UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

José Isaias Martins da Silva

O TEOREMA DA APROXIMAÇÃO DE WEIERSTRASS E APLICAÇÕES

MACEIÓ
2024

José Isaias Martins da Silva

O TEOREMA DA APROXIMAÇÃO DE WEIERSTRASS E APLICAÇÕES

Monografia apresentada à Banca Examinadora da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Licenciado em Matemática sob orientação do Prof. Dr. Cícero Tiarlos Nogueira Cruz.

MACEIÓ
2024

Catalogação na Fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

S586t Silva, José Isaias Martins da.
O teorema da aproximação de Weierstrass e aplicações / José Isaias Martins da Silva. - 2024.
30 f. : il.

Orientador: Cícero Tiarlos Nogueira Cruz.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática : Licenciatura) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2024.

Bibliografia: f. 30.

1. Aproximação de Weierstrass, Teorema da. 2. Sequências (Matemática). 3. Análise matemática. I. Título.

CDU: 517.55

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

COORDENAÇÃO DO CURSO DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

A monografia "O TEOREMA DA APROXIMAÇÃO DE WEIERSTRASS E APLICAÇÕES", apresentada e defendida por JOSÉ ISAIAS MARTINS DA SILVA, matrícula 20112514, foi aprovada pela Banca Examinadora no dia 04 de abril de 2024.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Cícero Tiarlos Nogueira Cruz
Orientador

Prof. Dr. Márcio Cavalcante de Melo

Prof. Dr. Alcides de Carvalho Júnior

A Matemática, vista corretamente, possui não apenas verdades, mas também suprema beleza.
Bertrand Russell

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus por tudo. A minha família, em especial, aos meus pais, Quitéria Martins da Silva e José Joaquim da Silva Neto, por todo o apoio ao longo da minha vida, ao meu irmão José Isael Martins da Silva e a minha irmã Maria Lívia da Silva de Lima. Aos meus amigos João Simão da Silva Filho e Lucas Vinicius Barbosa da Silva. À Mariana Bispo da Silva por todo o apoio e carinho ao longo desses anos. Aos meus amigos que conheci durante a graduação. Aos professores do Instituto de Matemática por todo o aprendizado e conhecimentos adquiridos. A banca examinadora do presente trabalho. Aos servidores e funcionários da Universidade Federal de Alagoas. Por fim, agradeço ao Prof. Dr. Cícero Tiarlos Nogueira Cruz por todos os conselhos e conhecimentos passados para mim, pela paciência e oportunidade em ser seu orientando.

Resumo

O objetivo do presente trabalho é demonstrar e aplicar o Teorema da Aproximação de Weierstrass, que é um resultado fundamental da Análise Matemática. Como aplicação desse teorema, abordaremos o problema dos momentos da Física e mostraremos que o conjunto das funções contínuas admite um subconjunto enumerável denso.

Palavras-chave: Teorema da Aproximação de Weierstrass. Sequências. Análise Matemática.

Abstract

The aim of the present work is to demonstrate and apply the Weierstrass Approximation Theorem, which is a fundamental result of Mathematical Analysis. As an application of this theorem, we will address the moments problem in Physics and show that the set of continuous functions admits a countable dense subset.

Keywords: Weierstrass Approximation Theorem. Sequences. Mathematical Analysis.

Sumário

Introdução

O Teorema da Aproximação de Weierstrass é um importante resultado da Análise Matemática, o qual revela uma interessante propriedade das funções polinomiais. Ele afirma que, dentro de certas classes de funções, os polinômios podem reproduzir com precisão funções contínuas em um intervalo específico da reta real, no caso, o intervalo fechado [0,1].

Em suma, isso significa que, independentemente da complexidade de uma função contínua definida nesse intervalo, sempre é possível encontrar polinômios que se aproximam dela tão bem quanto desejado.

O capítulo 1 é dedicado à resultados preliminares da Análise Real, os quais servirão para um melhor entendimento do restante do trabalho. Nesse sentido, abordaremos um breve estudo das sequências de números reais, topologia da reta e continuidade de funções. Nos limitaremos, apenas, aos resultados fundamentais para o desenvolver dos próximos capítulos.

