

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

**INSTITUTO DE MATEMÁTICA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

**Um estudo de funções harmônicas e princípio do
máximo.**

ARTHUR DA SILVA LIMA

Maceió - AL

Julho de 2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

**INSTITUTO DE MATEMÁTICA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

Arthur da Silva Lima

**Um estudo de funções harmônicas e princípio do
máximo.**

Trabalho de conclusão de curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas. O qual, tem como intuito de alcançar os requisitos para formação do curso, isso, a partir de um estudo voltado às Funções Harmônicas por meio de uma revisão literária.

Orientador: Prof. Dr. Renan Dantas Medrado

Maceió - AL

Julho de 2024

Catálogo na Fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

L732c

Lima, Arthur da Silva.

Um estudo de funções harmônicas e princípio do máximo / Arthur da Silva
Lima. - 2024.
62 f. : il.

Orientador: Renan Dantas Medrado.

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática : Licenciatura)
– Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2024.

Bibliografia: f. 62.

1. Funções (Matemática). 2. Funções harmônicas. 3. Laplaceano. 4.
Princípio do máximo (Matemática). I. Título.

CDU: 517.956.225

Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer minha família, principalmente ao meu pai Amaro José e minha mãe Cristiane Nazario, por todo apoio e incentivo durante toda minha vida. Assim como, minha namorada, Grabieli Camily, por sempre está ao meu lado em todos os momentos de minha formação. Também, gostaria de agradecer meu orientador Professor Dr. Renan Medrado por todos os conselhos e ensinamentos durante todo o decorrer do desenvolvimento desse e de outros estudos. Além dele, gostaria de expressar meus agradecimento aos Professores Dr. Márcio Cavalcante e Dr. Marcos Petrúcio por fazerem parte da banca avaliadora do presente trabalho. Agradeço aos amigos e professores durante a graduação. Enfatizo esses agradecimentos aos meus amigos Matheus Henrique, Francisco Alan e Max Siqueira por todas as conversas, risadas e aprendizagens durante todo o decorrer da graduação. Além deles, gostaria de mencionar as professoras Dra. Elaine Cristine e Dra. Viviane Oliveira, por todos os ensinamentos dentro e fora de sala de aula. Por fim, agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Alagoas (Fapeal) pela disponibilidade da bolsa para o desenvolvimento deste estudo.

Resumo

A presente monografia tem como objetivo central apresentar as principais propriedades das funções harmônicas, tornando a temática mais acessível para leitores em um primeiro contato. Deste modo, buscou-se construir um texto autossuficiente. Assim, este trabalho idealiza a discussão da temática de forma gradativa. Para ser mais preciso, primeiro será apresentada a relação entre funções harmônicas definidas em uma bola aberta e a média de uma função definida em uma bola aberta. Com isso, será possível demonstrar o princípio do máximo para funções harmônicas e que toda função harmônica é de classe C^∞ . Em seguida, estimaremos o gradiente de uma função harmônica. Com essas estimativas, conseguiremos demonstrar que as únicas funções harmônicas que podem ser limitadas (superiormente ou inferiormente) são as constantes. Demonstraremos também a famosa desigualdade de Harnack. Outro resultado bem conhecido que será mostrado é que, se uma função contínua é harmônica no sentido fraco, então ela é harmônica no sentido forte. Por fim, apresentaremos as funções subharmônicas e faremos um “princípio do máximo para funções subharmônicas”. Terminaremos o texto utilizando a teoria de funções subharmônicas para apresentar algumas estimativas para funções harmônicas, as quais serão úteis para estudar a continuidade Hölder de uma função harmônica. Vale destacar que todos os resultados sobre funções harmônicas que discutiremos neste texto podem ser encontrados em [5]. Ademais, com o intuito de tornar a leitura mais simples, o texto será iniciado com uma breve revisão sobre temas que geralmente são vistos em cursos de Bacharelado em Matemática.

Palavras-chaves: Funções, Harmônicas, Laplaceano e Princípio do Máximo.

Abstract

The aim of this monograph is to present the main properties of harmonic functions, making it easier for readers who are studying this subject for the first time. To achieve this, we have created a self-contained text that discusses the subject gradually. Initially, we will explore the relationship between harmonic functions defined in an open ball and the mean value property of these functions. Using this foundation, we will prove the maximum principle for harmonic functions and demonstrate that each harmonic function is infinitely differentiable (C^∞). Subsequently, we will present gradient estimates for harmonic functions, which will lead to the conclusion that the only harmonic functions that can be bounded (from above or below) are constants. We will also prove the famous Harnack's inequality. Another significant result we will prove is that if a continuous function is harmonic in the weak sense, then it is harmonic in the strong sense. Finally, we will introduce subharmonic functions and present a maximum principle for them. We will conclude the monograph by using the theory of subharmonic functions to derive some estimates for harmonic functions, which will be useful for studying the Hölder continuity of harmonic functions. It is worth mentioning that all the results discussed in this monograph can be found in [5]. Furthermore, to facilitate understanding, the monograph will begin with a brief review of basic analysis topics typically covered in undergraduate mathematics courses.

Keywords: Functions, Harmonics, Laplacean and Maximum Principles.

Sumário

Introdução	8
1 Pré-requisitos	10
1.1 Espaços Euclidianos	10
1.2 Propriedades Topológicas dos Espaços Euclidianos	11
1.3 Funções Teste	12
1.4 Propriedades de Derivação e Integrais no $\mathbb{R}^n$	14
1.4.13 Mudança de Variáveis em Integrais	16
2 Funções Harmônicas	18
2.1 Propriedade do Valor Médio	18
2.2 Estimativas do Gradiente	29
3 Funções Subharmônicas	40
3.1 Princípio do Máximo para Funções Subharmônicas	40
3.2 Aplicações	41

Introdução

O estudo das funções harmônicas ocupa um papel central na teoria das equações diferenciais parciais elípticas, devido à sua presença em diversas áreas da matemática e suas aplicações em física, engenharia e outras ciências. Precisamente uma função harmônica é uma função que ao aplicá-la ao operador de Laplace ($\Delta = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2$) obtêm-se a função nula.

As pesquisas e estudos voltas às funções harmônicas provavelmente surgiu nos trabalhos de Leonhard Euler em meados do século XVIII, que explorou problemas relacionados à hidrometria em 1752. É importante mencionar que Euler não usou explicitamente a nomenclatura "funções harmônicas". No entanto, o termo 'função harmônica' e o operador de Laplace receberam seus nomes em homenagem ao matemático Pierre-Simon Laplace, que os estudou detalhadamente ao investigar a atração gravitacional entre corpos celestes. As funções harmônicas são igualmente importantes no campo da eletrostática, onde desempenham um papel fundamental na solução de problemas de potencial elétrico. Para um estudo aprofundado de aplicações físicas das funções harmônicas, recomenda-se a leitura do livro [8]. Além disso, deve-se mencionar que em Matemática as funções harmônicas surgem de forma natural sejam em cursos de Cálculo ou de Funções de variáveis complexas.

O principal objetivo desta monografia é apresentar propriedades das funções harmônicas. Por exemplo, o problema de estudar médias é um problema comum em matemática e surpreendentemente há uma relação entre média e funções harmônicas. Para ser mais preciso podemos calcular de modo simples a média de uma função harmônica definida em uma bola aberta. Ademais, veremos que as funções harmônicas são as únicas funções com tais propriedades.

Outro problema comum em matemática é o estudo de máximo de funções. No caso de funções harmônicas veremos nesta monografia o princípio do máximo, uma ferramenta útil que garante que o máximo só é admitido na fronteira do seu domínio de definição.

O livro [5], escrito por Han e Lin foi usado como nossa principal referência. Para ser mais preciso nós iniciamos o texto com uma breve revisão de resultados que geralmente são vistos em cursos de graduação e depois nós apresentaremos alguns resultados do primeiro capítulo do livro

[5]. Pretendemos que o nosso texto torne o assunto mais acessível para aqueles que queriam fazer uma primeira leitura sobre o tema, uma vez que apresentamos mais detalhes do que o livro [5] e trabalhamos para que o texto fique auto contido. Para tal, nosso objetivo é fornecer uma base sólida para a compreensão desse tipo de função. Começaremos com definições e exemplos básicos seguido por propriedades cruciais e técnicas fundamentais que serão utilizadas ao longo desta monografia.

O primeiro capítulo desse trabalho, trata-se de uma exposição dos principais pré-requisitos para compreender o estudo que serão desenvolvido, nesse sentido, foi feita um levantamento de alguns resultados e definições úteis para uma melhor entendimento de todo o trabalho.

O segundo capítulo tem como foco apresentar as funções harmônica, sendo elas a base de todo os estudos que desenvolveremos. Nele, serão discutidas os primeiros resultados voltados à funções harmônicas. Finalizaremos esse capítulo mostrando um resultado notório, o qual, demonstra que funções contínuas é harmônica no sentido fraco também são harmônicas no sentido forte.

O terceiro capítulo, sendo esse o capítulo que apresenta os principais resultados da presente monografia, tem como foco discutir resultados a funções que são subharmônicas, isto é, funções tais que ao aplicarmos o operador Laplace obtêm-se uma função não nula. A partir disso, fazendo uso do princípio do máximo, mostraremos resultados importante voltada à Hölder continuidade e funções harmônicas.

A partir disso, espera-se que o leitor busque compreender as temáticas e discussões desenvolvidas no presente texto. Enfatiza-se que, sempre que necessário, volte aos pré-requisitos para auxiliar em uma melhor compreensão.

Pré-requisitos

Com o intuito de tornar o presente texto auto contido este capítulo tem com foco apresentar os principais resultados e definições preliminares para auxiliar a compreensão desta monografia.

1.1 Espaços Euclidianos

O objetivo dessa seção é apresentar uma revisão sobre os espaços euclidianos. Para uma leitura mais completa sobre essa temática recomendamos os livros [9], [10] e [13].

Para cada n pertencente ao conjunto dos números naturais, seja $\mathbb{R}^n$ o conjunto de todas as n -uplas ordenadas $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, em que, $x_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$. Deste modo, o espaço *euclidiano* n -dimensional $\mathbb{R}^n$ é o produto cartesiano de n fatores iguais a $\mathbb{R}$, isto é, $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$.

Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, com $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, dizemos que $x = y$ se, e somente se, $x_i = y_i$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$. Além disso, para $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, definiremos a soma $x + y$ e o produto $\alpha \cdot x$ do seguinte modo

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \\ \alpha \cdot x &= (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n). \end{aligned}$$

Tais operações fazem de $\mathbb{R}^n$ um espaço vetorial com dimensão n sobre o corpo dos reais, em que, o elemento neutro aditivo é $0 = (0, 0, \dots, 0)$ e o simétrico, de cada elemento $x \in \mathbb{R}^n$, é $-x = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$.

Além disso, ao trabalharmos com o $\mathbb{R}^n$, pode-se definir o *produto interno* de dois vetores, em que, dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, temos que $\langle x, y \rangle = x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, onde $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$.

A partir disso, a seguir relembremos a definição de três normas comumente utilizadas no $\mathbb{R}^n$.

Assim, seja $x \in \mathbb{R}^n$, podemos definir a norma de x como

1. $|x|_E = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}}$ (Norma Euclidiana);
2. $|x|_S = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| = \sum_{i=1}^n |x_i|$ (Norma da Soma);
3. $|x|_M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\} = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i|\}$ (Norma do Máximo).

É importante destacar que essas normas são equivalentes. Em que, dado $x \in \mathbb{R}^n$ temos que $|x|_M \leq |x|_E \leq |x|_S \leq n|x|_M$. Esse fato é abordado em maiores detalhes em [10].

1.2 Propriedades Topológicas dos Espaços Euclidianos

Nessa seção lembraremos algumas definições e propriedades topológicas do espaço euclidiano.

DEFINIÇÃO 1.2.1. *Seja n um número natural, definiremos*

1. Uma **bola aberta** de centro $x \in \mathbb{R}^n$ é o conjunto $B_r(x) = B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n; |y - x| < r\}$. Em que, $r \in \mathbb{R}$ é denominado raio de $B_r(x)$.
2. $x \in \mathbb{R}^n$ é dito **ponto de acumulação** de um conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$, se para cada $\epsilon > 0$, existe $y \in E$ tal que $0 < |y - x| < \epsilon$.
3. Se $x \in E$ não for ponto de acumulação então x é dito **ponto isolado** de E .
4. E é dito **fechado** se para todo ponto de acumulação x de E , tem-se que $x \in E$.
5. Um ponto $x \in E$ é **ponto de interior** de E se existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset E$.
6. Um conjunto E é dito **aberto** se todo ponto de E é ponto de interior.

A seguir lembraremos uma útil caracterização de pontos de acumulação, as quais, são equivalentes.

TEOREMA 1.2.2. *Dado $E \subset \mathbb{R}^n$ e $a \in \mathbb{R}^n$, as seguintes afirmações são equivalentes*

1. a é ponto de acumulação de E ;
2. Existe uma sequência de pontos $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ de E , tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = a$ e $x_i \neq a; \forall i \in \mathbb{N}$;
3. Toda bola aberta de centro a contém uma infinidade de pontos de E .

A seguir lembraremos a definição de conjuntos compactos e conexos.

DEFINIÇÃO 1.2.3. *Sejam $E \subset \mathbb{R}^n$ e $J \subset \mathbb{R}$, chamamos de **cobertura aberta** de E uma coleção $\{B_\alpha\}_{\alpha \in J}$ de conjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$ tal que $E \subset \bigcup_{\alpha \in J} B_\alpha$.*

DEFINIÇÃO 1.2.4. *Dizemos que $K \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto compacto do $\mathbb{R}^n$ se toda cobertura aberta de K admite uma subcobertura finita. Isto é, se $\{B_\alpha\}_{\alpha \in J}$ é uma cobertura de K , $\exists \{\alpha_i\}_{i=1}^n \subset J$ tal que $K \subset \bigcup_{i=1}^n B_{\alpha_i}$. Ou ainda, temos que para $K \subset \mathbb{R}^n$, K é dito compacto se, e somente se, K é limitado e fechado.*

DEFINIÇÃO 1.2.5. *Dizemos que $E \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto conexo se não existe em $\mathbb{R}^n$ dois subconjuntos A, B abertos e disjuntos tais que: $E \cap A \neq \emptyset$, $E \cap B \neq \emptyset$ e $E \subset A \cup B$.*

1.3 Funções Teste

Esta seção tem o objetivo de apresentar um resumo sobre função teste e convolução de funções. Há diversos textos em que pode-se ser encontrada uma abordagem dessa temática de forma mais completa, dentre elas indicamos [3] e [6].

DEFINIÇÃO 1.3.1. *Seja ϕ uma função definida em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que o suporte da função ϕ é o fecho do conjunto $S = \{x \in \Omega; \phi(x) \neq 0\}$, o qual denotaremos por $S(\phi)$. Quando $S(\phi) \subset \Omega$ é compacto, dizemos que ϕ tem um suporte compacto em Ω .*

Denotaremos por

$$C_0(\Omega) = \{\phi \in C(\Omega) : S(\phi) \text{ é compacto}\} \text{ e } C_0^\infty(\Omega) = \{\phi \in C^\infty(\Omega) : S(\phi) \text{ é compacto}\}.$$

Uma vez definidos tais conjuntos, uma pergunta natural pode surgir: Existem funções nesse espaço? A resposta é sim, a função identificação nula é uma função suave com suporte compacto (a saber o suporte é o conjunto $\emptyset$). A seguir, apresentaremos um exemplo de função não nula que possui suporte compacto. Antes disso é necessário apresentar uma breve discussão sobre a função e .

Observação 1.3.2. *Lembre-se que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \forall x \in \mathbb{R}$. Assim, $\frac{x^n}{n!} \leq e^x, \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } x \in \mathbb{R}$, logo $e^{-x} \leq \frac{n!}{x^n}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } x \neq 0$. Deste modo $e^{-\frac{x}{2}} \leq \frac{n!2^n}{x^n}$, multiplicando por $e^{-\frac{x}{2}}$, temos $e^{-x} \leq e^{-\frac{x}{2}} \frac{n!2^n}{x^n}$, multiplicando ambos os lados por x^n , obtemos $x^n e^{-x} \leq 2^n n! e^{-\frac{x}{2}}$. Por outro lado, ao fazer $x = \frac{-1}{t}$,*

temos que $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^-} x e^x$. Assim temos $0 \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^{\frac{-x}{2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^{\frac{x}{2}}} = 0$. Logo $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t} = 0$.

Exemplo 1.3.3. Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, seja $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, definida do seguinte modo

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{(|x|^2-1)^{-1}} & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases}$$

Podemos mostrar que a função ϕ é suave e possui suporte compacto em Ω .

Defina duas funções f e g , tais que

$$f(t) = \begin{cases} e^{\frac{1}{t}} & \text{se } t < 0 \\ 0 & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

e

$$g(x) = x^2 - 1, x \in \mathbb{R}^n,$$

em que, $\phi = f \circ g(x)$. Note que, $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, pois é suave em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ademais, f é contínua em $t = 0$, pois

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{t}} = 0.$$

Pela observação acima e por 1.3.2 temos que $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(t)-f(0)}{t-0} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t} = 0 = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)-f(0)}{t-0}$. Portanto, f é derivável. Continuando a ideia, usando a observação acima e indução finita concluiremos que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Como $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$ podemos concluir que $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Ademais, $\phi \neq 0, \forall x \in B_1(0) \in \mathbb{R}^n$, visto que, $e^{(|x|^2-1)^{-1}} \neq 0, \forall x \in B_1(0)$. Deste modo, temos que, $S(\phi) \subset B(0, 1)$, conseqüentemente $\phi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, ou seja, possui um suporte compacto em $\mathbb{R}^n$ (pois $S(\phi)$ é sempre fechado e $S(\phi) \subset \overline{B(0, 1)}$).

Note que por ϕ ter suporte compacto existe M tal que $\phi(x) \leq M, \forall x \in \mathbb{R}^n$. Logo, $\int \phi = \int_{S(\phi)} \phi \leq M|S(\phi)|$. E, como $\phi(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ temos $\int \phi \geq \int_{B(0, \frac{1}{2})} \phi \geq e^{(\frac{1}{4}-1)^{-1}} \cdot \text{vol}\{B(0, \frac{1}{2})\} > 0$. Logo, existe $L > 0$ tal que $\int \phi = L^{-1}$. Portanto, definindo $\tilde{\omega} = L\phi$ temos

$$\int \tilde{\phi}(t) dt = 1 \quad \text{para } \phi \geq 0$$

Portanto, temos que a função ϕ do exemplo anterior mostra a existência de funções que são suave, tem suporte compacto e $\int \phi = 1$. Isto justifica a hipótese do teorema a seguir.

TEOREMA 1.3.4. *Seja $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int \phi(x)dx = 1$ e f uma função contínua no $\mathbb{R}^n$. Defina, para cada $\epsilon > 0$,*

$$f_\epsilon(x) = f * \phi_\epsilon(x) = \int f(x - \epsilon y)\phi(y)dy = \frac{1}{\epsilon} \int f(y)\phi\left(\frac{x - y}{\epsilon}\right) dy$$

Então $f_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

A demonstração desse teorema pode ser vista no livro [6]. No mesmo, o autor utiliza-o para enunciar o próximo corolário.

