

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

VERSÕES DO TEOREMA TUBULAR DE BOCHNER

MAXMILIAN BARROS DE SIQUEIRA

Maceió - AL
Abril de 2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

VERSÕES DO TEOREMA TUBULAR DE BOCHNER

MAXMILIAN BARROS DE SIQUEIRA

Dissertação apresentada ao PPGMAT da UFAL como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof Dr. Renan Dantas Medrado

Maceió - AL
Abril de 2024

Catálogo na Fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 - 1767

S618v Siqueira, Maxmilian Barros de.
Versões do teorema tubular de Bochner / Maxmilian Barros de Siqueira. -
2024.
86 f. : il.

Orientador: Renan Dantas Medrado.
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas.
Instituto de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. Maceió,
2024.

Bibliografia: f. 79-80.
Anexos: f. 81-86.

1. Funções de uma variável complexa. 2. Análise Microlocal (Análise
matemática). 3. Transformada FBI. I. Título.

CDU: 517

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pelo dom da vida, pela saúde e pela perseverança que me foram dadas para chegar até aqui.

Este trabalho foi o produto do meu esforço aliado ao apoio de inúmeras pessoas. Por este motivo, deixo aqui o registro daquelas que foram mais importantes durante estes dois últimos anos.

Agradeço a minha noiva, Monique Paulo de Melo, pelo inestimável apoio, pela inabalável companhia e por sua constante amizade. Tenho sorte de ter sua força ao meu lado.

Agradeço a minha mãe, Gilvaneide de Oliveira Barros, que sempre se esforçou por minha felicidade mais do que eu poderia agradecer em vida (mas, mesmo assim, eu tento) e se dedicou ininterruptamente para que eu pudesse seguir os meus sonhos.

Agradeço aos meus irmãos de sangue: Thiago, Thamires, Guilherme e Miguel por não me deixarem ser uma pessoa infeliz. E agradeço aos meus irmãos que ganhei enquanto trilhava este caminho: Gleydson Santos e Victor Ferreira, obrigado por todo o apoio e força em todos os momentos que a jornada parecia difícil demais.

Agradeço aos meus amigos que fiz na UFAL: Jefferson, Jennifer, Bárbara, Talita, Vinícius, Wagner e Josafá pelos momentos de reflexão partilhados e pela perspectiva comum de que o futuro será melhor.

Agradeço aos técnicos do instituto de matemática e, em particular, à técnica Ana Maria de Mendonça. Também agradeço ao corpo docente e, em especial, agradeço ao Professor Rafael Lucena por ter sido presente em toda a minha formação, eu certamente não teria chegado até aqui sem o seu apoio.

Agradeço aos membros da banca, Professor Márcio Cavalcante e Professor Gustavo Hoepfner por aceitarem participar desta banca e contribuírem com minha formação. Finalmente, agradeço de coração ao meu orientador Renan Dantas Medrado pela dedicação árdua à minha formação e todo o apoio para que eu consiga chegar a lugares que, em alguns momentos, pareceram inacessíveis para mim.

Agradeço à FAPEAL pelo auxílio financeiro a este projeto (processo E:60030.0000001040/2022).

”É necessário conciliar o sonho com a fome.”

- Wagner Xavier Ribeiro.

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar o clássico teorema tubular de Bochner com uma perspectiva mais moderna.

O clássico teorema tubular de Bochner é apresentado na teoria clássica de funções holomorfas e nos dá uma condição suficiente para a extensão de funções holomorfas definidas em conjuntos do tipo tubular em \mathbb{C}^m , $m > 1$, i.e., em conjuntos da forma $U \times \mathbb{R}^m$, onde U é um subconjunto aberto, conexo e não vazio de \mathbb{R}^m . Apresentamos neste texto as ideias do artigo [21] de J. Hounie, as quais nos sugerem uma demonstração alternativa para o teorema tubular de Bochner. Para um completo entendimento desta demonstração precisaremos estabelecer algumas noções e resultados sobre convexidade, discos analíticos e Fórmula de aproximação de Baouendi-Treves. Precisaremos apenas do caso particular da Fórmula de Baouendi-Treves, para a estrutura gerada pelos operadores de Cauchy-Riemann, todavia para tornar o texto mais completo primeiro apresentaremos para estruturas arbitrárias e em seguida para a estrutura desejada (destacando que pode-se obter a convergência em outras topologias, mas neste texto apresentaremos apenas a convergência uniforme).

Apresentaremos também uma versão microlocal para o teorema tubular de Bochner. Nesta versão usaremos uma classe de transformadas FBI (introduzida em [6]), a noção de conjunto frente de onda analítico e a relação entre esses conceitos. As ideias presentes na segunda parte deste trabalho estão no artigo [5] de S. Berhanu. Vale destacar que usando essa segunda versão poderemos estender funções holomorfas definidas em conjuntos mais gerais do que conjuntos do tipo tubular em \mathbb{C}^m .

Palavras chave: Análise Complexa, Análise Microlocal, Transformada FBI.

Abstract

The aim of this work is to study the classical Bochner Tubular Theorem from a more modern perspective.

The classic Bochner Tubular Theorem is presented in the classical theory of holomorphic functions and provides a sufficient condition for the extension of holomorphic functions defined on tubular sets in \mathbb{C}^m , i.e., sets of the form $U \times \mathbb{R}^m$, where U is an open, connected, non-empty subset of \mathbb{R}^m . We present the ideas from the paper [21], which suggest an alternative proof for the Bochner Tubular Theorem. For a complete understanding of this proof, we need to establish some notions and results about convexity, analytic discs, and the Baouendi-Treves Approximation Formula. We only need the particular case of the Baouendi-Treves Formula for the structure generated by the Cauchy-Riemann operators. However, to make the text more comprehensive, we will first present it for arbitrary structures and then for the desired structure (emphasizing that the convergence of the approximate formula can be obtained in other topologies, but in this text it is sufficient to consider only the uniform convergence).

We will also present a microlocal version of the Bochner Tubular Theorem. In this version, we will use a class of FBI transforms (introduced in [6]), the notion of analytic wavefront set, and a relation between these concepts. The ideas in the second part of this work are in the paper [5] written by S. Berhanu. It is important to observe that using this second version, we can extend holomorphic functions defined on sets more general than tubular sets in \mathbb{C}^m .

Keywords: Complex Analysis, Microlocal Analysis, FBI transform.

Sumário

Introdução	8
1 Pré-requisitos	11
1.1 Convexidade	11
1.2 Discos Analíticos	28
1.3 Espaço Tangente de uma Variedade Diferenciável	36
1.4 Formas Diferenciais	45
2 A Fórmula de aproximação de Baouendi-Treves	51
2.1 Uma mudança de coordenadas	51
2.2 Caso uniforme	54
2.3 Caso holomorfo	62
2.4 Aplicação - uma demonstração do teorema tubular de Bochner	66
3 O conjunto frente de onda do traço de uma solução para uma estrutura tubular	68
3.1 Revisão de análise microlocal e transformada FBI	68
3.2 Uma versão microlocal para o teorema tubular de Bochner	70
Referências Bibliográficas	81
APÊNDICE A: Outros resultados de análise microlocal para o traço de uma estrutura tubular	83
APÊNDICE B: Distribuições definidas em variedades diferenciáveis	89

Introdução

Em 1938, S. Bochner estabeleceu uma condição para a continuação analítica de funções de várias variáveis e em 1948 apresentou com W. Martin uma demonstração totalmente inserida no contexto das funções complexas de várias variáveis (veja [9] e [10], respectivamente). Naturalmente, este resultado clássico foi estendido em vários sentidos por diversos autores.

O teorema tubular de Bochner afirma que se $U \subset \mathbb{R}^m$, $m > 1$, é aberto, conexo e não-vazio e f é uma função holomorfa definida no tubo $U + i\mathbb{R}^m \subset \mathbb{C}^m$, então f pode ser estendida holomorficamente para o envelope convexo $ch(U + i\mathbb{R}^m)$ (veja a definição precisa em Definição 1.1.8).

Uma consequência bem estabelecida do teorema tubular de Bochner é que qualquer função holomorfa definida em um tubo pode ser aproximada por funções inteiras. Neste trabalho, seguindo as ideias presentes no trabalho de J. Hounie de 2009 (veja [21]), iremos no caminho contrário, i.e., primeiro iremos aproximar uma função holomorfa definida em um tubo por funções inteiras e, em seguida, usaremos esse fato para obter uma extensão holomorfa desta função no envelope convexo do tubo. A aproximação mencionada acima é uma versão apropriada da Fórmula de aproximação de Baouendi-Treves (veja [8], Capítulo 2, para a demonstração da Fórmula de aproximação de Baouendi-Treves em diferentes espaços de funções e veja [2] para a primeira apresentação deste resultado).

Versões **CR** do teorema tubular de Bochner foram apresentadas por M. Kazlow em 1979 (veja [22]) e por A. Boivin e R. Dwilewicz em 1998 (veja [11]). Nestes artigos, o tubo acima é substituído por $X + i\mathbb{R}^m$, onde X é uma subvariedade conexa de \mathbb{R}^m de classe C^2 ou superior. Em 2011, G. Hoepfner, J. Hounie e L. Santos (veja [15]) demonstraram que se o tubo é da forma $X + i\mathbb{R}^m \subset \mathbb{C}^m$, onde $X \subset \mathbb{R}^m$ é a imagem de alguma variedade conexa por algum mapa C^1 , então pode-se estender a noção de funções **CR** de forma que elas podem ser estendidas à envoltória convexa do tubo como funções **CR** em $L^\infty(ch(X), h^p(\mathbb{R}^m))$. No ano seguinte, este resultado foi generalizado pelos mesmos autores diminuindo as hipóteses sobre X (veja [16]).

No artigo [7] de 2011, J. Hounie e S. Berhanu estudaram a validade deste tipo de resultado de extensão quando X é um conjunto mais geral, sem assumir quaisquer restrições de crescimento,

ou seja, X não precisa ser uma variedade. Nesta dissertação, no entanto, nos concentraremos nos resultados apresentados individualmente por J. Hounie [21] e S. Berhanu [5] nos anos de 2009 e 2021, respectivamente.

Em 1982 (veja [3]), M. Baouendi e F. Trèves provaram uma versão microlocal do teorema tubular de Bochner. Neste trabalho, eles também mostraram uma condição necessária e suficiente para a analiticidade de uma solução de um sistema de campos vetoriais especial. Esta condição também é necessária para a suavidade das soluções, mas não é suficiente (veja [23] para um contraexemplo em \mathbb{C}^2). Em 2021, S. Berhanu (veja [5]) estabeleceu uma condição suficiente para a extensão de funções holomorfas que é mais geral do que a apresentada em [3]. Além disso, o resultado apresentado em [5] não segue dos resultados clássicos apresentados em [1] e [4].

Esta dissertação está dividida em 3 capítulos e possui um apêndice. O conteúdo presente em cada capítulo segue a seguinte organização:

O Capítulo 1 é dedicado ao estabelecimento dos pré-requisitos necessários para o desenvolvimento das versões do teorema tubular de Bochner que precisamos estudar, quase todos os resultados necessários para o entendimento desta dissertação estão nestas seções iniciais e procuramos desenvolver a demonstração detalhada do máximo de resultados. Na Seção 1.1, discutimos noções elementares de convexidade à luz dos resultados apresentados em [19] e estabelecemos o Teorema de Carathéodory, uma ferramenta necessária para caracterizar a estrutura das envoltórias convexas de uma classe de subconjuntos de um espaço vetorial. Na Seção 1.2, estabelecemos um importante resultado sobre discos analíticos que nos tornará capazes de contornar problemas de regularidade na extensão dada pelo teorema tubular de Bochner (Teorema 2.4.1). Na Seção 1.3, estabelecemos resultados e definições necessários para a discussão apropriada sobre a Fórmula de aproximação de Baouendi-Treves (que será nosso objeto de estudo nas Seções 2.2 e 2.3). Na Seção 1.4, discutiremos sobre as formas diferenciais e suas aplicações no nosso contexto. Como material adicional de referência, indicamos também a leitura do texto de L. Hörmander [17] para resultados sobre análise complexa em várias variáveis.

No capítulo 2, nosso objetivo principal é fornecer a demonstração dada por J. Hounie para o teorema tubular de Bochner, publicada no artigo [21] de 2009. Esta demonstração pode ser encontrada na Seção 2.4, mas antes precisamos estabelecer uma mudança de coordenadas apropriada para nosso tratamento. Faremos isso na Seção 2.1. Na seção 2.2 apresentamos uma versão da Fórmula de aproximação de Baouendi-Treves para o caso uniforme e na Seção 2.3 consideramos o caso da fórmula

de aproximação quando a estrutura é gerada pelos operadores de Cauchy-Riemann. Evidentemente, usaremos o caso em que a estrutura é gerada pelos operadores de Cauchy-Riemann, no entanto, julgamos interessante manter a demonstração do caso mais geral da Fórmula de aproximação de Baouendi-Treves.

No capítulo 3, nosso objetivo é estudar um caso microlocal do teorema tubular de Bochner. Para isso, na Seção 3.1 estabelecemos as definições e caracterizações necessárias para o estudo da análise microlocal no nível apropriado para o presente texto. Na Seção 3.2, apresentamos condições para que uma solução Lipschitz de uma estrutura do tipo tubo seja micro-regular em uma certa direção. Na Seção 3.2, nós também apresentamos uma aplicação para os resultados mencionados anteriormente, apresentando a extensão holomorfa de uma função em que não poderíamos utilizar os resultados clássicos (veja Exemplo 3.2.2).

Ao fim do texto, apresentamos um apêndice com alguns resultados sobre a caracterização da analiticidade microlocal que não decorrem diretamente dos resultados apresentados na Seção 3.2. Os resultados deste apêndice também foram primeiramente apresentados por S. Berhanu em [5].

Pré-requisitos

Neste capítulo, estabelecemos os resultados básicos necessários para o desenvolvimento dos resultados presentes nos Capítulos 2 e 3. Há um esforço para que todos os resultados presentes possuam suas demonstrações detalhadas e, para os casos excepcionais, deixamos indicado referências bibliográficas que podem ser conferidas ao fim do presente trabalho.

1.1 Convexidade

Os Espaços convexos são objetos poderosos no contexto da análise matemática e desempenham um papel importante em uma variedade de contextos teóricos e aplicados. O objetivo desta seção é apresentar o Teorema de Carathéodory (veja o Teorema 1.1.3) que fornece uma caracterização da envoltória convexa de um subconjunto de um espaço vetorial. Para não perdermos a objetividade do trabalho, nos concentramos nos resultados necessários para o desenvolvimento desta dissertação e, para mais resultados sobre convexidade, recomendamos a leitura de [19].

De volta ao nosso trabalho, naturalmente, começamos com a definição de espaço convexo.

Definição 1.1.1. *Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{R} . Um subconjunto X de V é chamado de convexo se para quaisquer x_1 e x_2 , vale*

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in X, \quad \text{quando } \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \quad e \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1. \quad (1.1)$$

Deste modo, a noção de convexidade coincide com a ideia geométrica de que um conjunto é convexo se, e somente se, dados dois pontos quaisquer deste conjunto, o segmento de reta que liga estes pontos está contido no conjunto.

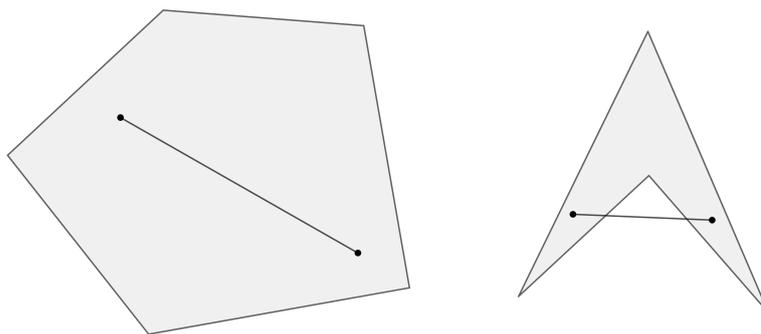


Figura 1.1: Exemplo de um conjunto convexo (à esquerda) e de um conjunto não convexo (à direita).

Além da noção de convexidade para subconjuntos, podemos estabelecer a noção de funções convexas.

Definição 1.1.2. *Seja X um subconjunto convexo de um espaço vetorial real V . Uma função $f : X \rightarrow (-\infty, +\infty)$ é chamada de convexa se*

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2), \quad (1.2)$$

sempre que $x_1, x_2 \in X$ e $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ são tais que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

Note que a definição de função convexa só faz sentido quando o domínio é convexo. Ademais, a condição (1.2) significa que o conjunto

$$\mathcal{C}_f = \{(x, t) \in V \oplus \mathbb{R}; x \in X, t \geq f(x)\}$$

é convexo.

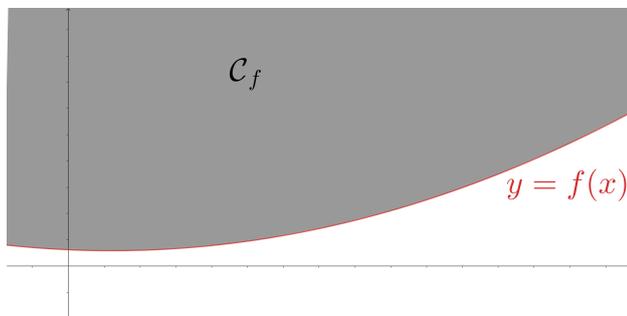


Figura 1.2: \mathcal{C}_f é a região cinza na figura acima.

Com efeito, suponhamos f convexa, se $(x_1, t_1), (x_2, t_2) \in \{(x, t) \in V \oplus \mathbb{R}; x \in X, t \geq f(x)\}$ e

$\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ são tais que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, então

$$f(x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \leq \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2.$$

Assim, $\lambda_1(x_1, t_1) + \lambda_2(x_2, t_2) = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2) \in \{(x, t) \in V \oplus \mathbb{R}; x \in X, t \geq f(x)\}$.

Por outro lado, se \mathcal{C}_f é convexo, então $\lambda_1(x_1, t_1) + \lambda_2(x_2, t_2) \in \mathcal{C}_f$ sempre que $(x_1, t_1), (x_2, t_2) \in \mathcal{C}_f$ e $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ com $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Deste modo, concluímos que $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$.

Doravante, podemos estudar as propriedades de conjuntos convexos e obter resultados sobre funções convexas como corolários.

Observação 1.1.1. *Por indução em N , a condição (1.1) implica uma condição mais forte:*

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j x_j \in X, \quad \text{sempre que } \lambda_1, \dots, \lambda_N \geq 0, \sum_{j=1}^N \lambda_j = 1, x_j \in X. \quad (1.3)$$

PROVA. De fato, a condição (1.3) é válida para $N = 2$. Suponha que (1.3) é válida para até um certo número natural $N - 1$.

Deste modo, observe que dados $\lambda_1, \dots, \lambda_N \geq 0$, tais que $\sum_{j=1}^N \lambda_j = 1$ e $x_1, \dots, x_N \in X$, por hipótese de indução, temos $\sum_{j=1}^{N-1} \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_N} x_j \in X$. E, pela condição (1.1), temos

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j x_j = (1 - \lambda_N) \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_N} x_j + \lambda_N x_N \in X.$$

■

Replicaremos alguns resultados bem conhecidos sobre subespaços vetoriais para subespaços afins (definidos em 1.1.3), os quais desempenharão um papel importante na categorização que estamos interessados a médio prazo.

Definição 1.1.3. *Dizemos que W é subespaço afim de um espaço vetorial V se existe $x_0 \in V$ tal que*

$$W_{x_0} = \{x - x_0; x \in W\}$$

é subespaço vetorial de V .

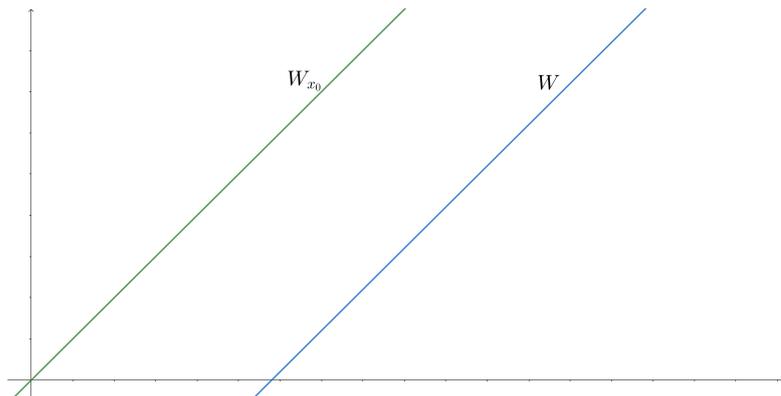


Figura 1.3: Uma reta que não passa pela origem é um subespaço afim de \mathbb{R}^2 .

Observação 1.1.2. Dado um subconjunto W de um espaço vetorial V , temos que se W_{x_0} (para algum $x_0 \in V$) é subespaço vetorial então $x_0 \in W$. De fato, se W_{x_0} é um subespaço vetorial então $0 \in W_{x_0}$ e conseqüentemente existe $x \in W$ tal que $0 = x - x_0$. Logo, $x_0 = x \in W$.

Ademais, se $x_1 \in W$ então $W_{x_1} = W_{x_0}$. De fato, dado $x \in W$ temos que $x - x_0, x_1 - x_0 \in W_{x_0}$. Assim, como W_{x_0} é espaço vetorial, podemos concluir que $x - x_1 = (x - x_0) - (x_1 - x_0) \in W_{x_0}$. Deste modo, $W_{x_1} \subset W_{x_0}$. Por outro lado, dado $x \in W$ (já que $x_1 \in W$) temos $x - x_0, x_1 - x_0 \in W_{x_0}$. Já que W_{x_0} é espaço vetorial temos que $x - x_0 + x_1 - x_0 \in W_{x_0}$. Logo, existe $w \in W$ tal que $x - x_0 + x_1 - x_0 = w - x_0$. Deste modo, $x - x_0 + x_1 = w \in W$. Portanto, $x - x_0 = x - x_0 + x_1 - x_1 = w - x_1 \in W_{x_1}$. Portanto, $W_{x_0} \subset W_{x_1}$.

Assim, a definição de espaço afim independe da escolha de x_0 .

Observação 1.1.3. W é afim se, e somente se, vale

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in W, \quad \text{sempre que } \lambda_1 + \lambda_2 = 1, x_1, x_2 \in W. \quad (1.4)$$

PROVA. Suponha que W é subespaço afim e sejam $x_1, x_2 \in W$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tais que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

Pela definição de espaço afim, existe $x_0 \in V$ tal que W_{x_0} é um subespaço vetorial. E, pela definição de W_{x_0} temos que $x_1 - x_0, x_2 - x_0 \in W_{x_0}$. Como W_{x_0} é subespaço vetorial,

$$\lambda_1(x_1 - x_0) + \lambda_2(x_2 - x_0) \in W_{x_0}.$$

Deste modo,

$$\lambda_1(x_1 - x_0) + \lambda_2(x_2 - x_0) + x_0 \in W.$$

Lembrando que $0 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$ temos que

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = (1 - \lambda_1 - \lambda_2)x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \lambda_1(x_1 - x_0) + \lambda_2(x_2 - x_0) + x_0 \in W.$$

Reciprocamente, mostraremos que se vale a propriedade (1.4) então W_{x_0} é um subespaço vetorial. Para isso considere $x_1, x_2 \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Para mostrar que $(x_1 - x_0) + \lambda(x_2 - x_0) \in W_{x_0}$ nós consideraremos dois casos de λ . Primeiro, quando $\lambda \neq -1$. Neste caso, usando (1.4), temos que

$$(x_1 - x_0) + \lambda(x_2 - x_0) + x_0 = (\lambda + 1) \left[\frac{1}{\lambda + 1} x_1 + \frac{\lambda}{1 + \lambda} x_2 \right] + (-\lambda)x_0 \in W$$

pois $(\lambda + 1) + (-\lambda) = 1$, $\frac{1}{\lambda + 1} + \frac{\lambda}{1 + \lambda} = 1$ e $\frac{1}{\lambda + 1} x_1 + \frac{\lambda}{1 + \lambda} x_2 \in W$. Logo, $(x_1 - x_0) + \lambda(x_2 - x_0) \in W_{x_0}$. Agora, quando $\lambda = -1$ temos que

$$(x_1 - x_0) + \lambda(x_2 - x_0) + x_0 = x_1 - x_2 + x_0 = -x_2 + 2 \left(\frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_0 \right) \in W,$$

pois $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, $\frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_0 \in W$ e $-1 + 2 = 1$. ■

Observação 1.1.4. *Mais ainda, por indução finita, temos que W é afim se, e somente se, vale*

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j x_j \in W, \quad \text{quando} \quad \sum_{j=1}^N \lambda_j = 1, \quad \text{e} \quad x_1, \dots, x_N \in W. \quad (1.5)$$

PROVA. De fato, note que quando (1.5) é válido então usando a observação acima (para o caso $N = 2$) temos que W é afim. A seguir, supondo W afim mostraremos que (1.5) vale para cada $N \in \mathbb{N}$. Note que o caso $N = 2$ segue direto de (1.5). Agora vamos supor (1.5) válido para uma quantidade N e mostraremos que (1.5) também vale para uma quantidade $N + 1$. Dados $x_1, \dots, x_{N+1} \in W$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_{N+1} \in \mathbb{R}$ tais que $\lambda_1 + \dots + \lambda_{N+1} = 1$ dividiremos em dois casos. No caso em que $\lambda_{N+1} = 1$ temos que $\lambda_1 = \dots = \lambda_N = 0$ e conseqüentemente $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{N+1} x_{N+1} = x_{N+1} \in W$. No caso em que $\lambda_{N+1} \neq 1$ temos que

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{N+1} x_{N+1} = (1 - \lambda_{N+1}) \left[\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{N+1}} x_1 + \dots + \frac{\lambda_N}{1 - \lambda_{N+1}} x_N \right] + \lambda_{N+1} x_{N+1} \in W,$$

pois,

$$1. \quad \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{N+1}} + \dots + \frac{\lambda_N}{1 - \lambda_{N+1}} = \frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_N}{1 - \lambda_{N+1}} = 1;$$

2. $\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{N+1}}x_1 + \cdots + \frac{\lambda_N}{1 - \lambda_{N+1}}x_N \in W$;
3. $(1 - \lambda_{N+1}) + \lambda_{N+1} = 1$.

e isto encerra nossa demonstração. ■

No caso particular em que $N = 3$, dados $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tais que $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ e $x_1, x_2, x_3 \in W$

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + (1 - \lambda_1 - \lambda_2)x_3 = \lambda_1(x_1 - x_3) + \lambda_2(x_2 - x_3) + x_3 \in W$$

o que mostra que a validade de (1.5) e (1.1) são suficientes para que W seja um subespaço afim.

Assim como no caso de espaços vetoriais, também é possível munir os espaços afins com uma noção de independência entre elementos do espaço.

Definição 1.1.4. Dizemos que $\{x_1, \dots, x_n\} \in W$ é um subconjunto afim-independente de um espaço afim W quando o conjunto $\{x_1 - x_0, \dots, x_n - x_0\}$ é linearmente independente em V , para algum $x_0 \in W$.

Definição 1.1.5. Seja V um espaço vetorial. A dimensão de um subespaço afim W de V é igual à dimensão de W_{x_0} (para algum $x_0 \in W$) como subespaço vetorial de V .