O capítulo 2 é dedicado ao estudo inicial das sequências de funções reais. Assim, é explorado as definições e as duas principais maneiras de convergências dessas sequências, sendo elas a convergência pontual e a convergência uniforme. Além disso, exploramos alguns exemplos práticos e resultados pertinentes ao presente trabalho.

O capítulo 3 é explorado o Teorema da Aproximação de Weierstrass. Desse modo, é apresentado esse teorema e a sua demonstração, que é feita através dos chamados polinômios de Bernstein e com base em [3].

O capítulo 4 é voltado para duas aplicações do teorema mencionado anteriormente. A primeira aplicação consiste no problema dos momentos da Física, que enfatiza que se dadas duas funções com os mesmos momentos, então essas funções devem ser iguais. Na segunda aplicação é utilizado o teorema para mostrar a existência de um subconjunto, enumerável e denso, do conjunto das funções contínuas definidas no intervalo [0,1] e tomando valores reais.

Além disso, é indicado que o leitor possua conhecimentos básicos do Cálculo Diferêncial e Integral para melhor compreender alguns resultados expostos ao longo dos capítulos 3, 4 e 5.

Diante do exposto, o Teorema da Aproximação de Weierstrass é um resultado imprescindível da Análise Matemática e se estende para diversas áreas do conhecimento, o qual é uma ferramenta poderosa para entender e resolver diversos problemas por meio de sua aplicabilidade.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos algumas definições, teoremas e resultados das sequências numéricas, da topologia da reta e da continuidade de funções, os quais serão importantes para o estudo dos próximos capítulos. Para mais detalhes sobre o assunto, indicamos consultar [6].

1.1 Sequências numéricas

Definição 1.1.1. *Uma sequência de números reais é uma função* $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ *na qual associa a cada número natural* n *um número real* x_n*, denominado o* n*-ésimo termo da sequência.*

Usualmente representa-se uma sequência numérica, cujo n-ésimo termo é x_n, pelas notações $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ ou $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Neste trabalho, usaremos a última notação.

Além disso, dada a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, uma subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma restrição da função x a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < ... < n_k < ...\} \subset \mathbb{N}$. Denotaremos a subsequência por $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

Diz-se que o número real a é *limite* da sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se, para todo número real $\epsilon > 0$, existir $n_o \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos x_n, com índice $n > n_0$, satisfazem $|x_n - a| < \epsilon$. Escreve-se, então, $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Neste caso, se existir o limite, dizemos que a sequência é convergente; caso contrário, diz-se que é divergente. Por simplicidade, usaremos somente o símbolo $\lim x_n = a$, subentendido que n está tentendo ao infinito.

Exemplo 1.1.1. *Dada a sequência de números reais* $x_n = 1/n$*, temos que* $\lim x_n = 0$*. De fato, dado* $\epsilon > 0$*, queremos mostrar que existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $n > n_0$ *implique*

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon.$$

Note que, para todo $n > n_0$*, vale*

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0}.$$

Então, ao tomar $n_0 = 1/\epsilon$*, obtemos*

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} = \epsilon.$$

Em termos geométricos, para todo n *suficientemente grande,* $1/n$ *pertence ao intervalo* $(-\epsilon, \epsilon)$*.*

Exemplo 1.1.2. *A sequência* $x_n = \dfrac{n}{2n+1}$ *converge para o número 1/2. Com efeito, dado* $\epsilon > 0$*, queremos encontrar* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $n > n_0$ *implique*

$$\left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \epsilon.$$

Note que

$$\left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{-1}{2(2n+1)}\right| = \frac{1}{2(2n+1)}.$$

