



UNIVERSIDADE FEDERAL  
DE ALAGOAS

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

JOÃO MATHEUS LEMOS MEDEIROS

AS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS DAS CÔNICAS

Maceió  
2024

JOÃO MATHEUS LEMOS MEDEIROS

AS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS DAS CÔNICAS

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Vânio Fragoso de Melo.

Maceió  
2024

**Catálogo na Fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**

Bibliotecária: Maria Helena Mendes Lessa – CRB-4 – 1616

M488t

Medeiros, João Matheus Lemos.

As transformações geométricas das cônicas / João Matheus Lemos  
Medeiros. - 2024.  
88 f. : il.

Orientador: Vânio Fragoso de Melo.  
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática : Licenciatura)  
– Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2024.

Bibliografia: f. 88.

1. Curvas elípticas. 2. Curvas cônicas. 3. Transformações Geométricas.  
4. Curvatura – Geometria. I. Título.

CDU: 514

JOÃO MATHEUS LEMOS MEDEIROS

## AS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS DAS CÔNICAS

Trabalho de conclusão de curso entregue ao corpo docente do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, Campus A.C. Simões, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática, avaliado pela banca examinadora constituída pelos professores:

Documento assinado digitalmente  
 **VÂNIO FRAGOSO DE MELO**  
Data: 28/04/2024 22:06:27-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Prof. Dr. Vânio Fragoso de Melo  
Instituto de Matemática - UFAL  
Orientador

Documento assinado digitalmente  
 **ISNALDO ISAAC BARBOSA**  
Data: 28/04/2024 17:05:01-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Isnaldo Isaac  
Instituto de Matemática - UFAL  
Examinador

Documento assinado digitalmente  
 **JOSE ANDERSON DE LIMA E SILVA**  
Data: 29/04/2024 19:00:42-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

José Anderson de Lima e Silva  
Instituto de Matemática - UFAL  
Examinador

Aprovado em: 19 de Abril de 2024.

## **AGRADECIMENTOS**

À minha esposa Isabel Ister de Araújo Santos Medeiros com amor e gratidão, que tem sido meu apoio e inspiração durante todo o período de elaboração deste TCC. Sua paciência, incentivo e amor incondicional foram fundamentais para que eu pudesse superar todos os desafios que surgiram.

Também aos meus pais Michelline Lemos e Marcos Medeiros, que sempre me apoiaram em todas as fases da minha vida acadêmica e me ensinaram a importância do esforço, dedicação e perseverança. Sem o seu apoio incondicional, eu não teria chegado até aqui.

Aos meus parentes, que sempre estiveram presentes em minha vida e me ofereceram seu carinho e encorajamento em todos os momentos, dedico este trabalho com imensa gratidão.

Por fim, agradeço aos meus amigos, que me acompanharam em toda a jornada e me ajudaram a manter o equilíbrio emocional em momentos de estresse e pressão. Sua amizade, momentos de descontração e principalmente lealdade são uma bênção em minha vida. A todos vocês, muito obrigado por tudo.

## RESUMO

A geometria analítica desempenha um papel fundamental na compreensão das formas e propriedades das curvas no plano. Um dos tópicos mais fascinantes dessa área é o estudo das cônicas, que podem ser obtidas pela interseção de um plano com um cone. Neste trabalho, analisaremos as Transformações Geométricas aplicadas às cônicas, como translação, rotação e homotetia, destacando como afetam as propriedades e a forma das curvas.

**Palavras-chave:** Cônicas. Transformações Geométricas.

## ABSTRACT

Analytical geometry plays a fundamental role in understanding the shapes and properties of curves in the plane. One of the most fascinating topics in this area is the study of conics, which are curves formed by the intersection of a plane with a cone. In this work, we will analyze the Geometric Transformations applied to conics, such as translation, rotation and homothety, highlighting how they affect the properties and shape of the curves.

**Keywords:** Conics. Geometric Transformations.

# Sumário

|          |                                                                   |           |
|----------|-------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>                                                 | <b>7</b>  |
| <b>2</b> | <b>Cônicas</b>                                                    | <b>8</b>  |
| 2.1      | Elipse                                                            | 8         |
| 2.1.1    | Forma canônica da elipse                                          | 12        |
| 2.1.2    | Esboço da Elipse                                                  | 13        |
| 2.1.3    | Translação dos eixos coordenados                                  | 16        |
| 2.1.4    | Equação do segundo grau com $B = 0$ e $AC > 0$                    | 20        |
| 2.2      | Hipérbole                                                         | 23        |
| 2.2.1    | Forma canônica da hipérbole                                       | 26        |
| 2.2.2    | Esboço da Hipérbole                                               | 27        |
| 2.2.3    | Equação do segundo grau com $B = 0$ e $AC < 0$                    | 33        |
| 2.3      | Parábola                                                          | 35        |
| 2.3.1    | Formas canônicas da parábola                                      | 37        |
| 2.3.2    | A equação geral do segundo grau com $B = 0$ e $AC = 0$            | 43        |
| <b>3</b> | <b>Equação Geral do Segundo Grau em <math>\mathbb{R}^2</math></b> | <b>47</b> |
| 3.1      | Autovalores e autovetores de uma matriz real $2 \times 2$         | 48        |
| 3.2      | Rotação dos Eixos Coordenados                                     | 50        |
| 3.3      | Formas Quadráticas                                                | 54        |
| 3.4      | Equação Geral do Segundo Grau em $\mathbb{R}^2$                   | 60        |
| <b>4</b> | <b>Transformações Geométricas Planas</b>                          | <b>64</b> |
| 4.1      | Transformações no plano                                           | 64        |
| 4.2      | Transformações lineares                                           | 68        |
| 4.3      | Operações com transformações                                      | 74        |
| 4.4      | Isometrias no plano                                               | 79        |

# Capítulo 1

## Introdução

A Matemática desempenha um papel fundamental na compreensão e modelagem de fenômenos naturais e científicos. Neste trabalho, exploraremos diferentes conceitos matemáticos, focalizando especialmente na área das cônicas e suas transformações geométricas planas.

Inicialmente, abordaremos as cônicas, que podem ser obtidas a partir da interseção de um plano com um cone. Essas curvas incluem a elipse, a hipérbole e a parábola. Estudaremos suas definições, propriedades geométricas e formas de representação algébrica, destacando suas características distintivas.

Em seguida, exploraremos a resolução e a análise de equações gerais do segundo grau no conjunto dos números reais. Investigaremos autovalores e autovetores de uma matriz real  $2 \times 2$ , como também rotação de Eixos Coordenados, formas quadráticas, além da Equação Geral do Segundo Grau em  $\mathbb{R}^2$ , ampliando nosso entendimento sobre suas implicações e aplicações práticas.

Por fim, abordaremos as Transformações Geométricas Planas, investigando operações como transformações no plano, transformações lineares, operações com transformações e isomerias no plano.

# Capítulo 2

## Cônicas

Neste trabalho, como pré-requisito, é necessário conhecer as propriedades das Cônicas. Alguns conceitos foram detalhados a seguir, os quais foram utilizados ao longo do texto, como as equações reduzidas e os focos das figuras.

### 2.1 Elipse

**Definição 2.1** Dados dois pontos  $F$  e  $F_1$  e um número  $r > d(F_1, F)$ , o conjunto dos pontos  $P$  do plano tais que

$$d(P, F) + d(P, F_1) = r$$

é chamado elipse de focos  $F_1$  e  $F$  e eixo maior  $r$ .

Graficamente podemos obter um ponto da elipse fazendo a seguinte construção: centramos o compasso em um dos focos e com abertura igual a  $s$  ( $s < r$ ) traçamos um arco  $C$ . Depois, centramos no outro foco e com abertura igual a  $r - s$  traçamos o arco  $C_1$ . A interseção de  $C$  e  $C_1$  é um ponto da elipse. Veja a Figura 2.1.

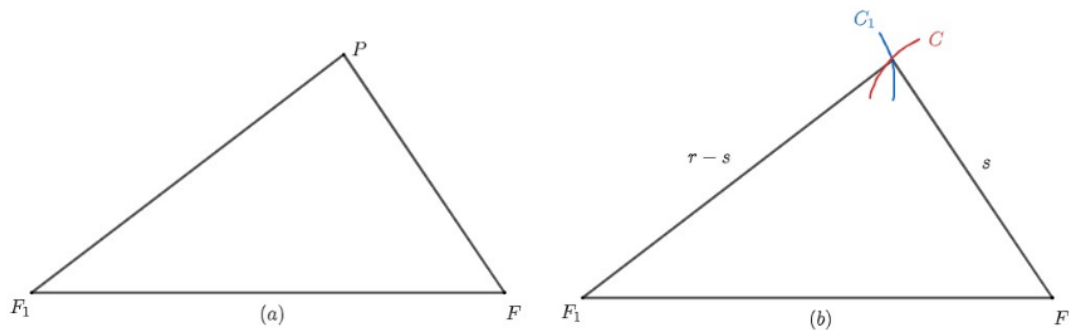


Figura 2.1:

A partir desta construção, é possível obter quantos pontos da elipse desejarmos. Ligando estes pontos, obtemos a representação gráfica da elipse (Figura 2.2).

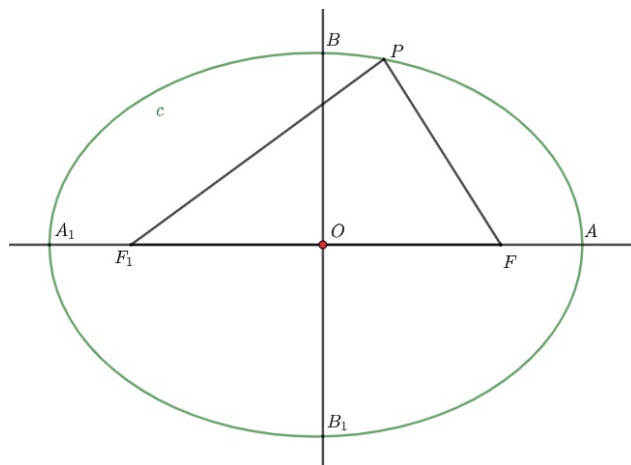


Figura 2.2:

Os pontos  $A_1$  e  $A$  foram obtidos tomando-se  $s = (r - d(F, F_1))/2$  e os pontos  $B$  e  $B_1$ , tomando-se  $s = r/2$ . Estes pontos são chamados vértices da elipse. Observe que a distância entre  $A_1$  e  $A$  é igual ao eixo maior  $r$  da elipse e que o segmento  $BB_1$  é perpendicular a  $A_1A$ . O ponto  $O$ , interseção de  $A_1A$  e  $BB_1$ , é o **centro da elipse**.

Na prática, podemos traçar uma elipse usando um laço completo de barbante e dois pregos. Fixamos os pregos em dois pontos (focos) e fazemos um lápis deslizar sobre o papel de modo que, apoiado nos pregos e na ponta do lápis, o laço de barbante se mantenha esticado.

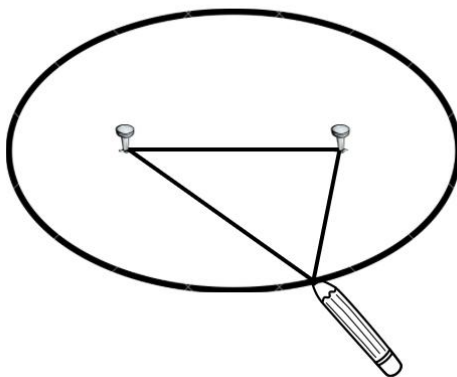


Figura 2.3:

A seguir, vamos deduzir uma equação da elipse na situação particular em que seu centro coincide com a origem do sistema e os focos estão sobre os eixos coordenados. Temos dois casos, conforme ilustra a Figura 2.4.

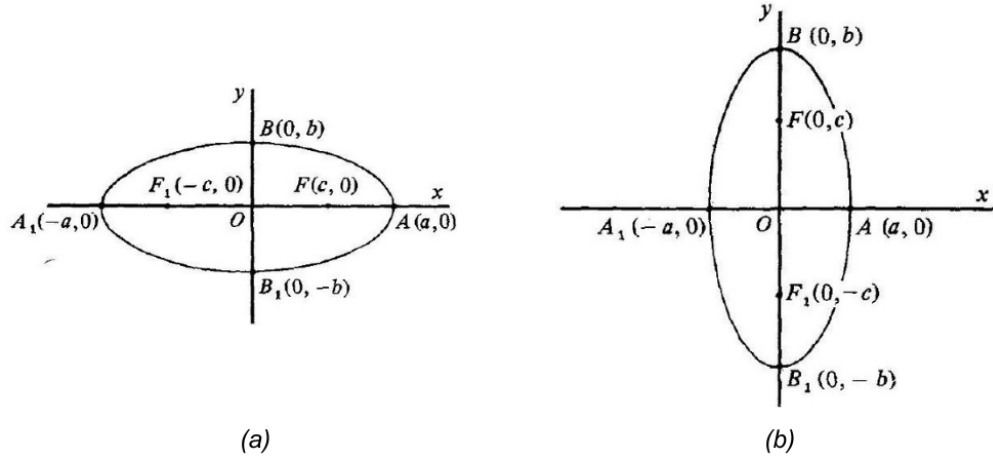


Figura 2.4:

Quando os focos estão sobre o eixo  $x$ , temos

$$d(P, F_1) + d(P, F) = d(A_1, A),$$

onde  $P(x, y)$  é um ponto qualquer da elipse. Para maior simplicidade nas contas vamos indicar o eixo maior por  $2a$  e a distância focal  $d(F_1, F)$  por  $2c$ . Com esta notação, em termos das coordenadas de  $F_1, F$  e  $P$ , temos

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

ou

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando ambos os membros desta equação ao quadrado e simplificando o resultado, obtemos

$$xc - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Novamente, elevando esta equação ao quadrado e simplificando o resultado, obtemos

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \quad (2.1)$$

Na Figura 2.4a, por definição do ponto  $B$ , temos

$$d(B, F) = a \text{ e } d(O, F) = c.$$

Logo, do triângulo  $OBF$ , deduzimos que  $a^2 - c^2 = b^2$ .

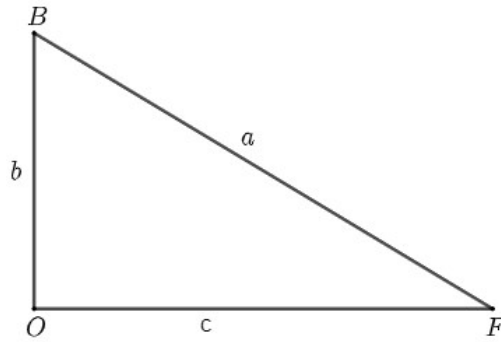


Figura 2.5:

Introduzindo este valor em (2.1), obtemos

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

que é a equação da elipse.

**Observação 2.1** Na verdade, demonstramos apenas que um ponto  $P(x, y)$  que satisfaz a equação

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \quad (2.2)$$

também satisfaz a equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2.3)$$

Seguindo os passos da demonstração apresentada, no sentido inverso, podemos mostrar que todo ponto  $P(x, y)$  que satisfaz (2.3) também satisfaz (2.2). Assim, as equações (2.2) e (2.3) são equivalentes e (2.3) é, de fato, uma equação da elipse. Quando os focos da elipse estão sobre o eixo  $y$ , como na Figura 2.6, sua equação é, também,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

sendo agora  $2b$  o seu eixo maior. Neste caso, o vértice  $A$  é tal que  $d(F, A) = b$  e, portanto, vale  $b^2 - c^2 = a^2$  (Figura 2.6).

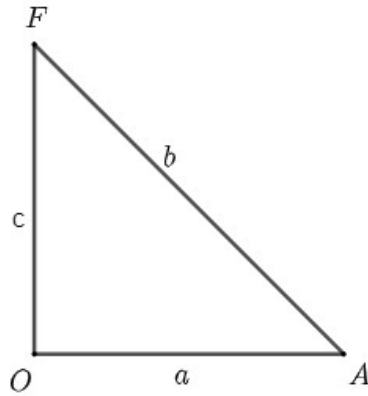


Figura 2.6:

Resumindo, temos: em ambos os casos, a equação da elipse é

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Se  $a > b$ , os focos da elipse estão no eixo  $x$  e são  $F_1(-c, 0)$  e  $F(c, 0)$ , onde  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ . Se  $a < b$ , os focos da elipse estão no eixo  $y$  e são  $F_1(0, -c)$  e  $F(0, c)$ , onde  $c = \sqrt{b^2 - a^2}$ .

### 2.1.1 Forma canônica da elipse

A partir da definição da elipse, vamos obter sua equação em relação a um sistema de eixos ortogonais  $OXY$  para alguns casos especiais.

#### Elipse $\mathcal{E}$ com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo $OX$

Neste caso, os vértices ( $A_1, A_2, B_1$  e  $B_2$ ) e focos ( $F_1$  e  $F_2$ ) de  $\mathcal{E}$  são:

$$\begin{aligned} F_1 &= (-c, 0) & A_1 &= (-a, 0) & B_1 &= (0, -b) \\ F_2 &= (c, 0) & A_2 &= (a, 0) & B_2 &= (0, b), \end{aligned}$$

onde  $0 < c < a$  e  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ . Logo,

$$\begin{aligned}
P = (x, y) \in \mathcal{E} &\iff d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \\
&\iff \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \\
&\iff \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
&\iff (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\
&\iff x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 \\
&\quad - 2xc + c^2 + y^2 \\
&\iff 4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
&\iff a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
&\iff (a^2 - cx)^2 = a^2((x-c)^2 + y^2) \\
&\iff a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) \\
&\iff (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 = a^2(a^2 - c^2) \\
&\iff b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \\
&\iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.
\end{aligned}$$

A equação  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  é a **forma canônica da elipse de centro na origem e reta focal coincidente com o eixo  $OX$** .

### 2.1.2 Esboço da Elipse

Para esboçar uma elipse  $\mathcal{E}$  no plano, consideremos um sistema de eixos ortogonais  $OXY$  com origem  $O$  no centro e eixo  $OX$  igual à reta focal de  $\mathcal{E}$ . Nesse sistema, a elipse tem a forma canônica obtida acima:

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Assim,  $\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2}$  e, portanto,  $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ .

Seja a função

$$\begin{aligned}
f : [0, a] &\implies \mathbb{R} \\
x &\longmapsto f(x) = y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}
\end{aligned}$$

cujo gráfico é a parte da elipse situada no primeiro quadrante do plano. Para  $x = 0$ , temos  $y = b$  e para  $x = a$ , temos  $y = 0$ . A função  $f(x)$  é decrescente, pois, para  $x_0, x_1 \in [0, a]$ , temos:

$$\begin{aligned}
x_0 < x_1 &\iff x_0^2 < x_1^2 \iff a^2 - x_0^2 > a^2 - x_1^2 \\
&\iff \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x_0^2} > \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x_1^2} \iff f(x_0) > f(x_1)
\end{aligned}$$

Outra maneira de verificar que  $f(x)$  é decrescente é calculando sua primeira derivada e verificando que ela é sempre negativa para  $x \in (0, a)$  :

$$f'(x) = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}} < 0$$

Também, para  $x \in (0, a)$ , a derivada segunda é também sempre negativa:

$$f''(x) = -\frac{ba}{(a^2 - x^2)^{3/2}} < 0$$

Portanto,  $f(x)$  é côncava, e o gráfico da função é da forma:

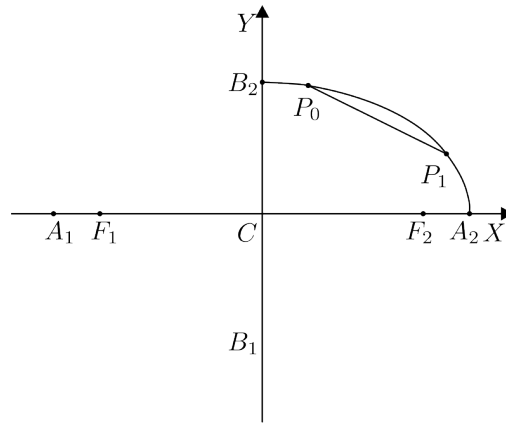


Figura 2.7: Gráfico de  $f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ ,  $x \in [0, a]$

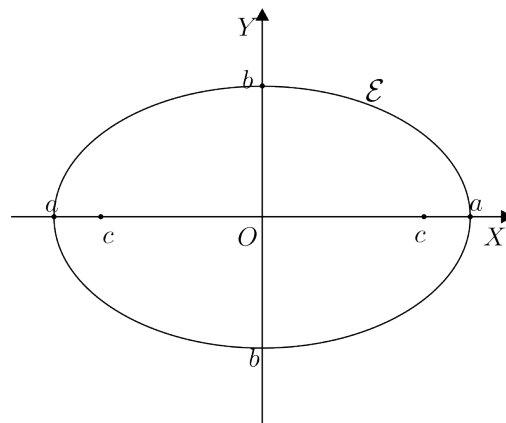


Figura 2.8: Esboço de  $\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Como a elipse é simétrica em relação ao eixo-  $OX$  (reta focal) e ao eixo- $OY$  (reta não focal), seu gráfico tem a forma da Figura 2.8.

## Elipse com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo $OY$

Neste caso, temos que:

$$\begin{aligned}F_1 &= (0, -c) & F_2 &= (0, c) \\A_1 &= (0, -a) & A_2 &= (0, a) \\B_1 &= (-b, 0) & B_2 &= (b, 0)\end{aligned}$$

são os focos ( $F_1$  e  $F_2$ ) e os vértices ( $A_1, A_2, B_1$  e  $B_2$ ) da elipse  $\mathcal{E}$ , onde  $0 < c < a$  e  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ .

Desenvolvendo como no caso anterior, verificamos que a equação da elipse  $\mathcal{E}$  é:

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

**Forma canônica da elipse centrada na origem cuja reta focal coincide com o eixo  $OY$ .**

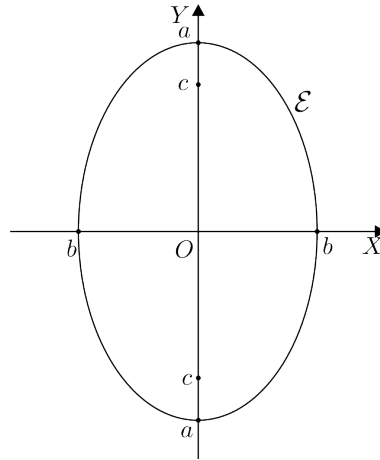


Figura 2.9: Esboço de  $\mathcal{E} : \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

**Exemplo 2.1** Dois vértices de uma elipse  $\mathcal{E}$  são os pontos  $(0, 6)$  e  $(0, -6)$  e seus focos são os pontos  $(0, 4)$  e  $(0, -4)$ . Determine a equação da elipse  $\mathcal{E}$ .

**Solução 2.1** Temos  $F_1 = (0, -4)$  e  $F_2 = (0, 4)$ .

Então, a reta focal (que contém os focos) é o eixo  $OY$ , os vértices sobre a reta focal são

$$A_1 = (0, -6) \text{ e } A_2 = (0, 6),$$

e o centro da elipse  $\mathcal{E}$  é a origem, pois

$$C = \frac{(0, 4) + (0, -4)}{2} = (0, 0).$$

Como  $a = d(C, A_1) = 6$  e  $c = d(C, F_1) = 4$ , temos que  $b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 16 = 20$ .

Portanto, a equação da elipse é

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{36} = 1$$

### 2.1.3 Translação dos eixos coordenados

Sejam  $OXY$  um sistema de eixos ortogonais,  $\bar{O} = (x_0, y_0)$  um ponto no plano e  $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$  o sistema cujos eixos  $\bar{O}\bar{X}$  e  $\bar{O}\bar{Y}$  são paralelos aos eixos  $OX$  e  $OY$  e têm o mesmo sentido destes eixos, respectivamente. Designamos por  $(\bar{x}, \bar{y})$  as coordenadas do ponto  $P$  no sistema de eixos  $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$  e por  $(x, y)$  as coordenadas de  $P$  no sistema de eixos  $OXY$ .

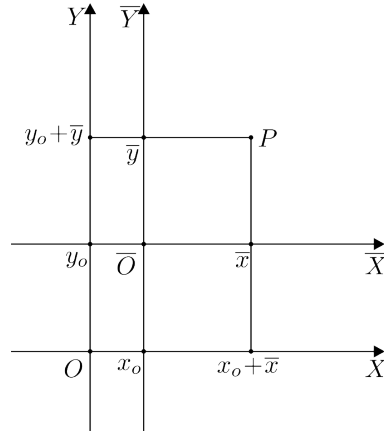


Figura 2.10:  $P = (\bar{x}, \bar{y})_{\bar{O}\bar{X}\bar{Y}} = (x_0 + \bar{x}, y_0 + \bar{y})_{OXY}$

Se  $\vec{e}_1$  e  $\vec{e}_2$  são os vetores unitários na direção e sentido, respectivamente, dos eixos  $OX$  e  $OY$  (e, portanto, dos eixos  $\bar{O}\bar{X}$  e  $\bar{O}\bar{Y}$ ) segue que:

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2, \overrightarrow{\bar{O}P} = \bar{x}\vec{e}_1 + \bar{y}\vec{e}_2 \text{ e } \overrightarrow{O\bar{O}} = x_o\vec{e}_1 + y_o\vec{e}_2$$

Como

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O\bar{O}} + \overrightarrow{\bar{O}P}$$

temos:

$$\begin{aligned} x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 &= (x_o\vec{e}_1 + y_o\vec{e}_2) + (\bar{x}\vec{e}_1 + \bar{y}\vec{e}_2) \\ &= (\bar{x} + x_o)\vec{e}_1 + (\bar{y} + y_o)\vec{e}_2 \end{aligned}$$

Logo, as coordenadas do ponto  $P$  nos sistemas  $OXY$  e  $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$  são relacionadas pelas fórmulas (Figura 2.10):

$$\begin{cases} x = \bar{x} + x_0 \\ y = \bar{y} + y_0 \end{cases}$$

O exemplo a seguir mostra como uma simples translação do sistema de eixos ortogonais pode facilitar a solução de um problema geométrico.