Teorema 1.1.1. Se $x_1, \dots, x_n \in W$ são afim-independentes e $n = \dim W$, então todo elemento $x \in W$ pode ser escrito de maneira única por

$$x = \sum_{j=0}^n \lambda_j x_j, \quad \text{para } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \text{ satisfazendo } \sum_{j=0}^n \lambda_j = 1, \quad (1.6)$$

PROVA. De fato, se $x \in W$, então $x - x_0 \in W_{x_0}$. E, por outro lado, uma vez que $\dim W = n$ e $\{x_1 - x_0, \dots, x_n - x_0\}$ é L.I., existem únicas constantes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tais que $x - x_0 = \sum_{j=1}^n \lambda_j(x_j - x_0)$

Assim, $x = x_0 + \sum_{j=1}^n \lambda_j(x_j - x_0)$ que podemos reescrever do seguinte modo,

$$x = x_0 - \sum_{j=1}^n \lambda_j x_0 + \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j = \left(1 - \sum_{j=1}^n \lambda_j\right) x_0 + \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j = \sum_{j=0}^n \lambda_j x_j,$$

onde $\lambda_0 = 1 - \sum_{j=1}^n \lambda_j$ e isto nos permite concluir que a equação (1.6) é válida, pois

$$\sum_{j=0}^n \lambda_j = \lambda_0 + \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 - \sum_{j=1}^n \lambda_j + \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1.$$

Para mostrar a unicidade, suponha que $x = \sum_{j=0}^n \lambda_j x_j = \sum_{j=0}^n \kappa_j x_j$. Deste modo, devemos ter $0 = \sum_{j=0}^n (\lambda_j - \kappa_j) x_j = \sum_{j=1}^n (\lambda_j - \kappa_j) x_j + (\lambda_0 - \kappa_0) x_0$, como $\sum_{j=0}^n (\lambda_j - \kappa_j) = 0$, temos que $(\lambda_0 - \kappa_0) = -\sum_{j=1}^n (\lambda_j - \kappa_j)$, ou seja, $\sum_{j=1}^n (\lambda_j - \kappa_j) x_j - \sum_{j=1}^n (\lambda_j - \kappa_j) x_0 = \sum_{j=1}^n (\lambda_j - \kappa_j) (x_j - x_0) = 0$ e como $\{(x_1 - x_0), \dots, (x_n - x_0)\}$ é L.I., concluímos que $\lambda_j = \kappa_j$, para cada $j \in \{0, \dots, n\}$. ■

Assim como no caso de conjuntos convexos, também podemos estabelecer uma noção do que é ser afim para aplicações entre espaços afins.

Definição 1.1.6. *Se V_1 e V_2 são espaços afins, então o mapa $f : V_1 \rightarrow V_2$ é chamado afim se o seu gráfico é um subespaço afim de $V_1 \oplus V_2$.*

Observação 1.1.5. *Note que a definição de mapa afim equivale a dizer que $f : V_1 \rightarrow V_2$ satisfaz a seguinte condição: se $x_1, \dots, x_n \in V_1$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ satisfaz $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$, então*

$$f \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \right) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(x_j). \quad (1.7)$$

De fato, suponha que a equação (1.7) é válida para $n = 2$.

Então, dados $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)) \in gr(f)$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ com $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, temos

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in V_1,$$

pois V_1 é afim. Daí, por (1.7)

$$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) = f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \in V_2.$$

Portanto,

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)) \in gr(f).$$

Logo, $gr(f)$ é afim.

Por outro lado, suponha que $gr(f)$ é afim e sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ com $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ e $x_1, \dots, x_n \in V_1$. Uma vez que $(x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n)) \in gr(f)$ e $gr(f)$ é afim, temos

$$\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j, \sum_{j=1}^n \lambda_j f(x_j) \right) \in gr(f).$$

Portanto, da definição de $gr(f)$ decorre que

$$f\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j\right) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(x_j).$$

Observação 1.1.6. *Decorre da equação (1.4) que a interseção de qualquer família de subespaços afins ainda é um subespaço afim.*

De fato, se $\{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é uma família de subespaços afins, então dados $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ com $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ e $x_1, x_2 \in \bigcap_{\alpha \in A} W_\alpha$, temos que $x_1, x_2 \in W_\alpha, \forall \alpha \in A$ e, por (1.4), temos $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in W_\alpha, \forall \alpha \in A$, de onde decorre que $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in \bigcap_{\alpha \in A} W_\alpha$. Portanto, $\bigcap_{\alpha \in A} W_\alpha$ é afim.

A observação 1.1.6 nos permite pensar no menor espaço afim que contem um dado subconjunto do espaço trabalhado. Este espaço é definido logo abaixo.

Definição 1.1.7. *Dado $E \subset V$, a envoltória afim de E , $ah(E)$ é a interseção de todos os subespaços afins de V que contêm E .*

Observação 1.1.7. *A envoltória afim de E satisfaz:*

$$ah(E) = \left\{ \sum_{j=1}^N \lambda_j x_j; \sum_{j=1}^N \lambda_j = 1, x_j \in E, N \in \mathbb{N} - \{0\} \right\} \quad (1.8)$$

PROVA. De fato, seja $x = \sum_{j=1}^N \lambda_j x_j$, com $\sum_{j=1}^N \lambda_j = 1$ e $x_j \in E$ ($\forall j \in \{1, \dots, N\}$). Como $E \subset ah(E)$ e $ah(E)$ é afim, temos que $x \in ah(E)$.

Deste modo,

$$\left\{ \sum_{j=1}^N \lambda_j x_j; \sum_{j=1}^N \lambda_j = 1, x_j \in E, N \in \mathbb{N} - \{0\} \right\} \subset ah(E).$$

Por outro lado, decorre da definição de $ah(E)$ que é suficiente mostrar que

$$E \subset \left\{ \sum_{j=1}^N \lambda_j x_j; \sum_{j=1}^N \lambda_j = 1, x_j \in E, N \in \mathbb{N} - \{0\} \right\}$$

e que $\left\{ \sum_{j=1}^N \lambda_j x_j; \sum_{j=1}^N \lambda_j = 1, x_j \in E, N \in \mathbb{N} - \{0\} \right\}$ é afim para concluir que

$$ah(E) \subset \left\{ \sum_{j=1}^N \lambda_j x_j; \sum_{j=1}^N \lambda_j = 1, x_j \in E, N \in \mathbb{N} - \{0\} \right\}.$$

Note que $E \subset \left\{ \sum_{j=1}^N \lambda_j x_j; \sum_{j=1}^N \lambda_j = 1, x_j \in E, N \in \mathbb{N} - \{0\} \right\}$, basta escolher $N = 1$.

Ademais, dados $y_1, y_2 \in \left\{ \sum_{j=1}^N \lambda_j x_j; \sum_{j=1}^N \lambda_j = 1, x_j \in E, N \in \mathbb{N} - \{0\} \right\}$, existem $K, M \in \mathbb{Z}_+$, $\lambda_1, \dots, \lambda_K \in \mathbb{R}$ e $\rho_1, \dots, \rho_M \in \mathbb{R}$ com $\sum_{j=1}^K \lambda_j = 1$ e $\sum_{j=1}^M \rho_j = 1$ tais que

$$y_1 = \sum_{j=1}^K \lambda_j x_j^{(1)}, \quad y_2 = \sum_{j=1}^M \rho_j x_j^{(2)},$$

em que $x_j^{(1)}$ e $x_k^{(2)}$ são elementos de E , para cada $j \in \{1, \dots, K\}$ e $k \in \{1, \dots, M\}$.

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha + \beta = 1$.

Uma vez que

$$\sum_{j=1}^K \alpha \lambda_j + \sum_{j=1}^M \beta \rho_j = \alpha + \beta = 1,$$

temos

$$\alpha y_1 + \beta y_2 = \sum_{j=1}^K \alpha \lambda_j x_j^{(1)} + \sum_{j=1}^M \beta \rho_j x_j^{(2)} \in \left\{ \sum_{j=1}^N \lambda_j x_j; \sum_{j=1}^N \lambda_j = 1, x_j \in E, N \in \mathbb{N} - \{0\} \right\}.$$

Assim, $\left\{ \sum_{j=1}^N \lambda_j x_j; \sum_{j=1}^N \lambda_j = 1, x_j \in E, N \in \mathbb{N} - \{0\} \right\}$ é afim. ■

Equivalentemente, se $x_0 \in E$, então $ah(E)$ é a soma de x_0 com a envoltória linear de $\{x - x_0; x \in E\}$.

Se a envoltória afim de E tem dimensão finita n , então é suficiente tomar $N = n + 1$ em (1.8) e fixar $n + 1$ elementos $x_1, \dots, x_{n+1} \in E$ que são afim-independentes.

Teorema 1.1.2. *Se $T : V_1 \rightarrow V_2$ é um mapa afim entre espaços vetoriais e X_j são subconjuntos convexos de V_j , $j \in \{1, 2\}$, então $TX_1 = \{Tx; x \in X_1\}$ e $T^{-1}X_2 = \{x \in V_1; Tx \in X_2\}$ são subconjuntos convexos de V_2 e de V_1 , respectivamente.*

PROVA. De fato, se $y_1, y_2 \in TX_1$ e $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ com $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, então existem $x_1, x_2 \in X_1$ tais que $Tx_1 = y_1$, $Tx_2 = y_2$ e

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = \lambda_1 T x_1 + \lambda_2 T x_2 = T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \in TX_1,$$

pois T é afim e X_1 é convexo.

Deixamos para o leitor mostrar que $T^{-1}X_2$ é convexo, pois são usados argumentos parecidos. ■

Antes de prosseguirmos, provaremos uma afirmação análoga à observação 1.1.6, mas agora para espaços convexos.

Observação 1.1.8. *A interseção de qualquer família X_α , $\alpha \in A$ de subconjuntos convexos de V é um subconjunto convexo.*

PROVA. Seja $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma família de subconjuntos convexos de V .

Sejam $x_1, x_2 \in \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha$. Fixado $\alpha \in A$, como X_α é convexo, vale

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in X_\alpha, \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \quad \text{satisfazendo} \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

Portanto, $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha$, quando $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ satisfaz $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

Assim, por definição, $\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha$ é um conjunto convexo. ■

Definição 1.1.8. *Dado $E \subset V$, a interseção de todos os subconjuntos convexos de V que contêm E é o conjunto convexo chamado envoltória convexa (ou envelope convexo) de E e será denotado por $ch(E)$.*

Assim como fizemos na Observação 1.1.7, podemos mostrar que

$$ch(E) = \left\{ \sum_{j=1}^N \lambda_j x_j; \lambda_j \geq 0, \sum_{j=1}^N \lambda_j = 1, x_j \in E, N \in \mathbb{N} - \{0\} \right\}. \quad (1.9)$$

Definição 1.1.9. *A envoltória convexa de $k + 1$ pontos afim-independentes $x_0, \dots, x_k \in V$ é chamada de k -simplexo.*

Além disso, dizemos que dois k -simplexos, S_1 e S_2 , são afim-equivalentes quando existe um mapa afim bijetor $\varphi : ah(S_1) \rightarrow ah(S_2)$.

Observação 1.1.9. *Todos os k -simplexos são afim-equivalentes.*

De fato, sejam S_1 e S_2 dois k -simplexos definidos pelos seguintes conjuntos de vértices $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ e $\{w_0, w_1, \dots, w_k\}$, respectivamente. Podemos definir uma transformação afim que leva S_1 em S_2 ao escolher uma transformação que leva os vértices de S_1 nos vértices de S_2 . E isto pode ser realizado da seguinte forma:

$$\varphi(v_j - v_0) = w_j - w_0, \quad \forall j \in \{1, \dots, k\},$$

como $\{v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0\}$ e $\{w_1 - w_0, \dots, w_k - w_0\}$ são conjuntos L.I., podemos definir φ para $\text{span}\{v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0\}$. Com isso, concluímos que S_1 e S_2 são afim-equivalentes.

Observação 1.1.10. Seja $x_0 = 0$ e $x_j = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^k$ com 1 na j -ésima entrada e 0 nas demais. Note que $\{x_0, \dots, x_k\}$ é um conjunto afim independente e a envoltória convexa deste conjunto é um k -simplexo. Ademais, $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ pertence ao k -simplexo se, e somente se, $\lambda_j \geq 0$ e $\sum_{j=1}^k \lambda_j \leq 1$. No caso $k = 2$ temos o k -simplexo é a região delimitado pelo triângulo de vértices $(0, 0); (1, 0); (0, 1)$.

Um exemplo de k -simplexo mais adequado para nosso tratamento pode ser obtido por $\{x_1, \dots, x_{k+1}\}$ em que $x_j = (\lambda_0, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$ com $\lambda_j = 1$ e $\lambda_l = 0$, quando $j \neq l$. Neste caso, o k -simplexo é o conjunto dos $(\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1}$ tais que $\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1} \geq 0$ e $\alpha_1 + \dots + \alpha_{k+1} = 1$. No caso $k = 2$ temos a região delimitado pelo triângulo de vértices $(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)$.

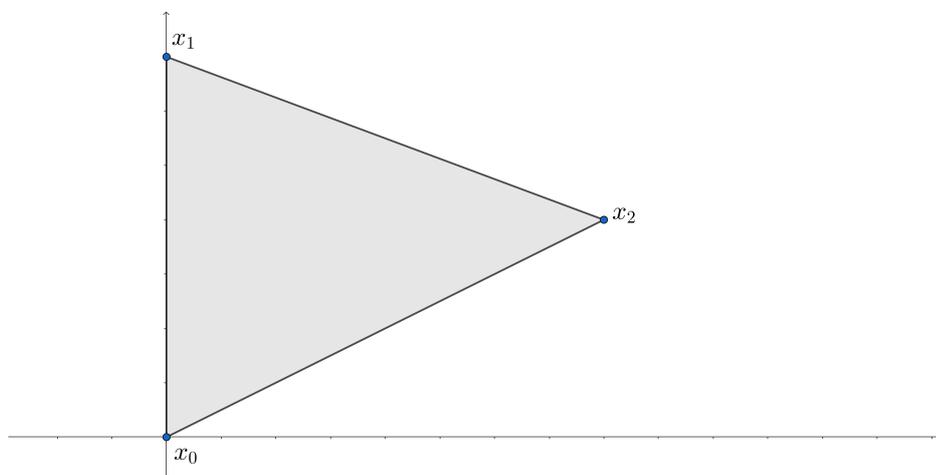


Figura 1.4: 2-simplexo em \mathbb{R}^2 .

Observação 1.1.11. Seja V um espaço vetorial (real ou complexo). Todo k -simplexo, $S \subset V$, é compacto.

De fato, sejam x_0, \dots, x_k os vértices de S e defina a seguinte função contínua:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^{k+1} &\rightarrow V \\ \varphi(t_0, \dots, t_k) &\mapsto \sum_{j=0}^k t_j x_j. \end{aligned}$$

Seja

$$\tilde{S} \doteq \{(t_0, \dots, t_k); \sum_{j=0}^k t_j = 1, t_j \geq 0\}.$$

Uma vez que \tilde{S} é compacto e φ é contínua na topologia induzida pela norma do espaço vetorial de dimensão finita que estamos trabalhando. Daí, segue imediatamente que $S = \varphi(\tilde{S})$ é compacto.

A seguir apresentamos um lema que desempenhará um papel fundamental no principal resultado desta seção.

Lema 1.1.1. *Se T é um mapa afim definido em um k -simplexo S com vértices $\{\sigma_0, \dots, \sigma_k\}$ e contra domínio W , onde W é um subespaço afim de dimensão menor que k , então $TS = \bigcup_{j=1}^k TS_j$, onde S_j é o $(k-1)$ -simplexo obtido de S ao se omitir o vértice σ_j .*

PROVA. Por um lado, note que $S_j \subset S$ e conseqüentemente, $TS_j \subset TS, \forall j \in \{1, \dots, k\}$. Logo, $\bigcup_{j=1}^k TS_j \subset TS$.

Por outro lado, seja $x \in S$. Com o objetivo de mostrar que $Tx \in \bigcup_{j=1}^k TS_j$ defina $L = T^{-1}(Tx)$ e note que L é subespaço afim, pois se $z, y \in L$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, então

$$T(\lambda_1 z + \lambda_2 y) = \lambda_1 T(z) + \lambda_2 T(y) = \lambda_1 T(x) + \lambda_2 T(x) = T(x)$$

concluindo que $\lambda_1 z + \lambda_2 y \in L$.

Afirmção 1: $\partial S = \bigcup_{j=0}^k S_j$.

Prova da afirmação 1: Se $z \in S_j$, então existem $\lambda_0, \dots, \lambda_k, \lambda_j = 0, \lambda_q \geq 0$ ($q \in \{0, \dots, k\}$) e $\sum_{q=0}^k \lambda_q = 1$ tais que $z = \sum_{q=0}^k \lambda_q \sigma_q$.

Se $z \neq \sigma_j$, então existe $p \in \{0, \dots, k\} \setminus \{j\}$ tal que $\lambda_p \neq 0$.

Dado $\epsilon \neq 0$, defina

$$z_\epsilon \doteq z + \epsilon(\sigma_p - \sigma_j) = \sum_{q=0}^k \lambda_q \sigma_q + \epsilon \sigma_p - \epsilon \sigma_j = \sum_{q \in \{p, j\}} \lambda_q \sigma_q + (\lambda_p + \epsilon) \sigma_p - \epsilon \sigma_j.$$

Note que se $\epsilon > 0$, então $z_\epsilon \notin S$. De fato, se tivéssemos $z_\epsilon \in S$ então existiriam $\alpha_0, \dots, \alpha_k \geq 0$ tais que $\alpha_0 + \dots + \alpha_k = 1$ e $z_\epsilon = \alpha_0 \sigma_0 + \dots + \alpha_k \sigma_k$. Ademais, uma vez que $\{\sigma_0, \dots, \sigma_k\}$ é afim independente teríamos $0 \leq \alpha_j = -\epsilon$. Mas isso seria um absurdo.

E, uma vez que, $z \in S_j \subset S, z_\epsilon \notin S$ e $z - z_\epsilon = \epsilon \sigma_j$ ($\forall \epsilon > 0$), temos $z \in \partial S$.

Portanto, pela arbitrariedade de z e de S_j , concluímos que $\bigcup_{j=0}^k S_j \subset \partial S$.

Por outro lado, seja $z \in \partial S$. Como S é compacto (observação 1.1.11) e em particular fechado, segue que $z \in S$.

Deste modo, existem escalares $\lambda_0, \dots, \lambda_k \geq 0$ com $\sum_{j=0}^k \lambda_j = 1$ tais que $z = \sum_{j=0}^k \lambda_j \sigma_j$.

Dado $y = \sum_{j=0}^k \gamma_j \sigma_j$ com $\sum_{j=1}^k \gamma_j = 1$ e $d(y; z) := \sum_{j=0}^k |\lambda_j - \gamma_j| < R$, vale, para cada $j \in \{0, \dots, k\}$,

$$|\gamma_j - \lambda_j| \leq d(y, z) < R \leq \frac{\lambda_j}{2}.$$

Assim, $0 < \lambda_j - \frac{\lambda_j}{2} < \gamma_j$.

Deste modo, teríamos $\gamma_j > 0$ para todo $j \in \{0, \dots, k\}$. Concluindo que $B(z, R) \subset S$. Logo, $z \in \text{int}S$

Porém, por hipótese, $z \in \partial S$. Assim, nossa suposição de que $\lambda_j > 0$ para todo $j \in \{0, \dots, k\}$ é falsa.

Em outras palavras, existe $p \in \{0, \dots, k\}$ tal que $\lambda_p = 0$.

Portanto, $z = \sum_{j \neq p} \lambda_j x_j \in S_p$. E, pela arbitrariedade de z , temos $\partial S \subset \bigcup_{j=0}^k S_j$

Isto conclui a demonstração de que $\partial S = \bigcup_{j=0}^k S_j$.

◇

Afirmção 2: Se $y \in L = T^{-1}(Tx)$ é tal que $y \neq x$, então $I = \{t \in \mathbb{R}; (1-t)x + ty \in S\}$ é um intervalo compacto.

Prova da afirmação 2: Decorre da observação 1.1.11 que existe uma constante positiva C tal que $|z| < C$, para todo $z \in S$. Deste modo, pela desigualdade triangular, se $t \in I$, então

$$C > |(1-t)x + ty| = |x + t(y-x)| \geq -|x| + |t||y-x|$$

Logo, (lembrando que $x \in S$ e $y \neq x$) $|t| < \frac{C+|x|}{|y-x|} < \infty$. Portanto, I é limitado.

Para concluir que I é fechado basta observar que S é fechado e I é a imagem inversa de S pela função $\varphi(t) = (1-t)x + ty$. Assim, já mostramos que I é limitado e fechado.

Mais ainda, mostraremos que I é conexo. Com efeito, dados $t_1, t_2 \in I$ e $t \in (0, 1)$, pela convexidade de S e pela definição de I , segue que $(1-t)[(1-t_1)x + t_1y] + t[(1-t_2)x + t_2y] \in S$ e

$$(1-t)[(1-t_1)x + t_1y] + t[(1-t_2)x + t_2y] = (1-t_1)x + t_1y - t(1-t_1)x - tt_1y + t(1-t_2)x + tt_2y.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
(1-t)[(1-t_1)x + t_1y] + t[(1-t_2)x + t_2y] &= x - t_1x + t_1y - tx + tt_1x - tt_1y + tx - tt_2x + tt_2y \\
&= x - t_1x - t_2tx + tt_1x + t_1y + t_2ty - t_1ty \\
&= [1 - t_1 - (t_2 - t_1)t]x + [t_1 + (t_2 - t_1)t]y \\
&= (1 - t_0)x + t_0y.
\end{aligned}$$

onde $t_0 = (1-t)t_1 + tt_2$.

Assim, por definição de I , $t_0 \in I$ e, pela arbitrariedade de $t \in (0, 1)$, concluímos que I é conexo. Portanto, I é um intervalo compacto (já que acima mostramos que I é limitado, fechado e conexo).

◇

Afirmção 3: Se $\bar{t} \in \partial I$, então $z_{\bar{t}} \doteq (1 - \bar{t})x + \bar{t}y \in \partial S \cap L$.

Prova da afirmação 3: Suponha, sem perda de generalidade, que $\bar{t} = \sup I$. Assim, dado $\epsilon > 0$, defina $\epsilon_0 = \frac{\epsilon}{2d(x; y)}$ e observe que, pela definição de supremo,

$$z_{\bar{t} + \epsilon_0} \doteq (1 - \bar{t} - \epsilon_0)x + (\bar{t} + \epsilon_0)y \notin S$$

e

$$d(z_{\bar{t}}; z_{\bar{t} + \epsilon_0}) = \epsilon_0 d(x, y) < \epsilon.$$

Portanto, $B(z_{\bar{t}}, \epsilon) \cap S^C \neq \emptyset$. Uma vez que $z_{\bar{t}} \in B(z_{\bar{t}}, \epsilon) \cap S$, temos $z_{\bar{t}} \in \partial S$.

Mais ainda, por T ser afim,

$$T(z_{\bar{t}}) = (1 - \bar{t})Tx + \bar{t}Ty = (1 - \bar{t})Tx + \bar{t}Tx = Tx.$$

Logo, $z_{\bar{t}} \in L$. E concluímos que $z_{\bar{t}} \in \partial S \cap L$.

◇

Assim, $Tx = Tz_{\bar{t}} \in T(\partial S)$. E, lembrando que $\partial S = \bigcup_{j=0}^k S_j$, temos $j^* \in \{0, \dots, k\}$ tal que $Tx \in TS_{j^*}$

Se $j^* \neq 0$, a demonstração está encerrada.

Se $j^* = 0$, então $Tx \in TS_0 = T(\text{ch}\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\})$ e, pelo que foi feito acima,

$$Tx \in \bigcup_{j=1}^k T(\text{ch}(\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\} - \{\sigma_j\})) \subset \bigcup_{j=1}^k TS_j.$$

Deste modo, concluímos que $TS \subset \bigcup_{j=1}^k TS_j$. ■

Teorema 1.1.3. (de Carathéodory): *Se E é um subconjunto de um espaço vetorial V e $W = \text{ah}(E)$ tem dimensão finita $n \in \mathbb{N}$, então*

$$\text{ch}(E) = \left\{ \sum_{j=0}^n \lambda_j x_j; \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, x_j \in E, j = 0, \dots, n \right\}.$$

PROVA. Pelas observações sobre $\text{ch}(E)$ feitas acima nós já sabemos que $\left\{ \sum_{j=0}^n \lambda_j x_j; \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, x_j \in E, j = 0, \dots, n \right\} \subset \text{ch}(E)$. A seguir, suponha por absurdo que exista $x \in \text{ch}(E)$ tal que $x = \sum_{j=0}^M \lambda_j x_j$, $M > n$ e considere um M -simplexo arbitrário de vértices $\sigma_0, \dots, \sigma_M$.

Seja $\varphi : \text{ah}(\text{ch}\{\sigma_0, \dots, \sigma_M\}) \rightarrow W$ o mapa afim que satisfaz $T(\sigma_j) = x_j$.

Pelo Lema 1.1.1, se $S = \text{ch}\{\sigma_0, \dots, \sigma_M\}$, então

$$\varphi(S) = \bigcup_{j=1}^M \varphi(\text{ch}\{\sigma_k\}_{k=0}^M - \{\sigma_j\}).$$

Assim,

$$x = \sum_{j=0}^M \lambda_j x_j = T \left(\sum_{j=0}^M \lambda_j \sigma_j \right) \in T(S) \subset \bigcup_{j=1}^M T(S_j),$$

onde $S_j = \text{ch}\{\sigma_k\}_{k=0}^M - \{\sigma_j\}$.

Portanto, existe $l \in \{1, \dots, M\}$ tal que $x \in T(S_l)$.

Daí, existem $\{\alpha_j\}_{j \geq 0}^M$ tais que $\sum_{j \neq l} \alpha_j = 1$ e $T \left(\sum_{j \neq l} \alpha_j \sigma_j \right) = x$.

Assim, usando a definição de T e o fato dela ser afim temos que, $x = \sum_{j \neq l} \alpha_j x_j$. E podemos reaplicar o lema 1.1.1 enquanto houverem mais parcelas na representação de x como combinação convexa do que o valor da dimensão de $\text{ah}(E)$. ■

Exemplo 1.1.1. *Seja $S \subset \mathbb{R}^2$ o simplexo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 1)$, ou seja, S é o quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$. O Teorema de Carathéodory estabelece que, dado um ponto $P \in S$, existe um 2-simplexo obtido a partir da omissão de um dos vértices (diferente da origem) de S . Por exemplo, se $P = (1/3, 1/3)$, então P pertence ao 2-simplexo definido pelos pontos $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$ (o*

triângulo definido por estes vértices).

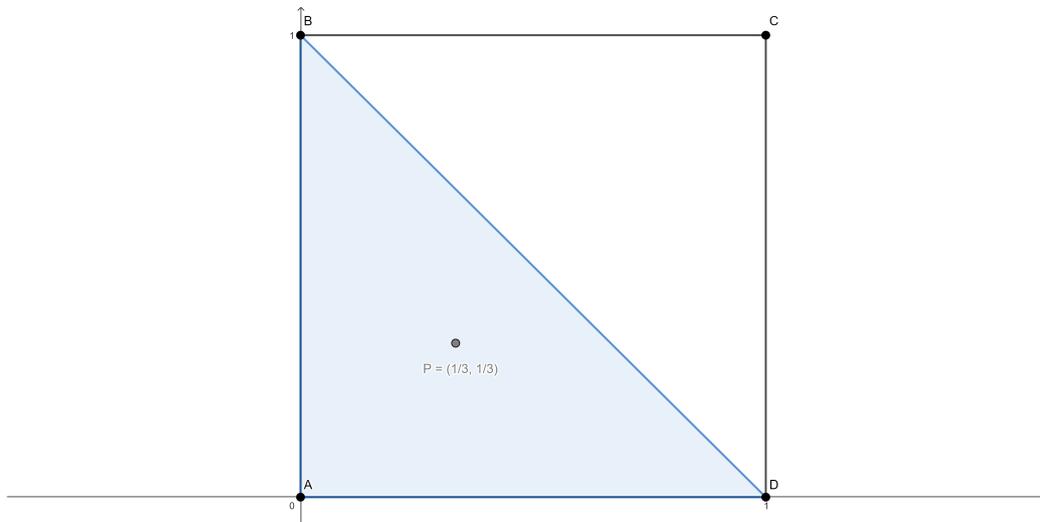


Figura 1.5: Ponto no interior do 2-simplexo.

O resultado a seguir precede o uso do Teorema de Carathéodory na demonstração do Teorema 2.4.1 do próximo capítulo.

Lema 1.1.2. *Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto aberto e conexo. Se*

$$U_1 \doteq \{tx_1 + (1-t)x_2; x_1, x_2 \in U, t \in [0, 1]\}$$

e

$$U_{n+1} \doteq \{tx_1 + (1-t)x_2; x_1, x_2 \in U_n, t \in [0, 1]\},$$

para $n > 0$, então

$$ch(U) = \bigcup_{j=1}^m U_j.$$

PROVA. Por um lado, decorre diretamente do Teorema de Carathéodory que $\bigcup_{j=1}^m U_j \subset ch(U)$.

