo satisfazem* $\inf S = a > -\infty$ *e* $\inf H^{\partial M} = b > -\infty$*, respectivamente. Seja $\Sigma^2 \subset M^3$ uma superfície compacta de dois lados com bordo livre e curvatura média H constante. Então*

$$\lambda_1^J \leq -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}H^2 + a\right) - b\frac{|\partial\Sigma|}{|\Sigma|} + \frac{2\pi\chi(\Sigma)}{|\Sigma|}.$$

Além disso, a igualdade vale se, e somente se, as seguintes condições acontecem.

1. *Σ é totalmente umbílica e a curvatura geodésica de $\partial\Sigma$ em Σ é constante igual a b;*
2. *$S|_\Sigma = a$, $H^{\partial M}|_{\partial\Sigma} = b$ e a curvatura Gaussiana de Σ é constante;*
3. $\operatorname{Ric}_M(N,N) = -\lambda_1^J - \frac{1}{2}H^2$ *e N está no núcleo de $II^{\partial M}$ ao longo de $\partial\Sigma$.*

Demonstração. Pela desigualdade (2.7), junto com as hipóteses $a \leq S$, $b \leq H^{\partial M}$ e o fato que $|A|^2 \geq \dfrac{1}{2}H^2$, temos que

$$\begin{aligned}\lambda_1^J &\leq -\frac{1}{2|\Sigma|}\int_\Sigma \left(S + H^2 + |A|^2\right) da - \frac{1}{|\Sigma|}\int_{\partial\Sigma} H^{\partial M} d\ell + \frac{2\pi\chi(\Sigma)}{|\Sigma|} \\ &\leq -\frac{1}{2|\Sigma|}\int_\Sigma \left(a + \frac{3H^2}{2}\right) da - b\frac{|\partial\Sigma|}{|\Sigma|} + \frac{2\pi\chi(\Sigma)}{|\Sigma|} \\ &\leq -\frac{a}{2} - \frac{3H^2}{4} - b\frac{|\partial\Sigma|}{|\Sigma|} + \frac{2\pi\chi(\Sigma)}{|\Sigma|}.\end{aligned} \tag{2.8}$$

Além diso, temos que se ocorre a igualdade, então vale a igualdade em todas as desigualdades que usamos. Em particular, $|A|^2 = \frac{1}{2}H^2$ e temos que Σ é totalmente umbílica. Temos também que

$$\lambda_1^J = \frac{\mathcal{I}(1,1)}{\int_\Sigma 1 da}$$

e, portanto, pelo Lema 2.1, a função constante 1 é uma autofunção associada a λ_1^L. Em particular, $S|_\Sigma = a$, $H^{\partial M}|_{\partial\Sigma} = b$, e por (2.6) temos que $\mathrm{Ric}_M(N,N) = -\lambda_1^J - \frac{1}{2}H^2$ e K_Σ é constante igual a $a/2 + 3H^2/4 + \lambda_1^J$. Novamente, por (2.2) temos que $II^{\partial M}(N,N) = 0$ e portanto $II^{\partial M}(T,T) = H^{\partial M}|_{\partial\Sigma} = b$.

Reciprocamente, se valem as condições *1*, *2* e *3* acima, então $|A|^2 = \frac{H^2}{2}$ e

$$\lambda_1^J = -\frac{H^2}{2} - \mathrm{Ric}_M(N,N).$$

O resultado segue aplicando o truque de Schoen-Yau e obsevando que

$$\frac{S_\Sigma}{2} = K_\Sigma = \frac{1}{|\Sigma|}\int_\Sigma da = \frac{1}{|\Sigma|}\Big(-\int_{\partial\Sigma} b\, d\ell + 2\pi\chi(\Sigma)\Big) = -b\frac{|\partial\Sigma|}{|\Sigma|} + \frac{2\pi\chi(\Sigma)}{|\Sigma|}.$$

□

A seguir, fazendo uma estimativa menos fina, obtemos uma restrição maior no caso da igualdade. Mais precisamente:

Teorema 2.2. *Nas mesmas condições do Teorema 2.1, temos*

$$\lambda_1^J \leq -\frac{a}{2} - \frac{b}{|\Sigma|}|\partial\Sigma| + \frac{2\pi\chi(\Sigma)}{|\Sigma|}. \tag{2.9}$$

Além disso, a igualdade vale se, e somente se,

1. *Σ é totalmente geodésica, $\partial\Sigma$ consiste de geodésicas de ∂M e a curvatura geodésica de $\partial\Sigma$ em Σ é constante igual a b;*

2. *$S|_\Sigma = a$, $H^{\partial M}|_{\partial\Sigma} = b$ e a curvatura Gaussiana de Σ é constante;*

3. *$\mathrm{Ric}_M(N,N) = -\lambda_1^J$ e N está no núcleo de $II^{\partial M}$ ao longo de $\partial\Sigma$.*

Demonstração. A prova segue da mesma forma do teorema anterior, porém, usando a estimativa $|A|^2 \geq 0$. De forma que na igualdade teremos que Σ é mínima e totalmente geodésica.

Além disso, desde que Σ é totalmente geodésica e que N é o vetor normal de $\partial\Sigma$ em ∂M, segue que a curvatura geodésica de $\partial\Sigma$ em ∂M dada por $\langle\nabla_T N, T\rangle$ é nula, em que T é o vetor unitário tangente a $\partial\Sigma$. A recíproca segue com no teorema anterior. □

Corolário 2.1. *Seja (M^3, g) uma variedade Riemanniana com curvatura escalar $S \geq a$ e curvatura média do bordo $H^{\partial M} \geq b$. Se $\Sigma^2 \subset M^3$ é uma superfície compacta de dois lados com bordo livre e curvatura média H constante tal que $\lambda_1^J > -\frac{a}{2}$ então*

$$|\Sigma| \leq \frac{2\pi\chi(\Sigma) - b|\partial\Sigma|}{\lambda_1^J + \frac{a}{2}}. \tag{2.10}$$

Além disso, vale a igualdade se, e somente se, Σ é totalmente geodésica, $S|_\Sigma = a$, $H^{\partial M}|_{\partial\Sigma} = b$, $H = 0$, $K = \lambda_1^J + a/2$, $\kappa = b$, $II^{\partial M}(N,N)|_{\partial\Sigma} = 0$ e $\mathrm{Ric}_M(N,N) = -\lambda_1^J$.

Demonstração. Decorre diretamente do Teorema 2.1 notando que a desigualdade do primeiro autovalor se mantém fazendo $H = 0$. □

Antes de enunciar o nosso teorema de rigidez global, nós observamos que os resultados acima valem no caso de superfícies fechadas (compactas sem bordo), simplesmente fazendo $b = 0$.

Com o objetivo de encontrar teoremas de rigidez do ambiente, nós recordamos os seguintes resulados devidos a Hang e Wang [36].

Teorema 2.3 (Hang-Wang)**.** *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta com bordo $\Sigma = \partial M$. Suponhamos que*

- *O tensor curvatura de Ricci satisfaz $\mathrm{Ric}_M \geq (n-1)g$;*
- *$(\Sigma, g|_\Sigma)$ é isométrica a $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$;*
- *A segunda forma fundamental de Σ é não-negativa.*

Então, (M^n, g) é isométrica a $\mathbb{S}^n_+ \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Teorema 2.4 (Hang-Wang)**.** *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta com bordo $\Sigma = \partial M$ e $\overline{\Omega} \subset \mathbb{S}^n_+$ é um domínio compacto com bordo suave no hemisfério aberto. Suponhamos que*

- *O tensor curvatura de Ricci satisfaz $\mathrm{Ric}_M \geq (n-1)g$;*
- *Existe um mergulho isométrico $\iota : (\Sigma, g_\Sigma) \to \partial\overline{\Omega}$;*
- *$\mathrm{II} \geq \mathrm{II}_0 \circ \iota$ aqui II é a segunda forma fundamental de Σ em M e II_0 é a segunda forma fundamental de $\partial\overline{\Omega}$ em $\mathbb{S}^n_+$.*

Então, (M^n, g) é isométrica a $(\overline{\Omega}, g_{\mathbb{S}^n_+})$.

Teorema 2.5 (Hang-Wang)**.** *Seja (M^2, g) uma superfície compacta com bordo e curvatura Gaussiana $K_M \geq 1$. Suponha que a curvatura geodésica κ do bordo ∂M satisfaz $\kappa \geq c \geq 0$. Então $L(\gamma) \leq 2\pi/\sqrt{1+c^2}$. Além disso, a igualdade ocorre, se e somente se, (M^2, g) é isométrica ao disco de raio $\cot^{-1}(c)$ em $\mathbb{S}^2$.*

Corolário 2.2 (Toponogov [66])**.** *Seja (M^2, g) uma superfície fechada com curvatura Gaussina $K_M \geq 1$ Então qualquer geodésica simples e fechada tem comprimento menor ou igual que 2π. Além disso, se existe uma com comprimento igual a 2π, então M é isométrica a esfera canônica $\mathbb{S}^2$.*

Também vamos precisar dos seguintes resultados clássicos.

Lema 2.2 (Frankel [30]). *Seja (M^n, g) uma variedade fechada com Ric_M positivo. Então, quaisquer duas hipersuperfícies mínimas fechadas e mergulhadas Σ_1 e Σ_2 se intersectam. Em particular, qualquer hipersuperfície mínima fechada e mergulhada em M é conexa.*

Lema 2.3 (Lawson [40]). *Seja (M^n, g) uma variedade fechada com Ric_M positivo e seja Σ uma hipersuperfície mínima, fechada e mergulhada em M. Se ambas Σ e M são orientáveis, então $M \setminus \Sigma$ consiste de duas componentes conexas Ω_1 e Ω_2.*

O nosso primeiro resultado de rigidez global é para o caso de superfícies fechadas. Usando uma estimativa para o primeiro autovalor λ_1^J e a área da superfície em termos da sua curvatura média obtemos na rigidez um domínio convexo em média em $\mathbb{S}^3$. Mais precisamente:

Teorema 2.6. *Sejam (M^3, g) uma variedade Riemanniana fechada com curvatura escalar $S \geq 6$ e $\Sigma^2 \subset M^3$ uma superfície mergulhada, fechada e orientável com curvatura média constante. Se $\lambda_1^J \geq -\left(\frac{H^2}{2} + 2\right)$, então Σ tem gênero 0 e*

$$|\Sigma| \leq \frac{16\pi}{H^2 + 4}.$$

Além disso, se vale a igualdade na área e $Ric_M \geq 2$, então a região convexa em média $\Omega \subset M$, cuja fronteira é Σ, é isométrica a uma bola geodésica em $\mathbb{S}^3_+$, cuja fronteira é $\mathbb{S}^2(\sqrt{|\Sigma|/4\pi})$.

Demonstração. Pelo Teorema 2.1 considerando $b = 0$ (cf. [14]) e escrevendo $\chi(M) = 2 - 2\gamma$, onde γ é o gênero topológico de Σ, temos que

$$\lambda_1^J \leq -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}H^2 + a\right) + \frac{2\pi(2-2\gamma)}{|\Sigma|}.$$

Usando que $S \geq a = 6$ e $\lambda_1^J \geq -\left(\frac{H^2}{2} + 2\right)$, obtemos

$$-\frac{H^2}{2} - 2 \leq \lambda_1^J \leq -3 - \frac{3H^2}{4} + \frac{2\pi(2-2\gamma)}{|\Sigma|},$$

segue que

$$\frac{H^2}{4} \leq -1 + \frac{2\pi(2-2\gamma)}{|\Sigma|} \leq -1 + \frac{4\pi}{|\Sigma|}$$

e a estimativa segue bem como o fato do gênero topológico ser zero. Se a igualdade for atingida, então todas as desigualdades acima são, na verdade, são igualdades, e a igualdade no Teorema 2.1 é atingida. Assim, Σ é totalmente umbílica com curvatura Gaussiana constante igual a $\frac{4\pi}{|\Sigma|}$. Por conseguinte, Σ é isométrica a $\mathbb{S}^2(\sqrt{|\Sigma|/4\pi})$.

Agora, assumindo $\mathrm{Ric}_M \geq 2$, podemos aplicar o Lema 2.3 e concluir que Σ divide M em duas componentes, Ω_1 e Ω_2, tal que $\partial\Omega_1 = \partial\Omega_2 = \Sigma$. Neste ponto, estamos em posição de aplicar o Teorema 2.4 para concluir que se Ω_1 é a região determinada pelo lado médio convexo de Σ, então ela é isométrica a uma bola em $\mathbb{S}^3_+$ e isso conclui a prova. □

Corolário 2.3. *Sejam (M^3, g) uma variedade Riemanniana fechada com $S \geq 6$ e $\Sigma^2 \subset M^3$ uma superfície mergulhada, fechada e orientável com curvatura média constante. Se $\lambda_1^J \geq -2$, então Σ tem gênero 0 e $|\Sigma| \leq 4\pi$.*

Além disso, se a igualdade ocorrer e $Ric_M \geq 2$, então Σ é isométrica a $\mathbb{S}^2$ e M^3 é isométrica a $\mathbb{S}^3$.

Demonstração. Podemos aplicar o Teorema 2.2 usando a estimativa (2.9), temos que

$$\lambda_1^J \leq -\frac{1}{2}\left(H^2 + a\right) + \frac{2\pi\left(2 - 2\gamma\right)}{|\Sigma|}.$$

Pela hipótese sobre a curvatura de Ricci, segue que $a \geq 6$, das hipóteses temos

$$-2 \leq \lambda_1^J \leq -3 + \frac{4\pi(1-\gamma)}{|\Sigma|}.$$

Donde concluímos que o gênero é igual a zero e $|\Sigma| \leq 4\pi$.

Se a igualdade for atingida, então a igualdade no Teorema 2.2 também é válida. Assim, Σ é totalmente geodésica e tem curvatura Gaussiana constante igual a 1, sendo, portanto, isométrica a $\mathbb{S}^2$. Como a curvatura de Ricci de M é estritamente positiva, podemos aplicar o Lema 2.3 e concluir que Σ divide M em duas componentes Ω_1 e Ω_2 tais que $\partial\Omega_1 = \Sigma = \partial\Omega_2$. Como Σ é totalmente geodésica temos que a sua segunda forma fundamental em $\partial\Omega_i$ $i = 1, 2$, é identicamente nula. Portanto, pelo Teorema de Hang-Wang (Teorema 2.3), segue que $\Omega_1 = \mathbb{S}^3_+$ e $\Omega_2 = \mathbb{S}^3_-$, e assim concluímos a prova do teorema. □

Com o objetivo de provar um teorema de rigidez para variedades com bordo, precisamos do seguinte lema.

Lema 2.4. *Seja (Σ^2, g) uma superfície Riemanniana compacta, orientável, com gênero 0, curvatura Gaussiana constante igual a 1 e curvatura geodésica do bordo constante igual a $c \geq 0$. Então Σ é isométrica a um disco de raio $\cot^{-1}(c)$ em $\mathbb{S}^2$.*

Demonstração. Usando a fórmula de Gauss-Bonnet, temos

$$2\pi\chi(\Sigma) = \int_\Sigma K da + \int_{\partial\Sigma} \kappa d\ell > 0.$$

Como $\chi(\Sigma) > 0$, então Σ é simplesmente conexa, em particular $\partial\Sigma$ tem apenas uma componente. Assim, usando o Teorema da Aplicação de Riemann [56], segue que (Σ^2, g) é conformemente equivalente ao disco unitário $\overline{B} = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$ com a métrica canônica $|dz|^2$. Portanto, sem perda de generalidade, podemos considerar (Σ^2, g) como $(\overline{B}, g = e^{2u}|dz|^2)$. Como $(\overline{B}, g = e^{2u}|dz|^2)$ tem curvatura 1 e o bordo é um círculo convexo, ele pode ser isometricamente imerso como um domínio da esfera $\mathbb{S}^2$ (veja [36, Theorem 4]). Como o bordo tem curvatura geodésica $c \geq 0$, temos que $(\overline{B}, g = e^{2u}|dz|^2)$ é isométrico um disco de raio $\cot^{-1}(c)$ em $\mathbb{S}^2$. □

Agora temos o seguinte teorema de rigidez.

Teorema 2.7. *Seja (M^3, g) uma variedade Riemanniana com curvatura escalar $S \geq 6$ e bordo convexo em média, no sentido de que $H^{\partial M} \geq 0$. Seja $\Sigma^2 \subset M^3$ uma superfície mergulhada, orientável, com curvatura média constante e bordo livre em ∂M. Se $\lambda_1^J \geq -2$, então Σ é topologicamente um disco e $|\Sigma| \leq 2\pi$.*

Se a igualdade for atingida e a curvatura de Ricci satisfazer $Ric_M \geq 2$, então Σ é isométrica a $\mathbb{S}^2_+$. Além disso, se a curvatura Gaussiana do bordo satisfaz $K^{\partial M} \geq 1$, temos que M^3 é isométrica a $\mathbb{S}^3_+$.

Demonstração. Por hipótese, podemos aplicar o Teorema 2.2 com $a \geq 6$ e $b \geq 0$. Escrevendo $\chi(\Sigma) = 2 - 2\gamma - r$, onde r é o número de componentes conexas do bordo, temos:

$$\lambda_1^J \leq -\frac{1}{2}\left(H^2 + 6\right) + \frac{2\pi\,(2 - 2\gamma - r)}{|\Sigma|},$$

e, portanto,

$$-2 \leq \lambda_1^J \leq -3 + \frac{2\pi\,(2 - 2\gamma - r)}{|\Sigma|} \leq -3 + \frac{2\pi}{|\Sigma|},$$

o que prova a nossa estimativa de área.

Se vale a igualdade, então pelo Teorema 2.2, Σ é totalmente geodésica, tem curvatura Gaussiana constante igual a 1 e a curvatura geodésica de $\partial\Sigma$ em ∂M é nula. Pelo Lema 2.4, Σ é isométrica a $\mathbb{S}^2_+$ e $\partial\Sigma$ tem comprimento 2π. Além disso, se a curvatura Gaussiana de ∂M é $K^{\partial M} \geq 1$, segue do Corolário 2.2 que $\partial M = \mathbb{S}^2$. Agora aplicamos o Teorema 2.3 para obter o resultado. □

Agora vamos tratar o caso de ambientes com curvatura escalar não-negativa. Deixe-nos relembrar seguinte resultado que usa uma versão generalizada do Teorema da massa positiva no caso compacto (ver [50, 61] e [35, Teorema 1])

Lema 2.5. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta com bordo, com curvatura escalar $S \geq 0$ e cujo bordo ∂M é isométrico à esfera redonda $\mathbb{S}^{n-1}$ com curvatura média contante $H^{\partial M} = n - 1$. Então (M^n, g) é isométrica a bola do $\mathbb{R}^n$. (Se $n > 7$, nós assumimos que M é spin).*

Usando este lema nós obtemos o seguinte resultado para superfícies fechadas:

Teorema 2.8. *Seja (M^3, g) uma variedade Riemanniana com curvatura escalar $S \geq 0$. Seja $\Sigma^2 \subset M^3$ uma superfície fechada, mergulhada e orientável com curvatura média constante H, tal que $\lambda_1^J \geq -\frac{H^2}{2}$. Então, Σ^2 tem gênero 0 e*

$$|\Sigma| \leq \frac{16\pi}{H^2}.$$

Além disso, se Σ é o bordo de uma região limitada Ω, com $H > 0$ em relação ao normal que aponta para o exterior de Ω, e a igualdade é satisfeita, então Σ é isométrica a uma esfera redonda e Ω é isométrica a uma bola Euclidiana..

Demonstração. Pelo Teorema 2.1, temos que

$$\lambda_1^J \leq -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}H^2 + a\right) + \frac{2\pi(2-2\gamma)}{|\Sigma|}.$$

Usando que $S \geq a = 0$ e $\lambda_1^J \geq -\frac{H^2}{2}$, obtemos

$$-\frac{H^2}{2} \leq \lambda_1^J \leq -\frac{3H^2}{4} + \frac{4\pi(1-\gamma)}{|\Sigma|}$$

e a estimativa segue.

Se a igualdade ocorrer, então $H^2 = \frac{16\pi}{|\Sigma|}$ e Σ é uma superfície mergulhada, totalmente umbílica, com curvatura Gaussiana constante $K = \frac{H^2}{4}$ e gênero 0. Portanto, Σ é isométrica a $\mathbb{S}^2(2/H)$. Segue do Lema 2.5 que a região delimitada por Σ é isométrica à bola Euclidiana de raio $2/H$. □

Corolário 2.4. *Seja (M^3, g) uma variedade Riemanniana com curvatura escalar $S \geq 0$. Seja $\Sigma^2 \subset M^3$ uma superfície fechada, mergulhada e orientável com curvatura média constante $H \geq 2$ tal que $\lambda_1^J \geq -2$. Então Σ tem gênero 0 e $|\Sigma| \leq 4\pi$.*

Além disso, se Σ é o bordo de uma região limitada Ω com relação a normal que aponta para o exterior de Ω e vale a igualdade, então Σ é isométrica à $\mathbb{S}^2$ e Ω é isométrica à bola Euclidiana unitária.

Para o caso de curvatura negativa, vamos precisar dos seguinte resultados devido Shi e Tam em [62, Teorema 3.8]

Lema 2.6 (Shi-Tam)**.** *Seja (M, g) uma 3-variedade compacta e orientável com curvatura escalar $S \geq -6$ e ∂M isométrico à esfera redonda $\mathbb{S}^2$ com curvatura média $H = 2\sqrt{2}$. Então (M, g) é isométrica à bola unitária do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3$.*

De maneira mais geral temos:

Lema 2.7 (Shi-Tam)**.** *Seja (M, g) uma 3-variedade compacta e orientável com curvatura escalar $S \geq -6$ e ∂M isométrico a uma esfera redonda com curvatura média positiva H. Então (M, g) é uma bola do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3$.*

Usando os lemas precedentes nós obtemos:

Teorema 2.9. *Seja (M^3, g) uma variedade Riemanniana com curvatura escalar $S \geq -6$. Seja $\Sigma^2 \subset M^3$ uma superfície mergulhada, fechada e orientável com curvatura média constante H tal que $\lambda_1^J \geq 2 - \frac{H^2}{2}$. Então,*

$$|\Sigma| \leq \frac{16\pi(1-\gamma)}{H^2 - 4},$$

em que γ é o gênero de Σ. Além disso, se Σ é o bordo de uma região limitada Ω, com $H > 0$ em relação ao normal que aponta para o exterior de Ω, $\gamma = 0$ e a igualdade é satisfeita, então Σ é isométrica a uma esfera redonda e Ω é isométrica a uma bola do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3$.

Demonstração. Como no teorema anterior, temos

$$\lambda_1^J \leq -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}H^2 + a\right) + \frac{2\pi(2-2\gamma)}{|\Sigma|},$$

e assim, como $S \geq a = -6$ e $\lambda_1^J \geq 2 - \frac{H^2}{2}$, segue que a estimativa da área

$$2 - \frac{H^2}{2} \leq \lambda_1^J \leq 3 - \frac{3H^2}{4} + \frac{4\pi(1-\gamma)}{|\Sigma|}.$$

Se ocorre a igualdade e Σ tem gênero zero, então Σ é totalmente umbílica e tem curvatura Gaussiana constante. Portanto, é isométrica a $\mathbb{S}^2$. Segue do Lema 2.7 que a região delimitada por Σ é isométrica a uma bola hiperbólica de $\mathbb{H}^3$. □

Corolário 2.5. *Seja (M^3, g) uma variedade Riemanniana com $S \geq -6$. Seja $\Sigma^2 \subset M^3$ uma superfície mergulhada, fechada e orientável com curvatura média constante $H \geq 2\sqrt{2}$ tal que $\lambda_1^J \geq -2$. Então Σ tem gênero 0 e $|\Sigma| \leq 4\pi$.*

Além disso, se Σ é o bordo de uma região limitada Ω com relação a normal que aponta para o exterior de Ω e vale a igualdade, então Σ é isométrica à $\mathbb{S}^2$ e Ω é isométrica à bola unitária do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3$.