COROLÁRIO 1.3.5. *Seja K um subespaço compacto de um aberto no $\mathbb{R}^n$. Então existe a função $\psi \in C_0^\infty$ tal que $0 \leq \psi \leq 1$ e $\psi \equiv 1$ em uma vizinhança de K . Esse tipo de função é denominada função corte.*

1.4 Propriedades de Derivação e Integrais no $\mathbb{R}^n$

Nessa seção apresentaremos de forma resumida os principais resultados e propriedades de derivadas e integrais que utilizaremos durante a monografia. Para aqueles que desejem compreender melhor tais tópicos recomendamos a leitura de [9], [4] e [13].

TEOREMA 1.4.1 (Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo). *Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$. Então*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + F(a).$$

é derivável e $F'(x) = f(x), \forall x \in [a, b]$.

TEOREMA 1.4.2 (Segundo Teorema Fundamental do Cálculo). *Se f é uma função integrável em $[a, b]$ e seja F é sua primitiva ($cF' = f$), então*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

TEOREMA 1.4.3 (Teorema de Fubini). *Seja $f \in C(R)$ integrável no retângulo $R \subset \mathbb{R}^n$, em que $R = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \alpha_1 \leq x_1 \leq \beta_1, \dots, \alpha_n \leq x_n \leq \beta_n\}$ temos que*

$$\int_R f(x)dx = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \left[\int_{\alpha_2}^{\beta_2} \dots \int_{\alpha_n}^{\beta_n} f(x_1, \dots, x_n)dx_n \dots dx_2 \right] dx_1 = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \left[\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \dots \int_{\alpha_n}^{\beta_n} f(x_1, \dots, x_n)dx_n \dots dx_1 \right] dx_2$$

A seguir, será apresentado um teorema útil para lidar com situações que serão encontradas ao decorrer dessa monografia.

LEMA 1.4.4 (Teorema da Divergência). *Seja F um campo vetorial sobre uma região $U \subset \mathbb{R}^n$, temos*

$$\int_{\partial U} \vec{F}(y) \vec{n} dS_y = \int_U \operatorname{div} F(y) dy.$$

Vale lembrar também as definições de derivada direcional, gradiente e laplaciano de uma função, as quais, são muito presentes ao estudarmos funções harmônicas.

DEFINIÇÃO 1.4.5. *Definiremos por vetor gradiente de uma função $u \in C(\mathbb{R})$ como $\nabla_x u = \nabla u(x) = \{\partial_{x_1} u, \dots, \partial_{x_n} u\}$. Ademais, também denotaremos por $\partial_{x_i} u(x) = \nabla u(x) \cdot e_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x), \forall i = 1, \dots, n$. Em que $\{e_1, \dots, e_n\}$ denota a base ortonormal usual do $\mathbb{R}^n$.*

DEFINIÇÃO 1.4.6. *Lembre-se que o laplaciano de uma função u do $\mathbb{R}^n$ é denotado por $\Delta u = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$, ou ainda, $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u(y))$.*

DEFINIÇÃO 1.4.7 (Derivada Direcional). *A derivada de f na direção de um vetor $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ é definida do seguinte modo.*

$$\frac{\partial f}{\partial u}(p) = \nabla f(p) \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + t\vec{u}) - f(p)}{t|\vec{u}|}.$$

Outras propriedades voltadas às derivadas em $\mathbb{R}^n$, que podemos destacar é a desigualdade do valor médio e uma condição da existência de valores de máximo locais.

LEMA 1.4.8. *Sejam $f \in C^2(\Omega)$ e $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) \in \Omega$. Uma condição para que $\tilde{x}$ seja um ponto de máximo local de f é que $\tilde{x}$ seja um ponto crítico de f e além disso que $\partial_{x_i}^2 f(\tilde{x}) \leq 0, \forall i = 1, \dots, n$.*

LEMA 1.4.9 (Desigualdade do valor médio). *Dado $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciável em cada ponto do segmento de reta $a, a + v$ e tal que sua restrição ao segmento fechado $[a, a + v] \subset U$ sejam contínua. Se $|f'(x)| \leq M$ para todo $x \in (a, a + v)$ então $|f(a + v) - f(a)| \leq M \cdot |v|$.*

Ademais, definiremos um tipo de função especial, a qual, será muito útil para demonstrações em capítulos posteriores.

DEFINIÇÃO 1.4.10 (Funções Radiais). *Sejam $\Omega \in \mathbb{R}^n$ um domínio e $u \in C(\Omega)$. A função u é dita radial, se a cada $c \in \Omega$ fixo, e $r = |x - c|$, tenha-se que $u(x) = u(r), \forall x \in \partial B_r(c)$. Isto é, u é dita radial, quando para cada $B_r(c)$, $u(x)$ é contante igual a $u(r)$ para todo ponto na fronteira de $B_r(c)$.*

Além disso, um dos pontos principais que iremos trabalhar ao decorrer de nossos estudos está voltado a utilizarmos formas de expressar desigualdades que relacionem integrais, dentre elas a desigualdade Hölder é uma das que mais recorre, principalmente nos últimos capítulos do nosso trabalho. Para um estudos mais aprofundado recomendamos a leitura de [3], porém, deve-se atentar que nesse livro é feita uma construção mais geral.

DEFINIÇÃO 1.4.11. *Seja $p \in [1, +\infty)$, dizemos que uma função $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ é p -integrável e pertence ao espaço $\mathbb{L}^p$ se existe $C > 0$ finito tal que*

$$\|f\|_{L^p(D)} = \left(\int_D |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C.$$

LEMA 1.4.12 (Desigualdade de Hölder). *Suponha que $1 < p < \infty$ e $p^{-1} + q^{-1} = 1$ (em que $q = \frac{p}{p-1}$). Sejam $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funções, se $f \in L^p$ e $g \in L^q$, então*

$$\int |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Vale mencionar que, o resultado acima também pode ser expresso em termos de somatório, sendo essa uma forma útil de relacionar o produto de termos de um somatório.

1.4.13 Mudança de Variáveis em Integrais

Nessa seção iremos realizar uma breve síntese voltada a mudança de variável em integrais, tendo como foco central a mudança de variável para coordenadas polares. Para uma melhor compreensão recomendamos a leitura de [3].

TEOREMA 1.4.14. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $G \in C^1(\Omega)$. Então para f uma função contínua de $G(\Omega)$, tal que $f \circ G$ é integrável em Ω , temos*

$$\int_{G(\Omega)} f(x) dx = \int_{\Omega} f \circ G |\det \nabla_x G| dx.$$

Tal teorema apresenta a forma geral de como podemos realizar uma mudança de variável em integrais. Um das principais mudanças de variáveis são as coordenadas polares ($x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$) em $\mathbb{R}^2$ e as coordenadas esféricas ($x = r \sin \phi \cos \theta, y = r \sin \phi \sin \theta, z = r \cos \phi$) em $\mathbb{R}^3$. Perceba que,

ao falarmos de uma mudança de variável um ponto importe refere-se ao jacobiano, em que, no caso das coordenadas polares é r e nas coordenadas esféricas é $r^2 \sin^2 \theta$.

Note que, no caso de dimensões arbitrária, teremos que realizar um generalização um pouco maior. Para isso, defina a esfera unitária como $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| = 1\}$, daí dado $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, denote $r = |x|$ e $x' = \frac{x}{|x|} \in S^{n-1}$, Perceba que, a função $\Phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow (0, \infty) \times S^{n-1}$ é uma bijeção suave e sua inversa $\Phi^{-1}(r, x') = rx'$ também é suave, deste modo podemos fazer realizar uma representação para uma reparametrização por coordenadas polares no $\mathbb{R}^n$.

TEOREMA 1.4.15. *Seja a função f contínua em $\mathbb{R}^n$, teremos que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} f(rx') r^{n-1} d\sigma(x') dr$$

em que $r^{n-1} = |\det \nabla_x(\Phi^{-1})|$ e $d\sigma = d(\theta_1, \dots, \theta_n)$.

Note que o caso particular da bola limitada, pode ser expresso como

$$\int_{B(0,R)} f(x) dx = \int_0^R \int_{S^{n-1}} f(rx') r^{n-1} d\sigma(x') dr.$$

Funções Harmônicas

Ao decorrer desse capítulo, serão apresentadas algumas das principais propriedades e definições de funções harmônicas. Iniciaremos expondo sobre a propriedade do valor médio e, a partir disso, desenvolveremos os demais resultados. Salientamos que a principal referência utilizada ao decorrer dessa monografia foi o livro de Han e Lin (2011) [5].

2.1 Propriedade do Valor Médio

Seja Ω um subconjunto conexo do $\mathbb{R}^n$. Definiremos a Propriedade do Valor Médio do seguinte modo

DEFINIÇÃO 2.1.1. Para $u \in C(\Omega)$ dizemos que

(i) u satisfaz a primeira propriedade de valor médio se

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y) dS_y \quad (2.1)$$

para qualquer $B_r(x) \subset \Omega$.

(ii) u satisfaz a segunda propriedade de valor médio se

$$u(x) = \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x)} u(y) dy \quad (2.2)$$

para qualquer $B_r(x) \subset \Omega$.

Em que ω_n representa a área de superfície da esfera unitária de $\mathbb{R}^n$.

Observação 2.1.2. As definições (i) e (ii) da definição acima são equivalentes. De fato, de (2.1) fazendo uma mudança de variável por coordenadas polares com $y = rz$ obtemos

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y) dS_y = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{S^{n-1}} u(rz) r^{n-1} dS_z = \frac{1}{\omega_n} \int_{S^{n-1}} u(rz) dS_z, \quad \forall r > 0.$$

Sabendo que $\int_0^r t^{n-1} dt = \frac{r^n}{n}$ temos da equação acima que

$$\frac{r^n}{n} u(x) = \int_0^r t^{n-1} u(x) dt = \frac{1}{\omega_n} \int_0^r \int_{S^{n-1}} u(rz) t^{n-1} dS_z dt,$$

assim, por coordenadas polares obtemos que $\frac{r^n}{n} u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{B(0,r)} u(y) dS_y$, isso implica que $u(x) = \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x)} u(y) dy$.

De forma análoga, podemos obter (2.1) a partir de (2.2). De fato, por (2.2) e por coordenadas polares tem-se que

$$u(x) r^n = \frac{n}{\omega_n} \int_{B_r(x)} u(y) dy = \frac{n}{\omega_n} \int_0^r \int_{S^{n-1}} u(tx') t^{n-1} dS_{x'} dt.$$

Derivando a equação acima com relação a r e pelo Teorema Fundamental do Cálculo 1.4.1 obtemos

$$u(x) n r^{n-1} = \frac{n}{\omega_n} \int_{S^{n-1}} u(rx') r^{n-1} dS_{x'},$$

assim, $u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{S^{n-1}} u(rx') dS_{x'}$. Fazendo uma mudança de variável com $y = rx'$ obtemos $u(x) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(0,r)} u(y) dS_y$.

Observação 2.1.3. (i) Podemos reescrever a primeira propriedade do valor médio do seguinte modo

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|w|=1} u(x + rw) dS_w$$

para qualquer $B_r(x) \subset \Omega$.

De fato, seja $u \in C(\Omega)$ e satisfazendo a primeira propriedade do valor médio, assim, qualquer que seja $r > 0$ temos

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y) dS_y.$$

Fazendo uma mudança de variável para $w = \frac{y-x}{r}$ (equivalentemente $y = x + wr$), temos

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y) dS_y \\ &= \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|w|=1} u(x + wr) \left| \frac{\partial y}{\partial w} \right| dS_w \\ &= \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|w|=1} u(x + wr) r^{n-1} dS_w \\ &= \frac{1}{\omega_n} \int_{|w|=1} u(x + wr) dS_w. \end{aligned}$$

(ii) Podemos reescrever a segunda propriedade do valor médio do seguinte modo

$$u(x) = \frac{n}{\omega_n} \int_{|z| \leq 1} u(x + rz) dS_z$$

para qualquer $B_r(x) \subset \Omega$.

De fato, de forma análoga, seja $u \in C(\Omega)$ e satisfazendo a segunda propriedade do valor médio, assim, qualquer que seja $x > 0$ temos

$$u(x) = \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x)} u(y) dy.$$

Assim, fazendo uma mudança de variável para $z = \frac{y-x}{r}$ teremos

$$u(x) = \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x)} u(y) dy = \frac{n}{\omega_n} \int_{|z| \leq 1} u(x + rz) dS_z$$

TEOREMA 2.1.4. *Seja $u \in C(\overline{\Omega})$ satisfazendo a propriedade do valor médio em Ω e assumindo extremos em $\overline{\Omega}$. Temos que ou u é constante ou u assume máximo e mínimo em $\partial\Omega$.*

DEMONSTRAÇÃO.

Estudaremos o máximo. Suponha que u possui máximo, isto é, existe $M = \max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) < +\infty$. Defina $\Sigma = \{x \in \Omega; u(x) = M\}$.

Note que, se concluirmos que ou $\Sigma = \Omega$ ou $\Sigma = \emptyset$, o teorema está demonstrado. Pois, se existe $x \in \overline{\Omega}$, tal que, $u(x) = \max_{x \in \overline{\Omega}} u(x)$, então no caso $\Sigma = \emptyset$, como $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, teríamos que $x \in \partial\Omega$. E no caso $\Sigma = \Omega$, teríamos que, $u(x) = M$, para cada $x \in \Omega$, portanto a função u é constante em Ω . Ademais, também é constante em $\partial\Omega$, pois se $\tilde{x} \in \partial\Omega$ então existe $\{x_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \Omega$ tal que $x_j \rightarrow \tilde{x}$. E

da continuidade de u em Ω temos $M = \lim_{j \rightarrow +\infty} u(x_j) = u(\tilde{x})$. Portanto, pela arbitrariedade de $\tilde{x} \in \partial\Omega$ temos que a função u é constante em $\overline{\Omega}$.

Deste modo, provaremos que, ou $\Sigma = \Omega$ ou $\Sigma = \emptyset$, para isso utilizaremos as propriedades de conjuntos conexos. Note que, Σ é relativamente fechado. Pois dado $\{x_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \Sigma$ tal que $x_j \rightarrow x_0$, da continuidade de u em $\overline{\Omega}$ segue que $u(x_0) = \lim_{j \rightarrow \infty} u(x_j)$, como $u_j \in \Sigma$, isso implica que, $u(x_0) = \lim_{j \rightarrow \infty} M = M$. Portanto $x_0 \in \Sigma$. Logo, Σ é fechado.

Além disso, Σ é aberto. De fato, seja $x_0 \in \Sigma$, como Ω é aberto, existe $r > 0$ tal que $\overline{B_r}(x_0) \subset \Omega$. Como u satisfaz a propriedade do valor médio, temos

$$M = u(x_0) = \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x_0)} u(y) dy,$$

em que, podemos concluir

$$\int_{B_r(x_0)} \{M - u(y)\} dy = 0$$

Como o integrando acima é não negativo e é contínuo no domínio, segue-se que $u \equiv M$ em $B_r(x_0)$. Portanto, $B_r(x_0) \subset \Sigma$, isso implica que Σ é aberto.

Deste modo, temos que Σ é um subconjunto aberto e fechado de Ω , porém, como Ω é conexo temos que $\Sigma = \Omega$ ou $\Sigma = \emptyset$.

A prova do mínimo é análoga. ■

Como consequência direta do Teorema Weierstrass e do Teorema 2.1.4 nós obtemos o seguinte corolário.

COROLÁRIO 2.1.5. *Seja $u \in C(\overline{\Omega})$ satisfazendo a propriedade da média em Ω . Se Ω é limitado, então u assume seu máximo e mínimo em $\partial\Omega$.*

A partir do exposto, pode-se compreender as primeiras propriedades de uma função que satisfaz a propriedade do valor médio. A seguir, definiremos o que são funções harmônicas.

DEFINIÇÃO 2.1.6. *Seja $u \in C^2(\Omega)$, u é dita harmônica se $\Delta u = 0$ em Ω .*

Iniciamos nossos resultados sobre funções harmônicas com a demonstração de que toda função harmônica satisfaz a propriedade do valor médio.

TEOREMA 2.1.7. *Se $u \in C^2(\Omega)$ é uma função harmônica em Ω , então u satisfaz a propriedade do valor médio em Ω .*

DEMONSTRAÇÃO. Dado que Ω é aberto, para $x \in \Omega$, existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset \Omega$. Deste modo, tome $\rho \in (0, r)$, podemos aplicar o teorema da divergência 1.4.4 em $B_\rho(0)$, e usando que u é harmônica teremos

$$0 = \int_{B_\rho(x)} \Delta u(y) dy = \int_{B_\rho(x)} \operatorname{div}(\nabla u(y)) dy = \int_{\partial B_\rho(x)} \nabla u(y) \vec{n}(y) dS_y.$$

Fazendo a mudança de variável para $y = x + \rho w$, com $|w| = 1$, teremos

$$0 = \rho^{n-1} \int_{|w|=1} \nabla u(x + \rho w) \vec{n}(x + \rho w) dS_w.$$

Como o vetor normado $\vec{n}(x + \rho w)$ é w , temos

$$0 = \rho^{n-1} \int_{|w|=1} \nabla u(x + \rho w) w dS_w.$$

Pela regra da cadeia temos

$$0 = \rho^{n-1} \int_{|w|=1} \frac{\partial}{\partial \rho} u(x + \rho w) dw.$$

Como $u \in C^2(\Omega)$ e estamos integrando sobre um compacto $|w| = 1$, temos

$$0 = \int_{|w|=1} \frac{\partial}{\partial \rho} u(x + \rho w) dw = \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{|w|=1} u(x + \rho w) dw.$$

Assim, integrando no intervalo $[0, r]$ com relação a variável ρ temos que

$$\int_0^r \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \int_{|w|=1} u(x + \rho w) dw \right\} = 0,$$

Pelo teorema fundamental do calculo teremos que

$$\int_{|w|=1} u(x + \rho w) dw \Big|_{\rho=0}^{\rho=r} = \int_{|w|=1} u(x + r w) dw - \int_{|w|=1} u(x) dw = 0.$$

Como $u(x)$ não depende do fator de integração w poderemos retirá-la da integral e lembrando que ω_n representa a integral sobre a bola unitária, teremos

$$0 = \int_{|w|=1} u(x + r w) dw - u(x) \int_{|w|=1} dw = \int_{|w|=1} u(x + r w) dw - u(x) \omega_n.$$

Assim, $\frac{1}{\omega_n} \int_{|w|=1} u(x + rw) dw = u(x)$. Portanto, pela equivalência apresentada anteriormente, temos que u satisfaz a propriedade do valor médio. ■

Note que, para uma função satisfazer a propriedade do valor médio é suficiente que ela seja contínua. Todavia, a seguir veremos que ela deve ser suave.