Observe também que $2n + 1 \geq 2n_0 + 1 > 2n_0$*. Neste caso,* $2(2n+1) > 4n_0$*. Assim,*

$$\frac{1}{2(2n+1)} < \frac{1}{4n_0}.$$

Logo, ao tomar $n_0 = 1/4\epsilon$*, obtemos que*

$$\left|x_n - \frac{1}{2}\right| < \epsilon,$$

para todo $n > n_0$*.*

Exemplo 1.1.3. *Considere a sequência* $x_n = b$ *para* n *par e* $x_n = a$ *para* n *ímpar, a sequência assim definida é* $(a, b, a, b, \cdots)$*. Note que tal sequência não é convergente. No entanto, se tomarmos a subsequência* $x_n = b$ *para* n *par, temos que* $\lim x_n = b$*. Da mesma forma para* n *ímpar.*

Teorema 1.1.1. *Uma sequência não possui dois limites distintos.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência. Suponha que $\lim x_n = a$ e $\lim x_n = b$, sendo $a \neq b$. Tomemos $\epsilon = |b-a|/2 > 0$. Por um lado, como $\lim x_n = a$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon/2$. Por outro lado, como $\lim x_n = b$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_2 \Rightarrow |x_n - b| < \epsilon/2$. Assim, tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, valem que $|x_n - a| < \epsilon/2$ e $|x_n - b| < \epsilon/2$. Logo, para todo $n > n_0$, tem-se

$$|b-a| = |x_n - a - x_n + b| \leq |x_n - a| + |x_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon = \frac{|b-a|}{2}.$$

Isto é, $|b-a| < \dfrac{|b-a|}{2}$, o que é um absurdo. Portanto, deve-se ter $a = b$. □

Teorema 1.1.2. *Se* $\lim x_n = a$, *então toda subsequência de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para o limite* a.

Demonstração. Seja $\mathbb{N} = \{n_1 < n_2 < ... < n_k < ...\}$ um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$. Como $\lim x_n = a$, dado qualquer $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon$. Ademais, existe também $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_{k_0} > n_0$. Logo,

$$k > k_0 \Rightarrow n_k > n_{k_0} > n_0 \Rightarrow |x_{n_k} - a| < \epsilon.$$

Portanto, obtemos que

$$\lim x_{n_k} = \lim x_n = a.$$

□

Teorema 1.1.3. *Se* $\lim x_n = a$ *e* $\lim y_n = b$, *então:*

(i). $\lim(x_n + y_n) = a + b$.

(ii). $\lim(x_n - y_n) = a - b$.

(iii). $\lim(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$.

(iv). $\lim(x_n / y_n) = a/b$, *com* $b \neq 0$.

Demonstração. Iremos provar o item (i), os demais deixaremos para o leitor verificar, consulte em [6]. Seja $\epsilon > 0$. Como $\lim x_n = a$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_1 \Rightarrow |x_n - a| <$

$\epsilon/2$. Por outro lado, como $\lim y_n = b$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_2 \Rightarrow |y_n - b| < \epsilon/2$. Diante disso, tomando $n_0 = max\{n_1, n_2\}$, para $n > n_0$, tem-se

$$\begin{aligned}
|(x_n + y_n) - (a + b)| &= |(x_n - a) + (y_n - b)| \\
&\leq |x_n - a| + |y_n - b| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Isto é, $|(x_n + y_n) - (a + b)| < \epsilon$. O que conclui a prova. □

1.2 Topologia da reta

Diz-se que $a \in \mathbb{R}$ é um ponto aderente ao conjunto $X \subset \mathbb{R}$ se existe uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ tal que $\lim x_n = a$.

Chama-se *fecho* do conjunto X ao conjunto formado por todos os pontos aderentes a X, no qual denotaremos por $\overline{X}$.

Diante disso, note que $X \subset \overline{X}$. De fato, seja $a \in X$, basta tomar a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ dada por $x_n = a$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, tem-se que $\lim x_n = a$, ou seja, $a \in \overline{X}$.

Definição 1.2.1. *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é fechado quando $X = \overline{X}$.*

Exemplo 1.2.1. *Os conjuntos $\mathbb{R}$ e $\emptyset$ são conjuntos fechados, assim como os conjuntos da forma $X = [a, b]$.*

Sejam X e Y conjuntos de números reais, com $X \subset Y$. Diz-se que X é *denso* em Y quando todo ponto de Y for aderente a X, isto é, $\overline{X} = Y$.