**Exemplo 2.2** Faça um esboço da curva

$$x^3 - 3x^2 - y^2 + 3x + 4y - 5 = 0$$

escrevendo a equação nas coordenadas  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  do sistema de eixos  $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$  obtido quando o sistema  $OXY$  é transladado para a origem  $\bar{O} = (1, 2)$ .

**Solução 2.2** Fazendo  $x = \bar{x} + 1$  e  $y = \bar{y} + 2$  na equação dada, obtemos:

$$(\bar{x} + 1)^3 - 3(\bar{x} + 1)^2 - (\bar{y} + 2)^2 + 3(\bar{x} + 1) + 4(\bar{y} + 2) - 5 = 0$$

Simplificando esta identidade, temos

$$\bar{x}^3 = \bar{y}^2$$

Então,  $\bar{y} = \pm\bar{x}^{3/2}$  e  $\bar{x} \geq 0$ .

Fazer agora o esboço da curva é bem mais simples (ver Figura 2.11).

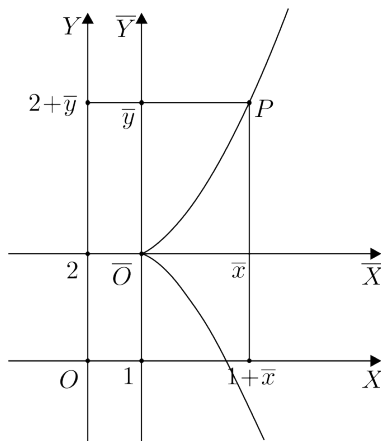


Figura 2.11:  $x^3 - 3x^2 - y^2 + 3x + 4y - 5 = 0$ .

### Elipse com centro no ponto $\bar{O} = (x_0, y_0)$

Por uma translação dos eixos coordenados vamos obter a equação de uma elipse  $\mathcal{E}$  cuja reta focal é horizontal ou vertical.

Seja  $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$  o sistema de eixos ortogonais obtido transladando o sistema  $OXY$  para a nova origem  $\bar{O}$ .

### Caso I. Reta focal paralela ao eixo $OX$

Como  $\bar{O} = (x_0, y_0)$  é o centro,  $\ell : y = y_0$  é a reta focal e  $F_1 = (x_0 - c, y_0)$  e  $F_2 = (x_0 + c, y_0)$  são os focos da elipse (pois  $d(F_1, \bar{O}) = d(F_2, \bar{O}) = c$ ), temos que um ponto  $P = (x, y) = (\bar{x} + x_0, \bar{y} + y_0)$  pertence à elipse se, e somente se,

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a,$$

ou seja,

$$\iff d((\bar{x} + x_0, \bar{y} + y_0), (x_0 - c, y_0)) + d((\bar{x} + x_0, \bar{y} + y_0), (x_0 + c, y_0)) = 2a$$

$$\iff d((\bar{x}, \bar{y}), (-c, 0)) + d((\bar{x}, \bar{y}), (c, 0)) = 2a$$

$$\iff \frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1 \iff \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Portanto, a forma canônica da equação da elipse  $\mathcal{E}$  com centro no ponto  $(x_0, y_0)$  e eixo focal paralelo ao eixo  $OX$  é:

$$\mathcal{E} : \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, \quad \text{onde} \quad b^2 = a^2 - c^2$$

Os elementos dessa elipse são:

- Reta focal:  $\ell : y = y_0$ ;
- Reta não focal:  $\ell' : x = x_0$ ;
- Focos:  $F_1 = (x_0 - c, y_0)$  e  $F_2 = (x_0 + c, y_0)$ ;
- Vértices sobre a reta focal:  $A_1 = (x_0 - a, y_0)$  e  $A_2 = (x_0 + a, y_0)$ ;
- Vértices sobre a reta não focal:  $B_1 = (x_0, y_0 - b)$  e  $B_2 = (x_0, y_0 + b)$ ;

O esboço da elipse é mostrado na Figura 2.12.

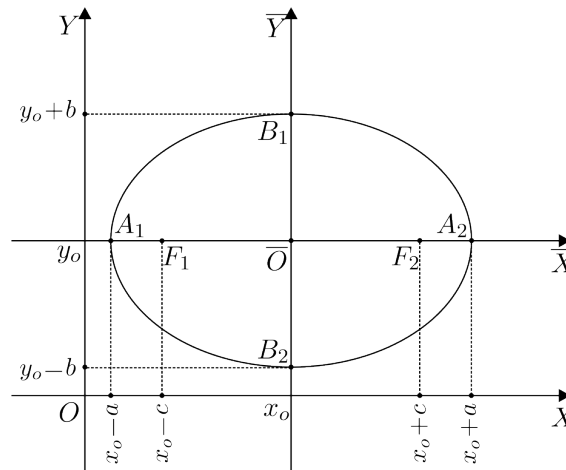


Figura 2.12:  $\mathcal{E} : \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ .

## Caso II. Reta focal paralela ao eixo $OY$

Procedendo como no caso anterior, verifica-se que a forma canônica da equação da elipse  $\mathcal{E}$  com centro no ponto  $(x_0, y_0)$  e eixo focal paralelo ao eixo  $OY$  é:

$$\mathcal{E} : \frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1, \text{ onde } b^2 = a^2 - c^2$$

Os elementos dessa elipse são:

- Reta focal:  $\ell : x = x_0$ ;
- Reta não focal:  $\ell' : y = y_0$
- Focos:  $F_1 = (x_0, y_0 - c)$  e  $F_2 = (x_0, y_0 + c)$ ;
- Vértices sobre a reta focal:  $A_1 = (x_0, y_0 - a)$  e  $A_2 = (x_0, y_0 + a)$ ;
- Vértices sobre a reta não focal:  $B_1 = (x_0 - b, y_0)$  e  $B_2 = (x_0 + b, y_0)$ .

O esboço da elipse é mostrado na Figura 2.13.

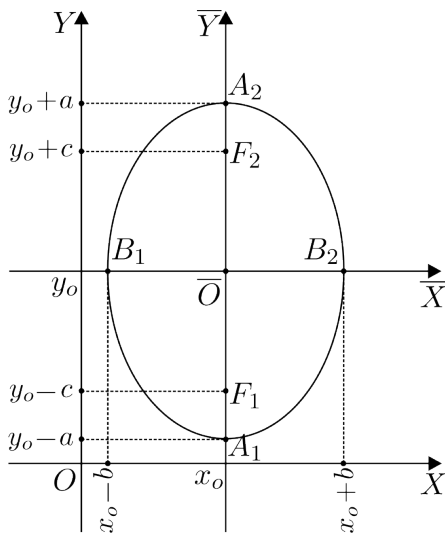


Figura 2.13:  $\mathcal{E} : \frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1$ .

**Exemplo 2.3** Os focos de uma elipse  $\mathcal{E}$  são  $(3, 8)$  e  $(3, 2)$ , e o comprimento de seu eixo não focal é 8 . Determine a equação de  $\mathcal{E}$ , seus vértices e sua excentricidade.

**Solução 2.3** Como  $F_1 = (3, 2)$  e  $F_2 = (3, 8)$  são os focos da elipse, sua reta focal é  $\ell : x = 3$  (paralela ao eixo  $OY$  ) e seu centro é

$$C = \frac{F_1 + F_2}{2} = (3, 5).$$

Além disso,  $2b = 8$ , isto é,

$$b = 4, c = d(C, F_1) = d(C, F_2) = 3$$

e

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$$

Portanto,

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}; A_1 = (3, 0) \text{ e } A_2 = (3, 10)$$

são os vértices sobre a reta focal;  $\ell' : y = 5$  é a reta não focal;  $B_1 = (-1, 5)$  e  $B_2 = (7, 5)$  são os vértices sobre a reta não focal e sua equação é:

$$\mathcal{E} : \frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1$$

#### 2.1.4 Equação do segundo grau com $B = 0$ e $AC > 0$

Consideremos a equação da elipse  $\mathcal{E}$  de centro no ponto  $(x_0, y_0)$  e reta focal paralela ao eixo  $OX$  :

$$\mathcal{E} : \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

Desenvolvendo essa equação, obtemos:

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2x_0x - 2a^2y_0y + b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0$$

que é da forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

com  $A = b^2, B = 0, C = a^2, D = -2b^2x_0, E = -2a^2y_0$  e  $F = b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2$ .

Então,  $B = 0$  e  $A$  e  $C$  têm o mesmo sinal. O mesmo vale para a equação da elipse com centro no ponto  $(x_0, y_0)$  e reta focal paralela ao eixo  $OY$ .

Reciprocamente, temos:

**Proposição 2.2** *Se os coeficientes  $A$  e  $C$  da equação do segundo grau*

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{2.4}$$

*têm o mesmo sinal, então a equação representa um dos seguintes conjuntos:*

- uma elipse com eixos paralelos aos eixos coordenados;
- um ponto;
- o conjunto vazio.

### Demonstração:

Dividindo a equação (2.4) por  $AC$ , obtemos:

$$\frac{x^2}{C} + \frac{y^2}{A} + \frac{D}{AC}x + \frac{E}{AC}y + \frac{F}{AC} = 0$$

ou seja,

$$\frac{x^2 + \frac{D}{A}x}{C} + \frac{y^2 + \frac{E}{C}y}{A} = -\frac{F}{AC}$$

Completando os quadrados, temos:

$$\frac{x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{D^2}{4A^2}}{C} + \frac{y^2 + \frac{E}{C}y + \frac{E^2}{4C^2}}{A} = -\frac{F}{AC} + \frac{D^2}{4A^2C} + \frac{E^2}{4AC^2}.$$

Isto é,

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{C} + \frac{\left(y^2 + \frac{E}{2C}\right)^2}{A} = \frac{C^2D^2 + ACE^2 - 4AFC^2}{4A^2C^3} = \frac{M}{4A^2C^3}$$

onde  $M = C^2D^2 + ACE^2 - 4AFC^2$ .

Se  $M = 0$ , a equação representa o ponto  $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$ , pois  $A$  e  $C$  têm o mesmo sinal.

Se  $M \neq 0$ , podemos escrever a equação na forma:

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{\frac{M}{4A^2C^2}} + \frac{\left(y^2 + \frac{E}{2C}\right)^2}{\frac{M}{4ACC^2}} = 1. \quad (2.5)$$

Como  $AC > 0$ , a equação (2.5) representa uma elipse de eixos paralelos aos eixos coordenados e centro no ponto  $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$ , se  $M > 0$ .

Se  $M < 0$ , a equação (2.5) representa o conjunto vazio, pois, neste caso,  $\frac{M}{4A^2C^2} < 0$  e  $\frac{M}{4ACC^2} < 0$ . ■

Os casos em que a equação do segundo grau  $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ , com  $AC > 0$ , representa um ponto ou o conjunto vazio são denominados **casos degenerados da elipse**.

**Exemplo 2.4** Verifique se as equações abaixo representam uma elipse ou uma elipse degenerada. Caso seja uma elipse, determine seus principais elementos.

(a)  $25x^2 + 9y^2 - 225 = 0$ .

(b)  $4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0$ .

(c)  $36x^2 + 9y^2 - 108x + 6y + 82 = 0$ .

(d)  $9x^2 + 4y^2 + 18x - 9y + 25 = 0$ .

**Solução 2.4** Observe,

(a) Como  $25x^2 + 9y^2 = 225$ , obtemos, dividindo por 225, que a equação  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$  representa uma elipse com:

- $a = 5, b = 3$  e  $c = \sqrt{25 - 9} = 4$ ;
- centro:  $C = (0, 0)$ ;
- reta focal:  $\ell = \text{eixo- } OY : x = 0$ ;
- reta não focal:  $\ell' = \text{eixo- } OX : y = 0$ ;
- vértices sobre a reta focal:  $A_1 = (0, -5)$  e  $A_2 = (0, 5)$ ;
- vértices sobre a reta não focal:  $B_1 = (-3, 0)$  e  $B_2 = (3, 0)$ ;
- focos:  $F_1 = (0, -4)$  e  $F_2 = (0, 4)$ .

(b) Completando os quadrados, obtemos:

$$\begin{aligned} & 4(x^2 - 10x) + 9(y^2 + 4y) = -100 \\ \iff & 4(x^2 - 10x + 25) + 9(y^2 + 4y + 4) = -100 + 4 \times 25 + 9 \times 4 \\ \iff & 4(x - 5)^2 + 9(y + 2)^2 = 36 \\ \iff & \frac{(x - 5)^2}{9} + \frac{(y + 2)^2}{4} = 1. \end{aligned}$$

Logo, a equação representa uma elipse com:

- $a = 3, b = 2$  e  $c = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$ ;
- centro:  $C = (5, -2)$ ;
- reta focal:  $\ell : y = -2$ , paralela ao eixo-  $OX$ ;
- reta não focal:  $\ell' : x = 5$ , paralela ao eixo-  $OY$ ;
- vértices sobre a reta focal:  $A_1 = (2, -2)$  e  $A_2 = (8, -2)$ ;
- vértices sobre a reta não focal:  $B_1 = (5, -4)$  e  $B_2 = (5, 0)$ ;
- focos:  $F_1 = (5 - \sqrt{5}, -2)$  e  $F_2 = (5 + \sqrt{5}, -2)$ .

(c) Completando os quadrados, obtemos:

$$\begin{aligned}
& 36(x^2 - 3x) + 9\left(y^2 + \frac{6}{9}y\right) = -82 \\
\iff & 36\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) + 9\left(y^2 + \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}\right) = -82 + 36 \times \frac{9}{4} + 9 \times \frac{1}{9} \\
\iff & 36\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 9\left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = -82 + 81 + 1 \\
\iff & 36\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 9\left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = 0.
\end{aligned}$$

Assim, apenas o ponto  $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}\right)$  satisfaz à equação dada, isto é, a equação representa um ponto.

(d) Completando os quadrados, obtemos:

$$\begin{aligned}
& 9(x^2 + 2x) + 4\left(y^2 - \frac{9}{4}y\right) = -25 \\
\iff & 9(x^2 + 2x + 1) + 4\left(y^2 - \frac{9}{4}y + \frac{81}{64}\right) = -25 + 9 \times 1 + 4 \times \frac{81}{64} \\
\iff & 9(x + 1)^2 + 4\left(y - \frac{9}{8}\right)^2 = -16 + \frac{81}{16} = -\frac{175}{16}.
\end{aligned}$$

Como  $-\frac{175}{16} < 0$ , nenhum ponto do plano satisfaz à equação, isto é, a equação representa o conjunto vazio.

## 2.2 Hipérbole

**Definição 2.3** Dados dois pontos  $F_1$  e  $F$  e um número  $r < d(F_1, F)$ , o conjunto dos pontos  $P$  do plano tais que

$$|d(F, P) - d(F_1, P)| = r$$

é chamado hipérbole de focos  $F_1$  e  $F$  e eixo  $r$ .

Graficamente, para se obter um ponto da hipérbole é suficiente centrar o compasso em um dos focos e com abertura  $s$  traçar um arco  $C$ . Depois, centrar no outro foco e com abertura  $s + r$  traçar o arco  $C_1$ . A interseção de  $C$  e  $C_1$  é um ponto da hipérbole. Unindo os pontos assim obtidos, temos o traçado da hipérbole.

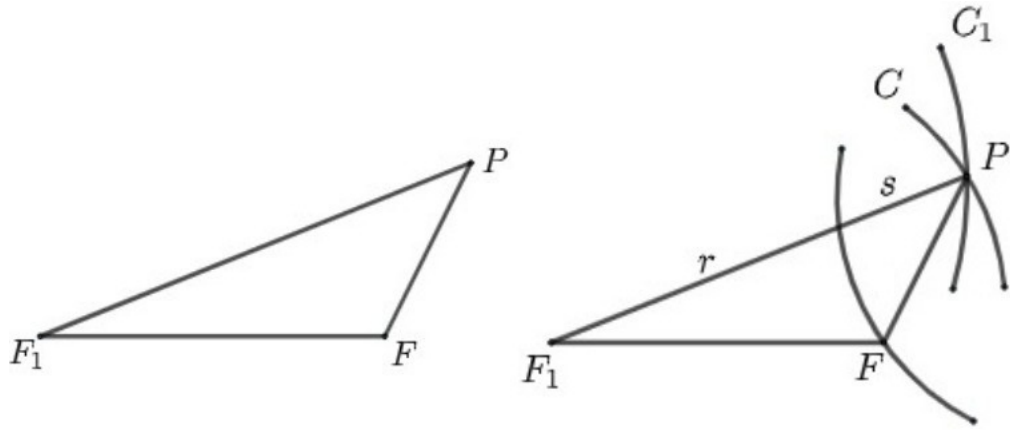


Figura 2.14:

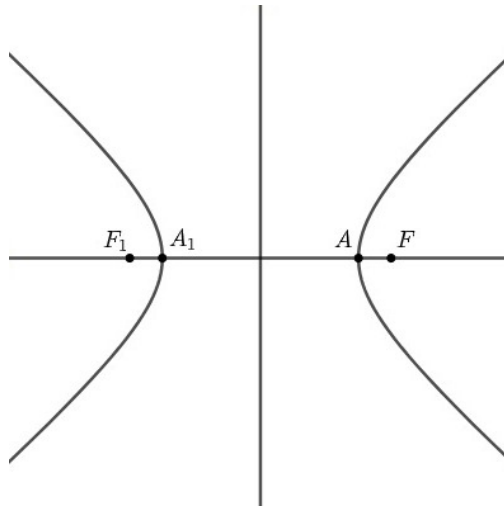


Figura 2.15:

Os pontos  $A_1$  e  $A$ , chamados **vértices da hipérbole**, foram obtidos tomando-se

$$s = (d(F_1, F) - r)/2.$$

Observe que  $d(A_1, A) = r$  e que, se  $s < (d(F_1, F) - r)/2$ , os arcos  $C$  e  $C_1$  não se interceptam. Da construção, é fácil ver que a hipérbole é composta de dois ramos e simétrica em relação à reta que contém os focos e em relação à mediatriz do segmento  $F_1F$ .

Com o objetivo de obter uma equação mais simples para a hipérbole, vamos eleger um sistema de coordenadas onde um dos eixos contém os focos e a origem seja o ponto médio do segmento  $F_1F$ . Como para a elipse, temos, também, dois casos.

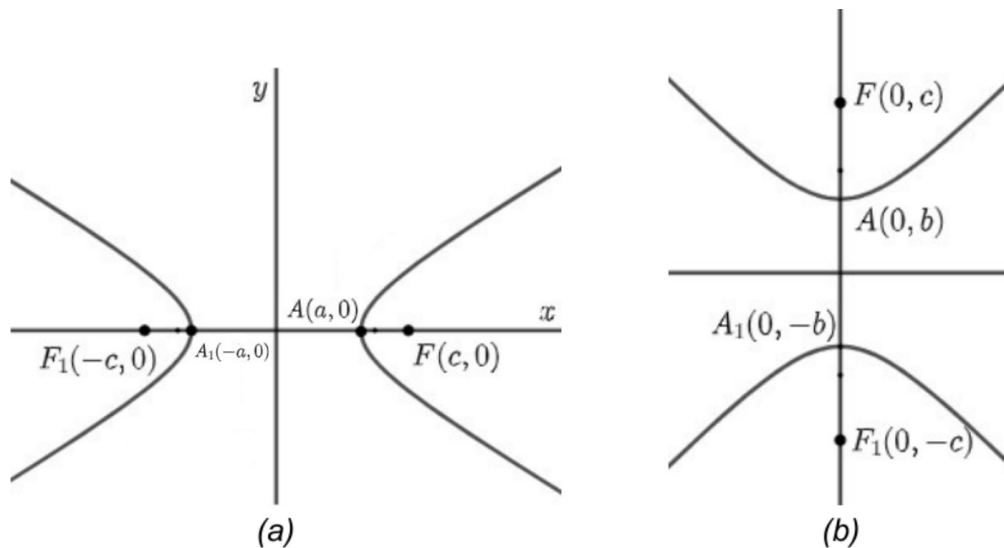


Figura 2.16:

Quando os focos da hipérbole estão sobre o eixo x, sua equação é

$$|d(P, F_1) - d(P, F)| = d(A, A_1),$$

onde  $P(x, y)$  é um ponto qualquer da hipérbole. Como mostra a Figura 2.16a, estamos chamando a distância focal  $d(F_1, F)$  de  $2c$  e a distância entre os vértices, de  $2a$ . Logo,

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a$$

ou

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a. \quad (2.6)$$

Depois de eliminarmos os radicais de (2.6), podemos escrevê-la assim

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Fazendo

$$c^2 - a^2 = b^2$$

obtemos

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

que é equivalente a (2.6) e, portanto, é uma equação da hipérbole. Quando os focos da hipérbole estão sobre o eixo  $y$ , como na Figura 2.16b, sua equação é

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

onde  $2b$  é a distância entre os vértices e  $a$  é tal que

$$c^2 - b^2 = a^2.$$

Mesmo quando os focos da hipérbole não estão sobre os eixos, ou não são simétricos em relação à origem, sua equação é também do segundo grau. Por exemplo, uma equação da hipérbole de focos  $F_1(-2, 1)$  e  $F(1, 3)$  e eixo 2 é

$$20x^2 + 48xy - 76x + 24y - 79 = 0,$$

como o leitor pode verificar.

### 2.2.1 Forma canônica da hipérbole

Como fizemos para a elipse, vamos obter a equação da hipérbole em relação a um sistema de eixos ortogonais  $OXY$  nos casos em que o eixo focal é o eixo  $OX$  ou o eixo  $OY$ .

#### Hipérbole com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo $OX$

Neste caso,

$$\begin{aligned} F_1 &= (-c, 0); & A_1 &= (-a, 0); & B_1 &= (0, -b) \\ F_2 &= (c, 0); & A_2 &= (a, 0); & B_2 &= (0, b). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} P = (x, y) \in \mathcal{H} &\iff |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a \\ &\iff \begin{cases} d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a & \text{(ramo direito de } \mathcal{H}) \\ \text{ou} \\ d(P, F_1) - d(P, F_2) = -2a & \text{(ramo esquerdo de } \mathcal{H}) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\iff \begin{cases} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a & (\text{ramo direito de } \mathcal{H}) \\ \text{ou} \\ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = -2a & (\text{ramo esquerdo de } \mathcal{H}) \end{cases}.$$

Continuando o desenvolvimento de maneira análoga ao caso da elipse, e lembrando que  $b^2 = c^2 - a^2$ , chegamos à conclusão que

$$\begin{aligned} P = (x, y) \in \mathcal{H} &\iff (c^2 - a^2) x^2 - a^2 y^2 = a^2 (c^2 - a^2) \\ &\iff b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2 \\ &\iff \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Esta última equação é a forma canônica da equação da hipérbole  $\mathcal{H}$  de centro na origem e reta focal coincidente com o eixo- $OX$ . Como as assíntotas de  $\mathcal{H}$  são as retas que passam pela origem (centro) e têm inclinação  $\pm \frac{b}{a}$  em relação ao eixo-  $OX$  (reta focal), suas equações são  $y = \pm \frac{b}{a}x$ , ou seja,  $bx - ay = 0$  e  $bx + ay = 0$ .

### 2.2.2 Esboço da Hipérbole

Sejam  $\mathcal{H}$  uma hipérbole e  $OXY$  um sistema de eixos ortogonais no qual  $O$  é o centro e o eixo  $OX$  é a reta focal de  $\mathcal{H}$ . Nesse sistema, a equação de  $\mathcal{H}$  é a equação (2.7). Dessa equação, obtemos

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

com  $x \geq a$  ou  $x \leq -a$ .

Considere a função

$$\begin{aligned} f : [a + \infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}, \end{aligned}$$

cujo gráfico é a parte de  $\mathcal{H}$  situada no primeiro quadrante (Figura 2.17).

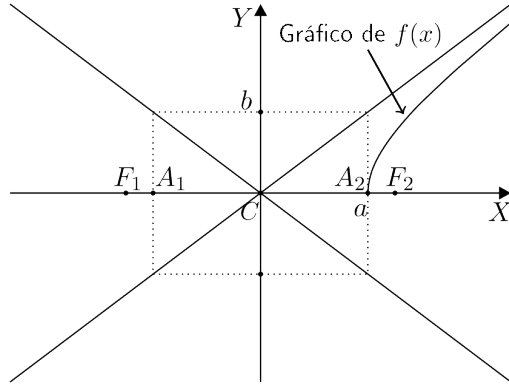


Figura 2.17: Gráfico da função  $f(x)$

Temos que  $f(a) = 0$  e  $f(x)$  é crescente e côncava, pois

$$f'(x) = \frac{bx}{a\sqrt{x^2 - a^2}} > 0 \quad \text{e} \quad f''(x) = \frac{-ab}{(x^2 - a^2)^{3/2}} < 0,$$

para todo  $x \in (a, +\infty)$ .