Demonstração. Como no teorema anterior, temos

$$\lambda_1^J \leq -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}H^2 + a\right) + \frac{2\pi(2-2\gamma)}{|\Sigma|},$$

e assim, como $S \geq a = -6$, $H \geq 2\sqrt{2}$ e $\lambda_1^J \geq -2$, segue que

$$-2 \leq \lambda_1^J \leq -3 + \frac{4\pi}{|\Sigma|}. \tag{2.11}$$

Se ocorre a igualdade então $H = 2\sqrt{2}$, Σ é totalmente umbílica, tem curvatura Gaussiana constante $K = 1$ e gênero 0. Portanto, é isométrica a $\mathbb{S}^2$. Segue do Lema 2.7 que a região delimitada por Σ é isométrica a uma bola hiperbólica. □

2.3 O primeiro autovalor de Jacobi de dois exemplos

Nesta seção, calcularemos o primeiro autovalor do operador de estabilidade para o disco na bola e para a metade do toro de Clifford no hemisfério.

Exemplo 2.4. Considere a bola Euclidiana

$$M = \mathbb{B}^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1\}$$

munida com a métrica canônica. Nós calcularemos o primeiro autovalor de estabilidade do disco $\Sigma = \mathbb{D} \subset \mathbb{B}^3$ totalmente geodésico que intersecta M ortogonalmente. Como $\mathrm{Ric}_M(N, N) = 0$, segue que a primeira autofunção ρ satisfaz

$$\begin{cases} \Delta_\Sigma \rho = -\lambda\rho, & \text{em } \Sigma, \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial \nu} = \rho, & \text{sobre } \partial\Sigma. \end{cases}$$

Usando a parametrização em coordenadas polares para Σ,

$$x(r, \theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta), \;\; 0 \leq r \leq 1, \; 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

as soluções são dadas por

$$\begin{aligned} u_{nk1}(r, \theta) &= J_n\left(\alpha_{nk} r\right)\cos(n\theta), \\ u_{nk2}(r, \theta) &= J_n\left(\alpha_{nk} r\right)\mathrm{sen}(n\theta), \\ u_{0k1}(r, \theta) &= J_0\left(\alpha_{nk} r\right), \end{aligned}$$

onde J_n são as funções de Bessel. Os autovalores são dados $\lambda_{nk} = \alpha_{nk}^2$, onde α_{nk}^2 são as raízes positivas da função

$$zJ_n'(z) - J_n(z) = 0. \tag{2.12}$$

Note que as autofunções são numeradas pela tripla n, k, i, sendo $n = 0, 1, 2, \ldots$ a ordem da função de Bessel, $k = 0, 1, 2\ldots$, a k-ésima raiz positiva da equação (2.12) e $i = 1, 2$. Essas funções produzem autovalores positivos. Para autovalores nulos, as autofunções são as funções coordenadas $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$. Finalmente para autovalores negativos temos

$$\rho = I_0(\eta r), \tag{2.13}$$

em que I_0 é a função de Bessel modificada de primeiro tipo, $\lambda_1 = -\eta^2$ e η é raiz da equação.

$$zI_0'(z) - I_0(z) = 0.$$

Para mais detalhes veja o apêndice A.1.

O próximo exemplo trata do hemisfério de uma esfera de dimensão 3.

Exemplo 2.5. Considere $\Sigma \subset \mathbb{S}^3_+$ a metade do toro de Clifford, parametrizada por

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta, \qquad x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi, \\ x_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{sen}\,\theta, \qquad x_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{sen}\,\varphi, \end{aligned}$$

com $\theta \in [0, 2\pi]$ e $\varphi \in [0, \pi]$.

Note que $\partial\Sigma = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta, \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\theta, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta, \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\theta, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ é formado por dois cícurlos em $\mathbb{S}^2 = \partial M$. Como $H = 0$, $|A|^2 = 2$ e o bordo de $\mathbb{S}^3_+$ é totalmente geodésico, temos que a primeira autofunção satisfaz o problema

$$\begin{cases} \Delta\rho + (4 + \lambda_1^J)\rho = 0, & \text{em } \Sigma, \\ \dfrac{\partial\rho}{\partial\nu} = 0, & \text{sobre } \partial\Sigma. \end{cases}$$

Além disso, como $\Delta_\Sigma = 2\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2} + 2\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$ e $\dfrac{\partial}{\partial\nu} = \sqrt{2}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}$, segue que

$$\begin{cases} 2\dfrac{\partial^2\rho}{\partial\theta^2} + 2\dfrac{\partial^2\rho}{\partial\varphi^2} + (4 + \lambda_1^J)\rho = 0, & \text{em } \Sigma, \\ \dfrac{\partial\rho}{\partial\varphi} = 0, & \text{sobre } \partial\Sigma. \end{cases} \tag{2.14}$$

Usando o método de separação de variáveis, vemos que as soluções do problema (2.14) são dadas por $\rho = ce^{bi\theta}\cos n\varphi$, em que $c \in \mathbb{R}$ e $b, n \in \mathbb{Z}$. Segue que os autovalores são da forma $\lambda = 2b^2 + 2n^2 - 4$ e, portanto, $\lambda_1^J = -4$.

2.4 Curvatura total e rigidez para hipersuperfícies fechadas

Nesta seção, apresentaremos algumas estimativas para λ_1^J no caso de hipersuperfícies Σ^n imersas em M^{n+1}, com $n \geq 3$. Similarmente ao caso bidimensional, podemos tomar o traço na equação de Gauss e obter a equação (2.5).

No caso de hipersuperfícies fechadas, obtemos dois resultados de rigidez para a curvatura escalar total em termos do primeiro autovalor do operador de Jacobi. Para os próximos teoremas vamos usar a seguinte definição de média de uma função $f \in C^0(\Sigma)$:

$$\fint_\Sigma f da = \frac{1}{|\Sigma|}\int_\Sigma f da.$$

Teorema 2.10. *Sejam (M^{n+1}, g) uma variedade Riemanniana fechada com curvatura escalar $S \geq n(n+1)$ e $\Sigma^n \subset M^{n+1}$ uma hipersuperfície fechada, mergulhada de dois lados com curvatura média H constante. Se $\lambda_1^J \geq -n$, então*

$$n(n-1) \leq \fint_\Sigma S_\Sigma da.$$

Além disso, se $K_M \geq 1$, Σ é simplesmente conexa e vale a igualdade, então M^{n+1} é isométrica a $\mathbb{S}^{n+1}$ com a métrica canônica.

Demonstração. Tomando $\phi = 1$ na caracterização variacional de λ_1^J e usando a equação de Gauss na forma (2.5), nós obtemos

$$\begin{aligned} \lambda_1^J &\leq -\frac{\int_\Sigma (\mathrm{Ric}_M(N,N) + |A|^2)\, da}{|\Sigma|} \\ &= -\frac{1}{2|\Sigma|}\int_\Sigma \left(S - S_\Sigma + H^2 + |A|^2\right) da. \end{aligned}$$

Usando a condição sobre o primeiro autovalor e a hipótese sobre a curvatura escalar de M, $S \geq n(n+1)$, nós temos

$$-n \leq \lambda_1 \leq -\frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{2}\frac{\int_\Sigma S_\Sigma}{|\Sigma|}da, \tag{2.15}$$

o que prova a desigualdade.

Se vale a igualdade, Σ é totalmente geodésica e a curvatura seccional de M ao longo de Σ é constante igual a $K|_\Sigma = 1$, pois a curvatura escalar de M satisfaz a igualdade $S = n(n-1)$. Assim, pela equação de Gauss, temos que a curvatura seccional de Σ também é constante igual a 1 e, portanto, Σ é isométrica à esfera redonda $\mathbb{S}^n$.,

Aplicando o Lema 2.3, temos que $M \setminus \Sigma$ consiste de duas componentes conexas Ω_1 e Ω_2. Agora, usando o Teorema 2.3 de Hang-Wang para cada uma dessas componentes, concluímos que $\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{S}^{n+1}_+$. □

No caso em que a variedade ambiente é completa e tem curvatura seccional não negativa, nós podemos obter a rigidez usando o Lema 2.5 e o seguinte resultado devido a Li [42, Teorema 1.1]

Lema 2.8 (Li)**.** *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa, $(n \geq 2)$, com curvatura de Ricci não-negativa e bordo convexo em média ∂M. Assuma que a curvatura média H de ∂M com respeito ao norma unitário exterior satisfaz $H \geq (n-1)k > 0$ para alguma constante $k > 0$. Seja d a função distância em M^n. Então*

$$\sup_{x \in M} d(x, \partial M) \leq \frac{1}{k}. \tag{2.16}$$

Além disso, se assumirmos que ∂M é compacto, então M também é compacta e ocorre a igualdade em (2.16) se, e somente se, M^n é isométrica a n-dimensional bola Euclidiana de raio $\frac{1}{k}$.

Teorema 2.11. *Seja (M^{n+1}, g) uma variedade Riemanniana completa com curvatura escalar $S \geq 0$. Se $n > 6$, assuma também que M é spin. Seja $\Sigma^n \subset M^{n+1}$ uma hipersuperfície fechada, mergulhada, de dois lados com curvatura média H constante tal que $H \geq n$. Se $\lambda_1^J \geq -n$, então*

$$n(n-1) \leq \fint_\Sigma S_\Sigma da.$$

Além disso, se a igualdade for atingida, Σ é simplesmente conexa, bordo de uma região e se a curvatura seccional de M^{n+1} for não-negativa, então a região delimitada por Σ em M^{n+1} é isométrica a uma bola do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$.

Demonstração. Inicialmente, lembramos que a desigualdade de Cauchy-Schwarz implica que $|A|^2 \geq H^2/n$ e vale a igualdade se, e somente se, Σ é umbílica. Assim, temos

$$\begin{aligned} -n \leq \lambda_1^J &\leq -\frac{1}{2|\Sigma|}\int_\Sigma \left(S - S_\Sigma + H^2 + |A|^2\right) da \\ &\leq \frac{1}{2}\fint_\Sigma S_\Sigma da - \frac{1}{2}\fint_\Sigma \frac{H^2(n+1)}{n} da \\ &\leq \frac{1}{2}\fint_\Sigma S_\Sigma da - \frac{n(n+1)}{2}, \end{aligned}$$

e a desigualdade segue.

Se a igualdade for atingida, então todas as igualdades acima também se tornam igualdades. Em particular, Σ é totalmente umbílica e, pela hipótese de que $K_M \geq 0$, obtemos que a curvatura seccional de M sobre Σ é zero. Mostraremos que Σ tem curvatura seccional constante igual a 1. De fato, pela equação de Gauss, temos

$$K_\Sigma(X,Y) = K_M(X,Y) + \langle AX, X\rangle\langle AY, Y\rangle - \langle AX, Y\rangle^2 = 0 + 1 + 0$$

onde X e Y são vetores ortonormais de $T_p\Sigma$. Desde que Σ^n é completa, simplesmente conexa e tem curvatura seccional constante igual a 1, por conseguinte é isométrica a $\mathbb{S}^n$. Segue do Lema 2.8 que Σ^n delimita uma região compacta e, pelo Lema 2.5, que a região delimitada por Σ^n é isométrica à bola Euclidiana unitária. □

2.5 O caso de variedades com densidade

O estudo de variedades Riemannianas com densidade tem tido grande relevância na última década. Entre algumas contribuições estão a solução da conjectura de Poincaré, o relaxamento das condições para resolver o problema de Monge para transporte de massa, o comportamento de singularidades do fluxo de Ricci, do fluxo de curvatura média entre outros ver [14, 16, 58, 45].

Nesta seção faremos uma estimativa para o primeiro autovalor do operador de Jacobi para variedades com densidade e bordo livre. Além disso, provamos um teorema do tipo splitting para variedades com densidade, bordo convexo e curvatura escalar de Perelman limitada inferiormente. Nossos métodos são baseados nos trabalhos de Ambrozio [4] e Castro-Rosales [16].

2.5.1 Preliminares

Seja (M^{n+1}, g) uma variedade Riemanniana conexa, orientável e com bordo ∂M. Por densidade em M^{n+1}, estamos nos referindo a uma função suave não-negativa $f : M^{n+1} \to \mathbb{R}$ usada para atribuir um peso à medida de volume associada à distância Riemanniana da seguinte forma: $dv_f = e^{-f}dv$, onde dv denota a medida Riemanniana e dv_f a medida ponderada.

A tripla (M^{n+1}, g, f) é chamada de variedade Riemanniana ponderada, na qual a medida de M^{n+1} é substituída por dv_f. Note que, se $f = 0$, a medida ponderada coincide com a medida Riemanniana. Uma generalização natural do tensor de Ricci é o 2-tensor Ric_f, que foi primeiramente introduzido por Lichnerowicz [43, 44] como segue:

$$\mathrm{Ric}_f = \mathrm{Ric}_M + \mathrm{Hess}\, f,$$

onde Ric_M denota o tensor de Ricci de (M^n, g). O tensor Ric_f é conhecido como o tensor de Ricci de Bakry-Émery após o trabalho de Bakry e Émery [7] sobre geradores de difusão. Este tensor aparece naturalmente no estudo de self-shrinkers, solitons de Ricci, fluxo de calor harmônico e muitos outros. Finalmente, temos uma generalização natural para a curvatura escalar introduzida por Perelman em [55], dada por

$$S_\infty = S + 2\Delta_M f - |\nabla f|^2,$$

onde S_∞ é conhecido como a curvatura escalar de Perelman. Note que ela não é o traço do tensor de Ricci de Bakry-Émery. De fato, temos a identidade de Bianchi $S_\infty = \nabla^* \mathrm{Ric}_f$ [16] onde ∇^* é o operador adjunto de ∇ com respeito à norma L^2 para a medida de volume $dv_f = e^{-f} dv$.

Seja Σ^n uma hipersuperfície conexa de dois lados imersa em M^{n+1}. Denotaremos por N o campo normal unitário ao longo de Σ e por ν o campo conormal unitário ao longo do bordo de Σ. Então, a f-curvatura média introduzida por M. Gromov [34] é dada por

$$H_f = H + \langle N, \nabla f \rangle.$$

Em uma variedade Riemanniana ponderada (M, g, f) podemos definir o operador f-Laplaciano por $\Delta_{M,f} u = \Delta u - \langle \nabla f, \nabla u \rangle$, que é uma generalização natural do operador de Laplace-Beltrami Δ. Analogamente, o f-Laplaciano de Σ é dado por $\Delta_{\Sigma,f} u = \Delta u - \langle \nabla_\Sigma f, \nabla_\Sigma u \rangle$. Ao longo desse capítulo, usaremos Δ_f para denotar $\Delta_{\Sigma,f}$.

Como no caso Riemanniano, temos que, para uma hipersuperfície Σ^n com f-curvatura média constante H_f com bordo livre, isto é, $\partial\Sigma$ intersecta ∂M ortogonalmente, a segunda variação da área é dada pela forma quadrática (ver, por exemplo, [16])

$$\mathcal{I}_f(\phi, \rho) = -\int_\Sigma \phi J_f \rho \, da_f + \int_{\partial\Sigma} \phi \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial \nu} - II^{\partial M}(N, N)\rho \right\} d\ell_f, \tag{2.17}$$

em que $J_f = \Delta_f + \mathrm{Ric}_f(N, N) + |A|^2$ é o operador de Jacobi ponderado em Σ^n. Dizemos que $\rho \in C^\infty(\Sigma)$ é uma autofunção associada ao operador de Jacobi ponderado e ao autovalor λ^{J_f} se ρ não é identicamente nula e resolve o problema

$$\begin{cases} J_f \rho + \lambda^{J_f} \rho = 0, & \text{em } \Sigma \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial \nu} = II^{\partial M}(N, N)\rho, & \text{sobre } \partial\Sigma. \end{cases} \tag{2.18}$$

O primereiro autovalor $\lambda_1^{J_f}$ do operador de Jacobi ponderado é caracterizado por

$$\lambda_1^{J_f} = \inf_{\phi \in C^\infty(\Sigma) \setminus \{0\}} \frac{\mathcal{I}_f(\phi, \phi)}{\int_\Sigma \phi^2 da}. \tag{2.19}$$

2.5.2 Rigidez de superfícies ponderadas e área minimizantes em variedades convexas

A maior parte das demonstrações desta subseção foi omitida devido à sua similaridade com os teoremas precedentes deste capítulo. No entanto, para o leitor mais interessado, tais demonstrações podem ser encontradas no Apêndice A.2.1.

Teorema 2.12. *Seja (M^3, g, f) uma variedade ponderada com $a \leq S_\infty$ e $b \leq H_f^{\partial M}$. Seja $\Sigma^2 \subset M^3$ uma superfície compacta de dois lados com bordo livre e com curvatura média ponderada H_f constante. Então*

$$\lambda_1^{J_f} \leq -\frac{1}{2}\left(H_f^2 + a\right) + \frac{2\pi\chi(\Sigma)}{|\Sigma|} - \frac{b}{|\Sigma|}|\partial\Sigma|. \tag{2.20}$$

Além disso, a igualdade vale, se e somente se,

1. *Σ^2 é totalmente geodésica e $\partial\Sigma$ consiste de geodésicas de ∂M. A curvatura geodésica de $\partial\Sigma$ em Σ^2 é constante e igual a b;*

2. *f é constante em Σ, $S_\infty|_\Sigma = a$, $H_f^{\partial M}|_{\partial\Sigma} = b$ e K é constante;*

3. *$\mathrm{Ric}_f(N, N) = -\lambda_1^{J_f}$ e N está no núcleo do $II^{\partial M}$ ao longo de $\partial\Sigma$.*

Proposição 2.1. *Seja (M^3, g, f) uma variedade ponderada com $a \leq S_\infty$ e $b \leq H_f^{\partial M}$. Seja $\Sigma^2 \subset M^3$ uma superfície compacta de dois lados com bordo livre, curvatura média ponderada H_f constante e fortemente f-estável. Então,*

$$|\Sigma|(a + H_f^2) \leq 4\pi\chi(\Sigma) - 2b|\partial\Sigma|.$$

Com a igualdade se e somente se:

1. *Σ é totalmente geodésica e $\partial\Sigma$ consiste de geodésicas de ∂M. A curvatura geodésica de $\partial\Sigma$ em Σ é constante e igual a b;*

2. *f é constante em Σ, $S_\infty|_\Sigma = a$, $H_f^{\partial M}|_{\partial\Sigma} = b$ e a curvatura Gaussiana de Σ é constante;*

3. *$\mathrm{Ric}_f(N, N) = -\lambda_1^{J_f} = 0$ e N está no núcleo do $II^{\partial M}$ ao longo de $\partial\Sigma$.*

Corolário 2.6. *Seja (M^3, g, f) uma variedade ponderada com $a \leq S_\infty$ e $0 \leq H_f^{\partial M}$. Seja $\Sigma^2 \subset M^3$ uma superfície compacta, de dois lados, com bordo livre, curvatura média ponderada H_f constante e fortemente f-estável, com $a + H_f^2 \geq 0$. Então:*

i Se $\partial\Sigma = \varnothing$, então Σ é uma esfera ou um toro;

ii Se $\partial\Sigma \neq \varnothing$, então Σ é um disco ou um cilindro.

A característica de Euler é nula se, e somente se, Σ é plana e totalmente geodésica, f é constante ao longo de Σ e $\mathrm{Ric}_f(N,N) = a + H_f^2 = \lambda_1 = 0$ em Σ^2. Além disso, se $\partial\Sigma \neq \varnothing$, então $\partial\Sigma$ consiste de duas geodésicas fechadas em M^3.

Demonstração. Segue diretamente da Proposição anterior que

$$|\Sigma|\left(a + H_f^2\right) \leq 4\pi\chi(\Sigma) = 4\pi(2 - 2\gamma - r).$$

Então seguem os itens (i) e (ii). A característica de Euler é nula se, e somente se, vale a igualdade na Proposição anterior, ou seja, se, e somente se, valem os itens (1), (2) e (3) da Proposição 2.1. □

O resultado a seguir é análogo a [4, Proposição 6] para o caso ponderado.

Proposição 2.2. *Seja (M^3, g, f) uma variedade ponderada com $a \leq S_\infty e^f$ e $b \leq H_f^{\partial M} e^f$. Seja $\Sigma^2 \subset M^3$ uma superfície compacta, de dois lados, com bordo livre, curvatura média H_f constante e f-estável. Então,*

$$a|\Sigma|_f \leq 4\pi\chi(\Sigma) - 2b|\partial\Sigma|_f$$

Com a igualdade se, e somente se,

1. *Σ é totalmente geodésica e $\partial\Sigma$ consiste de geodésicas de ∂M. A curvatura geodésica de $\partial\Sigma$ em Σ é constante e igual a b;*
2. *f é constante em Σ, $S_\infty e^f|_\Sigma = a$, $H_f^{\partial M} e^f|_{\partial\Sigma} = b$ e a curvatura geodésica de Σ é constante;*
3. *$\mathrm{Ric}_f(N,N) = -\lambda_1 = 0$ e N está no núcleo do $II^{\partial M}$ ao longo de $\partial\Sigma$.*

A proposição a seguir pode ser encontrada em [16, Proprosição 4.3].

Proposição 2.3 (Castro-Rosales)**.** *Seja M^3 uma variedade Riemanniana orientada e suave dotada de uma função densidade $f = e^\psi$. Considere uma hipersuperfície Σ^2 suave, compacta, orientada e f-estacionária imersa em M^3, com int$(\Sigma) \subset$ int(M) e bordo não-vazio $\partial\Sigma \subset \partial M$. Se Σ é totalmente geodésica, $\mathrm{Ric}_f(N,N) = 0$ em Σ e $II^{\partial M}(N,N) = 0$ ao longo de $\partial\Sigma$, então existe uma variação $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma^2 \to M^3$ de Σ^2 com vetor velocidade $X = N$ tal que qualquer hipersuperfície $\Sigma_s := \varphi_s(\Sigma)$ é f-estacionária. Além disso, se Σ^2 é um mergulho, então $\Omega := \varphi\left((-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma^2\right)$ é uma vizinhança aberta de Σ^2 em M^3 e $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma^2 \to \Omega$ é um difeomorfismo.*

O resultado a seguir é o análogo à [4, Proposição 11] para o caso ponderado.

Proposição 2.4. *Seja (M^3, g, f) uma variedade ponderada com $a \leq S_\infty e^f$ e $0 \leq b = H_f^{\partial M} e^f$. Seja $\Sigma^2 \subset M^3$ uma superfície compacta, de dois lados, com bordo livre, curvatura média ponderada H_f constante e fortemente f-estável, satisfazendo*

$$a|\Sigma|_f = 4\pi\chi(\Sigma) - 2b|\partial\Sigma|_f. \tag{2.21}$$

Suponha que uma das seguintes hipóteses acontece:

1. *Cada componente de $\partial\Sigma$ é localmente comprimento ponderado minimizante ∂M; ou*
2. *b=inf $H_f^{\partial M} = 0$.*

E seja $\{\Sigma_s\}_{s\in(-\epsilon,\epsilon)}$ como na Proposição 2.3. Então, $|\Sigma|_f \geq |\Sigma_s|_f$ para todo $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ (possivelmente para um ϵ menor).