Por outro lado, suponha que $x \in ch(U)$. Pelo Teorema da Carathéodory, existem $x_1, \dots, x_m \in U$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$ tais que $\sum_{j=1}^m \lambda_j = 1$ e $x = \sum_{j=1}^m \lambda_j x_j$.

Observe que se existe $j_0 \in \{1, \dots, m\}$ tal que $\lambda_{j_0} = 1$, então $x = x_{j_0} \in U_1 \subset \bigcup_{j=1}^m U_j$.

Assim, suponha que $\lambda_j < 1$, para todo $j \in \{1, \dots, m\}$. Podemos reescrever

$$x = \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j x_j + \lambda_m x_m = (1 - \lambda_m) \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_m} x_j + \lambda_m x_m.$$

Deste modo, x estará em U_m desde que $\sum_{j=1}^{m-1} \frac{\lambda_j}{1-\lambda_m} x_j$ esteja em U_{m-1} .

Observe que $\sum_{j=1}^{m-1} \frac{\lambda_j}{1-\lambda_m} = 1$ e que $\lambda_{m-1} \neq 1$. Deste modo, se $\rho_j = \frac{\lambda_j}{1-\lambda_m}$, então

$$\sum_{j=1}^{m-1} \frac{\lambda_j}{1-\lambda_m} x_j = (1 - \rho_{m-1}) \sum_{j=1}^{m-2} \frac{\rho_j}{1-\rho_{m-1}} x_j + \rho_{m-1} x_{m-1}$$

é uma 2-soma convexa entre $\sum_{j=1}^{m-2} \frac{\rho_j}{1-\rho_{m-1}} x_j$ e x_{m-1} . Portanto, agora nossa responsabilidade é mostrar que $\sum_{j=1}^{m-2} \frac{\rho_j}{1-\rho_{m-1}} x_j \in U_{m-2}$.

A essa altura, você já deve ter notado a natureza indutiva desta parte da demonstração. Assim, vamos mostrar apenas a base indutiva e concluiremos este argumento.

No caso em que $m = 2$, temos (pelo Teorema de Carathéodory) que se $x \in \text{ch}(U)$, então existem $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ e $x_1, x_2 \in U$ tais que $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in U_1 \subset \bigcup_{j=1}^2 U_j$.

Logo, $\text{ch}(U) \subset \bigcup_{j=1}^m U_j$. ■

Por fim, defina o seguinte conjunto que será útil posteriormente:

Definição 1.1.10. Dado $U \subset \mathbb{R}^m$, definimos o tubo $T(U)$ sobre U como se segue:

$$T(U) = U + i\mathbb{R}^m = \{z = x + iy; x \in U, y \in \mathbb{R}^m\}.$$

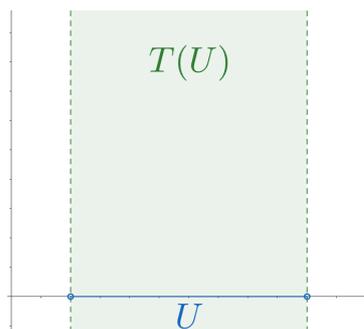


Figura 1.6: Tubo de um intervalo aberto $U \subset \mathbb{R}$.

Lema 1.1.3. Seja $U \subset \mathbb{R}^m$. Então vale $\text{ch}(T(U)) = T(\text{ch}(U))$.

PROVA. De fato, seja $x \in \text{ch}(T(U))$. Então, existem $x_1, \dots, x_m \in T(U)$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in [0, 1]$ tais que $\sum_{j=1}^m \lambda_j = 1$ e $\sum_{j=1}^m \lambda_j x_j = x$.

Como $x_j \in T(U)$ para cada $j \in \{1, \dots, m\}$, podemos escrever $x_j = u_j + y_j$, com $u_j \in U$ e $y_j \in \mathbb{R}^m$.

Logo,

$$x = \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j u_j \right) + iy, \quad \text{com } y = \sum_{j=1}^m \lambda_j y_j \in \mathbb{R}^m.$$

Como $\sum_{j=1}^m \lambda_j u_j \in \text{ch}(U)$, temos $x \in T(\text{ch}(U))$.

Por outro lado, se $x \in T(\text{ch}(U))$, então $x = u + y$, com $u \in \text{ch}(U)$ e $y \in \mathbb{R}^m$.

Uma vez que $u \in \text{ch}(U)$, existem $u_1, \dots, u_m \in U$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in [0, 1]$ tais que $\sum_{j=1}^m \lambda_j = 1$ e $\sum_{j=1}^m \lambda_j u_j = u$.

Uma vez que $\sum_{j=1}^m \lambda_j = 1$, se fizermos $y_j = y$ para cada $j \in \{1, \dots, m\}$, então $\sum_{j=1}^m \lambda_j y_j = y$.

Portanto, $x = \sum_{j=1}^m \lambda_j x_j$, onde $x_j = u_j + y_j \in T(U)$.

Deste modo, $x \in \text{ch}(T(U))$. ■

1.2 Discos Analíticos

O principal objetivo desta seção é construir uma família de funções analíticas (veja Lema 1.2.2) que será muito importante na demonstração que apresentaremos para o teorema tubular de Bochner.

NOTAÇÃO: Denotaremos o disco complexo unitário centrado na origem por

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Definição 1.2.1. Dizemos que uma função contínua $A : \bar{\Delta} \rightarrow \mathbb{C}^m$ é um disco analítico em \mathbb{C}^m se é holomorfa em Δ . Neste caso, dizemos que o ponto $A(0)$ é o centro do disco analítico e que $A(\partial\Delta)$ é a fronteira do disco analítico.

Lema 1.2.1. Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto aberto e conexo. Dados $p, q \in U$, existe uma curva suave $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ tal que $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$ e $\gamma^{(n)}(0) = \gamma^{(n)}(1) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

PROVA. Uma vez que U é conexo, U também é conexo por caminhos. Logo, existe uma curva contínua $\alpha : [0, 1] \rightarrow U$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha(1) = q$.

Como $\alpha([0, 1]) \subset U$ e U é aberto, para cada $t \in [0, 1]$, existe $r_t > 0$ tal que $B(\alpha(t), 2r_t) \subset U$.

Pela continuidade de α , existe $\delta_t > 0$ de forma que se $s \in (t - \delta_t, t + \delta_t) \cap [0, 1]$, então $\alpha(s)$ pertence a $B(\alpha(t), r_t)$.

Deste modo, $\{(t - \delta_t, t + \delta_t)\}_{t \in [0,1]}$ é uma cobertura de $[0, 1]$ e, pela compacidade de $[0, 1]$, existem $t_1, \dots, t_k \in [0, 1]$ com $t_j < t_{j+1}$, para todo $j \in \{1, \dots, k-1\}$, tais que

$$[0, 1] \subset \bigcup_{j=1}^k (t_j - \delta_{t_j}, t_j + \delta_{t_j}).$$

Se necessário, "troque os pontos t_j do intervalo" e diminua δ_{t_j} de forma que $t_j < t_{j+1} - \delta_{t_{j+1}} < t_j + \delta_{t_j} < t_{j+1}$.

Defina $s_0 = 0$, $s_{2l-1} = t_l$ e escolha $s_{2l} \in (t_{l+1} - \delta_{t_{l+1}}, t_l + \delta_l)$. Note que por construção temos que $s_{2l-1} < s_{2l} < s_{2l+1}$.

Defina $\phi_{2l-1} \in C_c^\infty((s_{2l-1}, s_{2l+1}))$ tal que $0 \leq \phi_{2l-1} \leq 1$ e $\phi_{2l-1} \equiv 1$ em $[s_{2l} - \frac{s_{2l} - s_{2l-1}}{2}, s_{2l} + \frac{s_{2l+1} - s_{2l}}{2}]$.

Note que $\phi_{2l-1} \equiv 0$ em uma vizinhança de $s_{2l-1} = t_l$ e $\phi_{2l-1} \equiv 1$ em uma vizinhança de s_{2l} .

Dado $t \in [s_{2l-1}, s_{2l}]$, defina

$$\gamma(t) = \alpha(s_{2l-1}) + [\alpha(s_{2l}) - \alpha(s_{2l-1})]\phi_{2l-1}(t).$$

Mais ainda, por construção, $\gamma \equiv \alpha(s_{2l-1})$ em uma vizinhança de s_{2l-1} e $\gamma \equiv \alpha(s_{2l})$ em uma vizinhança de s_{2l} . Ou seja, as derivadas de γ se anulam nos extremos do intervalo $[s_{2l-1}, s_{2l}]$.

Além disso, dado $t \in [s_{2l-1}, s_{2l}]$ (lembrando que $\alpha((t - \delta_t, t + \delta_t) \cap [0, 1]) \subset B(\alpha(t), 2r_t) \subset U$ ($\forall t$), $s_{2l-1} = t_l$ e $s_{2l} \in (t_l - \delta_l, t_l + \delta_l)$), temos

$$\|\gamma(t) - \alpha(t_l)\| = \|\gamma(t) - \alpha(s_{2l-1})\| = \|[\alpha(s_{2l}) - \alpha(s_{2l-1})]\phi_{2l-1}(t)\| \leq \|[\alpha(s_{2l}) - \alpha(s_{2l-1})]\| < r_{t_l}.$$

Logo, $\gamma(t) \in B(\alpha(t_l), r_l) \subset U$. ■

Lema 1.2.2. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto aberto, $x_0, x_1 \in U$ e $\eta \in \mathbb{R}^m$. Se $t \in (0, 1)$, então existe um disco analítico*

$$A_t : \bar{\Delta} \rightarrow \mathbb{C}^m$$

tal que

1. $A_t(\partial\Delta) \subset T(U) = \{x + iy\}; x \in U, y \in \mathbb{R}^m\};$
2. $A_t(0) = tx_0 + (1-t)x_1 + i\eta \doteq x_t + i\eta.$

PROVA. Suponha, sem perda de generalidade que $x_0 = 0$, $x_1 = (1, 0, \dots, 0)$ e que $\eta = 0$. Podemos supor estas condições, pois basta aplicarmos uma mudança suave de coordenadas.

Uma vez que U é conexo, existe uma curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ de forma que $\gamma(0) = 0$ e $\gamma(1) = x_1$. O Lema 1.2.1 nos permite assumir que γ é suave e que todas as suas derivadas $\gamma^{(k)}(s)$ se anulam quando $s = 0$ e quando $s = 1$.

Dado $t \in (0, 1)$, escolha $\epsilon \in (0, \min\{t, 2\pi(1-t)\})$ e defina $u : \partial\Delta \rightarrow \mathbb{R}^m$ por

$$u(e^{i\theta}) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \theta \leq 2\pi t - \epsilon, \\ \gamma\left(\frac{\theta - 2\pi t + \epsilon}{\epsilon}\right), & 2\pi t - \epsilon \leq \theta \leq 2\pi t, \\ x_1, & 2\pi t \leq \theta \leq 2\pi - \epsilon, \\ \gamma\left(\frac{2\pi - \theta}{\epsilon}\right), & 2\pi - \epsilon \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

Defina

$$K_t(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + w}{e^{i\theta} - w} u(e^{i\theta}) d\theta, \quad \text{para } |w| < 1.$$

Iremos provar que K_t pode ser estendida continuamente para a fronteira $\partial\Delta$. Para isso, vamos utilizar, entre outras ferramentas, a transformada de Hilbert de u definida por

$$H(u) \doteq \lim_{(r,\sigma) \rightarrow (1,\sigma_1)} H_r(\sigma) = \int_0^{2\pi} w'(\theta) \log\{1 - \cos(\theta - \sigma_1)\} d\theta.$$

Denotando $w = re^{i\sigma}$, observe que

$$\frac{e^{i\theta} + w}{e^{i\theta} - w} \cdot \frac{e^{-i\theta} - re^{-i\sigma}}{e^{-i\theta} - re^{-i\sigma}} = \frac{1 - re^{i(\theta-\sigma)} + re^{-i(\theta-\sigma)} - r^2}{1 - re^{i(\theta-\sigma)} - re^{-i(\theta-\sigma)} + r^2} = \frac{1 - r^2 - 2ir \sin(\theta - \sigma)}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - \sigma)}.$$

Assim,

$$K_t(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - \sigma)} u(e^{i\theta}) d\theta + i \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2r \sin(\theta - \sigma)}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - \sigma)} u(e^{i\theta}) d\theta.$$

A seguir, mostraremos que, para $\sigma_1 \in [0, 2\pi]$ fixo, temos

$$K_t(w) = K_t(re^{i\sigma}) \rightarrow u(e^{i\sigma_1}) + i \lim_{\sigma \rightarrow \sigma_1, r \rightarrow 1} H(re^{i\sigma}), \quad \text{quando } \sigma \rightarrow \sigma_1 \text{ e } r \rightarrow 1.$$

Mas antes, como o núcleo de Poisson é uma aproximação da identidade, mostraremos que

$$I \doteq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos x} dx = 1.$$

Para isso faremos uma mudança de variáveis onde será importante estudar as funções

$$\begin{array}{llll} [0, 1] \rightarrow [0, 1], & [0, 1] \rightarrow [0, 1] & [0, 1] \rightarrow [-1, 0], & \text{e} & [0, 1] \rightarrow [-1, 0] \\ t \mapsto \frac{1-(t-1)^2}{1+(t-1)^2} & t \mapsto \frac{1-t^2}{1+t^2} & t \mapsto \frac{-1+(1-t)^2}{1+(1-t)^2} & & t \mapsto \frac{-1+t^2}{1+t^2}. \end{array}$$

Note que estas funções são bijetoras, pois

1. Para primeira função, $\left[\frac{1-(t-1)^2}{1+(t-1)^2}\right]_{t=0} = 0$, $\left[\frac{1-(t-1)^2}{1+(t-1)^2}\right]_{t=1} = 1$ e

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1-(t-1)^2}{1+(t-1)^2} \right] = \frac{-2(t-1)[1+(t-1)^2] - [1-(t-1)^2]2(t-1)}{[1+(t-1)^2]^2} = \frac{-4(t-1)}{[1+(t-1)^2]^2} < 0,$$

quando $0 < t < 1$.

2. Para segunda função, $\left[\frac{1-t^2}{1+t^2}\right]_{t=0} = 1$, $\left[\frac{1-t^2}{1+t^2}\right]_{t=1} = 0$ e

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1-t^2}{1+t^2} \right] = \frac{-2t[1+t^2] - [1-t^2]2t}{[1+t^2]^2} = \frac{-4t}{[1+t^2]^2} < 0,$$

quando $0 < t < 1$.

3. Para terceira função, $\left[\frac{-1+(t-1)^2}{1+(t-1)^2}\right]_{t=0} = 0$, $\left[\frac{-1+(t-1)^2}{1+(t-1)^2}\right]_{t=1} = -1$ e

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{-1+(t-1)^2}{1+(t-1)^2} \right] = \frac{2(t-1)[1+(t-1)^2] - [-1+(t-1)^2]2(t-1)}{[1+(t-1)^2]^2} = \frac{4(t-1)}{[1+(t-1)^2]^2} > 0,$$

quando $0 < t < 1$.

4. Para quarta função, $\left[\frac{-1+t^2}{1+t^2}\right]_{t=0} = -1$, $\left[\frac{-1+t^2}{1+t^2}\right]_{t=1} = 0$ e

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{-1+t^2}{1+t^2} \right] = \frac{2t[1+t^2] - [-1+t^2]2t}{[1+t^2]^2} = \frac{4t}{[1+t^2]^2} > 0,$$

quando $0 < t < 1$.

Mais ainda,

1. se $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, podemos fazer $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ e consequentemente teremos $x = \arccos\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)$ e $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2}} \cdot \frac{4t}{(1+t^2)^2} = \frac{2}{1+t^2}$, quando $t \in [0, 1]$.
2. se $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, podemos fazer $\cos x = \frac{-1+(t-1)^2}{1+(t-1)^2}$ e consequentemente teremos $x = \arccos\left(\frac{-1+(t-1)^2}{1+(t-1)^2}\right)$ e $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{-1+(t-1)^2}{1+(t-1)^2}\right)^2}} \cdot \frac{4(t-1)}{[1+(t-1)^2]^2} = -\frac{2}{1+(t-1)^2}$, quando $t \in [0, 1]$.
3. se $x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, podemos fazer $\cos x = \frac{-1+t^2}{1+t^2}$ e consequentemente teremos $x = \arccos\left(\frac{-1+t^2}{1+t^2}\right)$ e $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{-1+t^2}{1+t^2}\right)^2}} \cdot \frac{4t}{(1+t^2)^2} = -\frac{2}{1+t^2}$, quando $t \in [0, 1]$.
4. se $x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, podemos fazer $\cos x = \frac{1-(t-1)^2}{1+(t-1)^2}$ e consequentemente teremos $x = \arccos\left(\frac{1-(t-1)^2}{1+(t-1)^2}\right)$ e $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-(t-1)^2}{1+(t-1)^2}\right)^2}} \cdot \frac{4(t-1)}{[1+(t-1)^2]^2} = \frac{2}{1+(t-1)^2}$, quando $t \in [0, 1]$.

Lembrando que $I \doteq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos x} dx$ note que

$$\begin{aligned}
\frac{2\pi}{1-r^2} I &= 2 \left[\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+r^2-2r\cos x} dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{1+r^2-2r\cos x} dx \right] \\
&= 2 \left[\int_0^1 \frac{1}{1+r^2-2r\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt + \int_0^1 \frac{1}{1+r^2-2r\left(\frac{-1+t^2}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \right] \\
&= 4 \left[\int_0^1 \frac{1}{(1+r^2)(1+t^2)-2r(1-t^2)} dt + \int_0^1 \frac{1}{(1+r^2)(1+t^2)-2r(-1+t^2)} dt \right] \\
&= 4 \left[\int_0^1 \frac{1}{(1-r^2)^2 + (1+r^2)^2 t^2} dt + \int_0^1 \frac{-1}{(1+r^2)^2 + (1-r^2)^2 t^2} dt \right] \\
&= 4 \left[\frac{1}{(1-r)^2} \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{(1+r^2)^2 t^2}{(1-r^2)^2}} dt - \frac{1}{(1+r)^2} \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{(1-r^2)^2 t^2}{(1+r)^2}} dt \right]
\end{aligned}$$

Considerando uma mudança de variável $\tilde{t} = t - 1$ e a paridade do integrando temos

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{1-r^2}I &= 4 \int_0^1 \frac{1}{(1+r^2)(1+t^2) - 2r(1-t^2)} dt - 4 \int_0^1 \frac{1}{(1+r^2)(1+t^2) - 2r(-1+t^2)} dt \\ &= 4 \int_0^1 \frac{1}{(1-r)^2 + (1+r)^2 t^2} dt - 4 \int_0^1 \frac{1}{(1+r)^2 + (1-r)^2 t^2} dt \\ &= \frac{4}{(1-r)^2} \int_0^1 \frac{1}{1 + \frac{(1+r)^2}{(1-r)^2} t^2} dt - \frac{4}{(1+r)^2} \int_0^1 \frac{1}{1 + \frac{(1-r)^2}{(1+r)^2} t^2} dt \end{aligned}$$

Considerando as mudanças de variáveis $u = \frac{1+r}{1-r}t$ e $v = \frac{1-r}{1+r}t$ temos

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{1-r^2}I &= 4 \left[\frac{1}{1-r^2} \int_0^{\frac{1+r}{1-r}} \frac{1}{1+u^2} du - \frac{1}{1-r^2} \int_0^{\frac{1-r}{1+r}} \frac{1}{1+v^2} dv \right] \\ &= \frac{4}{1-r^2} \left[\operatorname{arctg} u \Big|_0^{\frac{1+r}{1-r}} - \operatorname{arctg} v \Big|_0^{\frac{1-r}{1+r}} \right] \\ &= \frac{4}{1-r^2} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{1+r}{1-r} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{1-r}{1+r} \right) \right]. \end{aligned}$$

Note que, se $\theta = \operatorname{arctg} \left(\frac{1+r}{1-r} \right)$ então

$$\frac{1+r}{1-r} = \operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{cos} \theta} = \frac{\operatorname{cos} \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right)}{\operatorname{sen} \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right)} = \frac{1}{\operatorname{tg} \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right)}.$$

Consequentemente $\operatorname{arctg} \left(\frac{1-r}{1+r} \right) = \theta - \frac{\pi}{2}$. Concluindo que

$$I = \frac{1-r^2}{2\pi} \cdot \frac{4}{1-r^2} \cdot \frac{\pi}{2} = 1.$$

Lembrando que

$$\begin{aligned} K_t(re^{i\sigma}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\sigma)} u(e^{i\theta}) d\theta + i \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2r\sin(\theta-\sigma)}{1+r^2-2r\cos(\theta-\sigma)} u(e^{i\theta}) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta)} u(e^{i(\theta+\sigma)}) d\theta + i \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2r\sin(\theta-\sigma)}{1+r^2-2r\cos(\theta-\sigma)} u(e^{i\theta}) d\theta, \end{aligned}$$

para $\sigma \in [0, 2\pi]$ e $0 \leq r < 1$. E que $I \doteq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos x} dx = 1$ temos

$$K_t(re^{i\sigma}) = u(e^{i\sigma}) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta)} [u(e^{i(\theta+\sigma)}) - u(e^{i\sigma})] d\theta + \quad (1.10)$$

$$+ i \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2r \sin(\theta - \sigma)}{1+r^2-2r\cos(\theta - \sigma)} u(e^{i\theta}) d\theta. \quad (1.11)$$

A seguir denotaremos

$$F(r) = \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta)} [u(e^{i(\theta+\sigma)}) - u(e^{i\sigma})] d\theta, \quad 0 < r < 1$$

e mostraremos que $\lim_{r \rightarrow 1^-} F(r) = 0$. Como $\theta \mapsto u(e^{i\theta})$ é suave temos que existe $C > 0$ tal que

$$|F(r)| \leq C \int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2)\theta}{1+r^2-2r\cos\theta} d\theta.$$

Ademais usando as mesmas mudanças de variáveis que usamos para mostrar que $I = 1$ temos

$$\begin{aligned} \frac{|F(r)|}{C(1-r^2)} &\leq \int_0^{\pi/2} \frac{x}{1+r^2-2r\cos x} dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{x}{1+r^2-2r\cos x} dx \\ &+ \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{x}{1+r^2-2r\cos x} dx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \frac{x}{1+r^2-2r\cos x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{\arccos\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}{1+r^2-2r\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt - \int_0^1 \frac{\arccos\left(\frac{-1+(t-1)^2}{1+(t-1)^2}\right)}{1+r^2-2r\left(\frac{-1+(t-1)^2}{1+(t-1)^2}\right)} \cdot \frac{2}{1+(t-1)^2} dt \\ &- \int_0^1 \frac{\arccos\left(\frac{-1+t^2}{1+t^2}\right)}{1+r^2-2r\left(\frac{-1+t^2}{1+t^2}\right)} \frac{2}{1+t^2} dt + \int_0^1 \frac{\arccos\left(\frac{1-(t-1)^2}{1+(t-1)^2}\right)}{1+r^2-2r\left(\frac{1-(t-1)^2}{1+(t-1)^2}\right)} \frac{2}{1+(t-1)^2} dt \\ &= 2 \int_0^1 \frac{\arccos\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}{(1+r^2)(1+t^2) - 2r(1-t^2)} dt - 2 \int_0^1 \frac{\arccos\left(\frac{-1+(t-1)^2}{1+(t-1)^2}\right)}{(1+r^2)[1+(t-1)^2] - 2r[-1+(t-1)^2]} dt \\ &- 2 \int_0^1 \frac{\arccos\left(\frac{-1+t^2}{1+t^2}\right)}{(1+r^2)(1+t^2) - 2r(-1+t^2)} dt + 2 \int_0^1 \frac{\arccos\left(\frac{1-(t-1)^2}{1+(t-1)^2}\right)}{(1+r^2)[1+(t-1)^2] - 2r[1-(t-1)^2]} dt \end{aligned}$$

Considerando uma mudança de variável $\tilde{t} = t - 1$ e a paridade do integrando temos

$$\frac{|F(r)|}{C(1-r^2)} \leq 4 \int_0^1 \frac{\arccos\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}{(1+r^2)(1+t^2) - 2r(1-t^2)} dt - 4 \int_0^1 \frac{\arccos\left(\frac{-1+t^2}{1+t^2}\right)}{(1+r^2)[1+t^2] - 2r[-1+t^2]} dt.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{|F(r)|}{C(1-r^2)} &\leq 4 \int_0^1 \frac{\arccos\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}{(1-r)^2 + (1+r)^2 t^2} dt - 4 \int_0^1 \frac{\arccos\left(\frac{-1+t^2}{1+t^2}\right)}{(1+r)^2 + (1-r)^2 t^2} dt \\ &= \frac{4}{(1-r)^2} \int_0^1 \frac{\arccos\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}{1 + \frac{(1+r)^2}{(1-r)^2} t^2} dt - \frac{4}{(1+r)^2} \int_0^1 \frac{\arccos\left(\frac{-1+t^2}{1+t^2}\right)}{1 + \frac{(1-r)^2}{(1+r)^2} t^2} dt. \end{aligned}$$

Fazendo $u = \frac{1+r}{1-r} t$ temos

$$\frac{|F(r)|}{C} \leq 4 \int_0^{+\infty} \frac{\arccos\left\{\frac{(1+r)^2 - (1-r)^2 u^2}{(1+r)^2 + (1-r)^2 u^2}\right\}}{1 + u^2} du.$$

Como $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} du = \frac{\pi}{2}$ e $\lim_{r \rightarrow 1^-} \arccos\left\{\frac{(1+r)^2 - (1-r)^2 u^2}{(1+r)^2 + (1-r)^2 u^2}\right\} = \arccos 1 = 0$ temos que $\lim_{r \rightarrow 1^-} F(r) = 0$.

Voltando em (1.10) e usando a periodicidade de $\theta \mapsto u(e^{i\theta})$ temos que

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} K_t(r e^{i\sigma}) = u(e^{i\sigma}) + i \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2r \sin(\theta - \sigma)}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - \sigma)} u(e^{i\theta}) d\theta.$$

Ademais, sendo $H_r(\sigma) = \int_0^{2\pi} \frac{2r \sin(\theta - \sigma)}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - \sigma)} u(e^{i\theta}) dx$ mostraremos que existe $\lim_{r \rightarrow 0} H_r(\sigma)$. Note que denotando $w(\theta) = u(e^{i\theta})$ e integrando por partes temos

$$H_r(\sigma) = \frac{2r}{1+r^2} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\theta - \sigma)}{1 - \frac{2r}{1+r^2} \cos(\theta - \sigma)} w(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} w'(\theta) \log \left\{ 1 - \frac{2r}{1+r^2} \cos(\theta - \sigma) \right\} d\theta.$$

Ademais, como

1. w' é limitada (pela definição de u);
2. $\frac{2r}{1+r^2} \leq 1$, quando $0 \leq r \leq 1$;
3. $\int_0^{2\pi} |\log \{1 - \cos(\theta)\}| d\theta = -\int_0^{2\pi} \log \{1 - \cos(\theta)\} d\theta < +\infty$

segue do teorema da convergência dominada que

$$\lim_{(r, \sigma) \rightarrow (1, \sigma_1)} H_r(\sigma) = \int_0^{2\pi} w'(\theta) \log \{1 - \cos(\theta - \sigma_1)\} d\theta, \quad \forall \sigma_1 \in [0, 2\pi].$$

E, a integral acima existe, pelas observações acima. Deste modo, além de termos K_t analítica em Δ temos que ela pode se estendida para uma função contínua em contínua em $\overline{\Delta}$.

Note ainda que centro de K_t é

$$\begin{aligned} K_t(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi t - \epsilon}^{2\pi t} u(e^{i\theta}) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi t}^{2\pi - \epsilon} x_1 d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi - \epsilon}^{2\pi} u(e^{i\theta}) d\theta \\ &= \frac{(2\pi - \epsilon - 2\pi t)x_1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi t - \epsilon}^{2\pi t} u(e^{i\theta}) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi - \epsilon}^{2\pi} u(e^{i\theta}) d\theta \\ &= (1 - t)x_1 - \frac{\epsilon x_1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi t - \epsilon}^{2\pi t} u(e^{i\theta}) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi - \epsilon}^{2\pi} u(e^{i\theta}) d\theta \end{aligned}$$

Denotando $R(\epsilon) = -\frac{\epsilon x_1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi t - \epsilon}^{2\pi t} u(e^{i\theta}) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi - \epsilon}^{2\pi} u(e^{i\theta}) d\theta$ temos que existe $C > 0$ tal que $R(\epsilon) \leq C\epsilon$.