Pela simetria da hipérbole em relação ao eixo-  $OX$  (reta focal) e ao eixo- $OY$  (reta não focal), o gráfico de  $\mathcal{H}$  é como se mostra na Figura 2.18.

Vamos explicar o nome assíntota dado às retas que contêm as diagonais do retângulo de base. Para isso, seja  $\mathcal{H}$  a hipérbole dada pela equação canônica.

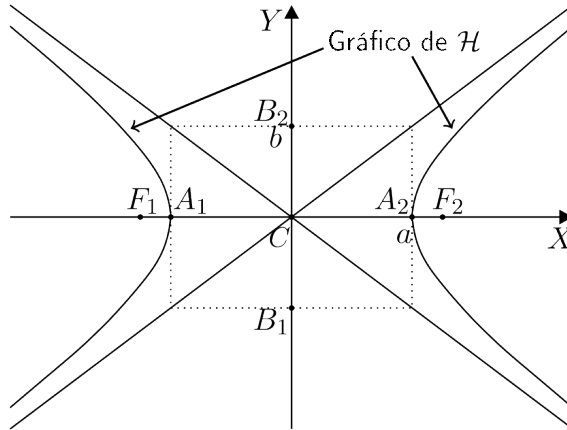


Figura 2.18: Gráfico de  $\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Se  $P = (x, y) \in \mathcal{H}$ , isto é,  $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ , e  $r_+ : bx - ay = 0$  é uma assíntota de  $\mathcal{H}$ , então,

$$\begin{aligned}
d(P, r_+) &= \frac{|bx - ay|}{\sqrt{b^2 + a^2}} \\
&= \frac{|bx - ay|}{\sqrt{b^2 + a^2}} \frac{|bx + ay|}{|bx + ay|} \\
&= \frac{|b^2x^2 - a^2y^2|}{\sqrt{b^2 + a^2}} \frac{1}{|bx + ay|} \\
&= \frac{a^2b^2}{\sqrt{b^2 + a^2}} \frac{1}{|bx + ay|}.
\end{aligned}$$

Logo,  $d(P, r_+) \rightarrow 0$ , quando  $x \rightarrow \pm\infty$  e  $y \rightarrow \pm\infty$ .

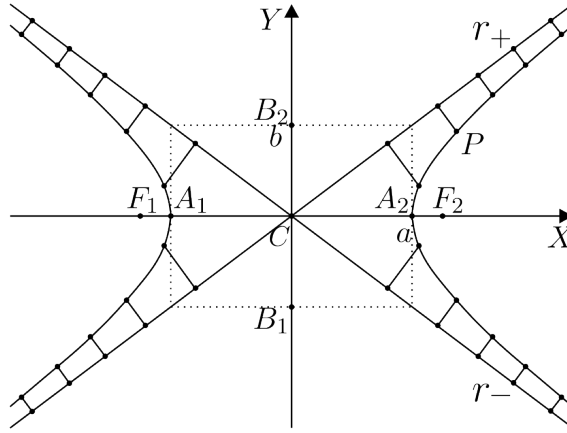


Figura 2.19:  $d(P, r_+) \rightarrow 0$ , quando  $x \rightarrow \pm\infty$  e  $y \rightarrow \pm\infty$  e  $d(P, r_-) \rightarrow 0$ , quando  $x \rightarrow \pm\infty$  e  $y \rightarrow \mp\infty$

De modo análogo, verificamos que  $d(P, r_-) \rightarrow 0$ , quando  $x \rightarrow \pm\infty$  e  $y \rightarrow \mp\infty$ , onde  $P = (x, y) \in \mathcal{H}$  e  $r_- : bx + ay = 0$  é a outra assíntota da hipérbole.

## Hipérbole com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo $OY$

Neste caso, temos  $F_1 = (0, -c)$ ,  $F_2 = (0, c)$ ,  $A_1 = (0, -a)$ ,  $A_2 = (0, a)$ ,  $B_1 = (-b, 0)$  e  $B_2 = (b, 0)$ , onde  $b^2 = c^2 - a^2$ . Procedendo como no caso anterior, obtemos que a equação da hipérbole  $\mathcal{H}$  é:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad (2.8)$$

**Forma canônica da hipérbole de centro na origem e reta focal coincidente com o eixo  $-OY$ .**

As assíntotas são as retas  $x = \pm \frac{b}{a}y$ , ou seja,  $ax - by = 0$  e  $ax + by = 0$ .

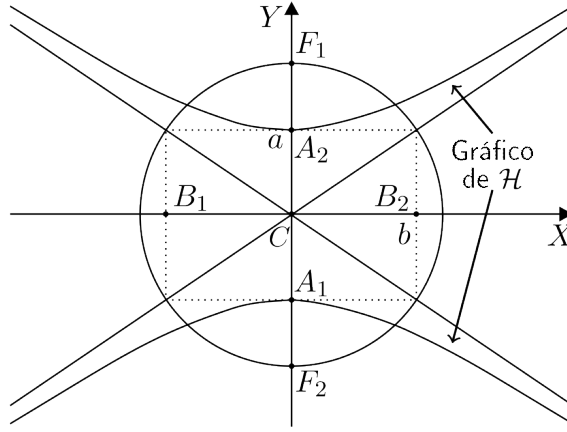


Figura 2.20: Gráfico de  $\mathcal{H} : \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

**Exemplo 2.5** Os vértices de uma hipérbole são os pontos  $(0, 3)$  e  $(0, -3)$  e um de seus focos é o ponto  $(0, 5)$ . Obtenha a equação da hipérbole, o comprimento do seu eixo focal e suas assíntotas.

**Solução 2.5** A hipérbole tem centro  $C = \frac{(0, 3) + (0, -3)}{2} = (0, 0)$ ;

reta focal = eixo-OY;

$$c = d((0, 0), (0, 5)) = 5;$$

$$a = d((0, 0), (0, 3)) = 3$$

$$\text{e } b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 9 = 16.$$

Então,  $\mathcal{H} : \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$  é a equação da hipérbole,  $x = \pm \frac{4}{3}y$  são as suas assíntotas e  $2a = 6$  o comprimento do seu eixo focal.

## Hipérbole com centro no ponto $\bar{O} = (x_o, y_o)$

### Caso I. Reta focal paralela ao eixo $-OX$

Como o centro  $\bar{O} = (x_o, y_o)$  pertence à reta focal, temos que  $\ell : y = y_o$  é a equação cartesiana da reta focal.

Além disso, como

$$d(F_1, \bar{O}) = d(F_2, \bar{O}) = c$$

onde  $F_1$  e  $F_2$  são os focos da hipérbole, temos que  $F_1 = (x_o - c, y_o)$  e  $F_2 = (x_o + c, y_o)$ .

Seja  $P = (\bar{x} + x_o, \bar{y} + y_o)$  um ponto pertencente à hipérbole, onde

$$x = \bar{x} + x_o \text{ e } y = \bar{y} + y_o$$

são suas coordenadas no sistema  $OXY$ , e  $\bar{x}, \bar{y}$  são suas coordenadas no sistema  $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ , obtido transladando o sistema  $OXY$  para a origem  $\bar{O} = (x_o, y_o)$ .

Então,  $P$  pertence à hipérbole se, e somente se,

$$\begin{aligned} & |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a \\ \iff & |d((\bar{x} + x_o, \bar{y} + y_o), (x_o - c, y_o)) - d((\bar{x} + x_o, \bar{y} + y_o), (x_o + c, y_o))| = 2a \\ \iff & |d((\bar{x}, \bar{y}), (-c, 0)) - d((\bar{x}, \bar{y}), (c, 0))| = 2a \\ \iff & \frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1 \iff \frac{(x - x_o)^2}{a^2} - \frac{(y - y_o)^2}{b^2} = 1. \end{aligned}$$

Logo, a forma canônica da equação da hipérbole com centro no ponto  $(x_o, y_o)$  e reta focal paralela ao eixo-  $OX$  é:

$$\frac{(x - x_o)^2}{a^2} - \frac{(y - y_o)^2}{b^2} = 1, \quad \text{onde} \quad b^2 = c^2 - a^2$$

Os elementos de  $\mathcal{H}$  são:

- focos:  $F_1 = (x_o - c, y_o)$  e  $F_2 = (x_o + c, y_o)$ ;
- reta focal:  $\ell : y = y_o$ ;
- vértices:  $A_1 = (x_o - a, y_o)$  e  $A_2 = (x_o + a, y_o)$ ;
- reta não focal:  $\ell' : x = x_o$ ;
- vértices imaginários:  $B_1 = (x_o, y_o - b)$  e  $B_2 = (x_o, y_o + b)$ ;
- assíntotas:  $y - y_o = \pm \frac{b}{a}(x - x_o)$ , ou seja,  $b(x - x_o) - a(y - y_o) = 0$  e  $b(x - x_o) + a(y - y_o) = 0$ .

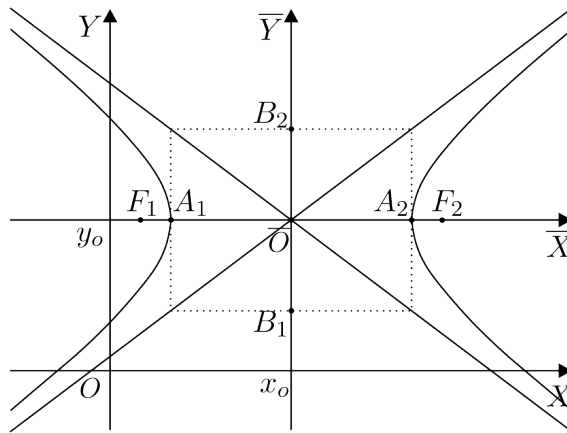


Figura 2.21: Gráfico de  $\mathcal{H} : \frac{(x-x_o)^2}{a^2} - \frac{(y-y_o)^2}{b^2} = 1$

### Caso II. Reta focal paralela ao eixo $-OY$

Procedendo como no caso anterior, verifica-se que a forma canônica da equação da hipérbole com centro no ponto  $(x_o, y_o)$  e reta focal paralela ao eixo-  $OY$  é:

$$\frac{(y - y_o)^2}{a^2} - \frac{(x - x_o)^2}{b^2} = 1, \quad \text{onde} \quad b^2 = c^2 - a^2$$

Os elementos de  $\mathcal{H}$  são:

- focos:  $F_1 = (x_o, y_o - c)$  e  $F_2 = (x_o, y_o + c)$ ;
- reta focal:  $\ell : x = x_o$ ;
- vértices:  $A_1 = (x_o, y_o - a)$  e  $A_2 = (x_o, y_o + a)$ ;
- reta não focal:  $\ell' : y = y_o$ ;
- vértices imaginários:  $B_1 = (x_o - b, y_o)$  e  $B_2 = (x_o + b, y_o)$ ;
- assíntotas:  $x - x_o = \pm b/a (y - y_o)$ , ou seja,  $a(x - x_o) - b(y - y_o) = 0$  e  $a(x - x_o) + b(y - y_o) = 0$ .

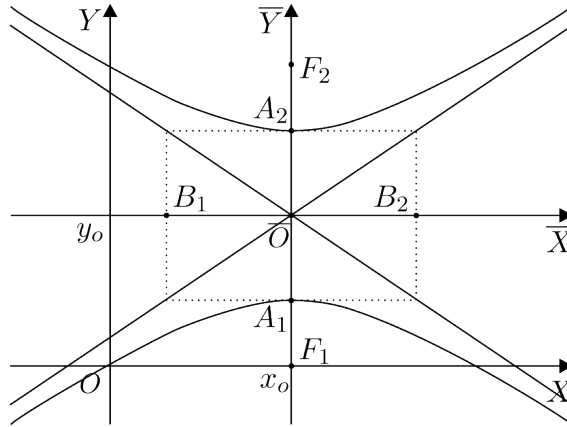


Figura 2.22: Gráfico de  $\mathcal{H} : \frac{(y-y_o)^2}{a^2} - \frac{(x-x_o)^2}{b^2} = 1$

**Exemplo 2.6** Determine o ângulo agudo de interseção das assíntotas da hipérbole

$$9x^2 - y^2 - 36x - 2y + 44 = 0.$$

**Solução 2.6** A equação da hipérbole se escreve na forma:

$$9(x^2 - 4x) - (y^2 + 2y) = -44$$

$$9(x - 2)^2 - (y + 1)^2 = -44 + 36 - 1 = -9$$

$$\frac{(y + 1)^2}{9} - (x - 2)^2 = 1$$

Logo,  $C = (2, -1)$  é o centro, a reta focal é  $\ell : x = 2$ , paralela ao eixo-  $OY$ ,  $a = 3, b = 1, c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{10}$  e as assíntotas são  $x - 2 = \pm \frac{1}{3}(y + 1)$ , ou seja,  $y = 3x - 7$  e  $y = -3x + 5$ .

Assim,  $\operatorname{tg} \beta = 3, \operatorname{tg} \alpha = -3, \theta = \alpha - \beta$  e

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{-6}{1 - 9} = \frac{3}{4}$$

onde  $\beta$  e  $\alpha$  são os ângulos que as retas  $y = 3x - 7$  e  $y = -3x + 5$  fazem, respectivamente, com o semieixo  $OX$  positivo, e  $\theta$  é o ângulo agudo entre as assíntotas.

### 2.2.3 Equação do segundo grau com $B = 0$ e $AC < 0$ .

Desenvolvendo a equação da hipérbole  $\mathcal{H}$  com centro no ponto  $(x_o, y_o)$  e reta focal paralela ao eixo  $-OX$  :

obtemos:

$$\mathcal{H} : \frac{(x - x_o)^2}{a^2} - \frac{(y - y_o)^2}{b^2} = 1$$

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 - 2x_o b^2 x + 2y_o a^2 y + x_o^2 b^2 - a^2 y_o^2 - a^2 b^2 = 0$$

que é da forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \text{ com}$$

$$A = b^2, B = 0, C = -a^2, D = -2x_o b^2, E = 2y_o a^2, F = x_o^2 b^2 - a^2 y_o^2 - a^2 b^2.$$

Em particular,  $B = 0$  e os coeficientes  $A$  e  $C$  têm sinais opostos.

Podemos verificar que o mesmo ocorre quando desenvolvemos a equação da hipérbole de reta focal paralela ao eixo  $-OY$ .

Reciprocamente, temos a seguinte proposição:

**Proposição 2.4** *Se os coeficientes  $A$  e  $C$  da equação*

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{2.9}$$

*têm sinais opostos, então a equação representa um dos seguintes conjuntos:*

- uma hipérbole de eixos paralelos aos eixos coordenados;
- um par de retas concorrentes.

**Demonstração:**

Suponhamos que  $A > 0$  e  $C < 0$ . Então,

$$\begin{aligned}
Ax^2 + Dx - (-Cy^2 - Ey) &= -F, \\
\frac{(x^2 + \frac{D}{A}x)}{-C} - \frac{(y^2 + \frac{E}{C}y)}{A} &= \frac{F}{AC}, \\
\frac{(x + \frac{D}{2A})^2}{-C} - \frac{(y + \frac{E}{2C})^2}{A} &= \frac{F}{AC} - \frac{D^2}{4A^2C} - \frac{E^2}{4AC^2}, \\
\frac{(x + \frac{D}{2A})^2}{-C} - \frac{(y + \frac{E}{2C})^2}{A} &= \frac{4ACF - CD^2 - AE^2}{4A^2C^2}.
\end{aligned}$$

Logo, a equação (2.9) representa uma hipérbole com eixos paralelos aos eixos coordenados, se  $4ACF - CD^2 - AE^2 \neq 0$ , e representa o par de retas concorrentes

$$y + \frac{E}{2C} = \pm \sqrt{\frac{-A}{C}} \left( x + \frac{D}{2A} \right)$$

se  $4ACF - CD^2 - AE^2 = 0$

■

O caso em que a equação do segundo grau (2.9), com  $AC < 0$ , representa um par de retas concorrentes é chamado caso degenerado da hipérbole.

**Exemplo 2.7** Verifique se a equação abaixo representam uma hipérbole ou uma hipérbole degenerada. Caso seja uma hipérbole, determine seus principais elementos.

(a)  $9x^2 - 25y^2 - 225 = 0$ .

**Solução 2.7** Como  $9x^2 - 25y^2 = 225$ , obtemos, dividindo por 225, a equação que representa uma hipérbole com:

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$$

- $a = 5, b = 3$  e  $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$ ;
- centro:  $C = (0, 0)$ ;
- reta focal:  $\ell =$  eixo-  $OX : y = 0$ ;
- reta não focal:  $\ell' =$  eixo-  $OY : x = 0$ ;
- vértices:  $A_1 = (-5, 0)$  e  $A_2 = (5, 0)$ ;
- vértices imaginários:  $B_1 = (0, -3)$  e  $B_2 = (0, 3)$ ;
- focos:  $F_1 = (-\sqrt{34}, 0)$  e  $F_2 = (\sqrt{34}, 0)$ ;
- assíntotas:  $y = \pm \frac{3}{5}x$ , ou seja  $3x \pm 5y = 0$ .

## 2.3 Parábola

**Definição 2.5** *Def.* : Dados um ponto  $F$  e uma reta  $r$ , chama-se parábola de foco  $F$  e diretriz  $r$  ao conjunto de pontos  $P$  do plano tais que

$$d(P, F) = d(P, r).$$

**Construção.** Pelo foco  $F$  traçamos a perpendicular à diretriz  $r$  e tomamos sobre esta perpendicular (chamada eixo da parábola) um ponto  $C$ . Por  $C$  traçamos uma paralela a  $r$  e com abertura igual a  $d(C, r)$  e centro em  $F$  determinamos nesta paralela os pontos  $P$  e  $P'$  da parábola. Unindo os pontos assim construídos, obtemos a parábola (2.23). Observe que se escolhermos o ponto  $C$ , sobre o eixo, de modo que  $d(C, r) < d(C, F)$ , o arco traçado com centro em  $F$  e raio  $d(C, F)$  não intercepta a paralela à diretriz traçada por  $C$ . O ponto da parábola mais próximo de  $r$  é o ponto  $O$  (veja a Figura 2.23b) tal que  $d(O, r) = d(O, F)$ . Este ponto é chamado vértice da parábola.

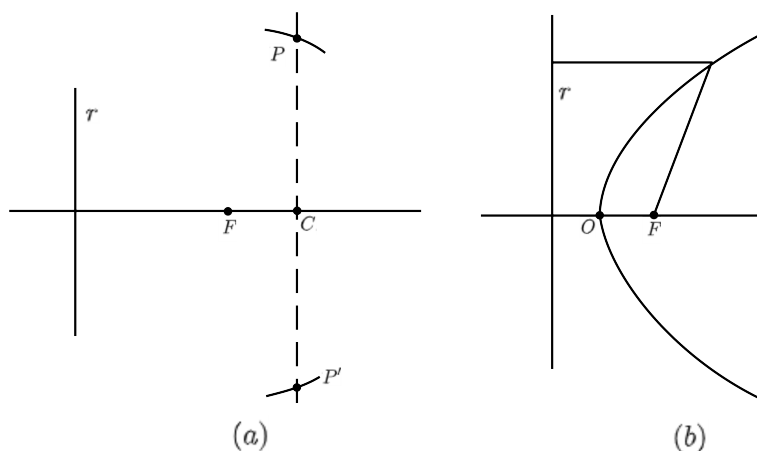


Figura 2.23:

Em geral, a equação de uma parábola é do segundo grau, isto é, contém termos em  $x^2, y^2, xy, x$  e  $y$ . Porém, quando o sistema de eixos é escolhido de modo que a origem coincide com o vértice e um dos eixos do sistema coincide com o eixo da parábola, como veremos, sua equação é muito simples.

Existem quatro casos.

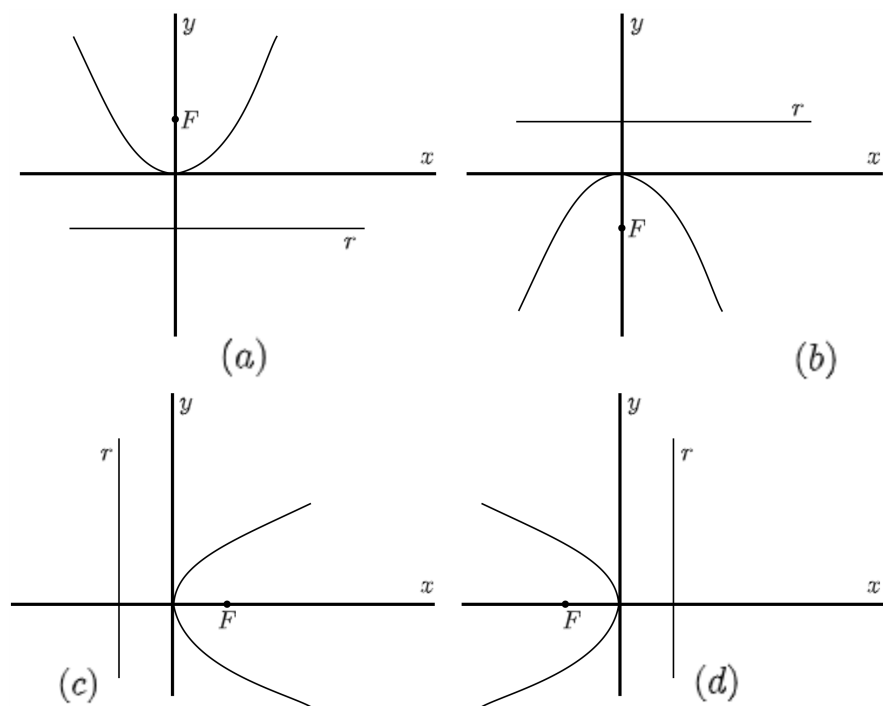


Figura 2.24:

Na Figura 2.24a o foco está sobre o eixo  $y$  e a diretriz é paralela ao eixo  $x$ . Se  $d(F, r) = 2a$ , então o foco é  $F(0, a)$  e a equação da diretriz é

$$y = -a.$$

Um ponto  $P(x, y)$  pertence à parábola se, e somente se,

$$d(P, F) = d(P, r)$$

ou

$$\sqrt{x^2 + (y - a)^2} = |y + a|.$$

Eliminando o radical desta equação e simplificando o resultado, obtemos a sua equivalente

$$4ay = x^2 \text{ ou } y = \frac{1}{4a}x^2$$

que é a equação da parábola.

Nos demais casos, efetuando contas semelhantes, obtemos

$$\begin{aligned}y &= -\frac{1}{4a}x^2 \\x &= \frac{1}{4a}y^2 \\x &= -\frac{1}{4a}y^2,\end{aligned}$$

que são, respectivamente, as equações das parábolas das Figuras 2.24b, c e d. Em todos os casos

$$a = \frac{1}{2}d(F, r)$$

### 2.3.1 Formas canônicas da parábola

Vamos obter as formas canônicas da parábola em relação a um sistema de coordenadas  $OXY$ . Começamos com os casos em que o vértice da parábola é a origem e a reta focal é um dos eixos coordenados. Depois trataremos dos casos em que o vértice é um ponto qualquer e a reta focal é paralela a um dos eixos coordenados.

#### Parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo $OX$

**Caso I.** O foco  $F$  está à direita da diretriz  $\mathcal{L}$  (Figura 2.25).

Como o vértice da parábola  $\mathcal{P}$  é a origem  $V = (0, 0)$ , temos que o foco é o ponto  $F = (p, 0)$  e a diretriz é a reta  $\mathcal{L} : x = -p$ , onde  $2p = d(F, \mathcal{L})$ .

Logo,

$$\begin{aligned}P &= (x, y) \in \mathcal{P} \\ \iff d(P, F) &= d(P, \mathcal{L}) \\ \iff \sqrt{(x - p)^2 + y^2} &= |x + p| \\ \iff (x - p)^2 + y^2 &= (x + p)^2 \\ \iff x^2 - 2px + p^2 + y^2 &= x^2 + 2px + p^2 \\ \iff -2px + y^2 &= 2px \\ \iff y^2 &= 4px\end{aligned}$$

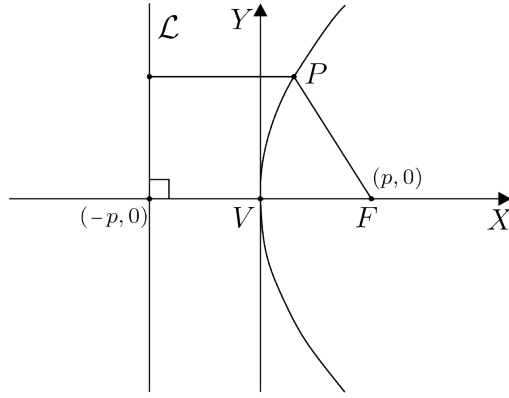


Figura 2.25: Parábola  $\mathcal{P} : y^2 = 4px$

**Caso II.** O foco  $F$  está à esquerda da diretriz  $\mathcal{L}$  (Figura 2.26). Neste caso,  $F = (-p, 0)$  e  $\mathcal{L} : x = p$ , onde  $2p = d(F, \mathcal{L})$ .

