Universidade Federal de Alagoas UFAL

Instituto de Matemática

Trabalho de Conclusão de Curso

Aplicações da Álgebra Linear na Resolução de Problemas

Aluna: Mariana Bispo da Silva

Orientador: Prof. Dr. Márcio Cavalcante de Melo

Maceió - AL

2024

Mariana Bispo da Silva

Aplicações da Álgebra Linear na Resolução de Problemas

Trabalho de conclusão de curso apresentado à banca examinadora do curso de Matemática Licenciatura, da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciada em Matemática. Orientador: Prof. Dr. Márcio Cavalcante de Melo.

Maceió - AL

2024

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária: Girlaine da Silva Santos – CRB-4 – 1127

S586a Silva, Mariana Bispo da.
Aplicações da álgebra Linear na Resolução de Problemas / Mariana Bispo da Silva. – 2024.
60 f. : il.

Orientador: Márcio Cavalcante de Melo.
Monografia (Trabalho de conclusão de curso em Matemática : Licenciatura) - Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática, Maceió, 2024.

Bibliografia: f. 60.

1. Álgebra linear. 2. Álgebra linear - Aplicações. 3. Álgebra linear - problemas. I. Título.

CDU: 512. 64

Folha de Aprovação

Mariana Bispo da Silva

Aplicações da Álgebra Linear na Resolução de Problemas

Trabalho de conclusão de curso apresentado à banca examinadora do curso de Matemática Licenciatura, da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciada em Matemática. Orientador: Prof. Dr. Márcio Cavalcante de Melo

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
gov.br MARCIO CAVALCANTE DE MELO
Data: 30/08/2024 16:25:06-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Márcio Cavalcante de Melo (Orientador)
IM-UFAL

Documento assinado digitalmente
gov.br JULIANA ROBERTA THEODORO DE LIMA
Data: 30/08/2024 17:32:34-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. Juliana Roberta Theodoro de Lima
IM-UFAL

Documento assinado digitalmente
gov.br RAFAEL NOBREGA DE OLIVEIRA LUCENA
Data: 30/08/2024 16:34:14-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Rafael Nóbrega de Oliveira Lucena
IM-UFAL

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus por ter me dado o dom da vida e a Virgem Maria que sempre me guiou com seu manto sagrado. Agradeço aos meus pais Givanilda da Conceição Bispo e Mariano Gomes da Silva, em especial, a minha mãe por ser sempre meu porto seguro. As minhas irmãs Gedilza, Gilvânia e Mariane e minha sobrinha Ana Júlia. A toda minha família, minhas tias, tios e minha avó, por terem sido apoio ao longo de todos esses anos.

Agradeço também a todos meus amigos que me acompanharam nessa trajetória de graduação e que me incentivaram e fizeram de alguma forma meus dias menos estressante e mais felizes. Destaco aqui os mais envolvidos: Andressa, Yris Paulina, Carine, Renata, Pedro, João Luiz, Arthur Roberthy, Roberty, Anderson, Jameson, João Victor e Jorlan. Agradeço a José Isaias, que foi pessoa que sempre esteve ao meu lado me apoiando em tudo desde o ínicio do curso e que sempre acreditou que eu poderia chegar até aqui. Aos meus irmãos acadêmicos Victor Ferreira, que não mediu esforços para me orientar nas minhas escolhas da graduação e também da vida e ao Gleydson por me aconselhar e também por toda ajuda sempre que não entedia algum assunto. Agradeço em especial a esses dois por terem não somente me mostrado o caminho, mas por me ajudarem a caminhar.

Por fim, deixo meus agradecimentos aos meus professores da graduação que ensinaram tudo o que sei e que hoje são grandes referências para mim. Especialmente, agradeço ao meu orientador, Márcio Cavalcante, que agregou bastante na minha vida acadêmica com seus ensinamentos, conselhos, paciência e atenção. Tudo isso, motivou-me a seguir em frente mesmo diante das dificulades pessoais e acadêmicas.

Resumo

Este trabalho tem o intuito de apresentar aplicações da Álgebra Linear na resolução de problemas matemáticos. Nesse sentido, é abordada, inicialmente, a teoria básica de Álgebra Linear, enfatizando os seus principais resultados. Em seguida é feita as aplicações de alguns resultados na resolução de problemas em diferentes contextos da Matemática.
Palavras-chave: Álgebra Linear; aplicações; problemas.

Abstract

This work aims to present applications of Linear Algebra in solving mathematical problems. In this sense, the basic theory of Algebra is initially addressed Linear, emphasizing your main results. Afterwards, some applications are made results in problem solving in different Mathematics contexts.

Keywords: Linear algebra; applications; problems.

Sumário

Introdução

Álgebra Linear é um ramo da Matemática que lida com o estudo dos espaços vetoriais e das transformações lineares entre eles. Os diversos conceitos que estão envolvidos nesse ramo possuem ferramentas bastante úteis nas vastas áreas da matemática, como também em outros campos de estudo. São numerosas e bastante variadas as situações em que os seus objetivos ocorrem, onde existem situações recorrentes no cotidiano em que a Álgebra Linear é utilizada.

O Capítulo 1 introduz a teoria básica e inicial de Álgebra Linear, é apresentada as definições de espaços vetoriais, base e dimensão e finalizando com alguns breves conceitos de soma direta. Os espaços vetorias são considerados apenas sobre os corpos $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, o que se torna coerente com o objetivo do texto.

O Capítulo 2 aborda as transformações lineares, onde é trazido um dos principais resultados da Álgebra Linear, que é o Teorema do Núcleo e da Imagem. Além disso, é dado o conceito de isomorfismo, que possibilita estudar as transformações lineares bijetoras e ver que nessas condições os espaços vetorias dessa transformação podem ser identificados de alguma maneira, ou seja, todo espaço vetorial X de dimensão finita é isomorfo a $\mathbb{K}^n$ com $dim X = n$. Por fim, é também apresentado outro importante resultado deste trabalho, o Teorema do Posto de uma Matriz, o qual é fortemente utilizado nas aplicações.

O Capítulo 3 trata dos espaços com produto interno. Iniciando com as definições de produto interno e norma para então introduzir ortogonalidade. Em que nessa parte é trazido o resultado do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt em casos bidimensionais e tridimensionais. O capítulo finaliza com uma breve conceituação de isometria.

O Capítulo 4 tem o intuito de apresentar a teoria de determinantes e suas propriedades. Dessa forma, é iniciado a conceituação a partir de deteminantes de matrizes 2×2 e suas principais propriedades, que servem também para ajudar a definir a função determinante. Em seguida, é mostrada a existência da função determinante e que ela é única.

Finalmente, o Capítulo 5 traz as aplicações, que é o maior objetivo deste trabalho. Nele é trazido problemas de diferentes contextos da Matemática que são resolvidos de maneira bastante criativa, utilizando os conceitos de Álgebra Linear. Os problemas escolhidos foram do livro "Thirty-three Miniatures - Mathematical and Algorithmic Applications of Linear Algebra" de Matousek. Em que, tais problemas foram estudados e resolvidos com grande preocupação nos detalhes. Em muitos destes problemas a aparição de ferramentas da Álgebra Linear em um primeiro momento parecia inesperada, porém se mostrou bem eficiente na resolução destes.

Capítulo 1

Base e Dimensão

Este capítulo tem como objetivo abordar as definições de espaços vetoriais, base e dimensão e soma direta..

1.1 Espaços Vetoriais

Denotaremos por $\mathbb{K}$ quando nos referirmos aos corpos $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Definição 1.1. *Um espaço vetorial X sobre um corpo $\mathbb{K}$ é um conjunto cujos seus elementos, chamados vetores, munidos das operações soma e produto por escalares, satisfazem:*

(i) ***Fechamento:*** $x + y \in X$, $\forall\ x, y \in X$;

(ii) ***Comutatividade:*** $x + y = y + x$, $\forall\ x, y \in X$;

(iii) ***Associatividade:*** $(x + y) + z = x + (y + z)$, $\forall\ x, y, z \in X$;

(iv) ***Elemento neutro:*** $\exists\ 0 \in X$ *tal que* $x + 0 = x$;

(v) ***Inverso aditivo:*** $\forall\ x \in X$, $\exists\ (-x) \in X$ *tal que* $x + (-x) = 0$;

(vi) ***Fechamento:*** $\lambda x \in X$, $\forall\ x \in X$ *e* $\forall\ \lambda \in \mathbb{K}$;

(vii) ***Associatividade:*** $\mu(\lambda x) = (\mu\lambda)x$, $\forall\ x \in X$ *e* $\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$;

(viii) ***Distributividade:*** $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$, $\forall\ x, y \in X$ *e* $\forall\ \lambda \in \mathbb{K}$;

(ix) ***Distributividade:*** $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$, $\forall\ x \in X$ *e* $\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$;

(x) ***Regra da unidade:*** $1x = x$, $\forall\ x \in X$ *(aqui 1 é o elemento neutro multiplicativo em* $\mathbb{K}$*).*

Vejamos que algumas propriedades são consequências da definição de espaço vetorial:

1. O vetor nulo, indicado por 0, é único. De fato, suponha que exista um outro, $0'$. Então, por definição teremos:
$$0 = 0' + 0 = 0 + 0' = 0'.$$

2. Dado $x \in X$ tem-se $0x = 0$. Note no lado esquerdo da igualade, 0 representa um escalar em $\mathbb{K}$ e no lado da igualdade se trata de um vetor nulo em X. Vemos que:
$$0x = (0 + 0)x = 0x + 0x.$$
Somamos $(-0x)$ a ambos os membros da igualdade acima e obtemos:
$$0 = 0x.$$

3. Dado $\lambda \in \mathbb{K}$, vale que $\lambda 0 = 0$. De fato,
$$\lambda 0 = \lambda (0 + 0) = \lambda 0 + \lambda 0.$$
Adicionamos $-(\lambda 0)$ a ambos os membros da desigualdade acima e obtemos
$$\lambda 0 = 0.$$

4. Seja (-1) o simétrico de 1 em $\mathbb{K}$. Então, $(-1)x = -x$. De fato,
$$\begin{aligned} -x &= 0 + (-x) \\ &= 0x + (-x) \\ &= ((-1) + 1)x + (-x) \\ &= (-1)x + 1x + (-x) \\ &= (-1)x + x + (-x) \\ &= (-1)x + 0 \\ &= (-1)x. \end{aligned}$$
Mais geralmente, $(-\lambda x) = (-\lambda)x = -(\lambda x)$.

5. $\lambda x = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 0$ ou $x = 0$. De fato,
$$\lambda \neq 0 \Longrightarrow x = 1x = (\lambda^{-1}\lambda)x = \lambda^{-1}(\lambda x) = \lambda^{-1}0 = 0.$$

A recíproca segue de 1 e 2.

Observação 1.1. *A partir daqui denotaremos* $x + (-y)$ *simplesmente por* $x - y$.

Observação 1.2. *Frizamos que as operações de soma e multiplicação por escalar podem ser incomuns. Desse modo, os elementos* 0 *e* $-x$ *dependem do conjunto* X *e das operações soma e multiplicação por escalar assim definidas no conjunto.*

Vejamos alguns exemplos de espaços vetorias sobre um corpo $\mathbb{K}$:

Exemplo 1.1. *O espaço euclidiano n-dimensional* $\mathbb{K}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n); x_i \in \mathbb{K}\}$ *com as operações usuais de soma e multiplicação por escalar:*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n);$$

$$\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n).$$

Exemplo 1.2. *O conjunto das matrizes* $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *com as operações:*

$$B = (b_{ij}),\ A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}),\ 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n,\ \forall A = (a_{ij});$$

$$A = (a_{ij}),\ \lambda A = (\lambda a_{ij}),\ 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

Exemplo 1.3. *O conjunto das funções* $F(\mathbb{K})$ *com as operações:*

$$f + g : \mathbb{K} \to \mathbb{K},\ (f + g)(x) = f(x) + g(x);$$

$$\lambda f : \mathbb{K} \to \mathbb{K},\ (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Definição 1.2. *Um subconjunto* Y *de um espaço vetorial* X *é um subespaço vetorial de* X*, se as seguintes condições forem satisfeitas:*

(i) $0 \in Y$;

(ii) $\forall x, y \in Y$, $x + y \in Y$;

(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ *e* $\forall x \in Y$, $\lambda x \in Y$.

Exemplo 1.4. *O subconjunto de um espaço vetorial* X *formado apenas pelo elemento nulo é um subespaço vetorial de* X*. O próprio* X *como subconjunto de* X *também é um subespaço vetorial. Esses dois subespaços são chamados de triviais.*

Exemplo 1.5. *Considere* $\mathbb{C}$ *como espaço vetorial sobre* $\mathbb{Q}$*. Então* $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$ *é uma cadeia de subespaços de* $\mathbb{C}$*. Perceba que se considerarmos* $\mathbb{C}$ *como espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$*, então* $\mathbb{Q}$ *não é subespaço vetorial de* $\mathbb{C}$*, pois a multiplicação de um número real por um número racional nem sempre é um número racional.*

1.2 Bases

Definição 1.3. *Seja $S \subset X$ um subconjunto qualquer do espaço vetorial X. Uma combinação linear de elementos de S é uma soma (finita)*

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_K x_k$$

com $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ e $x_1, x_2, \ldots, x_k \in S$.

O conjunto S é linearmente independente, se

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_K x_k = 0,$$

para $x_1, x_2, \ldots, x_k \in S$ e escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$, implicar $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$. Caso contrário, o conjunto S é dito linearmente dependente.

O conjunto S gera o espaço X se para todo $x \in X$, existirem elementos $x_1, x_2, \ldots, x_j \in S$ e escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_j \in \mathbb{K}$ tais que $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_j x_j$. Denotaremos por $span(S)$ o conjunto de todas as combinações lineares de S. Este conjunto é um subespaço vetorial de X e o chamamos de subespaço vetorial de X gerado por S.

Definição 1.4. *Uma base de X é um subconjunto ordenado $\mathcal{B}$ que é linearmente independente e gera X, isto é, $\mathcal{B}$ é base de X se*

1. *$\mathcal{B}$ é linearmente independente;*

2. *$span(\mathcal{B}) = X$.*

E dizemos que X tem dimensão finita, se possuir uma base com um número finito de elementos ou se $X = \{0\}$. Caso contrário, ele tem dimensão infinita.