Demonstração. Pela equação (A.1), é suficiente mostrar que $H_f(0) \geq 0$ em $(-\epsilon, \epsilon)$. Usando a notação da Proposição 2.3, defina $(X_s)_p := (\partial\varphi/\partial s)(s, p)$ e $u_s := \langle X_s, N_s\rangle$. Como $u_0 = 1$, podemos assumir que $u_s > 0$ em Σ_s para qualquer $s \in (-\epsilon, \epsilon)$. Por outro lado, como Σ_s são f-estacionárias, temos que $\partial u_s/\partial\nu_s = II^{\partial M}(N_s, N_s)$. Observe que $H_f'(s) = (J_f)_s(u_s)$, o que implica que

$$\begin{aligned} H_f'(s)\int_\Sigma \frac{1}{u_s}da_s &= \int_\Sigma \frac{(J_f)_s(u_s)}{u_s} = \int_\Sigma \left(\frac{\Delta_{\Sigma_s,f}u_s}{u_s} + \mathrm{Ric}_f(N_s,N_s) + |A_s|^2\right)da_s \\ &= \int_\Sigma \left(\frac{\Delta_{\Sigma_s}u_s - \langle\nabla f, \nabla u_s\rangle}{u_s} + \frac{S_\infty}{2}\right)da_s - \int_\Sigma K_s da_s - \int_\Sigma \Delta_{\Sigma_s} f da_s \\ &\quad + \int_\Sigma \left(\frac{1}{2}|\nabla_{\Sigma_s} f|^2 + \frac{1}{2}H_f^2 + \frac{1}{2}|A|^2\right)da_s. \end{aligned}$$

Usando que

$$\left|\frac{\nabla_{\Sigma_s}f}{\sqrt{2}} - \frac{\nabla_{\Sigma_s}u}{\sqrt{2}u}\right| = \frac{|\nabla_{\Sigma_s}f|^2}{2} + \frac{|\nabla_{\Sigma_s}u|^2}{2u^2} - \frac{\langle\nabla_{\Sigma_s}f, \nabla_{\Sigma_s}u\rangle}{u} \geq 0,$$

segue que

$$\frac{\mathcal{L}_f(u_s)}{u_s} \geq \frac{\Delta_{\Sigma_s}u_s}{u_s} - \frac{|\nabla_{\Sigma_s}u|^2}{2u^2} + \frac{1}{2}\left(S_\infty + H_f(s)^2 + |A|^2\right) - K_s - \Delta_{\Sigma_s}f. \tag{2.22}$$

Usando o Teorema da Divergência junto com $\partial u_s/\partial\nu_s = II^{\partial M}(N_s, N_s)$, temos

$$\begin{aligned} \int_\Sigma \frac{\Delta_{\Sigma_s}u_s}{u_s}da_s &= \int_\Sigma \frac{|\nabla_{\Sigma_s}u_s|^2}{u_s^2}da_s + \int_{\partial\Sigma}\frac{1}{u_s}\frac{\partial u_s}{\partial\nu_s}d\ell_s \\ &= \int_\Sigma \frac{|\nabla_{\Sigma_s}u_s|^2}{u_s^2}da_s + \int_{\partial\Sigma} H^{\partial M}d\ell_s - \int_{\partial\Sigma} II^{\partial M}(T_s,T_s)d\ell_s. \end{aligned}$$

Utilizando (2.22) e a equação acima temos que

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma \frac{J_f(u_s)}{u_s} da_s &\geq \frac{1}{2}\int_\Sigma \left(\frac{|\nabla_{\Sigma_s} u_s|^2}{u_s^2} + S_\infty + H_f(s)^2 + |A_s|^2\right) da_s - \int_\Sigma K_s da_s \\
&\quad + \int_{\partial\Sigma} H_f^{\partial M} d\ell_s - \int_{\partial\Sigma} \kappa_s d\ell_s \\
&\geq \frac{1}{2}\int_\Sigma S_\infty da_s + \int_{\partial\Sigma} H_f^{\partial M} d\ell_s - 2\pi\chi(\Sigma) \\
&\geq \frac{1}{2}\int_\Sigma ae^{-f} + \int_{\partial\Sigma} be^{-f} d\ell_s - \frac{a}{2}|\Sigma|_f - b|\partial\Sigma|_f \\
&\geq \frac{a}{2}\left(|\Sigma_s|_f - |\Sigma|_f\right) + b\left(|\partial\Sigma_s|_f - |\partial\Sigma|_f\right)
\end{aligned}$$

Por hipótese, $b = \inf H_f^{\partial M} e^f \geq 0$. Se cada componente do bordo é localmente comprimento ponderado minimizante, o segundo termo do lado direito é maior ou igual a zero; no caso em que $b = 0$, esse termo é zero. Portanto,

$$H_f'(s)\int_\Sigma \frac{1}{u_s} \geq \frac{a}{2}\left(|\Sigma_s|_f - |\Sigma|_f\right) = \frac{a}{2}\int_0^s \frac{d}{dt}|\Sigma_t|_f dt.$$

Como cada Σ_s é f-estacionária, a primeira variação da área (A.1) resulta em

$$\frac{d}{ds}|\Sigma_s|_f = -\int_\Sigma u_s H_f(s) da_{f,s} = -H_f(s)\int_\Sigma u_s da_{f,s}.$$

Portanto,

$$H_f'(s)\int_\Sigma \frac{1}{u_s} da \geq -\frac{a}{2}\int_0^s H(t)\left(\int_\Sigma u_t da_{f,t}\right) dt \tag{2.23}$$

Afirmação: Existe $\epsilon > 0$ tal que $H_f(s) \geq 0$ para todo $s \in [0, \epsilon)$. Temos três casos possíveis

a)Se $a = 0$, segue imediatamente que $H_f'(s) \geq 0$ para todo $s \in [0, \epsilon)$ e, como $H_f(0) = 0$, a afirmação é válida para $a = 0$.

b) Se $a > 0$, denote por $\phi(s) = \int \frac{1}{u_s} da_s$ e $\xi(s) = \int u_s \, da_{f,s}$, então

$$H_f'(s) \geq -\frac{a}{2}\frac{1}{\phi(s)}\int_0^s H_f(t)\xi(t)dt$$

Devido à continuidade, podemos assumir a existência de uma constante $C > 0$ tal que $\frac{1}{\phi(s)}\int_0^s \xi(t)\, dt \leq 2C$ para todo $s \in [0, \epsilon]$. Escolhendo $\epsilon > 0$ de modo que $aC\epsilon < 1$, podemos provar que $H_f(s) > 0$ para todos os valores de s em $[0, \epsilon)$.

Suponha, para fins de contradição, que exista um $s_+ \in [0, \epsilon)$ onde $H_f(s_+) < 0$. A continuidade garante a existência de um $s_- \in [0, s_+]$ tal que $H_f(s) \leq H_f(s_-)$ para todos os $s \in [0, s_+]$. Note que $H_f(s_-) \geq H_f(0) = 0$. Utilizando o teorema do valor médio, encontramos um ponto $s_1 \in (s_-, s_+)$ onde $H_f(s_+) - H_f(s_-) = H_f'(s_1)(s_+ - s_-)$. Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{H_f(s_+) - H_f(s_-)}{s_+ - s_-} = H_f'(s_1) &\geq \frac{a}{2}\frac{1}{\varphi(s_1)}\int_0^{s_1}(-H_f(t))\,\xi(t)dt \\ &\geq -\frac{a}{2}H_f(s_-)\frac{1}{\varphi(s_1)}\int_0^{s_1}\xi(t)dt \\ &\geq -aH_f(s_-)C.\end{aligned}$$

Implica que $H_f(s_+) \geq H_f(s_-)(1 - aC(s_+ - s_-)) \geq H_f(s_-)(1 - aC\epsilon) \geq 0$ o que é uma contradição.

c) Se a <0.

Escolha $\epsilon > 0$ tal que $-aC\epsilon < 1$, onde $C > 0$ é a mesma constante mencionada em (b). Isso garante que $H_f(s) \geq 0$ para todo $s \in [0, \epsilon)$. Para ver isso, suponha que existe um $s_0 \in [0, \epsilon)$ tal que $H_f(s_0) < 0$. Defina

$$R = \{s \in [0, s_0]; H_f(s) \leq H_f(s_0)\}\,.$$

Considere $s^* \in [0, \epsilon]$ como o ínfimo de R. Note que pela definição de s^*, temos $H_f(s) \geq H_f(s_0) = H_f(s^*)$ para todo $s \in [0, s^*)$.

Caso $s^* > 0$, o teorema do valor médio implica que existe $s_1 \in (0, s^*)$ tal que $H_f(s^*) = H_f'(s_1)s^*$, dado que $H_f(0) = 0$ e $a < 0$. Assim, temos:

$$\begin{aligned}\frac{H_f(s^*)}{s^*} = H_f'(s_1) &\geq -\frac{a}{2}\frac{1}{\phi(s_1)}\int_0^{s_1}(H_f(t))\,\xi(t)dt \\ &\geq -\frac{a}{2}H_f(s^*)\frac{1}{\phi(s_1)}\int_0^{s_1}\xi(t)dt \\ &\geq -aH_f(s^*)C\end{aligned}$$

Segue que, por conseguinte, $H_f(s^*)(1 + aCs^*) \geq H_f(s^*)(1 + aC\epsilon) \geq 0$, o que resulta em uma contradição, já que $H_f(s^*) = H_f(s_0) \leq 0$. Logo, concluímos que $s^* = 0$, o que também é uma contradição, pois $0 = H_f(0) \leq H_f(s_0) < 0$.

Portanto, chegamos à conclusão de que $|\Sigma|_f \geq |\Sigma_s|_f$ para todo $s \in [0, \epsilon)$. De modo análogo podemos demonstrar o caso $|\Sigma|_f \geq |\Sigma_s|_f$ para todo $s \in (-\epsilon, 0]$.

□

Finalmente podemos enunciar o teorema de rigidez para superfícies área ponderada minimizante. Concluiremos que a função densidade é constante em um vizinhança de Σ^2 e tal vizinhança é isométrica ao produto de Σ^2 por um intervalo com a métrica produto.

Teorema 2.13. *Seja (M^3, g, f) uma variedade ponderada com $a \leq S_\infty e^f$ e $0 \leq b = \inf H_f^{\partial M} e^f$. Seja $\Sigma^2 \subset M^3$ uma superfície compacta, de dois lados com bordo livre, f-mínima e fortemente f-estável satisfazendo*

$$a|\Sigma|_f = 4\pi\chi(\Sigma) - 2b|\partial\Sigma|_f, \tag{2.24}$$

e suponhamos que uma das seguintes hipóteses acontece

1. *cada componente de $\partial\Sigma$ é localmente comprimento ponderado minimizante ; ou*

2. $\inf H_f^{\partial M} = 0$.

Então existe uma vizinhança de Σ em M tal que é isométrica a $((-\epsilon,\epsilon)\times\Sigma, ds^2+g_\Sigma)$ com densidade constante, onde (Σ, g_Σ) tem curvatura Gaussinana constante igual a $\frac{a}{2}$ e $\partial\Sigma$ tem curvatura geodésica constante igual a b em Σ. Finalmente se M é completa e Σ é área ponderada minimizante na classe de isotopia, então f é constante em M e a variedade produto $\mathbb{R}\times\Sigma$ é isométrica a um recobrimento de M.

Demonstração. Desde que Σ é localmente área ponderada minimizante e satisfaz 2.24, podemos, pela Proposição 2.4, obter uma folheação $\{\Sigma_s\}_{s\in(-\epsilon,\epsilon)}$ em torno de $\Sigma_0=\Sigma$, com $|\Sigma_s|_f \leq |\Sigma|_f$ para todo $s\in(-\epsilon,\epsilon)$. Como Σ é localmente área ponderada minimizante, cada Σ_s também o é, com $|\Sigma_s|_f = |\Sigma|_f$. Quando $b=0$ ou as componentes de $\partial\Sigma$ são localmente comprimento ponderado minimizante, temos:

$$2\pi\chi(\Sigma) = \frac{a}{2}|\Sigma|_f + b|\partial\Sigma|_f \leq \frac{a}{2}|\Sigma_s|_f + b|\partial\Sigma_s|_f \leq 2\pi\chi(\Sigma).$$

Portanto, podemos aplicar a Proposição 2.4 a Σ_s, e uma vez que para cada s a função u_s satisfaz o problema de Neumann homogêneo, concluímos que u_s é uma função constante em Σ_s. Considerando (A.3) e o fato de que Σ_s é totalmente geodésica, inferimos que N_s é um campo paralelo definido em $\Omega := \varphi((-\epsilon,\epsilon)\times\Sigma)$. Assim, as curvas integrais de N_s são geodésicas, e podemos encontrar $\epsilon_0>0$ de modo que, numa vizinhança aberta $U_0\subset\Omega$ de Σ em M, o fluxo normal por geodésicas $F:(-\epsilon_0,\epsilon_0)\times\Sigma\to U_0$ dado por $F(s,p) := \exp_p(sN_p)$ é um difeomorfismo. Além disso, F é uma isometria, pois é um campo de Killing.

Se M é completo e Σ minimiza a área ponderada na classe de isotopia, o fluxo por geodésicas normais F está bem definido em $\mathbb{R}\times\Sigma$. Seja s_∞ o supremo do conjunto B de números $s>0$ tais que $F:[-s,s]\times\Sigma\to M$ é uma isometria sobre sua imagem. Suponha que $s_\infty<+\infty$ e denote $\Sigma_\pm = F(\{s_{\pm\infty}\}\times\Sigma)$. Como na primeira parte da demonstração, podemos assumir que F não aumenta a área ponderada. Assim, temos que $|\Sigma|_f = |\Sigma_{\pm\infty}|_f$ pela propriedade minimizante de Σ. Portanto, as hipersuperfícies $\Sigma_{\pm\infty}$ deveriam ser localmente área ponderada minimizante, e podemos usar a primeira conclusão do teorema para encontrar $\beta>0$ tal que $s_\infty+\beta\in B$, o que é uma contradição. Portanto, $s_\infty=+\infty$, e como consequência $F:\mathbb{R}\times\Sigma\to M$ é uma isometria local e, em particular, uma aplicação de recobrimento. □

3 ESTIMATIVAS DE COMPRIMENTO DO BORDO E RIGIDEZ DO PRIMEIRO AUTOVALOR DE STEKLOV

Neste capítulo, vamos introduzir um problema do tipo Steklov envolvendo o operador de Jacobi de hipersuperfícies com curvatura média constante e bordo livre. Apresentaremos estimativas superiores para o primeiro autovalor deste problema, bem como alguns resultados de rigidez.

3.1 O problema de Steklov

O problema de autovalores de Steklov é um problema clássico em Teoria Espectral e em Física Matemática, e pode ser definido da seguinte maneira: dada uma variedade compacta Σ com bordo suave, e dado um número real σ, encontrar uma solução para o problema:

$$\begin{cases} \Delta\rho = 0, & \text{em } \Sigma, \\ \frac{\partial\rho}{\partial\nu} = \sigma\rho, & \text{sobre } \partial\Sigma, \end{cases}$$

onde Δ denota o operador de Laplace-Beltrami de Σ. Também é possível introduzir o problema de Steklov como o problema espectral associado ao mapa *Dirichlet-to-Neumann*.

É bem conhecido que o conjunto dos autovalores de Steklov forma uma sequência divergente:

$$0 = \sigma_0 < \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3 \leq \ldots \nearrow \infty.$$

Em particular, o primeiro autovalor não nulo do problema de Steklov, denotado por σ_1, tem implicações geométricas muito interessantes. Citamos, por exemplo, os importantes trabalhos de Escobar [27, 28, 29], onde ele obteve estimativas ótimas para σ_1 em termos de invariantes geométricos. Citamos também o recente livro de Levitin, Mangoubi e Polterovich [41] para uma apresentação atualizada sobre este tema.

3.2 O problema de Jacobi-Steklov

Vamos estudar um problema de Steklov associado ao operador de Jacobi de uma hipersuperfície Σ^n com bordo livre em M^{n+1}. Mais precisamente: dizemos que $\rho \in C^\infty(\Sigma)$ é uma *autofunção* de Steklov associada ao operador de Jacobi com autovalor σ se ela resolve o problema de fronteira

$$\begin{cases} J\rho = 0, & \text{em } \Sigma, \\ B\rho = \sigma\rho, & \text{sobre } \partial\Sigma, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $J = \Delta + \mathrm{Ric}_M(N,N) + |A|^2$ é o operador de Jacobi e $B = \partial_\nu - II^{\partial M}(N,N)$ é operador de bordo presente na fórmula da segunda variação da área (cf. seção 2.1).

Note que isto é equivalente a dizer que

$$\mathcal{I}(\rho,\phi) = \sigma\langle\rho,\phi\rangle_{L^2(\partial\Sigma)}, \tag{3.2}$$

para todo $\phi \in C^\infty(\Sigma)$.

Similarmente ao caso do problema de autovalores para o operador de Jacobi, os autovalores de Steklov do problema (3.1) formam uma sequência divergente

$$\sigma_1^J \leq \sigma_2^J \leq \sigma_3^J \leq \ldots \nearrow \infty$$

e o primeiro autovalor pode ser caracterizado variacionalmente como

$$\sigma_1^J = \inf_{\phi \in C^\infty(\Sigma)\setminus\{0\}} \frac{\mathcal{I}(\phi,\phi)}{\int_{\partial\Sigma} \phi^2 \, d\ell}, \tag{3.3}$$

quando o ínfimo do quociente de Rayleigh é finito. Também temos a caracterização das primeiras autofunções, análoga ao caso do primeiro autovalor do operador de Jacobi. A prova segue exatamente o mesmo esquema do Lema 2.1, mas incluiremos a prova aqui para maior clareza.

Lema 3.1. *Suponha que existe $\rho \in C^\infty(\Sigma) \setminus \{0\}$ tal que $\mathcal{I}(\rho,\rho) = \sigma_1^J \int_{\partial\Sigma} \rho^2 \, d\ell$. Então, ρ é uma autofunção do problema (3.1) associada ao autovalor σ_1^J.*

Demonstração. Dada $v \in C^\infty(\Sigma)$, considere a função

$$f(t) := \mathcal{I}(\rho + tv, \rho + tv) - \sigma_1^J \int_{\partial\Sigma} (\rho + tv)^2 \, d\ell, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Segue da caracterização variacional de σ_1^J que $f(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Por hipótese, $f(0) = 0$ e, portanto, $t = 0$ é um ponto de mínimo global de f. Logo,

$$0 = f'(0) = 2\mathcal{I}(\rho, v) - 2\sigma_1^J \int_{\partial\Sigma} \rho v \, d\ell.$$

Ou seja, para todo $v \in C^\infty(\Sigma)$, temos

$$\mathcal{I}(\rho, v) = \sigma_1^J \int_{\partial\Sigma} \rho v \, d\ell,$$

que é precisamente a equação (3.2), e isto termina a prova. $\square$

3.3 Primeiro autovalor do operador de Jacobi-Steklov e resultados de rigidez para hipersuperfícies

Nesta seção, obtivemos resultados análogos aos do Teorema 2.1 e do Corolário 2.4 para o primeiro autovalor do operador de Jacobi-Steklov e para a área do bordo, respectivamente.

Teorema 3.1. *Seja (M^3, g) uma variedade Riemanniana com bordo e tal que $a = \inf S$ e $b = \inf H^{\partial M}$ são finitos. Seja $\Sigma^2 \subset M^3$ uma superfície compacta de dois lados com bordo livre, curvatura média H constante tal que σ_1^J satisfaz a caracterização variacional via quociente de Rayleigh. Então*

$$\sigma_1^J \leq -\frac{1}{2}\left(a + \frac{3}{2}H^2\right)\frac{|\Sigma|}{|\partial\Sigma|} + \frac{2\pi\chi(\Sigma)}{|\partial\Sigma|} - b. \tag{3.4}$$

Além disso, a igualdade vale se, e somente se,

1. *Σ é totalmente umbílica e tem curvatura Gaussiana constante;*
2. *$S|_\Sigma = a$, $H^{\partial M}|_{\partial\Sigma} = b$;*
3. *$\mathrm{Ric}_M(N, N) = -\frac{1}{2}H^2$ ao longo de Σ e $II^{\partial M}(N, N) = -\sigma_1^J$ ao longo de $\partial\Sigma$.*

Demonstração. Tomando a função $\phi = 1$ na caracterização variacional de σ_1^J e usando a equação de Gauss, temos

$$\begin{aligned}
\sigma_1^J|\partial\Sigma| &\leq -\int_\Sigma \left(\mathrm{Ric}_M(N, N) + |A|^2\right) da - \int_{\partial\Sigma} II^{\partial M}(N, N) d\ell \\
&= -\frac{1}{2}\int_\Sigma \left(S - 2K_\Sigma + H^2 + |A|^2\right) da - \int_{\partial\Sigma} \left(H^{\partial M} - \kappa\right) d\ell \\
&\leq -\frac{1}{2}(a + \frac{3}{2}H^2)|\Sigma| + 2\pi\chi(\Sigma) - b|\partial\Sigma|.
\end{aligned}$$

Se vale a igualdade, então todas as desigualdades acima são igualdades. Em particular, Σ é totalmente umbílica e, pelo Lema 3.1, a função $\phi = 1$ é uma autofunção e, portanto, satisfaz o problema (3.1). Daí, temos que $\mathrm{Ric}_M(N, N) + H^2/2 = 0$ e $\sigma_1^J = -II^{\partial M}(N, N)$.

Reciprocamente, se valem as condições *1, 2* e *3* acima, então $|A|^2 = \frac{H^2}{2}$ e o operador de Jacobi é o operador Laplaciano, isto é, $J = \Delta$. Portanto, $\mathcal{I}(1, 1) = -\int_{\partial\Sigma} II^{\partial M}(N, N) d\ell = \sigma_1^J|\partial\Sigma|$ e $\rho = 1$ é uma autofunção pelo Lema 3.1. O resultado segue aplicando o truque de Schoen-Yau e as condições *1, 2* e *3* acima. De fato,

$$\begin{aligned}
\sigma_1^J|\partial\Sigma| = \mathcal{I}(1, 1) &= -\frac{1}{2}\int_\Sigma \left(S - 2K_\Sigma + H^2 + |A|^2\right) da - \int_{\partial\Sigma} \left(H^{\partial M} - \kappa\right) d\ell \\
&= -\frac{1}{2}(a + \frac{3}{2}H^2)|\Sigma| + 2\pi\chi(\Sigma) - b|\partial\Sigma|.
\end{aligned}$$

□

Usaremos um resultado bastante útil devido a Changyu Xia [68].

Teorema 3.2 (Xia)**.** *Seja M^{n+1} uma $(n+1)$-variedade Riemanniana compacta com bordo ∂M não vazio. Suponha* $\mathrm{Ric}_M \geq 0$ *e $II^{\partial M} \geq c$, onde* Ric *é o tensor de Ricci de M e $II^{\partial M}$ é a segunda forma fundamental de ∂M em M. Então, o primeiro autovalor não nulo do Laplaciano de ∂M (com respeito à métrica induzida) satisfaz*

$$\lambda_1(\partial M) \geq nc^2.$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, M é isométrica à bola de raio $1/c$ do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$.