Então,

$$\begin{aligned}
 P &= (x, y) \in \mathcal{P} \\
 \iff d(P, F) &= d(P, \mathcal{L}) \\
 \iff \sqrt{(x + p)^2 + y^2} &= |x - p| \\
 \iff (x + p)^2 + y^2 &= (x - p)^2 \\
 \iff x^2 + 2px + p^2 + y^2 &= x^2 - 2px + p^2 \\
 \iff 2px + y^2 &= -2px \\
 \iff y^2 &= -4px
 \end{aligned}$$

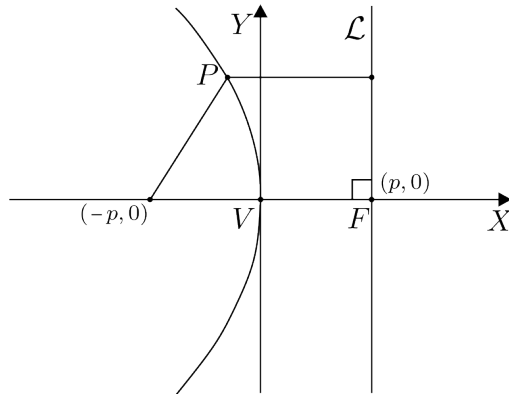


Figura 2.26: Parábola  $\mathcal{P} : y^2 = -4px$

## Parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo $OY$

**Caso I.** O foco  $F$  está acima da diretriz  $\mathcal{L}$  (Figura 2.27).

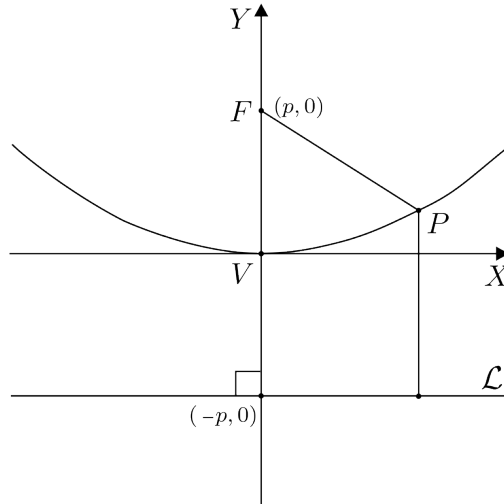


Figura 2.27: Parábola  $\mathcal{P} : x^2 = 4py$

Neste caso,  $F = (0, p)$  e  $\mathcal{L} : y = -p$ , onde  $2p = d(F, \mathcal{L})$ . Logo,

$$P = (x, y) \in \mathcal{P} \iff \sqrt{x^2 + (y - p)^2} = |y + p| \iff x^2 = 4py$$

**Caso II.** O foco  $F$  está abaixo da diretriz  $\mathcal{L}$  (Figura 2.28).

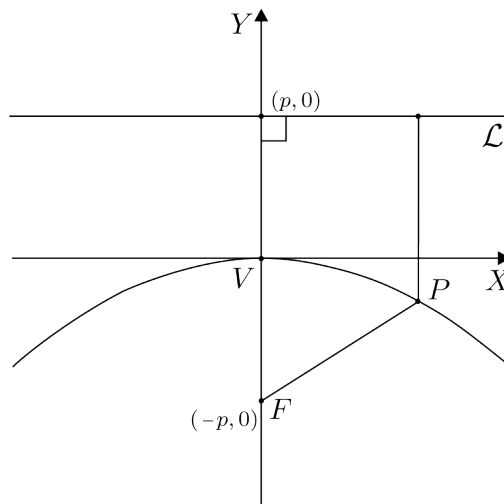


Figura 2.28: Parábola  $\mathcal{P} : x^2 = -4py$

Neste caso,  $F = (0, -p)$  e  $\mathcal{L} : y = p$ , onde  $2p = d(F, \mathcal{L})$ . Logo,  $P = (x, y) \in \mathcal{P}$  se, e

somente se,

$$\sqrt{x^2 + (y + p)^2} = |y - p| \iff x^2 = -4py$$

**Exemplo 2.8** Determine a equação da parábola  $\mathcal{P}$  com vértice  $V$  na origem, cujo foco é o ponto:

(a)  $F = (3, 0)$ .

(b)  $F = (0, -2)$ .

**Solução 2.8** Temos,

(a)  $p = d(V, F) = 3$  e reta focal = eixo  $OX$ . Como o foco  $F$  está à direita do vértice, temos que a diretriz é a reta  $\mathcal{L} : x = -3$  e a equação da parábola é  $\mathcal{P} : y^2 = 12x$ .

(b)  $p = d(V, F) = 2$  e reta focal = eixo  $OY$ . Como o foco  $F$  está abaixo do vértice, temos que a diretriz é a reta  $\mathcal{L} : y = 2$  e a equação da parábola é  $\mathcal{P} : x^2 = -8y$ .

### Parábola com vértice $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo $OX$

Da mesma forma como fizemos para a elipse e a hipérbole nos capítulos anteriores, para obtermos a forma canônica da parábola  $\mathcal{P}$  de vértice no ponto  $V = (x_o, y_o)$  e reta focal paralela ao eixo  $OX$ , vamos considerar o sistema de eixos ortogonais  $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ , com origem  $\bar{O} = V = (x_o, y_o)$  e eixos  $\bar{O}\bar{X}$  e  $\bar{O}\bar{Y}$  que têm a mesma direção e mesmo sentido dos eixos  $OX$  e  $OY$ , respectivamente.

**Caso I.** O foco  $F$  está à direita da diretriz  $\mathcal{L}$ .

Sabemos que, no sistema de coordenadas  $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ , a equação da parábola é  $\mathcal{P} : \bar{y}^2 = 4p\bar{x}$ ; o foco é  $\bar{F} = (p, 0)$ ; o vértice é  $\bar{V} = (0, 0)$ ; a diretriz é  $\bar{\mathcal{L}} : \bar{x} = -p$ ; a reta focal é  $\bar{\ell} : \bar{y} = 0$ .

Como

$$x = \bar{x} + x_o \text{ e } y = \bar{y} + y_o$$

a equação da parábola  $\mathcal{P}$  é:

$$\mathcal{P} : (y - y_o)^2 = 4p(x - x_o)$$

e seus elementos são:

- foco:  $F = (x_o + p, y_o)$ ;

- vértice:  $V = (x_o, y_o)$ ;

- diretriz:  $\mathcal{L} : x - x_0 = -p$ , ou seja,  $\mathcal{L} : x = x_0 - p$ ;
- reta focal:  $\ell : y - y_0 = 0$ , ou seja,  $\ell : y = y_0$ .

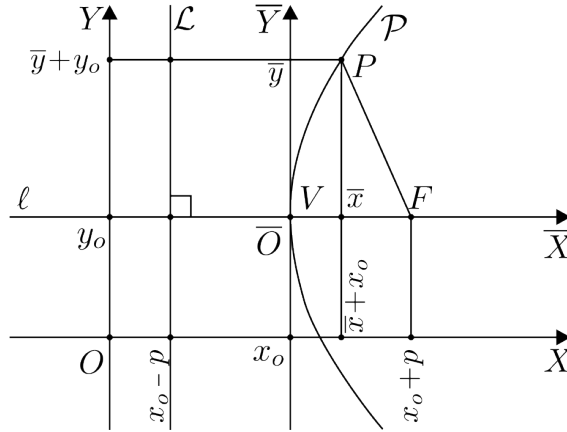


Figura 2.29:  $\mathcal{P} : (y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$

**Caso II.** O foco  $F$  está à esquerda da diretriz  $\mathcal{L}$ .

Neste caso, a equação da parábola no sistema  $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$  é  $\bar{y}^2 = -4p\bar{x}$ , e seus elementos são: foco  $\bar{F} = (-p, 0)$ ; vértice  $\bar{V} = (0, 0)$ ; diretriz  $\bar{\mathcal{L}} : \bar{x} = p$  e reta focal  $\bar{\ell} : \bar{y} = 0$ . Passando para as coordenadas  $x, y$  do sistema  $OXY$ , a equação da parábola fica na forma:

$$\mathcal{P} : (y - y_0)^2 = -4p(x - x_0)$$

e seus elementos são: - foco:  $F = (x_0 - p, y_0)$ ; - vértice:  $V = (x_0, y_0)$ ; - diretriz:  $\mathcal{L} : x - x_0 = p$ , ou seja,  $\mathcal{L} : x = x_0 + p$  - reta focal:  $\ell : y - y_0 = 0$ , ou seja,  $\ell : y = y_0$ .

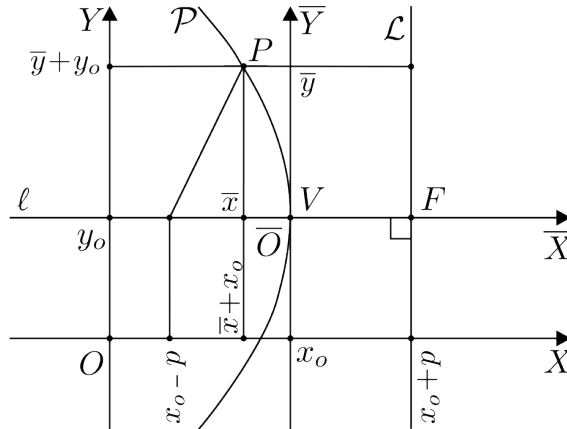


Figura 2.30:  $\mathcal{P} : (y - y_0)^2 = -4p(x - x_0)$

## Parábola com vértice $V = (x_o, y_o)$ e reta focal paralela ao eixo $OY$

Como no caso anterior, considerando o sistema de eixos ortogonais  $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ , com origem  $\bar{O} = V = (x_o, y_o)$  e eixos  $\bar{O}\bar{X}$  e  $\bar{O}\bar{Y}$  que têm a mesma direção e o mesmo sentido dos eixos  $OX$  e  $OY$ , respectivamente, podemos obter as equações e os elementos das parábolas com vértice  $V = (x_o, y_o)$  e reta focal paralela ao eixo  $OY$ .

**Caso I.** O foco  $F$  está acima da diretriz  $\mathcal{L}$ . (Figura 2.31)

Neste caso, o foco é  $F = (x_o, y_o + p)$ ; a diretriz é  $\mathcal{L} : y = y_o - p$ ; a reta focal é  $\ell : x = x_o$  e a equação da parábola é:

$$(x - x_o)^2 = 4p(y - y_o)$$

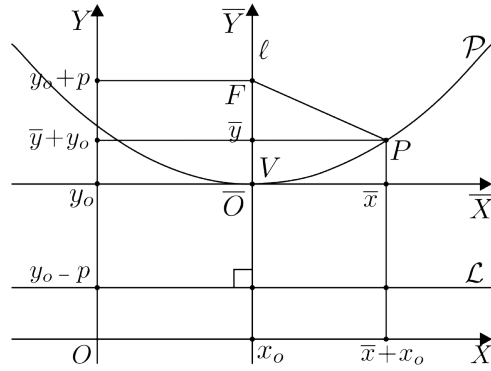


Figura 2.31:  $\mathcal{P} : (x - x_o)^2 = 4p(y - y_o)$

**Caso II.** O foco  $F$  está abaixo da diretriz  $\mathcal{L}$  (Figura 2.32).

Neste caso, o foco é  $F = (x_o, y_o - p)$ ; a diretriz é  $\mathcal{L} : y = y_o + p$ ; a reta focal é  $\ell : x = x_o$  e a equação da parábola é:

$$(x - x_o)^2 = -4p(y - y_o)$$

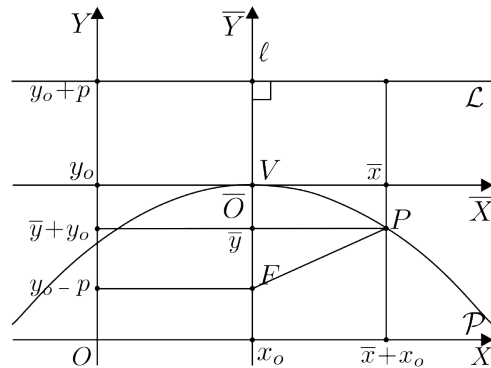


Figura 2.32:  $\mathcal{P} : (x - x_o)^2 = -4p(y - y_o)$

**Exemplo 2.9** Determine a equação da parábola  $\mathcal{P}$  de vértice  $V = (3, 4)$  e foco  $F = (3, 2)$ . Encontre também a equação de sua diretriz.

**Solução 2.9** Como  $V = (3, 4)$  e  $F = (3, 2)$ ,  $\ell : x = 3$  é a reta focal e  $F$  está abaixo de  $V$ , ou seja, abaixo da diretriz  $\mathcal{L}$ . Logo, a equação da parábola é da forma:

$$\mathcal{P} : (x - 3)^2 = -4p(y - 4)$$

Sendo  $p = d(V, F) = 2$ , temos que  $\mathcal{L} : y = 6$  é a diretriz e  $\mathcal{P} : (x - 3)^2 = -8(y - 4)$  é a equação da parábola.

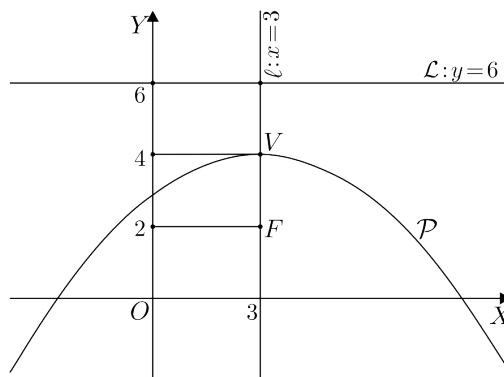


Figura 2.33:  $\mathcal{P} : (x - 3)^2 = -8(y - 4)$

### 2.3.2 A equação geral do segundo grau com $B = 0$ e $AC = 0$

Consideremos a equação canônica da parábola de vértice  $V = (x_o, y_o)$  e reta focal paralela ao eixo  $OX$  :

$$(y - y_o)^2 = \pm 4p(x - x_o).$$

Desenvolvendo e agrupando os termos dessa equação, obtemos:

$$y^2 \mp 4px - 2y_o y + y_o^2 \pm 4px_o = 0.$$

Esta equação é da forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

onde  $A = 0$ ,  $B = 0$ ,  $C = 1$ ,  $D = \mp 4p$ ,  $E = -2y_o$  e  $F = y_o^2 \pm 4px_o$ .

Analogamente, desenvolvendo a equação da parábola de vértice  $V = (x_o, y_o)$  e reta focal paralela ao eixo  $OY$

$$(x - x_o)^2 = \pm 4p(y - y_o)$$

obtemos a equação

$$x^2 - 2x_o x \mp 4py + x_o^2 \pm 4py_o = 0,$$

que é da forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

onde  $A = 1, B = 0, C = 0, D = -2x_o, E = \mp 4p$  e  $F = x_o^2 \pm 4py_o$ .

No primeiro caso,  $A = 0, B = 0$  e  $C \neq 0$  e, no segundo caso,  $A \neq 0, B = 0$  e  $C = 0$ . Portanto, em qualquer caso,  $B = 0$  e  $AC = 0$ .

Reciprocamente, temos a seguinte proposição:

**Proposição 2.6** *Seja a equação do segundo grau com  $B = 0$  :*

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \quad (2.10)$$

*Se  $A = 0$  e  $C \neq 0$ , esta equação representa um dos seguintes conjuntos:*

- *uma parábola cuja reta focal é paralela ao eixo  $OX$ , se  $D \neq 0$ ;*
- *um par de retas paralelas ao eixo  $OX$ , se  $D = 0$  e  $E^2 - 4CF > 0$ ;*
- *uma reta paralela ao eixo  $OX$ , se  $D = 0$  e  $E^2 - 4CF = 0$ ;*
- *o conjunto vazio, se  $D = 0$  e  $E^2 - 4CF < 0$ .*

*O mesmo vale para o caso em que  $C = 0$  e  $A \neq 0$ , trocando "paralelo ao eixo  $OX$ " por "paralelo ao eixo  $OY$ ".*

**Demonstração:**

Se  $A = 0, C \neq 0$  e  $D \neq 0$ , então a equação (2.10) se escreve na forma:

$$y^2 + \frac{E}{C}y + \frac{D}{C}x + \frac{F}{C} = 0.$$

Completando o quadrado, obtemos:

$$\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 + \frac{D}{C}x + \frac{F}{C} - \frac{E^2}{4C^2} = 0.$$

Como  $D \neq 0$ , podemos escrever a equação na forma

$$\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = -\frac{D}{C} \left(x + \frac{C}{D} \left(\frac{F}{C} - \frac{E^2}{4C^2}\right)\right),$$

que é a equação de uma parábola com reta focal paralela ao eixo  $OX$  e vértice

$$V = \left( -\frac{4C^2F - CE^2}{4C^2D}, -\frac{E}{2C} \right)$$

Se  $D = 0$ , a equação  $Cy^2 + Ey + F = 0$  representa:

- duas retas paralelas ao eixo  $OX$ ,

$$y = \frac{-E + \sqrt{E^2 - 4CF}}{2C} \quad \text{e} \quad y = \frac{-E - \sqrt{E^2 - 4CF}}{2C}$$

se  $E^2 - 4CF > 0$ ;

- uma reta paralela ao eixo  $OX$ ,

$$y = -\frac{E}{2C}$$

se  $E^2 - 4CF = 0$ ;

- o conjunto vazio, se  $E^2 - 4CF < 0$ . ■

Os casos em que a equação do segundo grau  $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ , com  $AC = 0$ , representa duas retas paralelas, uma reta ou o conjunto vazio são chamados **casos degenerados da parábola**.

**Exemplo 2.10** Verifique se as equações abaixo representam uma parábola ou uma parábola degenerada. Caso seja uma parábola, determine seus elementos principais.

(a)  $x^2 - 8y = 0$ .

(b)  $2y^2 + 5x + 8y - 7 = 0$ .

(c)  $3y^2 + 7y - 6 = 0$ .

(d)  $9x^2 + 42x + 49 = 0$

(e)  $3y^2 - 2y + 1 = 0$

**Solução 2.10** Temos,

(a) Como  $x^2 = 8y$ , a equação representa uma parábola com:

- vértice:  $V = (0, 0)$ ;

- reta focal = eixo  $OY$  :  $x = 0$ ;

- parâmetro:  $2p = 4 (\implies p = 2)$ ;

- foco:  $F = (0, 2)$ , acima da diretriz;

- diretriz:  $\mathcal{L} : y = -2$ .

(b) Completando o quadrado, obtemos

$$\begin{aligned}2(y^2 + 4y) = -5x + 7 &\iff 2(y^2 + 4y + 4) = -5x + 7 + 8 \\&\iff 2(y + 2)^2 = -5x + 15 \\&\iff 2(y + 2)^2 = -5(x - 3) \\&\iff (y + 2)^2 = -\frac{5}{2}(x - 3),\end{aligned}$$

que representa uma parábola com:

- vértice:  $V = (3, -2)$ ;
- reta focal:  $\ell : y = -2$ , paralela ao eixo  $OX$ ;
- parâmetro:  $2p = \frac{5}{4} \implies p = \frac{5}{8}$ ;
- foco:  $F = (3 - \frac{5}{8}, -2) = (\frac{19}{8}, -2)$ , à esquerda da diretriz;
- diretriz:  $\mathcal{L} : x = 3 + \frac{5}{8} = \frac{29}{8}$ .

(c) Como  $A = B = D = 0$  e seu discriminante é  $49 + 4 \times 3 \times 6 = 121 > 0$ , a equação (c) representa o par de retas  $y = \frac{-7 \pm 11}{6}$ , ou seja,  $y = -3$  e  $y = \frac{2}{3}$ , paralelas ao eixo  $OX$ .

(d) Como  $B = C = E = 0$  e seu discriminante é  $42^2 - 4 \times 9 \times 49 = 1764 - 1764 = 0$ , a equação (d) representa a reta  $x = -\frac{42}{18} = -\frac{21}{9} = -\frac{7}{3}$ , paralela ao eixo  $OY$ .

(e) Como  $A = B = D = 0$  e seu discriminante é  $4 - 12 = -8 < 0$ , a equação (e) representa o conjunto vazio.

# Capítulo 3

## Equação Geral do Segundo Grau em $\mathbb{R}^2$

**Definição 3.1** Dada uma função  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ , o conjunto

$$f^{-1}(c) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) = c\}$$

é a linha de nível  $c$  da função  $f$ , onde  $c \in \mathbb{R}$ .

Se  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  é a função linear  $f(x, y) = ax + by$ , onde  $(a, b) \neq (0, 0)$ , as linhas de nível de  $f$  são as retas do plano perpendiculares ao vetor  $\vec{v} = (a, b)$ , pois

$$f^{-1}(c) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; ax + by = c\}, \text{ para todo } c \in \mathbb{R}$$

Provaremos, neste capítulo, que as curvas de nível de uma função quadrática de duas variáveis, ou seja, de uma função  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F,$$

onde  $A \neq 0, B \neq 0$  ou  $C \neq 0$ , são as cônicas ou as cônicas degeneradas.

Para isso, baseado no estudo das linhas de nível de  $f$ , feito nos três capítulos anteriores, quando  $B = 0$ , basta mostrar que existe um sistema de eixos ortogonais  $O\bar{X}\bar{Y}$ , obtido por uma rotação positiva dos eixos  $OX$  e  $OY$ , para o qual a função  $f$ , nas coordenadas  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ , se escreve na forma

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = \lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 + \bar{D}\bar{x} + \bar{E}\bar{y} + F.$$

No caso particular em que se tem  $D = E = F = 0$ , a função quadrática

$$f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$$

é um polinômio homogêneo de segundo grau (todos os termos têm grau 2) e também são chamados de **formas quadráticas** de duas variáveis.

### 3.1 Autovalores e autovetores de uma matriz real $2 \times 2$

Sejam  $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  uma matriz real do tipo  $2 \times 2$  e  $\vec{u} = (x, y)$  um vetor em  $\mathbb{R}^2$ . Definimos  $\mathcal{A}\vec{u}$  como sendo o vetor  $(a_{11}x + a_{12}y, a_{21}x + a_{22}y)$ , ou seja,

$$\mathcal{A}\vec{u} = (a_{11}x + a_{12}y, a_{21}x + a_{22}y).$$

**Observação 3.1** A operação definida acima satisfaz à seguinte propriedade:

$$\mathcal{A}(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda\mathcal{A}\vec{u} + \mu\mathcal{A}\vec{v}$$

para quaisquer vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  em  $\mathbb{R}^2$  e números reais  $\lambda$  e  $\mu$ .

A prova desta propriedade pode ser feita como exercício.

Um número real  $\lambda$  é um autovalor da matriz  $\mathcal{A}$  se existir um vetor  $\vec{u}$  não nulo tal que  $\mathcal{A}\vec{u} = \lambda\vec{u}$ .

Seja  $\lambda$  um autovalor da matriz  $\mathcal{A}$ . Um vetor  $\vec{u} = (x, y)$  é um autovetor de  $\mathcal{A}$  relativo ao autovalor  $\lambda$  se  $\mathcal{A}\vec{u} = \lambda\vec{u}$ , ou seja,

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = \lambda x \\ a_{21}x + a_{22}y = \lambda y \end{cases} \iff \begin{cases} (\lambda - a_{11})x - a_{12}y = 0 \\ -a_{21}x + (\lambda - a_{22})y = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

**Observação 3.2** O vetor nulo é um autovetor relativo a qualquer autovalor, mas um número real só é um autovalor se ele possuir um autovetor não nulo.

**Observação 3.3** Se  $\vec{u}$  é um autovetor relativo ao autovalor  $\lambda$  da matriz  $\mathcal{A}$ , então  $\mu\vec{u}$  é um autovetor relativo ao autovalor  $\lambda$ , para todo  $\mu \in \mathbb{R}$ . E se  $\vec{v}$  é outro autovetor relativo ao autovalor  $\lambda$ , então  $\vec{u} + \vec{v}$  é um autovetor relativo ao autovalor  $\lambda$ .

Com efeito, como  $\mathcal{A}(\mu\vec{u}) = \mu\mathcal{A}\vec{u}$  e  $\mathcal{A}(\vec{u} + \vec{v}) = \mathcal{A}\vec{u} + \mathcal{A}\vec{v}$  (pela Observação 3.1), temos que:

- $\mathcal{A}(\mu\vec{u}) = \mu\mathcal{A}(\vec{u}) = \mu(\lambda\vec{u}) = \lambda(\mu\vec{u})$ ,
- $\mathcal{A}(\vec{u} + \vec{v}) = \mathcal{A}(\vec{u}) + \mathcal{A}(\vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v} = \lambda(\vec{u} + \vec{v})$ .

Na linguagem de Álgebra Linear, isso significa que o conjunto

$$\{\vec{u}; \mathcal{A}\vec{u} = \lambda\vec{u}\}$$

é um subespaço vetorial do espaço vetorial  $\mathbb{R}^2$ .

Então, um real  $\lambda$  é um autovalor da matriz  $\mathcal{A}$  se, e somente se, o sistema 3.1 tem uma solução não trivial  $(x, y)$  ( $(x, y) \neq (0, 0)$ ) se, e só se,

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{pmatrix} = 0$$

Com efeito,  $(\lambda - a_{11}, -a_{21})x + (-a_{12}, \lambda - a_{22})y = 0$  possui uma solução  $(x, y) \neq (0, 0)$  se, e só se, um dos vetores  $(\lambda - a_{11}, -a_{21})$  e  $(-a_{12}, \lambda - a_{22})$  é múltiplo do outro.

O polinômio  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dado por

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{pmatrix} = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) - a_{12}a_{21}$$

é denominado **polinômio característico da matriz  $\mathcal{A}$** .

Obtemos, assim, o seguinte resultado.

**Proposição 3.2** *Os autovalores de uma matriz  $\mathcal{A}$  são as raízes reais do polinômio característico da matriz  $\mathcal{A}$ .*

**Exemplo 3.1** Determine, caso existam, os autovalores e os autovetores correspondente da matriz:

(a)  $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ .

(b)  $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

**Solução 3.1** Observe que,

(a) O polinômio característico da matriz  $\mathcal{A}$  é

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 4 & -2 \\ 3 & \lambda - 4 \end{pmatrix} = (\lambda - 4)^2 + 6 = \lambda^2 - 8\lambda + 22$$

Como o discriminante  $\Delta = 64 - 88 = -24$  da equação  $p(\lambda) = 0$  é negativo, a equação não possui raízes reais. Logo, a matriz  $\mathcal{A}$  não tem autovalores.

(b) Seja

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -6 \\ -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4$$

o polinômio característico da matriz  $\mathcal{B}$ . Sendo

$$\lambda_1 = \frac{3 + \sqrt{9 + 16}}{2} = 4 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{3 - \sqrt{9 + 16}}{2} = -1$$

as raízes (reais) da equação  $p(\lambda) = 0$ , temos que  $\lambda_1 = 4$  e  $\lambda_2 = -1$  são os autovalores da matriz  $\mathcal{B}$ .

Os autovetores  $\vec{u}_1 = (x, y)$  relativos ao autovalor  $\lambda_1 = 4$  são as soluções do sistema

$$\begin{cases} (\lambda_1 - 1)x - 6y = 0 \\ -x + (\lambda_1 - 2)y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x - 6y = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases} \iff x = 2y.$$

Logo, todo autovetor relativo ao autovalor  $\lambda_1 = 4$  é da forma  $\vec{u}_1 = y(2, 1)$ ,  $y \in \mathbb{R}$ . Assim,  $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$  e  $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$  são os autovetores unitários relativos ao autovalor  $\lambda_1 = 4$ .

E os autovetores  $\vec{u}_2 = (x, y)$  relativos ao autovalor  $\lambda_2 = -1$  são as soluções do sistema

$$\begin{cases} (\lambda_2 - 1)x - 6y = 0 \\ -x + (\lambda_2 - 2)y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x - 6y = 0 \\ -x - 3y = 0 \end{cases} \iff x = -3y$$

isto é,  $\vec{u}_2 = (-3y, y) = y(-3, 1)$ ,  $y \in \mathbb{R}$ . Portanto,  $\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$  e  $\left(\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$  são os autovetores unitários relativos ao autovalor  $\lambda_2 = -1$ .

## 3.2 Rotação dos Eixos Coordenados

Seja  $OXY$  um sistema de eixos ortogonais. Dado  $\theta \in [0, 2\pi)$ , seja  $O\bar{X}\bar{Y}$  o sistema obtido girando os eixos  $OX$  e  $OY$  do ângulo  $\theta$  no sentido positivo (que vai de  $OX$  para  $O\bar{X}$ ). Então,

$$\vec{v}_1 = (\cos \theta, \sin \theta) \quad \text{e} \quad \vec{v}_2 = (-\sin \theta, \cos \theta)$$

são os vetores unitários na direção e no sentido dos eixos  $O\bar{X}$  e  $O\bar{Y}$ , respectivamente.

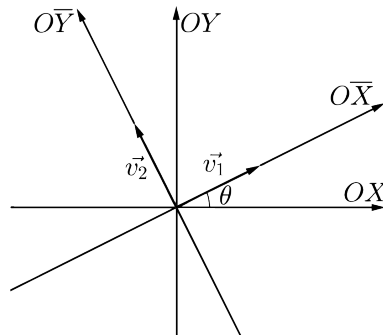


Figura 3.1: Ângulo  $\theta$  entre os eixos  $OX$  e  $O\bar{X}$ .

Considere um ponto  $P$  do plano. Como os vetores  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  são ortonormais (implica que,  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  não são múltiplos), existem números reais  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  de modo que

$$\vec{OP} = \bar{x}\vec{v}_1 + \bar{y}\vec{v}_2$$

Logo,  $(\bar{x}, \bar{y})$  são as coordenadas do ponto  $P$  com respeito ao sistema  $O\bar{X}\bar{Y}$ , pois

$$\text{Proj}_{\vec{v}_1} \vec{OP} = \bar{x}\vec{v}_1 \quad \text{e} \quad \text{Proj}_{\vec{v}_2} \vec{OP} = \bar{y}\vec{v}_2$$

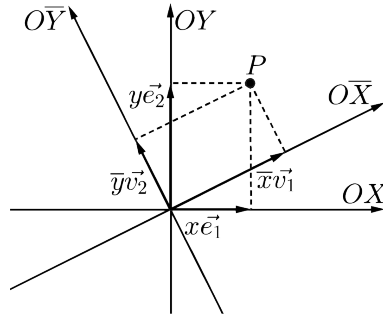


Figura 3.2:  $P = (x, y)_{OXY} = (\bar{x}, \bar{y})_{O\bar{X}\bar{Y}}$ .

Sejam  $(x, y)$  as coordenadas do ponto  $P$  em relação ao sistema  $OXY$ , isto é,  $\vec{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ , onde  $\vec{e}_1 = (1, 0)$  e  $\vec{e}_2 = (0, 1)$  são os vetores unitários na mesma direção e no mesmo sentido dos eixos  $OX$  e  $OY$ , respectivamente.

Então,

$$\begin{aligned} x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 &= \bar{x}\vec{v}_1 + \bar{y}\vec{v}_2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \bar{x} \langle \vec{v}_1, \vec{e}_1 \rangle + \bar{y} \langle \vec{v}_2, \vec{e}_1 \rangle \\ y = \bar{x} \langle \vec{v}_1, \vec{e}_2 \rangle + \bar{y} \langle \vec{v}_2, \vec{e}_2 \rangle \end{cases} &\text{e} \quad \begin{cases} \bar{x} = x \langle \vec{e}_1, \vec{v}_1 \rangle + y \langle \vec{e}_2, \vec{v}_1 \rangle \\ \bar{y} = x \langle \vec{e}_1, \vec{v}_2 \rangle + y \langle \vec{e}_2, \vec{v}_2 \rangle \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \bar{x} \cos \theta - \bar{y} \sin \theta \\ y = \bar{x} \sin \theta + \bar{y} \cos \theta \end{cases} &\text{e} \quad \begin{cases} \bar{x} = x \cos \theta + y \sin \theta \\ \bar{y} = -x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases} \\ \Leftrightarrow (x, y) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} (\bar{x}, \bar{y}) &\text{e} \quad (\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} (x, y). \end{aligned}$$

A matriz  $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  é a matriz de passagem das coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y})$  para as coordenadas  $(x, y)$  e, por sua vez,  $\mathcal{B}^t = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  é a matriz de passagem das coordenadas  $(x, y)$  para as coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y})$ , onde  $\mathcal{B}^t$  é a transposta da matriz  $\mathcal{B}$ , ou seja,

as colunas da matriz  $\mathcal{B}^t$  são as linhas da matriz  $\mathcal{B}$ .

Observe que a primeira e a segunda colunas da matriz  $\mathcal{B}$  são as coordenadas dos vetores  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  no sistema  $OXY$ , respectivamente, e a primeira e a segunda colunas da matriz  $\mathcal{B}^t$  são as coordenadas dos vetores  $\vec{e}_1$  e  $\vec{e}_2$  no sistema  $O\bar{X}\bar{Y}$ , respectivamente.

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= \cos \theta \vec{e}_1 + \sin \theta \vec{e}_2 & , & & \vec{v}_2 &= -\sin \theta \vec{e}_1 + \cos \theta \vec{e}_2 \\ \vec{e}_1 &= \cos \theta \vec{v}_1 - \sin \theta \vec{v}_2 & , & & \vec{e}_2 &= \sin \theta \vec{v}_1 + \cos \theta \vec{v}_2\end{aligned}$$

Temos também que  $\mathcal{B}^t \mathcal{B} = \mathcal{B} \mathcal{B}^t = \mathcal{I}$ , onde  $\mathcal{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  é a matriz identidade do tipo  $2 \times 2$ . Assim, a matriz de passagem do sistema  $OXY$  para o sistema  $O\bar{X}\bar{Y}$  tem a propriedade de que sua transposta é também sua inversa. As matrizes com esta propriedade são chamadas matrizes ortogonais.

**Exemplo 3.2** Dado um sistema de eixos ortogonais  $OXY$ , considere o sistema de eixos ortogonais  $O\bar{X}\bar{Y}$  obtido pela rotação positiva de  $45^\circ$  dos eixos  $OX$  e  $OY$  em torno da origem. Uma hipérbole nas coordenadas  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  tem centro na origem, um de seus vértices no ponto  $(\sqrt{2}, 0)$  e a reta  $\bar{y} = 2\bar{x}$  como uma de suas assíntotas.

- (a) Determine a equação da hipérbole nas coordenadas  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  e nas coordenadas  $x$  e  $y$ .
- (b) Obtenha o centro, os vértices, os vértices imaginários e as assíntotas da hipérbole nas coordenadas  $x$  e  $y$ .
- (c) Faça um esboço da curva no sistema de eixos  $OXY$ , indicando todos os elementos encontrados no item (b).

**Solução 3.2** (a) Nas coordenadas  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ , a reta focal  $\ell$  é o eixo-  $O\bar{X}$ , pois o centro  $C = (0, 0)$  e o vértice  $V = (\sqrt{2}, 0)$  pertencem ao eixo-  $O\bar{X}$ . Além disso,  $a = d(C, V) = \sqrt{2}$  e  $\frac{b}{a} = 2$ , pois  $\bar{y} = 2\bar{x}$  é uma assíntota da hipérbole. Então,  $b = 2a = 2\sqrt{2}$ , e

$$\mathcal{H} : \frac{\bar{x}^2}{2} - \frac{\bar{y}^2}{8} = 1$$

é a equação da hipérbole nas coordenadas  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ .

Usando as relações de mudança de coordenadas,

$$\begin{cases} \bar{x} = \cos 45^\circ x + \sin 45^\circ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) \\ \bar{y} = -\sin 45^\circ x + \cos 45^\circ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x + y) \end{cases}$$

obtemos que a equação da hipérbole nas coordenadas  $x$  e  $y$  é:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \times \frac{2}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{8} \times \frac{2}{4}(-x+y)^2 = 1 \\
\iff & 4(x+y)^2 - (-x+y)^2 = 16 \\
\iff & 4(x^2 + 2xy + y^2) - (x^2 - 2xy + y^2) = 16 \\
\iff & 3x^2 + 10xy + 3y^2 = 16 \\
\iff & 3x^2 + 10xy + 3y^2 - 16 = 0
\end{aligned}$$

(b) Nas coordenadas  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ , a hipérbole tem: centro  $C = (0, 0)$ ; vértices:  $A_1 = (-\sqrt{2}, 0)$  e  $A_2 = (\sqrt{2}, 0)$ ; vértices imaginários:  $B_1 = (0, -2\sqrt{2})$  e  $B_2 = (0, 2\sqrt{2})$ ; reta focal:  $\ell : \bar{y} = 0$ ; reta não focal:  $\ell' : \bar{x} = 0$ ; assíntotas:  $\bar{y} = \pm 2\bar{x}$ .

Pelo sistema, obtemos que  $\ell : -x + y = 0$  é a reta focal;  $\ell' : x + y = 0$  é a reta não focal e  $\frac{\sqrt{2}}{2}(-x + y) = \pm 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y)$ , isto é,  $r_- : y = -3x$  e  $r_+ : y = -\frac{1}{3}x$  são as assíntotas da hipérbole nas coordenadas  $x$  e  $y$ .

E, pelas relações de mudança de coordenadas,

$$\begin{cases} x = \cos 45^\circ \bar{x} - \sin 45^\circ \bar{y} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x} - \bar{y}) \\ y = \sin 45^\circ \bar{x} + \cos 45^\circ \bar{y} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x} + \bar{y}) \end{cases}$$

obtemos que  $C = (0, 0)$  é o centro,  $A_1 = (-1, -1)$  e  $A_2 = (1, 1)$  são os vértices, e  $B_1 = (2, -2)$  e  $B_2 = (-2, 2)$  são os vértices imaginários da hipérbole nas coordenadas  $x$  e  $y$ .

(c) Na figura 3.3 mostramos o esboço da hipérbole  $\mathcal{H}$ .

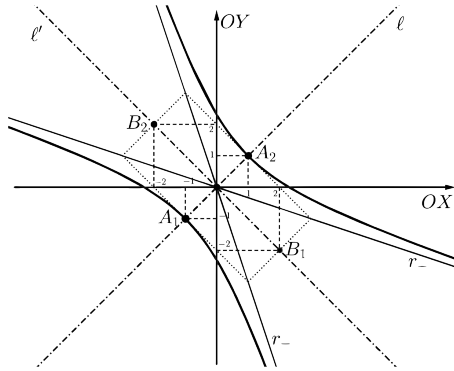


Figura 3.3: Hipérbole  $\mathcal{H} : 3x^2 + 10xy + 3y^2 - 16 = 0$ .

**Observação 3.4** Seja  $\vec{v}$  um vetor com coordenadas  $(\alpha, \beta)$  no sistema  $OXY$  e  $(\alpha', \beta')$  no sistema  $O'X'Y'$ . Então,

$$\begin{cases} \alpha' = \alpha \cos \theta + \beta \sin \theta \\ \beta' = -\alpha \sin \theta + \beta \cos \theta \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \alpha' \cos \theta - \beta' \sin \theta \\ \beta = \alpha' \sin \theta + \beta' \cos \theta \end{cases}$$

De fato, seja  $P$  o ponto tal que  $\vec{v} = \overrightarrow{O'P}$ . Se  $P = (x, y)$  no sistema  $OXY$  e  $P' = (x', y')$  no sistema  $O'X'Y'$ , temos que

$$\alpha = x - x_0, \quad \beta = y - y_0, \quad \alpha' = x' \quad \text{e} \quad \beta' = y'$$

Pelos respectivos sistemas.

### 3.3 Formas Quadráticas

Dada uma forma quadrática  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$ , a matriz real do tipo  $2 \times 2$ , é a matriz de  $f$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix}$$

Uma matriz  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$  real do tipo  $2 \times 2$  é simétrica se  $a_{12} = a_{21}$ . Note que a matriz de qualquer forma quadrática é simétrica.

Assim, para quaisquer  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$f(x, y) = \langle \mathcal{A}(x, y), (x, y) \rangle$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}(x, y), (x, y) \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} (x, y), (x, y) \right\rangle \\ &= \langle (Ax + (B/2)y, (B/2)x + Cy), (x, y) \rangle \\ &= Ax^2 + (B/2)yx + (B/2)xy + Cy^2 \\ &= Ax^2 + Bxy + Cy^2 = f(x, y). \end{aligned}$$

Para provarmos o resultado principal deste capítulo, precisamos da proposição seguinte.

**Proposição 3.3** *Sejam  $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$  um matriz real do tipo  $2 \times 2$  e  $\mathcal{B}^t = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}$*

sua matriz transposta. Então,

$$\langle \mathcal{B}\vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \mathcal{B}^t \vec{v} \rangle$$

para quaisquer vetores  $\vec{u} = (x, y)$  e  $\vec{v} = (z, w)$  em  $\mathbb{R}^2$ .

**Demonstração:**

De fato,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{B}\vec{u}, \vec{v} \rangle &= \langle (b_{11}x + b_{12}y, b_{21}x + b_{22}y), (z, w) \rangle \\ &= b_{11}xz + b_{12}yz + b_{21}xw + b_{22}yw \\ &= x(b_{11}z + b_{21}w) + y(b_{12}z + b_{22}w) \\ &= \langle (x, y), (b_{11}z + b_{21}w, b_{12}z + b_{22}w) \rangle \\ &= \langle \vec{u}, \mathcal{B}^t \vec{v} \rangle \end{aligned}$$

■

**Teorema 3.4** Seja  $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix}$  uma matriz simétrica real do tipo  $2 \times 2$ .

(a) As raízes  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  do polinômio característico de  $\mathcal{A}$  são reais. Isto é, a matriz  $\mathcal{A}$  tem dois autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , que têm multiplicidade um se  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , e multiplicidade dois se  $\lambda_1 = \lambda_2$ .

(b) Existe um par  $\vec{u}_1$  e  $\vec{u}_2$  de autovetores ortonormais relativos aos autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , respectivamente.

(c) Se  $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$  é a matriz do tipo  $2 \times 2$  cuja primeira coluna é formada pelas coordenadas do vetor  $\vec{u}_1 = (a_1, b_1)$  e a segunda, pelas coordenadas do vetor  $\vec{u}_2 = (a_2, b_2)$ , então

$$\mathcal{B}^t \mathcal{A} \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

**Demonstração:**

(a) O polinômio característico da matriz  $\mathcal{A}$  é

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} \lambda - A & -B/2 \\ -B/2 & \lambda - C \end{pmatrix} = (\lambda - A)(\lambda - C) - \frac{B^2}{4} \\ &= \lambda^2 - (A + C)\lambda + AC - \frac{B^2}{4}. \end{aligned}$$

Como o discriminante da equação  $p(\lambda) = 0$ ,

$$\begin{aligned}
\Delta &= (A + C)^2 - 4(AC - B^2/4) \\
&= A^2 + 2AC + C^2 - 4AC + B^2 \\
&= (A - C)^2 + B^2
\end{aligned}$$

é não negativo, as suas raízes  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são reais.

(b) Se  $\Delta = 0$ , temos que  $A = C$  e  $B = 0$  e, portanto,  $\lambda = A = C$  é a única raiz de  $p(\lambda) = 0$ . Neste caso,  $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  e  $\vec{e}_1 = (1, 0)$ ,  $\vec{e}_2 = (0, 1)$  são autovetores ortonormais relativos ao autovalor  $\lambda$  de multiplicidade dois.

Se  $\Delta > 0$ , a equação  $p(\lambda) = 0$  tem duas raízes reais  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  distintas.

Sejam  $\vec{u}_1$  e  $\vec{u}_2$  vetores não nulos tais que  $\mathcal{A}\vec{u}_1 = \lambda_1\vec{u}_1$  e  $\mathcal{A}\vec{u}_2 = \lambda_2\vec{u}_2$ , isto é,  $\vec{u}_1$  e  $\vec{u}_2$  são autovetores não nulos associados aos autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , respectivamente. Podemos supor, pela Observação 3.3, que  $\vec{u}_1$  e  $\vec{u}_2$  são vetores unitários (isto é,  $\|\vec{u}_1\| = \|\vec{u}_2\| = 1$ ).

O vetor  $\vec{u}_1$  é ortogonal ao vetor  $\vec{u}_2$ . De fato, pela Proposição 3.3 ,

$$\begin{aligned}
&< \mathcal{A}\vec{u}_1, \vec{u}_2 > = < \vec{u}_1, \mathcal{A}\vec{u}_2 > \\
\implies &< \lambda_1\vec{u}_1, \vec{u}_2 > = < \vec{u}_1, \lambda_2\vec{u}_2 > \\
\implies &\lambda_1 < \vec{u}_1, \vec{u}_2 > = \lambda_2 < \vec{u}_1, \vec{u}_2 > \\
\implies &(\lambda_1 - \lambda_2) < \vec{u}_1, \vec{u}_2 > = 0 \\
\implies &< \vec{u}_1, \vec{u}_2 > = 0.
\end{aligned}$$

(c) Como  $\mathcal{A}\vec{u}_1 = (Aa_1 + (B/2)b_1, (B/2)a_1 + Cb_1) = (\lambda_1a_1, \lambda_1b_1)$  e  $\mathcal{A}\vec{u}_2 = (Aa_2 + (B/2)b_2, (B/2)a_2 + Cb_2) = (\lambda_2a_2, \lambda_2b_2)$ , segue que

$$\mathcal{AB} = \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1a_1 & \lambda_2a_2 \\ \lambda_1b_1 & \lambda_2b_2 \end{pmatrix}$$

Além disso, sendo  $\|\vec{u}_1\|^2 = a_1^2 + b_1^2 = 1$ ,  $\|\vec{u}_2\|^2 = a_2^2 + b_2^2 = 1$  e  $< \vec{u}_1, \vec{u}_2 > = a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ , obtemos que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}^t\mathcal{AB} &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1a_1 & \lambda_2a_2 \\ \lambda_1b_1 & \lambda_2b_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1(a_1^2 + b_1^2) & \lambda_2(a_1a_2 + b_1b_2) \\ \lambda_1(a_1a_2 + b_1b_2) & \lambda_2(a_2^2 + b_2^2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

■

**Observação 3.5** Note que  $B = 0 \iff \vec{e}_1 = (1, 0)$  (ou  $\vec{e}_2 = (0, 1)$ ) é um autovetor da matriz  $\mathcal{A}$ .

Neste caso,  $A$  e  $C$  são os autovalores e  $\vec{e}_1 = (1, 0)$ ,  $\vec{e}_2 = (0, 1)$  são autovetores relativos aos autovalores  $A$  e  $C$ , respectivamente, da matriz  $\mathcal{A}$ .

Seja  $\theta \in [0, 2\pi)$  o ângulo que o vetor  $\vec{u}_1$  faz com o eixo  $OX$  no sentido positivo, isto é,  $\vec{u}_1 = (\cos \theta, \sin \theta)$ . Tomemos  $\vec{u}_2 = (-\sin \theta, \cos \theta)$ , obtido de  $\vec{u}_1$  por uma rotação positiva de  $\frac{\pi}{2}$ .

Seja  $O\bar{X}\bar{Y}$  o sistema cujos eixos  $O\bar{X}$  e  $O\bar{Y}$  têm a mesma direção e o mesmo sentido dos vetores  $\vec{u}_1$  e  $\vec{u}_2$ , respectivamente.

Assim, a forma quadrática  $f(x, y) = \langle \mathcal{A}(x, y), (x, y) \rangle$ , nas coordenadas  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  do sistema  $O\bar{X}\bar{Y}$ , é dada por:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = \langle \mathcal{A}(\mathcal{B}(\bar{x}, \bar{y})), \mathcal{B}(\bar{x}, \bar{y}) \rangle$$

Daí, sabendo que

$\mathcal{A}\mathcal{B}(x, y) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(x, y))$  e  $(\mathcal{B}^t \mathcal{A} \mathcal{B})(x, y) = \mathcal{B}^t(\mathcal{A}\mathcal{B}(x, y)) = \mathcal{B}^t(\mathcal{A}(\mathcal{B}(x, y)))$  concluímos, pela Proposição 3.3 e pelo Teorema 3.4, que

$$\begin{aligned} f(\bar{x}, \bar{y}) &= \langle \mathcal{B}^t(\mathcal{A}(\mathcal{B}(\bar{x}, \bar{y}))), (\bar{x}, \bar{y}) \rangle \\ &= \langle (\mathcal{B}^t \mathcal{A} \mathcal{B})(\bar{x}, \bar{y}), (\bar{x}, \bar{y}) \rangle \\ &= \langle (\lambda_1 \bar{x}, \lambda_2 \bar{y}), (\bar{x}, \bar{y}) \rangle \\ &= \lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 \end{aligned} \tag{3.2}$$

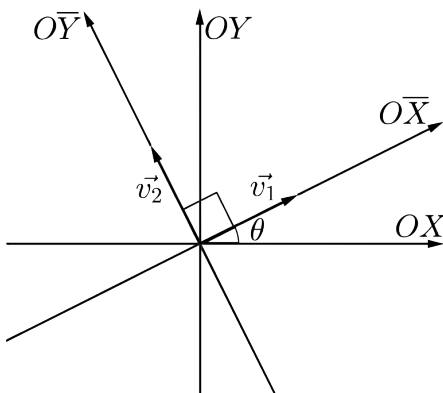


Figura 3.4: Sistemas de eixos ortogonais  $OXY$  e  $O\bar{X}\bar{Y}$ .

**Exemplo 3.3** Seja a forma quadrática  $f(x, y) = 3x^2 + 2xy + 3y^2$ , com  $A = C = 3$  e  $B = 2$ .

Então  $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  é a matriz da forma quadrática e

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -1 & \lambda - 3 \end{pmatrix} = (\lambda - 3)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

é a sua equação característica, cujas raízes são  $\lambda_1 = 4$  e  $\lambda_2 = 2$ . Isto é,  $\lambda_1 = 4$  e  $\lambda_2 = 2$  são os autovalores da matriz  $\mathcal{A}$ .

Os autovetores  $(x, y)$  relativos ao autovalor  $\lambda_1 = 4$  são as soluções do sistema

$$\begin{cases} (\lambda_1 - 3)x - y = 0 \\ -x + (\lambda_1 - 3)y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \iff x = y$$

Portanto,  $\vec{u}_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \left( \cos \frac{\pi}{4}, \sin \frac{\pi}{4} \right)$  é um autovetor unitário relativo ao autovalor  $\lambda_1 = 4$ . Como o autovetor  $\vec{u}_2$  relativo ao autovalor  $\lambda_2 = 2$  é ortogonal ao autovetor  $\vec{u}_1$ , basta tomar  $\vec{u}_2 = \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \left( -\sin \frac{\pi}{4}, \cos \frac{\pi}{4} \right)$ .

Seja  $O\bar{X}\bar{Y}$  o sistema de eixos ortogonais obtido girando os eixos  $OX$  e  $OY$ , no sentido positivo, do ângulo  $\theta = \pi/4$ . Nas coordenadas  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  deste sistema de eixos, a forma quadrática é dada por

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = \lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 = 4\bar{x}^2 + 2\bar{y}^2$$

Portanto, a linha de nível  $m$  de  $f$  é o conjunto vazio, se  $m < 0$ ; a origem, se  $m = 0$ , e a elipse  $\frac{\bar{x}^2}{m/4} + \frac{\bar{y}^2}{m/2} = 1$ , se  $m > 0$ .