Exemplo 1.2.2. *O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais e o conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dos números irracionais são ambos densos em $\mathbb{R}$ [6, capítulo 3, seção 3, teorema 4].*

Definição 1.2.2. *Um conjunto $K \subset \mathbb{R}$ é compacto quando é limitado e fechado*

Vale mencionar que a definição de conjunto compacto é diferente em outros espaços topológicos, nos espaços em que os conjuntos limitados e fechados são equivalentes a serem compactos, diz-que possuem a propriedade de Heine-Borel, por exemplo, um espaço métrico completo possui tal propriedade. Portanto, nos limitaremos apenas com a definição 1.2.2 para o conjunto dos números reais, visto que é prática e suficiente para alguns resultados importantes, em especial o Teorema da Aproximação de Weierstrass, apresentados no decorrer deste trabalho.

Teorema 1.2.1. *Um conjunto $K \subset \mathbb{R}$ é compacto se, e somente se, toda sequência de pontos em K possui uma subsequência que converge para um ponto de K.*

Demonstração. Consulte em [5]. □

Exemplo 1.2.3. *Os conjuntos da forma $X = [a, b]$ são conjuntos compactos.*

1.3 Continuidade

Definição 1.3.1. *Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua no ponto $a \in X$ se, dado arbitrariamente $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$.*

Desse modo, uma função é contínua quando é contínua em todos os pontos do domínio.

Teorema 1.3.1. *Se $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas no ponto a, então $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ e f/g (se $g \neq 0$) também são contínuas no mesmo ponto.*

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$. Sendo f é contínua no ponto $a \in X$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $x \in X$ e $|x - a| < \delta_1$ implicam

$$|f(x) - f(a)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Da mesma forma, como g é contínua no ponto $a \in X$, existe $\delta_2 > 0$ tal que $x \in X$ e $|x - a| < \delta_2$ implicam

$$|g(x) - g(a)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Assim, seja $\delta_0 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então, sendo $|x - a| < \delta_0$, obtemos que

$$\begin{aligned}
|[f(x) + g(x)] - [f(a) + g(a)]| &= |[f(x) - f(a)] + [g(x) - g(a)]| \\
&\leq |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, $f+g$ é contínua no ponto a. Os demais ficam para o leitor verificar. □

Exemplo 1.3.1. *A função identidade é evidentemente contínua em toda a reta real, o mesmo ocorre com a função* $x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}$, *em virtude do teorema anterior. Ainda, do mesmo teorema, tem-se que todo polinômio* $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *dado por* $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, *é uma função contínua.*

O próximo teorema é um resultado que relaciona a continuidade de uma função, em um ponto, com as sequências numéricas. O qual é importante em determinadas situações.

Teorema 1.3.2. *Uma função* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *é contínua num ponto* $a \in X$ *se, e somente se, para toda sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *em* X *com* $\lim x_n = a$, *satisfaça* $\lim f(x_n) = f(a)$.

Demonstração. Consulte em [5]. □

Teorema 1.3.3. *Seja* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua. Se* X *compacto, então* $f(X)$ *é compacto.*

Demonstração. Seja $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $f(X)$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in X$ tal que $f(x_n) = y_n$. Como X é compacto, pelo teorema 1.2.1, podemos obter uma subsequência $(x_{n_k})_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim x_{n_k} = x \in X$. Sendo f contínua, temos que

$$\lim y_{n_k} = \lim f(x_{n_k}) = f(x) = y \in f(X).$$

Logo, obtemos uma subsequência $(y_{n_k})_{n\in\mathbb{N}}$ em $f(X)$ tal que $\lim y_{n_k} = y \in f(X)$, pelo teorema 1.2.1, segue que $f(X)$ é compacto. □

Corolário 1.3.1. *Toda função contínua* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *definada num compacto* X *é limitada, isto é, existe* $k > 0$ *tal que* $|f(x)| \leq k$, *para todo* $x \in X$.