Tome $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno para que o erro $R(\epsilon)$ seja menor que a distância, δ de $\gamma([0, s])$ até $\partial\Omega$.

Portanto, podemos encontrar $\zeta \in \mathbb{C}^n$, com $|\zeta| < \delta$, de modo que a translação $A_t(U) = \zeta + K_t(U)$ possui as propriedades desejadas, a saber, $A_t(\partial\Delta) \subset \Omega$ e $A_t(0) = x_t$ ■

1.3 Espaço Tangente de uma Variedade Diferenciável

A presente seção foi obtida a partir do Capítulo 1 de [8]. O nosso objetivo é estabelecer a noção de subfibrado tangente (veja 1.3.11) que será necessária nos resultados do capítulo 2.

Definição 1.3.1. *Seja Ω um espaço topológico de Hausdorff com base enumerável e*

$$\mathcal{F} = \{(U, x); U \subset \Omega \text{ é aberto e } x : U \rightarrow \mathbb{R}^N \text{ é homeomorfismo sobre } x(U)\}$$

tais que:

1. $\bigcup_{(U, x) \in \mathcal{F}} U = \Omega$;
2. A aplicação $x' \circ x^{-1} : x(U \cap U') \rightarrow x'(U \cap U')$ é C^∞ para cada par $(U, x), (U', x') \in \mathcal{F}$;
3. Em relação aos itens (1) e (2), a família \mathcal{F} é maximal, isto é, se V é um subconjunto aberto e não-vazio de Ω e $y : V \rightarrow y(V)$ é um homeomorfismo sobre o aberto $y(V) \subset \mathbb{R}^N$ tal que, para qualquer $(U, x) \in \mathcal{F}$ com $U \cap V \neq \emptyset$, a composição $y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V)$ é C^∞ , então $(V, y) \in \mathcal{F}$.

O par (Ω, \mathcal{F}) é dito uma variedade diferenciável de dimensão N . É comum chamar cada par (U, x) de carta local ou sistema local de coordenadas.

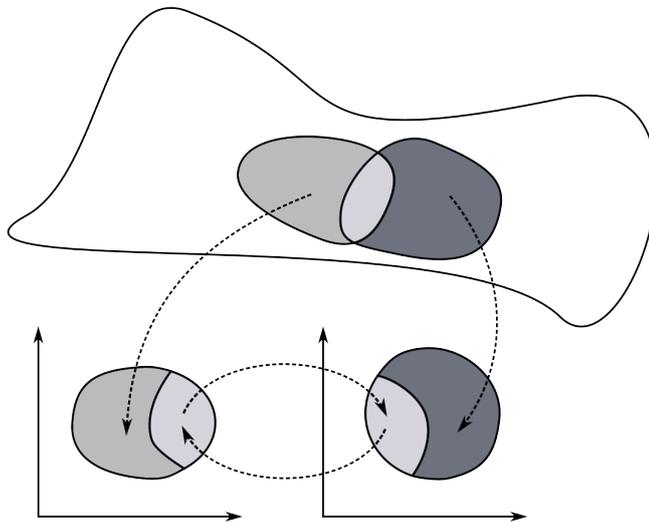


Figura 1.7: Variedade diferenciável.

Observação 1.3.1. O terceiro axioma de variedade diferenciável garante que dados um par $(U, x) \in \mathcal{F}$ e $V \subset U$ aberto, o par $(V, x|_V)$ também pertence a \mathcal{F} . Além disso, dado $p \in \Omega$, existe uma carta local $x : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ com $p \in U$ tal que $x(p) = 0$.

Com efeito, se $x(p) = v$, então defina $y(q) = x(q) - v$, para cada $q \in U$ e observe que

$$y \circ x^{-1}(t) = y(x^{-1}(t)) = x(x^{-1}(t)) - v = t - v, \quad \forall t \in x(U).$$

Logo, $y \circ x^{-1}$ é C^∞ . Deste modo, por (3) temos que $(U, y) \in \mathcal{F}$. Ademais, $y(p) = x(p) - v = 0$.

Observação 1.3.2. Seja

$$\mathcal{F}^* = \{(U, x); U \subset \Omega \text{ é aberto e } x : U \rightarrow x(U) \subset \mathbb{R}^N \text{ é homeomorfismo}\}.$$

Suponha que \mathcal{F}^* satisfaz os dois primeiros axiomas de variedade diferenciável. Então, existe uma única família \mathcal{F} com $\mathcal{F}^* \subset \mathcal{F}$ e (Ω, \mathcal{F}) variedade diferenciável.

A demonstração da existência de \mathcal{F} pode ser apresentada usando o Lema de Zorn. A seguir mostraremos a unicidade: Se $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ são famílias tais que $\mathcal{F}^* \subset \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ e $(\Omega, \mathcal{F}_1), (\Omega, \mathcal{F}_2)$ são

variedades diferenciáveis, então dados $(U, x) \in \mathcal{F}_1$ e $(V, y) \in \mathcal{F}_2$ tais que $U \cap V \neq \emptyset$, temos $y \circ x^{-1}$ e $x \circ y^{-1}$ de classe C^∞ e, deste modo, pelo axioma 3, $(U, x) \in \mathcal{F}_2$ e $(V, y) \in \mathcal{F}_1$.

Pela arbitrariedade dos pares tomados, temos $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$.

Mesmo tendo estabelecido uma estrutura diferenciável como um par (Ω, \mathcal{F}) , faremos menção à família \mathcal{F} somente quando houver risco de confusão. Portanto, doravante, Ω denotará, a menos de menção contrária, uma variedade diferenciável de dimensão N .

Observação 1.3.3. *Se $W \subset \Omega$ é um aberto, então podemos definir a família*

$$\mathcal{F}_W \doteq \{(W \cap U, x|_{W \cap U}); (U, x) \in \mathcal{F}, W \cap U \neq \emptyset\}$$

para tornar W uma estrutura diferenciável de mesma dimensão que Ω .

Definição 1.3.2. *Uma aplicação $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ é dita suave se, para todo par $(U, x) \in \mathcal{F}$, tem-se que a composição $f \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow \mathbb{C}$ é de classe C^∞ . Denotaremos o conjunto das aplicações C^∞ em Ω por $C^\infty(\Omega)$.*

É natural induzir, em $C^\infty(\Omega)$, as operações elementares (adição, multiplicação, etc.) através das operações homônimas em \mathbb{C} .

Exemplo 1.3.1. *A projeção da i -ésima coordenada local*

$$\pi_i \circ x : U \rightarrow \mathbb{R}$$

é uma aplicação $C^\infty(U)$.

Observação 1.3.4. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto, então Ω torna-se uma estrutura diferenciável de dimensão N ao tomar $\mathcal{F}^* = \{(\Omega, \text{aplicação identidade})\}$. Além disso,*

$$C^\infty(\Omega) = \{f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ é } C^\infty\}.$$

Em outras palavras, o conceito de suavidade para aplicações diferenciáveis definidas em uma estrutura diferenciável estende o conceito usual de suavidade.

Exemplo 1.3.2. *Fixada uma carta (U, x) e dada uma aplicação $f \in C^\infty(U)$, sabemos que a aplicação $\tilde{f} \doteq f \circ x^{-1}$ é C^∞ em $x(U) \subset \mathbb{R}^n$ e, conseqüente, a i -ésima derivada parcial $\partial_i \tilde{f} : x(U) \rightarrow \mathbb{C}$ está bem*

definida e é C^∞ . Deste modo, a composição $\partial_i \tilde{f} \circ x : U \rightarrow \mathbb{C}$ é uma aplicação suave e será denotada por $\partial_i f$.

Definição 1.3.3. Um campo vetorial complexo sobre Ω é uma aplicação \mathbb{C} -linear $L : C^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$ que satisfaz a regra de Leibniz:

$$L(fg) = L(f)g + L(g)f.$$

Denotaremos o conjunto dos campos vetoriais complexos sobre Ω por $\mathfrak{X}(\Omega)$.

Teorema 1.3.1. Valem as seguintes afirmações a respeito de um campo vetorial complexo L em Ω :

1. Se $f \in C^\infty(\Omega)$ e f é constante, então $Lf = 0$;
2. $\text{supp } Lf \subset \text{supp } f$;
3. Se (U, x) é uma carta local, então, para cada $f \in C^\infty(U)$, temos

$$L(f) = \sum_{j=1}^N (Lx_j) \partial_j f.$$

PROVA. 1. Observe que se $f \equiv 1$, então $L(1) = L(1^2) = 1 \cdot L(1) + 1 \cdot L(1) = 2L(1)$. Logo, $L(1) = 0$. Portanto, usando a linearidade de L nós completamos a demonstração do item 1.

2. Suponha que $p \notin \text{supp } f$. Assim, f se anula em um conjunto aberto $V \subset \Omega$. Seja (U, x) uma carta local com $p \in U \subset V$ e tome $\phi \in C_c^\infty(x(U))$ tal que $\phi(t) = 1$, para cada $t \in W$ (em que $W \subset\subset x(U)$ é uma vizinhança aberta de $x(p)$).

Defina $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(q) = \begin{cases} \phi(x(q)), & q \in U \\ 0, & q \notin U. \end{cases}$$

Assim, por construção, $g \in C^\infty$ e se anula em $\Omega - V$.

Em particular,

$$f = f - gf + gf = (1 - g)f,$$

pois $gf \equiv 0$ e, pela Regra de Leibniz,

$$L(f)(q) = (1 - g)(q)L(f)(q) + f(q)L(1 - g)(q) = 0, \quad q \in x^{-1}(W)$$

pois $g \equiv 1$ em $x^{-1}(W)$, $f \equiv 0$ em U e $x^{-1}(W) \subset U$. Como $x^{-1}(W)$ é vizinhança aberta de p concluímos que $p \notin \text{supp } Lf$.

3. Fixe $p \in U$ e escreva

$$x(q) = (x_1(q), \dots, x_N(q)), \quad q \in U.$$

Agora tome $V \subset U$ aberto tal que $x(V)$ é uma bola aberta centrada em $x(p) = a = (a_1, \dots, a_N)$. Assim, dada $f \in C^\infty(U)$ defina $f^* \doteq f \circ x^{-1}$.

Se $(x_1, \dots, x_N) \in x(V)$, então o teorema fundamental do cálculo aplicado a

$$\sigma(t) = f^*(a_1 + t(x_1 - a_1), \dots, a_N + t(x_N - a_N))$$

nos dá

$$\begin{aligned} f^*(x_1, \dots, x_N) - f^*(a_1, \dots, a_N) &= \sigma(1) - \sigma(0) = \int_0^1 \sigma'(t) dt \\ &= \sum_{j=1}^N \int_0^1 \frac{\partial f^*}{\partial x_j}(a_1 + t(x_1 - a_1), \dots, a_N + t(x_N - a_N)) dt (x_j - a_j), \end{aligned}$$

denotando $h_j(x) = \int_0^1 \frac{\partial f^*}{\partial x_j}(a_1 + t(x_1 - a_1), \dots, a_N + t(x_N - a_N)) dt$ temos que $h_j \in C^\infty(x(V))$ e

$$f^*(x_1, \dots, x_N) - f^*(a_1, \dots, a_N) = \sum_{j=1}^N h_j(x_1, \dots, x_N)(x_j - a_j).$$

Assim, se $g_j = h_j \circ x$, temos

$$f(q) = f(p) + \sum_{j=1}^N g_j(q) (x_j(q) - x_j(p)), \quad \forall q \in V.$$

Logo, pela regra de Leibniz

$$\begin{aligned} L(f)(q) &= \sum_{j=1}^N L(g_j \cdot x_j)(q) - L(g_j)(q) \cdot x_j(p) \\ &= \sum_{j=1}^N [L(g_j)(q) \cdot x_j(q) + L(x_j)(q) \cdot g_j(q) - L(g_j)(q) \cdot x_j(p)]. \end{aligned}$$

Assim, fazendo $q = p$

$$\begin{aligned} L(f)(p) &= \sum_{j=1}^N L(x_j)(p)g_j(p) \\ &= \sum_{j=1}^N L(x_j)(p)h_j \circ x(p) \end{aligned}$$

Por fim, lembrando que $x(p) = a$, note que

$$h_j(x(p)) = \int_0^1 \frac{\partial f^*}{\partial x_j}(a_1, \dots, a_N) dt = \frac{\partial f^*}{\partial x_j}(x(p)) = \partial_j f(p).$$

Deste modo, $L(f)(p) = \sum_{j=1}^N L(x_j)(p) \partial_j f(p)$.

Uma vez que p foi tomado de forma arbitrária em U , temos uma representação de L em coordenadas locais dada por

$$L = \sum_{j=1}^N (Lx_j) \partial_j.$$

■

Definição 1.3.4. O operador \mathbb{C} -linear de $C^\infty(U)$ em C^∞ definido por

$$f \mapsto \partial_j f = \frac{\partial f^*}{\partial x_j} \circ x$$

na demonstração do teorema 1.3.1 define um elemento de $\mathfrak{X}(U)$ e também será denotado por $\frac{\partial}{\partial x_j}$.

Pensando no fato de que nem todo par de operadores comuta, definimos uma ferramenta que, em certo sentido, mede “quão próximo um par de operadores está da comutatividade”.

Definição 1.3.5. O operador definido por $[L, M](f) = L(M(f)) - M(L(f))$, para cada $f \in C^\infty(\Omega)$ é chamado de colchete de Lie (ou comutador) de L e M .

Observação 1.3.5. Este operador torna $\mathfrak{X}(\Omega)$ uma álgebra de Lie sobre \mathbb{C} .

Observação 1.3.6. A representação obtida no item 3 do teorema 1.3.1 mostra que o $C^\infty(U)$ -módulo $\mathfrak{X}(U)$ é livre com base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_N} \right\}$ e multiplicação externa $(gL)(f) = gL(f)$.

Observação 1.3.7. Uma representação de $[L, M]$ em coordenadas locais é

$$[L, M] = \sum_{j=1}^N [L(Mx_j) - M(Lx_j)] \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Denote por \mathcal{B}_p o conjunto de todos os pares (V, f) onde V é uma vizinhança aberta de p e $f \in C^\infty(V)$. E, em \mathcal{B}_p , defina a seguinte relação de equivalência:

$$(V_1, f_1) \sim (V_2, f_2) \text{ se existe uma vizinhança aberta } V \subset V_1 \cap V_2 \text{ de } p \text{ tal que } f_1|_V = f_2|_V.$$

Definição 1.3.6. Um germe de uma função C^∞ em p é um elemento do espaço quociente \mathcal{B}_p / \sim . O conjunto dos germes será denotado por $C^\infty(p)$.

Observação 1.3.8. $C^\infty(p)$ é uma \mathbb{C} -álgebra e a aplicação $[f] \mapsto f(p)$ está bem definida e é um homeomorfismo.

Definição 1.3.7. Um vetor tangente à Ω em p é uma aplicação \mathbb{C} -linear $\nu : C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{C}$ satisfazendo

$$\nu([fg]) = f(p)\nu([g]) + g(p)\nu([f]), \quad f, g \in C^\infty.$$

O conjunto dos vetores tangentes, denotado por $\mathbb{C}T_p\Omega$ possui uma estrutura natural de espaço vetorial sobre \mathbb{C} , onde $(u + v)([f]) = u([f]) + v([f])$ e $(\lambda \cdot v)([f]) = \lambda \cdot v([f])$, para cada $u, v \in \mathbb{C}T_p\Omega$, $[f] \in C^\infty(p)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$.

Se $\nu \in \mathbb{C}T_p\Omega$, então denotaremos seu conjugado $[f] \mapsto \overline{\nu([f])}$ por $\bar{\nu}$.

Além disso, definimos

$$T_p\Omega \doteq \{\nu \in \mathbb{C}T_p\Omega; \bar{\nu} = \nu\}.$$

Exemplo 1.3.3. Se $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$, então um exemplo natural de vetor tangente à Ω é dado por

$$L_p([f]) = L(f)(p),$$

para toda $[f] \in C^\infty(p)$.

Quando não houver risco de confusão, denotaremos L_p por $L|_p$.

Teorema 1.3.2. Dado $\nu \in \mathbb{C}T_p\Omega$, existe um campo $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ tal que $L_p = \nu$.

PROVA. Seja (U, x) uma carta local com $p \in U$ e seja $\{\partial_1, \dots, \partial_N\}$ uma base para $\mathfrak{X}(U)$ (veja Teorema 1.3.1).

Defina $L \in \mathfrak{X}(U)$ por

$$L = \sum_{j=1}^N \nu([x_j]) \partial_j,$$

em que x_j 's são as coordenadas da carta local $x = (x_1, \dots, x_N)$. Pelo Teorema 1.3.1 temos

$$L(f) = \sum_{j=1}^N (Lx_j) \partial_j f, \quad \forall f \in C^\infty(U).$$

Assim,

$$L_p([f]) = L(f)(p) = \sum_{j=1}^N (Lx_j)(p) \partial_j f(p) = \sum_{j=1}^N \nu([x_j]) \partial_j f(p), \quad \forall f \in C^\infty(U),$$

em que na última igualdade foi usada a definição de L .

Por outro lado, lembrando da demonstração do Teorema 1.3.1 vimos que dada $f \in C^\infty(U)$ segue que

$$f(q) = f(p) + \sum_{j=1}^N g_j(q) (x_j(q) - x_j(p)), \quad \forall q \in V.$$

em uma vizinhança aberta V de p (menor do que U , caso necessário), em que $g \in C^\infty(V)$ e $g_j(p) = h_j(x_j(p)) = \partial_j f(p)$. Assim,

$$\nu([f]) = \sum_{j=1}^N \nu \cdot \{[g_j (x_j - x_j(p))]\} = \sum_{j=1}^N \nu([x_j]) \partial_j f(p) + \sum_{j=1}^N \nu([g]) \cdot (x_j(p) - x_j(p)) = \sum_{j=1}^N \nu([x_j]) \partial_j f(p).$$

Portanto $L_p = \nu$. ■

Observação 1.3.9. Uma consequência do resultado acima é que $\mathfrak{C}T_p U$ é gerado pelos campos

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_p ; j = 1, \dots, N \right\}.$$

Definição 1.3.8. O fibrado tangente complexificado de Ω é definido como

$$\mathbb{C}T\Omega = \bigcup_{p \in \Omega} \mathbb{C}T_p\Omega.$$

Analogamente, o fibrado tangente de Ω é definido como

$$T\Omega = \bigcup_{p \in \Omega} T_p\Omega.$$

Definição 1.3.9. Considere, para cada $p \in \Omega$, um subespaço vetorial $V_p \subset \mathbb{C}T_p\Omega$ satisfazendo

1. $\dim V_p = n, \forall p \in \Omega$;
2. Dado $p_0 \in \Omega$, existem abertos U_0 contendo p_0 e campos vetoriais L_1, \dots, L_n em $\mathfrak{X}(U_0)$ tais que $\{L_1|_p, \dots, L_n|_p\}$ geram V_p para todo $p \in U_0$.

Sob estas condições, diremos que

$$V = \bigcup_{p \in \Omega} V_p$$

é um subfibrado do tangente complexificado ou, simplesmente, subfibrado tangente.

Diremos ainda que n é a dimensão de V e escreveremos $\dim V = n$. Cada V_p será chamado de uma fibra de V em p .

Exemplo 1.3.4. Considere $\Omega = \mathbb{R}^2$ e, para cada p , a seguinte escolha de fibras unidimensionais

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}, & y \geq 0; \\ \frac{\partial}{\partial y}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Não existe vizinhança da origem satisfazendo a condição 2. Consequentemente esse **não** é um exemplo de subfibrado

Definição 1.3.10. Dado um subfibrado tangente V de $\mathbb{C}T\Omega$, uma seção local é um elemento L de $\mathfrak{X}(W)$, com $W \subset \Omega$ aberto, tal que $L_p \in V_p, \forall p \in W$.

Definição 1.3.11. Um subfibrado tangente é uma estrutura formalmente integrável sobre Ω quando dadas duas seções locais $L, M \in \mathfrak{X}(W)$, tem-se que $[L, M]$ também é uma seção local em W .

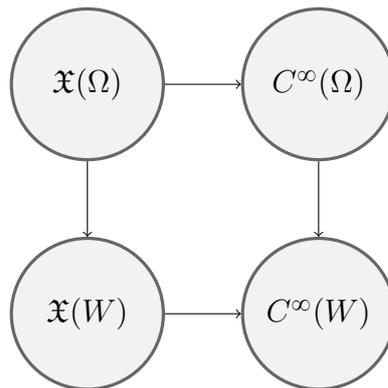
1.4 Formas Diferenciais

Definição 1.4.1. Denotamos por $\mathfrak{X}(\Omega)$ o dual do $C^\infty(\Omega)$ -módulo $\mathfrak{X}(\Omega)$ e diremos que um elemento de $\mathfrak{X}(\Omega)$ é uma forma diferencial de grau 1 ou uma 1-forma ou, simplesmente, uma forma diferencial. Ou seja, uma forma diferencial em Ω é uma aplicação $C^\infty(\Omega)$ -linear $\omega : \mathfrak{X}(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$.

Observação 1.4.1. Note que se $\omega \in \mathfrak{X}(\Omega)$, $L \in \mathfrak{X}$ e L se anula em um subconjunto aberto $U \subset \Omega$, então $\omega(L)$ também se anula em U .

De fato, seja $p \in U$ e defina $g \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ tal que $g \equiv 1$ em uma vizinhança de p e $g \equiv 0$ em $\Omega - U$. Deste modo, $L = (1 - g)L$, pois L se anula em U e g se anula em $\Omega - U$. Sendo assim, temos $\omega(L) = (1 - g)\omega(L)$ que se anula em uma vizinhança de p , pois $g \equiv 1$ em uma vizinhança de p .

Como consequência, dados $\omega \in \mathfrak{X}(\Omega)$ e um aberto $W \subset \Omega$, existe $\omega|_W \in \mathfrak{X}$ que faz com que o diagrama abaixo comute



onde as aplicações verticais denotam os homeomorfismos que restringem as aplicações.

Podemos refinar a observação 1.4.1 do seguinte modo:

Teorema 1.4.1. Sejam $\omega \in \mathfrak{X}(\Omega)$ e $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$. Se $L_p = 0$, então $\omega(L)(p) = 0$.

PROVA. Seja (U, x) uma carta local com $p \in U$ e denote $x = (x_1, \dots, x_N)$. Como $\omega(L)(p) = \omega_U(L_U)(p)$, temos

$$\omega(L)(p) = \sum_{j=1}^N (Lx_j)(p) \omega_U \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) (p) = 0.$$

■

Definição 1.4.2. O dual de $\mathcal{C}T_p\Omega$ será denotado por $\mathcal{C}T_p^*\Omega$.

Para cada $\omega \in \mathfrak{R}(\Omega)$ associamos um elemento $\omega_p \in \mathbb{C}T_p^*\Omega$ por

$$\omega_p(V) = \omega(L)(p),$$

onde $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ é tal que $L_p = \nu$.

Teorema 1.4.2. $\mathbb{C}T_p^*\Omega = \{\omega_p; \omega \in \mathfrak{R}(\Omega)\}$.

PROVA. Defina (U, x) uma carta local com $p \in U$ e defina $dx_j, j \in \{1, \dots, N\}$.

Assim,

$$dx_j \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right) = \delta_{j,k}, \quad j, k \in \{1, \dots, N\}.$$

Para concluir a demonstração basta usar o Teorema 1.3.2. ■

Definição 1.4.3. Dada $f \in C^\infty(\Omega)$, defina $df \in \mathfrak{R}(\Omega)$ por

$$df(L) = L(f).$$

Uma vez que $\{dx_1, \dots, dx_N\}$ é a base local em relação à $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_N}\}$ temos

$$df = \sum_{j=1}^N df \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) dx_j = \sum_{j=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j.$$

Seja $I = \{i_1 < \dots < i_r\} \subset \{1, \dots, N = \dim \Omega\}$. Se L_1, \dots, L_r são campos definidos em U , então, pela representação local:

$$L_j = \sum_{l=1}^N a_{lj} \frac{\partial}{\partial x_l}.$$

Denote por A a matriz $N \times r$ dada pelas funções (a_{lj}) e defina

$$\begin{aligned} dx_I : \mathfrak{X}(U)^r &\rightarrow C^\infty(U) \\ (L_1, \dots, L_r) &\mapsto \det A_I, \end{aligned}$$

onde A_I é a matriz $r \times r$ obtida de A ao se selecionar as linhas cujos índices pertencem ao conjunto I .

Definição 1.4.4. Uma forma diferencial ω de grau $\deg \omega \doteq r$ é uma combinação $C^\infty(U)$ -linear das aplicações dx_I com I nas condições acima.

É comum denotar dx_I por $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}$ e escreveremos \mathcal{A}_r para denotar o conjunto das r -formas diferenciais de grau r . Além disso, convencionamos que as funções definidas em U são formas de grau 0.

Observação 1.4.2. *A álgebra de $C^\infty(U)$ induz uma estrutura de espaço vetorial em \mathcal{A}_r , cuja dimensão é $\binom{r}{N}$.*

Defina $\tilde{\wedge} : \mathfrak{R}(U)^r \rightarrow \mathcal{A}_r$ dada na base por

$$\tilde{\wedge} = \begin{cases} 0, & \text{se } i_p = i_q, \text{ quando } p \neq q \\ \sigma(i_1, \dots, i_r) dx_{I(i_1, \dots, i_r)}, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde $\sigma(i_1, \dots, i_r)$ é o sinal da permutação que leva

$$1 \mapsto i_1, \dots, r \mapsto i_r$$

e $I(i_1, \dots, i_r)$ é uma lista ordenada (i_1, \dots, i_r) .

Deste modo, $\tilde{\wedge}$ é uma extensão da ação \wedge e é chamada de produto exterior.

Assim, convencionamos que

$$\tilde{\wedge}(dx_{i_1}, \dots, dx_{i_r}) = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}.$$

Definição 1.4.5. *Definimos o produto exterior de uma 2-forma por uma 1-forma por*

$$(dx_{i_1} \wedge dx_{i_2}) \wedge dx_{i_3} = dx_{i_1} \wedge (dx_{i_2} \wedge dx_{i_3}) = dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge dx_{i_3}.$$

Definição 1.4.6. *Dados $\xi_1, \dots, \xi_r \in \mathbb{C}T_p^*U$, defina*

$$\begin{aligned} \xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_r &: (\mathbb{C}T_p U)^r \rightarrow \mathbb{C} \\ (\nu_1, \dots, \nu_r) &\mapsto (\omega_1, \dots, \omega_r)(L_1, \dots, L_r)(p), \end{aligned}$$

onde $\omega_j \in \mathfrak{R}(U)$ e $L_j \in \mathfrak{X}(U)$ são tais que $\omega_j|_p = \xi_j$ e $L_j|_p = \nu_j$.

Definição 1.4.7. *Seja $\omega = \sum a_I dx_I$ uma forma diferenciável de grau r em (U, x) . A diferencial exte-*

rior, $d\omega$, é a $r + 1$ -forma

$$d\omega = \sum_{I,j} \frac{\partial a_I}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I.$$

Exemplo 1.4.1. Se $\omega = xydx + yzdy + (xz)dz$, então

$$\begin{aligned} d\omega &= d(xy) \wedge dx + d(yz) \wedge dy + d(xz) \wedge dz \\ &= (ydx + xdy) \wedge dx + (zdy + ydz) \wedge dy + (zdx + xdz) \wedge dz \\ &= -x dx \wedge dy + z dx \wedge dz - y dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Definição 1.4.8. Uma aplicação $f : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ é também dita suave quando, para todo par $(U, x) \in \mathcal{F}$, têm-se que composição $x \circ f$ é C^∞ em $f^{-1}(U)$.

Denotaremos o conjunto destas aplicações por $C^\infty(J, \Omega)$.

No caso de aplicações definidas em \mathbb{R}^N , estendemos o conceito aplicando a definição coordenada a coordenada.

Sejam (U, x) uma carta local de Ω , $V \subset \mathbb{R}$ um aberto, $f \in C(V, U)$ e $I = \{i_1 < \dots < i_r\} \subset \{1, \dots, \Omega\}$.

Assim,

$$x_{i_k} \circ f : V \rightarrow \mathbb{R}$$

é uma aplicação C^∞ .