No sistema de eixos  $O\bar{X}\bar{Y}$ , a origem é o centro,  $a = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2}}$ ,  $b = \frac{\sqrt{m}}{2}$ ,  $c = \frac{\sqrt{m}}{2}$ , a reta focal é o eixo-  $O\bar{Y}$ , a reta não focal é o eixo  $-O\bar{X}$ ,  $\left( 0, -\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2}} \right)$  e  $\left( 0, \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2}} \right)$  são os vértices sobre a reta focal,  $\left( -\frac{\sqrt{m}}{2}, 0 \right)$  e  $\left( \frac{\sqrt{m}}{2}, 0 \right)$  são os vértices sobre a reta não focal, e  $\left( 0, -\frac{\sqrt{m}}{2} \right)$  e  $\left( 0, \frac{\sqrt{m}}{2} \right)$  são os focos da elipse  $\frac{\bar{x}^2}{m/4} + \frac{\bar{y}^2}{m/2} = 1$ .

Pela mudança de coordenadas,

$$\begin{aligned} (x, y) &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} (\bar{x}, \bar{y}) \\ (\bar{x}, \bar{y}) &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} (x, y) \end{aligned}$$

obtemos que  $C = (0, 0)$  é o centro,  $\ell : x + y = 0$  é a reta focal,  $\ell' : -x + y = 0$  é a

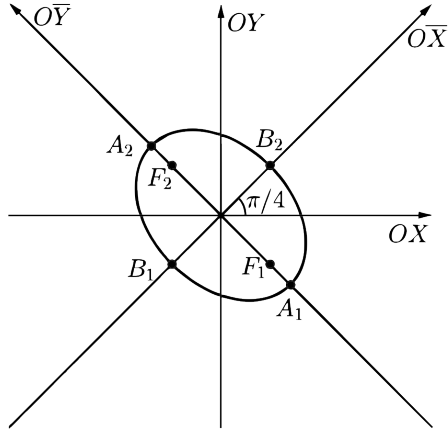


Figura 3.5: Linha de nível 4 de  $f$ .

reta não focal,  $A_1 = \left(\frac{\sqrt{m}}{2}, -\frac{\sqrt{m}}{2}\right)$  e  $A_2 = \left(-\frac{\sqrt{m}}{2}, \frac{\sqrt{m}}{2}\right)$  são os vértices na reta focal,  $B_1 = \left(-\frac{\sqrt{m}}{2\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{m}}{2\sqrt{2}}\right)$  e  $B_2 = \left(\frac{\sqrt{m}}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{m}}{2\sqrt{2}}\right)$  são os vértices na reta não focal, e  $F_1 = \left(\frac{\sqrt{m}}{2\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{m}}{2\sqrt{2}}\right)$  e  $F_2 = \left(-\frac{\sqrt{m}}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{m}}{2\sqrt{2}}\right)$  são os focos da elipse nas coordenadas  $x$  e  $y$ .

### 3.4 Equação Geral do Segundo Grau em $\mathbb{R}^2$

Consideremos a equação geral do segundo grau nas variáveis  $x$  e  $y$  :

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \quad (3.3)$$

Esta equação é da linha de nível zero da função quadrática

$$f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$$

Seja, como na seção anterior, o sistema  $O\bar{X}\bar{Y}$  de eixos ortogonais cujos eixos  $O\bar{X}$  e  $O\bar{Y}$  têm a mesma direção e o mesmo sentido dos autovetores  $\vec{u}_1$  e  $\vec{u}_2$ , relativos aos autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , respectivamente, da matriz  $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix}$ .

Então, por 3.1, a função quadrática  $f$ , nas coordenadas  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ , assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} f(\bar{x}, \bar{y}) &= \lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 + \langle (D, E), (\mathcal{B}(\bar{x}, \bar{y})) \rangle + F \\ \implies f(\bar{x}, \bar{y}) &= \lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 + \langle \mathcal{B}^t(D, E), (\bar{x}, \bar{y}) \rangle + F \\ \implies f(\bar{x}, \bar{y}) &= \lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 + \bar{D}\bar{x} + \bar{E}\bar{y} + F, \end{aligned}$$

onde  $\bar{D} = \langle (D, E), \vec{u}_1 \rangle$  e  $\bar{E} = \langle (D, E), \vec{u}_2 \rangle$ .

Nos capítulos anteriores, provamos que a equação

$$\lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 + \bar{D}\bar{x} + \bar{E}\bar{y} + F = 0 \quad (3.4)$$

que é a equação 3.3 nas coordenadas  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ , representa uma elipse ou uma elipse degenerada se  $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ , uma hipérbole ou uma hipérbole degenerada se  $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ , e uma parábola ou uma parábola degenerada se  $\lambda_1 \lambda_2 = 0$  ( $\lambda_1 \neq 0$  ou  $\lambda_2 \neq 0$ ).

Os eixos  $O\bar{X}$  e  $O\bar{Y}$  são os **eixos principais** da cônica  $\mathcal{C}$  representada pela equação 3.3. Estes eixos são paralelos às retas focal e não focal da cônica, nos casos em que  $\mathcal{C}$  é uma elipse ou um hipérbole, e são paralelas à reta focal e à diretriz quando  $\mathcal{C}$  é uma parábola.

O número real  $I = B^2 - 4AC$ , chamado **indicador** da equação 3.3, estabelece se a equação representa uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola (degenerada ou não), antes de reduzirmos a equação a sua **forma canônica** 3.4.

De fato, como  $\det \mathcal{A} = \det \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} = AC - B^2/4$ , então  $I = -4 \det \mathcal{A}$ .

Além disso, como  $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  e  $\mathcal{B}^t = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ , segue que  $\det \mathcal{B} = \det \mathcal{B}^t = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ .

Logo,  $I = -4\lambda_1\lambda_2$ , pois, pelo Teorema 3.4,

$$\det \mathcal{A} = (\det \mathcal{B}^t) (\det \mathcal{A})(\det \mathcal{B}) = \det (\mathcal{B}^t \mathcal{A} \mathcal{B})$$

$$\implies \det \mathcal{A} = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \lambda_2$$

Para provar que  $I = -4\lambda_1\lambda_2$ , usamos que o determinante do produto de duas matrizes é o produto dos determinante dessas matrizes.

Assim, a equação geral do segundo grau 3.3 representa:

- (a) uma elipse, um ponto ou o conjunto vazio se  $I < 0$ ;
- (b) uma hipérbole ou um par de retas concorrentes se  $I > 0$ ;
- (c) uma parábola, um par de retas paralelas, uma reta ou o conjunto vazio se  $I = 0$ .

Reordenando, quando  $B \neq 0$ , os autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  (se necessário), podemos supor que  $\theta \in (0, \pi/2)$ . Vamos determinar agora o ângulo  $\theta$ , em função dos coeficientes  $A, B$  e  $C$  da equação 3.3.

Temos que:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \\ \implies & \begin{pmatrix} A \cos \theta + (B/2) \sin \theta & (B/2) \cos \theta + C \sin \theta \\ -A \sin \theta + (B/2) \cos \theta & -(B/2) \sin \theta + C \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \\ \implies & (A \cos \theta + (B/2) \sin \theta)(-\sin \theta) + ((B/2) \cos \theta + C \sin \theta) \cos \theta = 0 \\ \implies & -A \cos \theta \sin \theta - (B/2) \sin^2 \theta + (B/2) \cos^2 \theta + C \sin \theta \cos \theta = 0 \\ \implies & (B/2) (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + (C - A) \sin \theta \cos \theta = 0 \\ \implies & B \cos 2\theta + (C - A) \sin 2\theta = 0. \end{aligned}$$

Então, quando  $B \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} & \theta = \pi/4, \text{ se } A = C \\ & \text{e} \\ & \tan 2\theta = \frac{B}{A - C}, \text{ se } A \neq C \end{aligned}$$

Sendo  $1 + \tan^2(2\theta) = \sec^2(2\theta)$ , segue que

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(2\theta)}}, \text{ se } \frac{B}{A - C} > 0 \\ \cos 2\theta &= -\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(2\theta)}}, \text{ se } \frac{B}{A - C} < 0\end{aligned}$$

pois, como  $2\theta \in (0, \pi)$ ,  $\cos 2\theta$  e  $\tan 2\theta$  têm o mesmo sinal.

Conhecendo  $\cos 2\theta$ , podemos determinar o ângulo  $\theta \in (0, \pi/2)$ , por meio das relações trigonométricas:

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{1 + \cos 2\theta}}{2} \quad \text{e} \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{1 - \cos 2\theta}}{2}$$

**Exemplo 3.4** Seja a função quadrática  $f(x, y) = x^2 + 2\sqrt{2}xy + 2y^2 + 6\sqrt{3}x + 3$ , com  $A = 1$ ,  $B = 2\sqrt{2}$ ,  $C = 2$ ,  $D = 6\sqrt{3}$ ,  $E = 0$  e  $F = 3$ .

A matriz  $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$  é a matriz de  $f$ . Portanto,

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \lambda - 2 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2) - 2 = \lambda^2 - 3\lambda = 0,$$

é sua equação característica, cujas raízes são  $\lambda_1 = 3$  e  $\lambda_2 = 0$ . Ou seja,  $\lambda_1 = 3$  e  $\lambda_2 = 0$  são os autovalores da matriz  $\mathcal{A}$ .

Os autovetores  $(x, y)$  da matriz  $\mathcal{A}$  relativos ao autovalor  $\lambda_1 = 3$  são as soluções do sistema

$$\begin{cases} (\lambda_1 - 1)x - \sqrt{2}y = 0 \\ -\sqrt{2}x + (\lambda_1 - 2)y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - \sqrt{2}y = 0 \\ -\sqrt{2}x + y = 0 \end{cases} \iff y = \sqrt{2}x.$$

Logo,  $\vec{u}_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right)$  é um autovetor unitário relativo ao autovalor  $\lambda_1 = 3$  e, portanto,

$\vec{u}_2 = \left( -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$  é um autovetor unitário relativo ao autovalor  $\lambda_2 = 0$ .

Seja  $O\bar{X}\bar{Y}$  o sistema de eixos ortogonais obtido girando os eixos  $OX$  e  $OY$ , no sentido positivo, do ângulo  $\theta \in (0, \pi/2)$  tal que

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ e } \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \left( \iff \tan 2\theta = \frac{B}{A - C} = -2\sqrt{2}. \right)$$

Nestas coordenadas, a função quadrática se escreve como

$$\begin{aligned}
f(\bar{x}, \bar{y}) &= 3\bar{x}^2 + < \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & \sqrt{2}/\sqrt{3} \\ -\sqrt{2}/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} (6\sqrt{3}, 0), (\bar{x}, \bar{y}) > +3 \\
\iff f(\bar{x}, \bar{y}) &= 3\bar{x}^2 + 6\bar{x} - 6\sqrt{2}\bar{y} + 3 \\
\iff f(\bar{x}, \bar{y}) &= 3(\bar{x}^2 + 2\bar{x}) - 6\sqrt{2}\bar{y} + 3 \\
\iff f(\bar{x}, \bar{y}) &= 3(\bar{x} + 1)^2 - 6\sqrt{2}\bar{y}.
\end{aligned}$$

Então, a linha de nível  $6\sqrt{2}m, m \in \mathbb{R}$ , de  $f$  é a parábola

$$(\bar{x} + 1)^2 = 2\sqrt{2}(\bar{y} + m)$$

que tem vértice  $\bar{V} = (-1, -m), p = \sqrt{2}/2$ , reta focal  $\bar{\ell} : \bar{x} = -1$ , foco  $\bar{F} = (-1, -m + \sqrt{2}/2)$  e diretriz  $\bar{\ell} : \bar{y} = -m - \sqrt{2}/2$ , nas coordenadas  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ .

Pela mudança de coordenadas,

$$\begin{aligned}
(x, y) &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -\sqrt{2}/\sqrt{3} \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} (\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} \bar{x} - \sqrt{2}\bar{y} \\ \sqrt{2}\bar{x} + \bar{y} \end{pmatrix} \\
(\bar{x}, \bar{y}) &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & \sqrt{2}/\sqrt{3} \\ -\sqrt{2}/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} (x, y) = \begin{pmatrix} x + \sqrt{2}y \\ -\sqrt{2}x + y \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

temos que que  $V = \left( \frac{-1 + \sqrt{2}m}{\sqrt{3}}, \frac{-\sqrt{2} - m}{\sqrt{3}} \right)$  é o vértice,  $\ell : x + \sqrt{2}y = -\sqrt{3}$  é a reta focal,  $F = \left( \frac{\sqrt{2}(m - \sqrt{2})}{\sqrt{3}}, \frac{-(2m + \sqrt{2})}{2\sqrt{3}} \right)$  é o foco e  $\ell : -\sqrt{2}x + y = -m\sqrt{3} - \sqrt{6}/2$  é a diretriz da parábola nas coordenadas  $x$  e  $y$ .

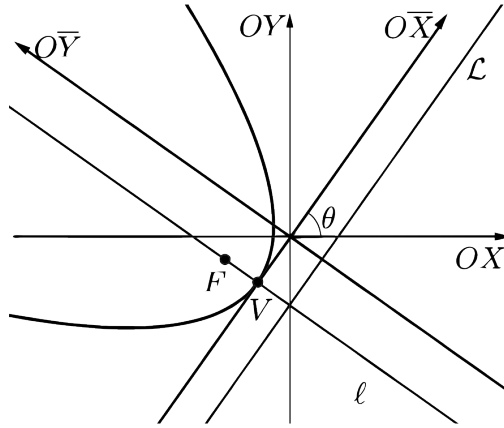


Figura 3.6: Linha de nível zero de  $f$ .

# Capítulo 4

## Transformações Geométricas Planas

Nas seções anteriores vimos que dada uma equação do segundo grau

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (4.1)$$

existe um sistema de eixos ortogonais  $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ , obtido após uma rotação e/ou uma translação do sistema  $OXY$ , tal que a equação nas coordenadas  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  fica na forma canônica.

Neste capítulo, estudaremos as transformações geométricas do plano. Dentre elas, a **translação**  $T_{P_0}$  que leva a origem no ponto  $P_0$  e a **rotação**  $R_\theta$  de ângulo  $\theta$  em torno da origem. Embora haja uma analogia entre essas transformações e as mudanças de coordenadas estudadas anteriormente, há também uma diferença. Nas transformações de translação e rotação mantemos fixos os eixos e transladamos e rotacionamos os pontos, enquanto que na mudança de coordenadas mantemos fixos os pontos e movemos os eixos.

### 4.1 Transformações no plano

**Definição 4.1** Uma transformação no plano  $\pi$  é uma função  $T : \pi \longrightarrow \pi$  que a cada ponto  $P \in \pi$  associa o ponto  $T(P) \in \pi$  chamado imagem de  $P$  por  $T$ .

Ao longo deste capítulo, vamos fixar um sistema de eixos ortogonais  $OXY$  no plano  $\pi$ . Desta maneira, uma transformação  $T$  de  $\pi$  em  $\pi$  pode ser vista como uma aplicação de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^2$  que a cada ponto  $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  associa o ponto  $P' = T(P) = (x', y') \in \mathbb{R}^2$ . Ou, dependendo das propriedades de  $T$ , que queremos enfatizar, podemos interpretar  $T$  como uma transformação de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^2$  que a cada vetor  $\vec{v} = (x, y)$  associa o vetor  $\vec{v}' = T(\vec{v}) = (x', y')$ .

**Definição 4.2** Dizemos que as transformações  $T$  e  $L$  são iguais, e escrevemos  $T = L$ , quando  $T(P) = L(P)$  para todo ponto  $P$ .

**Exemplo 4.1 (a)** A transformação identidade, que designamos  $\mathcal{I}$ , é a transformação que a cada ponto  $P$  do plano associa ele próprio, isto é,  $\mathcal{I}(P) = P$ , para todo ponto  $P$ .

**(b)** Seja  $P_0$  um ponto do plano. A transformação  $T$  que a todo ponto  $P$  do plano associa o ponto  $P_0$ ,  $T(P) = P_0$ , é a **transformação constante de valor  $P_0$** .

(c) Seja  $O$  a origem do sistema  $OXY$ . A translação até o ponto  $P_0$  é a transformação  $T_{P_0}$  do plano que a cada ponto  $P$  associa o ponto  $P' = T_{P_0}(P)$  tal que  $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{OP_0}$ .

Se  $P_0 = (x_o, y_o)$  e  $P = (x, y)$ , então

$$P' = T_{P_0}(P) = (x', y')$$

onde:

$$\begin{aligned}(x' - x, y' - y) &= (x_o - 0, y_o - 0) \\ &= (x_o, y_o).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}T_{P_0}(P) &= P' = (x', y') \\ &= (x_o + x, y_o + y)\end{aligned}$$

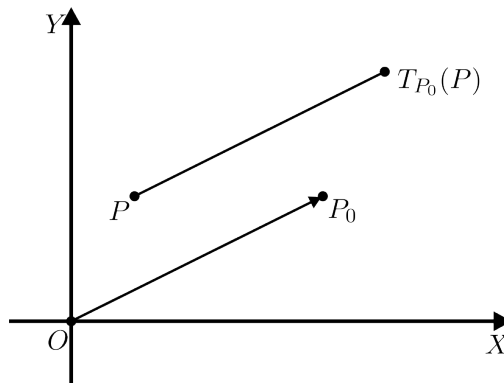


Figura 4.1: Translação  $T_{P_0}$

Outra forma de descrever uma translação é dando seu vetor de translação: a translação pelo vetor  $\vec{v}$  é a transformação dada por  $T_{\vec{v}}(P) = P'$ , onde  $\overrightarrow{PP'} = \vec{v}$ . Escrevemos a translação pelo vetor  $\vec{v}$  como

$$T_{\vec{v}}(P) = P + \vec{v}.$$

Então, se  $\vec{v} = (a, b)$ ,  $T_{\vec{v}}(x, y) = (x + a, y + b)$ , para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

(d) Dado um ponto  $P_0$  do plano, a transformação  $R_{P_0}$  que a cada ponto  $P$  do plano associa o ponto  $P' = R_{P_0}(P)$ , pertencente à reta que passa por  $P_0$  e  $P$ , tal que

$$\overrightarrow{P_0P'} = -\overrightarrow{P_0P}$$

é a **reflexão em relação ao ponto  $P_0$** .

Se  $P_0 = (x_o, y_o)$  e  $P = (x, y)$  é um ponto do plano, então  $P' = R_{P_0}(P) = (x', y')$  é o ponto tal que

$$(x' - x_o, y' - y_o) = -(x - x_o, y - y_o)$$

isto é,

$$R_{P_0}(P) = (2x_o - x, 2y_o - y).$$

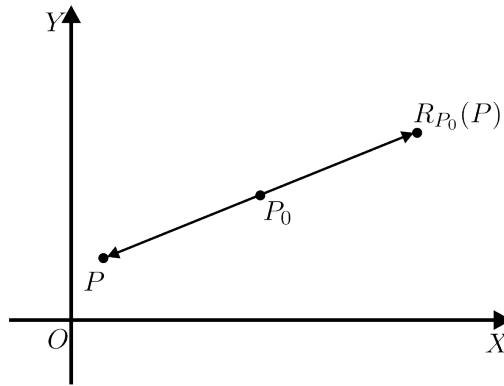


Figura 4.2: Reflexão  $R_{P_0}$

Note que, se  $P_0 = (0, 0)$ , então  $R_{(0,0)}(x, y) = (-x, -y)$ , para todo  $(x, y)$ .

(e) A **projeção ortogonal sobre uma reta**  $\ell$  no plano é a transformação, designada  $\text{Proj}_\ell$ , que a cada ponto  $P$  do plano associa o ponto  $P'$  onde a reta  $\ell$  intersecta a reta perpendicular a  $\ell$  que passa pelo ponto  $P$ .

Se  $\ell$  é uma reta que faz um ângulo  $\alpha$ , no sentido positivo, com o eixo  $OX$ , então  $(\cos \alpha, \sin \alpha)$  é um vetor paralelo a  $\ell$  e

$$\ell : -(\sin \alpha)x + (\cos \alpha)y = c$$

é a sua equação cartesiana para algum  $c \in \mathbb{R}$ .

Se  $P = (x_o, y_o)$  é um ponto do plano, então

$$\ell^\perp : (\cos \alpha)x + (\sin \alpha)y = (\cos \alpha)x_o + (\sin \alpha)y_o$$

é a reta perpendicular a  $\ell$  que passa pelo ponto  $P_0$ .

Então, se  $P' = \text{Proj}_\ell(P) = (x', y')$ , temos que  $(x', y')$  é a solução do sistema

$$\begin{cases} -(\sin \alpha)x' + (\cos \alpha)y' = c \\ (\cos \alpha)x' + (\sin \alpha)y' = (\cos \alpha)x_o + (\sin \alpha)y_o \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos

$$\begin{aligned}
P' &= \text{Proj}_\ell(P) \\
&= ((\cos^2 \alpha)x_o + \cos \alpha(\sin \alpha)y_o - c \sin \alpha, \cos \alpha(\sin \alpha)x_o + (\sin^2 \alpha)y_o + c \cos \alpha).
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
P' = \text{Proj}_\ell(P) &= ((\cos^2 \alpha)x_o + \cos \alpha(\sin \alpha)y_o, \cos \alpha(\sin \alpha)x_o + (\sin^2 \alpha)y_o) \\
&\quad + c(-\sin \alpha, +\cos \alpha).
\end{aligned}$$

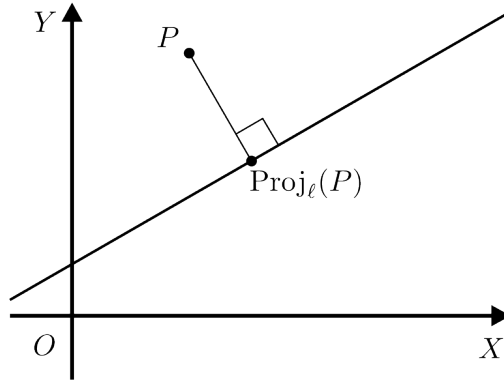


Figura 4.3: Projeção ortogonal  $\text{Proj}_\ell$

Em particular, se  $\ell$  é o eixo  $OX$ , então  $\alpha = 0$  e  $c = 0$ . Assim, a projeção  $P_x = \text{Proj}_\ell$  é dada por  $P_x(x_o, y_o) = (x_o, 0)$ . De modo análogo, a projeção  $P_y$  sobre o eixo  $OY$  ( $\alpha = \pi/2$  e  $c = 0$ ) é a transformação  $P_y(x_o, y_o) = (0, y_o)$ .

(f) A **reflexão  $R_\ell$  em relação à reta  $\ell$**  é a transformação que a cada ponto  $P$  associa o ponto  $P' = R_\ell(P)$  tal que  $\ell$  é a mediatriz do segmento  $PP'$ . Ou seja,  $P' = (x', y')$  é o ponto do plano tal que  $\text{Proj}_\ell(P)$  é o ponto médio do segmento  $PP'$ .

Logo, se  $P = (x, y)$  e  $\ell : -\sin \alpha x + \cos \alpha y = c$ , temos, pelo item anterior, que:

$$\begin{aligned}
R_\ell(x, y) &= (x', y') = 2 \text{Proj}_\ell(x, y) - (x, y) \\
\iff R_\ell(x, y) &= (2(\cos^2 \alpha)x + 2 \cos \alpha(\sin \alpha)y - 2c \sin \alpha - x, \\
&\quad 2 \cos \alpha(\sin \alpha)x + 2(\sin^2 \alpha)y + 2c \cos \alpha - y) \\
\iff R_\ell(x, y) &= ((2 \cos^2 \alpha - 1)x + 2 \cos \alpha(\sin \alpha)y - 2c \sin \alpha, \\
&\quad 2 \cos \alpha(\sin \alpha)x + 2(\sin^2 \alpha)y + 2c \cos \alpha - y) \\
R_\ell(x, y) &= ((\cos 2\alpha)x + (\sin 2\alpha)y, (\sin 2\alpha)x - (\cos 2\alpha)y) \\
&\quad + 2c(-\sin \alpha, \cos \alpha)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

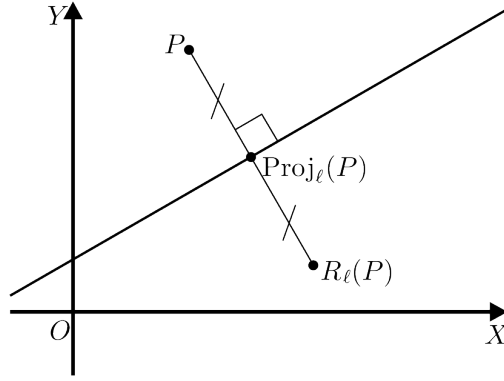


Figura 4.4: Reflexão  $R_\ell$

## 4.2 Transformações lineares

**Definição 4.3** Uma transformação  $T$  é uma transformação linear se

(a)  $T$  transforma uma soma de vetores na soma de suas imagens:

$$T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$$

para todos os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ ;

(b)  $T$  transforma o múltiplo de um vetor no mesmo múltiplo da sua imagem:

$$T(\lambda \vec{u}) = \lambda T(\vec{u})$$

para todo vetor  $\vec{u}$  e para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Observação 4.1** (a) Pela identificação entre pontos e vetores, num sistema de eixos  $OXY$ , toda transformação linear pode ser vista também como uma transformação de pontos do plano.