Lema 1.1. *Suponhamos que $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ gere o espaço vetorial X e que $\{y_1, y_2, \ldots, y_j\}$ seja linearmente independente em X. Então*

$$j \leq n.$$

Demonstração. Suponha que $j > n$. Como $span(S) = X$, existe algum y_j com $j = 1, \ldots, n$ que é escrito como combinação linear dos elementos de S, sem perda de generalidade, suponha

$$y_1 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n,$$

Com algum escalar diferente de zero. Vamos supor $\lambda_1 \neq 0$. Logo,

$$span(\{x_2, x_3, \ldots, x_n, y_1\}) = X.$$

Agora, note que, se $x \in X$ então existem $\alpha_i \in \mathbb{K}$ com $i = 1, \dots, n$ tais que

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n, \tag{1.1}$$

Como

$$y_1 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n,$$

então

$$x_1 = \frac{y_1 - \lambda_2 x_2 - \cdots - \lambda_n x_n}{\lambda_1}. \tag{1.2}$$

Substituindo (1.2) em (1.1) temos

$$x = \alpha_1 (\frac{y_1 - \lambda_2 x_2 - \cdots - \lambda_n x_n}{\lambda_1}) + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n.$$

Analogamente, como $y_2 \in X$, temos

$$y_2 = \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \cdots + \beta_n x_n + \beta_1 x_1,$$

Com ao menos um dos escalares diferente de zero. Supondo que $\beta_2 \neq 0$, vemos que

$$span(\{x_3, x_4, \dots, x_n, y_1, y_2\}) = X.$$

Repetindo esse processo sucessivamente chegamos que $span(\{y_1, y_2, \dots, y_n\}) = X$. Em particular, se $y_{n+1} \in X$, temos

$$y_{n+1} = \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 + \cdots + \gamma_n y_n,$$

$$\implies (-\gamma_1) y_1 + (-\gamma_2) y_2 + \cdots + (-\gamma_n) y_n + 1 y_{n+1} = 0.$$

Mas, então

$$(-\gamma_1) y_1 + (-\gamma_2) y_2 + \cdots + (-\gamma_n) y_n + 1 y_{n+1} + 0 y_{n+2} + \cdots + 0 y_j = 0.$$

Um absurdo, pois o conjunto $\{y_1, y_2, \dots, y_j\}$ é linearmente independente. □

A seguir iremos mostrar que um espaço vetorial de dimensão finita possui uma base.

Lema 1.2. *Todo espaço vetorial $X \neq \{0\}$ gerado por um subconjunto $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ possui uma base.*

Demonstração. Se S for linearmente independente, então S é uma base para X. Caso contrário, algum elemento de S pode ser escrito como combinação linear dos outros elementos. Sem perda de generalidade, suponha que

$$x_1 = \textstyle\sum_{i=2}^{n} \alpha_i x_i,$$

seja $S_1 = \{x_2, x_3, \dots, x_n\}$, se S_1 for linearmente independente, então S_1 é uma base. Caso contrário, sem perda de generalidade, suponha

$$x_2 = \textstyle\sum_{i=3}^n \beta_i x_i,$$

seja $S_2 = \{x_3, x_4, \dots, x_n\}$, se S_2 for linearmente independente, então S_2 é uma base. Repetimos esse processo até obtermos um conjunto linearmente independente que seja uma base para X. $\square$

Note que o espaço vetorial $X = \{0\}$ não possui base. O teorema a seguir mostra que o conceito de dimensão em um espaço vetorial está bem definido.

Teorema 1.3. *Todas as bases de um espaço vetorial X de dimensão finita possuem o mesmo número de elementos.*

Demonstração. Tome $\mathcal{B}_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_j\}$ duas bases de X.
Afirmação: $j = n$.
De fato, como $\mathcal{B}_1$ é base então $span(\mathcal{B}_1) = X$. Como $\mathcal{B}_2$ é base então $\mathcal{B}_2$ é linearmente independente. Logo, pelo Lema 1, temos $j \leq n$.
Por outro lado, como $\mathcal{B}_1$ é base então $\mathcal{B}_1$ é linearmente independente. Como $\mathcal{B}_2$ é base então $span(\mathcal{B}_2) = X$. Logo, pelo Lema 1, temos $n \leq j$. Portanto $j = n$ $\square$

Mostraremos agora a existência de base em qualquer espaço vetorial, mas para isso precisaremos dar algumas noções preliminares.

Definição 1.5. ***(Cojunto Parcialmente Ordenado)*** *Um conjunto $\mathfrak{M}$ é dito parcialmente ordenado quando se define uma ordenação parcial, ou seja, uma relação binária que é denotada por " $\preccurlyeq$ " e satisfaz:*

(i) ***Reflexiva*** *$a \preccurlyeq a$, $\forall a \in \mathfrak{M}$.*

(ii) ***Antissimétrica*** *Se $a \preccurlyeq b$ e $b \preccurlyeq a$ então $a = b$.*

(iii) ***Transitiva*** *Se $a \preccurlyeq b$ e $b \preccurlyeq c$ então $a \preccurlyeq c$.*

Observação 1.3. *O termo "parcial" remete ao caso em que pode haver elementos que não são comparáveis de acordo com a ordenação dada.*

Pode haver elementos que não são comparáveis de acordo com a ordenação dada. Dois elementos $a, b \in \mathfrak{M}$ que satisfazem $a \preccurlyeq b$ ou $b \preccurlyeq a$ são ditos comparáveis. Se não ocorre, eles são ditos imcomparáveis. Caso contrário, eles são imcomparáveis.

Se quaisquer dois elementos de $\mathfrak{M}$ são comparáveis, então $\mathfrak{M}$ é chamado de cadeia ou totalmente ordenado.

Um limite superior ou uma cota superior de um subconjunto M de um conjunto parcialmente ordenado $\mathfrak{M}$ é um elemento $u \in \mathfrak{M}$ tal que

$$x \preccurlyeq u, \forall x \in \mathfrak{M}.$$

Um elemento máximo ou elemento maximal de $\mathfrak{M}$ é um $m \in \mathfrak{M}$ tal que

$$m \preccurlyeq x \Longrightarrow m = x.$$

Exemplo 1.6. ***(Números Reais)*** *$\mathfrak{M} = \mathbb{R}$ e a relação é " $\leq$ " de maneira usual. É totalmente ordenado, mas não possui elemento máximo.*

Exemplo 1.7. ***(Conjunto das Partes)*** *Seja $\mathcal{P}(X)$ o conjunto das partes de X. E seja $A \preccurlyeq B$ para indicar $A \subset B$, ou seja, A é um subconjunto de B. Então $\mathcal{P}(X)$ é parcialmente ordenado.*

1. *$A \subset A$.*

2. *Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, então $A = B$*

3. *$A \subset B$ e $B \subset C \Longrightarrow A \subset C$.*

O único elemento máximo de $\mathcal{P}(X)$ é X.

Axioma 1. ***(Lema de Zorn)*** *Seja $\mathfrak{M}$ um conjunto não vazio parcialmente ordenado. Suponha que toda cadeia $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{M}$ tem um limite superior. Então $\mathfrak{M}$ tem pelo menos um elemento máximo.*

A seguir usaremos o Axioma 1 para provar a existência de base.

Teorema 1.4. *Todo espaço vetorial $X \neq \{0\}$ tem uma base.*

Demonstração. Seja $\mathfrak{M}$ o conjunto de todos os subconjuntos linearmente independente de X. Ou seja, $\mathfrak{M} = \{Y \subset X : Y \text{ é } L.I.\}$. Queremos mostrar que $\mathfrak{M}$ possui um elemento máximo. Defina em $\mathfrak{M}$ a seguinte relação:

$$Y \preccurlyeq A \text{ como } Y \subset A.$$

Pelo Exemplo 1.7, $\mathfrak{M}$ é parcialmente ordenado. Vamos mostrar que todo subconjunto totalmente ordenado $\mathfrak{C}$ de $\mathfrak{M}$ tem cota superior. De fato, defina

$$\mathcal{Y} = \bigcup_{Y \in \mathfrak{C}} Y.$$

Perceba que $\mathcal{Y} \supset Y$, $\forall\, Y \in \mathfrak{C}$. Seja $\alpha x_1 + \alpha x_2 + \cdots + \alpha x_n = 0$ com $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{Y}$. Como $\mathfrak{C}$ é totalmente ordenado, podemos encontrar Y em $\mathfrak{C}$ tal que $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in Y$. Como Y é Linearmente independente temos $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. Então, $\mathcal{Y} \in \mathfrak{M}$ é uma cota superior de $\mathfrak{C}$. Pelo Axioma 1, $\mathfrak{M}$ tem um elemento $\mathcal{B}$ maximal.

Afirmação. $\mathcal{B}$ é base de X.

De fato. Suponha $span(\mathcal{B}) \neq X$. Então, existe $z \in X$ tal que $z \notin span(\mathcal{B})$. Logo

$$\mathcal{B} \cup \{z\} \text{ é linearmente independente.}$$

E note que,

$$\mathcal{B} \subset \mathcal{B} \cup \{z\}.$$

Ou seja,

$$\mathcal{B} \preccurlyeq \mathcal{B} \cup \{z\}.$$

Absurdo, pois $\mathcal{B}$ é um elemento máximo para $\mathfrak{M}$. Logo, $span(\mathcal{B}) = X$. Portanto $\mathcal{B}$ é base de X. □

Definição 1.6. *Se $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ for uma base do espaço vetorial X, dizemos que X tem dimensão n e escrevemos*

$$dim X = n$$

Se $X = \{0\}$, dizemos que X tem dimensão finita igual a zero.

Teorema 1.5. *Todo conjunto linearmente independente $S = \{y_1, y_2, \ldots, y_j\}$ de um espaço vetorial X de dimensão $n \geq 1$ pode ser completado para formar uma base de X.*

Demonstração. Se $span(S) = X$, não há o que provar. Do contrário, existe um vetor $x_1 \in X$ que não é combinação linear dos elementos de S. Logo, o conjunto $\{y_1, y_2, \ldots, y_j, x_1\}$ é linearmente independente. Repetimos esse procedimento um número finito de vezes até que tenhamos uma base para X. □

Com o Teorema 1.5 vemos que é possível obtermos diferentes bases para um espaço vetorial $X \neq \{0\}$ de dimensão finita. Dessa maneira, podemos perceber que um espaço vetorial possui muitas bases.

Definição 1.7. *Sejam X um espaço vetorial e $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ uma base de X. Se $x \in X$, então existem únicos escalares $\lambda_i \in \mathbb{K}$ com $i = 1, \ldots, n$ tais que*

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n,$$

ou seja, x pode ser escrito de maneira única como combinação linear dos vetores da base $\mathcal{B}$. O vetor $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ é chamado a representação de x na base $\mathcal{B}$ e $\lambda_i \in \mathbb{K}$ com $i = 1, \ldots, n$ as coordenadas de x na base $\mathcal{B}$.

Definição 1.8. *Seja $e_i \in \mathbb{K}$ o vetor cuja i-ésima coordenada é igual a 1 e as outras nulas. O conjunto $\varepsilon = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ é a base canônica do espaço $\mathbb{K}^n$.*

Observação 1.4. *Uma base de um espaço vetorial é um conjunto ordenado. Desse modo, se $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ for uma base de X, então $\mathcal{B}_1 = \{x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1\}$ é outra base de X. O mesmo ocorre se a base tiver um número infinito de elementos. A ordenação dos elementos da base permite dar sentido à representação em uma base. Uma vez que a escolha de uma base de X de dimensão n gera um isomorfismo entre X e $\mathbb{K}^n$.*

1.3 Somas Diretas

Definição 1.9. *Sejam A e B dois subconjuntos de um espaço vetorial X. Denotamos por $A + B$ o conjunto de todos os vetores $x + y$ tal que $x \in A$ e $y \in B$.*

Proposição 1.1. *Sejam U, V subespaços de X. Então $U + V$ é subespaço de X.*

Demonstração.

Afirmação 1. $0 \in U + V$.
De fato, pois $0 = 0 + 0$, onde $0 \in U$ e $0 \in V$.

Afirmação 2. $z_1 + z_2 \in U + V$.
De fato, sejam $z_1 = x_1 + y_1$ e $z_2 = x_2 + y_2$. Então $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \in U + V$, pois $x_1 + x_2 \in U$ e $y_1 + y_2 \in V$.

Afirmação 3. $\lambda z \in U + V$.
De fato, sejam $\lambda \in \mathbb{K}$ e $z = x + y \in U + V$. Então $\lambda z = \lambda x + \lambda y \in U + V$, pois $\lambda x \in U$ e $\lambda y \in V$.

□

Definição 1.10. *Sejam U, V subespaços de X. O subespaço $W = U + V$ é a soma direta dos subespaços U e V se cada elemento $w \in W$ puder ser escrito de maneira única como*

$$w = x + y.$$

Denotamos W por $W = U \oplus V$.

Proposição 1.2. *O subespaço $W = U + V$ é a soma direta dos subespaços U, V de X se, e somente se, $U \cap V = \{0\}$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos $W = U \oplus V$. Então para todo $w \in W$ temos

$$w = x + y, \tag{1.3}$$

para certos $x \in U$ e $y \in V$.

Tome $z \in U \cap V$, ou seja, $x + z \in U$ e $y - z \in V$. Logo, w pode ser escrito como

$$w = (x + z) + (y - z). \tag{1.4}$$

De (1.3) e (1.4) temos que

$$x + y = (x + z) + (y - z).$$

Logo, teremos devido à unicidade da escrita de w, visto que W é a soma direta de U e V, que $x = x + z$ e $y = y - z$. Assim, $z = 0$.
($\Leftarrow$) Suponha que $U \cap V = \{0\}$ queremos provar que para todo $w \in W$ tal que $w = x_1 + y_1$ e $w = x_2 + y_2$ tem-se em $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.
Temos que,

$$x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \Longrightarrow x_1 - x_2 = y_2 - y_1.$$

Note que, $x_1 - x_2 \in U$ implica em $y_2 - y_1 \in U$. Por outro lado, $y_2 - y_1 \in V$ implica em $x_1 - x_2 \in V$. Logo, $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \in U \cap V = \{0\}$, ou seja, $x_1 - x_2 = 0$ e $y - 2 - y_1 = 0$. Portanto, $x_1 = x_2$ e $y_2 = y_1$, garantindo a unicidade da decomposição de w. $\square$

Teorema 1.6. *Seja X um espaço vetorial de dimensão finita. Então vale:*

(i) Todo subespaço Y de X possui dimensão finita;

(ii) Todo subespaço Y possui um complemento $Z \subset X$, isto é, existe um subespaço Z de X tal que $X = Y \oplus Z$.

