



Trabalho de Conclusão de Curso

Aplicação do Algoritmo MOESP na Identificação de Sistemas Dinâmicos

de Maria Fernanda Herculano Machado da Silva

orientado por

Prof. Dr. Ícaro Bezerra Queiroz de Araújo

Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Computação
Maceió, Alagoas
25 de Julho de 2024

Catálogo na Fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 - 1767

O48r Silva, Maria Fernanda Herculano Machado da.
Aplicação do algoritmo MOESP na identificação de sistemas
dinâmicos / Maria Fernanda Herculano Machado da Silva. – 2024.
35 f. : il.

Orientador: Ícaro Bezerra Queiroz de Araújo.
Monografia (Trabalho de conclusão de curso em Engenharia de
Computação) - Universidade Federal de Alagoas, Instituto de Computação.
Maceió, 2024.

Bibliografia: f. 34-35.

1. Identificação de sistemas. 2. MOESP (Algoritmo). 3. Método de
subespaço. 4. Espaço de estados. 5. Sistemas dinâmicos. I. Título.

CDU: 004.021:517.987.5

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
Instituto de Computação

APLICAÇÃO DO ALGORITMO MOESP NA IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS DINÂMICOS

Trabalho de Conclusão de Curso submetido
ao Instituto de Computação da Universidade
Federal de Alagoas como requisito parcial
para a obtenção do grau de Engenheiro de
Computação.

Maria Fernanda Herculano Machado da Silva

Orientador: Prof. Dr. Ícaro Bezerra Queiroz de Araújo

Banca Avaliadora:

Thiago Damasceno Cordeiro	Prof. Dr., UFAL
Glauber Rodrigues Leite	Prof. Dr., UFAL
Allan de Medeiros Martins	Prof. Dr., UFRN

Maceió, Alagoas
25 de Julho de 2024

Agradecimentos

Gostaria de expressar minha profunda gratidão à minha família que sempre me apoiou com muito carinho e dedicação, sendo os pilares em toda minha jornada. Eles me mostraram a grande importância da educação, como também serviram como inspiração constante. Sou profundamente grata por ter tantos exemplos para me guiar e impulsionar até onde estou hoje, principalmente aos meus pais, Daniel e Luciana, meu irmão João, minha avó Delza e todas as minhas queridas tias e primos que estiveram comigo durante a minha vida. O orgulho que sinto por cada um deles é imenso e eterno.

Também gostaria de agradecer aos meus professores por todo o conhecimento, toda inspiração e todo direcionamento durante a graduação, tornando essa etapa da minha vida mais gratificante e memorável. Em especial, agradeço ao meu orientador, professor Ícaro Araújo, por apresentar a área do meu trabalho e por me motivar a procurar novos desafios como estudante. Além disso, expresso minha sincera apreciação aos professores que compuseram a banca avaliadora, professor Thiago Cordeiro, professor Glauber Leite e professor Allan Martins pelas suas valiosas contribuições para este trabalho e pelo apoio e orientação ao longo do meu percurso acadêmico.

Aos meus queridos amigos, que estiveram ao meu lado durante toda a trajetória acadêmica, expresso minha sincera gratidão por compartilharem não apenas risadas e momentos felizes, mas também por serem fontes de inspiração e motivação nos períodos mais desafiadores. Em especial, desejo estender meu mais profundo agradecimento ao Rodrigo, meu companheiro, pelo apoio, carinho, incentivo e presença constantes dentro e fora da academia. Sua dedicação e amor tornaram cada desafio mais suportável, e sinto-me imensamente grata por tê-lo ao meu lado desde durante a graduação.

Maria Fernanda Herculano Machado da Silva

I must not fear. Fear is the mind-killer. Fear is the little-death that brings total obliteration. I will face my fear. I will permit it to pass over me and through me. And when it has gone past I will turn the inner eye to see its path. Where the fear has gone there will be nothing. Only I will remain.

Frank Herbert, Dune.

Resumo

A identificação de sistemas é uma área de grande relevância na engenharia por oferecer uma solução a um problema de controle quando a modelagem direta de sistemas complexos não é viável. Ao utilizar dados de entrada e saída de um sistema em análise, é possível obter um modelo matemático que represente sua dinâmica sem a necessidade de compreender completamente seu funcionamento interno. Entre os métodos de identificação da literatura, o algoritmo MOESP se destaca por sua simplicidade, relevância e determinismo, capaz de identificar algebricamente um sistema representado por equações de estados. Este trabalho propõe o estudo das etapas desse algoritmo, bem como sua aplicação e validação em exemplos de sistemas com comportamentos dinâmicos diversos. Além disso, investiga-se a influência da ordem estimada nos resultados (variável livre do algoritmo), analisando-os tanto de forma gráfica quanto matemática. Os resultados obtidos indicam um potencial significativo para a aplicação prática do MOESP na área de identificação de sistemas, oferecendo uma abordagem robusta e eficaz para engenheiros lidarem com problemas complexos de modelagem e controle.

Keywords: Identificação de Sistemas; MOESP; Método de Subespaço; Espaço de Estados; Sistemas Dinâmicos.

Abstract

System identification is an area of great relevance in engineering as it offers a solution to a control problem when direct modeling of complex systems is not feasible. By using input and output data from a system under analysis, it is possible to obtain a mathematical model that represents its dynamics without the need to fully understand its internal workings. Among the identification methods in the literature, the MOESP algorithm stands out for its simplicity, relevance, and determinism, capable of algebraically identifying a system represented by state equations. This work proposes the study of the stages of this algorithm, as well as its application and validation in examples of systems with diverse dynamic behaviors. Additionally, the influence of the estimated order on the results (a free variable of the algorithm) is investigated, analyzing them both graphically and mathematically. The results obtained indicate significant potential for the practical application of MOESP in the field of system identification, offering a robust and effective approach for engineers to deal with complex modeling and control problems.

Keywords: *System Identification; MOESP; Subspace Methods; State Space; Dynamic Systems.*

Lista de Figuras

2.1	Diagrama esquemático do processo de obtenção de um modelo que represente um sistema dinâmico.	7
2.2	Visualização genérica do problema proposto por Householder	9
2.3	Visualização genérica do problema da decomposição em valores singulares .	10
4.1	Valores de entrada do Sistema Simulado.	18
4.2	Valores de saída do Sistema Simulado.	18
4.3	Valores Singulares obtidos da matriz $\mathbf{S}_1$ (sub-figura acima) e a porcentagem da soma acumulativa desses valores (sub-figura abaixo) para o Sistema Simulado.	19
4.4	Saídas de referência e estimadas para o Sistema Simulado com ordem $\hat{n} = 4$.	20
4.5	Saídas de referência e estimadas para o Sistema Simulado com ordem $\hat{n}_2 = 3$.	20
4.6	Saídas de referência e estimadas para o Sistema Simulado com ordem $\hat{n}_3 = 5$.	21
4.7	Esquema genérico do processo de funcionamento do Sistema de Carretel, obtida em [Bastogne et al., 1997].	22
4.8	Valores de referência para a entrada do Sistema de Carretéis.	23
4.9	Valores de referência para a saída do Sistema de Carretéis.	23
4.10	Valores Singulares obtidos da matriz $\mathbf{S}_1$ (sub-figura acima) e a porcentagem da soma acumulativa desses valores (sub-figura abaixo) para o Sistema de Carretéis.	24
4.11	Saídas de referência e estimadas para o Sistema de Carretéis com ordem $\hat{n}_1 = 6$	25
4.12	Saídas de referência e estimadas para o Sistema de Carretéis com ordem $\hat{n}_2 = 5$	25
4.13	Saídas de referência e estimadas para o Sistema de Carretéis com ordem $\hat{n}_3 = 7$	26
4.14	Sistema de Tanques Acoplado esquemático (à esquerda) e real (à direita). .	27
4.15	Valores de entrada do experimento com o Sistema de Tanques Acoplado. .	28
4.16	Valores de saída do experimento com o Sistema de Tanques Acoplado. . .	28

4.17	Valores Singulares obtidos da matriz $\mathbf{S}_1$ (sub-figura acima) e a porcentagem da soma acumulativa desses valores (sub-figura abaixo) para o Sistema de Tanques Acoplado.	29
4.18	Saídas de referência e estimadas para o Sistema de Tanques Acoplado com ordem $\hat{n}_1 = 3$	30
4.19	Saídas de referência e estimadas para o Sistema de Tanques Acoplado com ordem $\hat{n}_2 = 2$	31
4.20	Saídas de referência e estimadas para o Sistema de Tanques Acoplado com ordem $\hat{n}_3 = 4$	32

Lista de Tabelas

4.1	Avaliação das amostras estimadas pelo algoritmo MOESP com diferentes ordens em relação às amostras de referência para o Sistema Simulado. . . .	21
4.2	Avaliação das amostras estimadas pelo algoritmo MOESP com diferentes ordens em relação às amostras de referência para o Sistema de Carretéis. .	25
4.3	Variáveis que definem a configuração do Sistema de Tanques Acoplado dentro da figura esquemática 4.14. Fonte: [Ícaro Araújo et al., 2019]	27
4.4	Avaliação das amostras estimadas pelo algoritmo MOESP com diferentes ordens em relação às amostras de referência para o Sistema de Tanques Acoplado.	30
4.5	Avaliação das amostras estimadas por modelos do tipo NARX. Fonte: [Ícaro Araújo et al., 2019].	31

Lista de Símbolos

$G(s)$	Função de transferência.
$C(s)$	Numerador da função de transferência (comportamento da resposta do sistema).
$R(s)$	Denominador da função de transferência (comportamento da entrada do sistema).
$y(k)$	Amostra discreta da saída do sistema no tempo k .
$u(k)$	Amostra discreta da entrada do sistema no tempo k .
X	Matriz de estados nas equações de espaço de estados.
Y	Matriz de amostras da saída de um sistema.
U	Matriz de amostras da entrada de um sistema.
A	Matriz dinâmica nas equações de espaço de estados.
B	Matriz de entrada nas equações de espaço de estados.
C	Matriz de saída nas equações de espaço de estados.
D	Matriz de transmissão direta nas equações de espaço de estados.
$\varphi(k)$	Vetor de parâmetros de uma função linear.
Θ	Matriz de parâmetros de uma função linear.
Φ	Matriz de amostras de uma função linear.
H	Matriz de Hankel.
$\mathcal{H}$	Matriz em blocos de Hankel.
$\mathcal{U}$	Matriz de Hankel para as amostras de entrada do sistema.
$\mathcal{Y}$	Matriz de Hankel para as amostras de saída do sistema.

Lista de Abreviaturas

- ARMA** Modelo de Média Móvel Integrada Autoregressiva (*AutoRegressive Integrated Moving Average model*).
- CVA** *Canonical Variate Analysis*.
- MIMO** Múltiplas Entradas e Múltiplas Saídas (*Multiple Output Multiple Input*).
- MAE** Erro Médio Absoluto (*Mean Absolute Error*).
- MOESP** *Multivariable Output Error State Space*.
- MSE** Erro Quadrático Médio (*Mean Squared Error*).
- N4SID** *Numerical Algorithms for Subspace State Space System Identification*.
- NARX** Modelo Não-Linear Auto-Regressivo com Entradas Exógenas (*Nonlinear Autoregressive Exogenous model*).
- R²** Coeficiente de Determinação.
- RMSE** Raiz do Erro Quadrático Médio (*Root Mean Squared Error*).
- SISO** Uma Entrada e Uma Saída (*Single Input Single Output*).
- SVD** *Decomposição em Valores Singulares*.
- VAF** Variância da Função de Aproximação (*Variance Accounted For*).

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Motivação	1
1.2	Trabalhos Relacionados	2
1.3	Objetivos	4
1.4	Estrutura do Trabalho	4
2	Fundamentação Teórica	5
2.1	Identificação por Subespaço	5
2.2	Estimador dos Mínimos Quadrados	7
2.3	Matriz por Blocos de Hankel	8
2.4	Decomposição QR	9
2.5	Decomposição em Valores Singulares	10
3	Metodologia	12
3.1	Matriz em Blocos de Hankel	12
3.2	Decomposição QR	13
3.3	Decomposição em Valores Singulares	13
3.4	Definição da Ordem do Sistema	14
3.5	Encontrando as Matrizes do Sistema	14
3.5.1	Matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{C}$	14
3.5.2	Matrizes $\mathbf{B}$ e $\mathbf{D}$	15
4	Resultados	17
4.1	Sistema Simulado	17
4.1.1	Variáveis Livres do Algoritmo	18
4.1.2	Identificação do Sistema	19
4.2	Sistema de Carretéis	22
4.2.1	Variáveis Livres do Algoritmo	24
4.2.2	Identificação do Sistema	24
4.3	Sistema de Tanques Acoplado	26
4.3.1	Variáveis Livres do Algoritmo	27

4.3.2	Identificação do Sistema	29
5	Conclusão e Trabalhos Futuros	33
	Bibliografia	34

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

Na área de controle, um dos grandes desafios é a modelagem precisa da dinâmica dos sistemas para que possam ser compreendidos e controlados de forma eficiente. A complexidade desses sistemas abrange diversos domínios, desde processos industriais até sistemas biológicos e ambientais [De Moor et al., 1997]. A necessidade de desenvolver modelos matemáticos precisos mostra-se cada vez mais importante para otimizar o desempenho de sistemas, prever comportamentos futuros e projetar estratégias de controle eficazes.

A identificação de sistemas surge como uma abordagem essencial para enfrentar esse desafio, permitindo que modelos sejam inferidos a partir de dados experimentais coletados do sistema em questão. Esses modelos são essenciais não apenas para compreender a dinâmica interna do sistema, mas também para projetar e implementar controladores que garantam seu funcionamento ideal. No entanto, a complexidade e a natureza não linear de muitos sistemas tornam a tarefa de identificação um processo desafiador, exigindo métodos e técnicas robustas para extrair informações significativas dos dados disponíveis.

Ao longo das últimas décadas, uma variedade de métodos de identificação de sistemas tem sido desenvolvida e aplicada em uma ampla gama de campos. Estes incluem abordagens baseadas em equações de espaço de estados, modelos auto-regressores de média móvel (ARMA), redes neurais, entre outros. Cada método tem suas próprias vantagens e limitações, e a escolha do método mais adequado depende das características específicas do sistema em estudo, bem como dos objetivos da análise e do controle.

Na abordagem de espaço de estados, os sistemas dinâmicos são representados por meio de um conjunto de equações que descrevem a evolução temporal das variáveis de estado do sistema. Essa representação se destaca por ser flexível e por permitir a inclusão de informações sobre as entradas, saídas e o próprio comportamento dinâmico do sistema em um único conjunto de equações. Por meio dessa formalização, os sistemas podem ser facilmente analisados e manipulados utilizando técnicas algébricas e matriciais. Além

disso, a descrição em espaço de estados oferece uma base sólida para a aplicação de métodos de controle avançados, como o controle preditivo, o controle ótimo e o controle robusto, que podem ser diretamente implementados a partir dos modelos obtidos.

Neste contexto, o algoritmo MOESP (*Multivariable Output Error State Space*) se destaca como uma ferramenta para a identificação de sistemas, especialmente quando se trata da representação em equações de espaço de estados. Este algoritmo oferece uma abordagem robusta e eficiente para estimar os parâmetros do modelo, permitindo uma descrição precisa da dinâmica do sistema. Assim, ao explorar e compreender o funcionamento do algoritmo MOESP, é possível expandir a variedade de sistemas que podem ser modelados e controlados.