TEOREMA 2.1.8. *Se $u \in C(\Omega)$ satisfaz a propriedade do valor médio, então u é suave e harmônica em Ω .*

DEMONSTRAÇÃO. Para a demonstração, tomemos uma função-teste $\phi \in C_0^\infty(B_1(0))$ com $\int_{B_1(0)} \phi = 1$, de modo que, ϕ seja uma função radial, isto é, $\phi(x) = \psi(|x|)$ (um exemplo para tal função ϕ é 1.3.3). Por consequência disto, temos

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{B_1(0)} \phi = \int_0^1 \int_{|w|=1} \phi(wr) r^{n-1} dS_w dr = \int_0^1 \int_{|w|=1} \psi(|wr|) r^{n-1} dS_w dr \\ &= \int_0^1 \int_{|w|=1} \psi(r) r^{n-1} dS_w dr = \int_0^1 \psi(r) r^{n-1} \int_{|w|=1} dS_w dr = \omega_n \int_0^1 \psi(r) r^{n-1} dr, \end{aligned}$$

portanto

$$\omega_n \int_0^1 \psi(r) r^{n-1} dr = 1. \quad (2.3)$$

Agora, para cada $\epsilon > 0$, defina $\phi_\epsilon = \frac{1}{\epsilon^n} \phi\left(\frac{\cdot}{\epsilon}\right)$. Deste modo, $\forall x \in \Omega$, considere $\epsilon < \text{dist}(x, \partial\Omega)$. Considere convolução

$$u * \phi_\epsilon(x) = \int_{\Omega} u(\tilde{y}) \phi_\epsilon(\tilde{y} - x) d\tilde{y} = \int_{\Omega} u(x + y) \phi_\epsilon(y) dy.$$

Dado que, ϕ tem suporte compacto em $B_1(0)$ temos

$$u * \phi_\epsilon = \epsilon^{-n} \int_{|y| < \epsilon} u(y' + x) \phi\left(\frac{y'}{\epsilon}\right) dy.$$

Fazendo uma mudança de variável ($y' = \epsilon y$), temos

$$u * \phi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} \cdot \epsilon^n \int_{|y| < 1} u(y\epsilon + x) \phi(y) dy.$$

Por coordenadas polares, segue-se que

$$u * \phi_\epsilon(x) = \int_0^1 r^{n-1} \int_{\partial B_1(0)} u(\epsilon rw + x) \phi(rw) dw dr,$$

como $\phi(x) = \psi(|x|)$, tem-se

$$\begin{aligned} u * \phi_\epsilon(x) &= \int_0^1 r^{n-1} \int_{\partial B_1(0)} u(\epsilon rw + x) \psi(|rw|) dS_w dr = \int_0^1 r^{n-1} \int_{\partial B_1(0)} u(\epsilon rw + x) \psi(r) dS_w dr \\ &= \int_0^1 \psi(r) r^{n-1} \int_{\partial B_1(0)} u(\epsilon rw + x) dS_w dr \end{aligned}$$

como u satisfaz 2.1.1 e por (2.3), temos

$$u * \phi_\epsilon(x) = \int_0^1 \psi(r) r^{n-1} \int_{\partial B_1(0)} u(\epsilon rw + x) dS_w dr = u(x) \omega_n \int_0^1 \psi(r) r^{n-1} dr = u(x).$$

Logo, $u * \phi_\epsilon(x) = u(x)$. Portanto, pelo Teorema 1.3.4 $u * \phi_\epsilon$ é de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, portanto u é suave, em uma vizinhança de x . Portanto, pela arbitrariedade de x temos $u \in C^\infty(\Omega)$.

Falta mostrar que u é harmônica. Temos pela propriedade do valor médio 2.1.3, como na demonstração do Teorema 2.1.7, que

$$\begin{aligned} \int_{B(x,r)} \Delta u(y) dy &= \int_{\partial B(x,r)} \nabla u(y) \vec{n}(y) dS_y = r^{n-1} \int_{|w|=1} \nabla u(x + rw) w dS_w \\ &= r^{n-1} \int_{|w|=1} \frac{\partial}{\partial r} u(x + rw) dS_w = r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} \int_{|w|=1} u(x + rw) dS_w. \end{aligned}$$

Como u satisfaz 2.1.3, temos que

$$\int_{B(x,r)} \Delta u(y) dy = r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} (u(x) \omega_n) = 0. \quad (2.4)$$

Isso implica que $\Delta u = 0$. De fato, suponhamos por absurdo que não. Sendo assim, sem perda de generalidade, pode-se supor que existe x tal que $\Delta u(x) > 0$. Deste modo, pela continuidade de Δu existe $\delta > 0$ tal que $\Delta u(y) > 0$, para qualquer $y \in \overline{B(x, \delta)}$ com $B_\delta(x) \subset \Omega$. Assim, seja $m = \inf_{y \in \overline{B(x, \delta)}} \Delta u(y)$ temos

$$\int_{B(x, \delta)} \Delta u \geq \int_{B(x, \delta)} m > 0.$$

Porém por (2.4) temos que uma contradição. Portanto $\Delta u = 0$ em Ω , assim, pela Definição 2.1.6, u

é harmônica em Ω . ■

Sendo assim, podemos concluir do Teorema 2.1.7 que funções harmônicas são suaves e satisfazem a propriedade do valor médio. Deste modo, pelo Teorema 2.1.4, as funções harmônicas satisfazem o princípio do máximo. Por consequência disto, temos a unicidade das soluções para o seguinte problema de Dirichlet.

$$\begin{cases} \Delta u &= f \text{ em } \Omega \\ u &= \phi \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.5)$$

para $f \in C(\Omega)$ e $\phi \in C(\partial\Omega)$.

Note que, para domínios Ω limitados, temos que a solução de (2.5) é única. De fato, pois sendo $u, v \in C^\infty(\Omega)$ soluções de (2.5). A função $u - v$ é harmônica em Ω (pois o operador Laplace é um operador linear), assim pelo princípio do máximo temos que a função $u - v$ assume seu máximo e mínimo em $\partial\Omega$, em que, por (2.5), $(u - v)(x) = 0$, para qualquer $x \in \partial\Omega$. Isso implica, pelo princípio do máximo, que $u = v$.

Podemos compreender essa afirmação a partir dos exemplos a seguir.

Exemplo 2.1.9. *Seja $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| > 1\}$. Note que $u(x) = \log \|x\|$, $x \in \Omega$ é solução de $\Delta u = 0$. De fato, note que $u(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \log(x_1^2 + x_2^2)$. Além disso,*

$$\frac{\partial}{\partial x_1} u(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2} \quad e \quad \frac{\partial}{\partial x_2} u(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Deste modo,

$$\Delta u = \frac{x_1^2 + x_2^2 - x_1 2x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + \frac{x_1^2 + x_2^2 - x_2 2x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)} + \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)} = 0, \quad \forall (x_1, x_2) \in \Omega.$$

Mais ainda, $u(x) = \log(1) = 0$ para qualquer $x \in \partial\Omega$. Portanto a função u é solução de

$$\begin{cases} \Delta u &= 0 \text{ em } \Omega \\ u &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Porém, outra solução para esse problema é a função nula. Note que não contradiz o que fizemos, visto que, para os resultados anteriores é requerido a limitação do domínio e Ω não é limitado (apesar de ser aberto e conexo).

Exemplo 2.1.10. Podemos obter algo semelhante ao exemplo 2.1.9 para $\mathbb{R}^n$, com $n > 2$. Sejam $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| > 1\}$ e $u(x) = \|x\|^{2-n} - 1$. Note que

$$\begin{aligned}\Delta u &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (\|x\|^{2-n} - 1) = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2 \left\{ \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\left(\frac{2-n}{2}\right)} - 1 \right\} \\ &= \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} \left\{ \partial_{x_j} \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\left(\frac{2-n}{2}\right)} \right\} = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} \left\{ \frac{2-n}{2} \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\left(\frac{2-n}{2}\right)-1} (2x_j) \right\}.\end{aligned}$$

Derivando novamente obtemos

$$\Delta u = \sum_{j=1}^n \left(\frac{2-n}{2} \right) \left[\left(\left(\frac{2-n}{2} \right) - 1 \right) \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\left(\frac{2-n}{2}\right)-2} (2x_j)^2 + \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\left(\frac{2-n}{2}\right)-1} 2 \right].$$

Mais ainda,

$$\begin{aligned}\Delta u &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{2-n}{2} \right) \left(\frac{-n}{2} \right) \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\frac{2-n}{2}-2} (2x_j)^2 + \sum_{j=1}^n \left(\frac{2-n}{2} \right) 2 \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\frac{-n}{2}} \\ &= \left(\frac{2-n}{2} \right) \left(\frac{-n}{2} \right) 2^2 \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\frac{-n-2}{2}} \sum_{j=1}^n x_j^2 + \sum_{j=1}^n \left(\frac{2-n}{2} \right) 2 \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\frac{-n}{2}},\end{aligned}$$

deste modo

$$\Delta u = (2-n)(-n) \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\frac{-n}{2}} + (2-n)(n) \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\frac{-n}{2}} = 0$$

Ademais, $u(x) = 0$, para qualquer $x \in \Omega$. Portanto, novamente temos pelo menos duas soluções para o problema

$$\begin{cases} \Delta u &= 0 \text{ em } \Omega \\ u &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Perceba que os exemplos anteriores mostram que se o domínio Ω for ilimitado não teremos uma

unicidade da solução para o problema de Dirichlet proposto.

Observação 2.1.11. *Perceba que as equações propostas nos exemplos 2.1.9 e 2.1.10 não são dadas ao acaso. Podemos encontrá-las ao estudarmos uma função harmônica u que seja radial (como na Definição 1.4.10) em $\mathbb{R}^n$. Ou seja, uma função u que dependa apenas de $r = |x - a|$, para algum $a \in \mathbb{R}^n$ fixo. Deste modo, suponha que existe uma função harmônica e radial. Assim, seja $v(r) = u(x)$. Daí,*

$$v''(t) + \frac{n-1}{t}v'(t) = 0, \quad \forall t > 0. \quad (2.6)$$

De fato, como $r(x) = |x - a|$, podemos reescrever a função v como $v(r) = v(r(x))$. Assim, pela regra da cadeia obtemos a equação (2.6).

AFIRMAÇÃO: Note que, $\partial_{x_i} r(x) = \frac{1}{r}(x_i - a_i)$ e $\partial_{x_i}^2 r(x) = [r^{-1} + (-r^{-3})(x_i - a_i)]$. De fato, como $r^2(x) = |x - a|^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2$. Portanto, derivando com relação a x_i teremos

$$\begin{aligned} \partial_{x_i} [r^2(x)] &= \partial_{x_i} \left[\sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2 \right] \\ 2r \partial_{x_i} r(x) &= 2(x_i - a_i) \\ \partial_{x_i} r(x) &= \frac{1}{r}(x_i - a_i), \end{aligned}$$

derivando novamente com relação a x_i , obteremos

$$\begin{aligned} \partial_{x_i} (\partial_{x_i} r(x)) &= \partial_{x_i} [r^{-1}(x_i - a_i)] \\ \partial_{x_i}^2 r(x) &= [r^{-1} + (x_i - a_i)(-r^{-2})] \partial_{x_i} r(x) \\ \partial_{x_i}^2 r(x) &= [r^{-1} + (-r^{-3})(x_i - a_i)] \cdot \therefore \end{aligned}$$

Desse modo, de $v(r) = u(x)$, obteremos, pela regra da cadeia, que $\partial_{x_i} u(x) = \partial_{x_i} v(r(x)) = v'(r) \partial_{x_i} r(x)$ e assim

$$\partial_{x_i}^2 u(x) = \partial_{x_i}^2 v(r(x)) = \partial_{x_i} [v'(r) \partial_{x_i} r] = \partial_{x_i} v'(r) \partial_{x_i} r(x) + v'(r) \partial_{x_i}^2 r(x) = v''(r) (\partial_{x_i} r(x))^2 + v'(r) \partial_{x_i}^2 r(x),$$

pela Afirmação acima obteremos que

$$\partial_{x_i}^2 u(x) = v''(r)r^{-2}(x)(x_i - a_i)^2 + v'(r) [r^{-1} + (x_i - a_i)^2(-r^{-3})]. \quad (2.7)$$

Fazendo a soma das n derivadas parciais, a partir da equação (2.7), como u é harmônica e $r^2(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2$ temos que

$$\begin{aligned} 0 = \Delta u(x) &= \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 u(x) = v''(r)r^{-2}(x) \sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2 + v'(r) \sum_{i=1}^n [r^{-1} + (x_i - a_i)^2(-r^{-3})] \\ &= v''(r)r^{-2}r^2 + v'(r) (nr^{-1} + r^2(-r^{-3})) \\ &= v''(r) + v'(r)(nr^{-1} + (-r^{-1})) \\ &= v''(r) + v'(r)r^{-1}(n - 1). \end{aligned}$$

Assim, $v''(r) + v'(r)r^{-1}(n - 1) = 0$ e portanto

$$v''(r(x)) + \frac{n-1}{r(x)}v'(r(x)) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n / \{a\}.$$

Agora, seja $t \in (0, +\infty)$, tal que,

$$t = r(t + a_1, a_2, \dots, a_n) = [(t + a_1 - a_1)^2 + (a_2 - a_2)^2 + \dots + (a_n - a_n)^2]^{\frac{1}{2}},$$

assim

$$v''(t) + \frac{n-1}{t}v'(t) = 0, \quad \forall t > 0.$$

Desde modo, sem perda de generalidade, pode-se compreender que se $v(r) = u(x)$ então, da equação (2.6), temos

$$v'' + \frac{n-1}{r}v' = 0, \quad \text{com } r = |x - a| \text{ para } a \in \mathbb{R}^n, \text{ fixo.} \quad (2.8)$$

em que, a função

$$v(r) = \begin{cases} c_1 + c_2 \log r, & \text{se } n = 2 \\ c_3 + c_4 r^{2-n}, & \text{se } n \geq 3 \end{cases} \quad (2.9)$$

será solução da equação (2.8).

De fato, pois para $n = 2$ teremos que $v'(r) = c_2 r^{-1}$ e $v''(r) = -c_2 r^{-2}$. Portanto, multiplicando $v'(r)$ por $\frac{n-1}{r}$ e somando ambos, obtemos

$$(-c_2 r^{-2}) + \frac{n-1}{r} c_2 r^{-1},$$

como $n = 2$, temos que

$$(-c_2 r^{-2}) + c_2 r^{-1} \cdot \frac{2-1}{r} = -c_2 r^{-2} + c_2 r^{-2} = 0.$$

Portanto, segue-se que, para $n = 2$, que $v'' + \frac{n-1}{r} v' = 0$

Analogamente, para $n \geq 3$ teremos $v'(r) = c_4(2-n)r^{1-n}$ e $v''(r) = c_4(2-n)(1-n)r^{-n}$. Assim, multiplicando $v'(r)$ por $\frac{n-1}{r}$ e somando ambos obtemos

$$c_4(2-n)(1-n)r^{-n} + c_4(2-n)r^{1-n} \cdot \frac{n-1}{r} = c_4(2-n)(1-n)r^{-n} + c_4(2-n)r^{-n}(n-1)$$

como $(n-1) = -(1-n)$, temos que

$$c_4(2-n)(1-n)r^{-n} - c_4(2-n)r^{-n}(1-n) = 0.$$

Desde modo satisfazendo a equação (2.8) para $n \geq 3$.

Vale mencionar que a função v (2.9) que encontramos na observação acima é conhecida como solução fundamental, em que, por meio dela foi realizado o estudo a unicidade do problema de Dirichlet (2.5).

2.2 Estimativas do Gradiente

Ao decorrer dessa seção vamos expor sobre estimativas do gradiente de uma função harmônica e algumas aplicações.

PROPOSIÇÃO 2.2.1. *Se $u \in C(\overline{B_R})$ é harmônica em $B_R = B_R(x_0)$ então*

$$|\nabla u(x_0)| \leq \frac{n}{R} \max_{y \in \overline{B_R}(x_0)} |u(y)|$$

DEMONSTRAÇÃO. Suponha $u \in C^1(\overline{B_R})$, dado que u é harmônica em B_R , pelos Teoremas 2.1.7 e 2.1.8 temos que u é suave em B_R . Assim, temos que $\Delta(\partial_{x_i} u) = 0$ em B_R , de fato, pelo Teorema de Clairaut-Schwarz e por u ser suave em B_R , temos

$$\Delta(\partial_{x_i} u) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} \Delta u = \frac{\partial}{\partial x_i} 0 = 0.$$

Já que $\Delta(\partial_{x_i} u) = 0$, pela Definição 2.1.6, temos que $\partial_{x_i} u$ é harmônica em B_R , portanto, temos que $\partial_{x_i} u$ satisfaz a propriedade do valor médio.

Pelo Teorema da divergência, denotando $\vec{F} = u(y)e_i = (0, \dots, u(y_i), \dots, 0)$, e observe que $\text{div} \vec{F} = \partial_{x_i} u(y)$, em que a direção normal à $\partial B(x_0, R)$ de um ponto y de ∂B_R é $\frac{y-x_0}{\|y-x_0\|}$. Daí, temos

$$\begin{aligned} \partial_{x_i} u(x_0) &= \frac{n}{\omega_n R^n} \int_{B_R(x_0)} \text{div} \vec{F}(y) dy = \frac{n}{\omega_n R^n} \int_{\partial B_R(x_0)} \vec{F}(y) \cdot \frac{y-x_0}{\|y-x_0\|} dS_y \\ &= \frac{n}{\omega_n R^n} \int_{\partial B_R(x_0)} u(y)e_i \cdot \vec{v} dS_y = \frac{n}{\omega_n R^n} \int_{\partial B_R(x_0)} u(y)v_i dS_y, \end{aligned} \quad (2.10)$$

em que $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n) = \frac{y-x_0}{\|y-x_0\|}$.

Deste modo, como $|v_i| \leq \|\vec{v}\| = 1$, temos

$$|\partial_{x_i} u(x_0)| = \left| \frac{n}{\omega_n R^n} \int_{\partial B_R(x_0)} u(y)v_i dS_y \right| \leq \frac{n}{\omega_n R^n} \int_{\partial B_R(x_0)} |u(y)| dS_y.$$

Já que, u é harmônica, segue do Teorema 2.1.4 que u atinge seu máximo em $\partial B_R(x_0)$. Portanto,

$$\begin{aligned} |\partial_{x_i} u(x_0)| &\leq \frac{n}{\omega_n R^n} \int_{\partial B_R(x_0)} \max_{y \in \partial B_R(x_0)} |u(y)| dS_y \\ &\leq \frac{n}{\omega_n R^n} \max_{y \in \partial B_R(x_0)} |u(y)| \omega_n \cdot R^{n-1} = \frac{n}{R} \max_{y \in \partial B_R(x_0)} |u(y)|. \end{aligned}$$

Como $\partial B_R(x_0) \subset \overline{B_R}(x_0)$, temos $|\partial_{x_i} u(x_0)| \leq \frac{n}{R} \max_{y \in \overline{B_R}(x_0)} |u(y)|$. ■

É interessante notar que, tal proposição nos mostra que uma função harmônica pode ser estimada com uma constante que depende apenas do domínio e do raio da bola. A seguir, apresentaremos uma

relação entre $\nabla u(x_0)$ e $u(x_0)$.

PROPOSIÇÃO 2.2.2. *Suponha $u \in C(\overline{B_r})$ uma função harmônica não negativa em $B_r = B_r(x_0)$, então*

$$|\nabla u(x_0)| \leq \frac{n}{R} u(x_0).$$

DEMONSTRAÇÃO. Usando a equação (2.10) da Proposição 2.2.1, segue-se

$$\partial_{x_i} u(x_0) = \frac{n}{\omega_n R^n} \int_{\partial B_r(x_0)} u(y) v_i dS_y.$$

Assim, como $u(y) \geq 0$ para qualquer $y \in \overline{B_r}$, temos

$$|\partial_{x_i} u(x_0)| \leq \frac{n}{\omega_n R^n} \int_{\partial B_R(x_0)} |u(y)| dS_y = \frac{n}{\omega_n R^n} \int_{\partial B_R(x_0)} u(y) dS_y.$$

Usando a propriedade do valor médio 2.1.7, temos

$$|\partial_{x_i} u(x_0)| \leq \frac{n}{\omega_n R^n} \int_{\partial B_R(x_0)} u(y) dS_y = \frac{n}{R} \cdot \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x_0)} u(y) dS_y = \frac{n}{R} \cdot u(x_0).$$

■

A seguir, como consequência da Proposição 2.2.2, veremos que as únicas funções harmônicas limitadas (superiormente ou inferiormente) definidas em $\mathbb{R}^n$ são as constantes.