Demonstração. Se $Y = \{0\}$, então $dimY = 0$. Caso contrário, se $Y \neq \{0\}$ tome $y_1 \neq 0 \in Y$. Daí, se $Y = \{\lambda y_1 : \lambda \in \mathbb{K}\}$ o resultado já é válido. Do contrário, existe $y_2 \in Y$ tal que $\{y_1, y_2\}$ é $L.I.$ Se $Y = \{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 : \lambda_i \in \mathbb{K}\}$ o resultado já é válido. Do contrário, existe $y_3 \in Y$ tal que $\{y_1, y_2, y_3\}$ é $L.I.$ Procedendo assim, obtemos sucessivamente conjuntos linearmente independentes, cada um contendo o anterior. De acordo com o Lema 1.1, esse processo só deve continuar enquanto esses conjuntos tiverem menos elementos do que a dimensão de X. Dessa forma, obtemos assim uma base $\mathcal{B}_1 = \{y_1, y_2, \ldots, y_j\}$ para Y.

Suponha a $dimX = n$, então de acordo com o Teorema 1.5, $\mathcal{B}_1$ pode ser completada para formar uma base de X. Daí, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$, onde $\mathcal{B}_2 = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-j}\}$. Tome $Z = span(\mathcal{B}_2)$ implica que $\mathcal{B}_2$ é base de Z. Claramente Z é um subespaço de X e $Z \cap Y = \{0\}$. Logo pela proposição 2, temos $X = Y \oplus Z$.

$\square$

Capítulo 2

Transformações Lineares

Este capítulo tem como objetivo abordar as transformações lineares e alguns principais resultados: Teorema do Núcleo e da Imagem e o Teorema do Posto de uma Matriz.

2.1 Transformações Lineares e Matrizes

Definição 2.1. *Sejam X e Y espaços vetoriais sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$. Uma transformação linear é uma aplicação $T : X \to Y$ tal que*

$$T(x + \lambda y) = T(x) + \lambda T(y) \; \forall x, y \in X \;\; e \; \lambda \in \mathbb{K}.$$

São válidas as seguintes propriedades para T:

1. $T(x + y) = T(x) + T(y)$. Basta tomar $\lambda = 1$ na definição.

2. $T(\lambda y) = \lambda T(y)$. Basta tomar $x = 0$ na definição.

3. $T(0) = 0$. De fato, como 0 é o elemento neutro da adição em Y temos

$$T(0) + 0 = T(0).$$

Como T é linear e 0 é o vetor nulo de X temos:

$$T(0) = T(0 + 0) = T(0) + T(0).$$

Obtemos que

$$T(0) + 0 = T(0) + T(o) \Longrightarrow 0 = T(0).$$

4. $T(-x) = -T(x)$. De fato, pela propriedade 1 temos que

$$0 = T(0) = T(x + (-x))$$

Como T é linear teremos

$$0 = T(0) = T(x + (-x)) = T(x) + T(-x) \Longrightarrow T(-x) = -T(x).$$

5. $T(x_1 - x_2) = T(x_1) - T(x_2)$. De fato,

$$T(x_1 + (-x_2)) = T(x_1) + T(-x_2)$$

Pela propriedade 2 temos que

$$T(x_1 + (-x_2)) = T(x_1) + T(-x_2) = T(x_1) - T(x_2).$$

6. Se W é um subespaço de X, então a imagem de W por T é um subespaço de Y.

7. Sendo $T : X \to Y$ linear então

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(x_i).$$

Exemplo 2.1. *Seja $A = (a_i j) \in \mathbb{M}_{m\times n}$. A função $T_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ definida por*

$$T_A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j\right)$$

é uma transformação linear.

De fato, para $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$T_A(x + \lambda y) = T_A(x_1 + \lambda y_1, \ldots, x_n + \lambda y_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j + \lambda y_j), \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}(x_j + \lambda y_j)\right)$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j\right) + \lambda\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}y_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}y_j\right) = T_A(x) + \lambda T_A(y).$$

Teorema 2.1. *Toda aplicação linear $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ é da forma do Exemplo* 2.1.

Demonstração. Consideremos a base canônica $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ do $\mathbb{K}^n$. Temos, então, que $x = x_1e_1 + x_2e_2 \cdots + x_ne_n = \sum_{j=1}^{n} x_je_j$. Como T é linear,

$$y = T(x) = T\left(\sum_{j=1}^{n} x_je_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_jT(e_j).$$

Denotemos a i-ésima coordenada do vetor $T(e_j)$ por a_{ij}, isto é, $T(e_j) = (a_{ij})_i$ Assim, a i-ésima coordenada de y é

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} x_ja_{ij},$$

como queríamos provar. □

Observação 2.1. *Note que, para provarmos o Teorema 2.1 fizemos o uso explícito da base canônica do $\mathbb{R}^n$. Ao denotar $T(e_j) = (a_{ij})_i$, estamos fazendo uso implícito da base canônica do $\mathbb{R}^m$.*

2.2 Núcleo e Imagem

Nesta seção iremos enunciar e provar um dos resultados importantes da Álgebra Linear, que é o Teorema do Núcleo e da Imagem.

Definição 2.2. *Sejam X e Y espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $T : X \to Y$ uma transformação linear. Indica-se por $Ker(T)$ e denomina-se núcleo de T o seguinte subconjunto de X:*

$$Ker(T) = \{x \in X; T(x) = 0\}.$$

Proposição 2.1. *Seja $T : X \to Y$ uma transformação linear. Então:*
(i) $Ker(T)$ é um subespaço vetorial de X;
(ii) A transformação linear T é injetora se, e somente se, $Ker(T) = \{0\}$.

Demonstração. De fato.
(i) Como $T(0) = 0$, então $0 \in Ker(T)$. Sejam $x_1, x_2 \in Ker(T)$, então $T(x_1) = T(x_2) = 0$. Daí, $T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2) = 0 + 0 = 0$. Logo, $x_1 + x_2 \in Ker(T)$. Finalmente, se $x \in Ker(T)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ e tendo que $T(x) = 0$. Daí $T(\lambda x) = \lambda T(x) = \lambda 0 = 0$. Portanto, $\lambda x \in Ker(T)$.

(ii) Suponhamos T injetora. Seja $x \in Ker(T)$. Então $T(x) = 0$. Mas $T(0) = 0$, conforme a propriedade 1. Daí, $T(x) = T(0)$ que implica $x = 0$.

Reciprocamente suponhamos que $Ker(T) = \{0\}$. Dados $x_1, x_2 \in X$ então

$$T(x_1) = T(x_2) \Longrightarrow T(x_1) - T(x_2) = 0 \Longrightarrow T(x_1 - x_2) = 0$$

$$\Longrightarrow x_1 - x_2 \in Ker(T) \Longrightarrow x_1 - x_2 = 0 \Longrightarrow x_1 = x_2.$$

□

Teorema 2.2. ***(do Núcleo e da Imagem)*** *sejam X e Y espaços vetoriais de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$. Dada uma transformação linear $T : X \to Y$, então*

$$dimX = dimKer(T) + dimIm(T).$$

Demonstração. Seja $\mathcal{B}_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ uma base para $Ker(T)$. Pelo Teorema 1.5 podemos completar essa base com vetores linearmente independentes até formar uma base para X. Seja $\mathcal{B}_2 = \{x_1, x_2, \ldots, x_r, y_1, y_2, \ldots, y_s\}$ essa base de X.

Mostremos que $\mathcal{B} = \{T(y_1), T(y_2), \ldots, T(y_s)\}$ é uma base para $Im(T)$. De fato, tome $y \in Im(T)$, logo existe $x \in X$ tal que $T(x) = y$. Temos que x é escrito como combinação linear dos vetores da base $\mathcal{B}_2$, ou seja,

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_r x_r + \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \cdots + \beta_s y_s.$$

Daí,

$$y = T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_r x_r + \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \cdots + \beta_s y_s)$$

$$\Longrightarrow y = \alpha_1 T(x_1) + \alpha_2 T(x_2) + \cdots + \alpha_r T(x_r) + \beta_1 T(y_1) + \beta_2 T(y_2) + \cdots + \beta_s T(y_s).$$

Como $x_1, x_2, \ldots, x_r \in Ker(T)$ então suas imagens por T são nulas. Logo,

$$y = \beta_1 T(y_1) + \beta_2 T(y_2) + \cdots + \beta_s T(y_s),$$

ou seja, $Im(T) = Span(\mathcal{B})$.

Agora, suponhamos que $\beta_1 T(y_1) + \beta_2 T(y_2) + \cdots + \beta_s T(y_s) = 0$ com $\beta_j \in \mathbb{K}$. Logo, $T(\beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \cdots + \beta_s y_s) = 0$, o que implica que $\beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \cdots + \beta_s y_s \in Ker(T)$. Logo, existem $\alpha_i \in \mathbb{K}$ tais que:

$$\beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \cdots + \beta_s y_s = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_r x_r.$$

Donde,

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_r x_r + (-\beta_1) y_1 + (-\beta_2) y_2 + \cdots + (-\beta_s) y_s = 0.$$

Como $\mathcal{B}_2$ é uma base, em particular linearmente independente, então todos os escalares são nulos. O que prova que $\mathcal{B}$ é linearmente independente.

Finalmente, basta observar que, como $dimKer(T) = r$, $dimIm(T) = s$ e a $dimU = r + s$ segue que $dimU = dimKer(T) + dimIm(T)$. □

Corolário 2.3. *Sejam X e Y espaços vetoriais ambos com dimensão igual a n e suponhamos $T : X \to Y$ uma transformação linear. Então são equivalentes as seguintes afirmações:*
(i) T é sobrejetora;
(ii) T é bijetora;
(iii) T é injetora;
(iv) T transforma uma base de X em uma base de Y (insto é, se $\mathcal{B}$ é uma base de X, então $T(\mathcal{B})$ é base de Y).

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$ Por hipótese $Im(T) = Y$. Levando em conta que $dimX = dimY$ e pelo Teorema do Núcleo e da Imagem vemos que a $dimKer(T) = 0$. Logo, $Ker(T) = \{0\}$ e pelo item b da proprosição 3 temos que T é injetora. Portanto, T é bijetora.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Como T é bijetora segue que T também é injetora.
$(iii) \Rightarrow (iv)$ Seja $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ uma base de X mostremos que

$$T(\mathcal{B}) = \{T(x_1), T(x_2), \ldots, T(x_n)\}$$

é uma base de Y. Note que, pelo fato de T ser injetora $T(\mathcal{B})$ tem a mesma quantidade de vetores de $\mathcal{B}$. Com isso,basta mostrar que $T(\mathcal{B})$ é linearmente independente. De fato, suponhamos que $\lambda_1 T(x_1) + \lambda_2 T(x_2) + \cdots + \lambda_n T(x_n) = 0$ com $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Como T é linear temos

$$T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) = 0.$$

Usando a hipótese de T ser injetora temos

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = 0.$$

Como $\mathcal{B}$ é linearmente independente, resulta em $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.
$(iv) \Rightarrow (i)$ Seja $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ uma base de X e por hipótese

$$T(\mathcal{B}) = \{T(x_1), T(x_2), \ldots, T(x_n)\}$$

é uma base de Y. Tomando $y \in Y$ vemos que y é combinação linear de $T(\mathcal{B})$:

$$y = \lambda_1 T(x_1) + \lambda_2 T(x_2) + \cdots + \lambda_n T(x_n).$$

Como T é linear podemos garantir que

$$y = T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n).$$

Como $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$ é um elemento de X então isso mostra que todo elemento de Y é imagem por T de um elemento de X, ou seja, T é sobrejetora. □

2.3 Isomorfismos

Nesta seção estudaremos as transformações lineares bijetoras e veremos que nessas condições os espaços vetorias dessas transformações podem ser identificados de alguma maneira.