Demonstração. Sendo X compacto, a imagem $f(X)$ também é compacto, pelo teorema 1.3.3. Então, $f(X)$ é limitado e, portanto, f é limitada. □

É importante destacar que, dada uma função contínua num ponto a do domínio, nem sempre para $\epsilon > 0$ é possível encontrar $\delta > 0$ que satisfaça a condição $|x - a| < \delta$ para todos os pontos x do domínio. Quando esse fato ocorre, é dito que a função é uniformemente contínua.

Definição 1.3.2. *Uma função* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uniformemente contínua em* X *se, para todo* $\epsilon > 0$ *arbitrário, existe* $\delta > 0$ *tal que* $x, x_0 \in X$ *e* $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_o)| < \epsilon$.

O próximo teorema, análogo ao teorema 1.3.2, é um resultado que relaciona a continuidade uniforme de uma função com as sequências numéricas.

Teorema 1.3.4. *Uma função* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uniformemente contínua se, e só se, para todo par de sequências* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *em* X *tais que* $\lim(x_n - y_n) = 0$, *tenha-se* $\lim[f(x_n) - f(y_n)] = 0$.

Demonstração. Suponha f uniformemente contínua e $\lim(y_n - x_n) = 0$. Sendo f uniformemente contínua, dado $\epsilon > 0$ arbitrário, existe $\delta > 0$ tal que $y, x \in X$ e $|y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \epsilon$. Além disso, como $\lim(y_n - x_n) = 0$, para todo $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |y_n - x_n| < \delta$. Logo, tem-se $|f(y_n) - f(x_n)| < \epsilon$ sempre que $n > n_0$. Desse modo, obtemos que $\lim[f(y_n) - f(x_n)] = 0$. Reciprocamente, suponhamos que f não seja uniformemente contínua, então existiria $\epsilon_0 > 0$ de modo que para todo $n \in \mathbb{N}$ poderíamos encontrar pontos y_n, x_n em X tais que $|y_n - x_n| < 1/n$. Neste caso, teríamos $|f(y_n) - f(x_n)| \geq \epsilon_0$. O que é uma contradição, pois $\lim[f(x_n) - f(y_n)] = 0$. □

Observação 1. *Toda função uniformemente contínua é contínua. No entanto, a recíproca é falsa; por exemplo, a função* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *definida por* $f(x) = x^2$, *é contínua, mas não é uniformemente contínua. Com efeito, tomando as sequências* $x_n = n + 1/n$ *e* $y_n = n$, *temos que* $\lim(x_n - y_n) = \lim 1/n = 0$, *mas* $f(x_n) - f(y_n) = 2 + 1/n^2 > 0$, *o que não implica* $\lim[f(x_n) - f(y_n)] = 0$.

Teorema 1.3.5. *Seja* $K \subset \mathbb{R}$ *um conjunto compacto. Toda função contínua* $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uniformemente contínua.*

Demonstração. Suponha que f não é uniformemente contínua. Então, existem $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências em K tais que $\lim(x_n - y_n) = 0$, mas $\lim[f(x_n) - f(y_n)] \neq 0$. Como K é compacto, existe uma subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de modo que $\lim x_{n_k} = a$, com $a \in K$. Além disso, como $y_{n_k} = (y_{n_k} - x_{n_k}) + x_{n_k} \Rightarrow \lim y_{n_k} = \lim(y_{n_k} - x_{n_k}) + \lim x_{n_k} = 0 + a$, segue que $\lim y_{n_k} = a$. Sendo f contínua no ponto a, tem-se $\lim f(x_{n_k}) = f(a)$ e $\lim f(y_{n_k}) = f(a)$, via teorema 5. Logo, $\lim[f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})] = \lim f(x_{n_k}) - \lim f(y_{n_k}) = f(a) - f(a) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. O que é uma contradição. Portanto, f é uniformemente contínua. □

Capítulo 2

Sequências de funções

Neste capítulo, objetiva-se o estudo, com base em [6], das sequências de funções. Assim, discutiremos as duas principais formas de convergências, bem como alguns exemplos práticos e resultados importantes.