COROLÁRIO 2.2.3 (Teorema de Liouville). *Se uma função é harmônica em $\mathbb{R}^n$ e também é limitada superiormente (ou inferiormente) então ela é constante.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja u uma função harmônica em $\mathbb{R}^n$. Suponha, sem perda de generalidade, que $u \geq 0$. Como u é harmônica no $\mathbb{R}^n$, temos que, qualquer que seja $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $u \in C(\overline{B_r}(x_0))$ e harmônica em $B_r(x_0)$, para todo $r > 0$.

Deste modo, como u é não negativa, pela Proposição 2.2.1, temos que $|\nabla u(x_0)| \leq \frac{n}{r} u(x_0)$. Fazendo $r \rightarrow \infty$, temos

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |\nabla u(x_0)| \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n}{r} u(x_0) = 0.$$

Deste modo, temos que $\nabla u(x_0) = 0$, para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Portanto, u é constante em $\mathbb{R}^n$. ■

A seguir iremos estimar as derivadas de ordem superior de uma função harmônica. Antes de apresentá-la estabeleceremos a notação de multi-índice.

DEFINIÇÃO 2.2.4. *Seja u uma função definida em Ω . Dado $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+$ definimos*

$$\partial^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}} \quad \text{em que } |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

PROPOSIÇÃO 2.2.5. *Suponha $u \in C(\overline{B_R})$, harmônica em $B_R = B_R(x_0)$. Dado $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ (com $|\alpha| = m$) temos*

$$|\partial^\alpha u(x_0)| \leq \frac{n^m e^{m-1} m!}{R^m} \max_{y \in \overline{B_R}} |u(y)| \quad (2.11)$$

DEMONSTRAÇÃO. Tomemos $\alpha \in \mathbb{Z}_+$, com $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ e $|\alpha| = m$. A partir disso, provemos a equação (2.11) por indução em m .

Para $m = 1$, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_i = 1$ e $\alpha_j = 0, \forall j \neq i$. Sendo assim, teríamos pela Proposição 2.2.1 que

$$|\partial^\alpha u| = |\partial_{x_i} u| \leq \frac{n}{R} \max_{x \in \overline{B_R}(x_0)} |u(y)| = \frac{n^1 e^{1-1} 1!}{R^1} \max_{y \in \overline{B_R}} |u(y)|.$$

Portanto, a equação (2.11) é válida para $m = 1$. Assumiremos que existe $m \in \mathbb{N}$ de modo que (2.11) é válida para cada $k \leq m$. Seja $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ tal que $|\alpha| = m + 1$ vamos mostrar que

$$|\partial^\alpha u(x_0)| \leq \frac{n^{m+1} e^m (m+1)!}{R^{m+1}} \max_{y \in \overline{B_R}} |u(y)|.$$

Denotaremos $\beta = \alpha - e_i$ (em que $i \in \{1, \dots, n\}$ é tal que $\alpha_i > 0$). Temos $|\beta| = m$ e $\partial_{x_i}(\nabla^\beta u) = \nabla^\alpha u$. Dado, $0 < \theta < 1$, a ser escolhidos depois, defina $r = (1 - \theta)R \in (0, R)$. Aplicando a Proposição 2.2.1 em ∇^β para B_r obtemos

$$|\partial^\alpha u(x_0)| = |D_{x_i} D^\beta u(x_0)| \leq \frac{n}{r} \max_{x \in \overline{B_r}(x_0)} |\partial^\beta u|. \quad (2.12)$$

Seja $x_0 \in \overline{B_r}$, deste modo, temos que $B_{R-r}(x_0) \subset \overline{B_{R-r}}(x_0) \subset \overline{B_R}(x_0)$. A partir disso, e pela

hipótese de indução, temos

$$|\partial^\beta u(x_0)| \leq \frac{n^m e^{m-1} m!}{(R-r)^m} \max_{\overline{B_{R-r}}} |u| \leq \frac{n^m e^{m-1} m!}{(R-r)^m} \max_{\overline{B_R}} |u|.$$

Sendo assim, como $B_r(x_0) \subset B_R(x_0)$, temos

$$\max_{\overline{B_r}} |\partial^\beta u| \leq \frac{n^m e^{m-1} m!}{(R-r)^m} \max_{\overline{B_R}} |u|.$$

Deste modo, pela equação (2.12) temos

$$|\partial^\alpha u(x_0)| \leq \frac{n}{r} \frac{n^m e^{m-1} m!}{(R-r)^m} \max_{\overline{B_R}} |u|.$$

Em que, como $r = (1 - \theta)R$, temos

$$r(R-r)^m = (1 - \theta)R(R - (1 - \theta)R)^m = (R - R\theta)(R - R + \theta R)^m = R^{m+1}\theta^m(1 - \theta).$$

Assim,

$$|\partial^\alpha u(x_0)| \leq \frac{n^{m+1} e^{m-1} m!}{R^{m+1} \theta^m (1 - \theta)} \max_{\overline{B_R}} |u|.$$

Agora iremos escolher θ . Seja $\theta = \frac{m}{m+1}$, em que m é tal que $(1 + \frac{1}{n})^m < e$. Deste modo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta^m (1 - \theta)} &= \left[\left(\frac{m}{m+1} \right)^m \left(1 - \frac{m}{m+1} \right) \right]^{-1} = \left[\left(\frac{m}{m+1} \right)^m \left(\frac{1}{m+1} \right) \right]^{-1} \\ &= \left(\frac{m+1}{m} \right)^m (m+1) = \left(1 + \frac{1}{m} \right)^m (m+1) < e(m+1). \end{aligned}$$

Assim,

$$|\partial^\alpha u(x)| \leq \frac{n^{m+1} e^m (m+1)!}{R^{m+1}} \max_{\overline{B_R}} |u|$$

Sendo assim, por indução a equação (2.11) é válida. ■

É importante destacar que a Proposição 2.2.5 nos informa que toda função harmônica é real analítica. Heuristicamente, possuem uma “grande regularidade”, pertencendo a uma classe de funções “mais” regulares do que as funções C^∞ .

A seguir apresentaremos a famosa desigualdade de Harnack.

TEOREMA 2.2.6 (Desigualdade de Harnack). *Seja u uma função harmônica em Ω . Para cada subconjunto compacto $K \subset \Omega$ existe uma constante positiva $C = C(\Omega, K)$ tal que se $u \geq 0$ em Ω então*

$$\frac{1}{C}u(y) \leq u(x) \leq Cu(y) \quad \forall x, y \in K.$$

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $x_0 \in K$ e $R > 0$ tal que $B_{4R}(x_0) \subset \Omega$. Mostraremos que existe $c = c(n) > 0$ tal que

$$\frac{1}{c}u(y) \leq u(x) \leq cu(y) \quad \forall x, y \in B_R(x_0). \quad (2.13)$$

Sejam $x, y \in B_R(x_0)$. Assuma, sem perda de generalidade, que $u(y) < u(x)$. Note que,

$$y \in B_{2R}(x) \subset B_{4R}(x_0) \text{ e } x \in B_{2R}(y) \subset B_{4R}(x_0).$$

Como u é harmônica, pela propriedade do valor médio, temos que

$$u(x) = \frac{n}{R^n \omega_n} \int_{B_R(x)} u(t) dt \leq \frac{3^n}{3^n} \frac{n}{R^n \omega_n} \int_{B_{3R}(y)} u(t) dt = 3^n u(y).$$

Acima usamos o fato que $B_R(x) \subset B_{3R}(y)$. Isso ocorre, pois dado $z_1 \in B_R(x)$ temos: $\|z_1 - y\| \leq \|z_1 - x\| + \|x - y\| < R + 2R = 3R$. Além disso, $B_{3R}(y) \subset B_{4R}(x_0)$, pois, se $z_2 \in B_{3R}(y)$ então $\|z_2, x_0\| \leq \|z - y\| + \|y - x_0\| < 3R + R = 4R$.

Deste modo, temos $3^{-n}u(y) < u(y) < u(x) < 3^n u(y)$ o que prova a equação (2.13).

A partir disso, como o K é compacto, existe $x_1, \dots, x_N \in K$, satisfazendo $\frac{1}{c}u(y) \leq u(x) \leq cu(y) \quad \forall x, y \in B_R(x_i)$, para qualquer $i = 1, \dots, N$, isto é, satisfazendo (2.13), pois x_0 é arbitrário. Além disso, $\{B_R(x_i)\}_1^N$ é uma cobertura de K e com $4R < d(K, \partial\Omega)$. Deste modo, temos que, ao escolher $C = c^N$ satisfará o teorema. ■

Terminaremos essa seção mostrando que se uma função é contínua e harmônica no sentido de derivada fraca então ela é harmônica no sentido de derivada forte.

TEOREMA 2.2.7. *Se $u \in C(\Omega)$ satisfaz*

$$\int_{\Omega} u \Delta \phi = 0 \quad \forall \phi \in C_0^2(\Omega) \quad (2.14)$$

então u é harmônica em Ω .

DEMONSTRAÇÃO. Suponha que para toda bola aberta $B_r(x) \subset \Omega$ seja válido que

$$r \int_{\partial B_r(x)} u(y) dS_y = n \int_{B_r(x)} u(y) dy. \quad (2.15)$$

Sendo assim, temos

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y) dS_y \right) = \omega_n^{-1} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^{n-1}} \frac{n}{r} \int_{B_r(x)} u(y) dy \right) = n \omega_n^{-1} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^n} \int_{B_r(x)} u(y) dy \right).$$

Pela regra do produto,

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS_y \right) = n \omega_n^{-1} \left[\frac{-n}{r^{n+1}} \int_{B(x,r)} u(y) dy + \frac{1}{r^n} \frac{d}{dr} \left\{ \int_{B(0,r)} u(z+x) dz \right\} \right],$$

usando coordenadas polares,

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS_y \right) = n \omega_n^{-1} \left[\frac{-n}{r^{n+1}} \int_{B(x,r)} u(y) dy + \frac{1}{r^n} \frac{d}{dr} \left\{ \int_0^r \int_{S^{n-1}} u(sz' + x) s^{n-1} dS_{z'} ds \right\} \right].$$

Aplicando o Teorema fundamental do cálculo

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS_y \right) = n \omega_n^{-1} \left[\frac{-n}{r^{n+1}} \int_{B(x,r)} u(y) dy + \frac{1}{r^n} \int_{S^{n-1}} u(sz' + x) r^{n-1} dS_{z'} \right].$$

Considerando a mudança de variáveis $y' = sz' + x$, temos

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS_y \right) = n \omega_n^{-1} \left[\frac{-n}{r^{n+1}} \int_{B(x,r)} u(y) dy + \frac{1}{r^n} \int_{\partial B(x,r)} u(y') dS_{y'} \right].$$

Como u satisfaz (2.15) temos

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS_y \right) = 0.$$

Isso implica que existe $\tilde{c} \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y) dS_y = \tilde{c}$. Veremos que essa constante será $u(x)$ quando fizermos $r \rightarrow 0$. Note que da Observação 2.1.3, temos

$$\frac{1}{\omega_n} \int_{|w|=1} u(x + rw) dS_w = \tilde{c},$$

pela arbitrariedade de $r > 0$ temos

$$\frac{1}{\omega_n} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{|w|=1} u(x + rw) dS_w = \lim_{r \rightarrow 0} \tilde{c}.$$

Como u é contínua e o domínio de integração é compacto podemos considerar o limite do integrando, obtemos

$$\frac{1}{\omega_n} \int_{|w|=1} u(x) dS_w = \tilde{c}.$$

Portanto $\tilde{c} = \frac{1}{\omega_n} \int_{|w|=1} u(x + rw) dS_w = u(x)$.

Ademais, assumindo a validade da (2.15) temos

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y) dS_y \text{ quando } B_r(x) \subset \Omega.$$

Deste modo, pelo Teorema 2.1.8 u é harmônica.

Agora provaremos a validade da equação (2.15). Provemos inicialmente para $n \geq 3$, para simplificar tomemos $x = 0$. Defina

$$\phi(y, r) = \begin{cases} (|y|^2 - r^2)^n & ; \quad |y| \leq r \\ 0 & ; \quad |y| > r \end{cases} \quad (2.16)$$

e $\phi_k(y, r) = (|y|^2 - r^2)^{n-k} (2(n-k+1))|y|^2 + n(|y|^2 - r^2)^{n-(k-1)}$ para $|y| \leq r$ e $k = 2, 3, \dots, n$. Note que como $\phi(\cdot, r) \in C_0^2(\Omega)$ temos

$$\Delta_y \phi(y, r) = \begin{cases} 2n\phi_2(y, r) & ; \quad |y| \leq r \\ 0 & ; \quad |y| > r \end{cases}$$

De fato, note que

$$\begin{aligned} 2n\phi_2(y, r) &= 2n \left[(|y|^2 - r^2)^{n-2} (2(n-2+1))|y|^2 + n(|y|^2 - r^2)^{n-(2-1)} \right] \\ &= 2n \left[(|y|^2 - r^2)^{n-2} (2(n-1))|y|^2 + n(|y|^2 - r^2)^{n-1} \right]. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Ademais, para $|y| \leq r$ temos que $\frac{\partial \phi}{\partial y_i} = n(|y|^2 - r^2)^{n-1} 2y_i$. Mais ainda,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y_i^2} = 2n(|y|^2 - r^2)^{n-1} + n(n-1)(|y|^2 - r^2)^{n-2} 4y_i^2 = 2n \left[(|y|^2 - r^2)^{n-1} + 2y_i^2(n-1)(|y|^2 - r^2)^{n-2} \right].$$

Assim,

$$\begin{aligned} \Delta_y \phi(y, r) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} \phi(y, r) = 2n \left[n(|y|^2 - r^2)^{n-1} + 2(n-1)|y|^2(|y|^2 - r^2)^{n-2} \right] \\ &= 2n \left[n(|y|^2 - r^2)^{n-1} + 2(n-1)|y|^2(|y|^2 - r^2)^{n-2} \right]. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Logo usando (2.17) e (2.18), para $|y| \leq r$, temos que $\Delta_y \phi = 2n\phi_2(y, r)$. Ademais, por (2.14) temos

$$\int_{B_r(0)} u(y) \phi_2(y, r) dy = \int_{B_r} u(y) \Delta_y \phi(y, r) dy = 0.$$

em que ϕ_r é definida por (2.16).

A seguir mostraremos que $\int_{B(0,r)} u(y) \phi_k dy = 0$ para qualquer k . Já mostramos válido para $k = 2$. Assim, suponhamos $k \in \mathbb{Z}$ tal que vale

$$\int_{B_r(0)} u(y) \phi_k(y, r) dy = 0 \quad (2.19)$$

mostremos que vale

$$\int_{B_r(0)} u(y) \phi_{k+1}(y, r) dy = 0. \quad (2.20)$$

Diferenciando a equação (2.19) com relação a r teremos

$$0 = \frac{d}{dr} \left(\int_{B_r(0)} u(y) \phi_k(y, r) dy \right) = \frac{d}{dr} \left(\int_0^r \int_{\partial B_1(0)} s^{n-1} u(y) \phi_k(y, r) dS_y ds \right).$$

Defina $F(s, r) = \int_{\partial B_1(0)} s^{n-1} u(y) \phi_k(y, r) dS_y$. Sendo $G(u, v) = \int_0^u F(s, v) ds$, note que, $G(r, r) = \int_0^r F(s, r) ds$. Além disso, $\frac{\partial G}{\partial u}(u, v) = F(u, v)$ e $\frac{\partial G}{\partial v} \int_0^u \frac{\partial F}{\partial v}(s, v) ds$. Assim,

$$\frac{d}{dr} \left(\int_0^r F(s, r) ds \right) = \frac{d}{dr} \{G(r, r)\} = \nabla G(r, r) \cdot (1, 1) = F(r, r) + \int_0^r \frac{\partial F}{\partial v}(s, r) ds.$$

Portanto, $\frac{\partial F}{\partial v}(s, v) = \int_{S^{n-1}} s^{n-1} u(y) \frac{\partial \phi_k}{\partial v}(y, v) dS_y$, temos

$$0 = \frac{d}{dr} \left(\int_{B_r(0)} u(y) \phi_k(y, r) dy \right) = \int_{\partial B_r(0)} u(y) \phi_k(y, r) dS_y + \int_{B_r(0)} u(y) \frac{\partial}{\partial r} \phi_k(y, r) dS_y.$$

Note que, pela hipótese de indução

$$0 = \int_{\partial B_r(0)} u(y) \phi_k(y, r) dS_y + \int_{B_r(0)} u(y) \frac{\partial}{\partial r} \phi_k(y, r) dS_y = 0 + \int_{B_r(0)} u(y) \frac{\partial}{\partial r} \phi_k(y, r) dS_y.$$

Deste modo, temos que $\int_{B_r(0)} u(y) \frac{\partial}{\partial r} \phi_k(y, r) dS_y = 0$. A seguir mostraremos que $\frac{\partial}{\partial r} \phi_k(y, r) = (-2r)(2 - k + 1)\phi_{k+1}(y, r)$. De fato,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \phi_k(y, r) &= \frac{\partial}{\partial r} \left[(|y|^2 - r^2)^{n-k} (2(n - k + 1)) |y|^2 + n(|y|^2 - r^2)^{n-(k-1)} \right] \\ &= (2(n - k + 1)) |y|^2 (n - k) (-2r) (|y|^2 - r^2)^{n-k-1} + \\ &\quad + n(n - (k - 1)) (-2r) (|y|^2 - r^2)^{n-(k-1)-1} \\ &= (-2r)(n - (k - 1)) \left[2(n - k) |y|^2 (|y|^2 - r^2)^{n-(k+1)} + n(|y|^2 - r^2)^{n-k} \right] \end{aligned} \quad (2.21)$$

e

$$\begin{aligned} \phi_{k+1} &= (|y|^2 - r^2)^{n-(k+1)} (2(n - (k + 1) + 1)) |y|^2 + n(|y|^2 - r^2)^{n-((k+1)-1)} \\ &= (|y|^2 - r^2)^{n-(k+1)} (2(n - k)) |y|^2 + n(|y|^2 - r^2)^{n-k} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Logo, por (2.21) e (2.22) temos que $\frac{\partial}{\partial r} \phi_k(y, r) = (-2r)(n - k + 1)\phi_{k+1}(y, r)$. Assim, temos

$$\int_{B_r(0)} u(y) [(-2r)(n - k + 1)\phi_{k+1}(y, r)] dy = 0$$

e consequentemente temos a equação (2.20). Portanto temos que a equação (2.14) é válida para todo $k \in \mathbb{N}$. Sendo assim, fazendo $k = n - 1$ em (2.20) temos

$$0 = \int_{B_r(0)} u(y) \phi_{(n-1)+1}(y, r) dy = \int_{B_r(0)} u(y) ((n + 2)|y|^2 - nr^2) dy.$$

A seguir mostraremos que diferenciando a equação acima com relação a r obteremos (2.15). Note

que, da equação acima temos

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dr} \left[\int_{B_r(0)} u(y)((n+2)|y|^2 - nr^2) dy \right] \\
&= (n+2) \frac{d}{dr} \left[\int_{B_r(0)} u(y)|y|^2 dy \right] + (-n) \frac{d}{dr} \left[\int_{B_r(0)} u(y)r^2 dy \right] \\
&= (n+2) \frac{d}{dr} \left[\int_0^r \int_{\partial B_1(0)} s^{n-1} u(sy') |sy'|^2 dS_{y'} ds \right] + (-n) \frac{d}{dr} \left[r^2 \int_0^r \int_{S^{n-1}} s^{n-1} u(sy') dS_{y'} ds \right].
\end{aligned}$$

Pelo teorema fundamental do calculo e a regra do produto, temos

$$\begin{aligned}
0 &= (n+2) \int_{\partial B_1(0)} r^{n-1} u(y) r^2 dS_y + (-n) \left[2r \int_{B_r(0)} u(y) dy + r^2 \int_{\partial B_1(0)} r^{n-1} u(y) dS_y \right] \\
&= (n+2) r^2 \int_{\partial B_r(0)} u(y) dS_y + (-n) r^2 \int_{\partial B_r(0)} u(y) dS_y + (-n) 2r \int_{B_r(0)} u(y) dy \\
&= 2r^2 \int_{\partial B_r(0)} u(y) dS_y + (-n) 2r \int_{B_r(0)} u(y) dy.
\end{aligned}$$

Logo, $0 = r \int_{\partial B_r(0)} u(y) dS_y + (-n) \int_{B_r(0)} u(y) dy$. Daí, concluindo que

$$n \int_{B_r(0)} u(y) dy = r \int_{\partial B_r(0)} u(y) dS_y$$

■

Funções Subharmônicas

Nesse capítulo trabalharemos com uma novo tipo de funções, as quais, são denominadas funções subharmônicas e mostraremos que a partir do princípio do máximo poderemos resgatar resultados importantes voltados às funções harmônicas para essa nova tipo de funções. A partir disso, estudaremos a Hölder continuidade de uma função a partir de um problema de Dirichet.