Portanto, $d(x_{i_k} \circ f)$ é uma 1-forma.

Denotaremos a r -forma $d(x_{i_1} \circ f) \wedge \dots \wedge d(x_{i_r} \circ f)$ por $d(x_I \circ f)$.

Definiremos agora uma ferramenta equivalente à substituição de variáveis do contexto clássico.

Definição 1.4.9. Sejam $V \subset \mathbb{R}^N$ aberto, (U, x) um sistema local de coordenadas e $f \in C^\infty(V, U)$. Se $\omega = \sum_I a_I dx_I$ é uma forma diferenciável, defina seu pullback pela f , denotado por $f^*\omega$, pela fórmula,

$$f^*\omega = \sum_I (a_I \circ f) d(x_I \circ f).$$

Teorema 1.4.3. Sejam $V \subset \mathbb{R}^N$ aberto, (U, x) uma carta local, $f \in C^\infty(V, U)$ e ω_1, ω_2 formas em U . Nestas condições, valem

1. $f^*(\omega_1 + \omega_2) = f^*(\omega_1) + f^*(\omega_2)$;

2. $d(\omega_1 + \omega_2) = d(\omega_1) + d(\omega_2)$;
3. $f^*(c\omega_1) = cf^*(\omega_1)$;
4. $d(c\omega_1) = cd(\omega_1)$;
5. $f^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = f^*(\omega_1) \wedge f^*(\omega_2)$;
6. $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d(\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^{\deg \omega_1} \omega_1 \wedge d\omega_2$.

PROVA. As provas são elementares e podem ser consultadas em [12], páginas 8, 10 e 11. ■

Definição 1.4.10. O fibrado cotangente complexificado de Ω é definido como

$$\mathbb{C}T^*\Omega = \bigcup_{p \in \Omega} \mathbb{C}T_p^*\Omega.$$

Analogamente, o fibrado tangente de Ω é

$$T^*\Omega = \bigcup_{p \in \Omega} T_p^*\Omega.$$

Definição 1.4.11. Para cada $p \in \Omega$, considere um subespaço vetorial $W_p \in \mathbb{C}T_p^*\Omega$ que satisfaz

1. $\dim W_p = m, \forall p \in \Omega$;
2. Dado $p_0 \in \Omega$, existe W_0 aberto com $p \in W_0$ e existem formas diferenciais $\omega_1, \dots, \omega_m \in \mathfrak{A}(U_0)$ tais que $\{\omega_1|_p, \dots, \omega_m|_p\}$ geram W_p para todo p .

Nestas condições, dizemos que

$$W = \bigcup_{p \in \Omega} W_p$$

é um subfibrado cotangente complexificado.

m é dito a dimensão de W e escrevemos $\dim W = m$.

W_p é dito uma fibra de W .

Teorema 1.4.4. Seja $V = \bigcup_{p \in \Omega} V_p$ um subfibrado tangente de $\mathbb{C}T_p\Omega$ e construa, para cada $p \in \Omega$, o conjunto

$$V_p^\perp = \{\lambda \in \mathbb{C}T_p^*\Omega; \lambda = 0 \text{ em } V_p\}.$$

Então,

$$V^\perp \doteq \bigcup_{p \in \Omega} V_p^\perp$$

é um subfibrado cotangente e ainda

$$\dim V + \dim V^\perp = \dim \Omega.$$

A construção realizada no teorema pode ser feita no sentido inverso, de modo que dado um subfibrado cotangente W , é possível encontrar um subfibrado tangente V tal que $V^\perp = W$.

Definição 1.4.12. *Um subfibrado tangente V de $\mathbb{C}T\Omega$ é uma estrutura localmente integrável se, para todo $p_0 \in \Omega$, existe uma vizinhança U_0 de p_0 e funções $Z_1, \dots, Z_m \in C^\infty(U_0)$, onde $\dim V + m = N$, tais que V_p^\perp é gerado pelos diferenciais $dZ_1|_p, \dots, dZ_m|_p$, $\forall p \in U_0$. O conjunto $\{Z_j\}$ é chamado de conjunto completo de integrais primeiras.*

A seguir apresentamos uma definição equivalente que nos será importante:

Definição 1.4.13. *Um subfibrado tangente V é uma estrutura localmente integrável se, para todo $p_0 \in \Omega$ e campos L_1, \dots, L_n que geram V em uma vizinhança U_0 de p_0 , existem uma vizinhança $V_0 \subset U_0$ de p_0 e funções suaves $Z_1, \dots, Z_m \in C^\infty(V_0)$ tais que*

1. $dZ_1 \wedge \dots \wedge dZ_m \neq 0$ em V_0 ;
2. $L_j Z_k = 0$, $j = 1, \dots, n$ e $k = 1, \dots, m$.

Em outras palavras, um subfibrado é uma estrutura localmente integrável quando é possível encontrar um conjunto maximal de soluções não-triviais e independentes que satisfaçam o sistema de equações homogêneas determinadas pelas seções de V .

Definição 1.4.14. *Seja $V \subset \mathbb{C}T\Omega$ uma estrutura formalmente integrável sobre Ω . O conjunto característico de V é o subconjunto de $T^*\Omega$ definido por*

$$V^0 \doteq V^\perp \cap T^*\Omega.$$

Também escreveremos $V_p^0 = V_p^\perp \cap T_p^*\Omega$.

A Fórmula de aproximação de Baouendi-Treves

2.1 Uma mudança de coordenadas

Nesta seção, estabelecemos uma mudança de coordenadas que é crucial para a demonstração da Fórmula de aproximação de Baouendi-Treves. Começamos pelo lema a seguir.

Lema 2.1.1. *Sejam V um subespaço complexo de \mathbb{C}^N de dimensão m , $V_0 \doteq V \cap \mathbb{R}^N$ e $V_1 \subset \mathbb{C}^N$ um subespaço complexo tal que $(V_0 \oplus iV_0) \oplus V_1 = V$. Denote $d \doteq \dim_{\mathbb{R}} V_0$ e $\nu \doteq m - d$. Considere $\{\zeta_1, \dots, \zeta_\nu\}$ uma base para V_1 e $\{\xi_{\nu+1}, \dots, \xi_m\}$ uma base real para V_0 . Se escrevermos $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$, $j \in \{1, \dots, \nu\}$, então*

1. $\{\zeta_1, \dots, \zeta_\nu, \xi_{\nu+1}, \dots, \xi_m\}$ é base de V ;
2. $\{\xi_1, \dots, \xi_m, \eta_1, \dots, \eta_\nu\}$ é L.I. sobre \mathbb{R} ;
3. $\nu + m \leq N$.

PROVA. Observe que se $z \in V_0 \oplus iV_0$, então $z = x + iy$, com $x, y \in V_0$. Portanto, uma vez que $\{\xi_{\nu+1}, \dots, \xi_m\}$ é base real de V_0 , existem constantes reais α_j, β_j , $j \in \{\nu + 1, \dots, m\}$, tais que $x = \sum_{j=\nu+1}^m \alpha_j \xi_j$ e $y = \sum_{j=\nu+1}^m \beta_j \xi_j$. Portanto, $z = \sum_{j=\nu+1}^m (\alpha_j + i\beta) \xi_j$, o que mostra que todo elemento de $V_0 \oplus iV_0$ pode ser escrito como combinação linear (com escalares complexos) do conjunto $\{\xi_{\nu+1}, \dots, \xi_m\}$.

Agora, suponha que $\sum_{j=\nu+1}^m (\alpha_j + i\beta) \xi_j = 0$, neste caso, a parte real e a parte imaginária devem ser nulas, ou seja, $\sum_{j=\nu+1}^m \alpha_j \xi_j = 0$ e $\sum_{j=\nu+1}^m \beta_j \xi_j = 0$. Deste modo, como $\{\xi_{\nu+1}, \dots, \xi_m\}$ é base real de V_0 , devemos ter $\alpha_j = \beta_j = 0$, para cada $j \in \{\nu + 1, \dots, m\}$.

Assim, provamos que $\{\xi_{\nu+1}, \dots, \xi_m\}$ também é base complexa de $V_0 \oplus iV_0$. Como $(V_0 \oplus iV_0) \oplus V_1 = V$, uma consequência imediata de $\{\zeta_1, \dots, \zeta_\nu\}$ ser base para V_1 e $\{\xi_{\nu+1}, \dots, \xi_m\}$ ser base de $V_0 + iV_0$ é que o conjunto $\{\zeta_1, \dots, \zeta_\nu, \xi_{\nu+1}, \dots, \xi_m\}$ é base de V , assim como queríamos demonstrar em 1.

Para mostrar 2, primeiro vamos mostrar que $V \cap \overline{V}_1 = \{0\}$.

Seja $z \in V \cap \overline{V}_1$. Em particular, lembrando que $\overline{V}_1 = \{\overline{v} : v \in V_1\}$, temos $\overline{z} \in V_1 \subset V$. Assim, $z + \overline{z} \in V \cap \mathbb{R}^N = V_0$ e $i(z - \overline{z}) \in V \cap \mathbb{R}^N = V_0$. Concluindo que $\overline{z} = \frac{z + \overline{z}}{2} - i \frac{(-i)(z - \overline{z})}{2} \in V_0 + iV_0$. Isto é $\overline{z} \in (V_0 + iV_0) \cap V_1 = \{0\}$.

Agora estamos prontos para mostrar que $\{\zeta_1, \dots, \zeta_\nu, \dots, \overline{\zeta}_1, \dots, \overline{\zeta}_\nu, \xi_{\nu+1}, \dots, \xi_m\}$ é \mathbb{R} -L.I. Note que se

$$\alpha_1, \dots, \alpha_\nu, \beta_1, \dots, \beta_\nu, \gamma_{\nu+1}, \dots, \gamma_m \in \mathbb{R}$$

são tais que

$$\sum_{j=1}^{\nu} \alpha_j \zeta_j + \sum_{j=1}^{\nu} \beta_j \overline{\zeta}_j + \sum_{j=\nu+1}^m \gamma_j \xi_j = 0$$

então

$$\sum_{j=1}^{\nu} \alpha_j \zeta_j + \sum_{j=\nu+1}^m \gamma_j \xi_j = \overline{\sum_{j=1}^{\nu} (-\beta_j) \zeta_j} \in V \cap \overline{V}_1 = \{0\}.$$

Logo, $\sum_{j=1}^{\nu} \alpha_j \zeta_j + \sum_{j=\nu+1}^m \gamma_j \xi_j = 0 = \sum_{j=1}^{\nu} (-\beta_j) \zeta_j$. Como $\{\zeta_1, \dots, \zeta_\nu, \xi_{\nu+1}, \dots, \xi_m\}$ é L.I. segue que $\alpha_j = \beta_j = \gamma = 0, \forall j \in \{1, \dots, \nu\}$.

Agora conseguiremos mostrar que que $\{\xi_1, \dots, \xi_\nu, \eta_1, \dots, \eta_\nu, \xi_{\nu+1}, \dots, \xi_m\}$ é \mathbb{R} -li. De fato, se

$$\alpha_1, \dots, \alpha_\nu, \beta_1, \dots, \beta_\nu, \gamma_{\nu+1}, \dots, \gamma_m \in \mathbb{R}$$

são tais que

$$\sum_{j=1}^{\nu} \alpha_j \xi_j + \sum_{j=1}^{\nu} \beta_j \eta_j + \sum_{j=\nu+1}^m \gamma_j \xi_j = 0$$

então, observando que $\xi_j = \frac{\zeta + \overline{\zeta}_j}{2}$ e $\eta_j = \frac{i(\overline{\zeta} - \zeta)}{2}$, para todo $j \in \{1, \dots, \nu\}$, temos

$$\sum_{j=1}^{\nu} \frac{\alpha_j - i\beta_j}{2} \zeta_j + \sum_{j=1}^{\nu} \frac{\alpha_j + i\beta_j}{2} \overline{\zeta}_j + \sum_{j=\nu+1}^m \gamma_j \xi_j = 0.$$

Como $\{\zeta_1, \dots, \zeta_\nu, \dots, \overline{\zeta}_1, \dots, \overline{\zeta}_\nu, \xi_{\nu+1}, \dots, \xi_m\}$ é \mathbb{R} -li concluímos que $\alpha_j = \beta_j = \gamma_k = 0, \forall j \in \{1, \dots, \nu\}$ e $\forall k \in \{\nu + 1, \dots, m\}$

O terceiro item é consequência direta de $\{\xi_1, \dots, \xi_m, \eta_1, \dots, \eta_\nu\} \subset \mathbb{R}^N$ ser L.I. sobre \mathbb{R} . ■

Estamos interessados em uma versão mais simples do teorema a seguir, mas consideramos que a demonstração deste caso mais geral é interessante e, por esse motivo, optamos por não omiti-la.

Teorema 2.1.1. *Seja \mathcal{L} uma estrutura localmente integrável definida sobre Ω . Sejam $p \in \Omega$ e d a dimensão real de $\mathcal{L}^\perp \cap T_p^*\Omega$. Existe um sistema de coordenadas locais*

$$\{x_1, \dots, x_v, y_1, \dots, y_v, s_1, \dots, s_d, t_1, \dots, t_{n'}\}$$

que se anula em p e aplicações suaves ϕ_1, \dots, ϕ_d definidas em uma vizinhança da origem que satisfazem

$$\phi_k(0) = 0, \quad d\phi_k(0) = 0, \quad k = 1, \dots, d,$$

tais que os diferenciais das aplicações

$$Z_j(x, t) \doteq x_j + iy_j, \quad j = 1, \dots, v$$

e

$$W_k(x, y, s, t) = s_k + i\phi_k(z, s, t), \quad k = 1, \dots, d$$

geram \mathcal{L}^\perp em uma vizinhança da origem. Em particular, $v + d = m$, $v + n' = n$ e

$$\mathcal{L}_p^\perp \cap T_p^*\Omega = \text{span}\{ds_1|_0, \dots, ds_d|_0\}.$$

PROVA. Sejam $p \in \Omega$ e G_1, \dots, G_m funções suaves definidas em uma vizinhança de p tal que dG_1, \dots, dG_m gerem \mathcal{L}^\perp .

Faça $V = \mathcal{L}_p^\perp$ no Lema 2.1.1 e assumamos $V_0 = \mathcal{L}_p^\perp \cap T_p^*\Omega$. Assim, se $\{\zeta_1, \dots, \zeta_v, \xi_{v+1}, \dots, \xi_m\}$ é a base fornecida pelo lema, então existem $(c_{j,k})$, $j \in \{1, \dots, v + m\}$, $k \in \{1, \dots, m\}$ tais que

$$\sum_{k=1}^m c_{j,k} dG_k(p) = \begin{cases} \zeta_j, & \text{se } j = 1, \dots, v \\ \xi_j, & \text{se } j = v + 1, \dots, m. \end{cases}$$

Defina

$$Z_j \doteq \sum_{k=1}^m c_{j,k} [G_k - G_k(p)], \quad j = 1, \dots, v$$

e

$$W_j \doteq \sum_{k=1}^m c_{v+l,k} [G_k - G_k(p)], \quad l = 1, \dots, d.$$

Portanto, $dZ_1, \dots, dZ_v, dW_1, \dots, dW_d$ também geram \mathcal{L}^\perp em uma vizinhança de p .

Se $x_j = \mathcal{R}e(Z_j)$, $y_j = \mathcal{I}m(Z_j)$ e $s_l = \mathcal{R}e(W_l)$, então a segunda conclusão do Lema 2.1.1 nos garante que $dx_1, \dots, dx_v, dy_1, \dots, dy_v, ds_1, \dots, ds_d$ são L.I. em p .

Como $dW_k(p) = \xi_{v+k}$ é real, $d\phi_k = 0$ na origem, como queríamos demonstrar. ■

Como consequência, temos o seguinte corolário.

COROLÁRIO 2.1.1. *Seja \mathcal{L} uma estrutura localmente integrável definida em um aberto $\Omega \subset \mathcal{R}^N$. Existe um sistema local de coordenadas anulando-se em p ,*

$$\{x_1, \dots, x_m, t_1, \dots, t_n\}$$

e aplicações reais, suaves ϕ_1, \dots, ϕ_m definidas em uma vizinhança da origem e satisfazendo $\phi_k(0, 0) = 0$ e $d_x \phi_k(0, 0) = 0$, $k \in \{1, \dots, m\}$, tais que os diferenciais das funções

$$Z_k(x, t) = x_k + i\phi_k(x, t), \quad k \in \{1, \dots, m\}$$

geram \mathcal{L}^\perp em uma vizinhança da origem.

2.2 Caso uniforme

Neste seção, estabelecemos uma versão da Fórmula de aproximação de Baouendi-Treves para soluções homogêneas de uma estrutura localmente integrável, conforme definição a seguir.

Definição 2.2.1. *Dada uma distribuição u em Ω (veja o apêndice B para a definição de distribuições definidas em variedades), dizemos que u é uma solução homogênea de \mathcal{L} (e escrevemos $\mathcal{L}u = 0$) quando $Lu = 0$ em U , para toda seção local L de \mathcal{L} definida em um subconjunto aberto $U \subset \Omega$.*

O seguinte lema será utilizado nas demonstrações do caso uniforme e do caso holomorfo:

Lema 2.2.1. *Seja B é uma matriz $m \times m$ com coeficientes reais e norma menor que 1. Se $A = I + iB$, então*

$$\det A \int_{\mathbb{R}^m} e^{-[Ax]^2} dx = \pi^{\frac{m}{2}}.$$

PROVA. De fato, reescreva

$$[Ax]^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \langle A^t Ax, x \rangle.$$

Deste modo, se denotarmos $C = A^t A$, então teremos $e^{-[Ax]^2} = e^{-\langle Cx, x \rangle}$. Além disso,

$$Re(C) = Re(A^t A) = Re(I + iB^t)(I + iB) = I - B^t B.$$

Portanto, tomando o ramo positivo da raiz (veja [20], página 85), temos

$$\int_{\mathbb{R}^m} e^{-\langle Cx, x \rangle} dx = \pi^{\frac{m}{2}} (\det C)^{-\frac{1}{2}} = \pi^{\frac{m}{2}} (\det A)^{-1}.$$

■

O teorema a seguir é uma versão simplificada do Teorema II.1.1 presente em [8], mas que ainda é suficiente para nosso propósito que é apresentar uma demonstração do teorema tubular de Bochner (veja [2.4.1]).

Teorema 2.2.1. (Formula de aproximação de Baouendi-Treves) *Seja \mathcal{L} uma estrutura localmente integrável sobre Ω e assumamos que dZ_1, \dots, dZ_m geram \mathcal{L}^\perp em todos os pontos de Ω . Então, para qualquer ponto $p \in \Omega$, existem abertos U e W tais que $p \in U \subset \bar{U} \subset W \subset \Omega$ e para toda solução homogênea $u \in C^\infty(W)$ de \mathcal{L} , existe uma sequência de funções suaves $(u_n)_n$ em $C^\infty(U)$ tal que $u_n \rightarrow u$ uniformemente em U .*

PROVA. A demonstração da fórmula é extensa e será realizada por partes. Primeiro, dado $p \in \Omega$, aplicaremos a mudança de coordenadas estabelecida pelo Corolário 2.1.1, ou seja, existem um sistema local de coordenadas

$$\{x_1, \dots, x_m, t_1, \dots, t_n\}$$

que se anula em p e aplicações reais, suaves ϕ_1, \dots, ϕ_m definidas em uma vizinhança da origem e satisfazendo $\phi_k(0, 0) = 0$ e $d_x \phi_k(0, 0) = 0$, $k \in \{1, \dots, m\}$, tais que os diferenciais das funções

$$Z_k(x, t) = x_k + i\phi_k(x, t), \quad k \in \{1, \dots, m\}$$

geram \mathcal{L}^\perp em uma vizinhança da origem. Para que o conjunto $\{Re(dZ_1), \dots, Re(dZ_m)\}$ seja L.I., observe que podemos trocar Z_j por iZ_j , para certos índices $j \in \{1, \dots, m\}$, se necessário.

Agora, seja $R > 0$ tal que a conclusão do Corolário 2.1.1 é válida para \bar{V} , onde

$$V = \{q; |x(q)| < R, |t(q)| < R\}.$$

Além disso, pela suavidade das aplicações $\frac{\partial \phi_j}{\partial x_k}$, podemos assumir que

$$\left\| \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x_k} \right) \right\| < \frac{1}{2}, \quad \forall (x, t) \in \bar{V}, \quad (2.1)$$

onde $\| \cdot \|$ é a norma da matriz $\phi_x(x, t) = \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x_k}(x, t) \right)$ vista como operador linear em \mathbb{R}^m .

Multiplicando as funções ϕ_j por funções corte convenientes, é possível estender nossa hipótese para funções definidas em \mathbb{R}^N . A partir desta modificação das aplicações ϕ_j , podemos assumir que as aplicações Z_j estão definidas em \mathbb{R}^N . Assim, $\{dZ_j\}_j$ definem um novo fibrado cotangente em \mathbb{R}^N e, por fim, um novo subfibrado tangente global.

Seja Z_x a matriz $\left(\frac{\partial Z_j}{\partial x_k} \right)_{j,k}$. Deste modo, $Z_x(0, 0)$ é exatamente a matriz identidade $m \times m$. Pela continuidade do determinante, conclui-se que Z_x é invertível em uma vizinhança da origem. Deste modo, denote as entradas da matriz inversa de Z_x por $\mu_{k,l}$ e defina os seguintes campos

$$M_k \doteq \sum_{j=1}^m \mu_{k,l}(x, t) \frac{\partial}{\partial x_l}, \quad k = 1, \dots, m.$$

Assim, por construção:

$$M_k Z_j = \delta_{k,j}, \quad k, j \in \{1, \dots, m\}$$

Ademais,

$$L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} - i \sum_{k=1}^m \frac{\partial \phi_k}{\partial t_j}(x, t) M_k, \quad j \in \{1, \dots, n\}$$

são L.I. e satisfazem $L_j Z_k = 0$ (veremos no próximo capítulo que essa é uma estrutura recorrente no nosso estudo). Desta forma, os campos L_1, \dots, L_n geram \mathcal{L} em todo ponto enquanto os N vetores

$$L_1, \dots, L_n, M_1, \dots, M_m$$

comutam dois a dois e geram $\mathbb{C}T_p \mathbb{R}^N$, $p \in \mathbb{R}^n$.

Uma vez que $dZ_1, \dots, dZ_n, dt_1, \dots, dt_m$ geram o subfibrado cotangente $\mathbb{C}T^* \mathbb{R}^N$, dada uma função $\omega(x, t)$, C^1 , temos

$$d\omega = \sum_{j=1}^n L_j \omega dt_j + \sum_{k=1}^m M_k \omega dZ_k,$$

isto decorre do fato que $L_j Z_k = 0$ e $M_k t_j = 0$ para $1 \leq j \leq n$ e $1 \leq k \leq m$, enquanto $L_j t_k = \delta_{jk}$ para

$1 \leq j, k \leq n$ e $M_k Z_j = \delta_{jk}$ para $1 \leq j, k \leq m$.

Para continuar a demonstração, algumas considerações devem ser realizadas:

1. Para $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_m) \in \mathbb{C}^m$, defina $[\zeta]^2 \doteq \zeta_1^2 + \dots + \zeta_m^2$.
2. Se $A = (a_i)$ e $B = (b_i)$ são elementos de \mathbb{R}^m , então $[A + iB]^2 = |A|^2 + 2i\langle A, B \rangle - |B|^2$. Logo, para $\tau > 0$, temos

$$\left| e^{-\tau[A+iB]^2} \right| = \left| e^{-\tau(|A|^2 + 2i\langle A, B \rangle - |B|^2)} \right| = e^{\tau(|B|^2 - |A|^2)}.$$

3. Defina uma função teste h_R tal que

$$h_R(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq R, \\ 1, & \text{em uma vizinhança de } |x| \leq \frac{R}{2}, \\ 0 \leq h_R(x) \leq 1, & \text{em todo domínio.} \end{cases}$$

Deste modo, se u está definida em \bar{V} , uh_R está definida em todo \mathbb{R}^m . Além disso, uh_R possui a mesma regularidade que u e possui suporte compacto. Por simplicidade, vamos escrever somente h no lugar de h_R .

4. Defina a seguinte família de funções $\{E_\tau u\}_{\tau \in (0, \infty)}$ da seguinte forma:

$$E_\tau u(x, t) \doteq \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\tau[Z(x,t) - Z(x',0)]^2} u(x', 0) h(x') \det Z_x(x', 0) dx'.$$

5. Como a exponencial no integrando de $E_\tau u(x, t)$ é uma função inteira de (Z_1, \dots, Z_m) , pela regra da cadeia, para cada j ,

$$L_j \left(e^{-\tau[Z(x,t) - Z(x',0)]^2} \right) = \frac{\partial}{\partial t_j} \left(e^{-\tau[Z(x,t) - Z(x',0)]^2} \right) - i \sum_{k=1}^m \frac{\partial \varphi_k}{\partial t_j}(x, t) M_k \left(e^{-\tau[Z(x,t) - Z(x',0)]^2} \right) = 0.$$

Deste modo, pela derivação sob o sinal de integração, $E_\tau u(x, t)$ também satisfaz

$$L_j E_\tau u(x, t) = 0, \quad j \in \{1, \dots, n\}.$$

Assim, o próximo passo da demonstração consiste em mostrar que $E_\tau \rightarrow u$ uniformemente quando $\tau \rightarrow \infty$.

Para isso, considere a seguinte modificação do operador E_τ :

$$G_\tau u(x, t) \doteq \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t)]^2} u(x', t) h(x') \det Z_x(x', t) dx'.$$

Note que no caso em que as funções φ_k são identicamente nulas, temos $Z_x(x, t) = x$ e $\det Z_x = 1$. Neste caso, $G_\tau u(x, t) = \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\tau[x-x']^2} u(x', t) h(x') dx'$ que é uma convolução da gaussiana com $u(x, t)h(x)$, i.e, G_τ é uma aproximação da identidade, assim $G_\tau \rightarrow u$ uniformemente quando $\tau \rightarrow +\infty$.

No caso geral, as funções φ_k podem não se anular, mas, por continuidade, serão relativamente pequenas em torno da origem. Assim, podemos mostrar que G_τ ainda é uma aproximação da identidade. Vamos mostrar isso.

Defina $\nu(x, t) \doteq h(x)u(x, t)\det Z_x(x, t)$. Para (x, t) fixo, a matriz $Z_x(x, t)$ satisfaz a estimativa (2.1). Portanto, pelo Lema 2.2.1, podemos escrever

$$\begin{aligned} h(x)u(x, t) &= \pi^{-\frac{m}{2}} h(x)u(x, t)\det Z_x(x, t) \int_{\mathbb{R}^m} e^{-[Z_x(x,t)\cdot x']^2} dx' \\ &= \pi^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-[Z_x(x,t)\cdot x']^2} h(x)u(x, t)\det Z_x(x, t) dx' \\ &= \pi^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-[Z_x(x,t)\cdot x']^2} \nu(x, t) dx'. \end{aligned}$$

e, ao aplicar a mudança de variáveis $x' \mapsto x + \tau^{-\frac{1}{2}}x'$ na definição de $G_\tau u(x, t)$, obtemos

$$G_\tau u(x, t) = \pi^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x+\tau^{-1/2}x',t)]^2} \nu(x + \tau^{-1/2}x', t) dx'.$$

Deste modo,

$$[G_\tau u - h(x)u](x, t) = \pi^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x+\tau^{-1/2}x',t)]^2} \nu(x + \tau^{-1/2}x', t) - e^{-[Z_x(x,t)\cdot x']^2} \nu(x, t) dx'$$

e, ao somar e subtrair $e^{-[Z_x(x,t)\cdot x']^2} \nu(x + \tau^{-1/2}x', t)$ no integrando, a integral no lado direito se torna

$$\begin{aligned} [G_\tau u - h(x)u](x, t) &= \pi^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x+\tau^{-1/2}x',t)]^2} \nu(x + \tau^{-1/2}x', t) + \\ &\quad - e^{-[Z_x(x,t)\cdot x']^2} \nu(x + \tau^{-1/2}x', t) + e^{-[Z_x(x,t)\cdot x']^2} \nu(x + \tau^{-1/2}x', t) + \\ &\quad - e^{-[Z_x(x,t)\cdot x']^2} \nu(x, t) dx', \end{aligned}$$

Para simplificar, defina

$$I_\tau = \pi^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-[Z_x(x,t) \cdot x']^2} [\nu(x + \tau^{-1/2}x', t) - \nu(x, t)] dx'$$

e

$$J_\tau = \pi^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} [e^{-\tau[Z(x,t) - Z(x + \tau^{-1/2}x', t)]^2} - e^{-[Z_x(x,t) \cdot x']^2}] \nu(x + \tau^{-1/2}x', t) dx'.$$

Observe que, $G_\tau u(x, t) - h(x)u(x, t) = I_\tau + J_\tau$.