Definição 2.3. *Se $T : X \to Y$ for uma transformação linear bijetora, dizemos que T é um isomorfismo e que os espaços X e Y são isomorfos. Em particular, um isomorfismo $T : X \to X$ em X é dito um automorfismo.*

Proposição 2.2. *Se $T : X \to Y$ é um isomorfismo, então $T^{-1} : X \to Y$ também é um isomorfismo.*

Demonstração. T^{-1} é injetora. De fato, suponha que $y_1, y_2 \in Y$ e $T^{-1}(y_1) = T^{-1}(y_2) = x$. Então $T(x) = y_1$ e $T(x) = y_2$. Logo, $y_1 = y_2$. T^{-1} é sobrejetora. De fato, tome $x \in X$ tal que $y = T(x)$ teremos que

$$T^{-1}(y) = T^{-1}(T(x)) = x.$$

Agora sejam $y_1, y_2 \in Y$ e façamos $T^{-1}(y_1 + y_2) = x$. Como T é sobrejetora, então existem $x_1, x_2 \in X$ de maneira que $T(x_1) = y_1 \Leftrightarrow T^{-1}(y_1) = x_1$ e $T(x_2) = y_2 \Leftrightarrow T^{-1}(y_2) = y_2$. Substituindo esses resultados na igualdade inicial, temos

$$\begin{aligned} x &= T^{-1}(T(x_1) + T(x_2)) \\ &= T^{-1}(T(x_1 + x_2)) \\ &= x_1 + x_2 \\ &= T^{-1}(y_1) + T^{-1}(y_2). \end{aligned}$$

Ou seja,

$$T^{-1}(y_1 + y_2) = T^{-1}(y_1) + T^{-1}(y_2).$$

Por fim, mostremos que $T^{-1}(\lambda y) = \lambda T^{-1}(y)$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ e $\forall y \in Y$. Suponha que $T^{-1}(\lambda y) = x$. Como T é sobrejetora existe $\tilde{x} \in X$ tal que $T(\tilde{x}) = y \Leftrightarrow T^{-1}(y) = \tilde{x}$. Então,

$$\begin{aligned} x &= T^{-1}(\lambda T(\tilde{x})) \\ &= T^{-1}(T(\lambda \tilde{x})) \\ &= \lambda \tilde{x} \\ &= \lambda T^{-1}(y). \end{aligned}$$

Ou seja,

$$T^{-1}(\lambda y) = \lambda T^{-1}(y).$$

Portanto, $T^{-1} : X \to Y$ também é um isomorfismo. $\square$

Seja $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ uma base de X. A vantagem de usar uma base $\mathcal{B}$ de X é que garantimos que cada vetor é escrito de modo único como combinação linear dos elementos dessa base escolhida. Ou seja, $\forall x \in X$, existem únicos escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ de modo que

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n.$$

Deste modo, fixada a ordem da base $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ temos a seguinte relação:

$$T_{\mathcal{B}} : X \to \mathbb{K}^n$$

$$x \mapsto T_{\mathcal{B}}(x) = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

onde $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$. Note que, a unicidade da escrita do vetor x na base $\mathcal{B}$ garante que a relação acima é uma função. O vetor $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ é chamado de vetor co-ordenadas de x na base com a ordem fixada $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Proposição 2.3. *A função $T_{\mathcal{B}} : X \to \mathbb{K}^n$ é uma transformação linear.*

Demonstração. De fato, sejam $x, \tilde{x} \in X$, logo existem únicos escalares $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ e $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n$ tais que

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$$

e

$$\tilde{x} = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n.$$

Então, $x + \tilde{x} = (\lambda_1 + \beta_1)x_1 + (\lambda_2 + \beta_2)x_2 + \cdots + (\lambda_n + \beta_n)x_n$ que aplicando a função $T_{\mathcal{B}}$

teremos

$$T_{\mathcal{B}}(x+\tilde{x}) = (\lambda_1+\beta_1, \lambda_2+\beta_2, \dots, \lambda_n+\beta_n) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)+(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = T_{\mathcal{B}}(x)+T_{\mathcal{B}}(\tilde{x}).$$

Agora, seja $\alpha \in \mathbb{K}$, tem-se $\alpha x = (\alpha\lambda_1)x_1 + (\alpha\lambda_2)x_2 + \cdots + (\alpha\lambda_n)x_n$ e assim,

$$T_{\mathcal{B}}(\alpha x) = (\alpha\lambda_1, \alpha\lambda_2, \dots, \alpha\lambda_n) = \alpha(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \alpha T_{\mathcal{B}}(x).$$

□

A proposição a seguir garante que quando fixamos a ordem de uma base $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, tem-se que X pode ser pensado como o espaço vetorial $\mathbb{K}^n$.

Proposição 2.4. *A transformação linear $T_{\mathcal{B}}$ é um isomorfismo.*

Demonstração. Mostremos que $T_{\mathcal{B}}$ é bijetiva. Como $dim X = dim \mathbb{K}^n = n$, basta mostrar que $T_{\mathcal{B}}$ é injetiva, ou seja, $Ker T_{\mathcal{B}} = \{0\}$. Isso decorre do fato de que $T_{\mathcal{B}}(x) = (0, 0, \dots, 0)$ que significa, pela definição de $T_{\mathcal{B}}$, que $x = 0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$. □

Segue como consequência que, todo espaço vetorial X de dimensão finita é isomorfo a $\mathbb{K}^n$ com $dim X = n$.

Observação 2.2. *O índice $\mathcal{B}$ em $T_{\mathcal{B}}$ é para enfatizar que a transformação linear $T_{\mathcal{B}}$ depende da base $\mathcal{B}$ escolhida para X. Com isso, tem-se que X e $\mathbb{K}^n$ são iguais sob a pespectiva de espaços vetorias.*

Fixemos duas bases ordenadas $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de X e $\mathcal{B}_1 = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ de Y. Para todo $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ e $x \in X$, escrevemos de modo único $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$ e assim escrevemos

$$T(x) = T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) = \lambda_1 T(x_1) + \lambda_2 T(x_2) + \cdots + \lambda_n T(x_n). \tag{2.1}$$

Observação 2.3. *A equação* (2.1) *diz que para saber a imagem de qualquer vetor por uma transformação linear é suficiente saber as imagens dos vetores numa base.*

Para cada $T(x_j) \in Y$, existem únicos $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}$ em $\mathbb{K}$ de modo que

$$T(x_j) = a_{ij}v_1 + a_{2j}v_2 + \cdots + a_{mj}v_m.$$

Devido à unicidade das escolhas dos coeficientes a_{ij}'s para $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$, podemos definir a função $[\,\cdot\,]_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1} : \mathcal{L}(X, Y) \to \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ por

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

chamada de matriz de transformação linear de T com relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}_1$.

Proposição 2.5. $[\,\cdot\,]_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1} : \mathcal{L}(X,Y) \to \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *é uma transformção linear.*

Demonstração. Dadas as transformações lineares $T, F \in \mathcal{L}(X,Y)$ e um escalar $\alpha \in \mathbb{K}$, considere as matrizes $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1} = (a_{ij})$, $[F]_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1} = (b_{ij})$ e $[T+\alpha F]_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1} = (c_{ij})$ em $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ cujas, por definição, j-ésimas colunas são as coordenadas dos vetores $T(x_j)$, $F(x_j)$ e $(T+\alpha F)(x_j)$ na base $\mathcal{B}_1$, respectivamente. Logo,

$$\sum_{i=1}^{m} c_{ij} y_i = (T+\alpha F)(x_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i + \alpha \sum_{i=1}^{m} b_{ij} y_i = \sum_{i=1}^{m} (a_{ij} + \alpha b_{ij}) y_i,$$

que pela unicidade de escrita numa base implica que $c_{ij} = a_{ij} + \alpha b_{ij}$ para todo $1 \leq i \leq n$. Com isso, conclui-se que $[T+\alpha F]_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1} = [T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1} + \alpha [F]_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}$. $\square$

Proposição 2.6. $[\,\cdot\,]_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1} : \mathcal{L}(X,Y) \to \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *é bijetiva. Em particular,* $[\,\cdot\,]_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}$ *é um isomorfismo.*

Demonstração. Mostremos primeiro a injetividade. Então, suponha $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1} = 0$ matriz nula. Em particular, para cada $j = 1, \ldots, n$ tem-se a j-ésima coluna de $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}$ nula e, consequentemente,

$$T(x_j) = 0y_1 + \cdots + 0y_m = 0.$$

Por conseguinte, para todo $x \in X$ com $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ tem-se

$$T(x) = T(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(x_i) = 0.$$

Portanto, $T(x) = 0$, $\forall x \in X$ que implica que o núcleo de $[\,\cdot\,]_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}$ é trivial.

Agora, mostremos a sobrejetividade. Seja $C = (c_{ij}) \in (M)_{m\times n}(\mathbb{K})$. Queremos encontrar $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1} = C$. Então, defina para $x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$,

$$T(x) = \alpha_1 T(x_1) + \cdots + \alpha_n T(x_n),$$

onde $T(x_j) = c_{1j} y_1 + \cdots + c_{mj} y_m$, para $1 \leq j \leq n$. Obviamente, T é linear e $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1} = C$. Isto completa a prova. $\square$

2.4 Espaço Linha e Espaço Coluna

Em uma matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ podemos vizualizá-la por meio de suas linhas e suas colunas:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_m \end{pmatrix}.$$

Os vetores colunas $c_1, \ldots, c_n$ são vetores do $\mathbb{K}^m$. Se $\mathcal{C} = \{c_1, \ldots, c_n\} \subset \mathbb{K}^m$, chamamos de espaço coluna o espaço gerado por C, isto é, $\langle \mathcal{C} \rangle \subset \mathbb{K}^m$. Por outro lado, podemos interpretar as linhas de A como elementos do próprio espaço $\mathbb{K}^n$. Se escrevermos $\mathcal{L} = \{l_1, \ldots, l_m\} \subset \mathbb{K}^n$, chamamos de espaço linha o espaço gerado por $\mathcal{L}$, isto é, $\langle \mathcal{L} \rangle \subset \mathbb{K}^n$.

Teorema 2.4. ***(do Posto de uma Matriz)*** *Dada uma matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, seu espaço linha tem a mesma dimensão de seu espaço coluna.*

Demonstração. Suponhamos que os vetores $b_1 = (b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1n})$, $b_2 = (b_{21}, b_{22}, \ldots, b_{2n})$, $\ldots$, $b_r = (b_{r1}, b_{r2}, \ldots, b_{rn})$ formem uma base do espaço linha da matriz A. Então cada linha l_i de A é combinação linear desses elementos:

$$\begin{aligned} l_1 &= \lambda_{11} b_1 + \ldots + \lambda_{1r} b_r \\ l_2 &= \lambda_{21} b_1 + \ldots + \lambda_{2r} b_r \\ &\vdots \\ l_m &= \lambda_{m1} b_1 + \ldots + \lambda_{mr} b_r. \end{aligned}$$

Como sabemos que

$$\begin{aligned} l_1 &= (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}) \\ l_2 &= (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}) \\ &\vdots \\ l_m &= (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}). \end{aligned}$$

Então podemos igualar a componente i de cada uma dessas equações e obtermos

$$\begin{aligned} a_{1i} &= \lambda_{11} b_{1i} + \ldots + \lambda_{1r} b_{ri} \\ a_{2i} &= \lambda_{21} b_{1i} + \ldots + \lambda_{2r} b_{ri} \\ &\vdots \\ a_{mi} &= \lambda_{m1} b_{1i} + \ldots + \lambda_{mr} b_{ri}. \end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} = b_{1i} \begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{21} \\ \vdots \\ \lambda_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + b_{ri} \begin{pmatrix} \lambda_{1r} \\ \lambda_{2r} \\ \vdots \\ \lambda_{mr} \end{pmatrix}.$$

Logo, as colunas de A são combinações lineares dos r vetores

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{21} \\ \vdots \\ \lambda_{m1} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \lambda_{1r} \\ \lambda_{2r} \\ \vdots \\ \lambda_{mr} \end{pmatrix}.$$

Isso quer dizer que o espaço coluna tem dimensão, no máximo, igual a r, que é a dimensão do espaço linha, ou seja,

$$\dim\langle \mathcal{C} \rangle \leq \dim\langle \mathcal{L} \rangle.$$

Procedendo da mesma maneira com relação a uma base do espaço coluna, mostramos que

$$\dim\langle \mathcal{L} \rangle \leq \dim\langle \mathcal{C} \rangle.$$

Donde concluímos que a dimensão do espaço linha é igual à dimensão do espaço coluna. $\square$

Definição 2.4. *Definimos o posto da matriz A, como sendo $dim\langle \mathcal{L} \rangle = dim\langle \mathcal{C} \rangle$. E denotamos o posto da matriz A por $Rank(A)$.*

Capítulo 3

Espaços com Produto Interno

Este capítulo tem como objetivo abordar as propriedades de espaços vetoriais com produto interno, projeções ortogonais e isometrias.

3.1 Produto Interno

Definição 3.1. *Seja E um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$. Um produto interno em E é uma aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{K}$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

(i) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}, \forall\, x, y \in E$;

(ii) $\langle x + \lambda y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \lambda \langle y, z \rangle, \forall\, x, y \in E$;

(iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$ *e* $\langle x, x \rangle = 0$ *se, e somente se,* $x = 0$.

Um espaço E com produto interno é euclidiano se tiver dimensão finita.

Exemplo 3.1. *Para o espaço vetorial $E = \mathbb{K}^n$, definimos*

$$\langle (x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \rangle = x_1 \overline{y}_1 + \cdots + x_n \overline{y}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i,$$

tal produto interno é chamado de produto canônico (ou produto escalar).

Exemplo 3.2. *Considere o espaço vetorial $V = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ das funções contínuas de $[a, b]$ em $\mathbb{K}$. As regras de integração garantem que*

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt$$

é um produto interno.

De fato, temos que $f = Re(f) + iIm(f)$. Para mostrar que define um produto interno verificamos se vale as propriedades de produto interno:

(i) $\langle f(t), g(t)\rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt = \overline{\overline{\int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt}} = \overline{\int_a^b \overline{f(t)\overline{g(t)}}dt} = \overline{\int_a^b \overline{f(t)}g(t)dt} = \overline{\langle g(t), f(t)\rangle}$;

(ii) $\langle f(t) + \lambda g(t), h(t)\rangle = \int_a^b (f(t) + \lambda g(t))\overline{h(t)}dt = \int_a^b f(t)\overline{h(t)}dt + \lambda \int_a^b \overline{h(t)}g(t)dt$
$= \langle f(t), h(t)\rangle + \lambda\langle g(t), h(t)\rangle$;

(iii) $\langle f, f\rangle = \int_a^b f(t)\overline{f(t)}dt = \int_a^b |f(t)|^2 dt \geq 0$.

Tal produto interno é chamado de produto interno canônico em $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$.

Definição 3.2. *Sejam x, y vetores do espaço com produto interno E. Esses vetores são ortogonais se $\langle x, y\rangle = 0$. Denotamos por $x \perp y$.*

3.2 Norma

Definição 3.3. *Seja E um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$. Uma norma em E é uma aplicação $||\cdot|| : E \to [0,\infty)$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

(i) $||x|| > 0$ *se* $x \neq 0$;

(ii) $||\lambda x|| = |\lambda|\ ||x||$ *para* $\lambda \in \mathbb{K}$;

(iii) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Considerado com uma norma $||\cdot||$, dizemos que E é um espaço normado.

O número $||x||$ pode ser interpretado, geometricamente, como o comprimento do vetor x. Se $||x|| = 1$, dizemos que o vetor x é unitário.

Seja E um espaço com produto interno. Consideremos $||x|| := \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$ (abuso de notação).

Exemplo 3.3. *Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ com o produto interno canônico (ver exemplo 3.1). Para $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ dados por $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ em $\mathbb{R}^3$, a norma*

$$||v_1 - v_2|| = ((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2)^{\frac{1}{2}}$$

indica a distância entre os pontos v_1 e v_2 do $\mathbb{R}^3$. Em particular, se $v_2 = 0$, $||v_1||$ representa a distância de v_1 à origem.