3.1 Princípio do Máximo para Funções Subharmônicas

DEFINIÇÃO 3.1.1. *Seja $u \in C^2(\Omega)$, dizemos que u é uma função subharmônica se $\Delta u \geq 0$ em Ω .*

Iniciaremos nossos estudos de funções subharmônicas com um resultado que pode ser interpretado como sendo o Princípio do Máximo para funções subharmônicas.

TEOREMA 3.1.2. *Seja que $u \in C^2(B_1) \cap C(\overline{B_1})$ uma função subharmônica em $B_1 = B_1(0)$. Temos*

$$\sup_{B_1(0)} u \leq \sup_{\partial B_1(0)} u$$

DEMONSTRAÇÃO. Inicialmente, defina $u_\epsilon(x) = u(x) + \epsilon|x|^2$, com $\epsilon > 0$ e $x \in B_1(0)$. Note que, $\Delta u_\epsilon > 0$, pois,

$$\Delta u_\epsilon = \Delta(u(x)) + \epsilon \Delta(|x|^2) = \Delta u(x) + \epsilon \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2 \left[\sum_{i=1}^n (x_i)^2 \right] = \Delta(u(x)) + \epsilon \sum_{j=1}^n 2 = \Delta(u(x)) + 2n\epsilon.$$

Como u é uma função subharmônica, temos que, $\Delta u_\epsilon = \Delta(u(x)) + 2n\epsilon \geq 2n\epsilon > 0$. Note que, u_ϵ não possui um máximo interior em $B_1(0)$. De fato pelo Lema 1.4.8, existisse $\tilde{x} \in B_1(0)$ tal que $\tilde{x}$

fosse máximo local de u_ϵ , então, $\partial_{x_i}^2 u_\epsilon(\tilde{x}) \leq 0$ isso implicaria que $\Delta u_\epsilon(\tilde{x}) \leq 0$, contradizendo o fato de que $\Delta u_\epsilon > 0$. Portanto, u_ϵ não pode assumir um máximo no interior, em particular, é válido que

$$\sup_{B_1} u_\epsilon \leq \sup_{\partial B_1} u_\epsilon.$$

Portanto, temos

$$\sup_{x \in B_1} u(x) \leq \sup_{x \in B_1} u_\epsilon \leq \sup_{\partial B_1} u_\epsilon = \sup_{x \in \partial B_1} (u(x) + \epsilon|x|^2) = \sup_{x \in \partial B_1} u(x) + \epsilon.$$

Deste modo, temos $\sup_{x \in B_1} u(x) \leq \sup_{x \in \partial B_1} u(x) + \epsilon$, $\epsilon > 0$. Fazendo $\epsilon \rightarrow 0$, teremos que $\sup_{x \in B_1} u(x) \leq \sup_{x \in \partial B_1} u(x)$. ■

Observação 3.1.3. *O resultado acima verificado para $B_1(0)$ pode ser estendido para qualquer domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado.*

De fato, para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto limitado, pode-se realizar um processo análogo à demonstração Teorema 3.1.2. Para isso, dado $\epsilon > 0$, defina

$$u_\epsilon(x) = \begin{cases} u(x) + \epsilon|x|^2 & \text{se } 0 \in \Omega \\ u(x) + \epsilon[\min\{\text{dist}(x, \partial\Omega)\}]^2 & \text{se } 0 \notin \Omega \end{cases}$$

Podemos mostrar de forma análoga ao teorema anterior que a função u satisfaz $\sup_{x \in \Omega} u(x) \leq \sup_{x \in \partial\Omega} u(x)$.

3.2 Aplicações

Nessa seção apresentaremos uma série de propriedades e aplicações relacionadas ao princípio do máximo para funções subharmônicas. Dentre elas poderemos realizar a estimativa do gradiente destas funções e uma forma representar a inequação de Harnack.

PROPOSIÇÃO 3.2.1. *Suponha que u é harmônica em $B_1(0)$. Então temos que*

$$\sup_{B_{\frac{1}{2}}} |\nabla u| \leq c \sup_{x \in \partial B_1} |u(x)| \quad (3.1)$$

em que $c = c(n)$ é uma constante positiva dependendo apenas de n . Em particular, para qualquer $\alpha \in [0, 1]$ temos $|u(x) - u(y)| \leq c|x - y|^\alpha \sup_{x \in \partial B_1} u(x)$, para quaisquer $x, y \in B_{\frac{1}{2}}$.

Antes de apresentar a demonstração do teorema acima, se faz necessário enunciar alguns lemas os quais servirão como ferramentas para a demonstração.

LEMA 3.2.2. *Sejam $f, g \in C^2(\mathbb{R}^n)$, então o laplaciano de fg é dado por*

$$\Delta(fg) = \Delta f g + 2 \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}(f) \partial_{x_i}(g) + f \Delta g.$$

PROVA. Dado $f, g \in C^2(\mathbb{R}^n)$ temos

$$\begin{aligned} \Delta(fg) &= \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2(fg) = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}(g \partial_{x_i} f + f \partial_{x_i} g) \\ &= \sum_{i=1}^n (g \partial_{x_i}^2 f + \partial_{x_i} g \partial_{x_i} f + \partial_{x_i} f \partial_{x_i} g + f \partial_{x_i}^2 g) \\ &= \sum_{i=1}^n (g \partial_{x_i}^2 f) + \sum_{i=1}^n 2 (\partial_{x_i} f \partial_{x_i} g) + \sum_{i=1}^n (f \partial_{x_i}^2 g) \\ &= \Delta(f)g + 2 \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}(f) \partial_{x_i}(g) + f \Delta(g). \end{aligned}$$

■

O lema acima traz a representação do laplaciano do produto de duas funções. Agora poderemos demonstrar a Proposição 3.2.1.

PROVA (da Proposição 3.2.1). Se u é uma função harmônica em $B_1 = B_1(0)$, então $\Delta(|\nabla u|^2) = 2 \sum_{i,j=1}^n (\nabla_{x_{ij}} u)^2 \geq 0$. De fato, como $\nabla u = (\partial_{x_1} u, \partial_{x_2} u, \dots, \partial_{x_n} u)$, $|\nabla u|^2 = \sum_{i=1}^n (\partial_{x_i} u)^2$. Daí

$$\Delta(|\nabla u|^2) = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2 |\nabla u|^2 = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2 \left[\sum_{i=1}^n (\partial_{x_i} u)^2 \right].$$

Utilizando as regras operacionais de diferenciação, obtemos que

$$\begin{aligned} \Delta(|\nabla u|^2) &= \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2 \left[\sum_{i=1}^n (\partial_{x_i} u)^2 \right] = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} \left[2 \sum_{i=1}^n (\partial_{x_i} u) \partial_{x_j} \partial_{x_i} u \right] \\ &= \sum_{j=1}^n \left[2 \sum_{i=1}^n (\partial_{x_i} u) \partial_{x_j}^2 \partial_{x_i} u + 2 \sum_{i=1}^n (\partial_{x_j} \partial_{x_i} u) \partial_{x_j} \partial_{x_i} u \right]. \end{aligned}$$

Pelo teorema de Schawarz e pelo fato da função u ser harmônica em B_1 , temos

$$\begin{aligned}\Delta(|\nabla u|^2) &= \sum_{j=1}^n \left[2 \sum_{i=1}^n (\partial_{x_i} u) \partial_{x_i} \partial_{x_j}^2 u + 2 \sum_{i=1}^n (\partial_{x_j} \partial_{x_i} u)^2 \right] = 2 \sum_{i=1}^n (\partial_{x_i} u) \partial_{x_i} \Delta u + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\partial_{x_i} \partial_{x_j} u)^2 \quad (3.2) \\ &= 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\partial_{x_i} \partial_{x_j} u)^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Deste modo, $|\nabla u|^2$ é uma função subharmônica em B_1 . Note que dada $\phi \in C_0^\infty(B_1)$ temos, pelo Lema 3.2.2 e por (3.2), temos

$$\begin{aligned}\Delta(\phi|\nabla u|^2) &= \Delta(\phi)|\nabla u|^2 + 2 \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} \phi \partial_{x_i} (|\nabla u|^2) + \phi \Delta(|\nabla u|^2) \\ &= \Delta(\phi)|\nabla u|^2 + 2 \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} \phi \partial_{x_i} \left(\sum_{j=1}^n (\partial_{x_j} u)^2 \right) + \phi \left(2 \sum_{i,j=1}^n (\partial_{x_i} \partial_{x_j} u)^2 \right) \\ &= \Delta(\phi)|\nabla u|^2 + 4 \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} \phi \partial_{x_j} u \partial_{x_i} \partial_{x_j} u + 2\phi \sum_{i,j=1}^n (\partial_{x_i} \partial_{x_j} u)^2.\end{aligned}$$

A seguir considere $\phi = \eta^2$ para algum $\eta \in C_0^\infty(B_1)$, com $\eta \equiv 1$ em $B_{\frac{1}{2}}(0)$. Note que, $\Delta(\eta^2) = 2\eta\Delta\eta + 2 \sum_{i=1}^n (\partial_{x_i} \eta)^2$, de fato

$$\Delta(\eta^2) = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 (\eta^2) = 2 \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} (\eta \partial_{x_i} \eta) = 2 \sum_{i=1}^n [\eta \partial_{x_i}^2 \eta + (\partial_{x_i} \eta)^2] = 2\eta\Delta\eta + 2 \sum_{i=1}^n (\partial_{x_i} \eta)^2. \quad (3.3)$$

Ademais, pelo 3.2.2 temos

$$\begin{aligned}\Delta[|\eta^2|\nabla u|^2] &= \Delta(\eta^2)|\nabla u|^2 + 2 \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} (\eta^2) \partial_{x_i} (|\nabla u|^2) + (\eta^2) \Delta(|\nabla u|^2) \\ &= \Delta(\eta^2)|\nabla u|^2 + 8\eta \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} \eta \partial_{x_j} u \partial_{x_i} \partial_{x_j} u + (\eta^2) \Delta(|\nabla u|^2).\end{aligned}$$

Pelas equações (3.2) e (3.3) temos

$$\begin{aligned}
\Delta [|\eta^2|\nabla u|^2] &= \left[2\eta\Delta\eta + 2\sum_{i=1}^n (\partial_{x_i}\eta)^2 \right] |\nabla u|^2 + 8\eta \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_{x_i}\eta \partial_{x_j} u \partial_{x_i} \partial_{x_j} u + \eta^2 \left[2\sum_{i=1}^n (\partial_{x_i} \partial_{x_j} u)^2 \right] \\
&= 2\eta\Delta\eta |\nabla u|^2 + 2|\nabla u|^2 \sum_{i=1}^n (\partial_{x_i}\eta)^2 + 8\eta \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_{x_i}\eta \partial_{x_j} u \partial_{x_i} \partial_{x_j} u + 2\eta^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\partial_{x_i} \partial_{x_j} u)^2 \\
&= 2\eta\Delta\eta |\nabla u|^2 + 2|\nabla u|^2 |\nabla \eta|^2 + 8\eta \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_{x_i}\eta \partial_{x_j} u \partial_{x_i} \partial_{x_j} u + 2\eta^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\partial_{x_i} \partial_{x_j} u)^2.
\end{aligned}$$

Uma vez apresentado o valor do laplaciano acima, buscaremos uma forma de limitá-lo inferiormente por uma constante dependendo apenas de η e de $|\nabla u|^2$. Para isso, note que

$$\begin{aligned}
\Delta [\eta^2 |Du|^2] &= 2\eta\Delta\eta |\nabla u|^2 + 2|\nabla u|^2 |\nabla \eta|^2 + 8\eta \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}\eta \partial_{x_j} u \partial_{x_i} \partial_{x_j} u + 2\eta^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\partial_{x_i} \partial_{x_j} u)^2 \\
&= 2\eta\Delta\eta |\nabla u|^2 + 8|\nabla u|^2 |\nabla \eta|^2 - 6|\nabla u|^2 |\nabla \eta|^2 + 8\eta \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}\eta \partial_{x_j} u \partial_{x_i} \partial_{x_j} u \\
&\quad + 2\eta^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\partial_{x_i} \partial_{x_j} u)^2 \\
&= 2\eta\Delta\eta |\nabla u|^2 - 6|\nabla u|^2 |\nabla \eta|^2 + \left(8|\nabla u|^2 |\nabla \eta|^2 + 8\eta \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_{x_i}\eta \partial_{x_j} u \partial_{x_i} \partial_{x_j} u + \right. \\
&\quad \left. + 2\eta^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\partial_{x_i} \partial_{x_j} u)^2 \right).
\end{aligned}$$

Utilizando a definição dos módulos e a propriedade do somatório da soma, segue-se que

$$\begin{aligned}
\Delta [\eta^2 |\nabla u|^2] &= 2\eta\Delta\eta |\nabla u|^2 - 6|\nabla u|^2 |\nabla \eta|^2 + \left(8|\nabla u|^2 |\nabla \eta|^2 + 8 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \eta \partial_{x_i}\eta \partial_{x_j} u \partial_{x_i} \partial_{x_j} u + \right. \\
&\quad \left. + 2\eta^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\partial_{x_i} \partial_{x_j} u)^2 \right) \\
&= 2\eta\Delta\eta |\nabla u|^2 - 6|\nabla u|^2 |\nabla \eta|^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 4|\partial_{x_j} u|^2 |\partial_{x_i} \eta|^2 + 4\eta \partial_{x_i}\eta \partial_{x_j} u \partial_{x_i} \partial_{x_j} u \right. \\
&\quad \left. + \eta^2 (\partial_{x_i} \partial_{x_j} u)^2 \right) \\
&= 2\eta\Delta\eta |\nabla u|^2 - 6|\nabla u|^2 |\nabla \eta|^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [2|\partial_{x_j} u| |\partial_{x_i} \eta| + \eta \partial_{x_i} \partial_{x_j} u]^2.
\end{aligned}$$

Como $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [2|\partial_{x_j} u| |\partial_{x_i} \eta| + \eta \partial_{x_i} \partial_{x_j} u]^2 \geq 0$, temos que

$$\Delta [\eta^2 |\nabla u|^2] \geq 2\eta \Delta \eta |\nabla u|^2 - 6|\nabla u|^2 |\nabla \eta|^2 = (2\eta \Delta \eta - 6|\nabla \eta|^2) |\nabla u|^2.$$

Como $2\eta \Delta \eta - 6|\nabla \eta|^2$ é contínua e possui suporte compacto, existe $C > 0$ dependendo apenas de η tal que

$$\Delta [\eta^2 |\nabla u|^2] \geq (2\eta \Delta \eta - 6|\nabla \eta|^2) |\nabla u|^2 \geq -C |\nabla u|^2.$$

Observe que, $\Delta(u^2) = 2|\nabla u|^2 + 2u\Delta u = 2|\nabla u|^2 \geq 0$, pois u é uma função harmônica. Como $\Delta[\eta^2 |Du|^2] \geq -C |Du|^2$, existe $\alpha > 0$ (basta considerar $2\alpha > \frac{C}{2}$) tal que

$$\Delta(\eta^2 |Du|^2 + \alpha u^2) = \Delta(\eta^2 |Du|^2) + \Delta(\alpha u^2) \geq -C |Du|^2 + 2\alpha |Du|^2 \geq 0.$$

Portanto $\Delta(\eta^2 |Du|^2 + \alpha u^2) \geq 0$. Deste modo, $(\eta^2 |Du|^2 + \alpha u^2)$ é subharmônica em B_1 . Pelo Teorema 3.1.2, temos $\sup_{B_1} (\eta^2 |Du|^2 + \alpha u^2) \leq \sup_{\partial B_1} (\eta^2 |Du|^2 + \alpha u^2)$. Como η tem suporte compacto em B_1 e $\eta \equiv 1$ em $B_{\frac{1}{2}}$, temos

$$\begin{aligned} \sup_{B_{\frac{1}{2}}} \{|Du|^2\} &\leq \sup_{B_{\frac{1}{2}}} \{|\nabla u|^2 + \alpha u^2\} = \sup_{B_{\frac{1}{2}}} (\eta^2 |\nabla u|^2 + \alpha u^2) \leq \sup_{B_1} (\eta^2 |\nabla u|^2 + \alpha u^2) \\ &\leq \sup_{\partial B_1} (0 |\nabla u|^2 + \alpha u^2) = \sup_{\partial B_1} \alpha u^2. \end{aligned}$$

Daí $\sup_{B_{\frac{1}{2}}} |\nabla u|^2 \leq \alpha \sup_{\partial B_1} (u^2)$. Assim $\sup_{B_{\frac{1}{2}}} |\nabla u| \leq \alpha^{\frac{1}{2}} \sup_{\partial B_1} (u)$. Lembre-se que α depende apenas de C , o qual, depende apenas da função η esta somente depende apenas de B_1 . Assim, $\tilde{C} = \alpha^{\frac{1}{2}}$, é uma constante dimensional satisfazendo $\sup_{B_{\frac{1}{2}}} (|Du|) \leq \tilde{C} \sup_{\partial B_1} (u)$, o que demonstra a primeira parte do teorema.

Para a segunda, como a função $f(x) = a^x$ é decrescente no intervalo $[0, 1]$ quando $(a \in (0, 1))$ temos que $(a = |x - y|)$ $f(1) \leq f(\alpha)$. Para $a = |x - y|$ temos $|x - y| \leq |x - y|^\alpha$. Note que no caso $|x - y| = 0$ a desigualdade que queremos provar torna-se trivial. Pela desigualdade do valor médio 1.4.9, $x, y \in B_{\frac{1}{2}}$ temos $|u(x) - u(y)| \leq |x - y| |\nabla u(tx + y(1 - t))|$, para algum $t \in [0, 1]$. Deste modo, teremos que $|u(x) - u(y)| \leq |x - y|^\alpha |\nabla u(tx + y(1 - t))|$, para algum $t \in [0, 1]$. Como

$x, y \in B_{\frac{1}{2}}$ e u é harmônica, temos $|u(x) - u(y)| \leq |x - y|^\alpha \sup_{B_{\frac{1}{2}}} |Du|$, assim de (3.2) temos que

$$|u(x) - u(y)| \leq |x - y|^\alpha C \sup_{z \in \partial B_1} |u(z)|.$$

■

Podemos mostrar o resultado acima para bolas de raio e centro arbitrários.