1.2 Trabalhos Relacionados

A identificação de sistemas tem se mostrado uma área relevante na engenharia, abordada sob diferentes perspectivas. De forma geral, os algoritmos de identificação trabalham em três formatos principais, definidos pela quantidade de informação conhecida *a priori* do sistema. Estes são os algoritmos do tipo: caixa branca (dinamicidade conhecida), caixa preta (dinamicidade desconhecida) e caixa cinza (apenas algumas características são conhecidas). É nesse contexto que destacam-se na literatura os trabalhos com algoritmos em caixa preta, caracterizados por determinar a dinâmica de um sistema por meio de elementos estocásticos. Para esse caso, existem estudos na literatura como o [Paniagua and López, 2024], que utiliza autoencoders para identificar uma variedade de sistemas *benchmark*, e o trabalho de [Nosrat et al., 2023], que utiliza redes convolucionais para analisar o comportamento de sistemas linearmente invariantes no tempo. Por outro lado, nos métodos de identificação determinística, pode-se citar recentes avanços, como os estudos de [Yang and Yang, 2024], que empregam algoritmos de mínimos quadrados, e de [You et al., 2023], que adotam uma abordagem baseada em métodos de subespaço determinísticos. Assim como nos exemplos citados, existem diversas abordagens na literatura sobre a identificação de sistemas [Wei et al., 2024, Yamada et al., 2023, Beintema et al., 2023] os quais reforçam a relevância dessa área na engenharia.

Em [Coelho and dos Santos Coelho, 2004] são explorados alguns conceitos e técnicas utilizadas para identificar um sistema dinâmico pelas funções de transferência e pelas equações a diferenças. Nesse trabalho, para a representação clássica são discutidos os métodos de modelagem de um sistema linear por diferentes ordens, além de abordar como identificar um processo via resposta da frequência e via resposta impulsiva. Já para os sistemas representados por equações a diferenças, esse trabalho discute diferentes variações do estimador dos mínimos quadrados, tais como a abordagem estocástica, recursiva, com fator de esquecimento, entre outros. Nesse livro, entretanto, não são exploradas os

métodos de identificação para a representação moderna por espaço de estados, a qual possui vantagens sobre a representação clássica, tal como a inexigência do comportamento linear do sistema a ser representado.

No estudo realizado em [Ícaro Araújo et al., 2019] são analisadas as abordagens de identificação de um sistema não linear representados por equações a diferenças, nos quais as entradas e saídas de um sistema de tanques quádruplo se relacionam por meio de modelos NARX polinomiais. O trabalho explora a aplicação desses modelos em sistemas do tipo MIMO (*Multiple-Output-Multiple-Input*), destacando a representação de tais sistemas por meio de modelos polinomiais NARX e a utilização de métodos clássicos para a identificação desses modelos. Nota-se que, apesar dos resultados positivos obtidos nesse estudo, a representação por equações a diferenças é mais suscetível a ruídos em comparação a representação por espaço de estados. Além disso, o uso do modelo NARX em problemas mais complexos pode causar um gasto computacional muito maior do que métodos determinísticos de identificação.

Observa-se também que outros estudos na literatura abordam o problema de identificação utilizando abordagens relacionadas aos métodos de subespaço. Em [Kim and Lynch, 2012a] e [Kim and Lynch, 2012b], são exploradas aplicações da identificação por subespaço em sistemas de caixa preta e caixa cinza, com validações em experimentos reais. Nesse mesmo contexto, em [Tsiamis and Pappas, 2019], também é apresentado um estudo mais abrangente, que levanta as técnicas de identificação, mas para sistemas estocásticos com base em uma quantidade limitada de amostras. Já em abordagens mais específicas, há trabalhos que abordam a identificação sob diferentes perspectivas, como exemplificado em [Sadeghi and Farrokhi, 2018], onde é proposta a identificação de sistemas em tempo real utilizando redes neurais e modelos do tipo Wiener, e em [Mellinger et al., 2016], onde a identificação é utilizada como um estimador de parâmetros modais.

O trabalho exposto em [Overschee and Moor, 1995] é fundamental para o desenvolvimento das técnicas de identificação por método de subespaço, que continuam a ser amplamente empregadas na atualidade. O trabalho aborda tanto técnicas determinísticas quanto estocásticas e híbridas de identificação, destacando algoritmos como MOESP (*Multivariable Output Error State Space*), N4SID (*Numerical algorithms for Subspace State Space System Identification*) e CVA (*Canonical Variate Analysis*). Estes algoritmos se destacam por oferecer soluções algébricas para problemas de identificação, utilizando equações de espaço de estado, as quais apresentam diversas vantagens em relação às funções de transferência, como será discutido no próximo capítulo. Portanto, considerando a importância da teoria apresentada neste trabalho para a área de identificação, ressalta-se a importância de sua aplicação prática para validar os algoritmos propostos em sistemas reais e demonstrar sua eficácia.

1.3 Objetivos

Este estudo se propõe a abordar o método MOESP (Espaço de Estado de Erro de Saída Multivariável em inglês) para a identificação de sistemas dinâmicos. Busca-se não apenas uma explicação teórica, mas também de demonstrações de aplicações práticas desse método em diferentes contextos de sistemas dinâmicos. Através de uma análise abrangente, pretende-se validar a eficácia do método MOESP e discutir os resultados obtidos em cada aplicação específica.

1.4 Estrutura do Trabalho

Este trabalho apresenta uma estrutura organizada em quatro capítulos principais, além do primeiro capítulo de introdução. O segundo capítulo abrange a fundamentação teórica, fornecendo uma explicação mais detalhada da teoria subjacente ao método em estudo. Em seguida, no terceiro capítulo de metodologia, são apresentados os procedimentos necessários para a aplicação do MOESP em um conjunto de dados, utilizando toda a teoria discutida anteriormente através da linguagem *Python*. No quarto capítulo são analisados os dados de três diferentes sistemas sob diferentes configurações do método MOESP. A partir dos resultados calculados, a diferença entre o dado real e estimado são comparados, validando assim a eficácia do método. Por fim, o trabalho conclui com um quinto capítulo dedicado à conclusão, no qual os resultados derivados do método MOESP são analisados e discutidos de forma abrangente.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

Neste capítulo, são apresentados os conceitos e métodos relacionados à identificação de sistemas dinâmicos, que é o objetivo principal deste trabalho. Inicia-se com uma introdução sobre a identificação por subespaço, uma abordagem baseada nos dados de entrada e saída do sistema para estimar as matrizes de espaço de estado que o representam. Em seguida, revisa-se o estimador dos mínimos quadrados, um método clássico para encontrar os parâmetros de um modelo linear que minimizam o erro quadrático entre os valores reais e os preditos. Por fim, são discutidas duas técnicas de decomposição de matrizes necessárias para a identificação de sistemas pelo MOESP, juntamente com a discussão de representação dos dados pelas matrizes de Hankel.

2.1 Identificação por Subespaço

A dinamicidade de um sistema pode ser estudada na engenharia com o auxílio de modelos matemáticos simples, os quais contribuem no processo de controle. Os modelos mais usados para representar esses sistemas são as funções de transferência (Eq. 2.1), as funções lineares (Eq. 2.2), e as representações por espaço de estado (Eq. 2.3).

As funções de transferência (Eq. 2.1) são representações matemáticas que descrevem a relação entre a entrada e a saída de um sistema dinâmico no domínio da frequência. Elas são expressas como frações de polinômios, onde o numerador representa o comportamento da resposta do sistema $C(s)$ e o denominador define o da entrada $R(s)$. Embora forneçam uma abordagem simplificada e poderosa para a análise e projeto de sistemas lineares, é importante considerar suas limitações, especialmente em relação à linearidade do sistema e à complexidade na representação de sistemas altamente dinâmicos.

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} \quad (2.1)$$

Outro formato que os sistemas podem ser representados são as funções lineares ou equações a diferenças (Eq. 2.2), nas quais as entradas e saídas se relacionam de acordo

com a ordem do sistema n e com um conjunto de parâmetros. Essas equações são caracterizadas por serem aplicáveis a sistemas discretos e a sistemas sujeitos a amostragem, ruídos e outras formas de discretização. Dessa forma, a necessidade de discretizar um sistema contínuo surge como uma das grandes limitações por poder levar a perdas de informação e introduzir erros de aproximação. Além disso, a análise e o projeto de sistemas representados por equações a diferenças podem ser mais complexos do que aqueles baseados em funções de transferência, especialmente em sistemas de alta ordem.

$$y(k) + a_1 \cdot y(k-1) + \cdots + a_n \cdot y(k-n) = b_0 \cdot u(k) + \cdots + b_m \cdot u(k-m) \quad (2.2)$$

Por fim, uma representação bastante utilizada na engenharia para descrever sistemas dinâmicos são as equações por espaço de estado (Eq. 2.3). Elas são compostas por duas equações matriciais: uma que descreve a evolução do estado do sistema $\mathbf{X}$ ao longo do tempo e outra que relaciona o estado do sistema às suas saídas $\mathbf{Y}$ e saídas $\mathbf{U}$. Essa abordagem oferece uma representação completa e compacta do comportamento dinâmico do sistema, permitindo uma análise mais detalhada de sua resposta e facilitando o projeto de controladores e observadores.

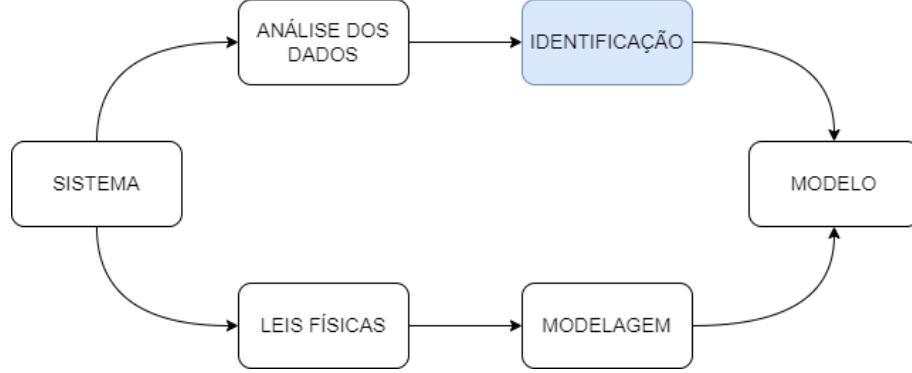
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{U} \\ \mathbf{Y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{U} \end{cases} \quad (2.3)$$

Em muitos dos casos, o sistema a ser estudado não possui uma representação conhecida, mas é capaz de fornecer informações para que a sua representação matemática seja identificada (Figura 2.1). Essa área da engenharia que estuda métodos relacionados a esse tipo de problema é chamado de modelagem e identificação de sistemas. Para os casos em que as informações disponíveis são as características físicas do modelo, estão englobados os problemas de modelagem fenomenológica. Já para os casos em que as informações conhecidas são os dados de entrada e saída do sistema, englobam-se os problemas relacionados a este trabalho que são os de identificação de sistemas.

Em sistemas dinâmicos, o número de entradas e saídas podem variar de acordo com o seu funcionamento, como por exemplo os sistemas do tipo SISO (*Single-Input-Single-Output*) no qual só existe uma entrada e uma saída e os sistemas do tipo MIMO (*Multiple-Input-Multiple-Output*) os quais existem múltiplas entradas e saídas. Para tratar o problema de identificação de forma mais genérica, este trabalho será focado nos métodos de identificação para sistemas do tipo MIMO, representados usualmente por espaço de estados.

Na representação por espaço de estados, os dados de entrada e de saída se relacionam por parâmetros em equações lineares (Eq. 2.2), os quais podem ser encontrados pelo método dos mínimos quadrados e suas variações, ou por quatro principais matrizes em

Figura 2.1: Diagrama esquemático do processo de obtenção de um modelo que represente um sistema dinâmico.



equações em espaço de estado (Eq. 2.3), encontradas por algoritmos específicos para este problema, como o N4SID (*Numerical Algorithms for Subspace State Space System Identification*) e o MOESP (*Multivariable Output-Error State sPace*), explorados nas próximas seções.

2.2 Estimador dos Mínimos Quadrados

Um sistema, como foi discutido anteriormente, pode ter sua dinâmica representada por uma equação linear (Eq. 2.2) para uma dada entrada u e saída y em um dado momento discreto com um erro ε . Suponha que para encontrar os parâmetros a e b que relacionam as amostras do sistema, seja necessário obter N equações lineares (Eq. 2.2) e que esse problema possa ser representado pela equação matricial 2.4, considerando o seguinte vetor de parâmetros $\varphi(t) = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{na} \ b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{nb}]$.

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \dots \\ y(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y(-1) & \dots & -y(-na) & u(-d) & \dots & u(-d-nb) \\ -y(0) & \dots & -y(1-na) & u(1-d) & \dots & u(1-d-nb) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -y(N-2) & \dots & -y(N-na-1) & u(N-d-1) & \dots & u(N-d-nb-1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi(0)^T \\ \varphi(1)^T \\ \dots \\ \varphi(N-1)^T \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

A equação 2.4 pode ser representada de forma reduzida como:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{\Theta} \quad (2.5)$$

O problema pode ser definido, desconsiderando os valores dos erros, em descobrir a matriz de parâmetros $\mathbf{\Theta}$, dada uma matriz de N amostras de entrada e saída $\mathbf{\Phi}$. A solução para este problema é discutido por Carl Friedrich Gauss desde o século 18 através do método dos mínimos quadrados, no qual deseja-se minimizar o erro quadrado entre o valor real $\mathbf{Y}$ e o predito $\hat{\mathbf{Y}}$ [Gauss and Stewart, 1995].

A solução que minimiza o erro entre o real e o predito, desenvolvida em [Gauss and Stewart, 1995], é dada pela equação a seguir:

$$\hat{\Theta} = [\Phi^T \cdot \Phi]^{-1} \cdot \Phi^T \cdot Y \quad (2.6)$$

O estimador dos mínimos quadrados desempenha um papel essencial no algoritmo MOESP, mas sua utilidade vai além desse contexto. Essa é uma ferramenta também aplicada para resolver diversos problemas lineares na matemática e em várias áreas científicas e de engenharia. Sua versatilidade e eficácia o torna fundamental em uma variedade de cenários, desde ajuste de curvas simples até problemas de otimização complexos.

2.3 Matriz por Blocos de Hankel

Uma matriz de Hankel $\mathbf{H}$ é uma matriz especial caracterizada por possuir elementos $\mathbf{H}_{ij}$ constantes nas suas anti-diagonais paralelas, de forma que $\mathbf{H}_{ij} = \mathbf{H}_{(i+1),(j-1)}$. Um exemplo de uma matriz $m \times n$ pode ser dado por:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & \dots & h_n \\ h_2 & h_3 & h_4 & \dots & h_{n+1} \\ h_3 & h_4 & h_5 & \dots & h_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_m & h_{m+1} & h_{m+2} & \dots & h_{m+n-1} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Em algoritmos de identificação por subespaços, é comum representar os dados em blocos de Hankel (como é mostrado em [Overschee and Moor, 1995]), no qual é possível separar em blocos de mesma dimensão as amostras de entrada e saída de um sistema de ordem n . Para construí-la, dado N amostras, é estabelecido a ordem da matriz de hankel k , de forma que a relação descrita em 2.8 seja respeitada e que $k \geq n$ e $j \gg k$, resultando em uma matriz de dimensão $i \times j$, considerando que $k, i, j, n, N \in \mathbb{N}$.

$$j = N - k + 1 \quad (2.8)$$

A matriz em Blocos de Hankel $\mathcal{H}$ utilizada nos algoritmos de identificação para um sistema de n_e entradas e n_s saídas é composta, portanto pelo empilhamento de dois blocos de matrizes de hankel: um para as amostras de entrada de $\mathcal{U}_{k \cdot n_e \times j}$ e outro para as de saída $\mathcal{Y}_{k \cdot n_s \times j}$. Essa definição pode ser observada na equação 2.9 abaixo, a qual resulta em uma matriz $\mathcal{H}_{i \times j}$, onde $i = k(n_e + n_s)$ e $j = N - k + 1$.