Como consequência de nossas estimativa e inspirado no Teorema de Mendes (veja [48, Teorema 1.4]), obtemos o seguinte teorema de rigidez para o comprimento do bordo $\partial\Sigma$.

Teorema 3.3. *Seja (M^3, g) uma variedade Riemanniana com bordo não vazio tal que* $\mathrm{Ric}_M \geq 0$ *e $II^{\partial M} \geq 1$. Seja $\Sigma^2 \subset M^3$ uma superfície mergulhada e orientável com curvatura média constante e bordo livre tal que σ_1^J satisfaz a caracterização variacional via quociente de Rayleigh com $\sigma_1^J \geq -1$. Então, Σ é topologicamente um disco cujo o bordo satisfaz*

$$|\partial\Sigma| \leq 2\pi.$$

Além disso, se vale a igualdade, Σ é isométrica ao disco $\overline{\mathbb{D}}$ e M^3 é isométrica à bola $\overline{\mathbb{B}}^3 \subset \mathbb{R}^3$.

Demonstração. Como $II^{\partial M} \geq 1$, segue que $b = \inf H^{\partial M} \geq 2$. Portanto, usando a desigualdade (3.4) e escrevendo $\chi(\Sigma) = 2 - 2\gamma - r$, onde γ é o gênero topológico de Σ e r é o número de componentes conexas de $\partial\Sigma$, nós temos

$$-1 \leq \sigma_1^J \leq \frac{2\pi(2 - 2\gamma - r)}{|\partial\Sigma|} - 2, \tag{3.5}$$

o que prova a primeira parte.

Se $|\partial\Sigma| = 2\pi$, então Σ é totalmente geodésica e $K_\Sigma = 0$. Além disso, $\kappa = \langle \nabla_T \nu, T\rangle = II^{\partial M}(T, T) = 1$, e, portanto, Σ é isométrica ao disco fechado $\overline{\mathbb{D}}$ e $\partial\Sigma$ é uma geodésica simples de ∂M, pois $\langle \nabla_T N, T\rangle = A(T, T) = 0$ com Σ mergulhada em M. Aplicando o Teorema de Mazet-Mendes [47, Teorema 5.1] concluímos o resultado. □

No próximo teorema, $H^{\partial\Sigma,\Sigma}$ denota a curvatura média de $\partial\Sigma$ como uma hipersuperfície de Σ, que é a generalização natural para a curvatura geodésica quando $n > 2$.

Teorema 3.4. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta com curvatura seccional $K_M \geq 0$ e segunda forma fundamental do bordo $II^{\partial M} \geq 1$. Seja $\Sigma^{n-1} \subset M^n$ uma* *hipersuperfície mergulhada com curvatura média constante e bordo livre tal que σ_1^J satisfaz a caracterização variacional via quociente de Rayleigh com $\sigma_1^J \geq -1$. Então*

$$(n-2)|\partial\Sigma| \leq \frac{1}{2}\int_{\Sigma} S_{\Sigma} + \int_{\partial\Sigma} H^{\partial\Sigma,\Sigma} \tag{3.6}$$

e, se vale a igualdade, Σ é isométrica à bola fechada $\overline{\mathbb{B}}^{n-1}$. Além disso, se a curvatura de Ricci do bordo de M^n satisfaz $\mathrm{Ric}_{\partial M} \geq (n-1)g$, temos que M^n é isométrica à bola Euclidiana fechada $\overline{\mathbb{B}}^n$.

Demonstração. Como $II^{\partial M} \geq 1$, segue que $b = \inf H^{\partial M} \geq n-1$. Portanto,

$$-1 \leq \sigma_1^J \leq \frac{\frac{1}{2}\int_{\Sigma} S_{\Sigma} + \int_{\partial\Sigma} H^{\partial\Sigma,\Sigma}}{|\partial\Sigma|} - (n-1), \tag{3.7}$$

donde segue (3.6). Se vale a igualde, então $K_M|_{\Sigma} = 0$, Σ é totalmente geodésica, $K_{\Sigma} = 0$ e segue que $\partial\Sigma$ é totalmente geodésica em ∂M. Além disso, $II^{\partial M}|_{\partial\Sigma} = 1$ e $H^{\partial\Sigma,\Sigma} = n-2$. Portanto, podemos usar o mapa exponencial para construir uma isometria entre um domínio estrelado no espaço tangente e Σ. Em particular, Σ e $\partial\Sigma$ são simplesmente conexas. Pela equação de Gauss, temos que para pontos de $\partial\Sigma$

$$K_{\partial M}(X,Y) = K_M(X,Y) + \langle II^{\partial M}(X,X), II^{\partial M}(Y,Y)\rangle - |II^{\partial M}(X,Y)|^2 = 0 + 1 + 0.$$

onde X, Y são vetores ortonormais de $\in T_p\Sigma$. Portanto, segue que $K_{\partial\Sigma} = 1$, desde $\partial\Sigma$ é totalmente geodésica em ∂M. Como $\partial\Sigma$ é completa e simplesmente conexa segue que $\partial\Sigma$ é isométrica a $\mathbb{S}^{n-2}$ e concluímos que Σ é isométrica a $\overline{\mathbb{B}}^{n-1}$ pelo Teorema de Xia.

Dado que a curvatura de Ricci de ∂M é estritamente positiva, podemos aplicar o Lema 2.3 e concluir que $\partial\Sigma$ divide ∂M em duas componentes Ω_1 e Ω_2 tais que $\partial\Omega_1 = \partial\Sigma = \partial\Omega_2$. Como $\partial\Sigma$ é totalmente geodésica, temos que a sua segunda forma fundamental em Ω_1 e Ω_2 é zero. Então, pelo Teorema 2.3, $\Omega_1 = \mathbb{S}^n_+$ e $\Omega_2 = \mathbb{S}^n_-$. Portanto, pelo Teorema de Xia, M^n é isométrica a $\overline{\mathbb{B}}^n$. $\square$

4 ESTIMATIVAS DE ÁREA E RIGIDEZ PARA O AUTOVALOR PRINCIPAL DE MOTS

Neste capítulo, obteremos versões de alguns teoremas provados no Capítulo 2 para o caso de MOTSs em um conjunto de dados iniciais. Isto inclui uma estimativa superior para o autovalor principal do operador de estabilidade e uma estimativa para a área da MOTS. Também obtemos a rigidez do conjunto de dados iniciais sob condições no autovalor principal.

4.1 Preliminares

Seja $(\overline{M}^4, \overline{g})$ um espaço-tempo, i.e., uma variedade Lorentziana munida de um campo de vetores do tipo-tempo V, e considere uma hipersuperfície do tipo-espaço M^3 imersa em $\overline{M}^4$. Então, a métrica induzida sobre M^3 é Riemanniana. Além disso, M^3 é orientável e existe um único campo unitário u normal a M^3, de tipo-tempo [51, p. 189]. Neste capítulo, seguindo a notação tradicional, denotaremos por K a segunda forma fundamental de M^3 em $\overline{M}^4$.

Considere Σ^2 uma superfície fechada de dois lados, mergulhada em M^3 com vetor unitário normal N. Podemos definir dois vetores do tipo-luz dados por $\ell_+ = u + N$ e $\ell_- = u - N$. Então, definimos as curvaturas médias de Σ^2 em $\overline{M}^4$ com respeito a ℓ_+ e ℓ_-, respectivamente, por θ_+ e θ_-. Elas são chamadas curvaturas médias luminosas.

Fixaremos ao longo deste capítulo N apontando para fora de Σ^2 em M^3. Assim, dizemos que Σ^2 é uma superfície aprisionada para o exterior se $\theta_+ < 0$, uma superfície não aprisionada se $\theta_+ > 0$, e finalmente uma superfície marginalmente aprisionada para o exterior, ou simplesmente MOTS (para usar o termo em inglês), se $\theta_+ = 0$.

Superfícies aprisionadas desempenham um papel fundamental na teoria de buracos negros. O famoso teorema da singularidade de R. Penrose afirma que, sob certas condições físicas, a existência de uma superfície aprisionada implica a existência de uma singularidade [38, 53]. A definição de buraco negro é um pouco técnica, mas, de forma geral, refere-se a uma região do espaço-tempo da qual os raios de luz não podem "escapar". Uma superfície aprisionada oferece uma maneira quase local de identificar buracos negros. A fronteira do buraco negro é denominada horizonte de eventos. Intuitivamente, uma superfície aprisionada vem do fato que os raios de luz que estão indo "para fora"ainda estão convergindo para "dentro"da superfície, impossibilitando a fuga da luz [39]. Uma MOTS é o caso limite em que esses raios de luz não estão convergindo para o interior da região inacessível nem estão saindo. Por esse motivo, MOTS geralmente estão associadas à fronteira de um buraco negro [38].

Definição 4.1. As segundas formas fundamentais luminosas de Σ^2 em $\overline{M}^4$ são definidas por

$$\chi_{\pm}(X,Y) = \overline{g}(\overline{\nabla}_X \ell_{\pm}, Y),$$

onde $X, Y \in T_p\Sigma$.

Note que

$$\chi_{\pm}(X,Y) = K|_{\Sigma} \pm A,$$

onde A é a segunda forma fundamental de Σ^2 em M^3 em relação a N.

Quando M^3 é totalmente geodésica, isto é, $K = 0$, temos que $\theta_+ = H$ e, assim, uma MOTS é apenas uma superfície mínima. Por causa disso, uma MOTS pode ser pensada como uma generalização de uma superfície mínima. Portanto, muitos fatos gerais sobre MOTS descobertos em física podem ser aplicados em superfícies mínimas. Reciprocamente, muitos fatos desenvolvidos na teoria de superfícies mínimas podem ser levados para a teoria de MOTS, por exemplo, [32]. Além disso, MOTS tiveram um papel importante na prova do Teorema da Massa Positiva para espaços-tempo de dimensão menor que oito (ver [25]).

Apresentaremos a noção de estabilidade para MOTS, devida a Andersson, Mars e Simon [6, 5]. Seja $G = \mathrm{Ric}_{\overline{M}} - \frac{R}{2}\overline{g}$ o tensor de Einstein de $\overline{M}^4$. Segue que a densidade de energia local μ e a densidade de corrente local J, que são dadas por:

$$\mu = G(u,u) = \frac{1}{2}\left(S - |K|^2 + \tau^2\right), \quad \text{e} \quad J = G(u,\cdot) = \operatorname{div}\left(K - \tau g\right), \tag{4.1}$$

onde $\tau = \operatorname{tr} K$ e fizemos uso da equação de Gauss.

Além disso, considere $X \in \Gamma(T\Sigma)$, o campo de vetores sobre Σ definido em cada ponto $p \in \Sigma$ como sendo o dual a $K(N,\cdot)|_{T_p\Sigma}$ e a seguinte variação:

$$\varphi : \Sigma \times (-\epsilon, \epsilon) \to M, \quad \varphi(\Sigma, s) := \varphi_s(\Sigma) = \Sigma_s \subset M,$$

tal que $\Sigma^2 = \Sigma_0$ em (M, g, K) e $\Sigma_s = \varphi(p,s)$ é um mergulho para cada s fixo. O campo variacional é dado por $\mathcal{V}_s = \frac{\partial \varphi_s}{\partial s}$ e o vetor velocidade é o campo dado por $\mathcal{V}_0 = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial s}\right|_{s=0}$. Nós definimos o seguinte funcional:

$$\mathcal{F}\left[\Sigma_s\right] = \int_{\Sigma} \theta_+ \langle \mathcal{V}_s, N_s\rangle \, da_s. \tag{4.2}$$

Note que se $K = 0$, então $\theta_+ = H$ e o funcional acima coincide com a primeira variação da área. Em analogia com o caso de superfícies mínimas, Andersson, Mars e Simon calcularam a variação do funcional F dado acima no artigo [5].

Proposição 4.1 (Andersson-Mars-Simon)**.** *Sejam* (M^3, g, K) *um conjunto de dados iniciais contido em um espaço-tempo* $(\overline{M}^4, \overline{g})$ *e* Σ^2 *uma MOTS. Então, a primeira variação do funcional (4.2) é dada por*

$$\mathcal{F}'(0) = \int_\Sigma |\nabla\phi|^2 + \langle X, \nabla\phi\rangle + \Big(Q - |X|^2 + \operatorname{div} X - \frac{1}{2}\Big)\,\phi\, da$$

onde $Q = \frac{1}{2}S_\Sigma - (\mu + J(N)) - \frac{1}{2}|\chi_+|^2$ *e* $\phi = \langle N, \mathcal{V}_0\rangle$*.*

Motivados por esta proposição, temos a seguinte definição.

Definição 4.2. O operador de estabilidade para MOTS $L : C^\infty(\Sigma) \to C^\infty(\Sigma)$ é dado por

$$L\phi = -\Delta\phi + 2\langle X, \nabla\phi\rangle + \Big(Q - |X|^2 + \operatorname{div} X\Big)\,\phi.$$

Note que esse operador não é simétrico, então é possível que existam autovalores complexos. Contudo, existe um autovalor real, chamado de autovalor principal, que será muito importante em nosso estudo, pois tem um papel análogo ao primeiro autovalor do operador de Jacobi para superfícies mínimas ou de curvatura média constante. Sobre ele temos as seguintes propriedades provadas em [6, Lema 4.1].

Lema 4.1. *O operador de estabilidade* L *para MOTS possui um autovalor real* λ_1^L*, chamado de autovalor principal, tal que para qualquer outro autovalor* μ*, temos que* $\operatorname{Re}\mu \geq \lambda_1^L$*. A correspondente autofunção* ρ*, tal que* $L\rho = \lambda_1^L\rho$*, é única a menos de uma constante multiplicativa e podemos escolher* $\rho > 0$ *em* Σ*.*

Associado ao operador de estabilidade, temos o operador simetrizado $L_0 : C^\infty(\Sigma) \to C^\infty(\Sigma)$ dado por

$$L_0\phi = -\Delta\phi + Q\phi.$$

Por ser simétrico temos que o seu primeiro autovalor pode ser obtido como o ínfimo dos quocientes de Rayleigh

$$\lambda_1^{L_0} = \inf_{\phi \in C_0^\infty(\Sigma)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Sigma |\nabla\phi|^2 + Q\phi^2\, da}{\int_\Sigma \phi^2\, da}. \tag{4.3}$$

O lema a seguir, devido a Galloway e Schoen [33] faz uma comparação entre estes dois autovalores para MOTSs.

Lema 4.2 (Galloway e Schoen)**.** $\lambda_1^{L_0} \geq \lambda_1^L$.

4.2 Estimativas de área e rigidez para o operador de estabilidade de MOTS

Nesta seção, vamos provar uma estimativa para o autovalor principal de uma MOTS, inspirados nos resultados que obtivemos no Capítulo 2. Para isso, vamos supor que a função $\mu - |J|$ é limitada inferiormente por uma constante (que pode ser negativa). Essa condição desempenha o papel da limitação da curvatura escalar, no caso $K = 0$.

A hipótese $\mu - |J| \geq c$ é comum quando se usa a condição de energia dominante num espaço-tempo com cosmológica ou na presença de matéria. De fato, podemos escrever a equação de campo de Einstein na forma $G_{\mu\nu} + \Lambda\overline{g} = \mathcal{T}_{\mu\nu}$, onde $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ é o tensor momento-energia.

Para um observador que se move tangente a um vetor temporal $u = e_0$ tal que e_0, e_1, e_2, e_3 formam um referencial de Lorentz, temos que a densidade de energia-momento observada é representada pelo vetor $\Sigma\mathcal{T}_{0\mu}e_\mu$. A condição para que este vetor seja do tipo-tempo e aponte para o futuro para todo observador[1] é a condição de energia dominante:

$$\mathcal{T}_{00} \geq \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \mathcal{T}_{0i}^2}.$$

Segue de (4.1) que a condição de energia dominante é dada por

$$\mu \geq |J| + \Lambda \quad \text{em} \quad M. \tag{4.4}$$

A condição de energia dominante é uma condição fundamental em relatividade geral, impondo restrições nas densidades de energia e no fluxo de energia de maneira que sejam consistentes com a física clássica. Mais precisamente, essa condição assegura que a densidade de energia medida por qualquer observador seja não negativa e que o fluxo de energia nunca exceda a velocidade da luz. É uma condição crucial para garantir a validade das soluções das equações de Einstein em contextos físicos realistas, como o comportamento de buracos negros e outras singularidades gravitacionais.

Usando essa condição, provamos o seguinte teorema.

Teorema 4.1. *Seja Σ^2 uma MOTS em um conjunto de dados iniciais (M^3, g, K). Suponha que exista uma constante c tal que $\mu - |J| \geq c$ sobre Σ. Então, o autovalor principal do operador de estabilidade de Σ satisfaz*

$$\lambda_1^L \leq -c + \frac{2\pi(2 - 2\gamma)}{|\Sigma|}.$$

Além disso, se vale a igualdade, a segunda forma fundamental luminosa χ_+ é identicamente nula, $\lambda_1^L = \lambda_1^{L_0}$ e a curvatura escalar de Σ é constante dada por $S_\Sigma = 2c + 2\lambda_1^L$.

[1] Isto é, o fluxo de massa-energia nunca pode ser mais rápido que a velocidade da luz.

Demonstração. Usaremos que $\lambda_1^L \leq \lambda_1^{L_0}$ e a função $\phi = 1$ na equação (4.3)

$$\begin{aligned}
\lambda_1^{L_0} &\leq \frac{1}{|\Sigma|}\int_\Sigma Q\,da \\
&= \frac{1}{|\Sigma|}\int_\Sigma \left(\frac{S_\Sigma}{2} - (\mu + J(N)) - \frac{|\chi_+|^2}{2}\right) da \\
&\leq \frac{1}{|\Sigma|}\int_\Sigma \left(\frac{S_\Sigma}{2} - (\mu - |J|)\right) da \\
&\leq -c + \frac{2\pi(2-2\gamma)}{|\Sigma|}
\end{aligned}$$

em que na última linha usamos o Teorema de Gauss-Bonnet. Se vale a igualdade, então $\lambda_1^L = \lambda_1^{L_0}, X = \chi_+ = 0, \mu + J(N) = \mu - |J| = c$ e $\lambda_1^{L_0}|\Sigma| = \int_\Sigma Q\,da$. Em particular, dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\psi \in C^\infty(\Sigma)$ arbitrários, temos que

$$\begin{aligned}
\lambda_1^L \int_\Sigma (\psi+\alpha)^2\,da &\leq \int_\Sigma \left(|\nabla(\alpha+\psi)|^2 + Q(\alpha+\psi)^2\right) da \\
&= \int_\Sigma \left(|\nabla\psi|^2 + Q\psi^2\right) da + 2\alpha\int_\Sigma Q\psi\,da + \lambda_1^L\int_\Sigma \alpha^2\,da.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$0 \leq \int_\Sigma \left(|\nabla\psi|^2 + (Q-\lambda_1^L)\psi^2\right) da + 2\alpha\int_\Sigma (Q-\lambda_1^L)\psi\,da$$

Como $\alpha \in \mathbb{R}$ é qualquer, temos que $\int_\Sigma (Q-\lambda_1^L)\psi\,da = 0$ para toda $\psi \in C^\infty(\Sigma)$ e, portanto, $Q = \frac{1}{2}S_\Sigma - c = \lambda_1^L$. □

Usando essa estimativa para o autovalor principal de Σ nós obtemos a seguinte estimativa de área.

Teorema 4.2. *Sejam (M^3, g, K) um conjunto tridimensional de dados iniciais e Σ^2 uma MOTS fechada em M^3. Suponha que $\mu - |J| \geq 3$ e o primeiro autovalor do operador de estabilidade de Σ satisfaça $\lambda_1^L \geq -2$. Segue que*

$$|\Sigma| \leq 4\pi.$$

Além disso, se Σ é o bordo de uma região limitada Ω, com massa de Hawking $m_{\mathrm{H}}(\Sigma) = 0$, a curvatura escalar de M satisfaz $S_g \geq 0$ e a igualdade é atingida, então Σ é isométrica a uma esfera redonda e Ω é isométrica à bola Euclidiana unitária.

Demonstração. Do Teorema 4.1, temos que

$$-2 \leq \lambda_1^L \leq -3 + \frac{2\pi(2-2\gamma)}{|\Sigma|}.$$

Além disso, se Σ é o bordo de uma região limitada Ω com curvatura escalar $S \geq -0$, é CMC com massa de Hawking $m_{\mathrm{H}}(\Sigma) = 0$ e a igualdade é satisfeita, então Σ é isométrica a uma esfera redonda e Ω é isométrica à bola Euclidiana unitária. □

Teorema 4.3. *Sejam (M^3, g, K) um conjunto tridimensional de dados iniciais e Σ^2 uma MOTS fechada em M^3. Suponha que $\mu - |J| \geq 3$ e o primeiro autovalor do operador de MOTS satisfaça $\lambda_1^L \geq -2$. Segue que*

$$|\Sigma| \leq 4\pi.$$

Além disso, se Σ é o bordo de uma região limitada Ω, com massa de Hawking $m_{\mathrm{H}}(\Sigma) = 0$, a curvatura escalar de M satisfaz $S_g \geq -6$ e a igualdade é atingida, então Σ é isométrica a uma esfera redonda e Ω é isométrica à bola do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3$.

Demonstração. Do Teorema 4.1, temos que

$$-2 \leq \lambda_1^L \leq -3 + \frac{2\pi(2 - 2\gamma)}{|\Sigma|}.$$

Se ocorre a igualdade, então $S_\Sigma = 2$, Σ tem gênero zero e é isométrica à $\mathbb{S}^2$. Como $m_{\mathrm{H}}(\Sigma) = 0$, temos que $H = 2\sqrt{2}$, pela equação (1.1) com $\gamma = -6$. Segue do Lema 2.6 que a região delimitada por Σ é isométrica à bola hiperbólica unitária. □

Proposição 4.2. *Sejam (M^3, g, K) um conjunto tridimensional de dados iniciais fechado e Σ^2 uma MOTS fechada em M^3. Suponha que $\mu - |J| \geq 3$ e o primeiro autovalor do operador de MOTS satisfaça $\lambda_1^L \geq -2$. Então*

$$|\Sigma| \leq 4\pi.$$

Se ocorre a igualdade na área, $\mathrm{Ric}_M \geq 2$ e Σ é totalmente geodésica, então M^3 é isométrica a $\mathbb{S}^3$.

Demonstração. Do Teorema 4.1, temos que

$$-2 \leq \lambda_1^L \leq -3 + \frac{2\pi(2 - 2\gamma)}{|\Sigma|}.$$

Se ocorre a igualdade, então $S_\Sigma = 2$, Σ tem gênero zero e é isométrica à $\mathbb{S}^2$. Dado que a curvatura de Ricci é estritamente positiva, podemos aplicar o Lema 2.3 e concluir que Σ divide M em duas componentes Ω_1 e Ω_2 tais que $\partial\Omega_1 = \Sigma = \partial\Omega_2$. Como Σ é totalmente geodésica, sua segunda forma fundamental em Ω_1 e Ω_2 é zero. Portanto, pelo Teorema 2.3, $\Omega_1 = \mathbb{S}^3_+$ e $\Omega_2 = \mathbb{S}^3_-$. □

Concluímos esse capítulo mencionando alguns exemplos.