De fato, se  $T$  é uma transformação linear (de vetores) e  $P$  é um ponto no plano, definimos  $T(P) = Q$ , onde  $Q$  é o ponto tal que  $T(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OQ}$ .

(b) Uma transformação linear deixa sempre o vetor nulo fixo:  $T(\vec{0}) = \vec{0}$ .

Com efeito, sendo  $T$  linear:  $T(-\vec{v}) = T(-1\vec{v}) = -1T(\vec{v}) = -T(\vec{v})$ ,

e

$$T(\vec{0}) = T(-\vec{v} + \vec{v}) = T(-\vec{v}) + T(\vec{v}) = -T(\vec{v}) + T(\vec{v}) = \vec{0}$$

Portanto, se uma transformação não deixa fixo o vetor nulo  $\vec{0}$ , ou seja, não deixa a origem fixa, então não é uma transformação linear.

**Exemplo 4.2 (a)** A transformação que a cada vetor  $\vec{v}$  associa o vetor nulo  $\vec{0}$  é linear e é chamada transformação linear nula ou transformação zero.

**(b)** A transformação identidade  $\mathcal{I}$  que a cada vetor associa ele próprio (ou que a cada ponto associa ele próprio) é uma transformação linear.

**(c)** A reflexão com respeito à origem é uma transformação linear.

De fato, na linguagem vetorial, a reflexão é dada por  $T(\vec{v}) = -\vec{v}$ . Assim,

$$T(\vec{u} + \vec{v}) = -(\vec{u} + \vec{v}) = -\vec{u} - \vec{v} = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$$

e

$$T(\lambda\vec{v}) = -\lambda\vec{v} = \lambda(-\vec{v}) = \lambda T(\vec{v})$$

para todos  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  vetores do plano.

**(d)** Se  $k \in \mathbb{R}$ , a transformação,  $T(\vec{v}) = k\vec{v}$  é linear.

Com efeito, para quaisquer  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  vetores do plano e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , temos:

$$T(\vec{u} + \vec{v}) = k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v} = T(\vec{u}) + T(\vec{v}),$$

$$T(\lambda\vec{v}) = k(\lambda\vec{v}) = k\lambda\vec{v} = \lambda(k\vec{v}) = \lambda T(\vec{v}).$$

Note que

$$\|T(\vec{v})\|^2 = \langle T(\vec{v}), T(\vec{v}) \rangle = \langle k\vec{v}, k\vec{v} \rangle = k^2 \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = k^2 \|\vec{v}\|^2$$

Portanto,  $\|T(\vec{v})\| = |k| \|\vec{v}\|$ . Ou seja,  $T$  multiplica o tamanho dos vetores por  $|k|$ .

**Definição 4.4** A transformação  $T$  é chamada **homotetia de razão  $k$** . A homotetia de razão  $k = 1$  é a transformação identidade e a homotetia de razão  $k = -1$  é a reflexão com respeito à origem, pois leva cada vetor  $\vec{v}$  no seu simétrico  $-\vec{v}$ .

Note que uma homotetia de razão  $k$  com  $|k| < 1$  encurta o tamanho dos vetores não nulos (isto é, encurta a distância entre dois pontos), por isso é também chamada **contração linear uniforme**. Entretanto, quando  $|k| > 1$ , a homotetia aumenta o tamanho dos vetores não nulos, ou seja, aumenta a distância entre dois pontos e por isso é também chamada **expansão linear uniforme**.

**(e)** A projeção ortogonal sobre uma reta  $\ell$  que passa pela origem é uma transformação linear.

Com efeito, se  $\ell$  é a reta paralela ao vetor unitário  $\vec{u}$  que passa pela origem, temos, na linguagem vetorial, que a projeção ortogonal do vetor  $\vec{v}$  sobre a reta  $\ell$  é dada por

$$\text{Proj}_\ell(\vec{v}) = \text{Proj}_{\vec{u}}(\vec{v}) = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{u}.$$

Então, para todos os vetores  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  e para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} \text{Proj}_\ell(\vec{v} + \vec{w}) &= \langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle \vec{u} \\ &= (\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle) \vec{u} \\ &= \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{u} + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \vec{u} \\ &= \text{Proj}_\ell(\vec{v}) + \text{Proj}_\ell(\vec{w}), \end{aligned}$$

e

$$\text{Proj}_\ell(\lambda \vec{v}) = \langle \vec{u}, \lambda \vec{v} \rangle \vec{u} = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{u} = \lambda \text{Proj}_\ell(\vec{v})$$

(f) A reflexão com respeito a uma reta que passa pela origem é uma transformação linear.

Se  $\vec{u}$  é um vetor unitário na direção da reta  $\ell$  que passa pela origem, então, na linguagem vetorial, a reflexão do vetor  $\vec{v}$  em relação a  $\ell$  é dada por:

$$R_\ell(\vec{v}) = 2 \text{Proj}_{\vec{u}}(\vec{v}) - \vec{v}$$

(g) As transformações por vetores não nulos não são consideradas transformações lineares, uma vez que não preservam o vetor nulo (ou seja, não mantêm a origem fixa).

(h) A transformação  $T(x, y) = (x^2, 0)$  não é linear, pois  $T(1, 0) = (1^2, 0) = (1, 0)$  e  $T(2(1, 0)) = T(2, 0) = (2^2, 0) = (4, 0) \neq (2, 0) = 2(1, 0) = 2T(1, 0)$ .

**Proposição 4.5** *Uma transformação  $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  é linear se, e só se, existem números reais  $a, b, c$  e  $d$  tais que:*

$$T(x, y) = (ax + cy, bx + dy), \text{ para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

**Demonstração:**

Sejam  $a, b, c$  e  $d$  os números reais dados por  $T(\vec{e}_1) = T(1, 0) = (a, b)$  e  $T(\vec{e}_2) = T(0, 1) = (c, d)$ .

Então, se  $T$  é linear,

$$\begin{aligned} T(x, y) &= T(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) = xT(\vec{e}_1) + yT(\vec{e}_2) \\ &= x(a, b) + y(c, d) = (ax + cy, bx + dy) \end{aligned}$$

para todo vetor  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Reciprocamente, se existem números reais  $a, b, c$  e  $d$  de modo que  $T(x, y) = (ax + cy, bx + dy)$ , para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , é fácil verificar que  $T$  é linear. ■

A matriz  $M_T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  real do tipo  $2 \times 2$ , cuja primeira coluna é o vetor  $T(\vec{e}_1) = (a, b)$  e cuja segunda coluna é o vetor  $T(\vec{e}_2) = (c, d)$ , **é a matriz da transformação linear  $T$** .

Observe, pela definição dada no Capítulo 8, que  $T(\vec{u}) = M_T \vec{u}$ , para todo vetor  $\vec{u}$ .

**Exemplo 4.3 (a)** A transformação linear nula se representa pela matriz nula:  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

**(b)** A matriz associada à transformação identidade é a matriz identidade que designamos também por  $I$ . Com efeito,  $I(1, 0) = (1, 0)$  e  $I(0, 1) = (0, 1)$ , logo:

$$M_I = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**(c)** Se  $T(x, y) = (-x, -y)$  é a reflexão com respeito à origem, então  $T(1, 0) = (-1, 0)$  e  $T(0, 1) = (0, -1)$ .

Assim, a matriz que representa  $T$  é

$$M_T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**(d)** Seja  $\ell$  a reta paralela ao vetor unitário  $\vec{u} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$  que passa pela origem.

Então,  $\begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha \\ \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha \end{pmatrix}$  é a matriz da projeção sobre a reta  $\ell$  Proj $_{\ell}$  e,

$\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$  é a matriz da reflexão sobre a reta  $\ell$   $R_{\ell}$ .

**(e)** Um **cissalhamento ao longo do eixo  $OX$**  no plano é uma transformação linear dada por uma matriz da forma  $C_k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Isto é, se  $\vec{v} = (x, y)$ , então:

$$C_k(\vec{v}) = (x + ky, y)$$

isto é,  $C_k(x, y) = (x + ky, y)$ .

Note que,

$$C_k(\vec{e}_1) = C_k(1, 0) = (1, 0) = \vec{e}_1$$

$$C_k(\vec{e}_2) = C_k(0, 1) = (k, 1) = k\vec{e}_1 + \vec{e}_2$$

ou seja,  $C_k$  deixa os pontos do eixo  $OX$  fixos e desloca todos os outros pontos do plano paralelamente ao eixo  $OX$  por um fator de  $k$ .

O cisalhamento ao longo do eixo  $OY$  se define de forma análoga.

(f) A transformação linear  $T(x, y) = (ax, by)$  é chamada **transformação diagonal**. Uma homotetia de razão  $k$  é uma transformação diagonal com  $a = b = k$ . A transformação  $T$  se representa pela matriz diagonal

$$M_T = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

e o seu efeito é de mudar a escala dos objetos do plano a razão  $a$  ao longo do eixo  $OX$  e  $b$  ao longo do eixo  $OY$ .

Uma transformação diagonal  $T$  de razões  $a \neq 0$  e  $b \neq 0$ , com  $a \neq b$ , transforma o círculo unitário  $\mathcal{C}$  na elipse  $\mathcal{E}$  de semi-eixos de comprimentos  $|a|$  (semi-eixo paralelo ao eixo  $OX$ ) e  $|b|$  (semi-eixo paralelo ao eixo  $OY$ ).

Com efeito, se  $(x, y) \in \mathcal{C}$ , então  $x^2 + y^2 = 1$  e, sendo

$$T(x, y) = (ax, by) = (x', y')$$

temos:

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = \frac{(ax)^2}{a^2} + \frac{(by)^2}{b^2} = x^2 + y^2 = 1$$

isto é,  $(x', y') \in \mathcal{E}$ .

Reciprocamente, se  $(x', y') \in \mathcal{E}$ , o ponto  $(x, y) = \left(\frac{x'}{a}, \frac{y'}{b}\right)$  pertence ao círculo unitário e é levado por  $T$  no ponto  $(x', y')$ .

**Definição 4.6** A rotação de ângulo  $\theta$  em torno do ponto  $P_0$  é a transformação  $\mathcal{R}_{\theta, P_0} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  que a cada ponto  $P$  do plano associa o ponto  $P'$  obtido pela rotação de ângulo  $\theta$ , no sentido positivo, do ponto  $P$  em torno do ponto  $P_0$ .

Determinemos primeiro a rotação

$$R_{\theta, O} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

em torno da origem. Sejam  $P = (x, y)$  um ponto e  $(x', y') = R_{\theta, O}(x, y)$  sua imagem.

Se  $\varphi$  é o ângulo que o vetor  $\overrightarrow{OP}$  faz com o eixo  $OX$  no sentido positivo, então  $P = (x, y) = (|\overrightarrow{OP}| \cos \varphi, |\overrightarrow{OP}| \sin \varphi)$  e, portanto,

$$\begin{aligned}
R_{\theta,O}(x,y) &= (|\overrightarrow{OP}| \cos(\theta + \varphi), |\overrightarrow{OP}| \sin(\theta + \varphi)) \\
\iff R_{\theta,O}(x,y) &= (|\overrightarrow{OP}|(\cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi), \\
&\quad |\overrightarrow{OP}|(\cos \theta \sin \varphi + \sin \theta \cos \varphi)) \\
\iff R_{\theta,O}(x,y) &= (|\overrightarrow{OP}| \cos \varphi \cos \theta - |\overrightarrow{OP}| \sin \varphi \sin \theta, \\
&\quad |\overrightarrow{OP}| \sin \varphi \cos \theta + |\overrightarrow{OP}| \cos \varphi \sin \theta) \\
\iff R_{\theta,O}(x,y) &= (x \cos \theta - y \sin \theta, y \cos \theta + x \sin \theta).
\end{aligned}$$

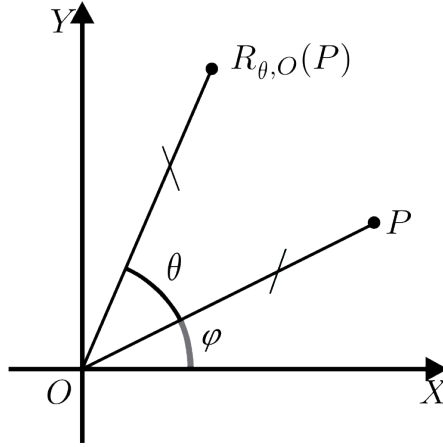


Figura 4.5: Rotação  $R_{\theta,O}$

Logo,

$$R_{\theta,O}(x,y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta) \quad (4.3)$$

é uma transformação linear e  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  é a matriz que a representa.

Seja agora a rotação  $R_{\theta,P_0}$  de ângulo  $\theta$  em torno do ponto  $P_0 = (x_o, y_o)$ .

Se  $P = (x,y)$  é um ponto de  $\mathbb{R}^2$ , então  $R_{\theta,P_0}(P)$  é o ponto  $P'$  tal que  $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP_0} + R_{\theta,O}(\overrightarrow{P_0P})$ .

Ou seja,

$$\begin{aligned}
R_{\theta,P_0}(x,y) &= ((x - x_o) \cos \theta - (y - y_o) \sin \theta + x_o, \\
&\quad (x - x_o) \sin \theta + (y - y_o) \cos \theta + y_o).
\end{aligned} \quad (4.4)$$

Uma propriedade importante das transformações lineares é a seguinte.

**Proposição 4.7** *Toda transformação linear leva retas em retas.*

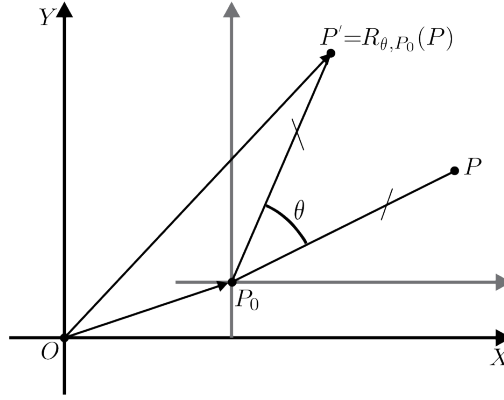


Figura 4.6: Rotação  $R_{\theta, P_0}$

### Demonstração:

Sejam  $T$  uma transformação linear,  $r$  a reta paralela ao vetor  $\vec{v}$  que passa pelo ponto  $P$ ,  $\vec{v}' = T(\vec{v})$  e  $P' = T(P)$ , isto é,  $\overrightarrow{OP'} = T(\overrightarrow{OP})$ .

Afirmamos que  $T$  leva a reta  $r$  na reta  $r'$  que passa pelo ponto  $P'$  e é paralela ao vetor  $\vec{v}'$ .

Com efeito, um ponto  $Q$  pertence a  $r$  se, e só se,  $\overrightarrow{PQ} = t\vec{v}$ , para algum  $t \in \mathbb{R}$ . Ou seja,  $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + t\vec{v}$ .

Seja  $Q \in r$  arbitrário e seja  $Q' = T(Q)$ . Então, pela linearidade de  $T$ , temos:

$$\overrightarrow{OQ'} = T(\overrightarrow{OQ}) = T(\overrightarrow{OP} + t\vec{v}) = T(\overrightarrow{OP}) + tT(\vec{v}) = \overrightarrow{OP'} + t\vec{v}'.$$

Portanto,  $Q'$  pertence à reta  $r'$ . ■

## 4.3 Operações com transformações

As operações entre funções se aplicam também às transformações lineares, assim, podemos somar duas transformações lineares, multiplicar uma transformação linear por um escalar e compor duas transformações lineares para gerar novas transformações que também são lineares:

**Definição 4.8** Sejam  $S$  e  $T$  transformações lineares do plano e  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Definimos as transformações:

(a) **Soma de  $S$  e  $T$** , designada  $S + T$  :

$$(S + T)(\vec{v}) = S(\vec{v}) + T(\vec{v})$$

(b) **Produto de  $\lambda \in \mathbb{R}$  por  $T$** , designado  $\lambda T$  :

$$(\lambda T)(\vec{v}) = \lambda(T(\vec{v}))$$

(c) **Composta de  $S$  e  $T$** , designada  $S \circ T$  :

$$(S \circ T)(\vec{v}) = S(T(\vec{v})).$$

É fácil verificar que as transformações  $S + T$ ,  $\lambda T$  e  $S \circ T$  são lineares. Além disso, se verifica que a soma é associativa, comutativa, possui um elemento neutro aditivo (a transformação nula) e que toda transformação  $T$  possui um inverso aditivo  $-T$ , e que o produto de transformações por escalares é distributivo em relação à soma. Todas essas propriedades são consequência das correspondentes propriedades das operações de adição de vetores e de multiplicação de vetores por escalares (ver Exercícios).

**Exemplo 4.4 (a)** Se  $T$  é uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , a transformação  $\lambda T$  é a composta da homotetia  $H$  de razão  $\lambda$  com a transformação  $T$ .

Com efeito,  $\lambda T(\vec{v}) = \lambda(T(\vec{v})) = H(T(\vec{v})) = H \circ T(\vec{v})$ , para todo vetor  $\vec{v}$ .

(b) A composta  $R_\theta \circ R_\varphi$  da rotação de ângulo  $\theta$  em torno da origem com a rotação de ângulo  $\varphi$  em torno da origem é a rotação de ângulo  $\theta + \varphi$  em torno da origem.

De fato, como  $M_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  e  $M_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$  são as matrizes das rotações  $R_\theta$  e  $R_\varphi$ , respectivamente, então:

$$\begin{aligned} (R_\theta \circ R_\varphi)(x, y) &= R_\theta(R_\varphi(x, y)) \\ &= R_\theta(x \cos \varphi - y \sin \varphi, x \sin \varphi + y \cos \varphi) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} (x \cos \varphi - y \sin \varphi, x \sin \varphi + y \cos \varphi) \\ &= (\cos \theta(x \cos \varphi - y \sin \varphi) - \sin \theta(x \sin \varphi + y \cos \varphi), \\ &\quad \sin \theta(x \cos \varphi - y \sin \varphi) + \cos \theta(x \sin \varphi + y \cos \varphi)) \\ &= ((\cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi)x - (\cos \theta \sin \varphi + \sin \theta \cos \varphi)y, \\ &\quad (\sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi)x + (\cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi)y) \\ &= (\cos(\theta + \varphi)x - \sin(\theta + \varphi)y, \sin(\theta + \varphi)x + \cos(\theta + \varphi)y). \end{aligned}$$

Ou seja,

$$(R_\theta \circ R_\varphi)(x, y) = R_{\theta+\varphi}(x, y), \text{ para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

(c) A reflexão  $R_\ell$  com respeito a uma reta  $\ell$  que passa pela origem é dada por  $R_\ell(\vec{v}) = 2\text{Proj}_\ell(\vec{v}) - \vec{v}$ . Portanto,  $R_\ell$  é a soma de duas transformações lineares. A primeira,  $2\text{Proj}_\ell$  é a composta  $H \circ \text{Proj}_\ell$  da homotetia  $H$  de razão 2 com a projeção ortogonal  $\text{Proj}_\ell$  sobre a reta  $\ell$ , e a segunda é a reflexão com respeito à origem  $-\mathcal{I}(\vec{v}) = -\vec{v}$ .

(d) Uma transformação linear  $T$  é chamada nilpotente quando existe um inteiro positivo  $n$  tal que a composta de  $T$  com si própria  $n$  vezes é a transformação nula.

As transformações  $T(x, y) = (y, 0)$  e  $S(x, y) = (0, x)$  são nilpotentes, pois,

$$T \circ T(x, y) = T(y, 0) = (0, 0) \text{ e } S \circ S(x, y) = S(0, x) = (0, 0)$$

para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Note que  $T = R \circ P_y$  e  $S = R \circ P_x$ , onde  $R$  é a reflexão com respeito à reta  $y = x$  e  $P_x$  e  $P_y$  são as projeções ortogonais sobre os eixos  $OX$  e  $OY$ , respectivamente.

**Observação 4.2** A operação de **composição de duas transformações**  $S$  e  $T$  do plano está definida também quando elas não são lineares por:

$$(S \circ T)(P) = S(T(P))$$

para todo ponto  $P$  do plano.

A transformação identidade é o elemento neutro da operação de composição, pois, como

$$I \circ T(P) = T(P) \quad \text{e} \quad T \circ I(P) = T(P),$$

para toda transformação  $T$  e todo ponto  $P$ , temos  $I \circ T = I$  e  $T \circ I = T$ .

A composição de transformações é associativa.

De fato, sejam  $R, S, T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  três transformações. Então, para todo ponto  $P$ ,

$$\begin{aligned} (R \circ (S \circ T))(P) &= R((S \circ T)(P)) = R(S(T(P))) \\ &= (R \circ S)(T(P)) = ((R \circ S) \circ T)(P). \end{aligned}$$

Isto é,  $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$ .

**Exemplo 4.5** A **reflexão com deslizamento** é a transformação  $R_{\ell, \vec{v}}$  que consiste na reflexão  $R_\ell$  em torno de uma reta  $\ell$  seguida de uma translação  $T_{\vec{v}}$  ao longo de um vetor não nulo  $\vec{v}$  paralelo a  $\ell$ . Ou seja,

$$R_{\ell, \vec{v}} = T_{\vec{v}} \circ R_\ell.$$

Se  $\ell : -\sin \alpha x + \cos \alpha y = c$  e  $\vec{v} = \lambda(\cos \alpha, \sin \alpha)$ , com  $\lambda \neq 0$ , temos que, para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\begin{aligned} R_{\ell, \vec{v}}(x, y) &= (\cos 2\alpha x + \sin 2\alpha y, \sin 2\alpha x - \cos 2\alpha y) \\ &\quad + 2c(-\sin \alpha, \cos \alpha) + \lambda(\cos \alpha, \sin \alpha) \end{aligned}$$

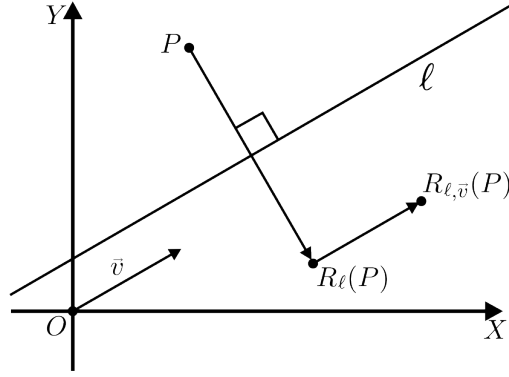


Figura 4.7: Reflexão com deslizamento  $R_{\ell, \vec{v}}$

**Definição 4.9** Uma transformação  $T$  é invertível quando existe uma transformação  $S$  tal que  $S \circ T = I$  e  $T \circ S = I$ . A transformação  $S$  é chamada inversa de  $T$  e se designa  $T^{-1}$ .

**Observação 4.3** Note que uma transformação  $T$  é invertível se, e só se, é injetora e sobrejetora, ou seja,  $T$  é bijetora.

Se  $T$  é uma transformação invertível, então  $T^{-1}$  é também uma transformação invertível e  $(T^{-1})^{-1} = T$ .

**Proposição 4.10** A inversa de uma transformação, quando existe, é única.

**Demonstração:**

Seja  $T$  uma transformação linear invertível e sejam  $U$  e  $V$  transformações tais que:

$$U \circ T = T \circ U = I \quad \text{e} \quad V \circ T = T \circ V = I$$

Logo, pela associatividade da composição,

$$(U \circ T) \circ V = I \circ V = V \iff U \circ (T \circ V) = V \iff U \circ I = V \iff U = V. \quad \blacksquare$$

**Exemplo 4.6 (a)** A translação  $T_{\vec{u}}$  pelo vetor  $\vec{u} \neq 0$  não é uma transformação linear, mas é uma transformação invertível e sua inversa é a translação  $T_{-\vec{u}}$  pelo vetor  $-\vec{u}$ .

Com efeito, para todo vetor  $\vec{v}$ , temos:

$$\begin{aligned} T_{-\vec{u}} \circ T_{\vec{u}}(\vec{v}) &= T_{-\vec{u}}(\vec{v} + \vec{u}) = (\vec{v} + \vec{u}) - \vec{u} \\ &= \vec{v} + (\vec{u} - \vec{u}) = \vec{v} = I(\vec{v}), \\ T_{\vec{u}} \circ T_{-\vec{u}}(\vec{v}) &= T_{\vec{u}}(\vec{v} - \vec{u}) = (\vec{v} - \vec{u}) + \vec{u} \\ &= \vec{v} + (-\vec{u} + \vec{u}) = \vec{v} = I(\vec{v}). \end{aligned}$$

**(b)** Uma homotetia  $H$  de razão  $k$  não nula é invertível.

Com efeito, se  $S$  é a homotetia de razão  $\frac{1}{k}$ , temos:

$$S \circ H(\vec{v}) = S(k\vec{v}) = \frac{1}{k}(k\vec{v}) = \left(\frac{1}{k}k\right)\vec{v} = \vec{v} = I(\vec{v})$$

$$H \circ S(\vec{v}) = H\left(\frac{1}{k}\vec{v}\right) = k\left(\frac{1}{k}\vec{v}\right) = \left(k\frac{1}{k}\right)\vec{v} = \vec{v} = I(\vec{v}).$$

Logo,  $H^{-1} = S$  é a homotetia de razão  $\frac{1}{k}$ .

(c) A reflexão  $R_\ell$  em relação a uma reta  $\ell$  é invertível e sua inversa é a própria  $R_\ell$ . Isso segue diretamente da definição geométrica de  $R_\ell$ .