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} \mathcal{U} \\ \mathcal{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & \dots & u_{j-1} \\ u_1 & u_2 & u_3 & \dots & u_j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_i & u_{i+1} & u_{i+2} & \dots & u_{i+j-1} \\ y_0 & y_1 & y_2 & \dots & y_{j-1} \\ y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_i & y_{i+1} & y_{i+2} & \dots & y_{i+j-1} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

A configuração da matriz por blocos de Hankel desempenha um papel estratégico na implementação de algoritmos de identificação determinísticos, como será discutido ao longo deste trabalho. Além disso, destaca-se a importância de determinar a ordem k da matriz em estudo, pois ela se torna a primeira variável livre a ser definida antes da execução do algoritmo MOESP.

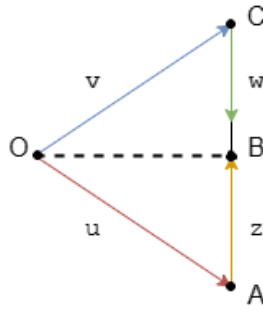
2.4 Decomposição QR

A decomposição QR é uma decomposição de matrizes no qual uma matriz $A_{m \times n}$ pode ser representada pela multiplicação de uma matriz ortonormal Q com uma matriz triangular superior R (Eq. 2.10).

$$A = Q \cdot R \quad (2.10)$$

Uma das formas de calcular ambas as matrizes é através da técnica de transformação de Householder, demonstrada em [Svozil, 2022], no qual é calculado uma matriz ortogonal Q que possa realizar operações de reflexão em torno de um plano ou eixo. Este problema pode ser generalizado pela Figura 2.2, no qual existem dois vetores v e u , tal que $v = Q \cdot u$ e é desejado encontrar a matriz Q que satisfaça as condições fornecidas anteriormente.

Figura 2.2: Visualização genérica do problema proposto por Householder



Para esta situação, o vetor z pode ser visto como o inverso da projeção de u em $\overline{AC}$ e w como o vetor unitário de $\overline{CA}$. Analisando o triângulo isósceles da Figura 2.2, pode-se afirmar que a semirreta $\overline{OC}$ é a soma da semirreta $\overline{OA}$ com $\overline{AC}$, ou então com $2 \cdot \overline{AB}$, conforme seguem as equações abaixo.

$$\begin{aligned} \overline{OC} &= \overline{OA} + 2 \cdot \overline{AB} \\ v &= u + 2 \cdot z \end{aligned} \quad (2.11)$$

Estudando os demais componentes do problema, nota-se que pela definição fornecida do vetor w , conclui-se também que:

$$w = \frac{u - v}{\|u - v\|} \quad (2.12)$$

Da mesma forma para o vetor z :

$$z = -w \cdot \|z\| \quad (2.13)$$

Ao separar o triângulo retângulo OBA , também é possível observar que é possível relacionar o cosseno de $\alpha = \angle OAB$ com as normas dos vetores u e z , como também com os vetores u e w . Considerando tais informações, sabendo que $\|w\| = 1$, obtém-se as equações abaixo:

$$\cos \alpha = \frac{\|z\|}{\|u\|} \quad (2.14)$$

$$\cos \alpha = \frac{\langle u, w \rangle}{\|u\| \cdot \|w\|} = \frac{\langle u, w \rangle}{\|u\|} \quad (2.15)$$

Relacionando então as equações 2.14 e 2.15, a seguinte nova equação:

$$\|z\| = \langle u, w \rangle \quad (2.16)$$

Por conseguinte, é possível associar essa última definição com a fornecida em 2.13, na equação 2.11 e isolar o valor correspondente ao vetor v (Eq. 2.17) para, por fim, definir a matriz de interesse para a Transformação de Householder Q (Eq. 2.18).

$$\begin{aligned} v &= u - 2w \cdot \langle u, w \rangle \\ &= u - 2ww^T \cdot u \\ &= (I_n - 2ww^T) \cdot u \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} Q &= u^T \cdot v \\ &= u^T \cdot (I_n - 2ww^T) \cdot u \\ &= I_n - 2ww^T \end{aligned} \quad (2.18)$$

Dessa forma, a transformação de matrizes descrita, quando aplicada $N - 1$ vezes em uma matriz A , consegue triangularizar a mesma a fim de encontrar a matriz Q e R que satisfaçam a equação 2.10.

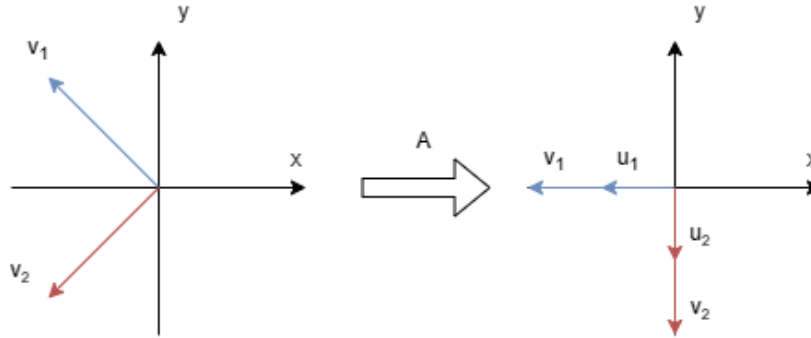
2.5 Decomposição em Valores Singulares

Uma outra opção para decompor matrizes é através da Decomposição em Valores Singulares (SVD), no qual qualquer matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ pode ser representada através de duas matrizes ortogonais $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e uma matriz diagonal $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (Equação 2.19).

$$A = U\Sigma V^T \quad (2.19)$$

Para compreender melhor seu significado, será utilizada a seguinte motivação: dada uma matriz qualquer $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, deseja-se encontrar vetores ortogonais V que quando multiplicados por A mantenham a sua propriedade ortogonal entre elas (Figura 2.3).

Figura 2.3: Visualização genérica do problema da decomposição em valores singulares



Sabendo que os vetores em U serão os vetores unitários que representam $Y = (y_1 \ y_2)$, esse problema pode ser descrito matematicamente em 2.20 e desenvolvido em 2.21 para alcançar a equação 2.19 equivalente à Decomposição em Valores Singulares.

$$\begin{cases} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_1 = y_1 = \theta_1 \cdot u_1 \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_2 = y_2 = \theta_2 \cdot u_2 \end{cases} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}^T &= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 \\ 0 & \theta_2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}\mathbf{V} &= \mathbf{U}\mathbf{\Sigma} \\ \mathbf{A} &= \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T \end{aligned} \quad (2.21)$$

Ao multiplicar a matriz de estudo $\mathbf{A}$ pela sua transposta (e vice-versa), percebe-se como é possível obter as matrizes $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ através dos autovetores de $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ e $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$, respectivamente. A demonstração dessa afirmação é confirmada em 2.22 para a matriz $\mathbf{U}$ e em 2.23 para a matriz $\mathbf{V}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{A}^T &= (\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T) \cdot (\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T)^T = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T\mathbf{V}\mathbf{\Sigma}\mathbf{U}^T \\ &= \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}^2\mathbf{U}^T \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T\mathbf{A} &= (\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T)^T \cdot (\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T) = \mathbf{V}^T\mathbf{\Sigma}\mathbf{U}^T\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V} \\ &= \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^2\mathbf{V}^T \end{aligned} \quad (2.23)$$

A decomposição de valores singulares (SVD) é uma técnica essencial em várias áreas, incluindo processamento de sinais e análise de dados. Na identificação de sistemas dinâmicos, a SVD é frequentemente utilizada para reduzir a dimensionalidade dos dados, identificar padrões importantes e eliminar ruídos, facilitando a construção de modelos mais precisos e eficientes.

Capítulo 3

Metodologia

Neste capítulo, serão discutidos os passos necessários para a aplicação do algoritmo MOESP, utilizando os conceitos definidos no capítulo anterior. A cada passo do algoritmo, será apresentado o código necessário para aplicá-lo, utilizando a linguagem de programação *Python*. A implementação dessa metodologia pode ser encontrada no repositório do Github¹.

3.1 Matriz em Blocos de Hankel

A matriz de Hankel $\mathcal{H}$ será responsável por representar os dados de entrada $U_{N \times n_e}$ e saída $Y_{N \times n_s}$ em dois blocos. O tamanho de ambos os blocos é definido a partir da ordem da matriz de Hankel k , variável livre escolhida antes da aplicação do algoritmo. A escolha do valor de k é discutida na seção 2.3, e pode ser considerada como o dobro da ordem máxima do sistema n_{max} em relação ao número de saídas n_s contempladas no estudo.

Sendo assim, as dimensões de cada bloco de Hankel H^e e H^s , referentes às matrizes $\mathcal{U}$ e $\mathcal{Y}$ respectivamente (definição em 2.3), serão definidas por $H_{(k \cdot n_e) \times j}^e$ para entrada e $H_{(k \cdot n_s) \times j}^s$ para a saída, no qual j é dada pela equação abaixo:

$$j = N - k + 1 \quad (3.1)$$

A estratégia para a formação desses blocos de matrizes será preenchê-las com as anti-diagonais constantes normalizadas dentro de um laço definido por k . Após defini-las, o algoritmo MOESP dará continuidade a partir da matriz H com a concatenação vertical de ambos os blocos H^e e H^s . A normalização dos dados é feita a partir de k para que a diferença de escala entre as amostras não cause uma possível instabilidade numérica, prejudicando o algoritmo. O trecho de código abaixo exemplifica seu funcionamento na linguagem de programação *Python*.

```
N, ns = Y.shape
N, ne = U.shape

j = N - k + 1
Hs = np.zeros((k * ns, j))
He = np.zeros((k * ne, j))
sN = np.sqrt(j)
sy = Y.T / sN
```

¹<https://github.com/fernandagitai/moesp-tcc>

```

su = U.T / sN

for s in range(k):
    Hs[s * ns:(s + 1) * ns, :] = sy[:, s:s + j]
    He[s * ne:(s + 1) * ne, :] = su[:, s:s + j]

H = np.vstack([He, Hs]).T

```

Para formar as matrizes mencionadas, será utilizada a biblioteca *Numpy*² (abreviada como *np* nos trechos de código), que permite inicializar matrizes zeradas com as dimensões previamente calculadas. Além disso, essa biblioteca auxilia na concatenação dos blocos de matriz, facilitando assim a criação da matriz de Hankel $\mathcal{H}$.

3.2 Decomposição QR

A decomposição QR é aplicada sobre a matriz de Hankel $\mathbf{H}$, retornando uma matriz ortogonal $\mathbf{Q}$ e outra triangular superior $\mathbf{R}$. Como foi discutido anteriormente na seção 2.4, apenas uma parte da matriz $\mathbf{R}$ será utilizada no restante do algoritmo, selecionada pela ordem da matriz k , o número de entradas n_e e o número de saídas n_s . O código abaixo mostra como a matriz $\mathbf{R}$ é calculada na linguagem de programação *Python*.

```

_, R = np.qr(H)
R = R[:k * (ns + ne), :]
R22 = R[k * ne:, k * ne:]

```

A biblioteca *Numpy* também é utilizada nesse passo para aplicar a decomposição QR nas amostras da matriz de Hankel. Essa matriz triangular baixa será necessária para extrair a última matriz quadrada inversível $\mathbf{R}_{22}$, definida pela quantidade de entradas e pela ordem da matriz de Hankel. Assim, essa etapa do algoritmo pode ser interpretada como a projeção dos dados de saída sobre os de entrada, dada a interpretação geométrica da decomposição QR e do formato da matriz de Hankel.

3.3 Decomposição em Valores Singulares

O passo seguinte no algoritmo do MOESP é formado pela Decomposição em Valores Singulares (SVD) da matriz $\mathbf{R}_{22}$ obtida pela Decomposição QR no passo anterior. No código em *Python* a seguir é utilizada a biblioteca *Numpy* para decompor a matriz em estudo em três diferentes matrizes.

```

U1, S1, _ = np.linalg.svd(R22)

```

Para dar sequência ao algoritmo, apenas as matrizes $\mathbf{U}_1$ e $\mathbf{S}_1$ são utilizadas, correspondendo à matriz ortogonal $\mathbf{U}$ e diagonal $\mathbf{\Sigma}$ (ver seção 2.5). Dessa forma, não há uma variável no código para a matriz $\mathbf{V}$ mencionada na seção 2.5. Uma interpretação possível desse passo do algoritmo é a aplicação da Decomposição em Valores Singulares (SVD) para extrair as principais características da matriz que representa a projeção dos dados de saída nos dados de entrada.

²<https://numpy.org/doc/1.26/>

3.4 Definição da Ordem do Sistema

Neste ponto do algoritmo outra variável livre precisa ser determinada: a ordem do sistema $\hat{n}$. O valor dessa variável define o tamanho das matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ que representarão o sistema em estudo. Embora possa ser definida com base no conhecimento prévio do sistema, também pode ser determinada a partir dos valores singulares calculados na seção anterior.

Para os casos em que não existe um conhecimento prévio do sistema, o método desenvolvido em [Overschee and Moor, 1995] analisa a matriz $\mathbf{S}_1$ referente aos valores singulares obtidos na decomposição de matrizes anterior. Sabendo que os valores dessa matriz estão em ordem decrescente, a ordem do sistema será estimada como o índice do $\hat{n}$ -ésimo valor singular da matriz $\mathbf{S}_1$ cuja soma acumulada dos valores absolutos ultrapassa 90% do total.

3.5 Encontrando as Matrizes do Sistema

Para encerrar o algoritmo, será necessário relacionar as matrizes resultantes das decomposições anteriores com algumas informações sobre o sistema. Dessa forma, as sub-seções a seguir exploram a forma de encontrar as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{C}$ para, em seguida, encontrar as matrizes $\mathbf{B}$ e $\mathbf{D}$.

3.5.1 Matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{C}$

No trabalho de [Overschee and Moor, 1995], é desenvolvida uma relação entre a matriz de observabilidade e as matrizes calculadas na Decomposição em Valores Singulares (SVD). A matriz de observabilidade é uma matriz que indica se todos os estados do sistema são observáveis, ou seja, se as variáveis de estado podem ser observadas na saída. A relação entre elas é descrita por:

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{\hat{n}-1} \end{bmatrix} = \mathbf{U}_1 \mathbf{S}_1^{1/2} \quad (3.2)$$

Dessa forma, a matriz $\mathbf{C}$ pode ser definida como as n_s (número de saídas do sistema) primeiras linhas da multiplicação de matriz $\mathbf{U}_1 \mathbf{S}_1^{1/2}$, calculadas na seção 3.3. Já para a matriz $\mathbf{A}$, é obtida a equação abaixo, a partir do segundo bloco de linhas da equação 3.2, representando $\mathbf{U}_1 \mathbf{S}_1^{1/2}$ como o primeiro bloco da matriz de observabilidade e $\mathbf{U}_1 \mathbf{S}_1^{1/2}$ como o segundo da mesma matriz.

$$\overline{\mathbf{U}_1 \mathbf{S}_1^{1/2}} \mathbf{A} = \underline{\mathbf{U}_1 \mathbf{S}_1^{1/2}}$$

$$\mathbf{A} = (\overline{\mathbf{U}_1 \mathbf{S}_1^{1/2}})^\dagger (\underline{\mathbf{U}_1 \mathbf{S}_1^{1/2}})$$

Em *Python*, ambas as matrizes conseguem ser calculadas seguindo o código abaixo, utilizando a biblioteca *Numpy* para calcular a pseudo-inversa da matriz $\mathbf{U}_1 \mathbf{S}_1^{1/2}$:

```
Ok = U1[:, :n] @ np.sqrt(S1[:, :n])
C = Ok[:, ns, :]
A = np.linalg.pinv(Ok[:, ns * (k - 1), :]) @ Ok[ns:k * ns, :]
```

3.5.2 Matrizes B e D

A última etapa do algoritmo MOESP consiste em encontrar as matrizes restantes B e D , as quais também são relacionadas por equações desenvolvidas em [Overschee and Moor, 1995]. Na equação 3.4 são utilizadas quatro principais matrizes: o complemento ortogonal da matriz de observabilidade $\Gamma_i^\perp$, a matriz triangular inferior de Toeplitz T_i , a matriz correspondente às saídas futuras Y_f e entradas futuras U_f .