Exemplo 4.1. Uma solução de vácuo da equação de campo de Einstein com constante cosmológica $\Lambda = 3$, que satisfaz o Teorema 4.2, é o produto torcido $\overline{M} = -\mathbb{R} \times_f \mathbb{R}^3$, onde $f(t) = e^{-t}$. Nesse caso, temos $M = \{0\} \times_{e^0} \mathbb{R}^3$, $K = -g$ e $\Sigma = \mathbb{S}^2$.

Exemplo 4.2. Uma solução de vácuo da equação de campo de Einstein com constante cosmológica $\Lambda = 3$, que satisfaz o Teorema 4.3, é o produto torcido $\overline{M} = -\mathbb{R} \times_f \mathbb{H}^3$, onde $f(t) = \operatorname{senh} t$. Nesse caso, temos $M = \{t_0\} \times_{\operatorname{senh} t_0} \mathbb{H}^3$, com $t_0 = \coth^{-1}\sqrt{2}$, $K = -\sqrt{2}g$ e $\Sigma = \mathbb{S}^2$.

Exemplo 4.3. Uma solução de vácuo da equação de campo de Einstein com constante cosmológica $\Lambda = 3$, que satisfaz a Proposição 4.2, é o produto torcido $\overline{M} = -\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$. Nesse caso, temos $M = \{0\} \times \mathbb{S}^3$, com $K = 0$ e $\Sigma = \mathbb{S}^2$.

5 CRITÉRIOS DE ESTABILIDADE PARA HIPERSUPERFÍCIES DO TIPO-ESPAÇO COM BORDO

Neste capítulo, calcularemos a primeira e a segunda variações da área para hipersuperfícies do tipo-espaço com bordo livre imersas em uma variedade Lorentziana. Seguindo o trabalho de Barros, Brasil e Caminha em [12], onde eles estabeleceram condições para que uma imersão do tipo-espaço com curvatura média constante no espaço generalizado de Robertson-Walker (GRW) seja maximal ou uma slice do tipo-espaço, apresentaremos um resultado análogo para hipersuperfícies do tipo-espaço com bordo livre.

5.1 Fórmulas da primeira e segunda variações

Hipersuperfícies do tipo-espaço com curvatura média constante têm despertado grande interesse tanto do ponto de vista da física quanto da matemática. Em [12], Barros, Brasil e Caminha classificaram hipersuperfícies do tipo-espaço fortemente estáveis com CMC imersas em um tipo de espaço-tempo conhecido como espaço-tempo generalizado de Robertson-Walker, denotado por $-I \times_\phi M^n$. Ao impor uma certa condição de convexidade sobre a função warped ϕ, eles mostraram que uma hipersuperfície fechada, fortemente estável, imersa com curvatura média constante deve ser maximal ou um slice $t_0 \times M^n$.

A estabilidade de hipersuperfícies CMC em espaços de forma Riemanniana começou com Barbosa e do Carmo [9], e Barbosa, do Carmo e Eschenburg [8]. No primeiro artigo, eles definiram estabilidade e demonstraram que as esferas são os únicos pontos críticos estáveis para o funcional da área ao considerar variações que preservam o volume. No contexto de hipersuperfícies fechadas em variedades Lorentzianas, Barbosa e Oliker [10] provaram que hipersuperfícies do tipo-espaço com curvatura média constante são pontos críticos para o funcional para variações que preservam volume. Além disso, eles calcularam a segunda variação do funcional área para hipersuperfícies fechadas. Ao analisar a segunda fórmula de variação, eles demonstraram estabilidade para imersões do tipo-espaço no espaço-tempo de de Sitter.

No contexto de hipersuperfícies CMC com bordo livre imersas numa variedade Riemanniana, podemos encontrar a primeira e a segunda variação do funcional área no trabalho de Ros e Vergasta [57]. Vemos que, no contexto com bordo, a estabilidade ainda desempenha um papel chave e foi possível estabelecer restrições topológicas e geométricas para as imersões. Em [3, 52], os autores introduziram problemas de primeira variação da área em e no espaço de Minkowski e em espaços de forma Lorentziana. No contexto de estabilidade para uma hipersuperfície do tipo-espaço com bordo livre, não encontramos na literatura uma fórmula para a segunda variação. Por isso, estabelecemos essa fórmula nesta seção.

Nesse capítulo, M^{n+1} denota uma variedade Lorentziana[1] orientável, munida de um campo de vetores de tipo-tempo V. Denotaremos por Σ^n uma hipersuperfície do tipo-espaço imersa em M^{n+1}, ou seja, de modo que a métrica induzida da métrica semi-Riemanniana de M^{n+1} seja Riemanniana. Além disso, por [51, p. 189], Σ^n é orientável e há um único campo unitário N normal a Σ^n, de tipo-tempo e globalmente definido em Σ^n, alinhado com a orientação de V, ou seja, $\langle V, N\rangle < 0$. Fixado este campo, nós denotamos por A a segunda forma fundamental associada a N e dada por

$$AX = -\nabla_X N, \quad \text{para todo } X \in T\Sigma,$$

onde ∇ denota a conexão de Levi-Civita de Σ. Neste capítulo, vamos considerar a curvatura média *não normalizada*, ou seja, a função dada por

$$H = -\mathrm{tr}A = -\sum_i \langle AE_i, E_i\rangle,$$

onde $\{E_1, \ldots, E_n\}$ é um referencial ortonormal de Σ em p e $\langle N, N\rangle = -1$.

A fim de calcular a primeira variação da área, precisaremos da seguinte noção. Uma variação de Σ^n é uma aplicação suave $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma^n \to M^{n+1}$ que satisfaz as seguintes condições:

i) Para qualquer $s \in (-\epsilon, \epsilon)$, a aplicação $\varphi_s : \Sigma^n \to M^{n+1}$ definida por $\varphi_s(p) := \varphi(s, p)$ é uma imersão com $\varphi_s(\mathrm{int}(\Sigma)) \subset \mathrm{int}(M)$ e $\varphi_s(\partial\Sigma) \subset \partial M$,

ii) $\varphi(0, p) = \varphi_0(p)$ para qualquer $p \in \Sigma$,

iii) Existe um conjunto compacto $C \subset \Sigma$ tal que $\varphi_s(p) = \varphi_0(p)$ para qualquer $p \in \Sigma - C$.

O vetor velocidade é o campo de vetores $X_p := (\partial\varphi/\partial s)\,(0, p)$ para qualquer $p \in \Sigma$. Note que X_p tem suporte compacto e é tangente a ∂M nos pontos de $\partial\Sigma$ pela condição (i) acima. O funcional de área $A(s) : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$ associado à variação φ é dado por

$$A(s) = \int_{\Sigma_s} da_s = \int_\Sigma |\mathrm{Jac}\varphi_s|\, da, \tag{5.1}$$

onde da é o elemento de volume de Σ e $A(0) = |\Sigma|$ é a área de Σ. Definimos o volume da região entre Σ e Σ_s pelo funcional $V : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$ dado por

$$V(s) = \int_{[0,s]\times\Sigma} \varphi^*(dv),$$

onde dv denota o elemento de volume de M.

[1] Algumas vezes ao longo deste capítulo, denotaremos apenas por M.

Proposição 5.1 (Primeira variação da área). *Sejam M^{n+1} uma variedade Lorentziana e $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma^n \to M^{n+1}$ uma variação de Σ^n, uma hipersuperfície do tipo-espaço em M^{n+1} com $int(\Sigma) \subset int(M)$ e $\partial\Sigma \subset \partial M$. Dada uma variação com vetor velocidade X, temos*

$$A'(0) = \int_\Sigma Hu\, da + \int_{\partial\Sigma} \langle X, \nu\rangle\, d\ell, \quad V'(0) = \int_\Sigma u\, da, \tag{5.2}$$

em que H é a curvatura média de Σ^n, u é a componente normal de X, isto é, $u = -\langle X, N\rangle$, e ν é o vetor conormal apontando para o exterior de $\partial\Sigma$ em Σ^n.

Demonstração. Por diferenciação sob o sinal da integral (ver, por exemplo, [45, Lema 2.1]) , temos

$$\begin{aligned} A'(0) &= \int_\Sigma \frac{d}{ds}|\mathrm{Jac}\varphi_s|\Big|_{s=0} da = \int_\Sigma \mathrm{div}_\Sigma X da \\ &= \int_\Sigma Huda + \int_{\partial\Sigma} \langle X, \nu\rangle d\ell. \end{aligned}$$

Para o volume ver [8, Lema 2.1], temos que

$$\varphi^*(dv)(s,p) = \delta_s \langle N_s(p), \frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,p)\rangle\, ds \wedge da, \tag{5.3}$$

em que N_s é o normal unitário ao longo da imersão Σ_s compatível com a orientação de Σ em M e $\delta_s = \langle N_s, N_s\rangle$. Pelo Teorema de Fubini, temos

$$V'(0) = -\int_\Sigma \langle X, N\rangle\, da = \int_\Sigma u\, da.$$

□

Nós dizemos que uma hipersuperfície do tipo-espaço Σ é fortemente estacionária[2] se Σ é ponto crítico do funcional área, isto é, $A'(0) = 0$. Diremos que Σ é estacionária se $A'(0) = 0$ para qualquer variação que preserva o volume. Uma caracterização para hipersuperfícies do tipo-espaço fortemente estacionárias ou estacionárias é dada abaixo.

Corolário 5.1. *Seja M uma variedade Lorentziana tempo-orientada suave. Então, para uma hipersuperfície do tipo-espaço Σ em M com $int(\Sigma) \subset int(M)$ e $\partial\Sigma \subset \partial M$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *Σ é estacionária (resp. fortemente estacionária).*

2. *A curvatura média de Σ é constante H_0 (resp. nula) e Σ encontra ∂M ortogonalmente nos pontos de $\partial\Sigma$.*

3. *Existe uma constante H_0 tal que $(A - H_0 V)'(0) = 0$ para qualquer variação de Σ (resp. $A'(0) = 0$ para qualquer variação de Σ).*

[2] Em alguns contextos, é chamada hipersuperfície maximal, visto que tem curvatura média nula.

Demonstração. Da Proposição 5.1, podemos ver que (2) implica (3) usando o fato de que nossas variações levam o bordo no bordo e, portanto, X é normal a Σ nos pontos de $\partial\Sigma$. Novamente, da Proposição 5.1, temos que (3) implica (1). Para (1) implicar (2), podemos tomar $u \in C_0^\infty(\Sigma)$ com $\operatorname{supp}(u) \subset \operatorname{int}(\Sigma)$ e $\int_\Sigma u\, da = 0$. Por [8, Lema 2.2], podemos encontrar uma variação de Σ que preserva volume cujo vetor velocidade satisfaz $u = -\langle X, N\rangle$ em Σ. Como Σ é estacionária, $\int_\Sigma Hu\, da = 0$ para qualquer u de média zero, então H é uma função constante.

Agora, mostraremos que ela tem bordo livre. De fato, suponha que $\langle \nu, N\rangle \neq 0$ para algum $p \in \partial\Sigma$. Então, podemos definir um campo Y diferenciável com suporte compacto em Σ tal que $\int_\Sigma \langle Y, N\rangle\, da = 0$ e $\langle Y, \nu\rangle$ é uma função de corte ao longo de $\partial\Sigma$. Usando novamente [8, Lema 2.2], podemos construir uma variação que preserva volume com vetor velocidade X tal que $\langle X, N\rangle = \langle Y, N\rangle$ no interior de Σ e $\langle X, \nu\rangle = \langle Y, \nu\rangle$ em $\partial\Sigma$. Assim, $0 = \int_{\partial\Sigma} \langle X, \nu\rangle\, d\ell \neq 0$, o que é uma contradição com a hipótese de que $\langle \nu, N\rangle \neq 0$.

$\square$

Proposição 5.2. *Sejam M^{n+1} uma variedade Lorentziana e $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma \to M$ uma variação de Σ^n, uma hipersuperfície do tipo-espaço em M^{n+1}. Seja N_s o vetor normal a Σ_s, e $\delta_s = \langle N_s, N_s\rangle$. Então,*

$$\nabla_X N_s = \nabla_{X^\top} N_s + \nabla_{\Sigma_s} u_s,$$

em que $u_s = \delta_s \langle \frac{\partial\varphi}{\partial s}, N_s\rangle$.

Demonstração. Em coordenadas locais, o gradiente de u_s em Σ_s é dado por $\nabla_{\Sigma_s} u_s = (g^{ij}\partial_j u_s)\,\partial_i$, então

$$g^{ik}\langle N_s, \nabla_{\partial_k}(u_s N_s)\rangle \partial_i = \left(g^{ik}\partial_k u_s\right)\partial_i = \epsilon \nabla_{\Sigma_s} u_s. \tag{5.4}$$

Portanto,

$$\nabla_X N_s = -g^{ik}\left\langle N_s, \nabla_{\partial_k}\left(X^\top + u_s N_s\right)\right\rangle \partial_i = \nabla_{X^\top} N_s - \epsilon \nabla^{\Sigma_s} u_s. \tag{5.5}$$

$\square$

Vimos que uma hipersuperfície do tipo-espaço com curvatura média constante H e bordo livre é um ponto crítico do funcional $A - HV$. A pergunta mais natural a se fazer é se tal imersão maximiza o funcional. Para responder a essa pergunta, precisaremos calcular a segunda variação desse funcional.

Teorema 5.1 (Segunda variação da área)**.** *Sejam M^{n+1} uma variedade Lorentziana e $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma \to M$ uma variação de uma hipersuperfície do tipo-espaço Σ^n em M^{n+1}, onde int$(\Sigma) \subset$ int(M) e $\partial\Sigma \subset \partial M$. Se Σ^n é estacionária com curvatura média constante H, então*

$$(A - HV)''(0) = \mathcal{I}(u, u),$$

onde $u = \langle X, N\rangle$ *é a componente normal do vetor velocidade e* $\mathcal{I}$ *é a forma bilinear em* $C^\infty(\Sigma)$ *definida por*

$$\mathcal{I}(v,w) := -\int_\Sigma \left\{\langle \nabla_\Sigma v, \nabla_\Sigma w\rangle + \left(\mathrm{Ric}_M(N,N) + |A|^2\right) vw\right\} da - \int_{\partial\Sigma} II^{\partial M}(N,N)vwd\ell.$$

Aqui, Ric_M *é o tensor de Ricci de* M^{n+1} *e* $II^{\partial M}$ *é a segunda forma fundamental de* ∂M *em* M^{n+1}.

Demonstração. Começamos derivando a expressão para a primeira variação da área

$$(A - HV)'(s) = \int_{\Sigma_s} H_s u_s \, da_s - H\int_{\Sigma_s} u_s \, da_s + \int_{\partial\Sigma_s} \langle X_s, \nu_s\rangle \, d\ell_s,$$

onde H_s é a curvatura média de Σ_s, $(X_s)_p := (\partial\varphi/\partial s)(s,p)$; $u_s := \langle X_s, N_s\rangle$ e ν_s é o vetor conormal a $\partial\Sigma_s$. Derivando a equação anterior e usando que Σ tem bordo livre temos

$$(A - HV)''(0) = \int_\Sigma H'(0)\, u \, da + \int_{\partial\Sigma} \langle X_s, \nu_s\rangle' \, d\ell.$$

Pela Proposição 5.2 e notando que

$$\langle N_s, \nu_s\rangle = 0 \Rightarrow \langle \nabla_{X_0} N_s, \nu_s\rangle = -\langle \nabla_{X_0}\nu_s, N_s\rangle$$

temos

$$\begin{aligned}\langle X_s, \nu_s\rangle'(0) &= \langle \nabla_X X_s, \nu_s\rangle|_{s=0} + \langle u_s N_s, \nabla_X \nu_s\rangle|_{s=0} = u_0\langle \nabla_X N_0, \nu_0\rangle - \langle \nabla_X u_s N_s, \nu_0\rangle \\ &= u_0\langle \nabla_X N_0 - \nabla_{X^\top} N_s - \nabla_{\Sigma_0} u_0, \nu_0\rangle = -u_0\left\{\frac{\partial u_0}{\partial \nu_0} + II^{\partial M}(N,N)u_0\right\}.\end{aligned}$$

Por outro lado, a derivada $H'(0)$ foi calculada em [12, Prop. 2.2]

$$H'(0) = J(u) := \Delta_\Sigma u - \left(\mathrm{Ric}_M(N,N) + |A|^2\right) u,$$

onde J é o operador de Jacobi para uma hipersuperfície tipo-espaço e Δ_Σ é o Laplaciano de Σ. Portanto,

$$(A - HV)''(0) = \mathcal{Q}(u,u)$$

onde definimos

$$\mathcal{Q}(v,w) := \int_\Sigma vJ(w)da - \int_{\partial\Sigma} v\left\{\frac{\partial w}{\partial\nu} + II^{\partial M}(N,N)w\right\} d\ell,$$

para quaisquer $u, v \in C_0^\infty(\Sigma)$. Finalmente, integrando por partes, temos $\mathcal{Q}(u,u) = \mathcal{I}(u,u)$.

□

5.2 Estabilidade de hipersuperfícies com bordo livre em variedades Lorenztianas

Usando a notação da seção anterior, dizemos que uma hipersuperfície do tipo-espaço Σ^n é fortemente estável se $(A - HV)''(0) \leq 0$ para qualquer variação de Σ^n. De maneira análoga, dizemos que Σ^n é estável se $A''(0) \leq 0$ para qualquer variação que preserve o volume. Procedendo de maneira análoga à demonstração do Corolário 5.1, podemos provar a seguinte proposição.

Proposição 5.3. *Sejam M^{n+1} uma variedade Lorentziana e Σ^n uma hipersuperfície do tipo-espaço estacionária imersa em M^{n+1} com int$(\Sigma) \subset$ int(M) e int$(\partial\Sigma) \subset$ int(∂M). Seja $\mathcal{I}$ a forma do índice, então:*

i) Σ^n *é fortemente estável se e somente se* $\mathcal{I}(u,u) \leq 0$ *para qualquer* $u \in C^\infty(\Sigma)$.

ii) Σ^n *é estável se e somente se* $\mathcal{I}(u,u) \leq 0$ *para qualquer* $u \in C^\infty(\Sigma)$ *com* $\int_\Sigma u\, da = 0$.

Demonstração. O item (i) segue diretamente do Teorema 5.1. Para o item (ii), se Σ é estável e $u \in C^\infty(\Sigma)$ é tal que $\int_\Sigma u\, da = 0$, então, por [8, Lema 2.2], existe uma variação que preserva o volume tal que a componente normal do vetor velocidade é u. Isso implica que $\mathcal{I}(u,u) = A''(0) \leq 0$. Reciprocamente, se temos uma variação que preserva o volume, definimos $u = -\langle X, N\rangle$. Assim, $u \in C^\infty(\Sigma)$ e, por [8, Lema 2.2], $\int_\Sigma u\, da = 0$. Portanto, $A''(0) = \mathcal{I}(u,u) \leq 0$. $\square$

Analogamente ao caso Riemanniano, dizemos que $\rho \in C^\infty(\Sigma)$ é uma autofunção do operador de Jacobi de Σ associada ao autovalor Λ^J, se ρ não é identicamente nula e é solução do problema de fronteira do tipo Robin dado por

$$\begin{cases} J_f\rho - \Lambda^J\rho = 0, & \text{em } \Sigma, \\ \frac{\partial\rho}{\partial\nu} = -II^{\partial M}(N,N)\rho, & \text{sobre } \partial\Sigma. \end{cases} \tag{5.6}$$

Isso equivale a $\mathcal{I}(\rho,\phi) = \Lambda^J\langle\rho,\phi\rangle_{L^2(\Sigma)}$ para todo $\phi \in C^\infty(\Sigma)$. Pela teoria elíptica clássica, sabemos que os autovalores do problema (5.6) formam uma sequência decrescente que tende a menos infinito, ou seja,

$$\Lambda_1^J \geq \Lambda_2^J \geq \Lambda_3^J \geq \ldots \searrow -\infty.$$

A estabilidade pode ser detectada analisando o sinal do primeiro autovalor. Para uma caracterização variacional mais próxima a que se encontra na literatura [22], convencionamos $\lambda_1^J = -\Lambda_1^J$ e segue que

$$\lambda_1^J = \inf_{\phi \in C^\infty(\Sigma)\setminus\{0\}} \frac{-\mathcal{I}(\phi,\phi)}{\int_\Sigma \phi^2\, da}.$$

Nós vemos que Σ^n é fortemente estável se e somente se $\lambda_1^J \geq 0$.

Proposição 5.4. *Seja M^{n+1} um espaço-tempo tal que $\mathrm{Ric}_M(Z,Z) \geq 0$ para todo vetor $Z \in TM$ do tipo-tempo e a segunda forma do bordo $II^{\partial M}(W,W) \geq 0$ para todo vetor $W \in T\partial M$ do tipo-tempo. Se Σ^n é estacionária, então é fortemente estável.*

Demonstração. Como N, que é o vetor normal a Σ, é do tipo-tempo, temos

$$\int_M |\nabla\phi|^2 + \left(\mathrm{Ric}_M(N,N) + |A|^2\right)\phi^2\, da + \int_{\partial M} II^{\partial M}(N,N)\phi^2\, d\ell \geq 0, \tag{5.7}$$

para toda $\phi \in C_0^\infty(\Sigma)$. Portanto, Σ é fortemente estável, visto que $\mathcal{I}(\phi,\phi) \leq 0$. □

A seguir damos uma caracterização de estabilidade forte para hipersuperfícies do tipo-espaço.