Teorema 3.1. *Seja E um espaço com produto interno e $||x|| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$. Então se $x \perp y$, temos*

$$||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2.$$

Demonstração. Basta desenvolver $||x + y||^2$:
$||x + y||^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle = ||x||^2 + ||y||^2$,
pois, $x \perp y$. □

Proposição 3.1. *Seja E um espaço com produto interno, então para todos $x, y \in E$ vale:*

$$|\langle x, y\rangle| \leq ||x||\ ||y||.$$

Demonstração. No caso de $x = 0$, então $\langle x, y\rangle = 0$ e $||x||\ ||y|| = 0$ e logo teremos uma igualdade. Suponhamos que $x \neq 0$. Para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ vale que $||\lambda x + y||^2 \geq 0$. Então teremos,

$$0 \leq ||\lambda x + y||^2 = \langle \lambda x + y, \lambda x + y\rangle = \langle \lambda x, \lambda x\rangle + \langle \lambda x, y\rangle + \langle y, \lambda x\rangle + \langle y, y\rangle$$

$$= \lambda^2||x||^2 + 2|\lambda|\langle x, y\rangle + ||y||^2.$$

Essa última igualdade se trata de um trinômio do segundo grau em $|\lambda|$, pois $||x||^2 \neq 0$ que é sempre positivo. Desse modo, seu discriminate deve ser negativo ou nulo:

$$4\langle x, y\rangle^2 - 4||x||^2\ ||y||^2 \leq 0$$

Dividindo ambos os lados da desigualdade por 4 teremos

$$\langle x, y\rangle^2 - ||x||^2||y||^2 \leq 0 \Longrightarrow |\langle x, y\rangle| \leq ||x||\ ||y||.$$

□

3.3 Ortogonalidade

Definição 3.4. *Seja E um espaço com produto interno. Um subconjunto $X \subset E$ é ortogonal, se $x \perp y$ para quaisquer $x, y \in X$, com $x \neq y$. Se, além disso, todos os seus vetores forem unitários, isto é, $||x|| = 1$, então X é ortonormal.*

Observação 3.1. *A notação de produto interno $\langle x_i, x_j\rangle$ poderá ser substitúida por δ_{ij} (símbolo de Kronecker). Cujo significado é $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$, com $i, j = 1, \ldots, n$.*

Proposição 3.2. *Em um espaço com produto interno E, todo conjunto ortogonal $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ com vetores não nulos é linearmente independente.*

Demonstração. Suponhamos que

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_m = 0,$$

para escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}$. Então,
$0 = \langle 0, x_i \rangle = \langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_m, x_i \rangle = \alpha_1 \langle x_1, x_i \rangle + \cdots + \alpha_m \langle x_m, x_i \rangle = \alpha_i \langle x_i, x_i \rangle$.
Como $\langle x_i, x_i \rangle = ||x_i||^2 \neq 0$, temos $\alpha_i = 0$. □

Proposição 3.3. *Seja $S = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ um subconjunto ortonormal do espaço euclidiano E. Então, para todo $x \in E$, o vetor $z = x - \langle x, y_1 \rangle y_1 - \cdots - \langle x, y_m \rangle y_m$ é ortogonal a todo vetor do supespaço gerado pelos vetores de S.*

Demonstração. Note que se z for ortogonal aos vetores de S, então será ortogonal a toda combinação linear de S. De fato, seja $w = \lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_m y_m$ uma dessas combinações lineares. Então,

$$\langle z, w \rangle = \langle z, \lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_m y_m \rangle = \lambda_1 \langle z, y_1 \rangle + \cdots + \lambda_m \langle z, y_m \rangle = 0.$$

Provemos que cada z é ortogonal a cada y_i:

$$\langle z, y_1 \rangle = \langle x - \langle x, y_1 \rangle y_1 - \cdots - \langle x, y_m \rangle y_m, y_1 \rangle$$

$$= \langle x, y_1 \rangle - \langle x, y_1 \rangle \langle y_1, y_1 \rangle - \cdots - \langle x, y_m \rangle \langle y_m, y_m \rangle$$

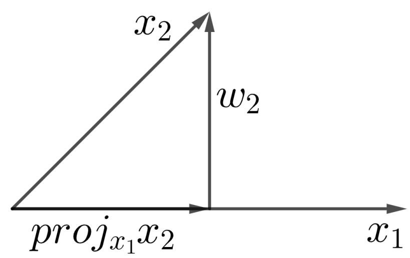
$$= \langle x, y_1 \rangle - \langle x, y_1 \rangle = 0.$$

Pois, $\langle y_1, y_1 \rangle = 1$ e $\langle y_i, y_1 \rangle = 0$ para $i \neq 1$. Analogamente, temos $\langle x, y_2 \rangle = \cdots = \langle x, y_m \rangle = 0$. □

Teorema 3.2. ***(Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt)*** *Dado um espaço euclidiano E e qualquer uma de suas bases $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, a partir dessa base é possível obter uma base ortogonal de E.*

Demonstração. Suponhamos que os vetores $x_1, x_2, \dots, x_n$ não são ortogonais. Considere, $w_1 = x_1$ e w_2 como sendo a componente de x_2 em w_1, ou seja, $w_2 = x_2 - \alpha w_1$.

Figura 3.1 - O vetor w_2 como componente de x_2 ortogonal a x_1



Fonte: Autoria própria

E determinamos o valor de α, de modo que o vetor w_2 seja ortogonal ao vetor w_1:

$$0 = \langle w_2, w_1 \rangle = \langle x_2 - \alpha w_1, w_1 \rangle = \langle x_2, w_1 \rangle - \alpha \langle w_1, w_1 \rangle$$

Assim definimos,

$$\alpha = \frac{\langle x_2, w_1 \rangle}{||w_1||^2}$$

e obtemos

$$w_2 = x_2 - \frac{\langle x_2, w_1 \rangle}{||w_1||^2} w_1.$$

Assim, os vetores w_1 e w_2 são ortogonais.

Analogamente, obtemos w_3 como sendo a componente de x_3 ao plano gerado por x_1 e x_2, ou seja, $w_3 = x_3 - \alpha_2 w_2 - \alpha_1 w_1$. Logo, determinamos os valores de α_2 e α_1 de maneira que o vetor w_3 seja ortogonal aos vetores w_1 e w_2:

$$\begin{cases} \langle x_3 - \alpha_2 w_2 - \alpha_{w1}, w_1 \rangle = 0 \\ \langle x_3 - \alpha_2 w_2 - \alpha_{w1}, w_2 \rangle = 0. \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \langle x_3, w_1 \rangle - \alpha_2 \langle w_2, w_1 \rangle - \alpha_1 \langle w_1, w_1 \rangle = 0 \\ \langle x_3, w_2 \rangle - \alpha_2 \langle w_2, w_2 \rangle - \alpha_1 \langle w_1, w_2 \rangle = 0. \end{cases}$$

Como $w_1 \perp w_2$, vem que

$$\begin{cases} \langle x_3, w_1 \rangle - \alpha_1 \langle w_1, w_1 \rangle = 0 \\ \langle x_3, w_2 \rangle - \alpha_2 \langle w_2, w_2 \rangle = 0. \end{cases}$$

Daí,

$$\alpha_1 = \frac{\langle x_3, w_1 \rangle}{||w_1||^2}, \alpha_2 = \frac{\langle x_3, w_2 \rangle}{||w_2||^2}.$$

Logo,

$$w_3 = x_3 - \frac{\langle x_3, w_1 \rangle}{||w_1||^2} w_1 - \frac{\langle x_3, w_2 \rangle}{||w_2||^2} w_2.$$

Assim, os vetores w_1, w_2 e w_3 são ortogonais.

Repetindo-se esse processo até obtermos $(n-1)$ vetores $w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}$ que são ortogonais e considerando

$$w_n = x_n - \beta_{n-1} w_{n-1} - \cdots - \beta_2 w_2 - \beta_1 w_1.$$

Sendo $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$ tais que o referido vetor w_n seja ortogonal aos vetores $w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}$. Ou seja,

$$\begin{cases} \langle x_n - \beta_{n-1} w_{n-1} - \cdots - \beta_2 w_2 - \beta_1 w_1, w_1 \rangle = 0 \\ \langle x_n - \beta_{n-1} w_{n-1} - \cdots - \beta_2 w_2 - \beta_1 w_1, w_2 \rangle = 0 \\ \vdots \\ \langle x_n - \beta_{n-1} w_{n-1} - \cdots - \beta_2 w_2 - \beta_1 w_1, w_{n-1} \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \langle x_n, w_1 \rangle - \beta_{n-1} \langle w_{n-1}, w_1 \rangle - \cdots - \beta_2 \langle w_2, w_1 \rangle - \beta_1 \langle w_1, w_1 \rangle = 0 \\ \langle x_n, w_2 \rangle - \beta_{n-1} \langle w_{n-1}, w_2 \rangle - \cdots - \beta_2 \langle w_2, w_2 \rangle - \beta_1 \langle w_1, w_2 \rangle = 0 \\ \vdots \\ \langle x_n, w_{n-1} \rangle - \beta_{n-1} \langle w_{n-1}, w_{n-1} \rangle - \cdots - \beta_2 \langle w_2, w_{n-1} \rangle - \beta_1 \langle w_1, w_{n-1} \rangle = 0 \end{cases}$$

Como $w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}$ são ortogonais, teremos:

$$\beta_1 = \frac{\langle x_n, w_1 \rangle}{||w_1||^2}, \beta_2 = \frac{\langle x_n, w_2 \rangle}{||w_2||^2}, \ldots, \beta_{n-1} = \frac{\langle x_n, w_{n-1} \rangle}{||w_{n-1}||^2}.$$

Assim,

$$w_n = x_n - \frac{\langle x_n, w_{n-1} \rangle}{||w_{n-1}||^2} w_{n-1} - \cdots - \frac{\langle x_n, w_1 \rangle}{||w_1||^2} w_1.$$

$$w_n = x_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle x_n, w_i \rangle}{||w_i||^2} w_i.$$

Desse modo, a partir de $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ construimos uma base ortogonal $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$, que, de fato, é base, pois pela Proposição 3.2 é linearmente independente. $\square$

Corolário 3.3. *Todo espaço vetorial euclidiano, não nulo, de dimensão finita, admite uma base ortonormal.*

Demonstração. Seja E um espaço vetorial euclidiano de dimensão $n \geq 1$ e seja $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ uma base para E. Então, via Teorema 3.2, existe um conjunto ortogonal $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ que gera E e como todo conjunto ortogonal também é linearmente independente, então

$\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ é uma base ortogonal para E. Por fim, basta dividir cada vetor por sua norma e obtemos, imediatamente, uma base ortonormal para E. $\square$

Exemplo 3.4. *Obtenha uma base ortonormal a partir da base $\{(0,1,2),(0,1,1),(1,0,0)\}$ do $\mathbb{R}^3$, considerando o produto interno usual neste espaço.*

Solução: Escolha $w_1 = (0,1,2)$, e usando o processo de ortogonalização de Gram-Schimdt, teremos:

$$w_2 = (0,1,1) - \frac{\langle (0,1,1),(0,1,2)\rangle}{||(0,1,2)||^2}(0,1,2) = \left(0, \frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right)$$

e

$$w_3 = (1,0,0) - \frac{\langle (1,0,0),(0,1,2)\rangle}{||(0,1,2)||^2}(0,1,2) - \frac{\langle (1,0,0),(0,\frac{2}{5},-\frac{1}{5})\rangle}{||(0,\frac{2}{5},-\frac{1}{5})||^2}\left(0, \frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right) = (1,0,0)$$

Onde $w_1 \perp w_2$, $w_1 \perp w_3$ e $w_2 \perp w_3$. Deste modo obtivemos a base $\left\{(0,1,2),(0,\frac{2}{5},-\frac{1}{5}),(1,0,0)\right\}$ que é ortogonal. Agora basta dividir cada vetor dessa base por sua norma. Daí,

$$\left\{\left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right), (1,0,0)\right\},$$

onde obtivemos uma base ortonormal do $\mathbb{R}^3$, pois cada vetor desse é unitário.

Definição 3.5. *Seja E um espaço vetorial euclidiano e seja Y um subespaço vetorial de E. Chamamos de ortogonal a Y ao conjunto $Y^\perp = \{x \in E | \langle x, y\rangle = 0, \forall y \in Y\}$.*

Observação 3.2. *Seja Y um subconjunto de um espaço vetorial euclididano E.*

(a) *O subconjunto $Y^\perp$ é um subespaço vetorial de E. De fato,*
   - $0 \in Y^\perp$, *pois* $\langle 0, x\rangle = 0$, $\forall y \in Y$.
   - *Se* $x_1, x_2 \in Y^\perp$ *então* $\langle x_1, y\rangle = \langle x_2, y\rangle = 0$, $\forall y \in Y$. *Portanto, temos* $\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle = 0 + 0 = 0$, $\forall y \in Y$ *então* $x_1 + x_2 \in Y^\perp$.
   - *Se* $\lambda \in \mathbb{K}$ *e* $y \in Y^\perp$, *então* $\lambda y \in Y^\perp$. *De fato,* $\langle x, y\rangle = 0$, $\forall y \in Y$. *Então,* $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle = \lambda 0 = 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$.

(b) *Se* $Y = \{0\}$, *então* $Y^\perp = E$.

Proposição 3.4. *Seja Y um subespaço vetorial do espaço euclidiano E de dimensão finita. Então $E = Y \oplus Y^\perp$.*

Demonstração. Seja $w \in Y \cap Y^\perp$. Como $w \in Y^\perp$ então w é ortogonal a todo vetor de Y. Em particular, $\langle w, w\rangle = 0$, logo $w = 0$. Segue que $\in Y \cap Y^\perp = \{0\}$.

Agora, seja $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ uma base ortonormal de Y e $x \in E$. Defina $z = x - y$ e $y \in Y$ como sendo $\langle x, y_1\rangle y_1 + \cdots + \langle x, y_m\rangle y_m \in Y$. Devido a Proposição 3.3, o vetor $z = x - \langle x, y_1\rangle y_1 - \cdots - \langle x, y_m\rangle y_m$ é ortogonal a todo elemento de Y, ou seja, $z \in Y^{\perp}$. Logo, $x = y + z \in Y \oplus Y^{\perp}$.