**Proposição 4.11** *Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  uma transformação linear e  $M_T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  a matriz que a representa. Então,  $T$  é invertível se, e só se,  $\det M_T \neq 0$ .*

*Neste caso,  $T^{-1}$  é a transformação linear representada pela matriz*

$$M_{T^{-1}} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix},$$

*que é a matriz inversa da matriz  $M_T$ .*

### Demonstração:

Sejam  $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ . Então, existe um único  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tal que  $T(x, y) = (x', y')$  se, e só se, o sistema

$$\begin{cases} ax + cy = x' \\ bx + dy = y' \end{cases}$$

possui uma única solução. Mas isso ocorre se, e só se,

$$\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc \neq 0$$

Como a solução do sistema é

$$x = \frac{dx' - cy'}{ad - bc} \text{ e } y = \frac{-bx' + ay'}{ad - bc}$$

temos que

$$T^{-1}(x', y') = \left( \frac{dx' - cy'}{ad - bc}, \frac{-bx' + ay'}{ad - bc} \right) \quad \text{e} \quad M_{T^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad - bc} & \frac{-c}{ad - bc} \\ \frac{-b}{ad - bc} & \frac{a}{ad - bc} \end{pmatrix}$$

■

## 4.4 Isometrias no plano

**Definição 4.12** Uma transformação  $T$  do plano é uma isometria quando

$$d(T(P), T(Q)) = d(P, Q)$$

para quaisquer pontos  $P$  e  $Q$ . Isto é,  $T$  é uma isometria se preserva distâncias.

As isometrias são muito importantes pois nelas se traduz o conceito de congruência: *dois objetos geométricos são congruentes quando existe uma isometria que transforma um no outro*. As isometrias são os movimentos rígidos da Geometria Euclidiana.

Antes de classificarmos todas as isometrias do plano, vejamos algumas propriedades básicas desse tipo de transformações.

**Proposição 4.13** 1. *Toda isometria leva pontos distintos em pontos distintos.*

2. *Toda isometria leva pontos colineares em pontos colineares preservando a relação de um ponto estar entre outros dois e, conseqüentemente, leva retas em retas.*

3. *Toda isometria preserva a relação de paralelismo entre retas. Isto é, leva retas paralelas em retas paralelas.*

4. *Toda isometria preserva a relação de perpendicularidade entre retas. Isto é, leva retas perpendiculares em retas perpendiculares.*

5. *Toda isometria preserva ângulos. Isto é, se  $A, B$  e  $C$  são pontos não colineares, e  $A' = T(A), B' = T(B)$  e  $C' = T(C)$ , então  $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ .*

6. *A composta de duas isometrias é uma isometria.*

7. *Toda isometria é uma transformação invertível e a inversa é também uma isometria.*

**Demonstração:**

1 Equivalentemente, vamos mostrar que, se  $P$  e  $Q$  são pontos do plano tais que  $T(P) = T(Q)$ , então  $P = Q$ .

Com efeito, se  $T(P) = T(Q)$ , temos  $d(T(P), T(Q)) = 0$ . Logo,  $d(P, Q) = d(T(P), T(Q)) = 0$  e, portanto,  $P = Q$ .

2. Sejam  $P, Q$  e  $R$  pontos colineares distintos entre si tais que  $Q$  está entre  $P$  e  $R$ . Então,

$$\begin{aligned} d(T(P), T(R)) &= d(P, R) = d(P, Q) + d(Q, R) \\ &= d(T(P), T(Q)) + d(T(Q), T(R)) \end{aligned}$$

Logo, os pontos  $T(P)$ ,  $T(Q)$  e  $T(R)$  são colineares e  $T(Q)$  está entre  $T(P)$  e  $T(R)$ . Segue daí que  $T$  leva a reta que passa por  $P$  e  $Q$  na reta que passa por  $T(P)$  e  $T(Q)$ .

**3.** Sejam  $r_1$  e  $r_2$  retas paralelas. Suponhamos, por absurdo, que as retas  $T(r_1)$  e  $T(r_2)$  se intersectam e seja  $\tilde{P} \in T(r_1) \cap T(r_2)$ . Então, existem pontos  $P_1 \in r_1$  e  $P_2 \in r_2$  tais que  $T(P_1) = \tilde{P} = T(P_2)$ . Pelo item 1, temos que  $P_1 = P_2$ , o que é absurdo, pois  $r_1 \cap r_2 = \emptyset$ .

**4.** Sejam  $r$  e  $s$  retas perpendiculares se intersectando no ponto  $A$ . Sejam  $r' = T(r)$  e  $s' = T(s)$ . Então,  $A' = T(A) \in r' \cap s'$ .

Sejam  $B \in r$  e  $C \in s$  pontos diferentes de  $A$  e os pontos  $B' = T(B) \in r'$  e  $C' = T(C) \in s'$  diferentes de  $A'$ .

Como  $T$  é uma isometria,

$$d(A', B') = d(A, B), \quad d(A', C') = d(A, C), \quad d(B', C') = d(B, C)$$

e o triângulo  $\triangle ABC$  é retângulo em  $A$ , temos, pelo Teorema de Pitágoras,

$$[d(B', C')]^2 = [d(B, C)]^2 = [d(A, B)]^2 + [d(A, C)]^2 = [d(A', B')]^2 + [d(A', C')]^2$$

Logo, o triângulo  $\triangle A'B'C'$  é retângulo em  $A'$ . Consequentemente, a reta  $r' = T(r)$  que passa por  $A'$  e  $B'$  intersecta perpendicularmente a reta  $s' = T(s)$  no ponto  $A' = T(A)$ .

**5.** Sejam  $A, B$  e  $C$  pontos do plano e sejam  $A' = T(A)$ ,  $B' = T(B)$  e  $C' = T(C)$ . Como  $T$  é uma isometria, os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  são congruentes, pelo critério LLL. Em particular,  $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ .

**6.** Sejam  $S$  e  $T$  isometrias. Dados pontos arbitrários  $P$  e  $Q$  no plano, temos:

$$d(S \circ T(P), S \circ T(Q)) = d(S(T(P)), S(T(Q))) = d(T(P), T(Q)) = d(P, Q).$$

Isto é,  $S \circ T$  é também uma isometria.

**7.** Seja  $T$  uma isometria no plano. Pelo item 1,  $T$  é uma transformação injetora (leva pontos distintos em pontos distintos). Para verificarmos que  $T$  é invertível, basta verificar que  $T$  é uma transformação sobrejetora. Isto é, que para todo ponto  $P'$ , existe um ponto  $P$  tal que  $T(P) = P'$ .

Consideremos um sistema de eixos ortogonais  $OXY$  no plano. Seja  $O' = T(O)$  e sejam  $O'X' = T(OX)$  e  $O'Y' = T(OY)$  as imagens dos eixos  $OX$  e  $OY$  pela isometria  $T$ . Como  $T$  preserva perpendicularidade,  $O'X'Y'$  é um sistema de eixos ortogonais.

Além disso, como  $T$  preserva distâncias e a relação de ordem entre pontos colineares e leva retas paralelas em retas paralelas, temos que  $T$  leva um ponto  $P = (x, y)$  num ponto  $P'$  cujas coordenadas no sistema  $O'X'Y'$  são as mesmas que as coordenadas do ponto  $P$  no sistema  $OXY$ .

Assim, dado um ponto  $P'$  no plano com coordenadas  $(x, y)$  em relação ao sistema  $O'X'Y'$ , o ponto  $P$  do plano com coordenadas  $(x, y)$  no sistema  $OXY$  é tal que  $T(P) = P'$ .

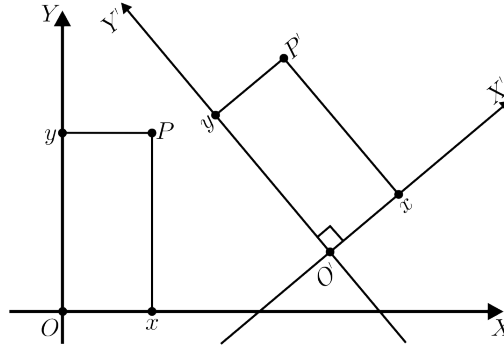


Figura 4.8: Ação da isometria  $T$

Portanto,  $T$  é uma transformação sobrejetora e, pelo item 1,  $T$  é bijetora. A inversa  $T^{-1}$  é definida da seguinte maneira: dado um ponto  $P'$  no plano, como  $T$  é sobrejetora, existe um ponto  $P$  no plano tal que  $T(P) = P'$ . Há apenas um ponto com essa propriedade porque  $T$  é injetora. Definimos, então,  $T^{-1}(P') = P$ .

A transformação  $T^{-1}$  assim definida é uma isometria, pois se  $P' = T(P)$  e  $Q' = T(Q)$ , então

$$d(T^{-1}(P'), T^{-1}(Q')) = d(P, Q) = d(T(P), T(Q)) = d(P', Q')$$

Portanto,  $T^{-1}$  é uma isometria. ■

**Exemplo 4.7 (a)** A transformação identidade  $I(P) = P$  é uma isometria.

**(b)** Uma translação é uma isometria. De fato, se  $P' = T_{\vec{v}}(P)$  e  $Q' = T_{\vec{v}}(Q)$ , então  $\overrightarrow{PP'} = \vec{v} = \overrightarrow{QQ'}$ . Isto é, os segmentos  $PP'$  e  $QQ'$  são equipolêntes e, portanto,  $PP'Q'Q$  é um paralelogramo. Em particular,  $d(P', Q') = d(P, Q)$ .

**Proposição 4.14** *Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma isometria tal que  $T(O) = O$ . Então,*

$$\|T(\vec{v})\| = \|\vec{v}\| \quad e \quad \langle T(\vec{v}), T(\vec{w}) \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

para quaisquer vetores  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  em  $\mathbb{R}^2$ .

**Demonstração:**

Se  $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ ,  $\vec{w} = \overrightarrow{OQ}$ ,  $P' = T(P)$  e  $Q' = T(Q)$  temos que  $T(\vec{v}) = \overrightarrow{OP'}$  e  $T(\vec{w}) = \overrightarrow{OQ'}$ .

Logo,

$$\begin{aligned}
\|T(\vec{v}) - T(\vec{w})\| &= \|\overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OQ'}\| = \|\overrightarrow{Q'P'}\| = d(Q', P') \\
&= d(T(Q), T(P)) = d(Q, P) = \|\overrightarrow{QP}\| \\
&= \|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}\| = \|\vec{v} - \vec{w}\|
\end{aligned}$$

Ou seja,  $\|T(\vec{v}) - T(\vec{w})\| = \|\vec{v} - \vec{w}\|$  para quaisquer vetores  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ .

Em particular, como  $T(\vec{0}) = \vec{0}$ , temos que  $\|T(\vec{v})\| = \|\vec{v}\|$  para todo vetor  $\vec{v}$ . Então,

$$\begin{aligned}
\langle T(\vec{v}) - T(\vec{w}), T(\vec{v}) - T(\vec{w}) \rangle &= \|T(\vec{v}) - T(\vec{w})\|^2 = \|\vec{v} - \vec{w}\|^2 \\
&= \langle \vec{v} - \vec{w}, \vec{v} - \vec{w} \rangle \\
&\iff \langle T(\vec{v}), T(\vec{v}) \rangle - 2\langle T(\vec{v}), T(\vec{w}) \rangle + \langle T(\vec{w}), T(\vec{w}) \rangle \\
&= \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle - 2\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle \\
&\iff \|T(\vec{v})\|^2 - 2\langle T(\vec{v}), T(\vec{w}) \rangle + \|T(\vec{w})\|^2 = \|\vec{v}\|^2 - 2\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle + \|\vec{w}\|^2 \\
&\iff \langle T(\vec{v}), T(\vec{w}) \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle.
\end{aligned}$$

Isto é,  $\langle T(\vec{v}), T(\vec{w}) \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$  para todos os vetores  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ . ■

**Proposição 4.15** *Se  $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  é uma isometria tal que  $T(O) = O$ , então  $T$  é linear.*

**Demonstração:**

Sejam  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  vetores em  $\mathbb{R}^2$ . Então, pela Proposição 4.13

$$\begin{aligned}
&\langle T(\vec{v} + \vec{w}) - T(\vec{v}) - T(\vec{w}), T(\vec{v} + \vec{w}) - T(\vec{v}) - T(\vec{w}) \rangle \\
&= \langle T(\vec{v} + \vec{w}), T(\vec{v} + \vec{w}) \rangle - 2\langle T(\vec{v} + \vec{w}), T(\vec{v}) \rangle \\
&\quad - 2\langle T(\vec{v} + \vec{w}), T(\vec{w}) \rangle + \langle T(\vec{v}), T(\vec{v}) \rangle + 2\langle T(\vec{v}), T(\vec{w}) \rangle \\
&\quad + \langle T(\vec{w}), T(\vec{w}) \rangle \\
&= \langle \vec{v} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w} \rangle - 2\langle \vec{v} + \vec{w}, \vec{v} \rangle - 2\langle \vec{v} + \vec{w}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \\
&\quad + 2\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle \\
&= \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle + 2\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle - 2\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle - 2\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle - 2\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \\
&\quad - 2\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle + 2\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle = 0.
\end{aligned}$$

Assim,  $\|T(\vec{v} + \vec{w}) - T(\vec{v}) - T(\vec{w})\|^2 = 0$ , ou seja,  $T(\vec{v} + \vec{w}) = T(\vec{v}) + T(\vec{w})$ .

De modo análogo, podemos mostrar que  $\|T(\lambda\vec{v}) - \lambda T(\vec{v})\|^2 = 0$  e, portanto,  $T(\lambda\vec{v}) = \lambda T(\vec{v})$  para todo vetor  $\vec{v}$  e todo escalar  $\lambda$ .

Provamos, então, que  $T$  é linear. ■

Seja  $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  uma isometria. Então a transformação  $G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ , definida

por  $G(\vec{v}) = L(\vec{v}) - L(\vec{0})$ , é uma aplicação tal que  $G(\vec{0}) = \vec{0}$ . Além disso,  $G$  é uma isometria, pois  $G = T_{\vec{w}} \circ L$  é a composta de duas isometrias, onde  $T_{\vec{w}}$  é a translação pelo vetor  $\vec{w} = -L(\vec{0})$ . Logo, pela Proposição 4.14,  $G$  é uma isometria linear. Provamos, assim, o seguinte resultado:

**Proposição 4.16** *Toda isometria é a composta de uma isometria linear com uma translação.*

Vamos analisar agora as isometrias lineares.

Seja  $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma isometria linear e  $M_G = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  a matriz que a representa, onde  $G(\vec{e}_1) = (a, b)$  e  $G(\vec{e}_2) = (c, d)$ .

Como  $\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = 1$  e  $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = 0$  e, pela Proposição 4.13,  $\|G(\vec{e}_1)\| = \|\vec{e}_1\| = 1$ ,  $\|G(\vec{e}_2)\| = \|\vec{e}_2\| = 1$  e  $\langle G(\vec{e}_1), G(\vec{e}_2) \rangle = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = 0$ , temos que os vetores  $G(\vec{e}_1) = (a, b)$  e  $G(\vec{e}_2) = (c, d)$  são ortonormais.

Seja  $\theta$  o ângulo que o vetor  $(a, b)$  faz com o eixo  $OX$  no sentido positivo. Então,  $(a, b) = (\cos \theta, \sin \theta)$ .

Sendo o vetor  $(c, d)$  unitário e ortogonal ao vetor  $(a, b)$ , temos duas possibilidades:

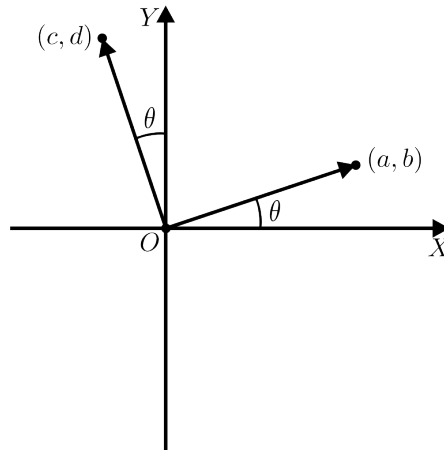


Figura 4.9:  $(c, d) = (-\sin \theta, \cos \theta)$

ou

Se  $(c, d) = (-\sin \theta, \cos \theta)$ , a isometria linear  $G$  é dada por:

$$G(x, y) = (\cos \theta x - \sin \theta y, \sin \theta x + \cos \theta y)$$

e se  $(c, d) = (\sin \theta, \cos \theta)$

$$G(x, y) = (\cos \theta x + \sin \theta y, \sin \theta x - \cos \theta y).$$

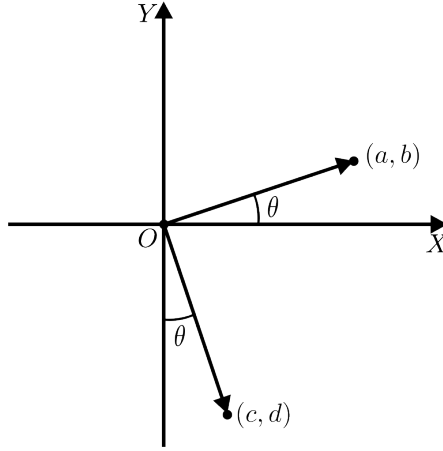


Figura 4.10:  $(c, d) = (\sin \theta, -\cos \theta)$

No primeiro caso,  $G(\vec{e}_2) = (c, d) = (-\sin \theta, \cos \theta)$  faz ângulo  $\theta$ , no sentido positivo, com o eixo  $OY$  e, no segundo caso,  $G(\vec{e}_2) = (c, d) = (\sin \theta, -\cos \theta)$  faz ângulo  $\theta + \pi$ , no sentido positivo, com o eixo  $OY$ .

Então, se  $L(O) = (x_o, y_o)$ , dizemos que a isometria

$$L(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta + x_o, x \sin \theta + y \cos \theta + y_o) \quad (4.5)$$

**preserva a orientação do plano**, e que a isometria

$$L(x, y) = (x \cos \theta + y \sin \theta + x_o, x \sin \theta - y \cos \theta + y_o) \quad (4.6)$$

**inverte a orientação do plano**.

Note que o determinante da matriz  $M_G = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  da parte linear  $G$  da isometria (4.5) que preserva orientação é  $+1$ , enquanto que o determinante da matriz  $M_G = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$  da parte linear  $G$  da isometria (4.6) que inverte orientação é  $-1$ .

Estamos agora em condições de classificar todas as isometrias do plano.

**Teorema 4.17** *As únicas isometrias do plano que preservam orientação são as translações ou as rotações em torno de um ponto.*

**Demonstração:**

Seja  $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  uma isometria que preserva a orientação do plano,

$$L(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta + x_o, x \sin \theta + y \cos \theta + y_o)$$

Se  $\theta = 0$ , então  $L(x, y) = (x + x_o, y + y_o)$  é uma translação.

Suponhamos que  $\theta \in (0, 2\pi)$ . Vamos mostrar que  $L = R_{\theta, P_1}$  é a rotação de ângulo  $\theta$  em torno de um ponto  $P_1 = (x_1, y_1)$ .

Por (4.4), a rotação de centro  $P_1 = (x_1, y_1)$  e ângulo  $\theta$  transforma o ponto  $(x, y)$  no ponto  $(x', y')$  tal que

$$\begin{cases} x' = (x - x_1) \cos \theta - (y - y_1) \sin \theta + x_1 \\ y' = (x - x_1) \sin \theta + (y - y_1) \cos \theta + y_1 \end{cases}$$

Então, para que  $L$  seja igual a  $R_{\theta, P_1}$ , devemos ter

$$\begin{cases} (x - x_1) \cos \theta - (y - y_1) \sin \theta + x_1 = x \cos \theta - y \sin \theta + x_o \\ (x - x_1) \sin \theta + (y - y_1) \cos \theta + y_1 = x \sin \theta + y \cos \theta + y_o \end{cases}$$

para todo ponto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Simplificando, obtemos:

$$\begin{cases} (1 - \cos \theta)x_1 + \sin \theta y_1 = x_o \\ -\sin \theta x_1 + (1 - \cos \theta)y_1 = y_o \end{cases}$$

Como o determinante deste sistema

$$(1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta$$

é diferente de zero, pois  $\theta \in (0, 2\pi)$ , ele possui apenas uma solução  $(x_1, y_1)$ . ■

**Teorema 4.18** *As únicas isometrias do plano que invertem orientação são as reflexões em torno de uma reta ou as reflexões com deslizamento.*

**Demonstração:**

Seja  $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  uma isometria que inverte a orientação do plano,

$$L(x, y) = (x \cos \theta + y \sin \theta + x_o, x \sin \theta - y \cos \theta + y_o)$$

Se  $(x_o, y_o) = (0, 0)$ , temos que:

$$L(x, y) = (x \cos \theta + y \sin \theta, x \sin \theta - y \cos \theta).$$

Então, se  $\alpha = \frac{\theta}{2}$ ,

$$L(x, y) = (x \cos 2\alpha + y \sin 2\alpha, x \sin 2\alpha - y \cos 2\alpha)$$

Logo, por 4.2,  $L$  é a reflexão em torno da reta  $\ell : -\sin \alpha x + \cos \alpha y = 0$  paralela ao vetor  $(\cos \alpha, \sin \alpha)$  que passa pela origem.

No caso geral,  $L = T_{\vec{v}} \circ R_{\ell}$ , onde  $T_{\vec{v}}$  é a translação ao longo do vetor  $\vec{v} = (x_o, y_o)$ .

Vamos mostrar que  $L = R_{\ell', \vec{w}}$  é uma reflexão com deslizamento, onde  $\ell'$  é uma reta paralela à reta  $\ell$  e  $\vec{w}$  é um vetor paralelo à reta  $\ell'$ .

Sejam

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \langle (x_o, y_o), (-\sin \alpha, \cos \alpha) \rangle (-\sin \alpha, \cos \alpha) \\ &= (-x_o \sin \alpha + y_o \cos \alpha) (-\sin \alpha, \cos \alpha)\end{aligned}$$

a projeção ortogonal do vetor  $\vec{v} = (x_o, y_o)$  sobre o vetor  $(-\sin \alpha, \cos \alpha)$  normal à reta  $\ell$  e

$$\begin{aligned}\vec{w} &= \langle (x_o, y_o), (\cos \alpha, \sin \alpha) \rangle (\cos \alpha, \sin \alpha) \\ &= (x_o \cos \alpha + y_o \sin \alpha) (\cos \alpha, \sin \alpha)\end{aligned}$$

a projeção ortogonal do vetor  $\vec{v} = (x_o, y_o)$  sobre a reta  $\ell$ .

Considere o ponto  $Q$  tal que  $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}\vec{u}$ , ou seja,

$$Q = (-c \sin \alpha, c \cos \alpha)$$

onde  $c = \frac{1}{2}(-x_o \sin \alpha + y_o \cos \alpha)$ .

Então, a reta  $\ell'$  paralela à reta  $\ell$  que passa pelo ponto  $Q$  é dada por

$$\ell' : -\sin \alpha x + \cos \alpha y = c$$

e a reflexão em torno dela é, por (4.2),

$$\begin{aligned}R_{\ell'}(x, y) &= (x \cos 2\alpha + y \sin 2\alpha, x \sin 2\alpha - y \cos 2\alpha) \\ &\quad + 2c(-\sin \alpha, \cos \alpha)\end{aligned}$$

Observe que  $2c(-\sin \alpha, \cos \alpha)$  é o vetor  $\vec{u}$ .

Como

$$\begin{aligned}\vec{u} + \vec{w} &= (x_o \sin^2 \alpha - y_o \cos \alpha \sin \alpha, -x_o \cos \alpha \sin \alpha + y_o \cos^2 \alpha) \\ &\quad + (x_o \cos^2 \alpha + y_o \cos \alpha \sin \alpha, x_o \cos \alpha \sin \alpha + y_o \sin^2 \alpha) \\ &= (x_o, y_o)\end{aligned}$$

temos que

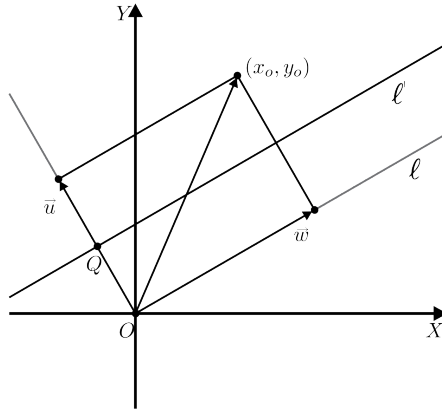


Figura 4.11:  $L = T_{\vec{w}} \circ R_{\ell'}$

$$\begin{aligned}
 L(x, y) = & (x \cos 2\alpha + y \sin 2\alpha, x \sin 2\alpha - y \cos 2\alpha) \\
 & + 2c(-\sin \alpha, \cos \alpha) + (x_o \cos \alpha + y_o \sin \alpha) (\cos \alpha, \sin \alpha)
 \end{aligned}$$

ou seja,  $L = T_{\vec{w}} \circ R_{\ell'}$ , como queríamos provar.

■

# Referências Bibliográficas

- [1] Reis, G. L.; Silva, V. V. *Geometria Analítica*. Rio de Janeiro: LTC, 2000.
- [2] Delgado Gómez, J. J., Frensel, K. R., Crissaff, L. S. *Geometria Analítica*. 2<sup>a</sup> edição. Editora SBM, 2017.
- [3] Lima, E. L. *Geometria analítica e álgebra linear*. 1<sup>a</sup> edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.