Proposição 5.5. *Sejam M^{n+1} uma variedade Lorentziana e Σ^n uma hipersuperfície estacionária tipo-espaço. Se existe uma função positiva $u \in C^\infty(\Sigma)$ tal que $Ju \leq 0$ e $Bu := \frac{\partial u}{\partial \nu} + II^{\partial M}(N,N)u \geq 0$, então Σ^n é fortemente estável.*

Demonstração. Queremos mostrar que $\mathcal{I}(\varphi,\varphi) \geq 0$ para toda função $\varphi \in C_0^\infty(\Sigma)$. Então, assumindo que existe u satisfazendo a Proposição, podemos escolher $\eta \in C_0^\infty(\Sigma)$ tal que $\varphi = \eta u$. Assim temos que

$$\mathcal{I}(\varphi,\varphi) = \int_\Sigma \varphi J\varphi da - \int_{\partial\Sigma} \varphi B\varphi d\ell.$$

Primeiro vamos analisar a integral no interior de Σ^n, com efeito

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma \varphi J\varphi da &= \int_\Sigma \eta u J(\eta u) da \\
&= \int_\Sigma \left[\eta^2 uJu + \eta u^2\Delta\eta + 2\eta u\langle\nabla u, \nabla\eta\rangle\right] da \\
&\leq \int_\Sigma \left[\eta u^2\Delta\eta + 2\eta u\langle\nabla u, \nabla\eta\rangle\right] da \\
&= \int_\Sigma \left[\eta u^2\Delta\eta + \frac{1}{2}\langle\nabla u^2, \nabla\eta^2\rangle\right] da.
\end{aligned}$$

Em que a desigualdade vem da hipótese que $Ju \leq 0$. Por outro lado, usando as propriedades da divergência de um campo, podemos verificar que

$$\mathrm{div}_\Sigma\left(u^2\nabla\eta^2\right) = \langle\nabla u^2, \nabla\eta^2\rangle + u^2\Delta\eta^2 = \langle\nabla u^2, \nabla\eta^2\rangle + 2\eta u^2\Delta\eta + 2u^2|\nabla\eta|^2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma \varphi J\varphi da &\leq \int_\Sigma \left[\frac{1}{2}\,\mathrm{div}\left(u^2\nabla\eta\right)^2 - u^2|\nabla\eta|^2\right] da \\
&= \int_\Sigma \left[\frac{1}{2}\,\mathrm{div}\left(u^2\nabla\eta^2\right) - u^2|\nabla\eta|^2\right] da \\
&= \int_\Sigma u^2|\nabla\eta|^2 da - \int_{\partial\Sigma} u^2\eta\frac{\partial\eta}{\partial\nu}d\ell \\
&\leq \int_{\partial\Sigma} u^2\eta\frac{\partial\eta}{\partial\nu}d\ell.
\end{aligned}$$

Segue que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}(\varphi,\varphi) &\leq \int_{\partial\Sigma} u^2\eta\frac{\partial\eta}{\partial\nu}d\ell - \int_{\partial\Sigma}\varphi B\varphi d\ell \\
&= \int_{\partial\Sigma} u^2\eta\frac{\partial\eta}{\partial\nu}d\ell - \int_{\partial\Sigma}u\eta\left\{\frac{\partial u\eta}{\partial v} + II^{\partial M}(N,N)\eta u\right\}d\ell \\
&= -\int_{\partial\Sigma}\eta^2 uBud\ell \leq 0.
\end{aligned}
$$

□

5.2.1 Produtos Torcidos

Uma classe particular de variedades Lorentzianas[3] com bordo são os produtos torcidos dados por $\mathcal{N}^{n+1} = -I\times_\phi M^n$, em que $-I$ denota um intervalo de $\mathbb{R}$ com métrica $-dt^2$, M^n é uma variedade Riemanniana com bordo, e $\phi : I \to \mathbb{R}$ é uma função positiva diferenciável. A métrica Lorentziana em $\mathcal{N}^{n+1}$ é dada por

$$\langle,\rangle_{\mathcal{N}} = -dt^2 + \phi^2\langle,\rangle_M.$$

Note que ∂_t é um campo do tipo-tempo globalmente definido. Então, se Σ^n é uma hipersuperfície tipo-espaço, existe um único campo N unitário e normal a Σ^n globalmente definido, tal que $\Theta = \langle N,\partial_t\rangle \leq -1$.

O próximo teorema é uma extensão do trabalho de [12] para o caso de hipersuperfícies com bordo livre.

Teorema 5.2. *Seja Σ^n uma hipersuperfície tipo-espaço estacionária com bordo livre imersa em $\mathcal{N}^{n+1} = -I\times_\phi M^n$, de modo que nos pontos do bordo de Σ^n o vetor normal N coincida com ∂_t. Então*

(a) Se $H\phi' + n\phi''\Theta \geq 0$, então Σ é fortemente estável.

(b) Se Σ é compacta e $H\phi' + n\phi''\Theta \leq 0$, então Σ é fortemente estável se, e somente se, $H\phi' + n\phi''\Theta = 0$.

(c) Se Σ é compacta e $H\phi' + n\phi''\Theta < 0$, então Σ não pode ser fortemente estável.

Demonstração. Considere a função positiva $g = -\langle\phi\partial_t, N\rangle$. Segue de [12, Corolário 4.1] que

$$\Delta g = \left(\mathrm{Ric}_{\mathcal{N}}(N,N) + |A|^2\right)g - (H\phi' + n\phi''\Theta).$$

E concluímos que o operador de Jacobi aplicado em g é expresso por

$$Jg = -H\phi' - n\phi''\Theta. \tag{5.8}$$

[3] O caso sem bordo é conhecido como uma generalização do espaço-tempo de Robertson-Walker.

Note que, para ν conormal ao bordo, temos

$$\nu(g) = -\langle \nabla_\nu N, \phi\partial_t \rangle, \tag{5.9}$$

onde, usando [51, Proposição 7.35], isto é, $\nabla_\nu \phi\partial_t = \phi'\nu$, mas notando que $N = \partial_t$ nos pontos de $\partial\Sigma$, temos que $\langle \nabla_\nu N, \partial_t \rangle = 0$ e, por conseguinte, $\nu(g) = 0$. Além disso, pela fórmula de Koszul, temos

$$\langle \nabla_N \nu, N \rangle = \langle [N, \nu], N \rangle.$$

Escreveremos o colchete de Lie em um sistema de coordenadas. Considere $\mathbf{y} : U \to M^n$ uma parametrização de uma vizinhança do bordo de M^n e defina uma parametrização $\mathbf{x} : I \times U \to \mathcal{N}^{n+1}$ tal que $\mathbf{x} = (t, \mathbf{y})$. Segue que $N = \sum_{i=1}^n a_i\partial_i - \Theta\partial_t$, $\nu = \sum_{j=1}^n b_j\partial_j$, e

$$[N, \nu] = \sum_{i,j}^n a_i\partial_i(b_j)\partial_j - \sum_{j=1}^n \Theta\partial_t(b_j)\partial_j - \sum_{i=1}^n \nu(a_i)\partial_i + \nu(\Theta)\partial_t,$$

onde a_i, b_j, e Θ são funções que dependem das coordenadas, ∂_i e ∂_t são os campos coordenados da parametrização $\mathbf{x}$ nas direções tangentes a M e a I, respectivamente.

Portanto, como $N = \partial t$ sobre o bordo

$$II^{\partial\mathcal{N}}(N, N) = \langle [N, \nu], \partial_t \rangle = \langle \nu(\Theta)\partial_t, \partial_t \rangle = 0.$$

Na última igualdade, usamos que $\nabla_\nu \partial_t = \frac{\phi'}{\phi}\nu$ e que $N = \partial_t$ nos pontos de $\partial\Sigma$ para concluir que $\nu(\Theta) = 0$. Portanto, tomando $B := \partial/\partial\nu + II^{\partial\mathcal{N}} N, N)$, segue que

$$Bg = -\langle \nabla_\nu N, \phi\partial_t \rangle + \langle \nabla_N \nu, N \rangle g = 0, \tag{5.10}$$

em que usamos que $g = \phi$ nos pontos de $\partial\Sigma$. Então, sob as hipóteses do item (a), temos que $Jg \leq 0$, $Bg \geq 0$, e pela Proposição 5.5, segue que Σ é fortemente estável.

Agora vamos ao item (b). Neste caso, se $H\phi' + n\phi''\Theta \leq 0$ e Σ^n é fortemente estável, então tomando a função $g = -\langle \phi\partial_t, N \rangle$ como teste, temos

$$0 \geq \int_\Sigma gJg\, da - \int_{\partial\Sigma} gBg\, d\ell = \int_\Sigma \phi\langle N, \partial_t \rangle \left(H\phi' + n\phi''\Theta\right)\, da \geq 0,$$

concluímos que $H\phi' + n\phi''\Theta = 0$. A recíproca segue do item (a).

Finalmente, para o item (c), segue que

$$\int_\Sigma \phi\langle N, \partial_t \rangle \left(H\phi' + n\phi''\Theta\right)\, da > 0. \tag{5.11}$$

Portanto, Σ^n não pode ser fortemente estável. $\square$

Corolário 5.2. *Seja $\mathcal{N}^{n+1} = -I \times_\phi M^n$ um espaço-tempo cuja os slices são compactos. Seja Σ^n é uma hipersuperfície do tipo-espaço compacta e fortemente estável de modo que nos pontos do bordo o vetor normal coincida com ∂_t. Se a função ϕ satisfaz $\phi'' \geq \max\{H\phi', 0\}$ e o conjunto em que $\phi' = 0$ tem interior vazio em Σ^n então Σ^n é maximal ou um slice $\{t_0\} \times M$*

Demonstração. Da demonstração do Teorema 5.2 temos

$$0 \geq \int_\Sigma \phi\langle N, \partial_t\rangle \left(H\phi' + n\phi''\Theta\right) da.$$

Notando que, por hipótese, $H\phi' + n\phi''\Theta \leq \phi'' + \phi''\Theta$, temos

$$\phi\Theta(H\phi' + n\phi''\Theta) \geq \phi\phi''\Theta(1+\Theta).$$

Portanto,

$$0 \geq \int_\Sigma \phi\Theta(H\phi' + n\phi''\Theta)da \geq \int_\Sigma \phi\phi''\Theta(\Theta+1)da \geq 0.$$

Então, as desigualdades acima são igualdades e

$$\phi'' = H\phi' \text{ e } \phi''(\Theta+1) = 0.$$

Como H é constante, temos que Σ^n é maximal ou $H \neq 0$. Se o último caso acontecer, temos que $\Theta = -1$ em um conjunto denso, visto que o conjunto em que $\phi' = 0$ tem interior vazio. Mas, como Θ é contínua, temos que $\Theta = -1$ e, portanto, $N = \partial_t$ e Σ^n é um slice. □

Corolário 5.3. *Seja $\mathcal{N}^{n+1} = -\mathbb{R} \times_{\cosh t} \mathbb{S}^n_+$ uma variedade Lorentziana*[4] *e Σ^n uma hipersuperfície do tipo-espaço compacta e fortemente estável, de modo que, nos pontos do bordo, o vetor slice $\{0\} \times_{\cosh 0} \mathbb{S}^n_+$ tenham interior vazio. Então, se $|H| \leq 1$, Σ é maximal ou um slice umbílico.*

[4] $\mathcal{N}$ é conhecido como o espaço de De Sitter.

6 A MASSA DE HAWKING PARA SUPERFÍCIES ESTÁVEIS

Neste capítulo, apresentamos dois resultados de rigidez para superfícies estáveis de curvatura média constante imersas em 3-variedades com curvatura escalar positiva, assumindo que a massa de Hawking é zero. No primeiro resultado, assumimos que a superfície é aproximadamente redonda, enquanto no segundo resultado, consideramos as superfícies invariantes sob uma simetria par.

6.1 Introdução

No contexto da relatividade geral, o conceito de massa surge da necessidade de estabelecer uma conexão entre a relatividade geral e a gravidade clássica de Newton. Uma das primeiras tentativas nesse sentido é a massa ADM (Arnowitt et al., 1960), para variedades assintoticamente planas. No caso de simetria temporal, ela relaciona a densidade local de matéria (equivalente à energia) em uma variedade Riemanniana (M, g) à curvatura escalar, denotada por S_g. Uma das aplicações mais significativas da massa ADM é o Teorema da Massa Positiva (TMP), provado por Schoen e Yau [59] e Witten [67]. Este teorema afirma que a massa ADM de uma variedade tridimensional completa assintoticamente plana com curvatura escalar não negativa é sempre não negativa e é igual a zero apenas se M for isométrica ao espaço Euclidiano plano.

Outro resultado importante no contexto da relatividade geral é a desigualdade de Penrose, que afirma que se (M, g) é uma variedade tridimensional completa assintoticamente plana com curvatura escalar não negativa e fronteira $\Sigma = \partial M \neq 0$, então a massa ADM M é maior ou igual à massa de Hawking de Σ, ou seja, $\sqrt{|\Sigma|/16\pi}$, onde Σ é uma superfície mínima externa, com igualdade se, e somente se, M for isométrica à metade da métrica de Schwarzschild $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

É natural considerar $\sqrt{|\Sigma|/16\pi}$ como a massa quasi-local de um buraco negro (superfície mínima) Σ. Em um sentido mais geral, em correspondência com a gravidade Newtoniana, espera-se que qualquer região limitada (Ω, g) possua uma massa quasi-local que leve em conta tanto a densidade de matéria (medida neste caso pela curvatura escalar $S_g \geq 0$) quanto alguma influência do campo gravitacional. A positividade da massa total estabelecida pelo TMP motiva certas propriedades que seriam esperadas de uma definição de massa. Entre os candidatos propostos para massas quasi-locais, um dos mais significativos é a massa de Hawking [37].

Em [13], Bartnik propôs o problema de investigar a rigidez da massa de Hawking. Ou seja, o que pode ser inferido sobre a variedade ambiente quando a massa de Hawking se anula para uma certa superfície e qual é o papel das 2-esferas (buracos negros) neste contexto? Em geral, a massa de Hawking de uma superfície imersa $\Sigma \subset M^3$ é definida como

$$m_{\mathrm{H}}(\Sigma) = \left(\frac{|\Sigma|}{16\pi}\right)^{1/2}\left(1 - \frac{1}{16\pi}\int_\Sigma \mathrm{H}^2 da - \frac{\gamma}{24\pi}|\Sigma|\right), \tag{6.1}$$

onde $\gamma = \inf_M S_g$, $|\Sigma|$ denota a área de Σ, e H denota a função da curvatura média de Σ (veja [46]). Em particular, assumindo $\inf_M S_g = 6$, obtemos

$$m_{\mathrm{H}}(\Sigma) = \frac{|\Sigma|^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}}\left(16\pi - \int_\Sigma (\mathrm{H}^2 + 4) da\right). \tag{6.2}$$

Em [65], Sun resolveu o problema de rigidez para superfícies quase redondas. Ao estudar os autovalores do operador de Jacobi para superfícies estáveis CMC com massa de Hawking zero, ele transferiu o problema de rigidez para uma solução trivial da equação do campo médio. De fato, Sun provou que se a solução estiver suficientemente próxima da solução trivial, que é zero, então essa solução é única, e a superfície deve ser isométrica a $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Ele foi capaz de invocar alguns teoremas de rigidez geométrica para concluir que essas regiões são bolas em $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{H}^3$, sob suposições de curvatura $S_g \geq 0$ e $S_g \geq -6$. Isso levanta a questão de se para $S_g \geq 6$, teríamos um resultado semelhante para $\mathbb{S}^3$.

Posteriormente, em [63], Shi et al. estudaram as soluções da equação do campo médio e estabeleceram um novo resultado de rigidez para esferas CMC estáveis com simetria par, ainda assumindo $S_g \geq 0$ ou $S_g \geq -6$.

Neste capítulo, abordamos o problema de rigidez relativo a esferas estáveis de curvatura média constante (CMC) dentro do contexto de curvatura positiva. Para estabelecer a rigidez da variedade ambiente, é necessário assumir curvatura de Ricci positiva, permitindo-nos aplicar o teorema de Hang-Wang, conforme delineado em [36]. Lembramos que uma superfície Riemanniana Σ é *aproximadamente uma esfera redonda* se a curvatura Gaussiana K_Σ estiver em C^0 e

$$\left|\frac{|\Sigma|}{4\pi}K_\Sigma - 1\right|_{C^0} < \epsilon_0$$

para alguma constante universal $\epsilon_0 \ll 1$, onde $|\Sigma|$ denota a área de Σ.

Usando essa notação, e denotando por $\mathbb{S}^2(r)$ a esfera redonda de raio r em $\mathbb{R}^3$, temos a seguinte extensão do teorema de Sun

Teorema 6.1. *Seja (M^3, g) uma variedade Riemanniana completa com $S_g \geq 6$ e Σ uma esfera com curvatura média constante estável em M^3. Se $m_{\mathrm{H}}(\Sigma) = 0$ e Σ for aproximadamente uma esfera redonda, então Σ é isométrica a $\mathbb{S}^2(\sqrt{|\Sigma|/4\pi})$. Além disso, se assumirmos $\mathrm{Ric}_M \geq 2$, então a região convexa em média $\Omega \subset M$ cuja fronteira é Σ é isométrica a uma bola geodésica em $\mathbb{S}^3_+$ cuja fronteira é $\mathbb{S}^2(\sqrt{|\Sigma|/4\pi})$.*

Pelo contraexemplo da conjectura de Min-Oo devido a Brendle, Marques e Neves [15], não há resultado de rigidez se apenas se assumir $S_g \geq 6$. Em nosso próximo resultado, estendemos as ideias apresentadas em [63, Teorema 2] para o caso de curvatura positiva. Lembramos que Σ tem simetria par se existe uma isometria $\rho : \Sigma \to \Sigma$ satisfazendo as condições $\rho^2 = \mathrm{id}$ e $\rho(x) \neq x$ para $x \in \Sigma$.

Teorema 6.2. *Sejam (M^3, g) uma variedade Riemanniana completa com $S_g \geq 6$, e Σ seja uma esfera estável com curvatura média constante em M^3. Se $m_{\mathrm{H}}(\Sigma) = 0$ e Σ tem simetria par, então Σ é isométrica a $\mathbb{S}^2(\sqrt{|\Sigma|/4\pi})$. Além disso, se assumirmos $\mathrm{Ric}_M \geq 2$, então a região convexa em média $\Omega \subset M$ cuja fronteira é Σ é isométrica a uma bola geodésica em $\mathbb{S}^3_+$ cuja fronteira é $\mathbb{S}^2(\sqrt{|\Sigma|/4\pi})$.*

No caso em que M é compacto e Σ é minima, resultados de rigidez mais fortes são obtidos.

Corolário 6.1. *Seja (M^3, g) uma variedade Riemanniana compacta com $S_g \geq 6$ e Σ uma esfera mínima estável em M^3 para variações que preservam o volume, tal que $m_{\mathrm{H}}(\Sigma) = 0$. Se Σ for aproximadamente uma esfera redonda ou se Σ tiver simetria par, então Σ é isométrica a $\mathbb{S}^2$. Além disso, se assumirmos $\mathrm{Ric}_M \geq 2$, então M^3 é isométrica a $\mathbb{S}^3$.*

Na verdade, nesse cenário, $M \setminus \Sigma$ possui exatamente duas componentes conexas de M (veja [40]), e podemos concluir de Hang-Wang [36] que cada componente é isométrica a um hemisfério.

6.2 Resultados Preliminares

Lembre-se de que uma superfície CMC é estável se a segunda variação do funcional de área for não negativa para variações que preservam o volume. Como mencionado na seção 2.1, a segunda variação da funcional de área é dada por uma forma quadrática associada ao operador de Jacobi $J = \Delta_\Sigma + |A|^2 + \mathrm{Ric}(N, N)$, mas agora agindo em funções de média zero.

Lembramos que o índice de Σ é o número de autovalores negativos de J, contados com multiplicidade, e indica o número de variações linearmente independentes que preservam o volume e diminuem a área. Como é usual, nós dizemos que Σ é estável quando o índice é zero. Ou seja, quando o primeiro autovalor de J para funções de média zero é não negativo:

$$\Lambda_1(J) = \inf_{f \in C^\infty(\Sigma)\setminus\{0\}} \left\{ -\int_\Sigma f J(f) da : \int_\Sigma f da = 0, \int_\Sigma f^2 da = 1 \right\} \geq 0.$$

Esta definição difere da usual usando o princípio do min-max:

$$\lambda_1(J) = \inf_{f \in C^\infty(\Sigma)\setminus\{0\}} \left\{ -\int_\Sigma f J(f) da : \int_\Sigma f u_0 da = 0, \int_\Sigma f^2 da = 1 \right\},$$

onde u_0 é a zeroésima autofunção de J. No entanto, (veja [11]) temos:

Lema 6.1.

$$\Lambda_1(J) \leq \lambda_1(J).$$

Demonstração. Se u_0 é constante, não há nada para provar. No caso geral, sejam u_0 e $u_1 \in C^\infty(\Sigma)$ autofunções tais que $Ju_0 = -\lambda_0 u_0$, $Ju_1 = -\lambda_1 u_1$, $\int_\Sigma u_1 u_0 = 0$, $\int_\Sigma u_1^2 = \int_\Sigma u_0^2 = 1$. Note que $\lambda_0 \leq \lambda_1$. Seja $\phi \in \mathbb{R}$ tal que $\tan\phi = \frac{-\int_\Sigma u_1}{\int_\Sigma u_0}$ e defina

$$g = au_0 + bu_1,$$

onde $a = \operatorname{sen}\phi$ e $b = \cos\phi$. Então, temos $\int_\Sigma g = 0$ e $\int_\Sigma g^2 = 1$. Assim,

$$\Lambda_1(J) \leq -\int_\Sigma gJ(g) = a^2\lambda_0 + b^2\lambda_1 \leq \lambda_1(J).$$

□

Observe então que se Σ é CMC estável então $\lambda_1(J) \geq 0$. Christodoulou e Yau [21] mostraram que a massa de Hawking (1.1) para $\gamma = 0$ é não negativa para esferas estáveis em variedades Riemannianas com curvatura escalar $S_g \geq 0$. Um resultado similar para variedades com curvatura escalar $S_g \geq -6$ foi provado por Chodosh [20]. Similar aos resultados em [21, 20], usamos um truque do tipo Hersch para provar a não negatividade da massa de Hawking (6.2) quando $\gamma = 6$.

Lema 6.2. *Seja (M^3, g) uma variedade Riemanniana completa com curvatura escalar $S_g \geq 6$. Se Σ é uma esfera CMC estável, então $m_{\mathrm{H}}(\Sigma) \geq 0$.*

Demonstração. Como Σ é estável, temos

$$\int_M (|\nabla f|^2 - \left(|A|^2 + \mathrm{Ric}_M(N,N)\right) f^2) da \geq 0, \tag{6.3}$$

para todo $f \in C^\infty(\Sigma)$ com $\int_\Sigma f\, da = 0$. Por [18, Lemma 5.1], existe um mapeamento conforme $\varphi : \Sigma \to \mathbb{S}^2$ tal que $\deg(\varphi) \leq [\frac{g+3}{2}]$ e $\int_\Sigma \varphi_i da = 0$, onde $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ ao considerar a inclusão canônica $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Usando φ_i como funções de teste em (6.3), temos

$$\int_\Sigma |\nabla\varphi_i|^2 da \geq \int_\Sigma (|A|^2 + \mathrm{Ric}_M(N,N))\varphi_i^2 da.$$

Usando o fato de que φ é conformal e Σ tem gênero zero, temos

$$\sum_i \int_\Sigma |\nabla\varphi_i|^2 da = \int_\Sigma |\nabla\varphi|^2 da = 2|\mathbb{S}^2|\deg(\varphi) \leq 8\pi\left[\frac{g+3}{2}\right] = 8\pi,$$

e usando que $|\varphi|^2 = \sum \varphi_i^2 = 1$, obtemos

$$\int_\Sigma (|A|^2 + \mathrm{Ric}_M(N,N)) da \leq 8\pi.$$

Pela equação de Gauss

$$\begin{aligned} |A|^2 + \mathrm{Ric}_M(N,N) &= \frac{1}{2}S_g - K_\Sigma + \frac{1}{2}(\mathrm{H}^2 + |A|^2) \\ &= \frac{1}{2}(S_g + |\mathring{A}|^2) + \frac{3}{4}\mathrm{H}^2 - K_\Sigma, \end{aligned}$$

onde $|A|^2 = |\mathring{A}|^2 + \frac{1}{2}\mathrm{H}^2$, Assim obtemos

$$\frac{1}{2}\int_\Sigma (S_g + |\mathring{A}|^2)da + \frac{3}{4}\int_\Sigma \mathrm{H}^2 da - \int_\Sigma K_\Sigma da \leq 8\pi.$$

Usando nossa suposição sobre a curvatura escalar, temos

$$16\pi - \int_\Sigma (\mathrm{H}^2 + 4)da \geq \frac{2}{3}\int_\Sigma |\mathring{A}|^2 da \geq 0,$$

o que implica $m_{\mathrm{H}}(\Sigma) \geq 0$, como queríamos. □

Agora precisamos do seguinte lema devido a El Soufi e Ilias [26], que fornece uma estimativa ótima do segundo autovalor do operador de Schrödinger. O lema também estabelece a rigidez para o segundo autovalor, que pode então ser aplicado ao operador de Jacobi das esferas CMC.