COROLÁRIO 3.2.3. *Sejam $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ e u uma função harmônica na bola $B(x_0, r)$. Existe $c = c(n) > 0$, tal que*

$$\sup_{B(x_0, \frac{r}{2})} |\nabla u| \leq \frac{c}{r} \sup_{\partial B(x_0, r)} |u|$$

em particular $|u(x) - u(y)| \leq \frac{c}{r^\alpha} |x - y|^\alpha \sup_{\partial B(x_0, r)} |u|$, para quaisquer $x, y \in B(x_0, \frac{r}{2})$ e $\alpha \in [0, 1]$.

DEMONSTRAÇÃO. Defina $v(x) = u(x_0 + rx)$, note que v é uma função harmônica em $B(0, 1)$, pois $x \in B(0, 1)$ é equivalente $x_0 + rx \in B(x_0, r)$. Note que, $\partial_{x_j} v(x) = r \partial_{x_j} u(x_0 + rx)$ e $\partial_{x_j}^2 v(x) = r^2 \partial_{x_j}^2 u(x_0 + rx)$, logo $\Delta v(x) = r^2 \Delta u(x_0 + rx) = 0$.

Agora, reescreva $u(y) = v(\frac{y-x_0}{r})$. Daí $\partial_j u(y) = \partial_j v(\frac{y-x_0}{r}) r^{-1}$, e consequentemente

$$\sup_{y \in B(x_0, \frac{r}{2})} |\nabla u(y)| = \sup_{y \in B(x_0, \frac{r}{2})} \left| r^{-1} \nabla v\left(\frac{y-x_0}{r}\right) \right|,$$

Observando que, $y \in B(x_0, \frac{r}{2})$ é equivalente a existir $z \in B(0, \frac{1}{2})$ tal que $y = x_0 + zr$, segue da Proposição 3.2.1, que

$$\begin{aligned} \sup_{y \in B(x_0, \frac{r}{2})} |\nabla u(y)| &= r^{-1} \sup_{x \in B(0, \frac{1}{2})} |\nabla v(x)| \leq cr^{-1} \sup_{x \in \partial B(0, 1)} |v(x)| \\ &= cr^{-1} \sup_{x \in \partial B(0, 1)} |u(x_0 + rx)| = cr^{-1} \sup_{y \in \partial B(x_0, r)} |u(y)| \end{aligned}$$

Concluindo a demonstração da primeira parte do corolário. Ademais, dados $x, y \in B(x_0, \frac{r}{2})$ temos que $\frac{x-x_0}{r}, \frac{y-x_0}{r} \in B(0, \frac{1}{2})$. Assim, pela Proposição 3.2.1

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &= \left| v\left(\frac{x-x_0}{r}\right) - v\left(\frac{y-x_0}{r}\right) \right| = c \left| \frac{x-y}{r} \right|^\alpha \sup_{z \in \partial B_1} |u(x_0 + rz)| \\ &= cr^{-\alpha} |x - y|^\alpha \sup_{w \in \partial B(x_0, r)} |u(w)|. \end{aligned}$$

■

A seguir iremos estimar o gradiente da composição da função logarítmica com uma função harmônica. Essa estimativa será importante para mostrar a surpreendente propriedade: “existe uma constante C (que apenas da dimensão) de modo que da dada uma função harmônica em $B_1(0)$ temos que $u(x_1) \leq Cu(x_2)$, para cada $x_1, x_2 \in B_{\frac{1}{2}}(0)$.”

LEMA 3.2.4. *Se u é uma função harmônica não negativa em B_1 , então existe $c = c(n) > 0$ tal que*

$$\sup_{B_{\frac{1}{2}}} |\nabla \log u| \leq c.$$

DEMONSTRAÇÃO. Assumiremos que a função $u > 0$ em $B_1(0)$. Iniciaremos a demonstração, apresentando algumas afirmações que são essenciais para a demonstração do lema. Assim, defina $v = \log u$.

AFIRMAÇÃO 3.2.5. $\Delta v = -|\nabla v|^2$.

De fato,

$$\begin{aligned} \Delta v &= \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 [\log v] = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} [u^{-1} \partial_{x_i} u] = \sum_{i=1}^n [\partial_{x_i} u^{-1} \partial_{x_i} u + u^{-1} \partial_{x_i}^2 u] \\ &= \sum_{i=1}^n [-u^{-2} (\partial_{x_i} u)^2 + u^{-1} \partial_{x_i}^2 u] = -u^{-2} |Du|^2 + u^{-1} \Delta u. \end{aligned}$$

Como a função u é harmônica,

$$\begin{aligned} \Delta v &= -u^{-2} |Du|^2 = -[u^{-2} |Du|^2] = -\left[\sum_{i=1}^n u^{-2} (\partial_{x_i} u)^2 \right] = -\left[\sum_{i=1}^n (u^{-1} \partial_{x_i} u)^2 \right] \\ &= -\left[\sum_{i=1}^n (\partial_{x_i} v)^2 \right] = -|\nabla v|^2. \therefore \end{aligned}$$

Sendo assim, estudaremos o gradiente da função v , para isso, defina $w = |Dv|^2$.

AFIRMAÇÃO 3.2.6. *Note que $\Delta w + 2 \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} v \partial_{x_i} w = 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\partial_{x_i} \partial_{x_j} v)^2$.*

De fato,

$$\begin{aligned} \Delta w &= \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 \left[\sum_{j=1}^n (\partial_{x_j} v)^2 \right] = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} \left[2 \sum_{j=1}^n (\partial_{x_j} v) \partial_{x_i} \partial_{x_j} v \right] \\ &= 2 \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n (\partial_{x_j} v) \partial_{x_i}^2 \partial_{x_j} v + \sum_{j=1}^n (\partial_{x_i} \partial_{x_j} v) \partial_{x_i} \partial_{x_j} v \right]. \end{aligned}$$

Pelo teorema de Schawarz, temos que

$$\Delta w = 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\partial_{x_j} v) \partial_{x_j} (\Delta v) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\partial_{x_i} \partial_{x_j} v)^2. \quad (3.4)$$

Por outro lado, lembrando que $w = |\nabla v|^2$ e $\Delta v = -|\nabla v|^2$ (Afirmação 3.2.5) temos

$$2 \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} v \partial_{x_i} w = 2 \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} v \partial_{x_i} (|\nabla v|^2). \quad (3.5)$$

Deste modo, por (3.4) e (3.5) temos

$$\Delta w + 2 \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} v \partial_{x_i} w = 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\partial_{x_i} \partial_{x_j} v)^2 \dots$$

Além disso, teremos que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\partial_{x_i} \partial_{x_j} v)^2 \geq \frac{|\nabla v|^4}{n}$.

AFIRMAÇÃO 3.2.7. *Segue de 3.2.5 que*

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\partial_{x_i} \partial_{x_j} v)^2 \geq \sum_{i=1}^n (\partial_{x_i} \partial_{x_j} v)^2 \geq \frac{1}{n} (\Delta v)^2 = \frac{|\nabla v|^4}{n}. \quad (3.6)$$

De fato, denotando $k \in \{1, \dots, n\}$ o número natural tal que $\max_{i \in \{1, \dots, n\}} \partial_{x_i}^2 v = \partial_{x_k}^2 v$. Note que,

$$(\Delta v)^2 = \left[\sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 v \right]^2 \leq n (\partial_{x_k}^2 v)^2 \leq n \sum_{i=1}^n (\partial_{x_i}^2 v)^2.$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\partial_{x_i} \partial_{x_j} v)^2 \geq \sum_{i=1}^n (\partial_{x_i} \partial_{x_i} v)^2 \geq \frac{1}{n} (\Delta v)^2 \geq \frac{|\nabla v|^4}{n}.$$

Em que na última igualdade usamos a Afirmação 3.2.5. $\therefore$

Agora estamos prontos para estimar a propriedade enunciada no lema. Para isso, como na demonstração do Lema 3.2.4 precisaremos de uma função corte adequada. Assim, tome a função não negativa $\phi \in C_0^\infty(B_1)$ tal que $\phi = \eta^4$, para algum $\eta \in C_0^\infty(B_1)$, em que $0 \leq \eta \leq 1$ e $\eta \equiv 1$ em $B_{\frac{1}{2}}$.

AFIRMAÇÃO 3.2.8. Temos que,

$$\begin{aligned} \Delta(\eta^4 w) + 2 \sum_{i=1}^n D_i v D_i(\eta^4 w) &= 2\eta^4 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (D_{ij} v)^2 + 12\eta^2 w |D\eta|^2 + 4w\eta^3 \Delta\eta + \\ &+ 16\eta^3 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_i \eta D_j v D_{ij} v + 8w\eta^3 \sum_{i=1}^n D_i v D_i \eta. \end{aligned}$$

De fato, pelo Lema 3.2.2, temos

$$\Delta(\eta^4 w) = \Delta(\eta^4) w + 2 \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}(\eta^4) \partial_{x_i} w + \eta^4 \Delta w \quad (3.7)$$

Daí, pela definição do laplaciano segue que

$$\begin{aligned} \Delta(\eta^4) &= \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2(\eta^4) = 4 \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}(\eta^3 \partial_{x_i} \eta) = 4 \sum_{i=1}^n [3\eta^2 (\partial_{x_i} \eta)^2 + \eta^3 \partial_{x_i}^2 \eta] = \\ &= 12\eta^2 \sum_{i=1}^n (\partial_{x_i} \eta)^2 + 4\eta^3 \Delta(\eta) = 12\eta^2 |\nabla \eta|^2 + 4\eta^3 \Delta(\eta). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Por outro lado, lembrando que $w = |\nabla v|^2$ temos

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}(\eta^4) \partial_{x_i} w &= 2 \sum_{i=1}^n \left[(4\eta^3 \partial_{x_i} \eta) \partial_{x_i} \sum_{j=1}^n (\partial_{x_j} v)^2 \right] = 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (4\eta^3 \partial_{x_i} \eta) 2 \partial_{x_j} v \partial_{x_i} \partial_{x_j} v \\ &= 16\eta^3 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_{x_i} \eta \partial_{x_j} v \partial_{x_i} \partial_{x_j} v. \end{aligned} \quad (3.9)$$

e

$$2 \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} v \partial_{x_i}(\eta^4 w) = 2\eta^4 \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} v \partial_{x_i} w + 2w \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} v \partial_{x_i}(\eta^4) = 2\eta^4 \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} v \partial_{x_i} w + 8w\eta^3 \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} v \partial_{x_i} \eta. \quad (3.10)$$

Deste modo, da equação (3.7) usando as equações (3.8), (3.9) e (3.10) e colocando η^4 em evidência

temos

$$\begin{aligned} \Delta(\eta^4 w) + 2 \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} v \partial_{x_i} (\eta^4 w) &= \eta^4 \left(\Delta w + 2 \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} v \partial_{x_i} w \right) + 12\eta^2 w |\nabla \eta|^2 + 4w\eta^3 \Delta(\eta) \\ &\quad + 16\eta^3 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_{x_i} \eta \partial_{x_j} v \partial_{x_i} \partial_{x_j} v + 8w\eta^3 \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} v \partial_{x_i} \eta. \end{aligned}$$

A partir da Afirmação acima 3.2.8, pela Afirmação 3.2.6 temos que

$$\begin{aligned} \Delta(\eta^4 w) + 2 \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} v \partial_{x_i} (\eta^4 w) &= 2\eta^4 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\partial_{x_i} \partial_{x_j} v)^2 + 12\eta^2 w |\nabla \eta|^2 + 4w\eta^3 \Delta \eta + \\ &\quad + 16\eta^3 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_{x_i} \eta \partial_{x_j} v \partial_{x_i} \partial_{x_j} v + 8w\eta^3 \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} v \partial_{x_i} \eta. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Agora, novamente como antes, iremos limitar inferiormente a equação acima, com a finalidade de demonstrarmos a desigualdade do lema. Para realizar essa limitação realizaremos três passos, nos quais, limitaremos as parcelas dessa equação (3.11).

AFIRMAÇÃO 3.2.9. *Note que as parcelas, da equação (3.11), $\eta^4 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\partial_{x_i} \partial_{x_j} v)^2 + 12\eta^2 w |\nabla \eta|^2 + 16\eta^3 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_{x_i} \eta \partial_{x_j} v \partial_{x_i} \partial_{x_j} v \geq -52\eta^2 |\nabla v|^2 |\nabla \eta|^2$.*

De fato, como $w = |\nabla v|^2$, realizando um completamento de quadrados temos

$$\begin{aligned} \eta^4 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\partial_{x_i} \partial_{x_j} v)^2 + 12\eta^2 w |\nabla \eta|^2 + 16\eta^3 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_{x_i} \eta \partial_{x_j} v \partial_{x_i} \partial_{x_j} v &= \\ = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [\eta^4 (\partial_{x_i} \partial_{x_j} v)^2 + 16\eta^3 \partial_{x_i} \eta \partial_{x_j} v \partial_{x_i} \partial_{x_j} v + 12\eta^2 (\partial_{x_j} v)^2 (\partial_{x_i} \eta)^2] &+ 52\eta^2 |\nabla v|^2 |\nabla \eta|^2 - 52\eta^2 |\nabla v|^2 |\nabla \eta|^2 \\ = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [\eta^2 \partial_{x_i} \partial_{x_j} v + 8\eta \partial_{x_j} v \partial_{x_i} \eta]^2 - 52\eta^2 |Dv|^2 |D\eta|^2 &\geq -52\eta^2 |Dv|^2 |D\eta|^2. \end{aligned} \quad (3.12)$$

AFIRMAÇÃO 3.2.10. *Temos que $8w\eta^3 \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} v \partial_{x_i} \eta \geq -8|\nabla v|^3 |\nabla \eta|^3$.*

De fato, pela desigualdade de Hölder 1.4.12, temos que $-\eta^3 \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} v \partial_{x_i} \eta \leq |\nabla v| |\nabla \eta|^3$. Como, η é não negativa, podemos multiplicar a inequação acima por $-8|\nabla v|^2$, assim obtemos

$$8|\nabla v|^2 \eta^3 \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} v \partial_{x_i} \eta \geq -8|Dv|^3 |D\eta|^3$$

. Ademais, como $w = |\nabla v|^2$, temos $8w\eta^3 \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} v \partial_{x_i} \eta \geq -8|Dv|^3 |D\eta| \eta^3$. $\therefore$

Observação 3.2.11. Pela desigualdade (3.6), teremos $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\partial_{x_i} \partial_{x_j} v)^2 \geq n^{-1} |\nabla v|^4 = n^{-1} w^2$. Além disso, como η é não negativa, temos $4\eta^3 \Delta \eta \geq -4\eta^3 |\Delta \eta|$. $\therefore$

Deste modo, pelas Afirmções 3.2.9, 3.2.10 e Observação 3.2.11 da equação (3.11) obtemos

$$\Delta(\eta^4 w) + 2 \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} v \partial_{x_i} (\eta^4 w) \geq n^{-1} \eta^4 |\nabla v|^4 - 8\eta^3 |\nabla \eta| |\nabla v|^3 - 4\eta^2 (\eta |\Delta \eta| + C |\nabla \eta|^2) |\nabla v|^2.$$

Como a função η tem suporte compacto em B_1 , existe uma constante positiva C tal que

$$\Delta(\eta^4 w) + 2 \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} v \partial_{x_i} (\eta^4 w) \geq n^{-1} \eta^4 |\nabla v|^4 - C \eta^3 |\nabla v|^3 - C \eta^2 |\nabla v|^2 \quad (3.13)$$

em que, $C = C(n, \eta) > 0$.

Agora, melhoraremos a estimativa acima (3.13). Para isso considere os números positivos arbitrários α e β . Note que

$$\begin{aligned} \Delta(\eta^4 w) + 2 \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} v \partial_{x_i} (\eta^4 w) &\geq n^{-1} \eta^4 |\nabla v|^4 - C \eta^3 |\nabla v|^3 - C \eta^2 |\nabla v|^2 \\ &= n^{-1} \eta^4 |\nabla v|^4 + C \left[\frac{-2\eta^2 |\nabla v|^2}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{2} \eta |\nabla v| + \frac{\eta^4}{\alpha^2} |\nabla v|^4 + \frac{\alpha^2}{4} \eta^2 |\nabla v|^2 \right] + \\ &\quad - C \frac{\eta^4}{\alpha^2} |\nabla v|^4 - C \frac{\alpha^2 \eta^2}{4} |\nabla v|^2 - C \eta^2 |\nabla v|^2. \end{aligned}$$

Perceba que $C \left[\frac{-2\eta^2 |\nabla v|^2}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{2} \eta |\nabla v| + \frac{\eta^4}{\alpha^2} |\nabla v|^4 + \frac{\alpha^2}{4} \eta^2 |\nabla v|^2 \right] \geq 0$, visto que

$$C \left[\frac{-2\eta^2 |\nabla v|^2}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{2} \eta |\nabla v| + \frac{\eta^4}{\alpha^2} |\nabla v|^4 + \frac{\alpha^2}{4} \eta^2 |\nabla v|^2 \right] = \left[\frac{\alpha}{2} \eta |\nabla v| - \frac{\eta^2 |\nabla v|^2}{\alpha} \right]^2 \geq 0.$$

Daí, temos

$$\begin{aligned}
\Delta(\eta^4 w) + 2 \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} v \partial_{x_i} (\eta^4 w) &\geq n^{-1} \eta^4 |\nabla v|^4 - C \frac{\eta^4}{\alpha^2} |\nabla v|^4 - C \frac{\alpha^2 \eta^2}{4} |\nabla v|^2 - C \eta^2 |\nabla v|^2 \\
&= \eta^4 |\nabla v|^4 \left(\frac{1}{n} - \frac{C}{\alpha^2} \right) + (-|\nabla v|^2 \eta^2) \left(C \frac{\alpha^2}{4} + C \right) \\
&= \eta^4 |\nabla v|^4 \left(\frac{1}{n} - \frac{C}{\alpha^2} \right) + \left(C \frac{\alpha^2}{4} + C \right) \left[-2\beta |\nabla v|^2 \eta^2 \frac{1}{2\beta} + \beta^2 \eta^4 |\nabla v|^4 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4\beta^2} - \beta^2 \eta^4 |\nabla v|^4 - \frac{1}{4\beta^2} \right].
\end{aligned}$$

Note que, $\left(C \frac{\alpha^2}{4} + C \right) \left[-2\beta |\nabla v|^2 \eta^2 \frac{1}{2\beta} + \beta^2 \eta^4 |\nabla v|^4 + \frac{1}{4\beta^2} \right] \geq 0$, pois

$$\left(C \frac{\alpha^2}{4} + C \right) \left[-2\beta |\nabla v|^2 \eta^2 \frac{1}{2\beta} + \beta^2 \eta^4 |\nabla v|^4 + \frac{1}{4\beta^2} \right] = \left(C \frac{\alpha^2}{4} + C \right) \left[\beta \eta^2 |\nabla v|^2 - \frac{1}{2\beta} \right]^2 \geq 0.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
\Delta(\eta^4 w) + 2 \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} v \partial_{x_i} (\eta^4 w) &\geq \eta^4 |\nabla v|^4 \left(\frac{1}{n} - \frac{C}{\alpha^2} \right) + \left(C \frac{\alpha^2}{4} + C \right) \left[-\beta^2 \eta^4 |\nabla v|^4 - \frac{1}{4\beta^2} \right] \\
&= \left(\frac{1}{n} - \frac{C}{\alpha^2} - \frac{\beta^2 \alpha^2 C}{4} - \beta^2 C \right) \eta^4 |\nabla v|^4 - \frac{1}{4\beta^2} \left(C \frac{\alpha^2}{4} + C \right).
\end{aligned}$$

Agora, escolheremos as constantes α e β apropriadas. Portanto, tome α e β , tais que $\frac{1}{n} - \frac{C}{\alpha^2} - \frac{\beta^2 \alpha^2 C}{4} - \beta^2 C > 0$. Denotando $\alpha^2 = x$ e $\beta^2 = y$, queremos que $\frac{1}{n} - \frac{C}{x} - \frac{yxC}{4} - yC > 0$, isso corre se, e somente se, $\frac{x}{n} - C - \frac{yx^2C}{4} - yxC > 0$, isso implica que, $-x^2 \frac{yC}{4} + x \left(\frac{1}{n} + Cy \right) - C > 0$. Sendo assim, $x^2 \frac{yC}{4} - x \left(\frac{1}{n} + cy \right) + c < 0$, daí $x^2 yC - 4x \left(\frac{1}{n} + Cy \right) + 4C < 0$. Perceba que, a última desigualdade ocorrer se, e somente se, no polinômio $p(x) = x^2 yC - 4x \left(\frac{1}{n} + Cy \right) + 4C$, tenha-se que $\text{discr}_x > 0$ (em que discr_x representa o discriminante do polinômio com relação a variável x). Portanto, temos que $\text{discr}_x = 16 \left(\frac{1}{n} + Cy \right)^2 - 16yC^2 > 0$, daí temos que $\text{discr}_x = 16(n^{-2} + 2Cyn^{-1} + C^2 y^2) - 16yC^2 > 0$, isto implica que $\text{discr}_x = n^{-2} + 2Cyn^{-1} + C^2 y^2 - yC^2 > 0$, sendo assim, $\text{discr}_x = C^2 y^2 + (2Cn^{-1} - C^2)y + n^{-2} > 0$.