2.1 Sequências de funções

Seja X um conjunto de números reais. Uma sequência de funções $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma regra na qual associa a cada $n \in \mathbb{N}$ uma função denotada por f_n. Assim, para cada valor de $x \in X$, tem-se uma sequência numérica $(f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ...)$ em que se aplicam os conceitos e resultados das sequências numéricas reais, em particular, o conceito de limite. Denotaremos a sequência de funções por $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Diante disso, as sequências de funções possuem várias noções distintas de convergências, diferentemente das sequências numéricas que possuem somente uma única noção de limite. Desta forma, abordaremos as duas principais noções para limites de funções reais: a convergência pontual (ou convergência simples) e a convergência uniforme.

2.2 Convergência pontual

Definição 2.2.1. *Sejam $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma sequência de funções e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Diz-se que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente (ou simplesmente) para a função f se, dados $\epsilon > 0$ e $x \in X$, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. Noutras palavras, para cada $x \in X$ fixado, tem-se*

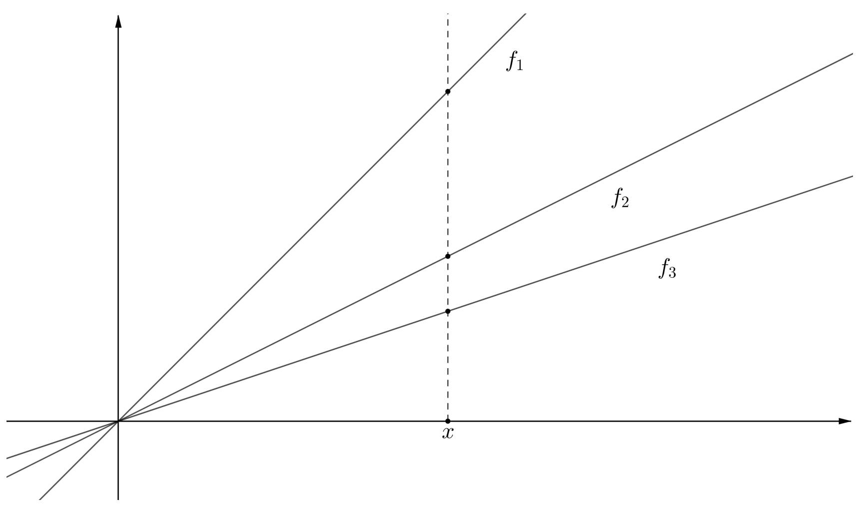
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Exemplo 2.2.1. *Dado o conjunto $X \subset \mathbb{R}$, sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais tal que $\lim(x_n) = a$, e $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Consideremos a sequência de funções $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f_n(x) = x_n \cdot g(x)$ e a função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a \cdot g(x)$. Assim, para cada valor $x \in X$, temos que*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} [x_n \cdot g(x)] = a \cdot g(x) = f(x).$$

Logo, a sequência de funções $f_n = x_n \cdot g$ converge pontualmente para a função $f = a \cdot g$. Além disso, podemos observar, como caso particular, que a sequência de funções $f_n(x) = x/n$ converge simplesmente para a função identicamente nula $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, basta tomar o exemplo 1.1.1.

Figura 2.1 - Gráfico das funções $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$



Fonte: Autoria própria

Ao observar o gráfico da figura acima, nota-se que, a medida que o n aumenta, as funções f_n aproxima-se cada vez mais da função identicamente nula. Observe também que a distância das f_n, para cada ponto x, em relação a f, é discrepante. Isso decorre do fato que, para cada x, existe um $\epsilon > 0$ dependendo desse ponto. Ademais, o n_0 da definição depende tanto do ponto x quando do ϵ dado, característica principal da convergência pontual.

Desse modo, afirmar que a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente para a função f, significa que, dado um ponto fixo $x \in X$, os gráficos das funções f_n intersectam a reta vertical dada pelo ponto $(x, 0)$ numa sequência de pontos cujas ordenadas convergem para a f.