□

3.4 Isometrias

Nesta seção será introduzido um certo tipo de operador linear cuja definição está ligada ao conceito de distância.

Definição 3.6. *Seja E um espaço euclidiano de dimensão finita. Um operador linear $T : E \to E$ com a propriedade:*

$$||T(x)|| = ||x||, \forall x \in E,$$

denomina-se isometria sobre E ou operador ortogonal sobre E.

Proposição 3.5. *Toda isometria $T : E \to E$ é um isomorfismo.*

Demonstração. Basta provar que T é injetora. De fato, dado $x \in E$,

$$T(x) = 0 \iff ||T(x)|| = 0 \iff ||x|| = 0 \iff x = 0.$$

Logo, $Ker(T) = \{0\}$. □

Proposição 3.6. *Seja T um operador linear sobre um espaço euclidiano E. Então são equivalentes as seguintes afirmações:*
(I) T é isometria;
(II) T transforma as bases ortonormais de E em bases ortonormais de E;
(III) $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.

Demonstração. (I) $\Longrightarrow$ (II) Seja $\mathcal{B} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ uma base ortonormal de E. Mostremos que $T(\mathcal{B}) = \{T(w_1), \ldots, T(w_n)\}$ também é uma base ortonormal de E. Como T é injetora, via Proposição 11, $T(\mathcal{B})$ e $\mathcal{B}$ têm o mesmo número de vetores. Então, basta mostrar que $T(\mathcal{B})$ é um conjunto ortonormal. Considere as identidades

$$||w_i + w_j||^2 = ||w_i||^2 + ||w_j||^2 + 2\mathfrak{Re}\langle w_i, w_j\rangle$$

e

$$||T(w_i) + T(w_j)||^2 = ||T(w_i)||^2 + ||T(w_j)||^2 + 2\mathfrak{Re}\langle T(w_i), T(w_j)\rangle,$$

como T é isometria, os primeiros membros dessas igualdades são iguais entre si. Daí,

$$||w_i||^2 + ||w_j||^2 + 2\mathfrak{Re}\langle w_i, w_j\rangle = ||T(w_i)||^2 + ||T(w_j)||^2 + 2\mathfrak{Re}\langle T(w_i), T(w_j)\rangle,$$

além disso, $||T(w_k)|| = ||w_k||$, com $k = 1, \ldots, n$. Logo,

$$\langle T(w_i), T(w_j)\rangle = \langle w_i, w_j\rangle = \delta_{ij}.$$

Donde, segue $T(\mathcal{B})$ ser um conjunto ortonormal.
(II) $\Longrightarrow$ (III) Seja $\mathcal{B} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ uma base ortonormal de E. Então dados $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i$ e $y = \sum_{j=1}^n \beta_j w_j$ em E, tem-se

$$\begin{aligned}\langle T(x), T(y)\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i, \sum_{j=1}^n \beta_j w_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \overline{\beta_j} \langle T(w_i), T(w_j)\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \overline{\beta_j} \delta_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \overline{\beta_i}.\end{aligned}$$

Analogamente, obtemos que

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overline{\beta_i}.$$

Logo, $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ para todo $x, y \in E$.
(III)$\Longrightarrow$ (I) Seja $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ para todo $x, y \in E$. Fazendo $x = y$, temos

$$\langle T(x), T(x)\rangle = \langle x, x\rangle$$

como $||x|| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$, obtemos

$$||T(x)||^2 = ||x||^2 \Longrightarrow ||T(x)|| = ||x||.$$

O que define uma isometria. $\square$

Proposição 3.7. *Seja T um operador linear de um espaço euclidiano de dimensão finita. Então T é uma isometria se, e somente se, a matriz de T em relação a uma base ortonormal* *é uma matriz ortogonal (sua inversa é igual a sua transposta).*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Seja $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ uma base ortonormal de E e indiquemos por A a matriz de T em relação a essa base, ou seja, $A = (T)_{\mathcal{B}} = (a_{ij})$. Então,

$$T(w_j) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} w_i \text{ e } T(w_k) = \sum_{r=1}^{n} \alpha_{rk} w_r \text{ com } k, j = 1, \ldots, n.$$

Daí,

$$\langle T(w_j), T(w_k)\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} w_i, \sum_{r=1}^{n} \alpha_{rk} w_r \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} \alpha_{ij}\overline{\alpha_{rk}}\langle w_i, w_r\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\overline{\alpha_{ik}}.$$

Pois, $\langle w_i, w_r\rangle = \delta_{ij}$. Mas também $T(\mathcal{B})$ é uma base ortonormal, logo $\langle T(w_j), T(w_k)\rangle = \delta_{ij}$. Então,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\overline{\alpha_{ik}} = \delta_{ij}.$$

O que conclui que $A^t A = I_n$.
($\Longleftarrow$) Suponha que $A^t A = I_n$, ou seja, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\overline{\alpha_{ik}} = \delta_{ij}$. Como,

$$\langle T(w_j), T(w_k)\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} w_i, \sum_{r=1}^{n} \alpha_{rk} w_r \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} \alpha_{ij}\overline{\alpha_{rk}}\langle w_i, w_r\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\overline{\alpha_{ik}}.$$

Segue que $\langle T(w_j), T(w_k)\rangle = \delta_{ij}$. Portanto, $\langle T(w_j), T(w_k)\rangle = \langle w_i, w_r\rangle$. $\square$

Capítulo 4

Determinantes

Este capítulo tem como objetivo apresentar a teoria de determinantes e suas propriedades. Nosso estudo será baseado principalmente em [4].

4.1 Determinantes de Matrizes 2×2

Consideremos a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix}$$

com entradas no corpo $\mathbb{K}$ e colunas c_1, c_2. Denota-se por $detA$ o determinante da matriz A, definido por $detA = ad - bc$.

A seguir são apresentadas algumas propriedades:

(i) Se duas colunas forem iguais, então o determinate da matriz A é igual a zero:

$$det \begin{pmatrix} a & a \\ c & c \end{pmatrix} = 0;$$

(ii) O determinante é uma aplicação linear em cada uma de suas colunas. Mais precisamente,

$$det \begin{pmatrix} c_1 + \alpha c_1' & c_2 \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} a + \alpha a' & b \\ c + \alpha c' & d \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \alpha det \begin{pmatrix} a' & b \\ c' & d \end{pmatrix}$$
$$= det \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix} + \alpha det \begin{pmatrix} c_1' & c_2 \end{pmatrix}$$

e

$$det\begin{pmatrix}c_1 & c_2+\alpha c_2'\end{pmatrix} = det\begin{pmatrix}a & b+\alpha b' \\ c & d+\alpha d'\end{pmatrix} = det\begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix} + \alpha det\begin{pmatrix}a & b' \\ c & d'\end{pmatrix}$$

$$= det\begin{pmatrix}c_1 & c_2\end{pmatrix} + \alpha det\begin{pmatrix}c_1 & c_2'\end{pmatrix};$$

(iii) O determinante da matriz indentidade (2×2) é igual a 1;

(iv) Se trocarmos as colunas de A, o determinante muda de sinal

$$det\begin{pmatrix}c_2 & c_1\end{pmatrix} = det\begin{pmatrix}b & a \\ d & c\end{pmatrix} = -det\begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix} = det\begin{pmatrix}c_1 & c_2\end{pmatrix};$$

(v) Se somarmos a uma coluna um múltiplo da outra, então o determinante de A não se altera:

$$det\begin{pmatrix}a+\lambda b & b \\ c+\lambda d & d\end{pmatrix} = det\begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix}$$

e

$$det\begin{pmatrix}a & b+\mu a \\ c & d+\mu c\end{pmatrix} = det\begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix};$$

(vi) Se $c_1 = \alpha c_2$, então $detA = 0$:

$$det\begin{pmatrix}\alpha c & c \\ \alpha d & d\end{pmatrix} = \alpha det\begin{pmatrix}c & c \\ d & d\end{pmatrix} = 0;$$

(vii) $detA$=$detA^t$:

$$det\begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix} = det\begin{pmatrix}a & c \\ b & d\end{pmatrix}.$$

4.2 Função Determinante

Será definida uma função determinante a partir das propriedades satisfeitas pelo determinante de uma matriz 2×2.

Definição 4.1. *Sejam $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{K}^n$. Uma função determinante $D(c_1, \ldots, c_n)$ é uma função*

$$\begin{aligned} D : \mathbb{K}^n \times \cdots \times \mathbb{K}^n &\to \mathbb{K} \\ (c_1, \ldots, c_n) &\mapsto D(c_1, \ldots, c_n) \end{aligned}$$

satisfazendo as seguintes propriedades:
(d_1) *D é uma função alternada, isto é, se $c_i = c_j$ para $i \neq j$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, então $D(c_1, \ldots, c_n) = 0$;*
(d_2) *$D(c_1, \ldots, c_n)$ é uma função n-linear, isto é, D é uma aplicação linear em cada coordenada, as outras sendo mantidas fixas; mais precisamente, se todos os c_j com $j \neq i$ estiverem fixos,*

$$D(c_1, \ldots, \lambda c_i + c_i', \ldots, c_n) = \lambda D(c_1, \ldots, c_i, \ldots, c_n) + D(c_1, \ldots, c_i', \ldots, c_n);$$

(d_3) *$D(e_1, \ldots, e_n) = 1$, em que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é a base canônica do $\mathbb{K}^n$.*

Lema 4.1. *Seja D uma função satisfazendo a propriedade (d_2). Então, são equivalentes as afirmações:*
(d_1) *D é uma função alternada;*
(d_1') *Se os vetores consecutivos c_i e c_{i+1} forem iguais, então $D(c_1, \ldots, c_i, c_{i+1}, \ldots, c_n) = 0$.*

Demonstração. $(d_1') \Rightarrow (d_1)$ Faremos indução sobre as posições com colunas iguais. Ou seja, para $j = i + k$, faremos indução sobre $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$. Se $k = 1$ temos a própria afirmativa (d_1'). Suponhamos o resultado válido para k, ou seja, sempre que $c_i = c_{i+k}$ então $D(c_1, \ldots, c_i, \ldots, c_{i+k}, \ldots, c_n) = 0$. Para simplificar a notação escreveremos $D(c_i, \ldots, c_{i+k}, c_{i+k+1})$ ao invés de $D(c_1, \ldots, c_i, \ldots, c_{i+k}, c_{i+k+1}, \ldots, c_n)$.

Queremos mostrar que $D(c_i, \ldots, c_{i+k}, c_{i+k+1}) = 0$. Suponhamos $c_i = c_{i+k+1}$. Note que, por (d_2) vale a igualdade

$$\begin{aligned} D(c_i, \ldots, c_{i+k}, c_{i+k+1}) &= D(c_i, \ldots, c_{i+k}, c_{i+k} + c_{i+k+1}) \\ &= D(c_i, \ldots, c_{i+k}, c_{i+k+1}) + D(c_i, \ldots, c_{i+k}, c_{i+k}), \end{aligned}$$

onde que por hipótese temos que $D(c_i, \ldots, c_{i+k}, c_{i+k}) = 0$. Daí, teremos que

$$\begin{aligned} D(c_i, \ldots, c_{i+k}, c_{i+k+1}) &= D(c_i, \ldots, c_{i+k}, c_{i+k} + c_{i+k+1}) \\ &= D(c_i, \ldots, c_{i+k}, c_{i+k} + c_{i+k+1}) + D(c_i, \ldots, c_{i+k+1}, , c_{i+k} + c_{i+k+1}) \\ &= D(c_i, \ldots, c_{i+k} + c_{i+k+1}, c_{i+k} + c_{i+k+1}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

$(d_1) \Rightarrow (d_1')$ É imediata. $\square$

Não é óbvia a existência de uma função satisfazendo as propriedades (d_1) e (d_2). Entretanto, outras propriedades de uma tal função seguem-se imediatamente da definição:

Lema 4.2. *Uma função que satisfaz as propriedades* (d_1) *e* (d_2) *também satisfaz as propriedades*

(d_4) *D é uma função anti-simétrica, isto é, se trocarmos c_i por c_j, então o valor de D é multiplicado por -1. Sendo mais preciso,*

$$D(c_1, \ldots, c_i, \ldots, c_j, \ldots, c_n) = -D(c_1, \ldots, c_j, \ldots, c_i, \ldots, c_n).$$

(d_5) *Se somarmos a um vetor c_i um múltiplo do vetor c_j, o valor de D não se altera;*

(d_6) *Se $c_1, \ldots, c_n$ forem linearmente dependentes, então $D(c_1, \ldots, c_n) = 0$.*

Demonstração. Para mostrar (d_4) denotaremos $D(c_1, \ldots, c_i, \ldots, c_j, \ldots, c_n)$ apenas por $D(c_i, c_j)$, já que trocaremos apenas as colunas c_i e c_j e outros vetores permanecerão fixos. Temos que,

$$\begin{aligned} 0 = D(c_i + c_j, c_i + c_j) &= D(c_i, c_i + c_j) + D(c_j, c_i + c_j) \\ &= D(c_i, c_i) + D(c_i, c_j) + D(c_j, c_i) + D(c_j, c_j) \\ &= 0 + D(c_i, c_j) + D(c_j, c_i) + 0 \\ &= D(c_i, c_j) + D(c_j, c_i). \end{aligned}$$

Logo, $D(c_i, c_j) = -D(c_j, c_i)$.

Para provar (d_5) note que as propriedades (d_1) e (d_2) implicam

$$\begin{aligned} D(c_i + \lambda c_j, c_j) &= D(c_i, c_j) + \lambda D(c_j, c_j) \\ &= D(c_i, c_j) + 0 \\ &= D(c_i, c_j). \end{aligned}$$

Para provar (d_6) suponhamos que $c_1, \ldots, c_n$ sejam linearmente dependentes. Então um desses elementos pode ser escrito como combinação linear dos restantes. Suponha, sem perda de generalidade, que $c_1 = \lambda_2 c_2 + \ldots + \lambda_n c_n$. A propriedade (d_2) garante que

$$\begin{aligned} D(c_1, \ldots, c_n) &= D(\lambda_2 c_2 + \ldots + \lambda_n c_n, c_2, \ldots, c_n) \\ &= \lambda_2 D(c_2, c_2, \ldots, c_n) + \ldots + \lambda_n D(c_n, c_2, \ldots, c_n). \end{aligned}$$

Por (d_1), todos os termos na última linha são nulos.