A matriz em blocos triangular inferior de Toeplitz T_i é uma matriz caracterizada por possuir os elementos da mesma diagonal constantes. Esse em específico são formados pelas matrizes A , B , C e D das equações de espaço de estado, como é demonstrado abaixo.

$$T_i = \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CB & D & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & D & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{i-2}B & CA^{i-3}B & CA^{i-4}B & \dots & D \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Já as matrizes referentes aos dados futuros (U_f para as entradas futuras e Y_f para as saídas), é necessário relembrar a definição de como as matrizes de Hankel são definidas (seção 2.3). Assim como essa matriz pode ser dividida em bloco de entrada e de saída, a matriz de Hankel também pode ser dividida em dados passados e futuros dentro de cada bloco. Dessa forma, é possível obter as matrizes U_f e Y_f utilizadas na equação 3.4 através da matriz de Hankel definida no primeiro passo da metodologia (seção 3.1).

$$\Gamma_i^\perp Y_f U_f^\dagger = \Gamma_i^\perp T_i \quad (3.4)$$

Considerando L como o complemento ortogonal da matriz de observabilidade $\Gamma_i^\perp$ e M como todo o termo à esquerda da equação acima, obtém-se a seguinte reorganização provada em [Ricco, 2012], considerando $\underline{\Gamma}_i$ como Γ_i sem sua primeira linha:

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & \dots & L_{i-1} & L_i \\ L_2 & L_3 & \dots & L_i & 0 \\ L_3 & L_4 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ L_i & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_i & 0 \\ 0 & \Gamma_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ B \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

A partir dessa configuração, é possível encontrar a última matriz à direita da equação acima aplicando o método dos mínimos quadrados, visto que as demais variáveis são conhecidas. O código em *Python* abaixo mostra como o passo a passo dessa seção é feita na prática, no qual as matrizes M e L são calculadas a partir de suas respectivas definições, resultando nas matrizes de interesse B e D através do método de mínimos quadrados.

```
L1 = U1[:, n:].T
R11 = R[:, d * nu, :d * nu]
R21 = R[d * nu:, :d * nu]

M1 = np.dot(L1 @ R21, np.linalg.inv(R11))
m = ny * d - n
M = np.zeros((m * d, nu))
L = np.zeros((m * d, ny + n))
```

```

for k in range(1,d+1):
    M[(k - 1) * m:k * m, :] = M1[:, (k - 1) * nu:k * nu]
    L[(k - 1) * m:k * m, :] = np.concatenate((
        L1[:, (k - 1) * ny:k * ny],
        L1[:, k * ny:] @ Ok[:, - k * ny, :]
    ), axis=1)

DB = np.linalg.pinv(L) @ M
D = DB[:,ny, :]
B = DB[ny:, :]

```

Neste momento, todas as matrizes essenciais para a definição de um sistema dinâmico por meio de equações de espaço de estados foram calculadas pelo método MOESP e estão prontas para serem empregadas em suas respectivas finalidades.

Capítulo 4

Resultados

Este capítulo apresenta os resultados da aplicação do método de identificação MOESP em um sistema simulado, em um sistema de bobinas e um sistema real dos tanques acoplados. A partir dos dados coletados, o algoritmo calcula as matrizes que definem a dinamicidade dos sistemas a partir de diferentes variáveis livres (ordem estimada do sistema). Os resultados obtidos serão analisados graficamente e comparados através de diferentes métricas.

4.1 Sistema Simulado

O primeiro sistema a ser analisado é um sistema dinâmico numérico e simulado, caracterizado por três entradas discretas aleatórias e quatro matrizes aleatórias A_s , B_s , C_s e D_s , que definem seu comportamento e resultam em duas saídas. Todas as variáveis foram criadas através da biblioteca *Numpy* da linguagem *Python*, produzindo 2.000 dados de entrada (Figura 4.1) e 2.000 dados de saída ruidosos (Figura 4.2) que serão fornecidos para o algoritmo MOESP. As matrizes utilizadas para esta análise são descritas a seguir:

$$A_s = \begin{bmatrix} 0.603 & 0.603 & 0 & 0 \\ -0.603 & 0.603 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.603 & -0.603 \\ 0 & 0 & 0.603 & -0.603 \end{bmatrix}$$
$$B_s = \begin{bmatrix} 1.1650 & -0.6965 \\ 0.6268 & 1.6961 \\ 0.0751 & 0.0591 \\ 0.3516 & 1.7971 \end{bmatrix}$$
$$C_s = \begin{bmatrix} 0.2641 & -1.4462 & 1.2460 & 0.5774 \\ 0.8717 & -0.7012 & -0.6390 & -0.3600 \end{bmatrix}$$
$$D_s = \begin{bmatrix} -0.1356 & -1.2704 \\ -1.3493 & 0.9846 \end{bmatrix}$$

Dada a familiaridade desse sistema em específico, o algoritmo será aplicado aos dados apresentados e analisado a partir de outro conjunto de 2.000 amostras de entrada e 2.000 amostras de saídas geradas pelas mesmas equações de espaço de estado desse sistema de quarta ordem.

Figura 4.1: Valores de entrada do Sistema Simulado.

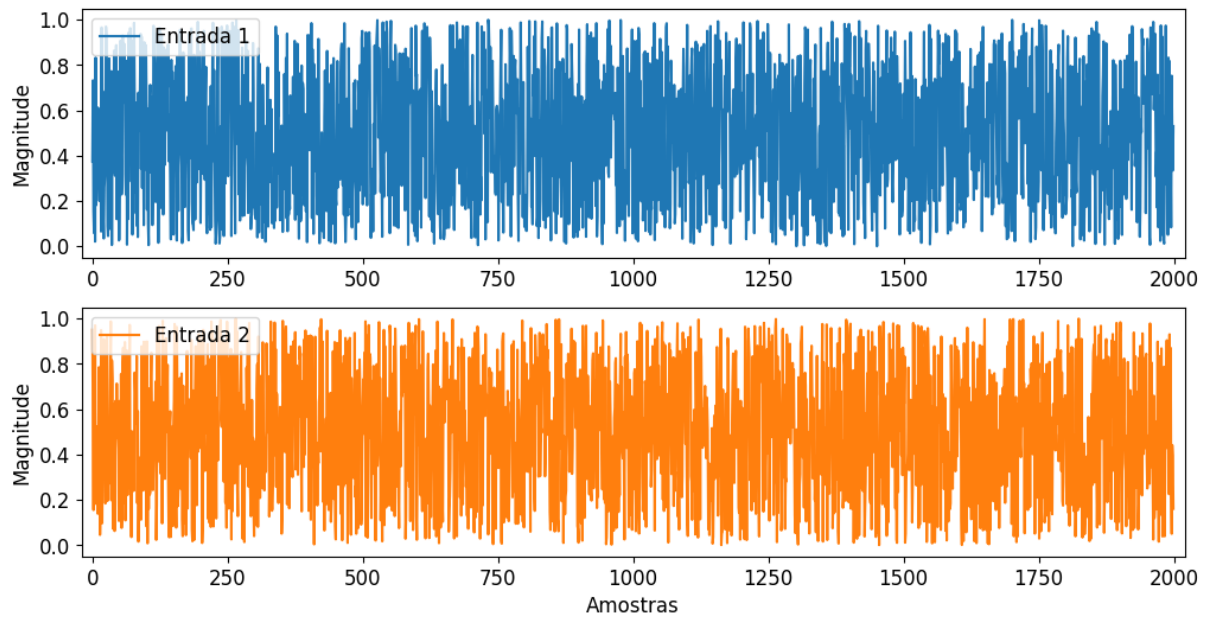
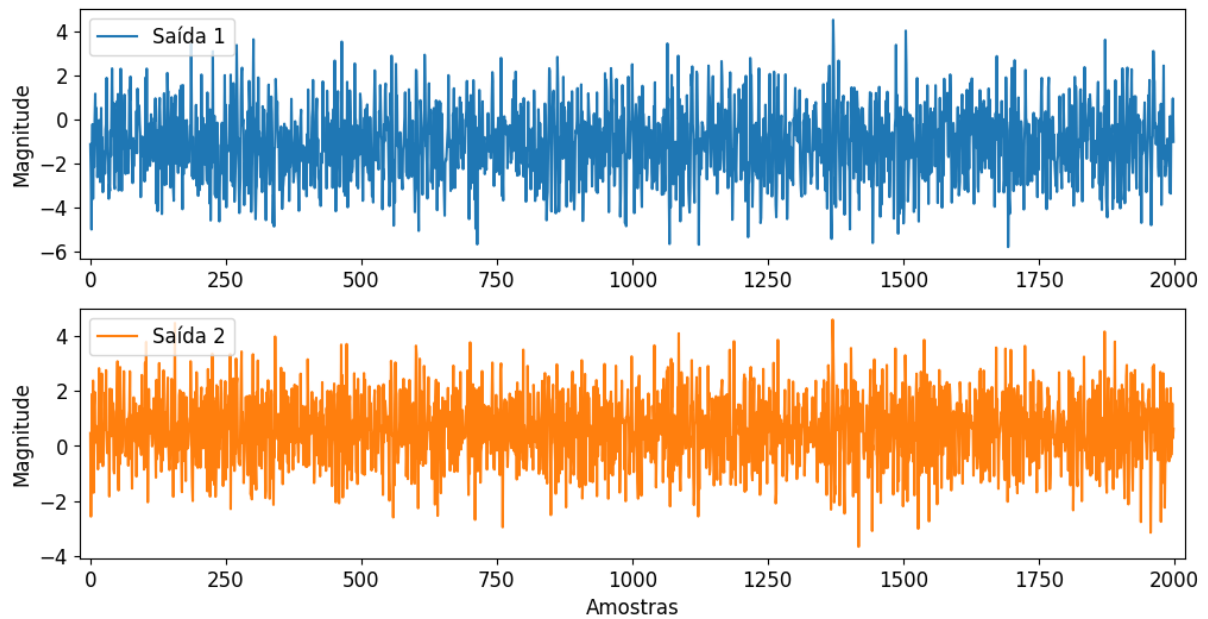


Figura 4.2: Valores de saída do Sistema Simulado.

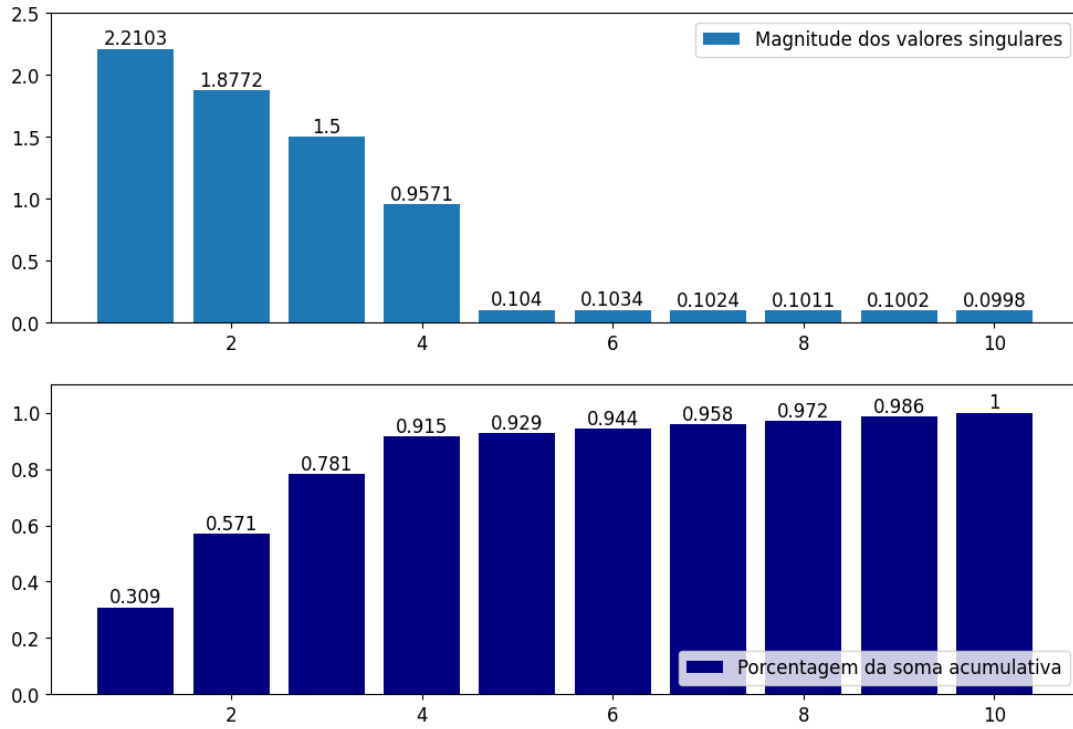


4.1.1 Variáveis Livres do Algoritmo

Afim de explorar as escolhas das variáveis livres do algoritmo, os resultados serão comparados entre três diferentes ordens de sistema, incluindo a ordem estimada pelo próprio algoritmo através dos valores singulares da matriz $\mathbf{S}_1$ (olhar seção 3.4). A partir da aplicação das decomposições de matriz discutidas no capítulo anterior, é possível analisar os valores singulares da matriz $\mathbf{S}_1$ para definir uma ordem padrão para o sistema (Figura 4.3), conforme é explicado na seção 3.4.

Analisando a magnitude dos valores singulares para o Sistema Simulado, é evidente que a ordem

Figura 4.3: Valores Singulares obtidos da matriz S_1 (sub-figura acima) e a porcentagem da soma acumulativa desses valores (sub-figura abaixo) para o Sistema Simulado.



$\hat{n} = 4$ contemplam mais de 90% das informações do sistema, tornando-se, portanto, a primeira ordem a ser considerada. As ordens restantes serão aquelas próximas ao valor padrão, sendo assim, as ordens $\hat{n}_2 = 3$ e $\hat{n}_3 = 5$ também serão investigadas neste estudo.

4.1.2 Identificação do Sistema

Os valores resultantes da identificação do Sistema Simulado, por se tratar de um sistema de dinâmica conhecida, serão comparados com 2.000 conjuntos de dados diferentes dos que foram fornecidos no algoritmo do MOESP. Dessa forma, 2.000 amostras de cada entrada foram geradas aleatoriamente, foram inseridas nas equações de espaço de estados reais e calculadas, nas quais ambas geraram 2.000 amostras de cada saída desse sistema.