Para completar a demonstração de que $G_\tau \rightarrow u$, quando $\tau \rightarrow \infty$, nós mostraremos que $I_\tau \rightarrow 0$ e $J_\tau \rightarrow 0$, uniformemente, quando $\tau \rightarrow 0$.

Para mostrar que $I_\tau \rightarrow 0$, observe que, pela estimativa (2.1),

$$\begin{aligned} |e^{-[Z_x(x,t) \cdot x']^2}| &= |e^{-[(I + i\varphi_x(x,t)) \cdot x']^2}| = e^{-|x'|^2 + |\varphi_x(x,t) \cdot x'|^2} \\ &\leq e^{-|x'|^2 + \frac{1}{4}|x'|^2} = e^{-\frac{3}{4}|x'|^2}. \end{aligned}$$

E como $|\nabla_x \nu(x, t)|$ é limitada em $\mathbb{R}^m \times \{|t| \leq R\}$ (uma vez que h tem suporte compacto, ν se anula para $|x|$ suficientemente grande), o teorema do valor médio nos dá

$$|I_\tau(x, t)| \leq C\tau^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-3|x'|/4} |x'| dx' \leq C'\tau^{-\frac{1}{2}}.$$

Portanto, $I_\tau \rightarrow 0$ quando $\tau \rightarrow \infty$.

Agora vamos estimar J_τ . Note que

$$Z(x, t) - Z(x + \tau^{-1/2}x', t) = x + i\varphi(x) - x - \tau^{-\frac{1}{2}}x' - i\varphi(x + \tau^{-\frac{1}{2}}x') = -\tau^{-\frac{1}{2}}x' + i(\varphi(x) - \varphi(x + \tau^{-\frac{1}{2}}x')).$$

Se fizermos $A = |-\tau[Z(x, t) - Z(x + \tau^{-\frac{1}{2}}x', t)]^2 + [Z_x(x, t)x']^2|$, então

$$A = \tau \left| -[Z(x, t) - Z(x + \tau^{-\frac{1}{2}}x', t)]^2 + \left[\frac{Z_x(x, t)x'}{\tau^{\frac{1}{2}}} \right]^2 \right|$$

daí,

$$A = \tau \left| Z(x, t) - Z(x + \tau^{-\frac{1}{2}}x', t) + \frac{Z_x(x, t)x'}{\tau^{\frac{1}{2}}} \right| \cdot \left| Z(x, t) - Z(x + \tau^{-\frac{1}{2}}x', t) - \frac{Z_x(x, t)x'}{\tau^{\frac{1}{2}}} \right|.$$

Assim,

$$A \leq \tau^{\frac{1}{2}} \left| \frac{Z(x, t) - Z(x + \tau^{-\frac{1}{2}}x', t)}{\tau^{-\frac{1}{2}}} - Z_x(x, t)x' \right| \cdot \left| Z(x, t) - Z(x + \tau^{-\frac{1}{2}}x', t) - Z_x(x, t)(\tau^{\frac{1}{2}}x') \right|.$$

Além disso,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} -\frac{Z(x + \tau^{-\frac{1}{2}}x', t) - Z(x, t)}{\tau^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} -\frac{Z(x + \rho x', t) - Z(x, t)}{\rho} = -Z_x(x, t)x'.$$

Portanto, usando a formula de Taylor, existem contantes $\delta > 0$ e $C_{(x,x')} > 0$ tais que

$$A < \tau^{\frac{1}{2}} \delta C_{(x,x')} \|\tau^{-\frac{1}{2}}x'\|^2 = \tau^{\frac{1}{2}-1} \delta C_{(x,x')} \|x'\|^2 = \tau^{-\frac{1}{2}} \tilde{C}_{(K)},$$

onde $C_{(x,x')}$ é uma contante que depende de x e de x' e K é um compacto fixo de diâmetro suficientemente grande.

Deste modo, concluímos que $J_\tau \rightarrow 0$ uniformemente quando $\tau \rightarrow \infty$. Isto encerra a demonstração de que $G_\tau u \rightarrow u$ uniformemente quando $\tau \rightarrow \infty$.

O próximo passo da demonstração é mostrar que o operado resto, R_τ , definido por

$$R_\tau u(x, y) = G_\tau u(x, y) - E_\tau u(x, y), \quad (2.2)$$

converge a 0 uniformemente quando $\tau \rightarrow \infty$. Neste ponto, a hipótese de que u é solução homogênea de \mathcal{L} é essencial para podermos utilizar o Teorema de Stokes e conseguirmos uma expressão mais simples do operador resto.

Pelo Teorema de Stokes, temos

$$R_\tau u(x, t) = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{[-R, R]^m} \omega(x', 0) - \int_{[-R, R]^m} \omega(x', t) \right] = \int_{\partial[-R, R]^m \times [0, t]} \omega(x', t') = \int_{\mathbb{R}^m \times [0, t]} d\omega(x', t'),$$

com

$$d\omega = \sum_{j=1}^n L_j \omega dt_j + \sum_{k=1}^m M_k \omega dZ_k = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\pi}{\tau} \right)^{\frac{m}{2}} e^{-\tau[Z(x,t) - Z(x',t')]^2} u(x', t') L_j h dt_j \wedge dZ(x', t').$$

Portanto,

$$|R_\tau u(x, t)| \leq \sum_{j=1}^n \int \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^{\frac{m}{2}} \left| e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t')]^2} \right| |L_j h| |dt_j \wedge dZ(x', t')|.$$

Observe que

$$\operatorname{Re}\{-\tau[Z(x, t)-Z(x', t')]^2\} = \operatorname{Re}\{-\tau[x+i\varphi(x, t)-x'-i\varphi(x', t')]^2\} = -\tau\{(x-x')^2 - [\varphi(x, t)-\varphi(x', t')]^2\}.$$

Como,

$$|\varphi(x, t) - \varphi(x', t')| \leq |\varphi(x, t) - \varphi(x', t)| + |\varphi(x', t) - \varphi(x', t')| \leq \frac{1}{2}|x - x'| + C|t - t'|.$$

Suponha que $|t| < T$. Temos $|t - t'| < T$ e

$$|\varphi(x, t) - \varphi(x', t')|^2 \leq \frac{1}{2}|x - x'|^2 + CT|x - x'| + C^2 \leq \frac{1}{2}|x - x'|^2 + 2C^2T^2.$$

Portanto,

$$\left| e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t')]^2} \right| = e^{-\tau(|x-x'|^2 - \frac{1}{2}|x-x'|^2 - 2(CT)^2)} = e^{\tau(2(CT)^2 - \frac{1}{2}|x-x'|^2)}.$$

Como $h \in C_c^\infty(B(0, R))$ e $h \equiv 1$ quando $|x'| \leq \frac{R}{2}$, é suficiente estudar $\frac{R}{2} \leq |x'| \leq R$.

Esta condição nos fornece $|x - x'| \geq |x| - |x'| \geq \frac{R}{2} - \frac{R}{4} = \frac{R}{4}$. Assim,

$$e^{\tau(2(CT)^2 - \frac{1}{2}|x-x'|^2)} \leq e^{\tau(2(CT)^2 - \frac{R^2}{32})}.$$

Escolha T de forma que $2(CT)^2 < \frac{R^2}{32}$, ou seja, $T < \frac{R}{8C}$. Portanto, existe $a > 0$ tal que

$$|R_\tau u(x, t)| \leq \tau^{-\frac{m}{2}} \cdot C e^{-a\tau} = C \left(\frac{e^{-\frac{2}{m}a\tau}}{\tau} \right)^{\frac{m}{2}}.$$

Assim, $R_\tau \rightarrow 0$ quando $\tau \rightarrow \infty$. Assim como queríamos demonstrar. ■

2.3 Caso holomorfo

Nesta seção apresentaremos a formula de aproximação de Baouendi-Treves global no caso especial em que o subfibrado tangente é formado pelos operadores de Cauchy-Riemann e o aberto é do tipo tubo.

Teorema 2.3.1. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto aberto e conexo e f uma função holomorfa definida no tubo $\Omega = T(U) = U + i\mathbb{R}^m$. Então existe uma seqüência de funções inteiras (holomorfas em \mathbb{C}^m) f_j , $j \in \mathbb{N}$, que converge para f uniformemente sobre subconjuntos compactos de Ω .*

PROVA. Assuma, sem perda de generalidade, que $0 \in U$ e que $f(z) = f(x + iy)$ é uma função holomorfa definida em Ω .

Para $r > 0$ que escolheremos mais adiante de acordo com o subconjunto compacto que tomaremos em Ω , defina $h_r \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ tal que $h_r(y) = 0$, se $|y| \geq 2r$ e $h_r(y) = 1$ quando $|y| \leq r$.

Assim, dados $r, \tau > 0$, considere o seguinte operador de aproximação

$$E_{r,\tau}f(z) = \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{\tau[z-i\eta]^2} f(0 + i\eta)h_r(\eta)d\eta, \quad z \in \mathbb{C}^m. \quad (2.3)$$

Decorre da suavidade dos integrandos e do suporte compacto de h_r que os operadores definidos pela equação (2.3) definem funções inteiras para cada r e τ fixados.

Deste modo, uma candidata natural para a seqüência que procuramos pode ser obtida tomando seqüências $(r_j)_j$ e $(\tau_j)_j$ tais que $r_j, \tau_j \rightarrow \infty$ e definindo $f_j = E_{\tau_j, r_j}$.

Para estudar a convergência uniforme, defina a seguinte modificação do operador de aproximação

$$G_{r,\tau}f(x + iy) = \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\tau|y-\eta|^2} f(x + i\eta)h_r(\eta)d\eta, \quad (x, y) \in U \times \mathbb{R}^m. \quad (2.4)$$

Vamos mostrar que $G_{r,\tau}f(x, y) \rightarrow f(x, y)$ uniformemente em B_R , onde $B_R \subset U$ é uma bola aberta centrada na origem de raio R a ser escolhido posteriormente.

Defina $\nu(x + iy) \doteq f(x + iy)h_r(y)$. Pelo lema 2.2.1, temos

$$\nu(x + iy) = \pi^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-[x']^2} \nu(x + iy)dx'.$$

Por outro lado, se fizermos a mudança de variáveis $\eta \mapsto y + \tau^{-\frac{1}{2}}\eta$ e aplicarmos em (2.4), obtemos

a seguinte representação de $G_{r,\tau}$:

$$\begin{aligned} G_{r,\tau}f(x+iy) &= \pi^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\tau|y-(y+\tau^{-\frac{1}{2}}\eta)|^2} f\left(x+i\left(y+\tau^{-\frac{1}{2}}\eta\right)\right) h_r\left(y+\tau^{-\frac{1}{2}}\eta\right) d\eta \\ &= \pi^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-|\eta|^2} \nu(x, y + \tau^{-\frac{1}{2}}\eta) d\eta \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema do Valor Médio aplicado em ν ,

$$\begin{aligned} |(G_{r,\tau} - \nu)(x+iy)| &\leq \pi^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-|\eta|^2} \left| \nu(x+iy) - \nu\left(x+i\left(y+\tau^{-\frac{1}{2}}\eta\right)\right) \right| \\ &\leq \pi^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-|\eta|^2} C|\tau^{-\frac{1}{2}}\eta| d\eta < C'\tau^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Deste modo, $G_{r,\tau} \rightarrow \nu$ uniformemente em $U \times \mathbb{R}^m$ quando $\tau \rightarrow \infty$.

Defina o operador de resto por

$$R_{r,\tau}f(x+iy) \doteq G_{r,\tau}f(x+iy) - E_{r,\tau}f(x+iy), \quad (x, y) \in U \times \mathbb{R}^m. \quad (2.5)$$

Para conseguirmos uma fórmula alternativa para o operador de resto, defina a seguinte forma diferencial:

$$\omega(\xi, \eta) = \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} e^{\tau[(x+iy)-(\xi+i\eta)]^2} f(\xi+i\eta) h_r(\eta) d(-i\xi + \eta)$$

e observe que como

$$E_{r,\tau}f(z) = \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{\tau[z-i\eta]^2} f(0+i\eta) h_r(\eta) d\eta$$

e

$$G_{r,\tau}f(x+iy) = \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\tau|y-\eta|^2} f(x+i\eta) h_r(\eta) d\eta,$$

temos

$$E_{r,\tau}f(x+iy) = \int_{\{0\} \times \mathbb{R}^m} \omega \quad \text{e} \quad G_{r,\tau}f(x+iy) = \int_{\{x\} \times \mathbb{R}^m} \omega$$

Assim, pelo Teorema de Stokes, temos

$$R_{r,\tau}f(x+iy) \doteq G_{r,\tau}f(x+iy) - E_{r,\tau}f(x+iy) = \int_{[0,x] \times \mathbb{R}^m} d\omega,$$

onde $[0, x]$ é o segmento que liga x à origem.

Para calcular $d\omega$, considere a estrutura dada por:

$$\begin{aligned} L_j &= \frac{1}{2}(\partial_{\xi_j} + i\partial_{\eta_j}); & Z_k &= \xi_k + i\eta_k \\ M_j &= \frac{1}{2}(\partial_{\xi_j} - i\partial_{\eta_j}); & W_k &= \xi_k - i\eta_k. \end{aligned}$$

A nossa estrutura está bem colocada, pois

$$\begin{aligned} L_j Z_k &= \frac{1}{2}(\delta_{jk} - \delta_{jk}) = 0; & M_j Z_k &= \frac{1}{2}(\delta_{jk} + \delta_{jk}) = \delta_{jk} \\ L_j W_k &= \frac{1}{2}(\delta_{jk} + \delta_{jk}) = \delta_{jk}; & M_j W_k &= \frac{1}{2}(\delta_{jk} - \delta_{jk}) = 0. \end{aligned}$$

Daí, $\{Z_1|_p, \dots, Z_m|_p, W_1|_p, \dots, W_m|_p\}$ é base de $\mathbb{C}T_p^*\mathbb{C}^m$.

Se

$$v(\xi, \eta) = \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} e^{\tau[(x+iy) - (\xi+i\eta)]^2} f(\xi + i\eta) h_r(\eta),$$

então

$$d\omega = dv \wedge d(-i\xi + \eta).$$

Além disso,

$$dv = \sum_{j=1}^m \alpha_j dZ_j + \sum_{j=1}^m \beta_j dW_j,$$

onde

$$L_k(v) = dv(L_k) = \sum_{j=1}^m \alpha_j dZ_j(L_k) + \sum_{j=1}^m \beta_j dW_j(L_k) = \sum_{j=1}^m \alpha_j L_k Z_j + \sum_{j=1}^m \beta_j L_k W_j = \beta_k$$

e

$$M_k(v) = dv(M_k) = \sum_{j=1}^m \alpha_j dZ_j(M_k) + \sum_{j=1}^m \beta_j dW_j(M_k) = \sum_{j=1}^m \alpha_j M_k Z_j + \sum_{j=1}^m \beta_j M_k W_j = \alpha_k.$$

Portanto,

$$dv = \sum_{j=1}^m M_j(v) dZ_j + \sum_{j=1}^m L_j(v) dW_j.$$

Como $dZ_k = d(\xi_k + i\eta_k) = \frac{1}{-i}d(-i\xi_k + \eta_k)$ e f é holomorfa em Ω , temos

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{j=1}^m L_j(v)dW_j \wedge d(-i\xi + \eta) \\ &= \sum_{j=1}^m \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} e^{\tau[(x+iy)-(\xi+i\eta)]^2} f(\xi + i\eta) \frac{i}{2} \partial_{\eta_j} h_r(\eta) dW_j \wedge d(-i\xi + \eta) \\ &= \sum_{j=1}^m \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} e^{\tau[(x+iy)-(\xi+i\eta)]^2} f(\xi + i\eta) \frac{i}{2} \partial_{\eta_j} h_r(\eta) (-i)^m dW_j \wedge d\zeta, \end{aligned}$$

onde $d\zeta = d(\xi + i\eta) = d(\xi_1 + i\eta_1) \wedge d(\xi_2 + i\eta_2) \wedge \cdots \wedge d(\xi_m + i\eta_m)$.

Logo,

$$R_{r,\tau}f(x + iy) = \int_{[0,x]} \sum_{j=1}^m r_j(x, y, \xi, \tau, r) d\xi_j,$$

onde $r_j(x, y, \xi, \tau, r) = \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{\tau[(x+iy)-(\xi+i\eta)]^2} f(\xi + i\eta) L_j h_r(\eta) (-i)^m d\zeta$.

Mais geralmente, para garantir que a integral esteja definida em Ω se $x \in U$, então considere um caminho poligonal $\gamma_x \subset U$ que liga x à origem (lembrando que U é aberto e conexo) e escreva

$$R_{r,\tau}f(x + iy) = \int_{\gamma_x} \sum_{j=1}^m r_j(x, y, \xi, \tau, r) d\xi_j.$$

Seja $U_1 \subset U$ aberto, convexo e relativamente compacto e, dado $R > 0$, denote por $B_R \subset \mathbb{R}^m$ a bola de raio R e centro na origem.

Se $\gamma \subset U_1$, então temos

$$|R_{r,\tau}f(x + iy)| \leq C|\gamma_x| \max_{1 \leq j \leq n} \sup_{\xi \in \omega_1} |r_j(x, y, \xi, \tau, r)|, \quad (x, y) \in U_1 \times B_R.$$

Assim, decorre do fato que $L_j h_r(\eta) \equiv 0$ para $|\eta| \leq r$ que ao escolhermos $r > 2R$, obtemos

$$|e^{\tau[(x-\xi)+i(y-\eta)]^2}| \leq e^{-c\tau}, \quad c > 0.$$

Portanto, $R_{r,\tau}f(x, y) \rightarrow 0$ uniformemente em $U_1 \times B_R$ para $r > 2R$.

Assim, dado qualquer subconjunto compacto $K \subset \subset \Omega$ e $\epsilon > 0$, podemos encontrar $R > 0$ e

$U_1 \subset\subset U$ como acima de modo que $K \subset U_1 \times B_R$ e então escolhemos $r > 2R$ e $\tau > 0$ tais que

$$|R_{r,\tau}f(x,y)| < \epsilon \quad \text{em } K.$$

Portanto, uma vez que $G_{r,\tau}f(x,y) \rightarrow f(x,y)$ uniformemente em B_R quando $\tau \rightarrow \infty$, temos que

$$|E_{r,\tau}f(z) - f(z)| < 2\epsilon, \quad z \in K, r > 2R, \tau \text{ suficientemente grande.}$$

Sendo assim, se $r_j \rightarrow \infty$ e $\tau_j \rightarrow \infty$, temos

$$f_j \doteq E_{r_j,\tau_j}f(z) \rightarrow f(z), \quad \text{quando } j \rightarrow \infty$$

uniformemente em conjuntos compactos de Ω . ■

É importante frisar que os resultados de aproximação obtidos nas duas últimas seções podem ser demonstrados em diversos espaços de convergência, para um tratamento mais amplo, sugerimos a leitura de [8] e, como exemplo de aplicação mais recente, sugerimos a leitura de [14].

2.4 Aplicação - uma demonstração do teorema tubular de Bochner

Finalmente, estamos aptos a enunciar e demonstrar o teorema tubular de Bochner. A demonstração presente nesta dissertação segue o artigo de 2009 de J. Hounie (veja [21]).

Teorema 2.4.1. (teorema tubular de Bochner). *Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto aberto e conexo. Toda função holomorfa $f(z)$ definida no tubo $\Omega = T(U) \doteq U + i\mathbb{R}^m$ pode ser estendida à uma função holomorfa definida em $\text{ch}(\Omega) = T(\text{ch}(U))$ (vide Lema 1.1.3).*

PROVA. Defina o conjunto das 2-combinações convexas de U por:

$$U_1 \doteq \{tx_1 + (1-t)x_2; x_1, x_2 \in U, 0 \leq t \leq 1\}.$$

Assim, por construção, temos $U_1 \subset \text{ch}(U)$.

Além disso, se $z \in U_1$, então existem $x_1, x_2 \in U$ e $t_0 \in [0, 1]$ tais que $z = t_0x_1 + (1-t_0)x_2$. Como U é aberto, existem $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tais que $B(x_1, \varepsilon_1) \cup B(x_2, \varepsilon_2) \subset U$.

Daí,

$$z \in t_0B(x_1, \varepsilon_1) + (1 - t_0)B(x_2, \varepsilon_2) \doteq \{t_0y_1 + (1 - t_0)y_2; y_1 \in B(x_1, \varepsilon_1), y_2 \in B(x_2, \varepsilon_2)\} \subset U_1.$$

Lembre-se que a multiplicação de um número positivo por um aberto (se $a \in \mathbb{R}^+$ e $X \subset \mathbb{R}^m$, então $aX = \{ax; x \in X\}$) é aberto. Lembrando também que a soma $(x, y) \mapsto x + y$ é uma aplicação linear sobrejetora, segue do teorema da aplicação aberta que ela é aberta e conseqüentemente $t_0B(x_1, \varepsilon_1) + (1 - t_0)B(x_2, \varepsilon_2)$ é um conjunto aberto. Portanto, U_1 é aberto.

Deste modo, somos capazes de definir, indutivamente, uma seqüência de abertos encaixados, $\{U_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, onde $U_{j+1} \doteq \{tx_1 + (1 - t)x_2; x_1, x_2 \in U_j, 0 \leq t \leq 1\}$, para todo j natural.

Pelo Teorema de Carathéodory, Teorema 1.1.3, esta seqüência se estabiliza após, no máximo, m passos. Isto é, $\bigcup_{j=1}^m U_j = \text{ch}(U)$.

Agora, considere uma seqüência de funções $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ como no Teorema 2.3.1.

Mostraremos que todo ponto de $T(U_1)$ possui uma vizinhança onde $f_j \rightarrow f$ uniformemente.

Pelo Lema 1.2.2, dado um ponto genérico $z_t = x_t + i\eta \in T(U_1)$, onde $x_t = tx_0 + (1 - t)x_1$ com $x_0, x_1 \in U$, $t \in [0, 1]$ e $\eta \in \mathbb{R}^m$, podemos obter um disco analítico, $A_t : \bar{\Delta} \rightarrow \mathbb{C}^m$, centrado em z_t e cuja fronteira está contida em um subconjunto compacto de Ω .

Uma vez que f_j converge uniformemente no compacto $A_t(\partial\Delta)$, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|(f_j \circ A_t)(w) - (f_k \circ A_t)(w)| < \epsilon$ quando $j, k > N$, para todo $w \in \partial\Delta$. Além disso, pelo princípio do máximo, a seqüência $\{f_j \circ A_t\}$ é de Cauchy na origem, pois existe $w_0 \in \partial\Delta$ tal que

$$\begin{aligned} |(f_j \circ A_t)(0) - (f_k \circ A_t)(0)| &\leq \max_{w \in \partial\Delta} |(f_j \circ A_t)(w) - (f_k \circ A_t)(w)| \\ &= |(f_j \circ A_t)(w_0) - (f_k \circ A_t)(w_0)| < \epsilon. \end{aligned}$$

Deste modo, ao tomar pequenas translações de A_t , obtemos uma família de discos analíticos cujas fronteiras estão contidas em um subconjunto compacto fixado de Ω .

Logo, $f_j(z)$ converge uniformemente em uma vizinhança de z_t . E, ao aplicar este processo reiteradamente, concluímos a demonstração do nosso teorema. ■

O conjunto frente de onda do traço de uma solução para uma estrutura tubular

Neste capítulo nós desenvolveremos alguns resultados de regularidade microlocal. Lembraremos das definições básicas e apresentaremos resultados sobre analiticidade microlocal para soluções de uma estrutura tubo. Como consequência apresentaremos um resultado de extensão em um tubo $U \times \mathbb{R}^n$ em que U não é um aberto, estendendo o Teorema de Bochner. Ademais, é importante destacar que as técnicas usadas neste caso são muito diferentes daquelas que desenvolvemos nos capítulos acima. Por esse motivo, para o texto não ficar muito grande, algumas demonstrações preliminares serão omitidas (mas deixaremos referencias com as respectivas demonstrações).

3.1 Revisão de análise microlocal e transformada FBI

Em 1982, M. S. Baouendi e F. Trèves forneceram uma condição suficiente para a analiticidade microlocal de uma solução de um sistema de campos vetoriais complexos (veja [3]). Outros resultados de extensão, para funções CR podem ser encontrados em [4].

A principal ferramenta utilizada na demonstração foi a transformada de Fourier-Bros-Iagolnitzer, doravante chamada de transformada FBI, de uma função $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$. A saber, a transformada FBI de u é definida do seguinte modo,

$$\mathcal{F}_k u(x, \xi) \doteq \int_{\mathbb{R}^m} e^{i(x-y) \cdot \xi - k|\xi||x-y|^2} u(y) dy = \langle u_y, e^{i(x-y) \cdot \xi - k|\xi||x-y|^2} \rangle,$$

onde k é uma constante positiva que pode ser (e será) escolhida conforme a necessidade.

Observação 3.1.1. *Observe que a transformada FBI generaliza a transformada de Fourier, no sentido que a transformada de Fourier é obtida como caso particular ao escolhermos $x = 0$ e $K = 0$ na definição da transformada FBI.*

Para uso posterior, iremos estabelecer as seguintes definições:

Definição 3.1.1. *Dizemos que um conjunto $\Gamma \subset \mathbb{R}^n - \{0\}$ é um cone com centro na origem (quando não houver risco de confusão diremos apenas cone) quando $t \in \Gamma$ se, e somente se, $pt \in \Gamma$, para todo p real positivo. Um conjunto Γ_δ é dito um cone truncado quando existe um cone Γ tal que $\Gamma_T = \Gamma \cap \{t \in \mathbb{R}^n; |t| < \delta\}$.*

Definição 3.1.2. *Dizemos que uma função holomorfa $f \in \mathcal{O}(V + i\Gamma_\delta)$ possui crescimento temperado na direção de V quando existem um inteiro positivo k e uma constante c tais que*

$$|f(x + iy)| \leq \frac{c}{|y|^k}, \quad |y| \rightarrow 0$$

Para $f \in \mathcal{O}(V + i\Gamma_\delta)$, $\varphi \in C_c^\infty(V)$ e $v \in \Gamma$, defina

$$\langle f_v, \varphi \rangle = \int f(x + iv)\varphi(x)dx.$$

Definição 3.1.3. *Se $f \in \mathcal{O}(V + i\Gamma_\delta)$ possui crescimento temperado e k é o inteiro da Definição 3.1.2, então definimos o valor de fronteira de f , bf , por*

$$bf \doteq \lim_{v \rightarrow 0, v \in \Gamma'} f_v.$$

Veja [8, Theorem V.2.6] para uma demonstração de que o limite acima existe e define uma distribuição em $\mathcal{D}'(V)$.

Definição 3.1.4. *Sejam $x_0 \in \mathbb{R}^m$ e $\xi^0 \in \mathbb{R}^m - \{0\}$. Dizemos que uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ é analítica microlocal em (x_0, ξ^0) quando existem uma vizinhança V de x_0 , cones $\Gamma^1, \dots, \Gamma^N$ em $\mathbb{R}^m - \{0\}$ e funções holomorfas $f_j \in \mathcal{O}(V + i\Gamma_\delta^j)$ (para algum $\delta > 0$) de crescimento temperado tais que*

$$u = \sum_{j=1}^N bf_j$$

próximo de x_0 e $\xi^0 \cdot \Gamma^j < 0$, para todo $j \in \{1, \dots, N\}$.

Definição 3.1.5. *Seja $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$, $x_0 \in \mathbb{R}^m$, $\xi^0 \in \mathbb{R}^m - \{0\}$. Então, $(x_0, \xi^0) \notin WF_a(u)$ se, e somente se, existem uma vizinhança V de x_0 em \mathbb{R}^m , um cone aberto $\Gamma \subset \mathbb{R}^m - \{0\}$ com $\xi^0 \in \Gamma$ e constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que*

$$|\mathcal{F}_k u(x, \xi)| \leq c_1 e^{-c_2 |\xi|}, \quad \forall (x, \xi) \in V \times \Gamma. \quad (3.1)$$

O conjunto $WF_a(u)$ é chamado conjunto frente de onda analítico de u .