$\square$

4.3 Existência de uma Função Determinante

Mostraremos que existe alguma função satisfazendo as propriedades da função determinante.

Definição 4.2. *Seja A uma matriz $n \times n$. Para $i, j \in \{1, \dots, n\}$, A_{ij} denota a matriz obtida ao se eliminar a i-ésima linha e a j-ésima coluna de A.*

Exemplo 4.1. *Seja*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \\ 17 & 19 & 23 \end{pmatrix}$$

Então

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 11 & 13 \\ 19 & 23 \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 7 & 13 \\ 17 & 23 \end{pmatrix}, \quad A_{13} = \begin{pmatrix} 7 & 11 \\ 17 & 19 \end{pmatrix}$$

e assim por diante.

Teorema 4.3. *Existe uma função determinante.*

Demonstração. Se A for uma matriz $n \times n$, faremos indução em n. Se $n = 2$, então todas propriedades da função já foram verificadas anteriormente. Suponhamos a existência de uma função determinante D para matrizes $(n-1) \times (n-1)$ e consideramos uma matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{n \times n}$. Definimos

$$D_1(A) = (-1)^{1+1} a_{11} D(A_{11}) + \cdots + (-1)^{1+j} a_{1j} D(A_{1j}) + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} D(A_{1n}). \tag{4.1}$$

Mostremos que $D_1(A)$ satisfaz as propriedades (d_1') a (d_3). Como a propriedade (d_1') é equivalente a propriedade (d_1), $D_1(A)$ é uma função determinante. De fato,

(d_1') Suponhamos que duas colunas c_i e c_{i+1} de A sejam iguais. Em particular, duas colunas de A_{1k} são iguais, se $k \notin \{i, i+1\}$. Assim, apenas os termos

$$(-1)^{1+i} a_{1i} D(A_{1i}) \quad e \quad (-1)^{1+(i+1)} a_{1(i+1)} D(A_{1(i+1)})$$

podem ser não nulos em (4.1). Contudo, como as colunas c_i e c_{i+1} são iguais, também são iguais as matrizes A_{1i} e $A_{1(i+1)}$. Do mesmo modo para a_{1i} e $a_{1(i+1)}$. Disso decorre que (4.1) é igual a zero.

(d_2) Suponhamos que a j-ésima coluna de A seja $c_j + \lambda c'_j$, isto é, que para j fixo, a sua entrada ij seja $a_{ij} + \lambda a'_{ij}$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Se $k \neq j$, o termo a_{1k} não depende de j, enquanto A_{1k} depende linearmente da coluna j de A. Assim, $(-1)^{1+k} a_{1k} A_{1k}$ depende linearmente da j-ésima coluna de A para todo $k \neq j$. Por outro lado, se $k = j$, então $a_{1j} + \lambda a'_{1j}$ depende linearmente da coluna j, enquanto A_{ij} não depende da coluna j-ésima coluna de A. Assim, todos os termos de (4.1) dependem linearmente da coluna j da matriz A.

(d_3) Se A for a matriz identidade I, então apenas a parcela $(-1)^{1+1} a_{11} D(I_{11})$ não é nula em (4.1). Mas, nesse caso, I_{11} é a matriz identidade $(n-1) \times (n-1)$ e portanto, $D(I_{11}) = 1$. Isso mostra que $D_1(I) = 1$. □

Definição 4.3. *Seja A uma matriz $n \times n$. Sendo D uma função determinante definida para matrizes $(n-1) \times (n-1)$, definimos indutivamente*

$$D_i(A) = (-1)^{i+1} a_{i1} D(A_{i1}) + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} D(A_{in}).$$

Esta igualdade é a expansão do determinante de A segundo os cofatores da i-ésima linha de A.

Corolário 4.4. *A função D_i, definida anteriormente, é uma função determinante.*

Demonstração. Basta verificar que pode ser repetido todo o procedimento utilizado na demonstração de que $D_1(A)$ é uma função determinante. □

Mostramos que existem diversas funções determinantes. Basta mostrar que todas elas são iguais, isto é, existe uma única função determinante.

4.4 Unicidade da Função Determinante

Definição 4.4. *Seja $\mathcal{I} = \{1, 2, \ldots, n\}$ ou, mais geralmente, um conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$ com n elementos distintos. Uma permutação é uma aplicação sobrejetora $p : \mathcal{I} \to \mathcal{I}$.*

Existem várias notações para uma permutação $p : \mathcal{I} \to \mathcal{I}$. Escreveremos p_i e representaremos uma permutação p por

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

ou por uma matriz $A = (a_{ij})$, com $a_{ij} = 0$ se $i \neq p_j$ e $a_{ij} = 1$, se $i = p_j$, chamada representação matricial da permutação p ou matriz da permutação p.

Exemplo 4.2. *Considere a permutação*

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

A permutação p é representada pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que cada coluna da matriz A corresponde a um vetor distinto da base canônica do $\mathbb{K}^n$.

É claro que uma permutação é necessariamente injetora. Permutações podem ser compostas e têm inversa. Denotamos por pq a composta das permutações p e q.

Proposição 4.1. *A composta de duas permutações do conjunto $\{1, \ldots, n\}$ equivale à multiplicação das matrizes de suas permutações.*

Demonstração. Consideremos o espaço $\mathbb{K}^n$ e sua base canônica. Podemos identificar o conjunto $\{1, \ldots, n\}$ com $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Uma permutação do conjunto $\varepsilon = \{e_1, \ldots, e_n\}$ induz uma aplicação linear $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ definida por $T(e_j) = e_{p_j}$ e a matriz que representa p é justamente a matriz T_ε. Essa aplicação linear é um isomorfismo, pois leva base em base. A composição de permutações equivale à composta dessas aplicações lineares. Mas, já vimos que a composta de aplicações lineares equivale à multiplicação das matrizes que as representam. Isso conclui a demonstração. □

Definição 4.5. *Uma transposição é uma permutação $\tau : \mathcal{I} \to \mathcal{I}$ tal que existem dois elementos $i, j \in \mathcal{I}$ com*

$$\tau_i = j,\ \tau_j = i \text{ e } \tau_k = k,\ k \in \mathcal{I},\ \text{com } k \notin \{i, j\}.$$

O próximo resultado garante a unicidade da função determinante quando restrita às matrizes de permutação:

Lema 4.5. *Se D_1 e D_2 forem funções que satisfazem as propriedades (d_1) e (d_2) e $D_1(I) = D_2(I)$, então $D_1(A) = D_2(A)$ para toda matriz de permutação A.*

Demonstração. Seja A uma matriz de permutação $n \times n$. Uma transposição corresponde à troca de duas colunas da matriz A e altera o sinal de seu determinante. Claramente um número finito (no máximo igual a $n - 1$) de transposições transforma a matriz A na matriz identidade: basta fazer com que o vetor e_1 seja transposto para a primeira coluna, obtendo assim a matriz A_1; depois transpor e_2 para a segunda coluna, obtendo a matriz A_2 e assim sucessivamente. Se k tais transposições forem utilizadas nesse processo, temos

$$D_1(A) = -D_1(A_1) = D_1(A_2) = \cdots = (-1)^k D_1(I). \tag{4.2}$$

Essa igualdade mostra que a função determinante de qualquer matriz de permutação é caracterizada pelos valores que ela assume na matriz identidade.

O mesmo cálculo vale para $D_2(A)$, ou seja, se k transposições forem feitas, temos

$$D_2(A) = -D_2(A_1) = D_2(A_2) = \cdots = (-1)^k D_2(I). \tag{4.3}$$

Isso mostra que essas funções coincidem, se A for uma matriz de permutação. □

O próximo resultado esclarece o significado de (d_3) na definição da função determinante.

Teorema 4.6. *Sejam D_1 e D_2 funções satisfazendo as propriedades (d_1) e (d_2). Se $D_1(I) = D_2(I)$, então $D_1 = D_2$.*

Demonstração. Sejam $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}^n$ vetores arbitrários. Escrevendo cada um desses vetores em termos da base canônica do $\mathbb{K}^n$, obtemos

$$\begin{aligned}
c_1 &= a_{11}e_1 + \cdots + a_{n1}e_n,\\
c_2 &= a_{12}e_1 + \cdots + a_{n2}e_n,\\
\vdots &= \qquad\quad \vdots\\
c_n &= a_{1n}e_1 + \cdots + a_{nn}e_n.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
D_1(c_1, \ldots, c_n) &= D_1(a_{11}e_1 + \cdots + a_{n1}e_n, \ldots, c_n)\\
&= a_{11}D_1(e_1, c_2, \ldots, c_n) + \cdots + a_{n1}D_1(e_n, c_2, \ldots, c_n).
\end{aligned}$$

Se substituirmos agora c_2 por $a_{12}e_1 + \cdots + a_{n2}e_n$, obteremos uma expressão semelhante. Feitas todas as substituições de $c_2, \ldots, c_n$, chegaremos a

$$D_1(c_1, \ldots, c_n) = \sum_{i_1, \ldots, i_n = 1}^{n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \ldots a_{i_n n} D_1(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n})$$

e a mesma igualdade vale para D_2.

Nesse somatório, tanto para D_1 como para D_2, são nulas todas as parcelas em que há repetição de algum índice $i_1, \ldots, i_n$. De fato, nesse caso, temos que $i_k = i_j$ para $k \neq j$ e então $e_{i_k} = e_{i_j}$. Para $m = 1, 2$, a propriedade (d_1) do determinante garante então que $D_m(e_{i_1}, \ldots, e_{i_j}, \ldots, e_{i_k}, \ldots, e_{i_n}) = 0$. Quer dizer, basta considerar o caso em que todos os índices $i_1, \ldots, i_n$ são diferentes entre si. Mas, então, está estabelecida uma permutação dos inteiros $\{1, \ldots, n\}$ e o resultado segue-se do Lema 4.5.

$\square$

Corolário 4.7. *Existe uma única função determinante.*

Está assim mostrada a existência e unicidade da função determinante, definida para qualquer matriz quadrada.

Capítulo 5

Aplicações

Este capítulo tem como objetivo resolver problemas de matemática utilizando as ferramentas da Álgebra Linear. Os problemas escolhidos, a princípio, têm contexto com os conteúdos vistos em Álgebra linear, o que ratifica a importância de tais ferramentas.

5.1 Obtendo os números de Fibonacci através de matrizes

A sequência de Fibonacci $F_0, F_1, F_2, \ldots$ é definida pelas relações

$$F_0 = 0, F_1 = 1 \ e \ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \ para \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Inicialmente, montamos a matriz 2×2

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então,

$$\begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$$

daí,

$$\begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$$

logo,

$$\begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} + F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Note que podemos escrever

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix},$$

e obtemos

$$\begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = M^2 \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = M^3 \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix} = \cdots = M^{n+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De maneira geral teremos

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para $n = 2^k$, podemos calcular M^n por quadrados repetidos, com k multiplicações de matrizes 2×2. Para n arbitrário escrevemos n como

$$n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \ldots + 2^{k_t}$$

com $k_1 < k_2 < \ldots < k_t$ para depois calcularmos

$$M^n = M^{2^{k_1}} M^{2^{k_2}} \ldots M^{2^{k_t}}.$$

5.2 A fórmula dos números de Fibonacci

Encontraremos uma fórmula para o n-ésimo termo F_n de Fibonacci (definida como $F_0 = 0$ $F_1 = 1, \ldots, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,$). Vamos considerar o espaço vetorial de todas as sequências infinitas $X = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$ de números reais. Neste espaço vetorial definamos um subespaço W de todas as sequências de X satisfazendo a equação $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, para todo $n = 0, 1, 2, \ldots$

Afirmação: W é um subespaço de X.

De fato. Sejam $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ e $(y_0, y_1, y_2, \ldots) \in W$, temos que

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \quad e \quad y_{n+2} = y_{n+1} + y_n$$

Então,

$$(x_0 + y_0, x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots) \in W \Longleftrightarrow x_{n+2} + y_{n+2} = (x_{n+1} + x_n) + (y_{n+1} + y_n).$$

Além disso,

$$\alpha(x_0, x_1, x_2, \ldots) \in W \Longleftrightarrow \alpha x_{n+2} = \alpha(x_{n+1} + x_n).$$

Note que, a escolha dos dois primeiros termos x_0 e x_1 determina, exclusivamente, uma sequência de W, e portanto, $dim(W) = 2$. Considere as duas sequências $(0, 1, 1, 2, 3, \ldots)$ e $(1, 0, 1, 1, 2, \ldots)$ elas constituem uma base de W.

Agora vamos encontrar outra base de W, que serão duas sequências cujos termos são definidos por uma fórmula simples. Devemos, então, procurar sequências $u \in W$ da forma $u_n = \tau^n$ para um número real τ. Encontrar os valores corretos de τ leva à equação quadrática $\tau^2 = \tau + 1$ (como na definição $\tau^2 = \tau^1 + \tau^0$), que possui duas raízes distintas:

$$\tau_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

e

$$\tau_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Afirmação: As sequências $u := (\tau_1^0, \tau_1^1, \tau_1^2, \ldots)$ e $v := (\tau_2^0, \tau_2^1, \tau_2^2, \ldots)$ que pertencem a W formam uma base de W.

De fato. O conjunto $\{u, v\}$ é linearmente independente, pois considerando os dois primeiros termos de ambas as sequências temos:

$$\begin{aligned} \alpha(1, \tau_1^1) + \beta(1, \tau_2^1) &= 0, \\ (\alpha, \alpha\tau_1^1) + (\beta, \beta\tau_2^1) &= 0, \\ (\alpha + \beta, \alpha\tau_1^1 + \beta\tau_2^1) &= 0. \end{aligned}$$

Daí, $\alpha + \beta = 0 \Longrightarrow \alpha = -\beta$ e então $\alpha\tau_1^1 - \alpha\tau_2^1 = 0 \Longrightarrow \alpha(\tau_1^1 - \tau_2^1) = 0 \Longrightarrow \alpha = 0$ e $\beta = 0$. Além disso, note que $Span(\{u, v\}) = W$.