Lema 6.3. *[26] Para qualquer função contínua q em uma superfície Σ, temos*

$$\lambda_1(\Delta_\Sigma - q)|\Sigma| \leq 2A_c(\Sigma) + \int_\Sigma q da.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, Σ admite um aplicação conforme para $\mathbb{S}^2$ cujas componentes são as primeiras autofunções. Se Σ tem gênero zero, a igualdade implica que Σ é conforme a $\mathbb{S}^2$ em $\mathbb{R}^3$ e q é dado pela densidade de energia da transformação de Möbius. Aqui, λ_1 é o primeiro autovalor de $\Delta_\Sigma - q$ e $A_c(\Sigma)$ é o volume conforme, que é 4π para uma esfera.

Usando o lema acima, obtemos uma caracterização para esferas CMC estáveis com massa de Hawking zero, generalizando [65].

Proposição 6.1. *Seja (M^3, g) uma variedade riemanniana completa com curvatura escalar $S_g \geq 6$. Se Σ é uma esfera CMC estável com $m_{\mathrm{H}}(\Sigma) = 0$, então o primeiro autovalor $\lambda_1(J) = 0$ tem pelo menos três autofunções $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, onde $\int_\Sigma \varphi_i, da = 0$ e $\sum \varphi_i^2 = 1$. Em particular, Σ é totalmente umbílica, conforme a $\mathbb{S}^2$ em $\mathbb{R}^3$ e $\sum |\nabla\varphi_i|^2 = \frac{12\pi}{|\Sigma|} - K_\Sigma$, que é independente das autofunções.*

Demonstração. Se $m_{\mathrm{H}}(\Sigma) = 0$, então todas as desigualdades no Lema 6.2 se tornam igualdades. Especificamente, φ_i representa as eigenfunções associadas ao autovalor zero, e temos $\int_\Sigma(\mathrm{H}^2 + 4)da = 16\pi$, $S_g|_\Sigma = 6$, e $|\mathring{A}|^2 = 0$ em Σ. Consequentemente, $\mathrm{H}^2 = \frac{16\pi}{|\Sigma|} - 4$, e o operador de Jacobi toma a forma

$$J = \Delta_\Sigma + 3 + \frac{3}{4}\left(\frac{16\pi}{|\Sigma|} - 4\right) - K_\Sigma = \Delta_\Sigma - K_\Sigma + \frac{12\pi}{|\Sigma|}. \tag{6.4}$$

Usando o Lema 6.3, temos

$$0 \leq \Lambda_1(J)|\Sigma| \leq \lambda_1(J)|\Sigma| \leq 8\pi + \int_\Sigma \left(K_\Sigma - \frac{12\pi}{|\Sigma|}\right) = 0,$$

portanto, todas as desigualdades são iguais, e em particular temos

$$\lambda_1(\Delta_\Sigma - K_\Sigma) = \frac{12\pi}{|\Sigma|},$$

com três autofunções $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ satisfazendo $\int_\Sigma \varphi_i da = 0$ e $\sum \varphi_i^2 = 1$.

Portanto, como φ_i são autofunções do operador de Jacobi associadas ao autovalor zero, segue da equação (6.4) que

$$\Delta_\Sigma \varphi - K_\Sigma \varphi + \frac{12\pi}{|\Sigma|}\varphi = 0, \tag{6.5}$$

onde $\Delta_\Sigma \varphi = (\Delta_\Sigma \varphi_1, \Delta_\Sigma \varphi_2, \Delta_\Sigma \varphi_3)$. De $|\varphi|^2 = \sum {\varphi_i}^2 = 1$, temos

$$0 = \Delta_\Sigma |\varphi|^2 = 2\sum \varphi_i \Delta_\Sigma \varphi_i + 2\sum |\nabla \varphi_i|^2.$$

Usando essa identidade em (6.5), obtemos

$$\sum |\nabla \varphi_i|^2 = \frac{12\pi}{|\Sigma|} - K_\Sigma. \tag{6.6}$$

□

A seguir, vamos assumir que Σ é uma superfície CMC estável em M^3 com massa de Hawking zero e seja $\varphi : \Sigma \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ o mapeamento conforme dado na Proposição 6.1. Denotamos a métrica em Σ por $g = \varphi^*(e^u g_0)$, onde g_0 é a métrica canônica em $\mathbb{S}^2$. De acordo com a definição de um mapa conforme,

$$e^{-u} = \frac{1}{2}|\nabla \varphi|^2 = \frac{1}{2}\sum |\nabla \varphi_i|^2,$$

e assim usando a identidade (6.5) obtemos

$$e^{-u} = \frac{6\pi}{|\Sigma|} - \frac{1}{2}K_\Sigma. \tag{6.7}$$

A fórmula de Gauss para a mudança conforme de métrica nos dá

$$K_\Sigma = e^{-u}\left(1 - \frac{1}{2}\Delta_{g_0} u\right). \tag{6.8}$$

Portanto, substituindo (6.8) em (6.7), obtemos

$$\Delta_{g_0} u = 6 - \frac{24\pi}{|\Sigma|}e^u. \tag{6.9}$$

Agora, consideramos uma mudança de variável, definindo $u = v + w$ onde v é a constante satisfazendo $e^v = \frac{|\Sigma|}{4\pi}$. Assim, $\Delta_{g_0} u = \Delta_{g_0} w$ e $e^u = \frac{|\Sigma|}{4\pi} e^w$. Isso nos leva a

$$\Delta_{g_0} w = 6 - 6e^w, \tag{6.10}$$

e em particular obtemos

$$\frac{|\Sigma|}{4\pi} K_\Sigma - 1 = e^{-u}\left(3e^u - 2\frac{|\Sigma|}{4\pi}\right) - 1 = 2(1 - e^{-w}). \tag{6.11}$$

Se pudermos mostrar que (6.10) admite apenas a solução trivial, podemos concluir que Σ é isométrica a $\mathbb{S}^2(\sqrt{|\Sigma|/4\pi})$. Segue que $g = \varphi^*(e^u g_0) = \varphi^*(\frac{|\Sigma|}{4\pi} g_0)$.

6.3 Provas dos teoremas

6.3.1 Prova do Teorema 6.1

De acordo com a Proposição 6.1, se $m_{\mathrm{H}}(\Sigma) = 0$, então $\mathrm{H}^2 = \frac{16\pi}{|\Sigma|} - 4$, Σ é totalmente umbilica, $\mathrm{A} = \frac{\mathrm{H}}{2}\mathrm{Id} = \sqrt{\frac{4\pi}{|\Sigma|} - 1}\mathrm{Id}$, o que coincide com a segunda forma fundamental de $\mathbb{S}^2(\sqrt{|\Sigma|/4\pi})$ imersa em $\mathbb{S}^3$, onde Id denota o operador de identidade e o operador de Jacobi se torna

$$J = \Delta_\Sigma - K_\Sigma + \frac{12\pi}{|\Sigma|}.$$

Da equação (6.11), se Σ é aproximadamente uma esfera, então $\frac{|\Sigma|}{4\pi} K_\Sigma$ está C^0 próximo de um, implicando que w está C^0 próximo de zero. Por [65, Lemma 10], concluímos que $w = 0$, então Σ é isométrica a $\mathbb{S}^2(\sqrt{|\Sigma|/4\pi})$, a esfera de curvatura Gaussiana constante igual a $\frac{4\pi}{|\Sigma|}$.

Agora, assumindo $\mathrm{Ric}_M \geq 2$, podemos aplicar [40] (na verdade, precisamos apenas de curvatura de Ricci positiva) e concluir que Σ divide M em duas componentes, Ω_1 e Ω_2, tal que $\partial\Omega_1 = \partial\Omega_2 = \Sigma$. Neste ponto, estamos em posição de aplicar o Teorema 2.4 para concluir que se Ω_1 é a região determinada pelo lado médio convexo de Σ, então ela é isométrica a uma bola em $\mathbb{S}^3_+$ e isso conclui a prova. □

Corolário 6.2. *Seja (M^3, g) uma variedade riemanniana completa com $S_g \geq 6$, e seja Σ uma esfera mínima estável em M^3 para variações que preservam o volume. Se $m_{\mathrm{H}}(\Sigma) = 0$ e Σ é aproximadamente uma esfera redonda, então Σ é isométrica a $\mathbb{S}^2$. Além disso, se assumirmos $\mathrm{Ric}_M \geq 2$, então M^3 é isométrica a $\mathbb{S}^3$.*

Demonstração. Segue da prova do teorema acima que se Σ é mínima, então Σ é totalmente geodésica e isométrica a $\mathbb{S}^2$. Agora, assumindo $\mathrm{Ric}_M \geq 2$, podemos aplicar [40] e concluir que Σ divide M em duas componentes Ω_1 e Ω_2 tal que $\partial\Omega_1 = \partial\Omega_2 = \Sigma$. Neste ponto, estamos em posição de aplicar o Teorema 2.3 para concluir que tanto Ω_1 quanto Ω_2 são isométricas a $\mathbb{S}^3_+$, e, portanto, M^3 é isométrica a $\mathbb{S}^3$. □

6.3.2 Prova do Teorema 6.2

Seja $\varphi : \Sigma \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ o mapa conforme introduzido na Proposição 6.1 sob a condição de que $\int_\Sigma \varphi_i da = 0$.

Com base em nossa hipótese inicial, existe uma isometria $\rho : \Sigma \to \Sigma$, satisfazendo $\rho^2 = \mathrm{id}$ e $\rho(x) \neq x$ para $x \in \Sigma$. Consequentemente, podemos definir $\tilde{\rho} = \varphi \circ \rho \circ \varphi^{-1} : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$, que é um mapa conforme.

Isso leva às seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} \varphi^*(e^u g_0) &= g = \rho^* g = \rho^* \varphi^*(e^u g_0) = (\varphi \circ \rho)^*(e^u g_0) \\ &= (\tilde{\rho} \circ \varphi)^*(e^u g_0) = \varphi^* \tilde{\rho}^*(e^u g_0). \end{aligned}$$

Portanto, temos $e^u g_0 = \tilde{\rho}^*(e^u g_0)$, o que implica que $\tilde{\rho}$ é uma isometria com respeito à métrica $e^u g_0$.

Agora, considere $z \in C^\infty(\mathbb{S}^2)$ tal que $\tilde{\rho}^* g_0 = e^z g_0$. Então, obtemos a relação $u = u \circ \tilde{\rho} + z$. Porque $(\mathbb{S}^2, \tilde{\rho}^* g_0)$ tem curvatura Gaussiana constante igual a 1, e porque $\tilde{\rho} : (\mathbb{S}^2, \tilde{\rho}^* g_0) \to (\mathbb{S}^2, g_0)$ é uma isometria, segue que z satisfaz $\Delta z = 2(1 - e^z)$.

Então, podemos proceder da seguinte forma

$$\begin{aligned} 6\left(1 - \frac{24\pi}{|\Sigma|} e^u\right) &= \Delta u = \Delta(u \circ \tilde{\rho}) + \Delta z = ((\Delta u) \circ \tilde{\rho}) e^z + \Delta z \\ &= 6(e^z - \frac{24\pi}{|\Sigma|} e^{u \circ \tilde{\rho} + z}) + \Delta z = 6(e^z - \frac{24\pi}{|\Sigma|} e^u) + 2(1 - e^z) \\ &= 6(1 - \frac{24\pi}{|\Sigma|} e^u) - 4(1 - e^z). \end{aligned}$$

Assim, $e^z = 1$, $\tilde{\rho}^* g_0 = g_0$, e $\tilde{\rho}$ é uma isometria de $\mathbb{S}^2$ com respeito à métrica g_0. Consequentemente, existe uma matriz ortogonal $A \in \mathcal{O}(3)$ tal que $\tilde{\rho} x = Ax$. Porque $\rho^2 = \mathrm{id}$, temos $\tilde{\rho}^2 = \mathrm{id}$ e $A^2 = I_3$. Os autovalores de A são ± 1. De fato, se $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$, temos $x = A^2 x = \lambda^2 x$. Porque $\rho(x) \neq x$ para $x \in \Sigma$, temos $\tilde{\rho}(x) \neq x$ para $x \in \mathbb{S}^2$, e 1 não pode ser um autovalor de A. Portanto, o autovalor de A deve ser -1, e assim A é similar a uma matriz diagonal $-I_3 = Q^{-1} A Q$, onde Q é uma matriz invertível, o que implica que $A = -I_3$ e $\tilde{\rho}(x) = -x$. Portanto, $u(x) = u \circ \tilde{\rho}(x) + z = u(-x)$.

Fazendo novamente a mudança de variável $u = w + v$, onde $e^v = \frac{|\Sigma|}{4\pi}$, encontramos que w satisfaz (6.10) e $w(x) = w(-x)$. Usando [63, Theorem 1], podemos concluir que $w = 0$. Portanto, Σ é isométrica a $\mathbb{S}^2(\sqrt{\frac{|\Sigma|}{4\pi}})$.

Assumindo que $\mathrm{Ric}_M \geq 2$, podemos proceder analogamente à prova do Teorema 6.1 para concluir que M^3 contém uma região isométrica a um conjunto compacto $\Omega \subset \mathbb{S}^3_+$ tal que Σ é isométrica a $\partial\Omega$. □

Observação 6.1. Usando (6.11) e o resultado em [63, Lemma 10], obtemos $K_\Sigma \frac{|\Sigma|}{4\pi} \leq 2$. Consequentemente, a suposição de simetria par pode ser substituída por uma estimativa da curvatura Gaussiana. Isso leva a um limite explícito no Teorema 6.1.

Corolário 6.3. *Seja* (M^3, g) *uma variedade riemanniana completa com* $S_g \geq 6$*, e seja* Σ *uma esfera mínima estável em* M^3 *para variações que preservam o volume. Se* $m_{\mathrm{H}}(\Sigma) = 0$ *e* Σ *possui simetria par, então* Σ *é isométrica a* $\mathbb{S}^2$*. Além disso, se assumirmos* $\mathrm{Ric}_M \geq 2$*, então* M^3 *é isométrica a* $\mathbb{S}^3$*.*

BIBLIOGRAFIA

[1] Luis J. Alías, Abdênago Barros e Aldir Brasil Jr. “A spectral characterization of the $H(r)$-torus by the first stability eigenvalue”. Em: *Proc. Amer. Math. Soc.* 133.3 (2005), pp. 875–884. ISSN: 0002-9939,1088-6826. DOI: 10.1090/S0002-9939-04-07559-8. URL: https://doi.org/10.1090/S0002-9939-04-07559-8 (ver p. 8).

[2] Luis J. Alías, Miguel A. Meroño e Irene Ortiz. “On the first stability eigenvalue of constant mean curvature surfaces into homogeneous 3-manifolds”. Em: *Mediterr. J. Math.* 12.1 (2015), pp. 147–158. ISSN: 1660-5446,1660-5454. DOI: 10.1007/s00009-014-0397-y. URL: https://doi.org/10.1007/s00009-014-0397-y (ver p. 8).

[3] Luis J. Alías e José A. Pastor. “Spacelike surfaces of constant mean curvature with free boundary in the Minkowski space”. English. Em: *Classical Quantum Gravity* 16.4 (1999), pp. 1323–1331. ISSN: 0264-9381. DOI: 10.1088/0264-9381/16/4/021 (ver p. 49).

[4] Ambrozio, L. C. “Rigidity of area-minimizing free boundary surfaces in mean convex three-manifolds”. Em: *J. Geom. Anal.* 25.2 (2015), pp. 1001–1017. ISSN: 1050-6926. DOI: 10.1007/s12220-013-9453-2. URL: http://dx.doi.org/10.1007/s12220-013-9453-2 (ver pp. 11, 29, 32).

[5] Lars Andersson, Marc Mars e Walter Simon. “Local Existence of Dynamical and Trapping Horizons”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 95 (11 set. de 2005), p. 111102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.95.111102. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.95.111102 (ver p. 43).

[6] Lars Andersson, Marc Mars e Walter Simon. “Stability of marginally outer trapped surfaces and existence of marginally outer trapped tubes”. English. Em: *Adv. Theor. Math. Phys.* 12.4 (2008), pp. 853–888. ISSN: 1095-0761. DOI: 10.4310/ATMP.2008.v12.n4.a5 (ver pp. 43, 44).

[7] D. Bakry e Michel Émery. “Diffusions hypercontractives”. Em: *Séminaire de probabilités, XIX, 1983/84*. Vol. 1123. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, 1985, pp. 177–206. ISBN: 3-540-15230-X. DOI: 10.1007/BFb0075847. URL: https://doi.org/10.1007/BFb0075847 (ver p. 30).

[8] J. Lucas Barbosa, Manfredo do Carmo e Jost Eschenburg. “Stability of hypersurfaces of constant mean curvature in Riemannian manifolds”. Em: *Math. Z.* 197.1 (1988), pp. 123–138. ISSN: 0025-5874,1432-1823. DOI: 10.1007/BF01161634. URL: https://doi.org/10.1007/BF01161634 (ver pp. 49, 51, 52, 54).

[9] Joan Lucas Barbosa e Manfredo Perdigão do Carmo. "Stability of hypersurfaces with constant mean curvature". English. Em: *Math. Z.* 185 (1984), pp. 339–353. ISSN: 0025-5874. DOI: 10.1007/BF01215045 (ver p. 49).

[10] João Lucas Marques Barbosa e Vladimir Oliker. "Spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in Lorentz space". English. Em: *Mat. Contemp.* 4 (1993), pp. 27–44. ISSN: 0103-9059 (ver p. 49).

[11] Lucas Barbosa e Pierre Bérard. "Eigenvalue and "twisted" eigenvalue problems, applications to CMC surfaces". Em: *J. Math. Pures Appl. (9)* 79.5 (2000), pp. 427–450. ISSN: 0021-7824. DOI: 10.1016/S0021-7824(00)00160-4. URL: https://doi.org/10.1016/S0021-7824(00)00160-4 (ver p. 61).

[12] Abdênago Barros, Aldir Brasil e Antonio Caminha. "Stability of spacelike hypersurfaces in foliated spacetimes". Em: *Differential Geom. Appl.* 26.4 (2008), pp. 357–365. ISSN: 0926-2245,1872-6984. DOI: 10.1016/j.difgeo.2007.11.028. URL: https://doi.org/10.1016/j.difgeo.2007.11.028 (ver pp. 13, 49, 53, 56).

[13] Robert Bartnik. "Mass and 3-metrics of non-negative scalar curvature". Em: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002).* Higher Ed. Press, Beijing, 2002, pp. 231–240. ISBN: 7-04-008690-5 (ver pp. 13, 59).

[14] M Batista e JI Santos. "Upper Bounds for the First Stability Eigenvalue of Surfaces in 3-Riemannian Manifolds". Em: *Potential Analysis* 49.1 (2018), pp. 91–103 (ver pp. 8, 21, 29).

[15] Simon Brendle, Fernando C. Marques e Andre Neves. "Deformations of the hemisphere that increase scalar curvature". Em: *Invent. Math.* 185.1 (2011), pp. 175–197. ISSN: 0020-9910. DOI: 10.1007/s00222-010-0305-4 (ver p. 60).

[16] Katherine Castro e César Rosales. "Free boundary stable hypersurfaces in manifolds with density and rigidity results". Em: *Journal of Geometry and Physics* 79 (2014), pp. 14–28 (ver pp. 11, 29, 30, 32, 76).

[17] Daguang Chen e Qing-Ming Cheng. "Estimates for the first eigenvalue of Jacobi operator on hypersurfaces with constant mean curvature in spheres". Em: *Calc. Var. Partial Differential Equations* 56.2 (2017), Paper No. 50, 12. ISSN: 0944-2669,1432-0835. DOI: 10.1007/s00526-017-1132-x. URL: https://doi.org/10.1007/s00526-017-1132-x (ver p. 8).

[18] Jingyi Chen, Ailana Fraser e Chao Pang. "Minimal immersions of compact bordered Riemann surfaces with free boundary". Em: *Trans. Amer. Math. Soc.* 367.4 (2015), pp. 2487–2507. ISSN: 0002-9947,1088-6850. DOI: 10.1090/S0002-9947-2014-05990-4. URL: https://doi.org/10.1090/S0002-9947-2014-05990-4 (ver p. 62).

[19] Qing-Ming Cheng. "First eigenvalue of a Jacobi operator of hypersurfaces with a constant scalar curvature". Em: *Proc. Amer. Math. Soc.* 136.9 (2008), pp. 3309–3318. ISSN: 0002-9939,1088-6826. DOI: 10.1090/S0002-9939-08-09304-0. URL: https://doi.org/10.1090/S0002-9939-08-09304-0 (ver p. 8).

[20] Otis Chodosh. "Large isoperimetric regions in asymptotically hyperbolic manifolds". Em: *Comm. Math. Phys.* 343.2 (2016), pp. 393–443. ISSN: 0010-3616,1432-0916. DOI: 10.1007/s00220-015-2457-y. URL: https://doi.org/10.1007/s00220-015-2457-y (ver p. 62).

[21] D. Christodoulou e S.-T. Yau. "Some remarks on the quasi-local mass". Em: *Mathematics and general relativity (Santa Cruz, CA, 1986).* Vol. 71. Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988, pp. 9–14. ISBN: 0-8218-5079-2. DOI: 10.1090/conm/071/954405. URL: https://doi.org/10.1090/conm/071/954405 (ver p. 62).

[22] Giulio Colombo, José A. S. Pelegrín e Marco Rigoli. "Stable maximal hypersurfaces in Lorentzian spacetimes". Em: *Nonlinear Anal.* 179 (2019), pp. 354–382. ISSN: 0362-546X,1873-5215. DOI: 10.1016/j.na.2018.09.009. URL: https://doi.org/10.1016/j.na.2018.09.009 (ver p. 54).

[23] Antonio W. Cunha, Henrique F. de Lima e Fábio R. dos Santos. "On the first stability eigenvalue of closed submanifolds in the Euclidean and hyperbolic spaces". Em: *Differential Geom. Appl.* 52 (2017), pp. 11–19. ISSN: 0926-2245,1872-6984. DOI: 10.1016/j.difgeo.2017.03.002. URL: https://doi.org/10.1016/j.difgeo.2017.03.002 (ver p. 8).

[24] Nguyen Thac Dung, Juncheol Pyo e Hung Tran. "First stability eigenvalue of singular hypersurfaces with constant mean curvature in the unit sphere". Em: *Proc. Amer. Math. Soc.* 151.2 (2023), pp. 795–810. ISSN: 0002-9939,1088-6826. DOI: 10.1090/proc/16120. URL: https://doi.org/10.1090/proc/16120 (ver p. 8).

[25] Michael Eichmair et al. "The spacetime positive mass theorem in dimensions less than eight". English. Em: *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* 18.1 (2016), pp. 83–121. ISSN: 1435-9855. DOI: 10.4171/JEMS/584 (ver p. 43).

[26] A. El Soufi e S. Ilias. "Majoration de la seconde valeur propre d'un opérateur de Schrödinger sur une variété compacte et applications". Em: *J. Funct. Anal.* 103.2 (1992), pp. 294–316. ISSN: 0022-1236,1096-0783. DOI: 10.1016/0022-1236(92)90123-Z. URL: https://doi.org/10.1016/0022-1236(92)90123-Z (ver p. 63).