Observação 3.1.2. *Em [8, Theorem V.2.14.] podemos encontrar uma demonstração para relação entre conjunto frente de onda analítico e analiticidade microlocal. A saber,*

$$WF_a u \doteq \{(x, \xi); u \text{ não é analítico microlocal em } (x, \xi)\}.$$

Como consequência, em [8, Corollary V.2.15] vemos que uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(U)$ é real analítica em uma vizinhança de $x_0 \in U$ se e somente se $(x_0, \xi) \notin WF_a(u)$, para cada $\xi \neq 0$.

Em [6] S. Berhanu e J. Hounie apresentaram uma caracterização de conjunto frente de onda analítico usando uma transformada que, em certo sentido, generaliza a transformada FBI. A saber,

$$\mathcal{F}_{K,k} u(x, \xi) \doteq \int_{\mathbb{R}^m} e^{i(x-y) \cdot \xi - K|\xi||x-y|^{2k}} u(y) dy = \langle u_y, e^{i(x-y) \cdot \xi - k|\xi||x-y|^{2k}} \rangle,$$

S. Berhanu e J. Hounie mostraram que dada uma distribuição de suporte compacto e constantes K, k fixas temos que dado $\xi_0 \neq 0$ segue que $(x_0, \xi_0) \notin WF_a u$ se, e somente se, existem uma vizinhança cônica Γ de ξ_0 e vizinhança V de x_0 tais que

$$|\mathcal{F}_{K,k} u(x, \xi)| \leq c_1 e^{-c_2 |\xi|}, \quad \forall (x, \xi) \in V \times \Gamma. \quad (3.2)$$

Nas próximas seções apresentaremos resultados de regularidade microlocal de soluções de estruturas tubos, com o objetivo de apresentar um resultado de extensão que as técnicas de [3] e [4] não se aplicam. Para isso nós seguiremos o artigo [5].

3.2 Uma versão microlocal para o teorema tubular de Bochner

Sejam m e n inteiros positivos. Denotaremos as variáveis em \mathbb{R}^m e \mathbb{R}^n por $x = (x_1, \dots, x_m)$ e $t = (t_1, \dots, t_n)$, respectivamente.

Seja $V \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto não vazio, conexo e aberto. E seja $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função Lipschitz contínua com $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t))$.

Defina $Z_k(x, t) \doteq x_k + i\varphi_k(t)$, para $j \in \{1, \dots, m\}$ e considere os campos vetoriais complexos em $\mathbb{R}^m \times V$ definidos por

$$L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} - i \sum_{k=1}^m \frac{\partial \varphi_k}{\partial t_j}(t) \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad j \in \{1, \dots, n\}.$$

O subfibrado vetorial definido pelos campos acima é uma estrutura com dimensão n , chamada **estrutura tipo tubo**.

Note que temos um sistema de campos vetoriais complexos linearmente independentes que satisfaz

$$L_j Z_k = i \frac{\partial \varphi_k}{\partial t_j}(t) - i \sum_{\ell=1}^m \frac{\partial \varphi_\ell}{\partial t_j}(t) \frac{\partial x_k}{\partial x_\ell} = i \frac{\partial \varphi_k}{\partial t_j}(t) - i \frac{\partial \varphi_k}{\partial t_j}(t) = 0, \quad j \in \{1, \dots, n\}, \quad k \in \{1, \dots, m\}.$$

Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ não vazio, aberto e conexo e defina $\Omega = U \times V$.

Fixados $t_0 \in V$ e $\xi^0 \neq 0$ daremos uma condição suficiente para que, dada uma função h Lipschitz contínua em Ω que satisfaz

$$L_j h = 0, \quad \text{em } \Omega, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}; \quad (3.3)$$

tenhamos $(0, \xi^0) \notin WF_a h_{t_0}$, em que $h_{t_0} \doteq h(x, t_0)$.

Teorema 3.2.1. *Sejam $\xi^0 \in \mathbb{R} - \{0\}$ e N um número natural. Assuma que existe uma sequência $t_j^* \in V - \{0\}$ tal que $t_j^* \rightarrow 0$ e*

$$|\varphi(t_j^*)|^{2N} < -\varphi(t_j^*) \cdot \xi^0. \quad (3.4)$$

Sob estas condições, se h é qualquer solução Lipschitz contínua do sistema (3.3) em Ω , então $(0, \xi^0) \notin WF_a h_0$.

PROVA. Para esta demonstração, assumamos que $|\xi^0| = 1$ e que, para $r > 0$, g denota uma função em $C_c^\infty(B(0, r))$ tal que $g(x) \equiv 1$ quando $|x| < \frac{r}{2}$, além disso, usaremos as seguintes notações:

$$[z]^{2k} = \left(\sum_{j=1}^m z_j^2 \right)^k$$

e

$$Lf(y, t)dt = \sum_{j=1}^m L_j f(y, t)dt_j.$$

Sejam h uma solução Lipschitz contínua de (3.3) em Ω e $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2m}$. Considere a seguinte integral

$$I^j(x, \xi) = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\gamma_j} e^{i(x-y-i\varphi(t)) \cdot \xi - K|\xi|[x-y-i\varphi(t)]^{2k}} L(g(y)h(y, t)) dt dy, \quad (3.5)$$

onde $\gamma_j \subset V$ é uma curva suave que une 0 a t_j^* .

Observe que $Lf(y, t)dt$ é uma 1-forma em V com parâmetro y . Assim, uma vez que

$$I^j(x, \xi) = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\gamma_j} L \left\{ e^{i(x-y-i\varphi(t)) \cdot \xi - K|\xi|[x-y-i\varphi(t)]^{2k}} g(y)h(y, t) \right\} dt dy,$$

(e L está agindo apenas nas variáveis y e t) segue, pelo Teorema de Stokes para 1-formas,

$$I^j(x, \xi) = I_*^j(x, \xi) - I_0(x, \xi), \quad (3.6)$$

onde

$$I_*^j(x, \xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{i(x-y-i\varphi(t_j^*)) \cdot \xi - K|\xi|[x-y-i\varphi(t_j^*)]^{2k}} g(y)h(y, t_j^*) dy$$

e

$$I_0(x, \xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{i(x-y) \cdot \xi - K|\xi|[x-y]^{2k}} g(y)h_0(y) dy = \mathcal{F}_{K,k}(gh_0)(x, \xi). \quad (3.7)$$

Queremos mostrar que, existem certas constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$|I_0(x, \xi)| \leq c_1 e^{-c_2|\xi|},$$

para (x, ξ) em alguma vizinhança cônica de $(0, \xi)$. Para isso nós estimaremos $I^j(x, \xi)$ e $I_*^j(x, \xi)$.

Observe que, para qualquer (x, y, t, ξ) temos,

$$|e^{i(x-y-i\varphi(t)) \cdot \xi - K|\xi|[x-y-i\varphi(t)]^{2k}}| = e^{-E(x, y, t, \xi)},$$

em que

$$\begin{aligned}
E(x, y, t, \xi) &= -\operatorname{Re} \left\{ i(x - y - i\varphi(t)) \cdot \xi - K|\xi| [x - y - i\varphi(t)]^{2k} \right\} \\
&= -\varphi(t) \cdot \xi + K|\xi| \operatorname{Re} [|x - y|^2 - |\varphi(t)|^2 - 2i(x - y) \cdot \varphi(t)]^k \\
&= -\varphi(t) \cdot \xi + K|\xi| \operatorname{Re} \left\{ \sum_{\ell=0}^k (|x - y|^2 - |\varphi(t)|^2)^{k-\ell} [-2i(x - y) \cdot \varphi(t)]^\ell \right\} \\
&= -\varphi(t) \cdot \xi + K|\xi| \sum_{0 \leq 2s \leq k} \binom{k}{2s} (|x - y|^2 - |\varphi(t)|^2)^{k-2s} (-4)^s [(x - y) \cdot \varphi(t)]^{2s}.
\end{aligned}$$

Para cada t fixado, defina

$$P_{2k}(x - y, t) = \sum_{0 \leq 2s \leq k} \binom{k}{2s} (|x - y|^2 - |\varphi(t)|^2)^{k-2s} (-4)^s ((x - y) \cdot \varphi(t))^{2s} \quad (3.8)$$

e reescreva

$$P_{2k}(x, t) = |x|^{2k} + \sum_{|\alpha| \leq 2k} c_\alpha(t) x^\alpha. \quad (3.9)$$

Algumas considerações são necessárias para dar continuidade à demonstração:

1. Dado um polinômio não constante $f \in \mathbb{R}[x]$ de grau $2d$, decomponha-o em suas partes homogêneas

$$f = f_0 + f_1 + \dots + f_{2d},$$

em que f_j é um polinômio homogêneo de grau j , para cada $j \in \{0, \dots, 2d\}$.

2. Denotaremos o conjunto dos polinômios $p \geq 0$ em \mathbb{R}^m de grau $2d$ por $P_{2d,m}$.

3. Escreva $f(x) = \sum_{|\alpha| \leq 2} f_\alpha x^\alpha$ e defina

$$S(f) = \{\alpha \in \mathbb{N}^m; f_\alpha \neq 0\} - \{0, 2d\varepsilon_1, \dots, 2d\varepsilon_m\},$$

com $\varepsilon_j = (\delta_{j1}, \dots, \delta_{jm})$, em que δ_{jk} denota o delta de Kronecker.

Portanto, podemos escrever

$$f(x) = f_0 + \sum_{\alpha \in S(f)} f_\alpha x^\alpha + \sum_{j=1}^m f_{2d\varepsilon_j} x_j^{2d}.$$

4. Seja

$$\begin{aligned}\Delta(f) &= \{\alpha \in S(f); f_\alpha x^\alpha \text{ não é um quadrado em } \mathbb{R}[x]\} \\ &= \{\alpha \in S(f); \text{ ou } f_\alpha < 0 \text{ ou } \alpha_j \text{ é ímpar para algum } j \in \{1, \dots, m\}\}.\end{aligned}$$

5. Lembre que se $a_j \geq 0$, $j \in \{1, \dots, l-1\}$, e existe $j_0 \in \{1, \dots, l-1\}$ tal que $a_{j_0} \neq 0$, então o polinômio de uma variável

$$q(s) = s^l - \sum_{j=0}^{l-1} a_j s^j,$$

possui uma única raiz positiva, que doravante será denotada por $C(q)$.

6. Também invocamos o seguinte resultado presente em [13]:

Afirmção 3.2.1. *Se $f_{2d} \in \text{int } P_{2d,m}$ (interior no espaço dos polinômios de grau $2d$) e $\varepsilon > 0$ são tais que*

$$f_{2d} - \varepsilon \sum_{j=1}^m x_j^{2d} \in P_{2d,m},$$

então $f_0 - \lambda^{2d}$ é uma cota inferior de f , onde $\lambda = C\left(s^{2d} - \sum_{j=0}^{2d-1} b_j s^j\right)$ e

$$b_j = \frac{1}{2d} (2d-j)^{\frac{2d-j}{2d}} \varepsilon^{-\frac{j}{2d}} \sum_{\alpha \in \Delta(f), |\alpha|=j} |f_\alpha| (\alpha^\alpha)^{\frac{1}{2d}}, \quad 1 \leq j \leq 2d-1.$$

De volta à demonstração do teorema, uma vez que $|x|^{2k} \in \text{int } P_{2k,m}$ e $|x|^{2k} - \sum_{j=1}^m x_j^{2k} \in P_{2k,m}$, a Afirmção 3.2.1 garante que, se tomarmos $\varepsilon = 1$,

$$P_{2k}(x, t) \geq (-1)^k |\varphi(t)|^{2k} - \lambda^{2k},$$

onde $\lambda = C\left(s^{2k} - \sum_{j=0}^{2k-1} b_j s^j\right)$ e $b_j = \frac{1}{2k} (2k-j)^{\frac{2k-j}{2k}} \sum_{\alpha \in \Delta(P_{2k}), |\alpha|=j} |c_\alpha(t)| (\alpha^\alpha)^{\frac{1}{2k}}$.

Desta forma, passamos a responsabilidade de estimar P_{2k} para λ .

Para estimar λ , considere $j_0 \in \{1, \dots, 2k\}$ tal que

$$b_{2k-j_0}^{\frac{1}{j_0}} = \max \left\{ b_{2k-1}, b_{2k-2}^{\frac{1}{2}}, \dots, b_0^{\frac{1}{2k}} \right\}. \quad (3.10)$$

Como $s^{2k} - \sum_{j=0}^{2k-1} b_j s^j = 0$ se, e somente se, $s^{2k} = \sum_{j=0}^{2k-1} b_j s^j$. Lembrando que λ é raiz do polinômio $s^{2k} - \sum_{j=0}^{2k-1} b_j s^j$, pela escolha de j_0 , temos

$$\begin{aligned} \lambda^{2k} &= b_0 + b_1 \lambda + b_2 \lambda^2 + \cdots + b_{2k-1} \lambda^{2k-1} \\ &\leq b_{2k-j_0}^{\frac{2k}{j_0}} + b_{2k-j_0}^{\frac{2k-1}{j_0}} \lambda + b_{2k-j_0}^{\frac{2k-2}{j_0}} \lambda^2 + \cdots + b_{2k-j_0}^{\frac{1}{j_0}} \lambda^{2k-1}. \end{aligned}$$

Escolha $\kappa > 0$ tal que $\lambda = \kappa b_{2k-j_0}^{\frac{1}{j_0}}$. Deste modo temos

$$\kappa^{2k} b_{2k-j_0}^{\frac{2k}{j_0}} = \lambda^{2k} \leq b_{2k-j_0}^{\frac{2k}{j_0}} (1 + \kappa + \cdots + \kappa^{2k-1}) = b_{2k-j_0}^{\frac{2k}{j_0}} \frac{\kappa^{2k} - 1}{\kappa - 1}.$$

Assim,

$$\kappa^{2k} \leq \frac{\kappa^{2k} - 1}{\kappa - 1}. \quad (3.11)$$

Agora observe que (3.11) acarreta em $0 < \kappa \leq 2$. De fato, se tivéssemos $\kappa > 2$ (consequentemente $\kappa - 1 > 1$ e $\kappa^{2k} - 1 > 0$), teríamos

$$\kappa^{2k} \leq \frac{\kappa^{2k} - 1}{\kappa - 1} \leq \kappa^{2k} - 1.$$

Isto é, $0 \leq -1$ que é um absurdo.

Sendo assim, uma vez que $0 < \kappa \leq 2$, temos $\lambda = \kappa b_{2k-j_0}^{\frac{1}{j_0}} \leq 2 b_{2k-j_0}^{\frac{1}{j_0}}$. Usando (3.10) temos

$$\lambda \leq 2 \max\{b_{2k-1}, b_{2k-2}^{\frac{1}{2}}, \dots, b_0^{\frac{1}{2k}}\}. \quad (3.12)$$

Por outro lado, lembrando que $\lambda^{2k} = b_0 + b_1 \lambda + b_2 \lambda^2 + \cdots + b_{2k-1} \lambda^{2k-1}$ e que $b_j \geq 0$ ($0 \leq j \leq 2k-1$), temos

$$\lambda^{2k} \geq b_j \lambda^j, \quad 0 \leq j \leq 2k-1,$$

assim, $\lambda \geq b_j^{\frac{1}{2k-j}}$.

Portanto, temos

$$\max\{b_{2k-1}, b_{2k-2}^{\frac{1}{2}}, \dots, b_0^{\frac{1}{2k}}\} \leq \lambda \leq 2 \max\{b_{2k-1}, b_{2k-2}^{\frac{1}{2}}, \dots, b_0^{\frac{1}{2k}}\}.$$

Assim, resta estimar b_j .

Defina funções $c_\alpha(t)$ tais que possamos escrever

$$\begin{aligned} P_{2k}(x, t) &= \sum_{0 \leq 2s \leq k} \binom{k}{2s} (|x|^2 - |\varphi(t)|^2)^{k-2s} (-4)^s (x \cdot \varphi(t))^{2s} \\ &= \sum_{0 \leq 2s \leq k} \sum_{l=0}^{k-2s} \binom{k}{2s} \binom{k-2s}{l} |x|^{2l} (-|\varphi(t)|^2)^{k-2s-l} (-4)^s (x \cdot \varphi(t))^{2s} = |x|^{2k} \sum_{|\alpha| \leq 2k} c_\alpha(t) x^\alpha. \end{aligned}$$

Deste modo, existe uma constante c_k , que só depende de k , tal que

$$|c_\alpha(t)| \leq c_k |\varphi(t)|^{2k-|\alpha|}.$$

Assim, lembrando que $b_j = \frac{1}{2k} (2k-j)^{\frac{2k-j}{2k}} \sum_{\alpha \in \Delta(P_{2k}), |\alpha|=j} |c_\alpha(t)| (\alpha^\alpha)^{\frac{1}{2k}}$

$$\begin{aligned} b_j &\leq \frac{1}{2k} (2k-j)^{\frac{2k-j}{2k}} \sum_{\alpha \in \Delta, |\alpha|=j} c_k |\varphi(t)|^{2k-|\alpha|} (\alpha^\alpha)^{\frac{1}{2k}} \\ &= \frac{c_k}{2k} (2k-j)^{\frac{2k-j}{2k}} \sum_{\alpha \in \Delta, |\alpha|=j} |\varphi(t)|^{2k-|\alpha|} (\alpha_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot \alpha_n^{\alpha_n})^{\frac{1}{2k}} \\ &= \frac{c_k}{2k} (2k-j)^{\frac{2k-j}{2k}} |\varphi(t)|^{2k-j} \sum_{\alpha \in \Delta, |\alpha|=j} (\alpha_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot \alpha_n^{\alpha_n})^{\frac{1}{2k}} \\ &= \tilde{c}_k |\varphi(t)|^{2k-j}. \end{aligned}$$

Deste modo, $b_j^{\frac{1}{2k-j}} \leq \tilde{c}_k |\varphi(t)|$. Logo, por (3.12), existe uma constante positiva (que denotaremos simplesmente por c_k) tal que

$$\lambda \leq c_k |\varphi(t)|.$$

Pela Afirmação 3.2.1,

$$P_{2k}(x, t) \geq -c_k |\varphi(t)|^{2k}.$$

Lembrando que

$$\begin{aligned} E(x, y, t, \xi) &= -\varphi(t) \cdot \xi + K |\xi| \sum_{0 \leq 2s \leq k} \binom{k}{2s} (|x-y|^2 - |\varphi(t)|^2)^{k-2s} (-4)^s [(x-y) \cdot \varphi(t)]^{2s} \\ &= -\varphi(t) \cdot \xi + K |\xi| P_{2k}(x-y, t). \end{aligned}$$

e que $|\xi^0| = 1$ temos

$$E(x, y, t_j^*, \xi^0) \geq -\varphi(t_j^*) \cdot \xi^0 - c_k K |\varphi(t_j^*)|^{2N} \geq |\varphi(t_j^*)|^{2N} (1 - c_k K) > 0, \quad (3.13)$$

onde a penúltima desigualdade decorre da hipótese $|\varphi(t_j^*)|^{2N} < -\varphi(t_j^*) \cdot \xi^0$. A última desigualdade segue do fato de $\varphi(t_j^*) \neq 0$. E isso ocorre pois caso contrário teríamos $0 = |\varphi(t_j^*)|^{2N} < -\varphi(t_j^*) \cdot \xi^0 = 0$ e isso é absurdo.

A seguir, escolha

$$0 < K < \frac{1}{2c_k} \quad (3.14)$$

para que

$$-E(x, y, t_j^*, \xi^0) < -\frac{1}{2} |\varphi(t_j^*)|^{2N}.$$

Logo, decorre da homogeneidade de $E(x, y, t_j^*, \xi^0)$, em ξ , que existe uma vizinhança cônica, Γ_j de ξ^0 tal que

$$-E(x, y, t_j^*, \xi) < -\frac{1}{2} |\varphi(t_j^*)|^{2N} |\xi|, \quad \forall \xi \in \Gamma_j.$$

Assim, lembrando que

$$I_*^j(x, \xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{i(x-y-i\varphi(t_j^*)) \cdot \xi - K|\xi| [x-y-i\varphi(t_j^*)]^{2k}} g(y) h(y, t_j^*) dy,$$

existem $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$|I_*^j(x, \xi)| \leq c_1 e^{-c_2 |\xi|}, \quad \forall \xi \in \Gamma_j. \quad (3.15)$$

Agora, considere a integral

$$I^j(x, \xi) = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\gamma_j} e^{i(x-y-i\varphi(t)) \cdot \xi - K|\xi| [x-y-i\varphi(t)]^{2k}} L(g(y) h(y, t)) dt dy.$$

Uma vez que h é solução de L , $g(y) \equiv 1$, para $|y| \leq \frac{r}{2}$, e $g \in C_c^\infty(B(0, r))$, temos

$$|I^{j_0}(x, \xi)| = \left| \int_{A(0, \frac{r}{2}, r)} \int_{\gamma_{j_0}} e^{i(x-y-i\varphi(t)) \cdot \xi - K|\xi| [x-y-i\varphi(t)]^{2k}} h(y, t) L(g(y)) dt dy \right|, \quad (3.16)$$

em que $A(0, \frac{r}{2}, r) = B(0, r) \setminus B(0, \frac{r}{2})$. Por outro lado, lembrando que $\varphi(0) = 0$ e $-E(x, y, t, \xi) =$

$Re\{i(x - y - i\varphi(t)) \cdot \xi - K|\xi|[x - y - i\varphi(t)]^{2k}\}$, temos

$$-E(x, y, 0, \xi) = Re\{i(x - y) \cdot \xi - K|\xi|[x - y]^{2k}\} = -K|\xi|[x - y]^{2k} \leq -K|\xi|[|y| - |x|]^{2k} \leq -K|\xi| \left[\frac{r}{2} - \frac{r}{4} \right]^{2k}, \quad (3.17)$$

quando $\frac{r}{2} \leq |y| \leq r$ e $|x| \leq \frac{r}{4}$. Assim, como

$$t \mapsto \max \left\{ -E(x, y, t, \xi) : \frac{r}{2} \leq |y| \leq r, |x| \leq \frac{r}{4} \text{ e } |\xi| = 1 \right\}$$

é uma função contínua e $t_j^* \rightarrow 0$ existe j e $a > 0$ tais que

$$-E(x, y, t_j^*, \xi) \leq -a$$

quando $\frac{r}{2} \leq |y| \leq r$, $|x| \leq \frac{r}{4}$ e $|\xi| = 1$. Pela homogeneidade em ξ temos

$$-E(x, y, t_j^*, \xi) \leq -a$$

quando $\frac{r}{2} \leq |y| \leq r$, $|x| \leq \frac{r}{4}$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$. Portanto, voltando em (3.16) temos $C > 0$ tal que

$$|I^{j_0}(x, \xi)| \leq Ce^{-a|\xi|}. \quad (3.18)$$

Portanto, por (3.6), (3.7) (3.15) e (3.18) e pela definição 3.1.5, temos que $(0, \xi^0) \notin WF_a h_0$. ■

A seguir, apresentamos o exemplo que justifica o título desta seção.

Exemplo 3.2.2. *(Uma hipersuperfície Lipschitz onde funções CR podem ser estendidas holomorficamente à uma vizinhança cheia da origem):* Seja $\psi : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa em uma vizinhança da origem $U \subset \mathbb{C}^n$ tal que $\psi(0) = 0$ e $d\psi(0) = 0$. Suponha também que $f : W \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função Lipschitz em uma vizinhança da origem $W \subset \mathbb{R}^n$ tal que

1. $f(0) = 0$;
2. existem $C > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ tais que $|f(y)| \leq C|y|^2$;
3. existe (p_j^*) e (q_j^*) sequências em \mathbb{R}^n convergindo para zero tais que

$$f(p_j^*) \geq |p_j^*|^{2k} \quad \text{e} \quad -f(q_j^*) \geq |q_j^*|^{2k} \quad (3.19)$$

Dado $s \in \mathbb{R}$ defina

$$\Sigma_s = \{(z_1, \dots, z_n, s + i(\operatorname{Re}\psi(z) + f(y))) : z = x + iy \in U, y \in W\}$$

Note que Σ é uma hipersuperfície Lipschitz de \mathbb{C}^n .

Seja $\Phi : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ um biholomorfismo¹ definido do seguinte modo,

$$\Phi(z_1, \dots, z_{n+1}) = (w_1, \dots, w_{n+1})$$

em que $w_j = z_j$ (para $j \in \{1, \dots, n\}$) e $w_{n+1} = z_{n+1} - i\psi(z_1, \dots, z_n)$.

Note que

$$\begin{aligned} \Sigma' &= \Phi(\Sigma) = \{(z_1, \dots, z_n, s + i(\operatorname{Re}\psi(z) + f(y)) - i\psi(z_1, \dots, z_n)) : z = x + iy \in U, y \in W\} \\ &= \{(z_1, \dots, z_n, s + if(y) + \mathcal{I}\psi(z_1, \dots, z_n)) : z = x + iy \in U, y \in W\} \end{aligned}$$

A seguir definiremos novas coordenadas para Σ' . A saber, $x'_j = x_j$ ($j \in \{1, \dots, n\}$), $x'_{n+1} = s + \mathcal{I}\psi(z_1, \dots, z_n)$ e $t'_j = y_j$ ($j \in \{1, \dots, n\}$). Para facilitar a leitura tiraremos as linhas nas novas coordenadas e consideraremos apenas $x_1, \dots, x_{n+1}, t_1, \dots, t_n$. Note que a estrutura definida para o fibrado tangente desta hipersuperfície terá as seguintes integrais primeiras

$$Z_j(x, t) = x_j + it_j, \quad 1 \leq j \leq n, \quad Z_{n+1}(x, t) = x_{n+1} + if(t)$$

em uma vizinhança de $(0, 0) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^n$.

Definindo $\phi(t_1, \dots, t_n) = (t_1, \dots, t_n, f(t_1, \dots, t_n))$ segue de (3.19) que se fixarmos $\xi^0 \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ então existirá $t_j^* \rightarrow 0$ em \mathbb{R}^n tal que $|\phi(t_j^*)|^{2N} < -\pi(t_j^*) \cdot \xi^0$. Pelo Teorema 3.2.1, dada qualquer solução h Lipschitz para o fibrado tangente de Σ' (definida em Σ') temos que o traço h_0 (lembrando que $h_0(x) = h(0, x)$) é real analítica na origem (consequentemente pode ser estendida para uma função holomorfa, em uma vizinhança da origem). Deste modo existe uma função holomorfa H definida em uma vizinhança da origem de \mathbb{C}^{n+1} tal que $h(x, t) = H(Z_1(x, t); \dots; Z_{n+1}(x, t))$ em uma vizinhança da origem.

Por fim, destacamos que a função f pode ser definida de modo que os resultados clássicos (por

¹Um mapa bijetor holomorfo cuja inversa também é um mapa holomorfo.

exemplo os resultados contidos em [4]) não se aplicam. Para uma exposição mais aprofundada, sugerimos a leitura de [5].

COROLÁRIO 3.2.3. *Seja $\xi^0 \in \mathbb{R}^m - \{0\}$ e assumamos que existe $t^* \in V$ tal que $-\varphi(t^*) \cdot \xi^0 > 0$. Se h é uma solução Lipschitz contínua de \mathcal{L} em $\mathbb{R}^m \times V$, então $(0, \xi^0) \notin WF_a h_0$.*

PROVA. Da mesma forma que fizemos em (3.13) e (3.14), podemos escolher $K > 0$ de modo que exista $a > 0$ tal que

$$-E(x, y, t^*, \xi^0) \leq -|\varphi(t^*)|^{2N}.$$

Deste modo,

$$I_*(x, \xi) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{-i(x-y-i\varphi(t^*)) \cdot \xi - K|\xi| |x-y-i\varphi(t^*)|^{2k}} g(y) h(y, t^*) dy$$

possui um decaimento exponencial para ξ em uma vizinhança cônica de ξ^0 .