Para cada análise de resultado do algoritmo, será fixado o número $k = 5$ correspondente à ordem da matriz de Hankel. O primeiro resultado encontrado pelo algoritmo MOESP é a partir da variável livre calculada na seção anterior $\hat{n} = 4$. As matrizes encontradas pelo MOESP estão descritas a seguir:

$$A_{S1} = \begin{bmatrix} 0.5297 & 0.601 & 0.3227 & 0.1022 \\ -0.6119 & 0.2111 & 0.6849 & 0.0229 \\ 0.0596 & 0.4957 & -0.258 & -0.6565 \\ 0.2694 & -0.2906 & 0.4955 & -0.4821 \end{bmatrix}$$

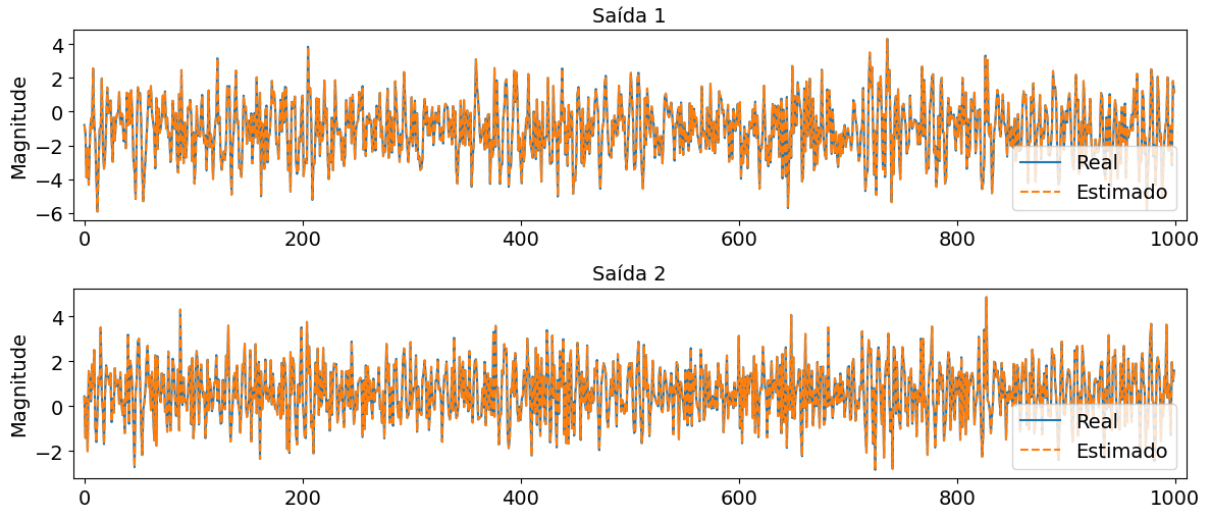
$$B_{S1} = \begin{bmatrix} -0.1039 & 3.3253 \\ -1.4257 & 0.5431 \\ -1.433 & -1.781 \\ 0.0688 & -0.6678 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{S1} = \begin{bmatrix} -0.7822 & 0.7016 & -0.4363 & 0.1261 \\ -0.634 & -0.4183 & 0.1709 & -0.2396 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{S1} = \begin{bmatrix} -0.1403 & -1.2715 \\ -1.3409 & 0.9831 \end{bmatrix}$$

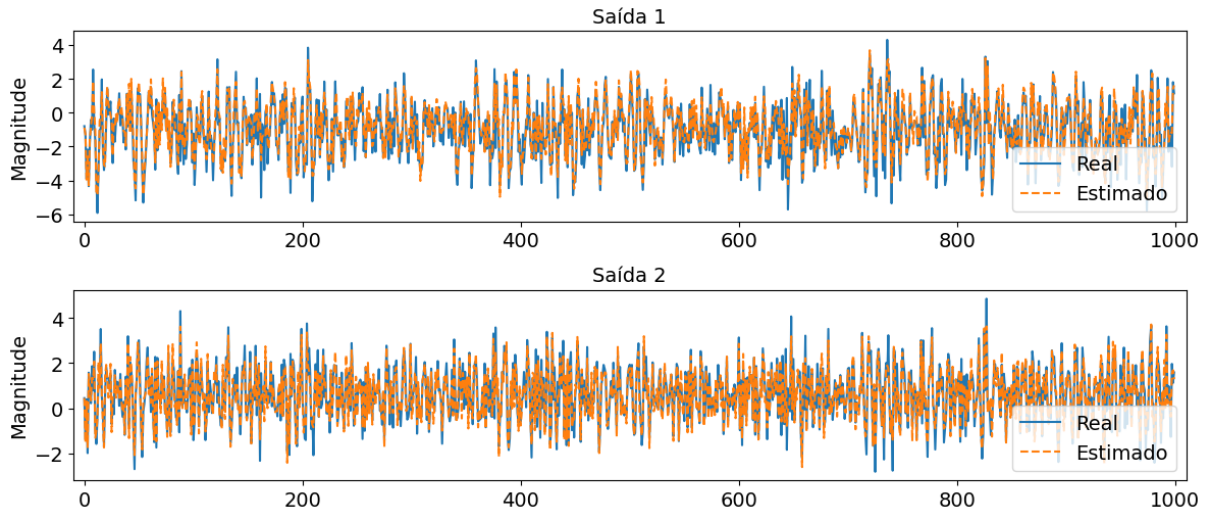
Graficamente, as saídas são comparadas na Figura 4.4 e numericamente na Tabela 4.1.

Figura 4.4: Saídas de referência e estimadas para o Sistema Simulado com ordem $\hat{n} = 4$.



O segundo resultado encontrado pelo algoritmo, a fim de explorar a escolha dessa variável livre, será $\hat{n}_2 = 3$. Assim como na ordem anterior, será analisado o resultado graficamente na Figura 4.5 e numericamente na Tabela 4.1.

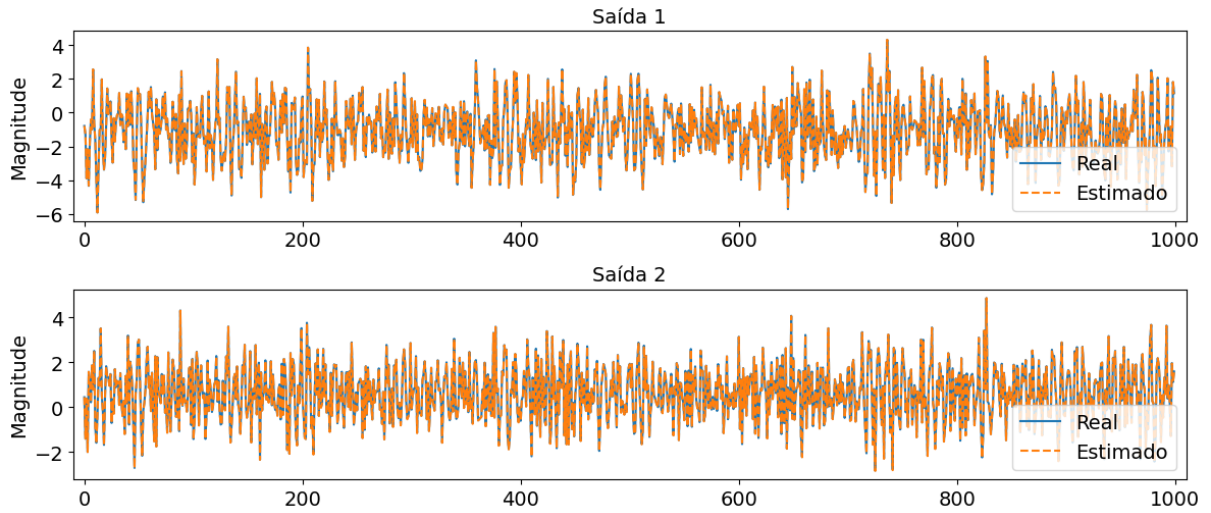
Figura 4.5: Saídas de referência e estimadas para o Sistema Simulado com ordem $\hat{n}_2 = 3$.



Por fim, a última ordem do sistema analisada no resultado do algoritmo do MOESP é $\hat{n}_3 = 5$. Assim como nas ordens anteriores, a exploração dessa variável livre será feita graficamente na Figura 4.6 e

numericamente na Tabela 4.1.

Figura 4.6: Saídas de referência e estimadas para o Sistema Simulado com ordem $\hat{n}_3 = 5$.



A Tabela abaixo apresenta a avaliação das amostras estimadas pelo algoritmo MOESP para o Sistema Simulado, considerando as diferentes ordens do sistema estudadas. Os valores de erro médio absoluto (MAE), erro quadrático médio (MSE), raiz do erro quadrático médio (RMSE), coeficiente de determinação (R^2) e variância da função de aproximação (VAF) são relatados para cada saída e ordem do sistema considerada.

Tabela 4.1: Avaliação das amostras estimadas pelo algoritmo MOESP com diferentes ordens em relação às amostras de referência para o Sistema Simulado.

Saída	Ordem do sistema	MAE	MSE	RMSE	R^2	VAF
1	$\hat{n}_1 = 4$	0.01	0	0.01	1	100
	$\hat{n}_2 = 3$	0.57	0.51	0.71	0.83	84.09
	$\hat{n}_3 = 5$	0.01	0	0.01	1	100
2	$\hat{n}_1 = 4$	0.01	0	0.01	1	100
	$\hat{n}_2 = 3$	0.37	0.22	0.47	0.86	85.94
	$\hat{n}_3 = 5$	0.01	0	0.02	1	100

Com base nos resultados apresentados na tabela, é evidente que o desempenho do algoritmo MOESP na estimativa das amostras para o Sistema Simulado varia de acordo com a ordem do sistema considerada para ambas as saídas. Para cada uma das saídas, as estimativas apresentam um ótimo desempenho quando a ordem do sistema é $\hat{n}_1 = 4$ e $\hat{n}_3 = 5$, indicando uma concordância quase exata com os valores de referência. No entanto, para a ordem $\hat{n}_2 = 3$, embora ainda haja um bom desempenho, os valores encontrados nas métricas de avaliação sugerem uma adequação ligeiramente inferior aos demais modelos para ambas as saídas.

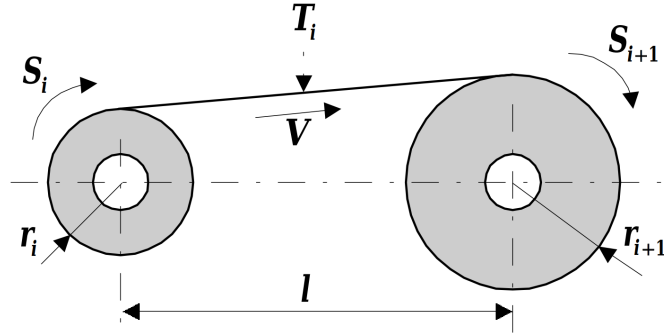
Além disso, nota-se que quando a ordem estimada do sistema coincide com a do sistema de referência ($\hat{n}_1 = 4$), as matrizes que descrevem a dinâmica do Sistema Simulado diferem entre si. Essa variação reflete uma característica fundamental da representação matricial de sistemas: sua capacidade de representar um sistema de várias maneiras. Dessa forma, qualquer sistema contido em um espaço matricial no qual pode ser representado e identificado por um subespaço que captura suas principais características.

4.2 Sistema de Carretéis

O objetivo da descrição e utilização do sistema descrito em seguida é demonstrar o uso da metodologia deste trabalho em um sistema industrial real usado como *bechmark*. Os dados são de uma configuração de teste de um processo de enrolamento industrial, e estão disponíveis numa base de dados voltada para identificação de sistemas dinâmicos chamada *Database for the Identification of Systems* (DaISy) [De Moor, 2000].

Este estudo de caso utiliza dados coletados em [Bastogne et al., 1997] e disponibilizada em [De Moor et al., 1997], a qual se refere a um processo de teste de um processo de enrolamento industrial. A planta desse processo é composta por três carretéis (S_{C1} , S_{C2} e S_{C3}) de distância l onde passam duas fitas entre elas, uma entre o carretel S_{C1} e S_{C2} , criando uma tensão entre eles de valor T_1 , e outra entre o carretel S_{C2} e S_{C3} , criando uma tensão entre eles de valor T_2 . A figura a seguir, demonstrada no trabalho de [Bastogne et al., 1997], generaliza o funcionamento geral do processo entre o carretel e a fita.

Figura 4.7: Esquema genérico do processo de funcionamento do Sistema de Carretel, obtida em [Bastogne et al., 1997].



Nesse sistema, o controle é feito por dois motor CC, os quais se ajustam através de duas correntes diferentes (I_1 e I_2) e das velocidades angulares de cada carretel (ω_1 , ω_2 e ω_3). As variáveis a serem controladas nesse caso são duas as tensões entre os carretéis, totalizando, portanto, cinco variáveis de entrada e duas de saída.

Os dados de entrada e saída utilizados para a identificação desse sistema são compostos por 2500 amostras de cada variável analisada: duas correntes e três velocidades angulares para as entradas (Figura 4.8) e duas tensões para as saídas (Figura 4.9).

Figura 4.8: Valores de referência para a entrada do Sistema de Carretéis.

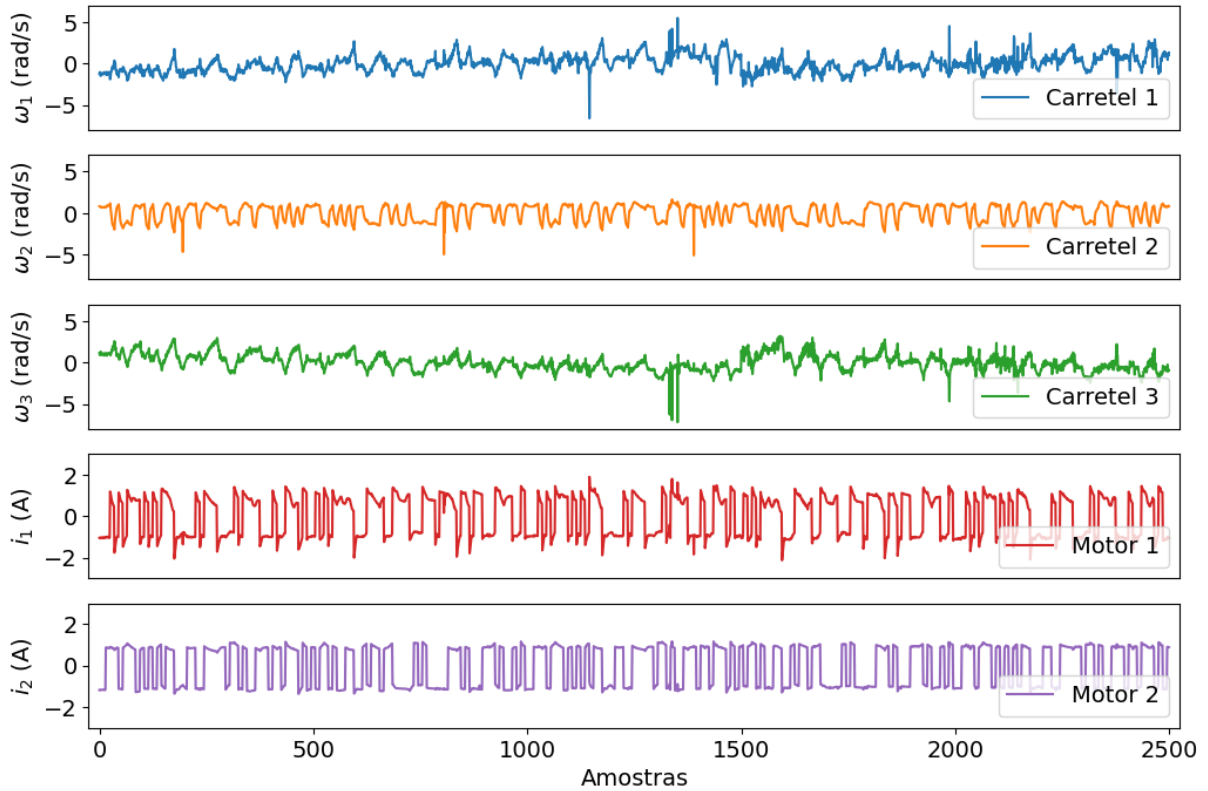
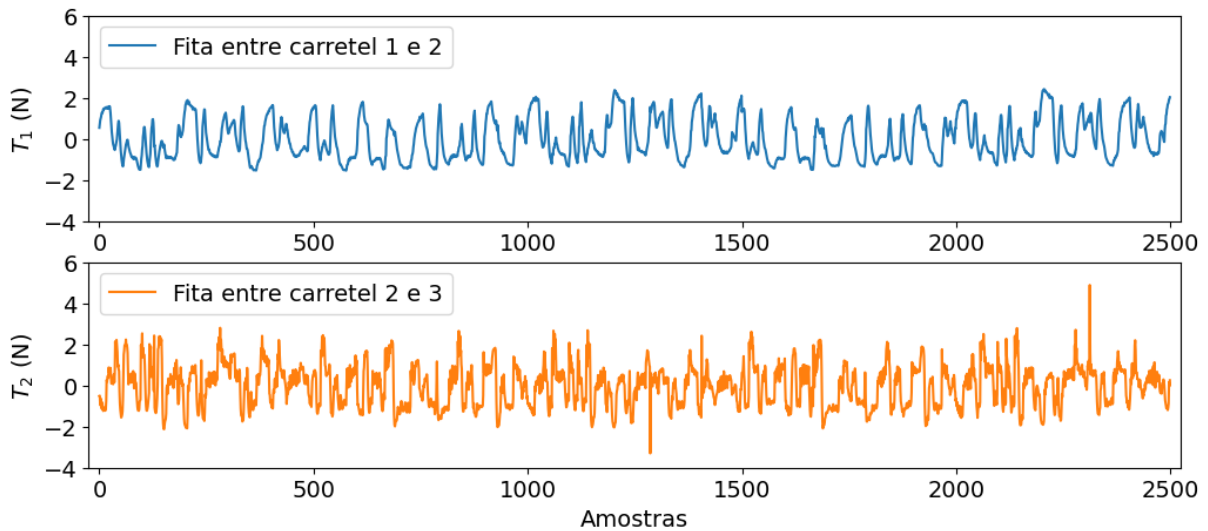


Figura 4.9: Valores de referência para a saída do Sistema de Carretéis.