Agora, devemos encontrar os valores de y que satisfaçam tal propriedade. Para isso, seja $g(y) = C^2 y^2 + (2Cn^{-1} - C^2)y + n^{-2}$, note que $g(0) = n^{-2} > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e como g é contínua, segue-se da conservação de sinal que existe $h > 0$ tal que $g(y) > 0$, $\forall y \in (0, h)$. Portanto, fixando $y > 0$, de modo que, $g(y) > 0$ escolheremos $x > 0$ tal que $Cyx^2 - 4x(n^{-1}Cy) + 4C < 0$, porém essa inequação é

satisfeita quando $x \in \left(\frac{4(n^{-1}-Cy)-\sqrt{\text{discr}_x}}{2cy}, \frac{4(n^{-1}-Cy)+\sqrt{\text{discr}_x}}{2cy} \right)$, além disso, queremos que $n^{-1} - Cy > 0$, isto é, $y < (nC)^{-1}$.

Portanto, considere $0 < y \leq \min \left\{ \frac{1}{nC}, h \right\}$ e $0 < x < \frac{4(n^{-1}-Cy)+\sqrt{\text{discr}_x}}{2cy}$, assim defina $\tilde{C} = \left(\frac{1}{n} - \frac{C}{\alpha^2} - \frac{\beta^2 \alpha^2 C}{4} - \beta^2 C \right) > 0$. Deste modo, teremos a partir da Equação (3.13) que

$$\Delta(\eta^4 w) + 2 \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} v \partial_{x_i} (\eta^4 w) \geq \tilde{C} \eta^4 |\nabla v|^4 - \frac{1}{4\beta^2} \left(C \frac{\alpha^2}{4} + C \right).$$

Por fim, defina $\tilde{\tilde{C}} = \frac{1}{4\beta^2} \left(C \frac{\alpha^2}{4} + C \right)$, sendo assim,

$$\Delta(\eta^4 w) + 2 \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} v \partial_{x_i} (\eta^4 w) \geq \tilde{C} \eta^4 |\nabla v|^4 - \tilde{\tilde{C}} \quad (3.14)$$

em que, tanto $\tilde{\tilde{C}}$ como $\tilde{C}$ são constantes positivas que depende apenas da dimensão.

Deste modo, suponha que $\eta^4 w$ atinja seu máximo em um ponto $x_0 \in B_1$. Pelo Lema 1.4.8, temos que $D(\eta^4 w)(x_0) = 0$ e $\Delta(\eta^4 w)(x_0) \leq 0$. Da da desigualdade (3.14), teremos que

$$0 \geq \Delta(\eta^4 w)(x_0) + 2 \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} v \partial_{x_i} (\eta^4 w)(x_0) \geq \tilde{C} \eta^4 |\nabla v|^4 - \tilde{\tilde{C}},$$

isso implica que $\tilde{C} \eta^4 |\nabla v|^4 - \tilde{\tilde{C}} \leq 0$, daí $\tilde{C} \eta^4 |\nabla v|^4 \leq \tilde{\tilde{C}}$. Deste modo, temos $\eta^4 |\nabla v|^4 \leq \frac{\tilde{\tilde{C}}}{\tilde{C}}$. Deste modo, lembrando que $w = |\nabla v|^2$ e denotando $c = c(n) = \frac{\tilde{\tilde{C}}}{\tilde{C}} > 0$, teremos $\eta^4 w^2(x_0) \leq c(n)$. Se, $w(x_0) \geq 1$, então $\eta^4 w^2(x_0) \leq c(n)$. Caso contrário, como $0 \leq \eta \leq 1$, teremos que $\eta^4 w(x_0) \leq w(x_0) \leq \eta^4(x_0)$. Em ambos os casos, teremos que $\eta^4 w \leq c(n)$ em B_1 . Daí, temos que $\max_{B_1} \eta^4 w \leq c(n)$. Pela definição da função w ($w = |\nabla v|^2$), isso é equivalente a dizer que, $\max_{B_1} \eta^4 |Dv|^2 \leq c(n)$. Como ambas as funções são positivas, temos que $\max_{B_{\frac{1}{2}}} \eta^4 |Dv|^2 \leq \max_{B_1} \eta^4 |Dv|^2 \leq c(n)$. Daí, por $\eta \equiv 1$ em $B_{\frac{1}{2}}$, segue-se que $\max_{B_{\frac{1}{2}}} |Dv|^2 \leq c(n)$, equivalentemente, temos $\max_{B_{\frac{1}{2}}} |Dv| \leq c^{\frac{1}{2}}(n)$, o que finaliza a demonstração. ■

COROLÁRIO 3.2.12. *Se u é harmônica em $B_1(0)$, então existe $c = c(n) > 0$ tal que $u(x_1) \leq c(n) u(x_2)$ para cada $x_1, x_2 \in B_{\frac{1}{2}}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Considere $0 \leq u(x_1) \leq u(x_2)$, visto que $u(x_1) = u(x_2)$ é trivial. Deste modo pela definição do gradiente de uma função, temos que, $\nabla f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot \alpha_i$, para $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}$. Logo, temos que, $\nabla(\log u(tx_2 + (1-t)x_1)) = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} \{\log x\}(a) \partial_{x_i}(x_1 - x_2)$. Agora assumiremos que

$u > 0$ em B_1 . Daí, para $x_1, x_2 \in B_{\frac{1}{2}}$, segue do Teorema Fundamental do Cálculo que

$$\log \frac{u(x_1)}{u(x_2)} = \log u(x_1) - \log u(x_2) = \int_0^1 \frac{d}{dt} \{\log [tx_1 + (1-t)x_2]\} dt.$$

A partir da regra da cadeia

$$\begin{aligned} \log \frac{u(x_1)}{u(x_2)} &= \int_0^1 \nabla \{\log [tx_1 + (1-t)x_2]\} \cdot (x_1 - x_2) dt \\ &\leq \left| \int_0^1 \nabla \{\log [tx_1 + (1-t)x_2]\} \cdot (x_1 - x_2) dt \right| \\ &\leq |x_1 - x_2| \int_0^1 |\nabla \{\log [tx_1 + (1-t)x_2]\}| dt. \end{aligned}$$

Como $B_{\frac{1}{2}}$ é convexo, temos que, $(tx_1 + (1-t)x_2) \in B_{\frac{1}{2}}$, para cada $t \in [0, 1]$ e $x_1, x_2 \in B_{\frac{1}{2}}$. Portanto,

$$\log \frac{u(x_1)}{u(x_2)} \leq |x_1 - x_2| \int_0^1 \max_{B_{\frac{1}{2}}} |\nabla(\log u)| dt = |x_1 - x_2| \max_{B_{\frac{1}{2}}} |\nabla(\log u)|.$$

Portanto, segue do Lema 3.2.4 que, existe $C = C(n) > 0$ tal que

$$\log \frac{u(x_1)}{u(x_2)} \leq |x_1 - x_2| \max_{B_{\frac{1}{2}}} |\nabla(\log u)| \leq |x_1 - x_2| C(n).$$

Aplicando a exponencial em ambos os lados dessa desigualdade, obteremos

$$\frac{u(x_1)}{u(x_2)} \leq e^{|x_1 - x_2| C(n)}.$$

Portanto, denotando $c = |x_1 - x_2| C(n)$, temos $u(x_1) \leq e^c u(x_2)$, para cada $x_1, x_2 \in B_1$. ■

A seguir nós apresentaremos uma estimativa por baixo da derivada normal de uma função harmônica.

PROPOSIÇÃO 3.2.13. *Suponha que $u \in C(\overline{B_1})$ é uma função harmônica em $B_1 = B_1(0)$. Se existe $x_0 \in \partial B_1$ tal que $u(x) \leq u(x_0)$, para todo $x \in \overline{B_1}$. Então, $\frac{\partial u}{\partial n}(x_0) \geq c(u(x_0) - u(0))$.*

DEMONSTRAÇÃO. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $u(x) < u(x_0)$, para todo $x \in B_1$, pois, caso contrário, pelo Teorema 2.1.4, u é constante. Nesse caso a expressão $\frac{\partial u}{\partial n}(x_0) \geq c(u(x_0) - u(0))$ é sempre válida.

Uma vez compreendido isso, poderemos seguir com a demonstração. Deste modo, dado $\alpha > 0$ defina $v(x) = e^{-\alpha|x|^2} - e^{-\alpha}$. Note que $v(x) \geq 0$, $\forall x \in B_1$. Mais ainda,

$$\begin{aligned}\Delta v &= \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 \left(e^{-\alpha|x|^2} - e^{-\alpha} \right) = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} \left[e^{-\alpha|x|^2} (-2\alpha x_i) \right] = \sum_{i=1}^n \left[e^{-\alpha|x|^2} (-2\alpha) + e^{-\alpha|x|^2} 4\alpha^2 x_i^2 \right] \\ &= e^{-\alpha|x|^2} (-2n\alpha + 4\alpha^2|x|^2) .\end{aligned}$$

A partir disso, $\Delta v(x) > e^{-\alpha|x|^2} (-2n\alpha + \alpha^2)$, quando $|x| > \frac{1}{2}$. E, $-2n\alpha + \alpha^2 > 0$ se, e somente se, $\alpha > 2n$. Assim, escolhendo $\alpha \geq 2n + 1$ temos $\Delta v(x) > 0$, quando $|x| > \frac{1}{2}$. Portanto v é subharmônica em $A = B_1 \setminus B_{\frac{1}{2}}$.

Agora, para cada $\epsilon > 0$ defina $h_\epsilon(x) = u(x) - u(x_0) + \epsilon v(x)$. Note que, h_ϵ também é uma função subharmônica em A , pois $\Delta h_\epsilon = \Delta u(x) + \epsilon \Delta v(x)$ e $\Delta h_\epsilon = \epsilon \Delta v(x) > 0$ em A (pela observação acima e lembrando que $\Delta u = 0$). Além disso, $h_\epsilon(x_0) = u(x_0) - u(x_0) + \epsilon v(x_0) = 0$ (pois $x_0 \in \partial B_1$) e ainda

$$h_\epsilon(x) = u(x) - u(x_0) + \epsilon v(x) = u(x) - u(x_0) + \epsilon 0 = u(x) - u(x_0), \quad \forall x \in \partial B_1.$$

Como por hipótese $u(x) \leq u(x_0)$, $\forall x \in \partial B_1$, temos $h_\epsilon(x) \leq 0$, para todo $x \in \partial B_1$.

Ademais, já que $u(x) < u(x_0)$ quando $|x| < \frac{1}{2}$, podemos escolher ϵ suficientemente pequeno tal que $h_\epsilon(x) < 0$. [De fato, seja $x_1 \in B_{\frac{1}{2}}$ tal que $u(x) \leq u(x_1)$, $\forall x \in B_{\frac{1}{2}}$. Assim, $u(x) - u(x_0) \leq u(x_1) - u(x_0)$, por hipótese, teremos que $-H := u(x_1) - u(x_0) < 0$. Portanto, para $x \in B_{\frac{1}{2}}$, tem-se $h_\epsilon(x) \leq -H + \epsilon v(x) \leq -H + \epsilon \left[e^{-\frac{\alpha}{4}} - e^{-\alpha} \right]$. Assim $h_\epsilon(x) < 0$, quando $|x| < \frac{1}{2}$ e $0 \leq \epsilon \leq H \left(e^{-\frac{\alpha}{4}} - e^{-\alpha} \right)^{-1}$].

Segue do Teorema 3.1.2 que h_ϵ assume seu máximo no ponto x_0 em A . Isso implica que, $\frac{\partial h_\epsilon}{\partial \vec{n}}(x_0) \geq 0$, ou ainda, $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x_0) \geq -\epsilon \frac{\partial v}{\partial \vec{n}}(x_0) = 2\alpha\epsilon e^{-\alpha}$. De fato, pela Definição 1.4.7, teremos

$$\frac{\partial h_\epsilon}{\partial \vec{n}}(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{h_\epsilon(x_0 + tx_0) - h_\epsilon(x_0)}{t} \geq 0,$$

a inequação segue pelo fato de h_ϵ assume seu máximo em x_0 , e consequentemente $h_\epsilon(x_0 + tx_0) - h_\epsilon(x_0) \leq 0$ e $t \leq 0$.

Além disso, temos que $\frac{\partial h_\epsilon}{\partial \vec{n}}(x_0) = \partial_{\vec{n}} u(x_0) + \epsilon \partial_{\vec{n}} v(x_0) \geq 0$, isso implica que $\partial_{\vec{n}} u(x_0) \geq -\epsilon \partial_{\vec{n}} v(x_0)$.

Note que

$$\begin{aligned}\partial_{\bar{n}}v(x_0) &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{v(x_0 + tx_0) - v(x_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{[e^{-\alpha|x_0+tx_0|^2} - e^{-\alpha}]}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{[e^{-\alpha|x_0|^2|1+t|^2} - e^{-\alpha}]}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{[e^{-\alpha|1+t|^2} - e^{-\alpha}]}{t}.\end{aligned}$$

Aplicar L'Hopital,

$$\partial_{\bar{n}}v(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0^-} -\alpha 2(1+t)e^{\alpha|1+t|^2} = -2\alpha e^{-\alpha}.$$

Portanto, $-\epsilon \partial_{\bar{n}}v(x_0) = 2\epsilon \alpha e^{-\alpha} > 0$. Logo $\frac{\partial u}{\partial \bar{n}}(x_0) \geq -\epsilon \frac{\partial v}{\partial \bar{n}}(x_0) = 2\alpha \epsilon e^{-\alpha}$.

Deste modo, iremos estimar a ϵ de forma adequada para concluir a demonstração. Para isso, defina $w(x) = u(x_0) - u(x)$, note que $w(x) > 0$ em B_1 , pois por hipótese $u(x) \leq u(x_0)$ em B_1 . Além disso, w é uma função harmônica não negativa em B_1 . Portanto, segue do Corolário 3.2.12, obteremos $\inf_{B_{\frac{1}{2}}} w \geq c(n)w(0)$, e usando que $w(x) = u(x_0) - u(x)$, temos $\max_{B_{\frac{1}{2}}} u \leq u(x_0) - c(n)(u(x_0) - u(0))$. Sendo assim, como temos $\frac{\partial u}{\partial \bar{n}}(x_0) \geq 2\alpha \epsilon e^{-\alpha}$, basta escolher $0 < \gamma < 2\alpha e^{-\alpha}$ e definir $\epsilon = \gamma c(n)(u(x_0) - u(0))$. Assim $\frac{\partial u}{\partial \bar{n}}(x_0) \leq c(n)(u(x_0) - u(0))$. ■

Finalizaremos esta seção mostrando que a partir dos resultados estudados até agora, nós podemos mostrar propriedades interessantes continuidade Hölder de funções harmônicas. Antes disso, apresentaremos a definição continuidade Hölder.

DEFINIÇÃO 3.2.14. *Sejam $\alpha \in (0, 1)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que uma função ϕ é de classe $C^\alpha(\Omega)$, se existe $C > 0$, tal que $|\phi(x) - \phi(y)| \leq C|x - y|^\alpha$, para cada $x, y \in \Omega$. Defina também, $\|\phi\|_\alpha = \sup_{x, y \in \bar{\Omega}, x \neq y} \frac{|\phi(x) - \phi(y)|}{|x - y|^\alpha}$ para cada $\phi \in C^\alpha(\Omega)$.*

Dada uma função contínua no fecho de uma bola aberta e harmônica na bola aberta, apresentaremos uma relação entre a norma Hölder da função na bola aberta e na fronteira da bola. Iniciaremos com uma estimativa particular em que escolhemos um ponto fixo da fronteira o qual suporemos assumir o valor nulo.