Expressamos as sequências $F := (F_0, F_1, \ldots)$ na base $F = \alpha u + \beta v$. Os coeficientes α e β são calculados considerando os dois primeiros termos das sequências:

$$\begin{cases} \alpha\tau_1^0 + \beta\tau_2^0 = F_0 \\ \alpha\tau_1^1 + \beta\tau_2^1 = F_1. \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha\tau_1^1 + \beta\tau_2^1 = 1. \end{cases}$$

Donde

$$\alpha\tau_1^1 - \alpha\tau_2^1 = 1 \Longrightarrow \alpha(\tau_1^1 - \tau_2^1) = 1 \Longrightarrow \alpha = \frac{1}{\tau_1^1 - \tau_2^1}.$$

Considerando que τ_1^1 e τ_2^1 são as raízes da equação quadrática $\tau^2 = \tau^1 + \tau^0$ temos que $\tau_1^1 - \tau_2^1 = \sqrt{5}$ vem que $\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e $\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Desta forma, a fórmula resultante é

$$F_n = \alpha u_n + \beta v_n \Longrightarrow F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\tau_1^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\tau_2^n,$$

e que portanto,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

5.3 Os clubes de uma cidade

Existem n cidadãos que vivem em uma cidade. Estes cidadãos formaram vários clubes, que em algum momento começaram a ameaçar a própria sobrevivência da cidade. Para limitar o número de clubes, o conselho da cidade decretou as seguintes regras:

- Cada clube tem que ter um número ímpar de membros;
- Cada dois clubes devem ter um número par de membros em comum.

Teorema 5.1. *Sob essas regras é impossível formar mais clubes do que n, o número de cidadãos.*

Demonstração. Chamemos os cidadãos de $1, 2, \ldots, n$ e os clubes de $C_1, C_2, \ldots, C_m$. Definimos a matriz $A_{m\times n}$ em que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se j } \in C_i \\ 0 \text{ por outro lado} \end{cases}$$

(Assim, as linhas correspondem aos clubes e as colunas aos cidadãos).
Consideremos a matriz A sobre o corpo de dois elementos $\mathbb{Z}_2$ (anel de inteiros módulo 2).
Afirmação. Claramente, o posto de A é no máximo n.

Em seguida, examinamos o produto AA^t, ou seja, a matriz A multiplicada pela sua transposta $A^t = (bji)$, onde a matriz produto é uma matriz de ordem $m \times m$

$$AA^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mm} \end{pmatrix},$$

cuja a entrada na posição (i, k) é igual a $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{kj}$, pois $a_{kj} = b_{jk}$. Mais precisamente, uma vez que agora trabalhamos com $\mathbb{Z}_2$ teremos que a entrada é 1 se $|C_i \cap C_k|$ for ímpar e a entrada é 0 se a $|C_i \cap C_k|$ for par.

Com as regras impostas pelo conselho da cidade chegamos então que a matriz produto é a matriz identidade de ordem $m \times m$

$$AA^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Chegamos que $AA^t = I_m$, então o posto de uma é igual ao posto da outra. Temos que $Rank(I_m) = m$ que siginifica que ela possui m colunas e linhas linearmente independentes. E agora usando que

$$Rank(AA^t) \leq Rank(A)$$

$$m \leq Rank(A) \leq n$$

$$m \leq n.$$

Como m representa o números de clubes e n o números de cidadãos, chegamos que, de fato, não podem existir mais clubes do que n a quantidade de cidadãos. O teorema está provado. $\square$

5.4 Interseções do mesmo tamanho

Este resultado e a prova são semelhantes ao problema da seção 5.3.

Teorema 5.2. ***(Desigualdade generalizada de Fisher)*** *Se $C_1, C_2, \ldots, C_m$ são subconjuntos distintos e não vazios de um conjunto com n elementos, tais que todas as interseções $C_i \cap C_j$ com $i \neq j$ tem o mesmo tamanho, então $n \geq m$.*

Demonstração. Seja t o tamanho comum de todas as interseções, ou seja, $card(C_i \cap C_j) = t$, para $i \neq j$. Precisamos lidar separadamente com a situação em que um dos C_i digamos C_1, tem tamanho t. Daí, vem que C_1 está contido em todos os outros C_j. Então,

$$card(C_i \cap C_j) = card(C_1),\ para\, i, j \geq 2,\ i \neq j.$$

Afirmação. $(C_i \backslash C_1) \cap (C_k \backslash C_1) = \varnothing$.
Assuma o contrário, então existe ao menos um elemento em $C_i \backslash C_1 \cap C_k \backslash C_1$. Absurdo, pois $card(C_i \cap C_j) = card(C_1)$.
Afirmação. O número de conjuntos m não pode exceder n.
De fato. Como os conjuntos $C_1, C_2 \backslash C_1, \ldots, C_m \backslash C_1$ são disjuntos vale que

$$n = card(C_1) + card(C_2 \backslash C_1) + \ldots + card(C_m \backslash C_1)$$

$$n - t = card(C_2 \backslash C_1) + \ldots + card(C_m \backslash C_1)$$

$$n - t \geq m - 1$$

$$n + (1 - t) \geq m$$

Como $t \geq 1$ segue que

$$n \geq m.$$

Essa foi a prova para o caso mais simples, na qual assumimos que t é o tamanho comum de todas as interseções. Agora, assumamos que

$$d_i := card(C_i) > t,$$

em que d_i expressa o tamanho dos conjuntos C_i. Do problema 3, montamos a matriz $A_{m \times n}$ em que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se j } \in C_i \\ 0 \text{ por outro lado.} \end{cases}$$

Considerando A como uma matriz com entradas reais e fazendo $B := AA^t$

$$B = AA^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Note que,

$$b_{11} = a_{11}^2 + a_{12}^2 + \cdots + a_{1n}^2 = d_1$$

Em que 1 está fixado e $j = 1, \ldots, n$ está variando. Nesse caso, estamos lidando com a cardinalidade do conjunto C_1, que é d_1. Note ainda que,

$$b_{12} = a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + \cdots + a_{1n}a_{2n} = t$$

em que 1 e 2 estão fixados e $j = 1, \ldots, n$ está variando. Nesse caso, estamos lidando com a cardinalidade dos conjuntos C_1 e C_2 ao mesmo tempo, que é igual a t, como definido no início da prova. Dessa forma, construimos a matriz B

$$B = AA^t = \begin{pmatrix} d_1 & t & t & \cdots & t \\ t & d_2 & t & \cdots & t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ t & t & t & \cdots & d_m \end{pmatrix}.$$

Só nos resta verificar que B é não singular, ou seja, B não ser singular significa dizer que B tem seu determinante diferente de zero. E então mostraremos que

$$m = Rank(B) \leq Rank(A) \leq n.$$

Para mostrar que B é não singular, verificamos primeiro que B é simétrica e, por conseguinte, analisamos que B é uma matriz positiva definida, ou seja, devemos mostrar que $xBx^t > 0$.

Afirmação. A matriz B é simétrica.

De fato. Temos que B é igual a sua transposta, o que nos garante que ela é simétrica.

Afirmação. A matriz B é positiva definida.

De fato. Como B é simétrica podemos verificar se ela é positiva definida, ou seja, para qualquer lista $(x_1, \ldots, x_m)$ de m números reais não todos nulos, teremos $xBx^t > 0$. Inicialmente, iremos compor B do seguinte modo

$$B = \begin{pmatrix} d_1 & t & t & \cdots & t \\ t & d_2 & t & \cdots & t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ t & t & t & \cdots & d_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 - t & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 - t & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_m - t \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Ou seja, $B = D + tJ_n$, onde

$$D = \begin{pmatrix} d_1 - t & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 - t & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_m - t \end{pmatrix}$$

e

$$J_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Agora, veremos que $xDx^t > 0$

$$xDx^t = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 - t & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 - t & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_m - t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i^2 (d_i - t) > 0,$$

note que d_i não pode ser zero, pois $d_i > t$. Agora veremos que $xJ_nx^t > 0$

$$xJ_nx^t = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} x_i x_j = (\sum_{i=1}^{m} x_i)^2 > 0.$$

Dessa forma, provamos que

$$xBx^t = x^t(D + tJ_n)x = tx^t J_n x + x^t Dx > 0.$$

Ou seja, a matriz B é positiva definida. Como B é positiva definida, resta verificar se ela é não singular.

Afirmação. A matriz B é não singular.

Para verificar que ela é não singular vamos provar que o seu núcleo é igual zero. Se $Bx = 0$, então $x^t Bx = 0$. Como vimos que B é positiva definida, então $x = 0$, ou seja, o núcleo de B é igual a zero. Com isso temos que a matriz B é invertível e se ela é invertível o seu derteminante é diferente de zero. Com isso provamos que B é não singular.

Para finalizar, vimos que B é não singular e que, portanto, seu determinante é diferente de zero, isso nos permite dizer que a matriz B possui linhas e colunas, que são vetores linearmente independente. Com isso, podemos utilizar o Teorema 2.4 (do Posto de uma Matriz) para concluir que

$$m = Rank(B) \leq Rank(A) \leq n.$$

Como queríamos provar.

$\square$

5.5 Distâncias Ímpares

Teorema 5.3. *Não há quatro pontos no plano de modo que a distância entre cada par destes pontos seja um inteiro ímpar.*

Demonstração. Suponhamos, por contradição, que existam quatro pontos, de modo que todas as distâncias entre cada par destes pontos sejam ímpares. Podemos supor que um desses pontos é $O(0, 0)$ e chamamos os três restantes de $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ e $C(c_1, c_2)$. Então, o comprimento euclidiano entre um ponto a outro seria $||A||$, $||B||$, $||C||$, $||A - B||$, $||B - C||$ e $||C - A||$ são inteiros ímpares.

Afirmação 1. Se m é um inteiro ímpar então $m^2 \equiv 1 \pmod 8$.

Faremos por indução. Vejamos que vale para $m = 1$, pois 1 é impar e o quadradado de 1 é congruente a 1 módulo 8. Agora, seja m um inteiro ímpar, tal que $m^2 \equiv 1 \pmod 8$. Então,

$$(m+2)^2 = m^2 + 4m + 4.$$

Já temos que $m^2 \equiv 1 \pmod 8$ daí $(m+2)^2 \equiv 1+4(m+1) \pmod 8$ e como m é um inteiro ímpar, então $m+1$ é um inteiro par. Logo, existe um k inteiro positivo tal que $m+1 = 2k$, donde $(m+2)^2 \equiv 1 + 4.2k \pmod 8$ e como $8k$ sempre deixa resto 0 na divisão por 8, temos que $(m+2)^2 \equiv 1 \pmod 8$. Portanto, os quadrados de todas as distâncias são congruentes a 1 módulo 8.

Segue que, a partir dessa afirmação, o quadado das distâncias entre os pontos O, A, B e C são congruentes a 1 módulo 8.

Afirmação 2. Todos os vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$ satisfazem $||x-y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 - 2\langle x, y\rangle$. De fato,

$$\begin{aligned} ||x-y||^2 &= \langle x-y, x-y\rangle \\ &= \langle x, x-y\rangle - \langle y, x-y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\ &= ||x||^2 + ||y||^2 - 2\langle x, y\rangle \end{aligned}$$

E agora apllicando com $x = A$ e $y = B$ teremos $||A-B||^2 = ||A||^2 + ||B||^2 - 2\langle A, B\rangle$. Isolando o produto interno obteremos que $2\langle A, B\rangle = ||A||^2 + ||B||^2 - ||A-B||^2 \equiv 1 \pmod 8$. Da mesma forma vale para $2\langle A, C\rangle$ e $2\langle B, C\rangle$.

Seja B a matriz

$$B = \begin{pmatrix} \langle A, A\rangle & \langle A, B\rangle & \langle A, C\rangle \\ \langle B, A\rangle & \langle B, B\rangle & \langle B, C\rangle \\ \langle C, A\rangle & \langle C, B\rangle & \langle C, C\rangle \end{pmatrix}.$$

Afirmação 3. A matriz $2B$ é congruente a matriz

$$R := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

módulo 8.

De fato, $2B \equiv 1 \pmod 8$, onde

$$B = \begin{pmatrix} \langle A, A\rangle & \langle A, B\rangle & \langle A, C\rangle \\ \langle B, A\rangle & \langle B, B\rangle & \langle B, C\rangle \\ \langle C, A\rangle & \langle C, B\rangle & \langle C, C\rangle \end{pmatrix}.$$

e

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pois analisando cada entrada correspondentes das matrizes, como por exemplo, o primeiro termo da matriz $2B$ é congruente a 1 módulo 8, via afirmação 2, logo o primeiro termo da matriz equivale a 2 que por sua vez é congruente com o primeiro termo da matriz R módulo 8. Analisando termo a termo temos que a afirmação é válida.

Em seguida, calculamos $det(R) = 4$, e obtemos que $det(2B) \equiv 4 (\text{mod } 8)$. Como o $det(2B) \equiv 4 \pmod 8$ então $det(2B) \neq 0$ (pois 0 deixa resto 0 na divisão por 8). Logo, $det(B) \neq 0$. Tendo que $det(B) \neq 0$, vemos que os vetores do espaço linha de B são linearmente independentes. Logo, $Rank(B) = 3$. Por outro lado, se $B = A^t A$, onde

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix},$$

Como A é uma matriz com 2 linhas apenas, então o máximo de linhas linearmente independentes é no máximo 2, ou seja, $Rank(A) \leq 2$. E usando que o rank do produto de duas matrizes não supera o menor rank de um dos fatores temos que

$$3 = Rank(B) = Rank(A^t A) \leq Rank(A) \leq 2.$$

E esta contradição conclui a prova.

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] BUENO, H. **Álgebra Linear Um Segundo Curso**. Volume 06. Textos Universitários. 2006.

[2] MATOUŠEK, Jirí. **Thirty-three miniatures: Mathematical and Algorithmic applications of Linear Algebra**. Providence: American Mathematical Society, 2010.

[3] CALLIOLI, A; DOMINGUES, H; COSTA, R. **Álgebra Linear e Aplicações**. 6° edição. Editora Atual, 2009.

[4] LIMA, E. **Álgebra Linear**. 9° edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.

[5] COELHO, F; LOURENÇO, M. **Um curso de Álgebra Linear**. São Paulo: EDUSP, 2013.

[6] RANTER, W.: **Notas de Aula Álgebra Linear**. Iniciação Científica. 2020.