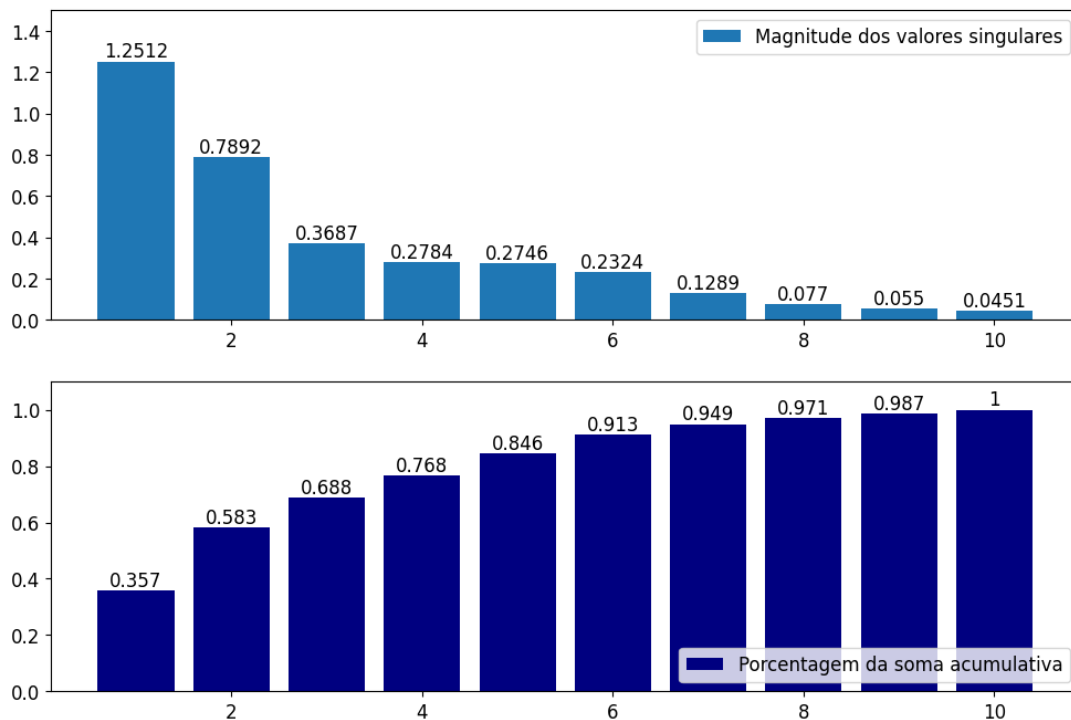


Por esse sistema ter uma dinâmica matemática desconhecida, os mesmos dados coletados serão inseridos no algoritmo MOESP para encontrar as matrizes referentes às equações de espaço de estado e também serão utilizados para a validação dos resultados encontrados.

4.2.1 Variáveis Livres do Algoritmo

Assim como no sistema anterior, será feita a exploração da ordem estimada do sistema $\hat{n}$, fixando apenas a ordem da matriz de Hankel como $k = 5$. Os valores para $\hat{n}$ serão analisados de acordo com os valores singulares da matriz $\mathbf{S}_1$ (olhar seção 2.5), calculado pelo próprio algoritmo MOESP. A Figura abaixo expõe os seus valores em ordem decrescente.

Figura 4.10: Valores Singulares obtidos da matriz $\mathbf{S}_1$ (sub-figura acima) e a porcentagem da soma acumulativa desses valores (sub-figura abaixo) para o Sistema de Carretéis.



Para o caso do Sistema de Carretéis, nota-se que a ordem $\hat{n}_1 = 6$ contemplam mais de 90% das informações do sistema, portanto, essa será a ordem padrão para a análise da influência dessa variável livre com os resultados do MOESP. As demais ordens analisadas nas seguintes seções serão, dessa forma, $\hat{n}_2 = 5$ e $\hat{n}_3 = 7$.

4.2.2 Identificação do Sistema

O primeiro resultado da identificação do Sistema de Carretéis será feita com a ordem padrão $\hat{n}_1 = 6$ calculada na seção anterior. Na Figura 4.11 está exposta a comparação gráfica entre os valores de referência e os estimados, enquanto na Tabela 4.2 estão as comparações medidas por métricas de avaliação para problemas de regressão.

A segunda ordem a ser analisada será $\hat{n}_2 = 5$ a fim de explorar a influência dessa variável livre nos resultados do algoritmo. Assim como na ordem anterior, será feita a comparação gráfica na Figura 4.12 e numericamente na Tabela 4.2.

Por fim, a última ordem explorada será $\hat{n}_3 = 7$, na qual obteve os resultados analisados graficamente na Figura 4.13 e numericamente pela Tabela 4.2.

A avaliação numérica para o Sistema de Carretéis será feita da mesma maneira que a calculada no sistema anterior, semelhante a um problema de regressão. Para cada ordem e saída do sistema, serão expostos na Tabela 4.2 os valores de erro médio absoluto (MAE), erro quadrático médio (MSE), raiz do

Figura 4.11: Saídas de referência e estimadas para o Sistema de Carretéis com ordem $\hat{n}_1 = 6$.

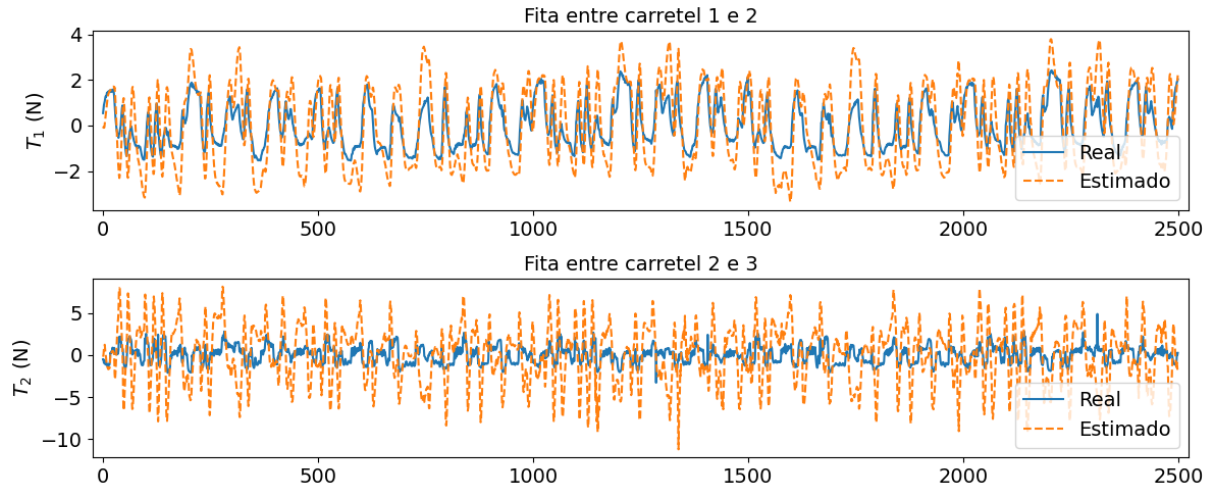
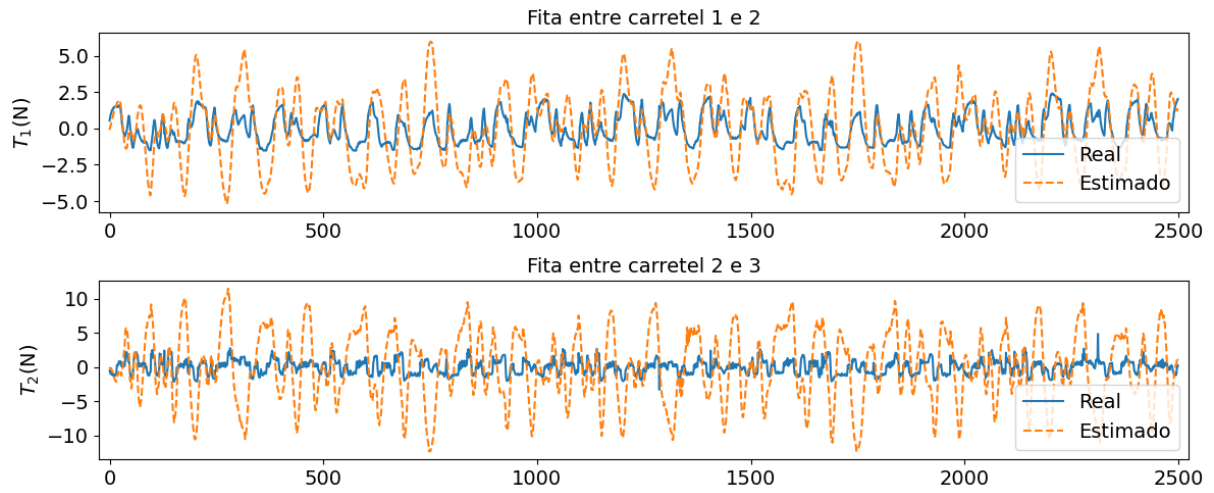


Figura 4.12: Saídas de referência e estimadas para o Sistema de Carretéis com ordem $\hat{n}_2 = 5$.

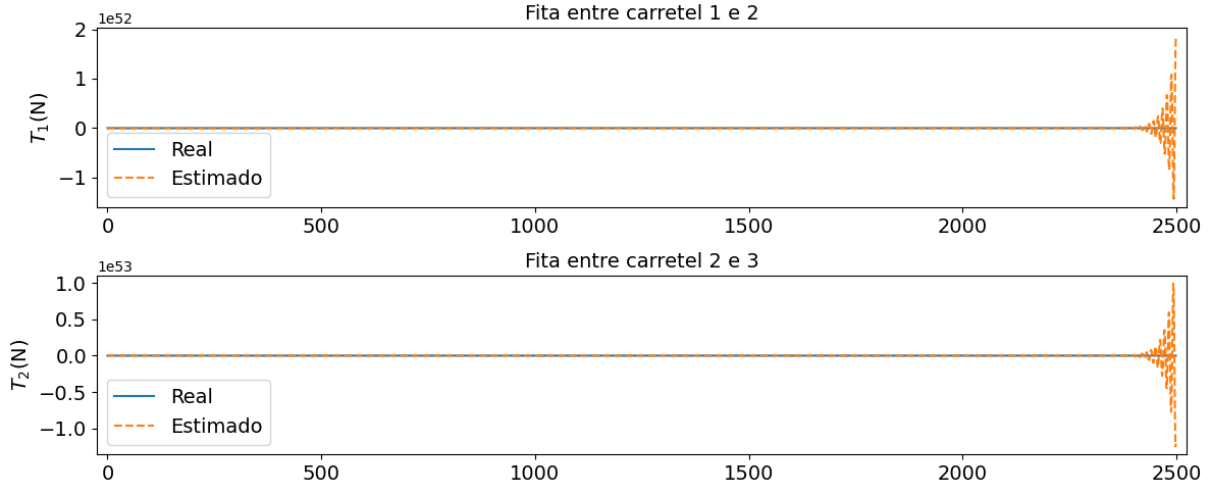


erro quadrático médio (RMSE), coeficiente de determinação (R^2) e variância da função de aproximação (VAF).

Tabela 4.2: Avaliação das amostras estimadas pelo algoritmo MOESP com diferentes ordens em relação às amostras de referência para o Sistema de Carretéis.

Saída	Ordem do sistema	MAE	MSE	RMSE	R^2	VAF
T_1	$\hat{n}_1 = 6$	0.94	1.22	1.10	-0.22	-21.68
	$\hat{n}_2 = 5$	1.55	3.64	1.91	-2.64	-263.92
	$\hat{n}_3 = 7$	1.02e+50	7.94e+101	8.91e+50	-7.94e+101	-7.94e+103
T_2	$\hat{n}_1 = 6$	2.69	10.16	3.19	-9.16	-916.28
	$\hat{n}_2 = 5$	4.04	24.31	4.93	-23.31	-2330.72
	$\hat{n}_3 = 7$	7.31e+50	4.12e+103	6.42e+51	-4.12e+103	-4.12e+105

Figura 4.13: Saídas de referência e estimadas para o Sistema de Carretéis com ordem $\hat{n}_3 = 7$.



Ao analisar as métricas apresentadas na Tabela 4.2, torna-se evidente o impacto significativo da escolha da ordem do sistema nos resultados obtidos. Embora não tenha sido possível identificar com precisão como no sistema anterior, destaca-se que a ordem estimada calculada pelos valores singulares, $\hat{n}_1 = 6$, alcançou os melhores resultados em comparação com as outras. No entanto, é importante ressaltar que a escolha da ordem estimada pode influenciar na estabilidade do sistema, como indicado pelas métricas de avaliação, especialmente no caso da ordem $\hat{n}_3 = 7$, que demonstra um desempenho inadequado em todas as métricas consideradas.

Esse resultado evidencia as limitações da representação por espaço de estados e, consequentemente, do algoritmo MOESP para problemas altamente não-lineares. O formato desse sistema conta com um forte acoplamento de variáveis e diversos atrasos de transporte, implicando uma maior complexidade no processo de identificação da dinamicidade do sistema.

4.3 Sistema de Tanques Acoplado

O último sistema utilizado para a validação do algoritmo MOESP é o Sistema de Tanques Acoplado, composto por dois tanques da Quanser¹ adaptados pelo trabalho [Ícaro Araújo et al., 2019] como mostra o diagrama da Figura 4.14, no qual existem quatro tanques com válvulas no fundo por onde passa a água, fornecida por dois motores elétricos.

As especificações dos componentes presentes na figura esquemática acima do sistema em estudo estão definidas na Tabela 4.3.

O experimento feito para a coleta dos dados teve a duração de 500 segundos com o tempo de amostragem igual a $t = 0.1s$. As tensões aplicadas nos dois motores (Figura 4.15) tentam se aproximar de uma entrada persistentemente excitante a fim de revelar o máximo de características possíveis do sistema estudado. Da mesma forma, durante todo o período do experimento, as saídas (Figura 4.16) também foram coletadas no mesmo tempo de amostragem t .

Assim como no exemplo do Sistema de Carretéis as mesmas amostras coletadas no experimento serão utilizados tanto para encontrar as matrizes das equações de espaço de estados, quanto para validar os

¹<https://www.quanser.com/>

Figura 4.14: Sistema de Tanques Acoplado esquemático (à esquerda) e real (à direita).