[27] José F. Escobar. "A comparison theorem for the first non-zero Steklov eigenvalue". Em: *J. Funct. Anal.* 178.1 (2000), pp. 143–155. ISSN: 0022-1236,1096-0783. DOI: 10.1006/jfan.2000.3662. URL: https://doi.org/10.1006/jfan.2000.3662 (ver p. 37).

[28] José F. Escobar. “An isoperimetric inequality and the first Steklov eigenvalue”. Em: *J. Funct. Anal.* 165.1 (1999), pp. 101–116. ISSN: 0022-1236,1096-0783. DOI: 10.1006/jfan.1999.3402. URL: https://doi.org/10.1006/jfan.1999.3402 (ver p. 37).

[29] José F. Escobar. “The geometry of the first non-zero Stekloff eigenvalue”. Em: *J. Funct. Anal.* 150.2 (1997), pp. 544–556. ISSN: 0022-1236,1096-0783. DOI: 10.1006/jfan.1997.3116. URL: https://doi.org/10.1006/jfan.1997.3116 (ver p. 37).

[30] T. Frankel. “On the fundamental group of a compact minimal submanifold”. Em: *Ann. of Math. (2)* 83 (1966), pp. 68–73. ISSN: 0003-486X. DOI: 10.2307/1970471. URL: https://doi.org/10.2307/1970471 (ver p. 21).

[31] Ailana Fraser. “Index estimates for minimal surfaces and k-convexity”. English. Em: *Proc. Am. Math. Soc.* 135.11 (2007), pp. 3733–3744. ISSN: 0002-9939. DOI: 10.1090/S0002-9939-07-08894-6 (ver p. 76).

[32] Gregory J. Galloway e Abraão Mendes. “Rigidity of marginally outer trapped 2-spheres”. English. Em: *Commun. Anal. Geom.* 26.1 (2018), pp. 63–83. ISSN: 1019-8385. DOI: 10.4310/CAG.2018.v26.n1.a2 (ver p. 43).

[33] Gregory J. Galloway e Richard Schoen. “A generalization of Hawking’s black hole topology theorem to higher dimensions”. English. Em: *Commun. Math. Phys.* 266.2 (2006), pp. 571–576. ISSN: 0010-3616. DOI: 10.1007/s00220-006-0019-z (ver p. 44).

[34] M. Gromov. “Isoperimetry of waists and concentration of maps”. Em: *Geom. Funct. Anal.* 13.1 (2003), pp. 178–215. ISSN: 1016-443X,1420-8970. DOI: 10.1007/s000390300004. URL: https://doi.org/10.1007/s000390300004 (ver p. 30).

[35] Fengbo Hang e Xiaodong Wang. “Rigidity and non-rigidity results on the sphere”. Em: *Communications in Analysis and Geometry* 14.1 (2006), pp. 91–106 (ver p. 23).

[36] Fengbo Hang e Xiaodong Wang. “Rigidity theorems for compact manifolds with boundary and positive Ricci curvature”. English. Em: *J. Geom. Anal.* 19.3 (2009), pp. 628–642. ISSN: 1050-6926. DOI: 10.1007/s12220-009-9074-y (ver pp. 13, 20, 22, 60, 61).

[37] S. W. Hawking. “Gravitational radiation in an expanding universe”. Em: *J. Mathematical Phys.* 9.4 (1968), pp. 598–604. ISSN: 0022-2488,1089-7658. DOI: 10.1063/1.1664615. URL: https://doi.org/10.1063/1.1664615 (ver p. 59).

[38] S. W. Hawking e G. F. R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1973 (ver pp. 42, 43).

[39] Lan-Hsuan Huang e Dan A. Lee. "Trapped surfaces, topology of black holes, and the positive mass theorem". English. Em: *Notices Am. Math. Soc.* 69.4 (2022), pp. 536–545. ISSN: 0002-9920. DOI: 10.1090/noti2453 (ver p. 42).

[40] H. Blaine Lawson Jr. "The unknottedness of minimal embeddings". Em: *Invent. Math.* 11 (1970), pp. 183–187. ISSN: 0020-9910. DOI: 10.1007/BF01404649. URL: https://doi.org/10.1007/BF01404649 (ver pp. 21, 61, 65).

[41] Michael Levitin, Dan Mangoubi e Iosif Polterovich. *Topics in spectral geometry.* English. Vol. 237. Grad. Stud. Math. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2024. ISBN: 978-1-4704-7525-3; 978-1-4704-7548-2; 978-1-4704-7549-9. DOI: 10.1090/gsm/237 (ver p. 37).

[42] Martin Man-Chun Li. "A sharp comparison theorem for compact manifolds with mean convex boundary". English. Em: *J. Geom. Anal.* 24.3 (2014), pp. 1490–1496. ISSN: 1050-6926. DOI: 10.1007/s12220-012-9381-6 (ver p. 28).

[43] André Lichnerowicz. "Variétés riemanniennes à tenseur C non négatif". Em: *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* 271 (1970), A650–A653. ISSN: 0151-0509 (ver p. 30).

[44] Andre Lichnerowicz. "Variétés kählériennes à première classe de Chern non negative et variétés riemanniennes à courbure de Ricci généralisée non negative. (Kählerian manifolds of non-negative first Chern class and Riemannian manifolds with non-negative generalized Ricci curvature)". French. Em: *J. Differ. Geom.* 6 (1971), pp. 47–94. ISSN: 0022-040X. DOI: 10.4310/jdg/1214430218 (ver p. 30).

[45] Eudes de Lima, Henrique Lima e Fábio Santos. "On the Stability of f-Maximal Spacelike Hypersurfaces in Weighted Generalized Robertson–Walker Spacetimes". Em: *Bulletin Polish Acad. Sci. Math.* 64 (jan. de 2016), pp. 199–208. DOI: 10.4064/ba8069-8-2016 (ver pp. 29, 51).

[46] Davi Máximo e Ivaldo Nunes. "Hawking mass and local rigidity of minimal two-spheres in three-manifolds". Em: *Comm. Anal. Geom.* 21.2 (2013), pp. 409–432. ISSN: 1019-8385,1944-9992. DOI: 10.4310/CAG.2013.v21.n2.a6. URL: https://doi.org/10.4310/CAG.2013.v21.n2.a6 (ver pp. 13, 60).

[47] Laurent Mazet e Abraão Mendes. *Rigidity of min-max minimal disks in 3-balls with non-negative Ricci curvature.* 2023. arXiv: 2307.03624 [math.DG]. URL: https://arxiv.org/abs/2307.03624 (ver p. 40).

[48] Abraão Mendes. "Rigidity of free boundary surfaces in compact 3-manifolds with strictly convex boundary". English. Em: *J. Geom. Anal.* 28.2 (2018), pp. 1245–1257. ISSN: 1050-6926. DOI: 10.1007/s12220-017-9861-9 (ver pp. 11, 40).

[49] Miguel A. Meroño e Irene Ortiz. "First stability eigenvalue characterization of CMC Hopf tori into Riemannian Killing submersions". Em: *J. Math. Anal. Appl.* 417.1 (2014), pp. 400–410. ISSN: 0022-247X,1096-0813. DOI: 10.1016/j.jmaa.2014.03.036. URL: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.03.036 (ver p. 8).

[50] Pengzi Miao. *Positive Mass Theorem on Manifolds admitting Corners along a Hypersurface*. 2003. arXiv: math-ph/0212025 [math-ph]. URL: https://arxiv.org/abs/math-ph/0212025 (ver p. 23).

[51] Barrett O'neill. *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*. Academic press, 1983 (ver pp. 42, 50, 57).

[52] José A. Pastor. "Spacelike hypersurfaces of constant mean curvature with free boundary in Lorentzian space forms". English. Em: *Classical Quantum Gravity* 17.9 (2000), pp. 1921–1934. ISSN: 0264-9381. DOI: 10.1088/0264-9381/17/9/304 (ver p. 49).

[53] Roger Penrose. "Gravitational Collapse and Space-Time Singularities". Em: *Phys. Rev. Lett.* 14 (3 jan. de 1965), pp. 57–59. DOI: 10.1103/PhysRevLett.14.57. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.14.57 (ver p. 42).

[54] Oscar Perdomo. "First stability eigenvalue characterization of Clifford hypersurfaces". Em: *Proceedings of the American Mathematical Society* 130.11 (2002), pp. 3379–3384 (ver p. 8).

[55] Grisha Perelman. *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*. English. Preprint, arXiv:math/0211159 [math.DG] (2002). Id/No 0211159. 2002 (ver p. 30).

[56] Bernhard Riemann. Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen eiuer veränderlichen complexen Grösse. (Inauguraldissertation, Göttingen 1851.) Em: *Bernard Riemann's gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass*. Ed. por Richard Dedekind e Heinrich MartinEditors Weber. Cambridge Library Collection - Mathematics. Cambridge University Press, 2013, pp. 3–47 (ver p. 22).

[57] Antonio Ros e Enaldo Vergasta. "Stability for hypersurfaces of constant mean curvature with free boundary". Em: *Geom. Dedicata* 56.1 (1995), pp. 19–33. ISSN: 0046-5755. URL: https://doi.org/10.1007/BF01263611 (ver pp. 15, 49).

[58] César Rosales et al. "On the isoperimetric problem in Euclidean space with density". Em: *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* 31.1 (2008), pp. 27–46 (ver p. 29).

[59] Richard Schoen e Shing Tung Yau. "On the proof of the positive mass conjecture in general relativity". Em: *Comm. Math. Phys.* 65.1 (1979), pp. 45–76. ISSN: 0010-3616,1432-0916. URL: http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1103904790 (ver p. 59).

[60] Richard Schoen e Shing-Tung Yau. "Existence of incompressible minimal surfaces and the topology of three dimensional manifolds with non-negative scalar curvature". Em: *Annals of Mathematics* 110.1 (1979), pp. 127–142 (ver pp. 8, 17, 18).

[61] Yuguang Shi e Luen-Fai Tam. "Positive mass theorem and the boundary behaviors of compact manifolds with nonnegative scalar curvature." English. Em: *J. Differ. Geom.* 62.1 (2002), pp. 79–125. ISSN: 0022-040X. DOI: 10.4310/jdg/1090425530 (ver p. 23).

[62] Yuguang Shi e Luen-Fai Tam. "Rigidity of compact manifolds and positivity of quasi-local mass". Em: *Classical and Quantum Gravity* 24.9 (2007), p. 2357 (ver p. 24).

[63] Yuguang Shi et al. "Uniqueness of the mean field equation and rigidity of Hawking mass". Em: *Calc. Var. Partial Differential Equations* 58.2 (2019), Paper No. 41, 16. ISSN: 0944-2669,1432-0835. DOI: 10.1007/s00526-019-1496-1. URL: https://doi.org/10.1007/s00526-019-1496-1 (ver pp. 14, 60, 61, 66).

[64] James Simons. "Minimal Varieties in Riemannian Manifolds". Em: *Annals of Mathematics* 88 (1968), p. 62. URL: https://api.semanticscholar.org/CorpusID:123432347 (ver p. 8).

[65] Jiacheng Sun. "Rigidity of Hawking mass for surfaces in three manifolds". Em: *Pacific J. Math.* 292.2 (2018), pp. 479–504. ISSN: 0030-8730,1945-5844. DOI: 10.2140/pjm.2018.292.479. URL: https://doi.org/10.2140/pjm.2018.292.479 (ver pp. 14, 60, 63, 65).

[66] V. A. Toponogov. "Evaluation of the length of a closed geodesic on a convex surface". Russian. Em: *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 124 (1959), pp. 282–284. ISSN: 0002-3264 (ver p. 20).

[67] Edward Witten. "A new proof of the positive energy theorem". Em: *Comm. Math. Phys.* 80.3 (1981), pp. 381–402. ISSN: 0010-3616,1432-0916. URL: http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1103919981 (ver p. 59).

[68] Changyu Xia. "Rigidity of compact manifolds with boundary and nonnegative Ricci curvature". Em: *Proc. Amer. Math. Soc.* 125.6 (1997), pp. 1801–1806. ISSN: 0002-9939,1088-6826. DOI: 10.1090/S0002-9939-97-04078-1. URL: https://doi.org/10.1090/S0002-9939-97-04078-1 (ver p. 40).

A APÊNDICE

A.1 Exemplo 2.4

A equação de Bessel de segunda ordem é dada por

$$x^2y'' + xy' + ((\alpha x)^2 - n^2)y = 0$$

em que $\alpha \geq 0$ e $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$. Sua solução é dada por

$$y = aJ_n(\alpha x) + BY_n(\alpha x),$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ e J_n, Y_n são as funções de Bessel de primeiro e segundo tipo respectivamente. A função Y_n não está definida na origem.

A equação de Bessel modificada é dada por

$$x^2y'' + xy' - ((\alpha x)^2 + n^2)y = 0,$$

em que $\alpha \geq 0$ e $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$. Sua solução é dada por

$$y = aI_n(\alpha x) + BK_n(\alpha x),$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ e I_n, K_n são as funções de Bessel modificadas de primeiro e segundo tipo, respectivamente. A função K_n não está definida na origem Considere o problema

$$\begin{cases} \Delta_\Sigma \rho = -\lambda\rho, & \text{em } \overline{\mathbb{D}}, \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial \nu} = \rho, & \text{sobre } \partial\overline{\mathbb{D}}. \end{cases}$$

Usando a parametrização em coordenadas polares para Σ

$$x(r, \theta) = (r\cos\theta, r \operatorname{sen}\theta),\ 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

escreva $\rho = R(r)\Theta(\theta)$. Então

$$\begin{aligned} r^2\Delta_{\overline{\mathbb{D}}}\rho = \Theta R'' + rR'\Theta + r^2R\Theta'' &= -\lambda r^2 R\Theta \\ \Rightarrow \frac{R'' + rR' + r^2\lambda R}{r^2R} &= -\frac{\Theta''}{\Theta}. \end{aligned}$$

Fazendo $\Theta''/\Theta = -n^2$, temos que $\Theta = a\cos(n\theta) + b\operatorname{sen}(n\theta)$ e

$$R'' + R'r + (\lambda r^2 - n^2)R = 0.$$

Para a condição de fronteira temos que

$$R'(1)\Theta = R(1)\Theta.$$

Portanto, se $\lambda > 0$, podemos usar a função de Bessel J_n e qualquer valor de n a condição de bordo implica que $\alpha J_n'(\alpha) - J_n(\alpha) = 0$. Não usaremos a equação de Bessel de segundo tipo já que precisamos de soluções diferenciáveis e ela não é na origem. Segue que as soluções são

$$\begin{aligned} u_{nk1}(r,\theta) &= J_n(\alpha_{nk}r)\cos(n\theta), \\ u_{nk2}(r,\theta) &= J_n(\alpha_{nk}r)\,\mathrm{sen}(n\theta), \\ u_{0k1}(r,\theta) &= J_0(\alpha_{nk}r), \end{aligned}$$

em que os autovalores $\lambda_{nk} = \alpha_{nk}^2$ com $n = 0, 1, 2, \ldots$ é a ordem da função de Bessel, $k = 0, 1, 2 \ldots$ representa a k-ésima raiz positiva da equação 2.12 e $i = 1, 2$.

Se $\lambda = 0$, temos que a solução é $\rho = (a + bx + cy + dxy)$. Porém, xy e as constantes não satisfazem as condições de bordo, de modo que as soluções são

$$\begin{aligned} u_1(r,\theta) &= r\cos(\theta), \\ u_2(r,\theta) &= r\,\mathrm{sen}(\theta). \end{aligned}$$

Se $\lambda < 0$, podemos tomar $\lambda = -\alpha^2$ e devemos ter que $n = 0$ para usarmos a equação de Bessel modificada. A condição de bordo implica que $\alpha I_0'(\alpha) - I_0(\alpha) = 0$ e essa equação admite apenas um raiz positiva. De fato, em [31, Teorema 1] Fraser, mostrou que o índice do disco com bordo livre na bola do $\mathbb{R}^3$ é 1.

A.2 Variedades com densidade

Proposição A.1 ([16]). *Seja M uma variedade Riemanniana orientada (resp. variedade Lorentziana) dotada de uma função densidade e^{-f}. E $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma \to M$ uma variação de Σ uma hipersuperfície orientada (resp. hipersuperfície do tipo-espaço) em M com $int(\Sigma) \subset int(M)$ e $\partial\Sigma \subset \partial M$. Dada uma variação com campo variacional X temos*

$$A_f'(0) = -\epsilon \int_\Sigma H_f u \, da_f + \int_{\partial\Sigma} \langle X, \nu \rangle d\ell_f, \;\; V_f'(0) = \int_\Sigma u da_f, \tag{A.1}$$

em H_f é a f-curvatura de Σ, $\epsilon = \langle N, N \rangle$, u é a componente normal de X, isto é, $u = \epsilon\langle X, N\rangle$ e ν é o vetor conormal apontando para o exterior de Σ.

Proposição A.2 ([16]). *Seja M uma variedade Riemanniana orientada dotada de uma função densidade e^{-f}.. Considere uma orientável f-estacionária hipersuperfície Σ imersa em M com $int(\Sigma) \subset int(M)$ e $int(\partial\Sigma) \subset int(\partial M)$. Seja I_f a forma do índice então*

i Σ é fortemente f-estável se e somente se, $\mathcal{I}_f(u,u) \geq 0$ para qualquer $u \in C_0^\infty(\Sigma)$.

ii Σ é $f-$estável se e somente se, $\mathcal{I}_f(u,u) \geq 0$ para qualquer $u \in C_0^\infty(\Sigma)$ com $\int_\Sigma u da_f = 0$.

Proposição A.3.

$$\nabla_{\partial_i} N_s = g^{kl} B_{il} \partial_k \tag{A.2}$$

$$\nabla_X N_s = \nabla_{X^\top} N_s - \nabla_{\Sigma_s} u_s \tag{A.3}$$

Faremos uma análogo da equação de Gauss para variedades ponderadas. Seja $\{e_1,e_2, \ldots, e_n\}$, um referencial adaptado de Σ para M com $e_n = N$ e utilizando a equação de Gauss temos que

$$S = S_\Sigma + |A|^2 - H^2 + 2\,\mathrm{Ric}_M(N,N)$$

onde S_Σ é a curvatura escalar de Σ e segue que

$$\begin{aligned}
|A|^2 + \mathrm{Ric}_f(N,N) &= \frac{S}{2} - \frac{S_\Sigma}{2} + \frac{|A|^2}{2} + \frac{H^2}{2} + \mathrm{Hess}\ f(e_n,e_n) \\
&= \frac{1}{2}S_\infty - \Delta_M f + \frac{1}{2}|\overline{\nabla} f|^2 - \frac{S_\Sigma}{2} + \frac{|A|^2}{2} + \frac{H^2}{2} + \mathrm{Hess}\ f(e_n,e_n) \\
&= \frac{1}{2}S_\infty - (\Delta_\Sigma f - H f_n + \mathrm{Hess}\ f(e_n,e_n)) + \frac{1}{2}\left(|\nabla f|^2 + f_3^2\right) \\
&\quad - \frac{S_\Sigma}{2} + \frac{|A|^2}{2} + \frac{H^2}{2} + \mathrm{Hess}\ f(e_n,e_n) \\
&= \frac{1}{2}S_\infty - \frac{1}{2}S_\Sigma - \Delta_\Sigma f + \frac{1}{2}|\nabla f|^2 + \frac{1}{2}H_f^2 + \frac{1}{2}|A|^2. \qquad \text{(A.4)}
\end{aligned}$$

Pela observação 2.19 e levando em conta que $H_f^{\partial M} = H^{\partial M} - \frac{\partial f}{\partial \nu} = II^{\partial M} + II^{\partial M}(T,T) - \frac{\partial f}{\partial \nu}$ em que ν aponta para o exterior, assim

$$\begin{aligned}
\lambda_1^{J_f} &\leq \frac{\mathcal{I}_f(e^{\frac{f}{2}}, e^{\frac{f}{2}})}{\int_\Sigma e^f da_f} = -\frac{\int_\Sigma \left(-\frac{1}{4}|\nabla f|^2 + \mathrm{Ric}_f(N,N) + |A|^2\right) da + \int_{\partial\Sigma} II^{\partial M}(N,N) d\ell}{|\Sigma|} \\
&= -\frac{1}{|\Sigma|}\left(\int_\Sigma \left(\frac{1}{2}S_\infty - \frac{1}{2}S_\Sigma - \Delta_\Sigma f + \frac{1}{4}|\nabla f|^2 + \frac{1}{2}H_f^2 + \frac{1}{2}|A|^2\right) da + \int_{\partial\Sigma} II^{\partial M}(N,N) d\ell\right) \\
&\leq -\frac{1}{|\Sigma|}\left(\frac{1}{2}\int_\Sigma \left(S_\infty - S_\Sigma + H_f^2 + |A|^2\right) da + \int_{\partial\Sigma}\left(\mathrm{II}^{\partial M}(N,N) - \frac{\partial f}{\partial \nu}\right) dl\right) \\
&= -\frac{1}{|\Sigma|}\left(\frac{1}{2}\int_\Sigma \left(S_\infty - S_\Sigma + H_f^2 + |A|^2\right) da + \int_{\partial\Sigma}\left(H_f^{\partial M} - \mathrm{II}^{\partial M}(T,T)\right) d\ell\right).
\end{aligned}$$

Finalmente utilizando Gauss-Bonnet temos

$$\lambda_1^{J_f} \leq -\frac{1}{|\Sigma|}\left(\frac{1}{2}\int_\Sigma \left(S_\infty + H_f^2 + |A|^2\right) da + \int_{\partial\Sigma} H_f^{\partial M} d\ell - 2\pi\chi(\Sigma)\right) \tag{A.5}$$

A.2.1 Demonstração dos Teoremas

Teorema 2.12

Demonstração. A desigualdade decorre diretamente de (A.5), junto com as hipóteses. Além disso se ocorre a igualdade f deve ser constantes sobre Σ, Σ é totalmente geodésica,

$S_\infty|_\Sigma = a$, $H_f^{\partial M}|_{\partial\Sigma} = b$, por (2.2) temos que $\mathrm{Ric}_f(N,N) = -\lambda_1$ e por (A.4) K é constante igual a $a/2 + H_f^2/2 + \lambda_1^{J_f}$. Novamente por (2.2) temos que $II^{\partial M}(N,N) = 0$ e portanto $II^{\partial M}(T,T) = H_f^{\partial M}|_{\partial\Sigma} = b$. Desde que Σ é totalmente geodésica $\nabla_T T$ e $\nabla_T \nu$ são tangentes a Σ, portanto, a curvatura geodésica de $\partial\Sigma$ em ∂M é $\langle -\nabla_T N, N\rangle = \langle N, \nabla_T T\rangle$ é nula. A recíproca é imediata. □

Proposição 2.1

Demonstração. Lembrando pela Proposição A.2 temos que $\lambda_1^{J_f} \geq 0$ então aplicamos esta desigualdade no Teorema 2.12 e segue o desejado. □

Proposição 2.2

Demonstração. Da equação (A.5), das hipóteses e do fato de que $\lambda_1 \geq 0$, temos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq -\frac{1}{2}\int_\Sigma ae^{-f}\,da - \int_{\partial\Sigma} be^{-f}\,d\ell + 2\pi\chi(\Sigma) \\ &= -\frac{1}{2}a|\Sigma|_f - b|\partial\Sigma|_f + 2\pi\chi(\Sigma). \end{aligned}$$

□