Seja γ uma curva suave que liga t^* à origem. Então, para r suficientemente grande

$$I(x, \xi) = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\gamma} e^{-i(x-y-i\varphi(t)) \cdot \xi - K|\xi| |x-y-i\varphi(t)|^{2k}} L(g(y) h(y, t)) dt dy$$

decai exponencialmente para $|x| \leq \frac{1}{4}$. Deste modo, usando (3.6) novamente, concluímos a demonstração. ■

Referências Bibliográficas

- [1] BAOUENDI, M. S.; ROTHSCCHILD, L. P. Normal forms for generic manifolds and holomorphic extension of CR functions. *Journal of Differential Geometry*, v. 25, p. 431-467, 1987.
- [2] BAOUENDI, M. S.; TREVES, F. A property of the functions and distributions annihilated by a locally integrable system of complex vector fields. *Annals of Mathematics*, v. 113, p. 387-421, 1981.
- [3] BAOUENDI, M. S.; TREVES, F. A microlocal version of Bochner's tube theorem. *Indiana University Mathematics Journal*, v. 31, p. 885–895, 1982.
- [4] BAOUENDI, M. S.; TREVES, F. About the holomorphic extension of CR functions on real hypersurfaces in complex space. *Duke Mathematical Journal*, v. 51, p. 77-107, 1984.
- [5] BERHANU, S. A generalization of a microlocal version of Bochner's theorem. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 374, n. 7, 2021.
- [6] BERHANU, S.; HOUNIE, J. A class of FBI transforms. *Communications in Partial Differential Equations*, v. 37, 2012.
- [7] BERHANU, S.; HOUNIE, J. A Generalization of Bochner's Extension Theorem to Rough Tubes. *Journal of Geometric Analysis*, v. 21, p. 455–475, 2011.
- [8] BERHANU, S.; CORDARO, P.; HOUNIE, J. *An Introduction to Involutive Structures*. Cambridge University Press, 2008.
- [9] BOCHNER, S. A theorem on analytic continuation of functions in several variables. *Annals of Mathematics*, v. 39, p. 14-19, 1938.
- [10] BOCHNER, S.; MARTIN, W. *Functions of Several Complex Variables*. Princeton University Press, 1948.

-
- [11] BOIVIN, A.; DWILEWICZ, R. Extension and approximation of CR functions on tube manifolds. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 350, p. 1945–1956, 1998.
- [12] DO CARMO, M. P. *Formas Diferenciais e Aplicações*, 1^a edição. SBM, Rio de Janeiro, 2015.
- [13] GHASEMI, M.; MARSHALL, M. Lower bounds for a polynomial in terms of its coefficients. *Archiv der Mathematik*, v. 95, n. 4, p. 343–353, 2010.
- [14] HOEPFNER, G.; MEDRADO, R. ; RAGOGNETTE, L. F. *The Baouendi-Treves approximation theorem for Gevrey classes and applications*. *Annali Della Scuola Normale Superiore Di Pisa-Classe Di Scienze*, p. 315–338, 2022.
- [15] HOEPFNER, G.; HOUNIE, J. ; SANTOS, L. A. *Tube structures, Hardy spaces and extension of CR distributions*. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 363, p. 5091–5091, 2011.
- [16] HOEPFNER, G.; HOUNIE, J. ; SANTOS, L. *On the extension of h^p -CR distributions defined on rough tubes*. *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 140, p. 627–633, 2012.
- [17] HÖRMANDER, L. *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*. North-Holland, 1973.
- [18] HÖRMANDER, L. *Linear Partial Differential Operatores*, 4th printing. Springer-Verlag, 1976.
- [19] HÖRMANDER, L. *Notions of Convexity*. Birkhäuser, 1994.
- [20] HÖRMANDER, L. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*, 2nd edition. Springer-Verlag, 1990.
- [21] HOUNIE, J. A proof of Bochner’s tube theorem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 137, n. 12, p. 4203–4207, 2009.
- [22] KAZLOW, M. CR functions and tube manifolds. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 255, p. 153–171, 1979.
- [23] YE, Z. F. The envelope of holomorphy of a truncated tube. *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 111, n. 1, p. 157–159, 1991.

APÊNDICE A: Outros resultados de análise microlocal para o traço de uma solução para uma estrutura tubular

Apesar da similaridade com o Teorema 3.2.1, os resultados deste apêndice não seguem como seus corolários.

O resultado a seguir foi demonstrado em [5] e aqui seguimos suas ideias.

Teorema 3.2.2. *Seja $\xi^0 \in \mathbb{R}^m - \{0\}$. Suponha que existam $t^* \in U - \{0\}$ e uma curva lipschitziana γ em V que liga t^* à origem tais que:*

1. $-\varphi(t^*) \cdot \xi^0 > 0$,
2. $2 \sup_{t \in \gamma} |\varphi(t)| < r$,
3. $8|\varphi(t^*)|^4 \sup_{t \in \gamma} \varphi(t) \cdot \xi^0 < \left[r^2 - 4 \sup_{t \in \gamma} |\varphi(t)|^2 \right]^2 [-\varphi(t^*) \cdot \xi^0]$,

então, dada uma solução Lipschitz contínua de \mathcal{L} em Ω , $(0, \xi^0) \notin WF_a h_0$.

PROVA. Nas mesmas notações da demonstração do teorema 3.2.1, observe que a transformada FBI generalizada $\mathcal{F}_2 u(x, \xi)$ nos fornece o polinômio $P_4(x, t)$ e daí vem

$$\begin{aligned}
 E(x, y, t, \xi) &= -\xi \cdot \varphi(t) + K|\xi| \operatorname{Re} \{ (x - y - i\varphi(t))^4 \} \\
 &= -\xi \cdot \varphi(t) + K|\xi| \operatorname{Re} \{ [(x - y - i\varphi(t)) \cdot (x - y - i\varphi(t))]^2 \} \\
 &= -\xi \cdot \varphi(t) + K|\xi| \operatorname{Re} \{ [(x - y - i\varphi(t)) \cdot (x - y) - i(x - y - i\varphi(t)) \cdot \varphi(t)]^2 \} \\
 &= -\xi \cdot \varphi(t) + K|\xi| \operatorname{Re} \{ [|x - y|^2 - 2i\langle x - y, \varphi(t) \rangle - |\varphi(t)|^2]^2 \}
 \end{aligned}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}
E(x, y, t, \xi) &= -\xi \cdot \varphi(t) + K|\xi| \operatorname{Re}\{|x - y|^4 - 2|x - y|^2(2i\langle x - y, \varphi(t) \rangle - |\varphi(t)|^2) \\
&\quad + [2i\langle x - y, \varphi(t) \rangle - |\varphi(t)|^2]^2\} \\
&= -\xi \cdot \varphi(t) + K|\xi| \operatorname{Re}\{|x - y|^4 - 4i|x - y|^2\langle x - y, \varphi(t) \rangle - 2|x - y|^2|\varphi(t)|^2 \\
&\quad - 4\langle x - y, \varphi(t) \rangle^2 - 4i\langle x - y, \varphi(t) \rangle|\varphi(t)|^2 + |\varphi(t)|^4\} \\
&= -\xi \cdot \varphi(t) + K|\xi| [|x - y|^4 - 2|\varphi(t)|^2|x - y|^2 - 4\langle x - y, \varphi(t) \rangle^2 + |\varphi(t)|^4].
\end{aligned}$$

e, deste modo,

$$P_4(x, t) = |x|^4 - 2|\varphi(t)|^2|x|^2 - 4\langle x, \varphi(t) \rangle^2 + |\varphi(t)|^4.$$

Observe que se o mínimo de $P_4(x, t)$ é atingido em um ponto da forma $x = c\varphi(t)$, então podemos determinar c ao minimizar o polinômio $p(c) = (c^4 - 2c^2 - 4c^2 + 1)|\varphi(t)|^4 = (c^4 - 6c^2 + 1)|\varphi(t)|^4$.

Observe que $p'(c) = (4c^2 - 12)c = 0$ se, e somente se, $c = 0$ ou $c = \sqrt{3}$. Ademais, $p''(c) = 12c^2 - 12$ nos dá $p''(0) < 0$ e $p''(\sqrt{3}) > 0$. Assim, para qualquer t fixo, o ponto de mínimo de $P_4(x, t)$ é atingido em $(\sqrt{3}\varphi(t), \varphi(t))$ e o valor mínimo é $-8|\varphi(t)|^4$.

Sendo assim, escolha

$$0 < K < \frac{\xi^0 \cdot \varphi(t^*)}{8|\varphi(t^*)|^4}$$

e observe que obtemos

$$E(x, y, t^*, \xi^0) \geq -\xi^0 \cdot \varphi(t^*) - 8K|\varphi(t^*)|^4 > -\xi^0 \cdot \varphi(t^*) + 8\frac{\xi^0 \cdot \varphi(t^*)}{8|\varphi(t^*)|^4}|\varphi(t^*)|^4 = 0.$$

Então, temos

$$|I_*(x, \xi)| = \left| \int_{\mathbb{R}^m} e^{-i(x-y-i\varphi(t^*)) \cdot \xi - K|\xi| [|x-y-i\varphi(t^*)|^4]} g(y) h(y, t^*) dy \right| \leq c_1 e^{-c_2 |\xi|},$$

para certas constantes $c_1, c_2 > 0$ e ξ em uma vizinhança cônica de ξ^0 .

Agora, queremos estimar

$$I(x, \xi) = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\gamma} e^{-i(x-y-i\varphi(t)) \cdot \xi - K|\xi| [|x-y-i\varphi(t)|^4]} L(g(y) h(y, t)) dt dy.$$

Escolha $g \in C_c^\infty(B(0, r))$ tal que $g(y) \equiv 1$ quando $|y| \leq (1 - \epsilon)r$, onde $\epsilon > 0$ será determinado a

posteriori.

Para $|y| \geq (1 - \epsilon)r$, temos

$$\begin{aligned} E(0, y, t^*, \xi^0) &= -\xi^0 \cdot \varphi(t) + K [|y|^4 - 2|\varphi(t)|^2|y|^2 - 4\langle y, \varphi(t) \rangle^2 + |\varphi(t)|^4] \\ &\geq -\xi^0 \cdot \varphi(t) + K [|y|^4 - 6|\varphi(t)|^2|y|^2 + |\varphi(t)|^4] \\ &= -\xi^0 \cdot \varphi(t) + K [(|y|^2 - 3|\varphi(t)|^2)^2 - 8|\varphi(t)|^4] \\ &\geq -\xi^0 \cdot \varphi(t) + K [(r^2 - 4|\varphi(t)|^2)^2], \end{aligned}$$

onde a primeira desigualdade decorre da desigualdade de Cauchy-Schwartz e a segunda é consequência da hipótese 2 com ϵ suficientemente pequeno.

A hipótese 3 nos permite ainda escolher K de forma que

$$\frac{\sup_{t \in \gamma} \xi^0 \cdot \varphi(t)}{(r^2 - 4|\varphi(t)|^2)^2} < K < -\frac{\xi^0 \cdot \varphi(t^*)}{8|\varphi(t^*)|^4}.$$

Portanto, para x próximo da origem e ξ em uma vizinhança cônica de ξ^0 , existem constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$|I(x, \xi)| \leq c_1 e^{-c_2|\xi|}.$$

Logo, $(0, \xi^0) \notin WF_a h_0$. ■

O segundo resultado a ser apresentado neste apêndice também está presente em [5].

Teorema 3.2.3. *Seja $\xi^0 \in \mathbb{R}^m - \{0\}$. Suponha que existam $t^* \in U - \{0\}$ e uma curva lipschitziana γ em V que liga t^* à origem tais que:*

1. $-\varphi(t^*) \cdot \xi^0 > 0$,

2. $6 \sup_{t \in \gamma} |\varphi(t)| < r$,

3. $2\alpha |\varphi(t^*)|^6 \sup_{t \in \gamma} \varphi(t) \cdot \xi^0 < \left[r^2 - \sup_{t \in \gamma} |\varphi(t)|^2 \right]^3 [-\varphi(t^*) \cdot \xi^0]$,

onde, $\alpha = (4 + 2\sqrt{5})((4 + 2\sqrt{5})^2 - 12(5 + 2\sqrt{5}))$. Então, dada uma solução Lipschitz contínua de \mathcal{L} em Ω , $(0, \xi^0) \notin WF_a h_0$.

PROVA. Assim como na demonstração anterior, iremos estudar com mais detalhes o polinômio obtido da FBI generalizada. Aqui, ao utilizarmos a FBI $\mathcal{F}_3 u(x, \xi)$, ficamos com a responsabilidade de estimar $P_6(x, t)$.

Observe que,

$$\begin{aligned} E(x, y, t, \xi) &= -\xi \cdot \varphi(t) + K|\xi| \operatorname{Re}\{[x - y - i\varphi(t)]^6\} \\ &= -\xi \cdot \varphi(t) + K|\xi|[(|x - y|^2 - |\varphi(t)|^2)^3 - 12(|x - y|^2 - |\varphi(t)|^2)((x - y) \cdot \varphi(t))^2], \end{aligned}$$

daí

$$\begin{aligned} P_6(x, t) &= |x|^6 - 3|\varphi(t)|^2|x|^4 + 3|\varphi(t)|^4|x|^2 - |\varphi(t)|^6 - 12(|x|^2 - |\varphi(t)|^2)(x \cdot \varphi(t))^2 \\ &= |x|^6 - 3|\varphi(t)|^2|x|^4 + [3|\varphi(t)|^4 - 12(x \cdot \varphi(t))^2]|x|^2 + 12[x \cdot \varphi(t)]^2|\varphi(t)|^2 - |\varphi(t)|^6. \end{aligned}$$

Para t fixo, o valor mínimo de $P_6(x, t)$ é atingido quando $\nabla_x P_6(x, t) = 0$.

Assim, se x_0 é mínimo de P_6 , então

$$6(|x_0|^2 - |\varphi(t)|^2)^2 - 24(x_0 \cdot \varphi(t))^2 x_0 - 24(|x_0|^2 - |\varphi(t)|^2)(x_0 \cdot \varphi(t))\varphi(t) = 0$$

e, por consequência,

$$[(|x_0|^2 - |\varphi(t)|^2)^2 - 4(x_0 \cdot \varphi(t))^2]x = 4(|x_0|^2 - |\varphi(t)|^2)(x_0 \cdot \varphi(t))\varphi(t). \quad (3.20)$$

Queremos mostrar que $(|x_0|^2 - |\varphi(t)|^2)^2 - 4(x_0 \cdot \varphi(t))^2 \neq 0$.

Suponha que $(|x_0|^2 - |\varphi(t)|^2)^2 - 4(x_0 \cdot \varphi(t))^2 = 0$. Então, por (3.20) temos

$$(|x_0|^2 - |\varphi(t)|^2)(x_0 \cdot \varphi(t))\varphi(t) = 0. \quad (3.21)$$

Pela condição **1.** das nossas hipóteses, podemos assumir que $\varphi(t) \neq 0$. Deste modo, nos resta que

$$(|x_0|^2 - |\varphi(t)|^2)(x_0 \cdot \varphi(t)) = 0. \quad (3.22)$$

Sendo assim, pelas equações (3.22) e (3.20), temos

$$|x_0| = |\varphi(t)| \text{ e } x_0 \cdot \varphi(t) = 0.$$

Logo, concluímos que

$$P_6(x_0, t) = (|x_0|^2 - |\varphi(t)|^2)^3 - 12(|x_0|^2 - |\varphi(t)|^2)(x_0 \cdot \varphi(t))^2 = 0.$$

Mas, uma vez que assumimos $\varphi(t) \neq 0$, deveríamos ter $P_6(0, t) = -|\varphi(t)|^6 < P_6(x_0, t) = 0$, que é uma contradição. Portanto, devemos ter $(|x_0|^2 - |\varphi(t)|^2)^2 - 4(x_0 \cdot \varphi(t))^2 \neq 0$.

Deste modo, o mínimo de P_6 deve ocorrer em um ponto da forma $c\varphi(t)$ para algum $c \in \mathbb{R}$. Se $x_0 = c\varphi(t)$, então

$$\begin{aligned} P_6(c\varphi(t), \varphi(t)) &= c^6|\varphi(t)|^6 - 3|\varphi(t)|^2|c\varphi(t)|^4 + 3|\varphi(t)|^4|c\varphi(t)|^2 - 12\langle c\varphi(t), \varphi(t) \rangle^2|c\varphi(t)|^2 + \\ &+ 12\langle c\varphi(t), \varphi(t) \rangle^2|\varphi(t)|^2 - |\varphi(t)|^6. \end{aligned}$$

Deste modo,

$$P_6(c\varphi(t), \varphi(t)) = c^6|\varphi(t)|^6 - 3c^4|\varphi(t)|^6 + 3c^4|\varphi(t)|^6 - 12c^4|\varphi(t)|^6 + 12c^2|\varphi(t)|^6 - |\varphi(t)|^6.$$

Assim,

$$P_6(c\varphi(t), \varphi(t)) = |\varphi(t)|^6(c^6 - 3c^4 + 3c^2 - 1 - 12c^4 + 12c^2) = |\varphi(t)|^6[(c^2 - 1)^3 - 12c^2(c^2 - 1)].$$

Logo, estamos buscando o valor de c que minimiza o polinômio $q_1(c) = (c^2 - 1)^3 - 12(c^2 - 1)c^2$. Faça $s = c^2$, neste caso, procuramos minimizar $q_2(s) = (s - 1)^3 - 12(s - 1)s$ com $s \in [0, \infty]$. Uma vez que: $q_2'(s) = 3(s^2 - 10s + 5) = 0$ se, e somente se, $s = \frac{10 \pm 4\sqrt{5}}{2} = 5 \pm 2\sqrt{5}$; $q_2''(s) = 6s - 10$ que é positivo quando $s = 5 + 2\sqrt{5}$ e negativo quando $s = 5 - 2\sqrt{5}$, temos que o mínimo de q_2 é atingido em $s = 5 + 2\sqrt{5}$.

Portanto, o valor mínimo de $P_6(x, t)$ é

$$\alpha|\varphi(t)|^6 = |\varphi(t)|^6[(5 + 2\sqrt{5} - 1)^3 - 12(5 + 2\sqrt{5} - 1)(5 + 2\sqrt{5})] = |\varphi(t)|^6(4 + 2\sqrt{5})[(4 + 2\sqrt{5})^2 - 12(5 + 2\sqrt{5})]$$

Deste modo, escolha uma constante K de forma que $0 < K < \frac{\xi^0 \cdot \varphi(t^*)}{\alpha|\varphi(t^*)|^6}$. Assim, existem

contantes positivas c_1 e c_2 de forma que a integral

$$I_*(x, \xi) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{i(x-y-i\varphi(t^*)) \cdot \xi - K|\xi|[x-y-i\varphi(t^*)]^4} g(y)h(y, t^*)dy$$

satisfaz

$$|I_*(x, \xi)| \leq c_1 e^{-c_2|\xi|}, \text{ para } \xi \text{ em uma vizinhança cônica de } \xi^0.$$

Para estimar a integral

$$I(x, \xi) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{i(x-y-i\varphi(t)) \cdot \xi - K|\xi|[x-y-i\varphi(t)]^4} L(g(y)h(y, t))dtdy,$$

escolha $g(y) \equiv 1$ para $|y| \leq (1-\varepsilon)r$ e considere a função $E(0, y, t^*, \xi^0)$ para $|y| \leq (1-\varepsilon)r$, onde $\varepsilon > 0$ será escolhido suficientemente pequeno de forma que (essa escolha é possível graças a hipótese **2.**)

$$|y \cdot \varphi(t)| < \frac{1}{5}(|y|^2 - |\varphi(t)|^2).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} E(0, y, t^*, \xi^0) &= -\xi^0 \cdot \varphi(t) + K[(|y|^2 - |\varphi(t)|^2)^3 - 12(|y|^2 - |\varphi(t)|^2)(y \cdot \varphi(t))^2] \\ &\geq -\xi^0 \cdot \varphi(t) + K[(|y|^2 - |\varphi(t)|^2)^3 - \frac{12}{25}(|y|^2 - |\varphi(t)|^2)^3] \\ &\geq -\xi^0 \cdot \varphi(t) + \frac{K}{2}(|y|^2 - |\varphi(t)|^2)^3. \end{aligned}$$

Assim, pela hipótese **3.**, podemos escolher K de forma que

$$2 \frac{\sup_{\gamma} \xi^0 \cdot \varphi(t)}{(r^2 - \sup_{\gamma} |\varphi(t)|^2)^3} < K < -\frac{\xi^0 \cdot \varphi(t^*)}{\alpha |\varphi(t^*)|^6}.$$

Deste modo, existem constantes positivas c_3 e c_4 tais que para x próximo da origem e ξ em uma vizinhança cônica de ξ^0 , temos

$$|I(x, \xi)| \leq c_3 e^{-c_4|\xi|}.$$

Deste modo, por definição, $(0, \xi^0) \notin WF_a h_0$.

■

APÊNDICE B: Distribuições definidas em variedades diferenciáveis

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, então podemos definir uma distribuição em Ω por uma das seguintes formas equivalentes (para a prova destas equivalências, veja [18], páginas 4-6):

Definição 3.2.1. *Uma distribuição u em Ω é uma forma linear em $C_c^\infty(\Omega)$ tal que para todo subconjunto compacto K de Ω , existem constantes positivas c e k tais que*

$$|u(\phi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |D^\alpha \phi|, \quad \phi \in C_c^\infty(K).$$

A segunda definição é a equivalência estabelecida no Teorema 1.3.1 de [18]:

Teorema 3.2.4. *Uma forma linear u em $C_c^\infty(\Omega)$ é uma distribuição se, e somente se, $u(\phi_j) \rightarrow 0$ quando $j \rightarrow \infty$, para toda sequência $(\phi_j)_j$ de funções em $C_c^\infty(\Omega)$ tal que*

1. *para todo multi-índice α , $D^\alpha \phi_j$ uniformemente quando $j \rightarrow \infty$;*
2. *Existe um conjunto compacto fixo $K \subset \Omega$ tal que $\text{supp}(\phi_j) \subset K$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Antes de darmos continuidade, relembre a definição de variedade diferenciável apresentada na Seção 1.3:

Definição 3.2.2. *Seja Ω um espaço topológico de Hausdorff com base enumerável e*

$$\mathcal{F} = \{(U, x); U \subset \Omega \text{ é aberto e } x : U \rightarrow \mathbb{R}^N \text{ é homeomorfismo sobre } x(U)\}$$

tais que:

1. $\bigcup_{(U,x) \in \mathcal{F}} U = \Omega$;

2. A aplicação $x' \circ x^{-1} : x(U \cap U') \rightarrow x'(U \cap U')$ é C^∞ para cada par $(U, x), (U', x') \in \mathcal{F}$;
3. Em relação aos itens (1) e (2), a família \mathcal{F} é maximal, isto é, se V é um subconjunto aberto e não-vazio de Ω e $y : V \rightarrow y(V)$ é um homeomorfismo sobre o aberto $y(V) \subset \mathbb{R}^N$ tal que, para qualquer $(U, x) \in \mathcal{F}$ com $U \cap V \neq \emptyset$, a composição $y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V)$ é C^∞ , então $(V, y) \in \mathcal{F}$.

O par (Ω, \mathcal{F}) é dito uma variedade diferenciável de dimensão N . É comum chamar cada par (U, x) de carta local ou sistema local de coordenadas.

Definição 3.2.3. Uma aplicação $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ é dita de classe C^k em Ω se, para todo par $(U, x) \in \mathcal{F}$, tem-se que a composição $f \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow \mathbb{C}$ é de classe C^k . Denotaremos o conjunto das aplicações C^k em Ω por $C^k(\Omega)$.

Definição 3.2.4. Uma aplicação $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ é de classe L_p^{loc} em Ω se, para todo par $(U, x) \in \mathcal{F}$, tem-se que a composição $f \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow \mathbb{C}$ é de classe L_p^{loc} em U . Denotaremos o conjunto das aplicações L_p^{loc} em Ω por $L_p^{loc}(\Omega)$.

Daqui em diante, apresentamos parte da discussão presente no texto Linear Partial Differential Operators de Lars Hormander (veja [18]). Nos concentramos apenas no essencial para definirmos distribuições em variedades diferenciáveis e recomendamos a leitura do texto original para um tratamento mais aprofundado.

Observação 3.2.4. Sejam, Ω uma variedade diferenciável e (U, x) uma carta local de Ω . Se $\nu : U \rightarrow \Omega$ possui suporte compacto e

$$u \doteq \nu \circ x, \text{ em } \Omega, \quad u = 0, \text{ em } \Omega^c,$$

então $u \in C^k(\Omega)$ se, e somente se, $\nu \in C^k(\Omega)$. Este resultado também é válido se trocarmos $C^k(\Omega)$ por $L_p^{loc}(\Omega)$. Deste modo, com certo abuso de notação, podemos denotar u por $\nu \circ x$.

Agora, iremos dar uma abordagem diferente para o conjunto $C^k(\Omega)$.

Sejam (U, x) uma carta local de Ω e $u \in C^k(\Omega)$. Defina $u_x \doteq u \circ x^{-1}$. Deste modo, $u_x \in C^k(U)$ e, pela condição 2 da definição de variedade diferenciável, se $(U', x') \in \mathcal{F}$, $U \cap U' \neq \emptyset$ e $u_{x'} \doteq u \circ x'^{-1}$, então

$$u_{x'} = u_x \circ (xx'^{-1}), \quad \text{em } x'(U \cap U'). \quad (3.23)$$

Por outro lado, se para cada carta local $(U, x) \in \mathcal{F}$ definirmos u_x de modo que a equação (3.23) seja válida para quaisquer duas cartas locais de Ω , então existe uma única aplicação $u \in C^k(\Omega)$ tal que $u_x = u \circ x^{-1}$, para todo sistema local de coordenadas x . Ademais, $u \in C^k(\Omega)$ se, e somente se, $u_x \in C^k(U)$, $\forall (U, x) \in \mathcal{F}$.

Assim, pavimentamos o início do caminho para definirmos distribuições em variedades como a composição de uma distribuição com um mapa infinitamente diferenciável.

Sejam U_1 e U_2 abertos de \mathbb{R}^n e $\varphi : U_1 \rightarrow U_2$ um difeomorfismo. Para $u \in C^0(U)$ defina

$$(u \circ \varphi)(x) = u(\varphi(x)), \quad x \in U. \quad (3.24)$$

Seja J o jacobiano de φ^{-1} . Então, podemos reinterpretar a equação (3.24) na forma de solução fraca:

$$\int \psi(u \circ \varphi) dx = \int \psi(\varphi^{-1}(y))u(y)|J(y)|dy, \quad \psi \in C_c^\infty(U_1). \quad (3.25)$$

Assim, se $u \in \mathcal{D}'(U_2)$ podemos definir $u \circ \varphi$ através da seguinte igualdade

$$(u \circ \varphi)(\psi) \doteq u((\psi \circ \varphi^{-1})|J|), \quad \psi \in C_c^\infty(U_1). \quad (3.26)$$

Deste modo, definimos uma nova distribuição $u \circ \varphi \in \mathcal{D}'(U_1)$ através da equação (3.26). Além disso, esta definição está de acordo com a identidade apresentada em (3.24).

Pelo Teorema 1.6.3' de [18], a regra da cadeira pode ser estendida:

$$D_j(u \circ \varphi) = \sum_{k=1}^n (D_j \varphi_k)(u_k \circ \varphi), \quad u \in \mathcal{D}'(U_2), \quad u_k = \frac{\partial u}{\partial x_k}.$$

De maneira similar se $\psi \in C^\infty(U_2)$ e $u \in \mathcal{D}'(U_2)$, então $(\psi u) \circ \varphi = (\psi \circ \varphi)(u \circ \varphi)$. Mais ainda, se $\varphi_1 : U_1 \rightarrow U_2$ e $\varphi_2 : U_2 \rightarrow U_3$ são difeomorfismos, então $(u \circ \varphi_2) \circ \varphi_1 = u \circ (\varphi_2 \circ \varphi_1)$, $u \in \mathcal{D}'(U_3)$.

Definição 3.2.5. *Seja Ω uma variedade diferenciável. Se, para cada carta local (U, x) de Ω , existe uma distribuição $u_x \in \mathcal{D}'(U)$ tal que para toda carta local (x', U') com $U \cap U' \neq \emptyset$, temos*

$$u_{x'} = u_x \circ (xx'^{-1}), \quad \text{em } x'(U \cap U'),$$

então diremos que o sistema u_x é uma distribuição u em Ω . Denotaremos o conjunto de todas as distribuições em Ω por $\mathcal{D}'(\Omega)$.