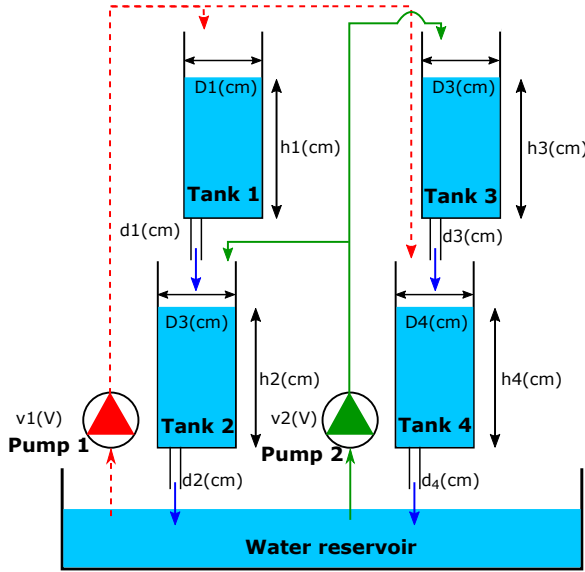


Tabela 4.3: Variáveis que definem a configuração do Sistema de Tanques Acoplado dentro da figura esquemática 4.14. Fonte: [Ícaro Araújo et al., 2019]

Constante	Definição
$D_1 = 4.45\text{cm}$	Diâmetro interno do Tanque 1
$D_2 = 4.45\text{cm}$	Diâmetro interno do Tanque 2
$D_3 = 4.45\text{cm}$	Diâmetro interno do Tanque 3
$D_4 = 4.45\text{cm}$	Diâmetro interno do Tanque 4
$d_1 = 0.32\text{cm}$	Diâmetro do orifício de saída do Tanque 1
$d_2 = 0.32\text{cm}$	Diâmetro do orifício de saída do Tanque 2
$d_3 = 0.32\text{cm}$	Diâmetro do orifício de saída do Tanque 3
$d_4 = 0.32\text{cm}$	Diâmetro do orifício de saída do Tanque 4
h_1 (cm)	Nível da água no Tanque 1 (0-30cm)
h_2 (cm)	Nível da água no Tanque 2 (0-30cm)
h_3 (cm)	Nível da água no Tanque 3 (0-30cm)
h_4 (cm)	Nível da água no Tanque 4 (0-30cm)
v_1 (V)	Tensão no Motor 1 (-12V - 12V)
v_2 (V)	Tensão no Motor 2 (-12V - 12V)

resultados encontrados pelo MOESP. Nas próximas seções também serão exploradas a influência da ordem estimada do sistema nos resultados finais.

4.3.1 Variáveis Livres do Algoritmo

Nesse experimento, a ordem da matriz de Hankel será fixada como $k = 2$, enquanto as ordens estimadas variam ao entorno da ordem de sistema padrão calculada pelos valores singulares. A Figura 4.17 mostra graficamente os valores singulares da matriz $\mathbf{S}_1$ (olhar seção 2.5) em ordem decrescente, juntamente com a porcentagem de soma acumulada.

Dessa forma, os três primeiros maiores valores singulares já contemplam mais de 90% da soma

Figura 4.15: Valores de entrada do experimento com o Sistema de Tanques Acoplado.

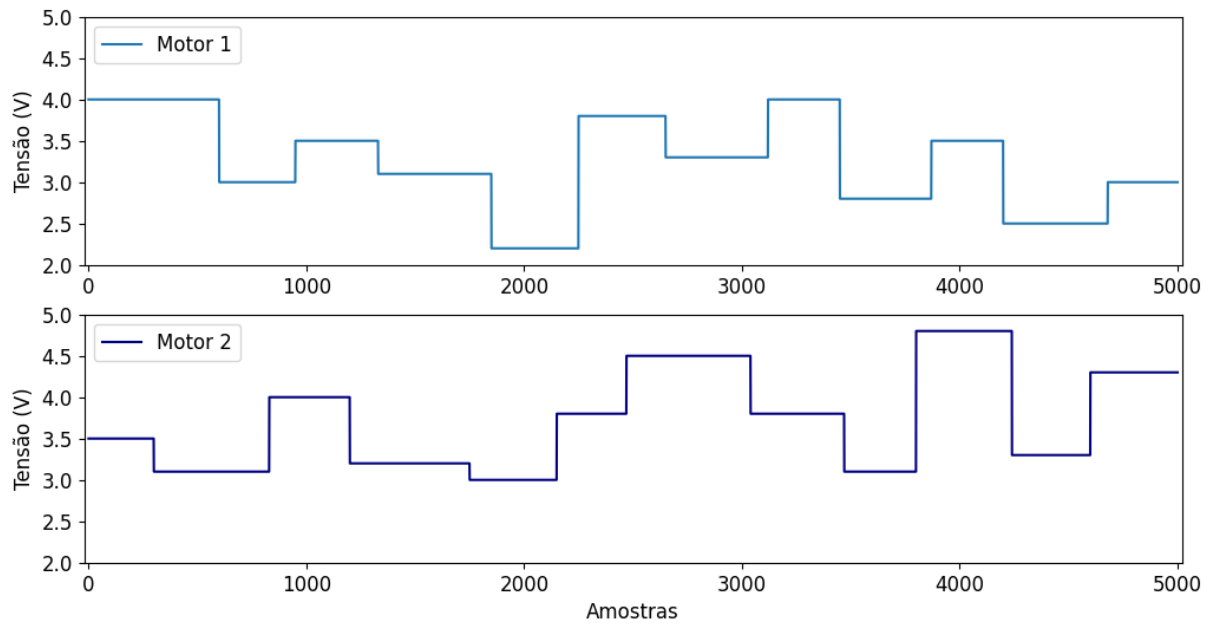
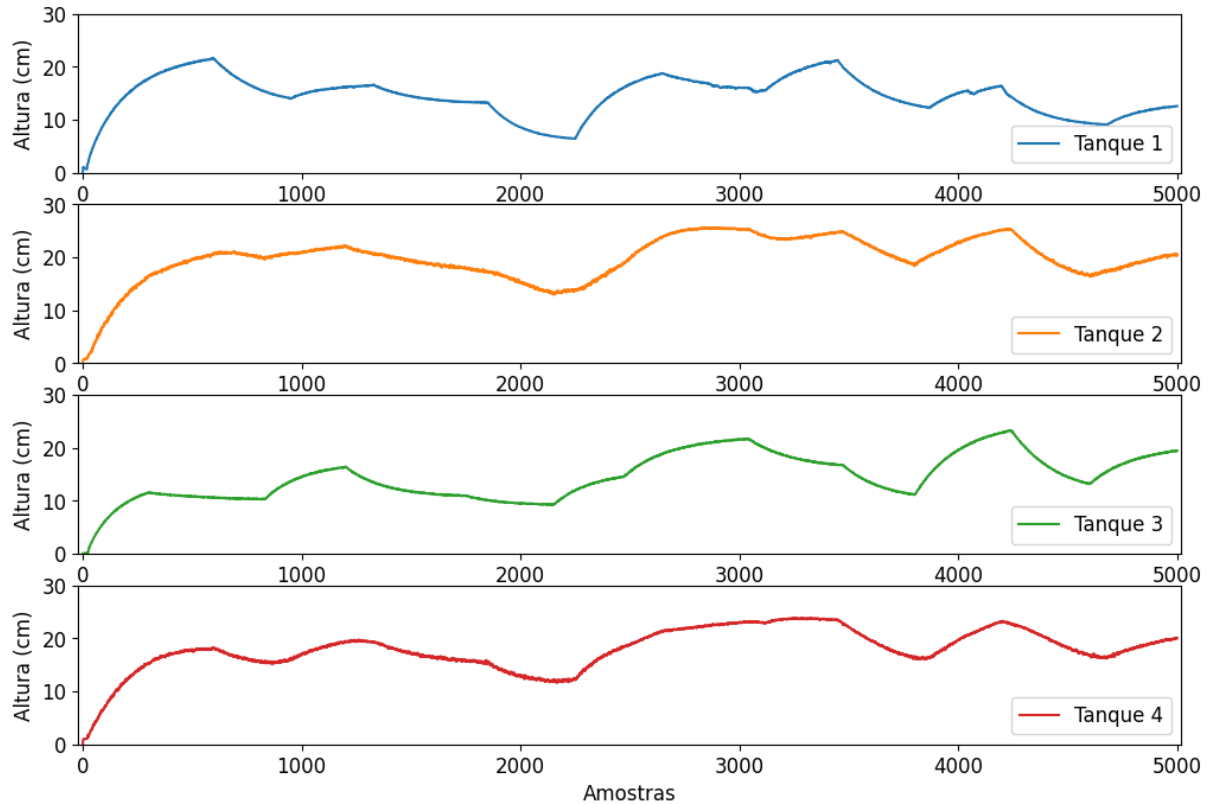
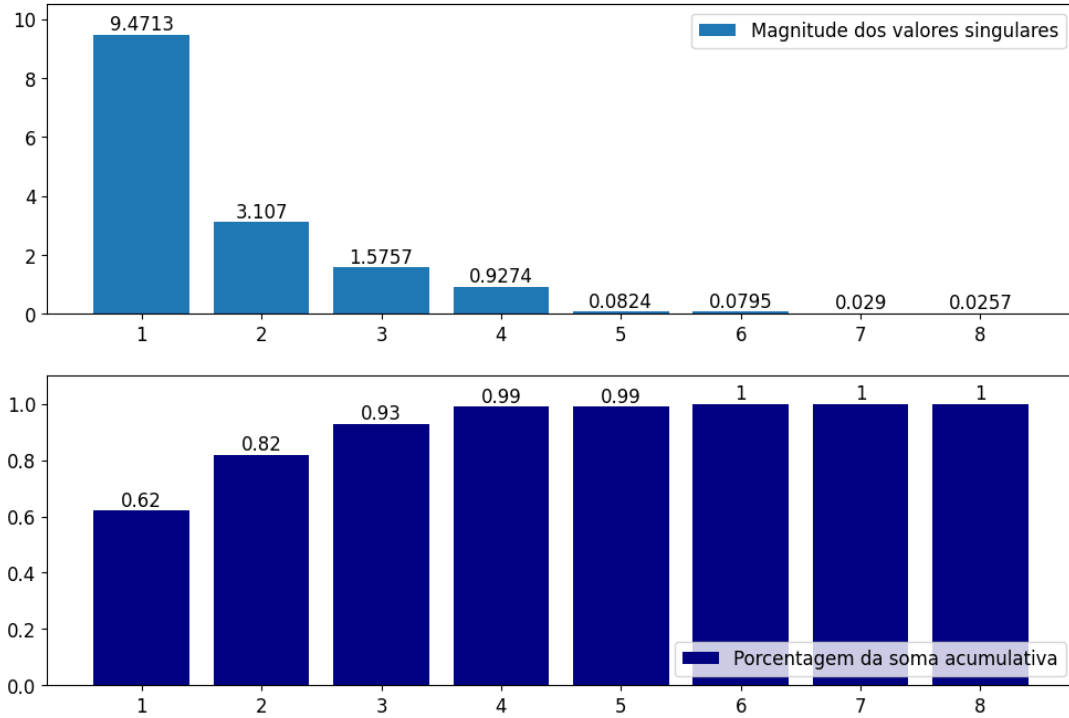


Figura 4.16: Valores de saída do experimento com o Sistema de Tanques Acoplado.



acumulativa total. Portanto, a ordem estimada padrão do sistema para a construção das matrizes das equações de espaço de estados será igual a $\hat{n}_1 = 3$. As demais ordens estudadas serão $\hat{n}_2 = 2$ e $\hat{n}_3 = 4$.

Figura 4.17: Valores Singulares obtidos da matriz $\mathbf{S}_1$ (sub-figura acima) e a porcentagem da soma acumulativa desses valores (sub-figura abaixo) para o Sistema de Tanques Acoplado.



4.3.2 Identificação do Sistema

No processo de validação do sistema matemático encontrado, as mesmas amostras de entrada foram aplicadas ao sistema de equações de espaço de estado, agora com as suas matrizes definidas. As saídas desse sistema estimado foram comparadas com as saídas reais, de maneira análoga a um modelo de regressão. O resultado da aplicação do algoritmo MOESP para a ordem estimada $\hat{n}_1 = 3$ pode ser observado graficamente na Figura 4.18 e numericamente na Tabela 4.4.

A próxima ordem analisada nesse sistema será $\hat{n}_2 = 2$ que quando inserida no algoritmo resultam nas saídas estimadas ilustradas na Figura 4.19. A análise numérica que compara o resultado estimado com as amostras de referência estão na Tabela 4.4.

Por fim, a última ordem a ser analisada para o Sistema de Tanques Acoplado é $\hat{n}_3 = 4$, a qual obteve os resultados gráficos expostos na Figura 4.20 e numéricos na Tabela 4.4.

Analisando numericamente a estimação feita pelo MOESP, serão consideradas as seguintes métricas, respectivamente: Erro Absoluto Médio (MAE), Erro Quadrático Médio (MSE), Raiz Quadrada do Erro Quadrático Médio (RMSE), Coeficiente de Determinação (R^2) e Variância da Amplitude Fracional (VAF). Na Tabela 4.4 estão expostas as métricas separadas por saída e pela ordem estimada inserida dentro do algoritmo.

Ao examinar as métricas deste experimento, destaca-se novamente a eficácia do algoritmo MOESP em contextos de sistemas não-lineares e a influência da ordem estimada sobre os resultados. No caso dos Tanques Acoplados, é evidente que o melhor desempenho não foi alcançado seguindo a ordem padrão calculada pelos valores singulares. Isso sugere que o conhecimento prévio do sistema desempenha um papel crucial no processo de identificação do sistema, destacando a importância de considerar informações adicionais durante a modelagem e a análise.

Comparando os resultados apresentados em [Ícaro Araújo et al., 2019] com os dados da Tabela 4.5,

Figura 4.18: Saídas de referência e estimadas para o Sistema de Tanques Acoplado com ordem $\hat{n}_1 = 3$.

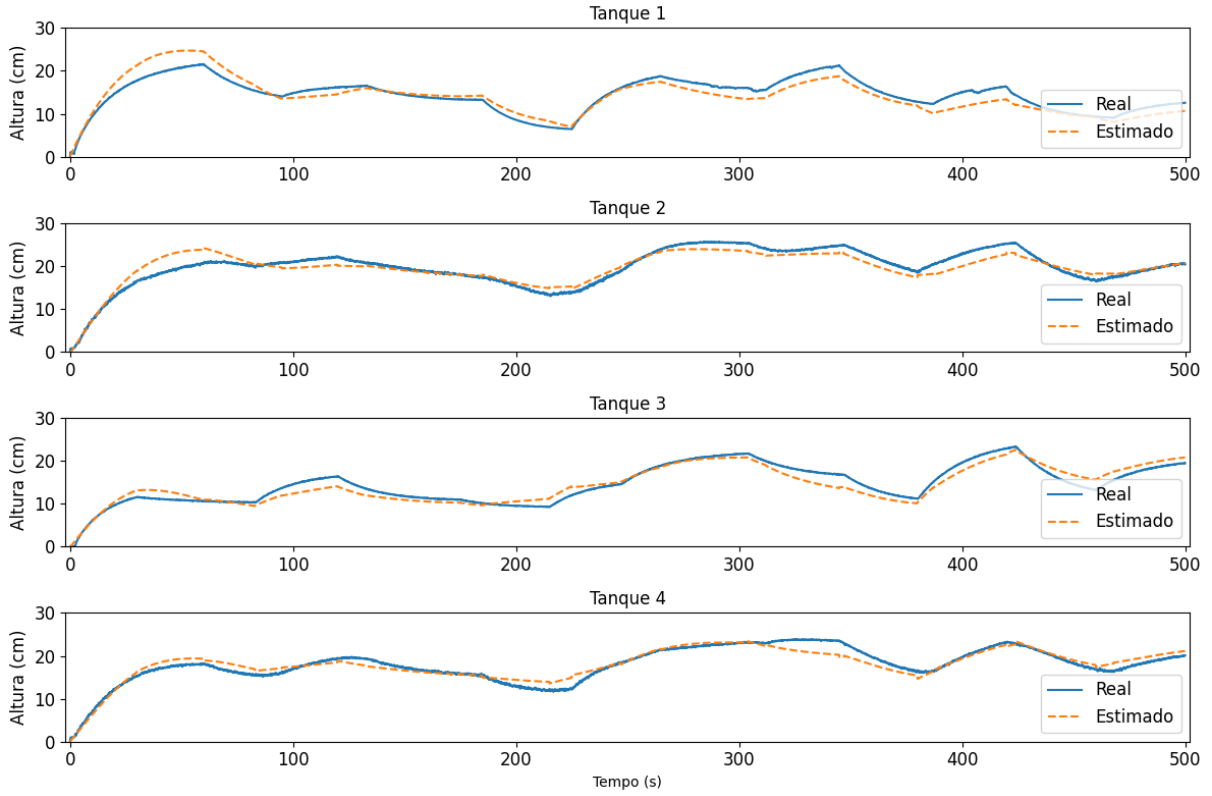


Tabela 4.4: Avaliação das amostras estimadas pelo algoritmo MOESP com diferentes ordens em relação às amostras de referência para o Sistema de Tanques Acoplado.