LEMA 3.2.15. *Denote $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$. Dado $\alpha \in (0, 1)$, se $u \in C(\overline{B(e_1, 1)})$ é harmônica em $B(e_1, 1)$ e*

$\phi \in C^\alpha(\partial B(e_1, 1))$ são tais que $u(0) = \phi(0) = 0$ e $u = \phi$ em $\partial B(e_1, 1)$, então

$$\sup_{x \in B(e_1, 1)} \frac{|u(x)|}{|x|^{\frac{\alpha}{2}}} \leq 2^{\frac{\alpha}{2}} \sup_{x \in \partial B(e_1, 1)} \frac{|\phi(x)|}{|x|^\alpha}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Defina $K = \sup_{x \in \partial B(e_1, 1)} \frac{|\phi(x)|}{|x|^\alpha}$. Note que, $\phi(x) \leq K|x|^\alpha$, para todo $x \in \partial B(e_1, 1)$. Por outro lado, se $x = (x_1, \dots, x_n) \in \partial B(e_1, 1)$ temos

$$1 = \|x - e_1\|^2 = x^2 - 2xe_1 + \|e_1\|^2 = \|x\|^2 - 2x_1 + 1.$$

Assim, $\|x\| = (2x_1)^{\frac{1}{2}}$. Logo,

$$\phi(x) \leq k|x|^\alpha = 2^{\frac{\alpha}{2}} K x_1^{\frac{\alpha}{2}}, \quad \forall x \in \partial B(e_1, 1). \quad (3.15)$$

Por outro lado, definindo $v(x) = 2^{\frac{\alpha}{2}} k x_1^{\frac{\alpha}{2}}$ temos que

$$\Delta v(x) = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} \left\{ 2^{\frac{\alpha}{2}} k x_1^{\frac{\alpha}{2}} \right\} = \partial_{x_1} \left\{ 2^{\frac{\alpha}{2}} k x_1^{\frac{\alpha}{2}} \right\} = 2^{\frac{\alpha}{2}} k \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\alpha}{2} - 1 \right) x_1^{\frac{\alpha}{2}-1} \leq 0, \quad \forall x \in B(e_1, 1),$$

pois $\frac{\alpha}{2} - 1 \leq \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$ (quando $\alpha \in (0, 1]$). Assim, $-v$ é subharmônica. Como u é harmônica temos que $u - v$ é subharmônica. Consequentemente, usando 3.15, temos

$$(u - v)(y) \leq v(x) = 2^{\frac{\alpha}{2}} k x_1^{\frac{\alpha}{2}} \leq 2^{\frac{\alpha}{2}} k |x|^{\frac{\alpha}{2}}, \quad \forall x \in B(e_1, 1).$$

Analogamente, $-u(x) \leq 2^{\frac{\alpha}{2}} k |x|^{\frac{\alpha}{2}}, \forall x \in B(e_1, 1)$. Portanto, $|u(x)| \leq 2^{\frac{\alpha}{2}} k |x|^{\frac{\alpha}{2}}, \forall x \in B(e_1, 1)$. Assim, concluindo que $\sup_{x \in B(e_1, 1)} \frac{|u(x)|}{|x|^{\frac{\alpha}{2}}} \leq 2^{\frac{\alpha}{2}} k = 2^{\frac{\alpha}{2}} \sup_{x \in \partial B(e_1, 1)} \frac{|\phi(x)|}{|x|^\alpha}$. ■

A seguir vamos permitir que o valor do ponto fixo da fronteira não seja nulo

LEMA 3.2.16. Denote $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$. Dado $\alpha \in (0, 1)$, se $u \in C(\overline{B(e_1, 1)})$ é harmônica em $B(e_1, 1)$ e $\phi \in C^\alpha(B(e_1, 1))$ são tais que $u = \phi$ em $\partial B(e_1, 1)$ então

$$\sup_{x \in B(e_1, 1)} \frac{|u(x) - u(0)|}{|x|^{\frac{\alpha}{2}}} \leq 2^{\frac{\alpha}{2}} \sup_{x \in \partial B(e_1, 1)} \frac{|\phi(x) - \phi(0)|}{|x|^\alpha}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Dados u e ϕ como no enunciado, defina $\tilde{u}(x) = u(x) - u(0)$ e $\tilde{\phi}(x) = \phi(x) - \phi(0)$.

Note que u e ϕ satisfazem as hipóteses do Lema 3.2.15. Assim,

$$\sup_{x \in B(e_1, 1)} \frac{|u(x) - u(0)|}{|x|^{\frac{\alpha}{2}}} = \sup_{x \in B(e_1, 1)} \frac{|\tilde{u}(x)|}{|x|^{\frac{\alpha}{2}}} \leq 2^{\frac{\alpha}{2}} \sup_{x \in \partial B(e_1, 1)} \frac{|\tilde{\phi}(x)|}{2^\alpha}.$$

■

A seguir vamos apresentar uma versão do lema acima para bola centrada na origem, com raio um (a qual é a bola que queremos estudar).

LEMA 3.2.17. Denote $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$. Dado $\alpha \in (0, 1)$, se $u \in C(\overline{B(e_1, 1)})$ é harmônica em $B(e_1, 1)$ e $\phi \in C^\alpha(B(e_1, 1))$ são tais que $u = \phi$ em $\partial B(e_1, 1)$ então

$$\sup_{x \in B(0, 1)} \frac{|u(x) - u(-e_1)|}{|x|^{\frac{\alpha}{2}}} \leq 2^{\frac{\alpha}{2}} \sup_{x \in \partial B(0, 1)} \frac{|\phi(x) - \phi(-e_1)|}{|x|^\alpha}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Dados u e ϕ como no enunciado defina $\tilde{u}(x) = u(-e_1 + x)$, $\forall x \in \overline{B(e_1, 1)}$ e $\tilde{\phi}(x) = \phi(-e_1 + x)$, $\forall x \in \partial B(e_1, 1)$. Note que $\tilde{u} \in C(\overline{B(e_1, 1)})$, $\Delta \tilde{u} = 0$ em $B(e_1, 1)$, $\tilde{\phi} \in C^\alpha(\partial B(e_1, 1))$ e $\tilde{u} = \tilde{\phi}$ em $\partial B(e_1, 1)$. Pelo Lema 3.2.16 temos

$$\sup_{x \in B(e_1, 1)} \frac{|\tilde{u}(x) - \tilde{u}(0)|}{|x|^{\frac{\alpha}{2}}} \leq 2^{\frac{\alpha}{2}} \sup_{x \in \partial B(e_1, 1)} \frac{|\tilde{\phi}(x) - \tilde{\phi}(0)|}{|x|^\alpha}. \quad (3.16)$$

Pelas definições de $\tilde{u}$ e $\tilde{\phi}$ e pela Equação (3.16), temos

$$\begin{aligned} \sup_{y \in B(0, 1)} \frac{|u(y) - u(-e_1)|}{|y - e_1|^{\frac{\alpha}{2}}} &= \sup_{x \in B(e_1, 1)} \frac{|u(-e_1) - u(-e_1 + 0)|}{|x|^{\frac{\alpha}{2}}} = \sup_{x \in B(e_1, 1)} \frac{|\tilde{u}(x) - \tilde{u}(0)|}{|x|^{\frac{\alpha}{2}}} \\ &\leq 2^{\frac{\alpha}{2}} \sup_{x \in \partial B(e_1, 1)} \frac{|\tilde{\phi}(x) - \tilde{\phi}(0)|}{|x|^\alpha} = 2^{\frac{\alpha}{2}} \sup_{x \in \partial B(e_1, 1)} \frac{|\phi(x) - \phi(-e_1)|}{|x + e_1|^\alpha} \end{aligned}$$

em que na primeira igualdade fizemos uma mudança de variável fazendo $x = y + e_1$. ■

O lema acima foi demonstrado para um ponto fixo na fronteira da bola. A seguir permitiremos que o ponto da fronteira seja arbitrário.

LEMA 3.2.18. Denote $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$. Dado $\alpha \in (0, 1)$, se $u \in C(\overline{B(0, 1)})$ é harmônica em $B(0, 1)$ e

$\phi \in C^\alpha(B(0,1))$ são tais que $u = \phi$ em $\partial B(0,1)$ então

$$\sup_{x \in B(0,1)} \frac{|u(x) - u(x_0)|}{|x - x_0|^{\frac{\alpha}{2}}} \leq 2^{\frac{\alpha}{2}} \sup_{x \in \partial B(0,1)} \frac{|\phi(x) - \phi(x_0)|}{|x - x_0|^\alpha}, \text{ para cada } x_0 \in \partial B_1.$$

DEMONSTRAÇÃO. Sabemos que existe uma matriz ortogonal $A = (a_{i,j})$ (consequentemente $(a_{j,1}, \dots, a_{j,n}) \cdot (a_{k,1}, \dots, a_{k,n}) = \delta_{j,k}$, $\forall j, k \in \{1, \dots, n\}$) tal que $x_0 = -Ae_1$.

Denote $A(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j \right)$.

Defina $\tilde{u}(x) = u(Ax)$ e $\tilde{\phi}(x) = \phi(Ax)$. Note que, $\tilde{u} \in C(\overline{B(0,1)})$, $\tilde{\phi} \in C^\alpha(\partial B(0,1))$ e $\tilde{u} = \tilde{\phi}$ em ∂B_1 . Ademais

$$\partial_{x_i} \tilde{u}(x) = \partial_{x_i} \left\{ u \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j \right) \right\} = (\nabla u)(Ax) \cdot (a_{1i}, \dots, a_{ni}) = \sum_{j=1}^n a_{ji} (\partial_{x_j} u)(Ax).$$

e

$$\partial_{x_i}^2 \tilde{u}(x) = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n a_{pi} a_{qi} (\partial_p \partial_q u)(Ax), \forall x \in B_1.$$

Assim, usando que A é ortogonal temos

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{u}(x) &= \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n a_{pi} a_{qi} (\partial_p \partial_q u)(Ax) = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n (\partial_p \partial_q u)(Ax) \sum_{i=1}^n a_{pi} a_{qi} \\ &= \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n (\partial_p \partial_q u)(Ax) \delta_{pq} = \sum_{p=1}^n (\partial_p^2 u)(Ax) = (\Delta u)(Ax) = 0, \forall x \in B_1. \end{aligned}$$

Assim, $\tilde{u}$ satisfaz as condições do Lema 3.2.17. Deste modo, aplicando 3.2.17 em $\tilde{u}$ e $\tilde{\phi}$ concluímos o lema. ■

A partir dos lemas anteriores poderemos demonstrar o próximo teorema, o qual nos apresentará uma relação entre a norma Hölder na bola e na fronteira da bola.

TEOREMA 3.2.19. *Sejam $u \in C(\overline{B_1})$ harmônica em B_1 e $\phi \in C^\alpha(\partial B_1)$, com $\alpha \in (0,1)$. Se $u = \phi$ em ∂B_1 , então $u \in C^{\frac{\alpha}{2}}(\overline{B_1})$ (isto é, se u é harmônica em B_1 e $u \in C^\alpha(\partial B_1)$ então $u \in C^{\frac{\alpha}{2}}(\overline{B_1})$). Além disso, existe $C = C(n, \alpha) > 0$ tal que, $\|u\|_{C^{\frac{\alpha}{2}}(\overline{B_1})} \leq C \|\phi\|_{C^\alpha(\partial B_1)}$.*

DEMONSTRAÇÃO.

Antes de iniciar a demonstração vamos estabelecer algumas notações. Dado $x \in \overline{B_1}$ denotaremos $d_x = d(x, \partial B_1)$. Ademais, existe $x_0 \in \partial B_1$ tal que $|x - x_0| = d_x$ (a existência deste ponto vem do fato

que $t \rightarrow |x - t|$ ser contínua no compacto ∂B_1). Dado $y \in B_1$ defina d_y e y_0 como acima. A seguir, consideremos $x, y \in B_1$ arbitrários e sem perda de generalidade assumiremos que $d_y \leq d_x$. Sendo assim, dividiremos a demonstração em dois caso.

Antes disso, pelo Lema 3.2.18 temos que para $x_0 \in \partial B_1$ temos

$$\sup_{x \in B_1} \frac{|u(x) - u(x_0)|}{|x - x_0|^{\frac{\alpha}{2}}} \leq \sup_{x \in \partial B_1} 2^{\frac{\alpha}{2}} \frac{|\phi(x) - \phi(x_0)|}{|x - x_0|^\alpha} \quad (3.17)$$

Caso 1: Se $|x - y| \leq \frac{d_x}{2}$.

Neste caso, temos que $y \in \overline{B}(x, \frac{d_x}{2}) \subset B(x, d_x) \subset B_1$. Pelo Corolário 3.2.3 (aplicando para a função $x \mapsto u(x) - u(x_0)$), existe $c = c(n) > 0$ tal que

$$|u(x) - u(y)| \leq \frac{c}{d_x^\alpha} |x - y|^\alpha \sup_{z \in \partial B(x, d_x)} |u(z) - u(x_0)|. \quad (3.18)$$

para cada $x, y \in B(x, \frac{d_x}{2})$ e $\alpha \in [0, 1]$.

Assim, dado $z \in \partial B(x, d_x)$, para $z \neq x_0$, temos

$$|u(z) - u(x_0)| = |z - x_0|^{\frac{\alpha}{2}} \frac{|u(z) - u(x_0)|}{|z - x_0|^{\frac{\alpha}{2}}}.$$

Pela equação (3.17)

$$|u(z) - u(x_0)| \leq (|z - x| + |x - x_0|)^{\frac{\alpha}{2}} 2^{\frac{\alpha}{2}} \sup_{x \in \partial B_1} \frac{|\phi(x) - \phi(x_0)|}{|x - x_0|^\alpha}.$$

Como $z \in \partial B(x, d_x)$ e $|x - x_0| = d_x$, temos

$$|u(z) - u(x_0)| \leq (2d_x)^{\frac{\alpha}{2}} 2^{\frac{\alpha}{2}} \sup_{x \in \partial B_1} \frac{|\phi(x) - \phi(x_0)|}{|x - x_0|^\alpha} = 2^{\frac{\alpha}{2}} d_x^{\frac{\alpha}{2}} 2^{\frac{\alpha}{2}} \sup_{x \in \partial B_1} \frac{|\phi(x) - \phi(x_0)|}{|x - x_0|^\alpha} = 2^\alpha d_x^{\frac{\alpha}{2}} \|\phi\|_{C^\alpha(\partial B_1)}.$$

Note que a conclusão acima também vale para $z = x_0$. Da inequação acima, pela equação (3.18), temos

$$|u(x) - u(y)| \leq \frac{c}{d_x^\alpha} |x - y|^\alpha \sup_{z \in B(x, d_x)} |u(z) - u(x_0)| \leq \frac{c}{d_x^\alpha} |x - y|^\alpha 2^\alpha d_x^{\frac{\alpha}{2}} \|\phi\|_{C^\alpha(\partial B_1)}$$

como $|x - y| \leq \frac{d_x}{2}$, segue-se que

$$\begin{aligned} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\frac{\alpha}{2}}} &\leq \frac{c}{d_x^\alpha} |x - y|^{\frac{\alpha}{2}} 2^\alpha d_x^{\frac{\alpha}{2}} \|\phi\|_{C^\alpha(\partial B_1)} \\ &\leq \frac{c}{d_x^\alpha} \left(\frac{d_x}{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}} 2^\alpha d_x^{\frac{\alpha}{2}} \|\phi\|_{C^\alpha(\partial B_1)} \end{aligned}$$

Portanto

$$|u(x) - u(y)| \leq \tilde{c} |x - y|^{\frac{\alpha}{2}} \|\phi\|_{C^\alpha(\partial B_1)},$$

em que $\tilde{c} = c(n)2^{\frac{\alpha}{2}} > 0$.

Caso 2: Se $\frac{d_x}{2} < |x - y|$.

Note que, pela equação (3.17)

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leq |u(x) - u(x_0)| + |u(x_0) - u(y_0)| + |u(y_0) - u(y)| \\ &\leq |x - x_0|^{\frac{\alpha}{2}} 2^{\frac{\alpha}{2}} \|\phi\|_{C^\alpha(\partial B_1)} + |u(x_0) - u(y_0)| + |y - y_0| \|\phi\|_{C^\alpha}. \end{aligned}$$

Como $d_x = |x - x_0|$, $x_0, y_0 \in \partial B_1$, e $u = \phi$ em ∂B_1 , temos

$$|u(x) - u(y)| \leq d_x^{\frac{\alpha}{2}} 2^{\frac{\alpha}{2}} \|\phi\|_{C^\alpha(\partial B_1)} + |\phi(x_0) - \phi(y_0)| + 2^{\frac{\alpha}{2}} |y - y_0|^{\frac{\alpha}{2}} \|\phi\|_{C^\alpha(\partial B_1)}. \quad (3.19)$$

Daí, usando que $\phi \in C^\alpha(\partial B_1)$, existe $c > 0$ tal que

$$|u(x) - u(y)| \leq d_x^{\frac{\alpha}{2}} 2^{\frac{\alpha}{2}} \|\phi\|_{C^\alpha(\partial B_1)} + |y_0 - x_0|^\alpha c \|\phi\|_{C^\alpha(\partial B_1)} + 2^{\frac{\alpha}{2}} |y - y_0|^{\frac{\alpha}{2}} \|\phi\|_{C^\alpha(\partial B_1)}.$$

Como $|y_0 - x_0|^{\frac{\alpha}{2}} \leq 2^{\frac{\alpha}{2}}$ e $d_y \leq d_x$ temos existe $\tilde{c} > 0$ tal que

$$|u(x) - u(y)| \leq \tilde{c} \|\phi\|_{C^\alpha(\partial B_1)} (d_x^{\frac{\alpha}{2}} + |x_0 - y_0|^{\frac{\alpha}{2}} + d_y^{\frac{\alpha}{2}}).$$

Lembre-se que neste caso, $d_x < 2|x - y|$. Ademais, usando que $d_y \leq d_x$ temos $|x_0 - y_0| \leq |x_0 - x| +$

$|x - y| + |y - y_0| \leq d_x + |x - y| + d_y \leq 2d_x + |x - y| \leq 5|x - y|$. Portanto, existe $c_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leq \tilde{c} \|\phi\|_{C^\alpha(\partial B_1)} (2 \cdot 2^{\frac{\alpha}{2}} |x - y|^{\frac{\alpha}{2}} + 5^{\frac{\alpha}{2}} |x - y|^{\frac{\alpha}{2}}) \\ &= c_1 \|\phi\|_{C^\alpha(\partial B_1)} |x - y|^{\frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Juntando os dois casos, temos $|u(x) - u(y)| \leq c|x - y|^{\frac{\alpha}{2}} \|\phi\|_{C^\alpha(\partial B_1)}$, $\forall x, y \in B_1$. Consequentemente $u \in C^{\frac{\alpha}{2}}(B_1)$. Além disso, caso $x, y \in \overline{B_1}$, temos que $\exists \{x_j\}_{j=1}^\infty, \{y_j\}_{j=1}^\infty \in B_1$ tal que $x_j \rightarrow x$ e $y_j \rightarrow y$. Daí, pelo passo feito acima

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &= \lim_{j \rightarrow \infty} |u(x_j) - u(y_j)| \leq c \lim_{j \rightarrow \infty} |x_j - y_j|^{\frac{\alpha}{2}} \|\phi\|_{C^\alpha(\partial B_1)} \\ &\leq c|x - y|^{\frac{\alpha}{2}} \|\phi\|_{C^\alpha(\partial B_1)}. \end{aligned}$$

pela definição $\|\cdot\|_{C^\alpha(B_1)}$ temos $\|u\|_{C^{\frac{\alpha}{2}}(\overline{B_1})} \leq c\|\phi\|_{C^\alpha(\partial B_1)}$, o que demonstra o lema. Portanto $u \in C^{\frac{\alpha}{2}}(\overline{B_1})$. ■

A partir desse Teorema, podemos ver que, funções harmônicas para além das propriedades que já mostramos apresentam um comportamento controlado quando falamos de Hölder continuidade.

Referências Bibliográficas

- [1] EVANS, L.C. *Partial differential equations*. v. 19. Graduate studies in mathematics, ISSN, 1949.
- [2] FOLLAND, G.B. *Introduction to partial differential equations*. 2 ed. 1995.
- [3] FOLLAND, G.B. *Real Analysis: Modern techniques and their applications*. 2. ed. Pure and applied mathematics. 1999.
- [4] GUIDORIZZI, H.L. *Um curso de cálculo, vol 2*. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015.
- [5] HAN, Q.; LIN, F. *Elliptic partial differential equations*. 2 ed. AMS, 2011.
- [6] HOUNIE, J. *Teoria Elementar das Distribuições*. Recife-PE: IMPA, 1979.
- [7] JOHN, F. *Partial differential equations*. 3.ed. Applied mathematical sciences.
- [8] KELLOGG, O.D. *Foundations of Potential Theory*. Springer-Verlag, Berlin, 1929.
- [9] LIMA, E.L. *Curso de Análise vol. 2*. 12.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2023.
- [10] LIMA, E.L. *Espaços Métricos*. 6.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2020.
- [11] LÓRIO, V.M. *EDP - Um curso de Graduação*. 4^o ed. IMPA, 2018.
- [12] MUNKRES, J.R. *Analysis on manifolds*. 1930.
- [13] RUDIN W. *Princípios de análise matemática*. Rio de Janeiro: Ao livro técnico S.A. 1971.