Saída	Ordem do sistema	MAE	MSE	RMSE	R^2	VAF
Tanque 1	$\hat{n}_1 = 3$	1.575	3.509	1.873	0.753	76.206
	$\hat{n}_2 = 2$	2.901	10.572	3.251	0.255	84.798
	$\hat{n}_3 = 4$	1.058	1.669	1.292	0.882	88.232
Tanque 2	$\hat{n}_1 = 3$	1.316	2.587	1.608	0.852	85.44
	$\hat{n}_2 = 2$	2.394	7.446	2.729	0.574	89.953
	$\hat{n}_3 = 4$	1.173	2.019	1.421	0.885	88.477
Tanque 3	$\hat{n}_1 = 3$	1.259	2.12	1.456	0.885	88.842
	$\hat{n}_2 = 2$	2.247	6.69	2.587	0.637	77.736
	$\hat{n}_3 = 4$	1.187	2.054	1.433	0.888	89.196
Tanque 4	$\hat{n}_1 = 3$	1.008	1.612	1.269	0.894	89.416
	$\hat{n}_2 = 2$	1.401	3.024	1.739	0.801	89.325
	$\hat{n}_3 = 4$	0.925	1.294	1.138	0.915	91.499

observa-se que o desempenho dos modelos NARX explorados supera o melhor caso obtido pelos métodos de subespaço. No entanto, é importante notar que essa superioridade ocorre em um contexto de baixa complexidade do sistema. Em sistemas mais complexos, os modelos NARX exigem maior capacidade computacional e uma estrutura bem definida para a identificação do processo. Essa necessidade de determinar a estrutura do modelo pode representar um desafio adicional em comparação com os métodos de

Figura 4.19: Saídas de referência e estimadas para o Sistema de Tanques Acoplado com ordem $\hat{n}_2 = 2$.

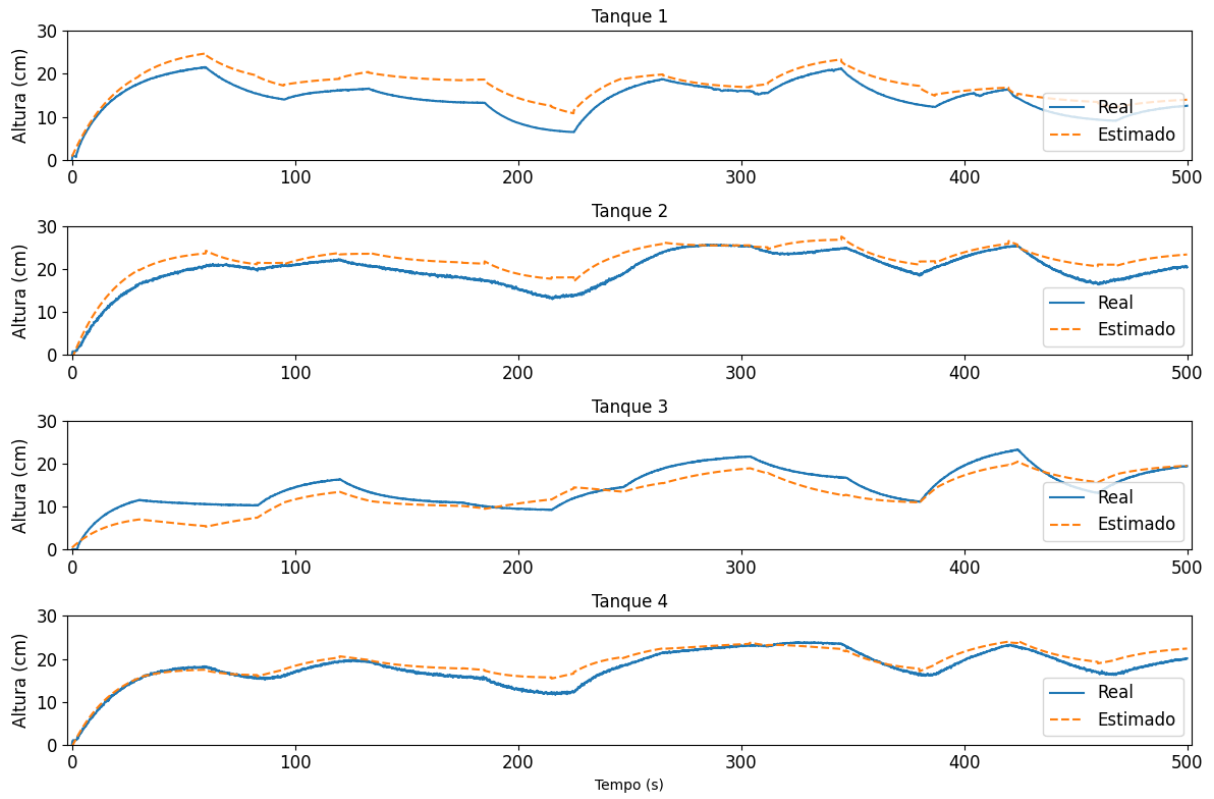
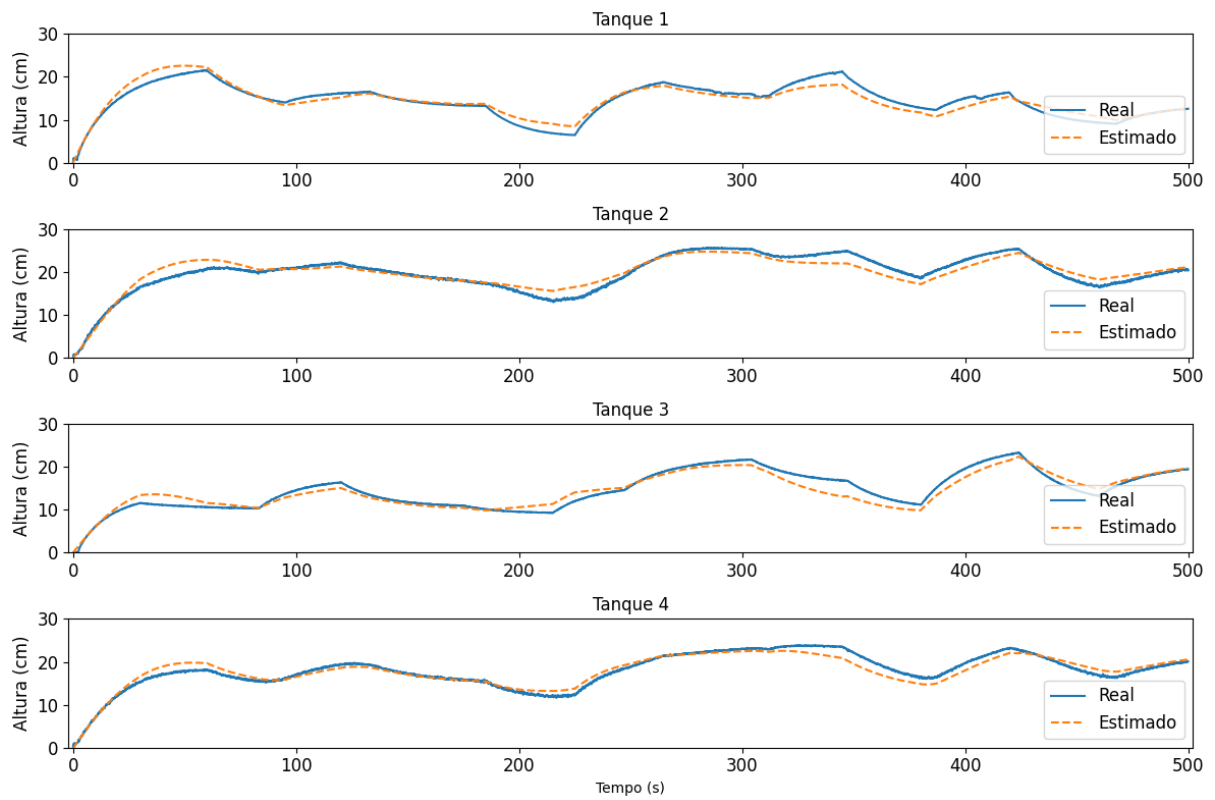


Tabela 4.5: Avaliação das amostras estimadas por modelos do tipo NARX. Fonte: [Ícaro Araújo et al., 2019].

Método/Saída	Tanque 1	Tanque 2	Tanque 3	Tanque 4
FROLS	0,0343	0.0946	0.0425	0.0885
SEMP	0.0342	0.0923	0.0408	0.0867

subespaço, que geralmente oferecem uma abordagem mais estruturada e interpretável para a modelagem.

Figura 4.20: Saídas de referência e estimadas para o Sistema de Tanques Acoplado com ordem $\hat{n}_3 = 4$.



Capítulo 5

Conclusão e Trabalhos Futuros

Neste estudo, foram abordados alguns dos principais trabalhos relacionados ao problema de identificação de sistemas e como ela pode ser solucionada utilizando métodos de subespaço. O foco principal foi a análise do algoritmo MOESP e sua relevância nesse contexto, destacando a necessidade de explorá-lo sob diferentes perspectivas. Para garantir uma compreensão sólida do funcionamento do MOESP, todos os conceitos matemáticos relevantes foram apresentados e discutidos de maneira detalhada. Um aspecto particularmente importante abordado foi a variável livre associada à escolha da ordem do sistema, cuja influência nos resultados estimados foi investigada para diferentes exemplos de sistema.

O desenvolvimento deste trabalho alcançou seu objetivo ao explicar e explorar o algoritmo MOESP em diferentes tipos de sistemas e ordens variadas. Ao fazê-lo, foi possível observar o impacto significativo da escolha das variáveis livres na resposta do sistema estimado, bem como a viabilidade de calcular essas variáveis utilizando as próprias matrizes encontradas dentro do MOESP, resultando nos melhores resultados entre os analisados matematicamente. Além disso, as limitações desse algoritmo para sistemas altamente não-lineares também estiveram evidenciadas nesse trabalho para o caso de identificação dos sistema de carretéis.

Para trabalhos futuros, propõe-se a exploração de outros métodos, como o N4SID e o CVA, de maneira semelhante ao MOESP neste estudo. Isso envolveria uma análise detalhada da matemática subjacente aos algoritmos, seguida pela aplicação desses métodos a diferentes sistemas e variações das variáveis livres. Além disso, a investigação pode ser expandida além da ordem do sistema, explorando também a influência da ordem da matriz de Hankel, conforme discutido na seção 2.3, sobre os resultados estimados. Ao realizar essa análise comparativa, será possível discernir qual método se adapta melhor a diferentes cenários e discutir suas vantagens e limitações de forma mais precisa e fundamentada.

Bibliografia

- [Bastogne et al., 1997] Bastogne, T., Noura, H., Richard, A., and Hittinger, J.-M. (1997). Application of subspace methods to the identification of a winding process. In *1997 European Control Conference (ECC)*, pages 2168–2173.
- [Beintema et al., 2023] Beintema, G. I., Schoukens, M., and Tóth, R. (2023). Deep subspace encoders for nonlinear system identification. *Automatica*, 156:111210.
- [Coelho and dos Santos Coelho, 2004] Coelho, A. and dos Santos Coelho, L. (2004). *Identificação de Sistemas Dinâmicos Lineares*. Editora da UFSC.
- [De Moor, 2000] De Moor, B. (2000). Daisy: Database for the identification of systems. <https://homes.esat.kuleuven.be/smc/daisy/daisydata.html>. Department of Electrical Engineering, ESAT/STADIUS, KU Leuven, Belgium, [Accessed 01-05-2024].
- [De Moor et al., 1997] De Moor, B., De Gersem, P., De Schutter, B., and Favoreel, W. (1997). DAISY: A database for identification of systems. *Journal A*, 38(3):4–5.
- [Gauss and Stewart, 1995] Gauss, C. F. and Stewart, G. W. (1995). *Theory of the Combination of Observations Least Subject to Errors, Part One, Part Two, Supplement*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [Kim and Lynch, 2012a] Kim, J. and Lynch, J. P. (2012a). Subspace system identification of support-excited structures—part i: theory and black-box system identification. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 41(15):2235–2251.
- [Kim and Lynch, 2012b] Kim, J. and Lynch, J. P. (2012b). Subspace system identification of support excited structures—part ii: gray-box interpretations and damage detection. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 41(15):2253–2271.
- [Mellinger et al., 2016] Mellinger, P., Döhler, M., and Mevel, L. (2016). Variance estimation of modal parameters from output-only and input/output subspace-based system identification. *Journal of Sound and Vibration*, 379:1–27.
- [Nosrat et al., 2023] Nosrat, A., Kalhor, A., Nayeri, M. R., and Araabi, B. N. (2023). Tfnet: Few-shot identification of lti systems based on convolutional neural networks. *Journal of Process Control*, 129:103034.
- [Overschee and Moor, 1995] Overschee, P. V. and Moor, B. D. (1995). Choice of state-space basis in combined deterministic-stochastic subspace identification. *Autom.*, 31(12):1877–1883.
- [Paniagua and López, 2024] Paniagua, J. L. and López, J. A. (2024). Nonlinear system identification using modified variational autoencoders. *Intelligent Systems with Applications*, 22:200344.
- [Ricco, 2012] Ricco, R. A. (2012). Identificação de sistemas utilizando métodos de subespaços. Master’s thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, Minas Gerais. Disponível em: <http://hdl.handle.net/1843/BUBD-A7UKGQ>.

- [Sadeghi and Farrokhi, 2018] Sadeghi, M. and Farrokhi, M. (2018). Online identification of non-linear dynamic systems by wiener model using subspace method and neural networks. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 40(2):666–674.
- [Svozil, 2022] Svozil, K. (2022). Generalized householder transformations. *Entropy*, 24(3).
- [Tsiamis and Pappas, 2019] Tsiamis, A. and Pappas, G. J. (2019). Finite sample analysis of stochastic system identification. In *2019 IEEE 58th Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 3648–3654.
- [Wei et al., 2024] Wei, Q., Shen, L., Kövesdi, B., Dunai, L., and Cao, M. (2024). A lightweight stochastic subspace identification-based modal parameters identification method of time-varying structural systems. *Journal of Sound and Vibration*, 570:118092.
- [Yamada et al., 2023] Yamada, K., Maruta, I., and Fujimoto, K. (2023). Subspace state-space identification of nonlinear dynamical system using deep neural network with a bottleneck. *IFAC-PapersOnLine*, 56(1):102–107. 12th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems NOLCOS 2022.
- [Yang and Yang, 2024] Yang, Y. and Yang, B. (2024). An efficient non-negative least mean squares algorithm based on q-gradient for system identification. *Digital Signal Processing*, 148:104438.
- [You et al., 2023] You, J., Huang, C., and Zhang, H. (2023). Combined invariant subspace frequency-domain subspace method for identification of discrete-time mimo linear systems. *Systems Control Letters*, 181:105641.
- [Ícaro Araújo et al., 2019] Ícaro Araújo, Cavalcante, G., Lúcio, Y., and Araújo, F. (2019). Nonlinear system identification of a mimo quadruple tanks system using narx model. *Przegląd Elektrotechniczny*, 95(6):66–72.