Exemplo 2.2.2. *A sequência de funções $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f_n(x) = x^n$, converge pontualmente para a função $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & se\ 0 \leq x < 1. \\ 1, & se\ x = 1. \end{cases}$$

De fato, considere $0 \leq x < 1$, para todo $\epsilon > 0$, observe que

$$|x^n| < \epsilon \Rightarrow x^n < \epsilon$$

Aplicando o logarítimo na desigualde, obtemos

$$\log(x^n) < \log(\epsilon) \Rightarrow n \cdot \log(x) < log(\epsilon) \Rightarrow n > \frac{\log(\epsilon)}{\log(x)}$$

Portanto, basta tomar

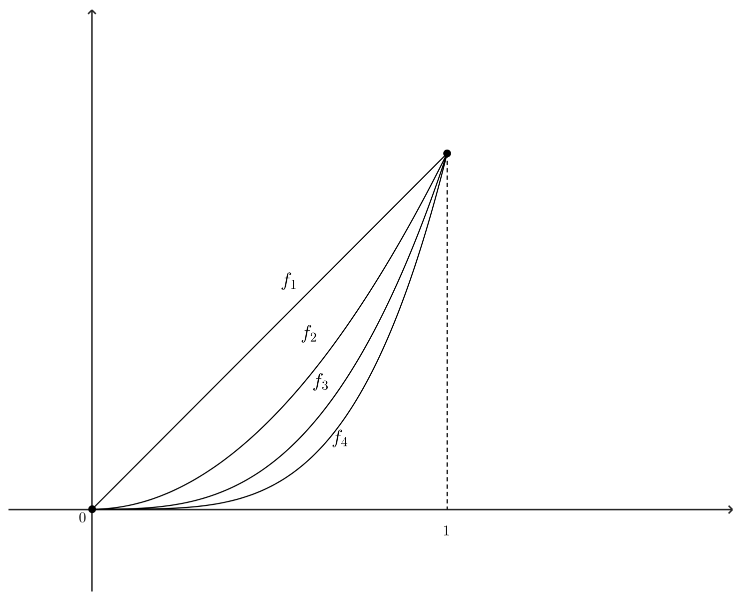
$$n_0 = \frac{\log(\epsilon)}{\log(x)}.$$

Por outro lado, se $x = 1$, para todo $\epsilon > 0$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, resulta

$$|x^n - 1| < \epsilon \Rightarrow |1^n - 1| = 0 < \epsilon.$$

Desse modo, concluímos que a convergência é pontual.

Figura 2.2 - Gráfico das funções $f_n(x) = x^n$



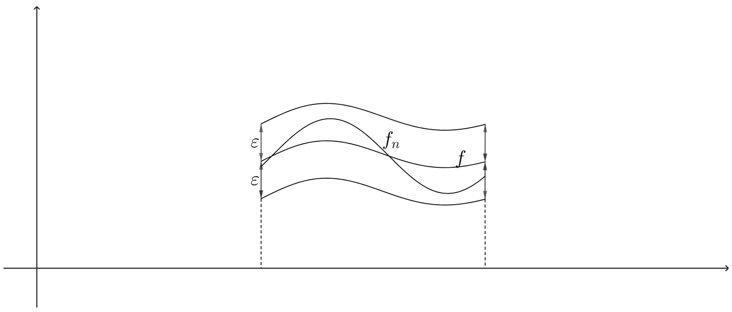
Fonte: Autoria própria

2.3 Convergência uniforme

Definição 2.3.1. *Sejam $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma sequência de funções e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Diz-se que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para a função f se, para todo $\epsilon > 0$, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ (que depende de ϵ) tal que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.*

A convergência uniforme admite uma interpretação geométrica intuitiva. Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, denominamos de *faixa de raio* ϵ (e amplitude 2ϵ) em torno do gráfico de f ao conjunto dos pontos (x, y) tais que $x \in X$ e $|y - f(x)| < \epsilon$, sendo ϵ um número real positivo.

Figura 2.3 - Faixa de raio ϵ em torno da f



Fonte: Autoria própria

Portanto, como a figura sugere, temos a condição "$|y - f(x)| < \epsilon$, para todo $x \in X$", significando que o gráfico da f_n está inteiramente contido na faixa de raio ϵ em torno do gráfico da função f.

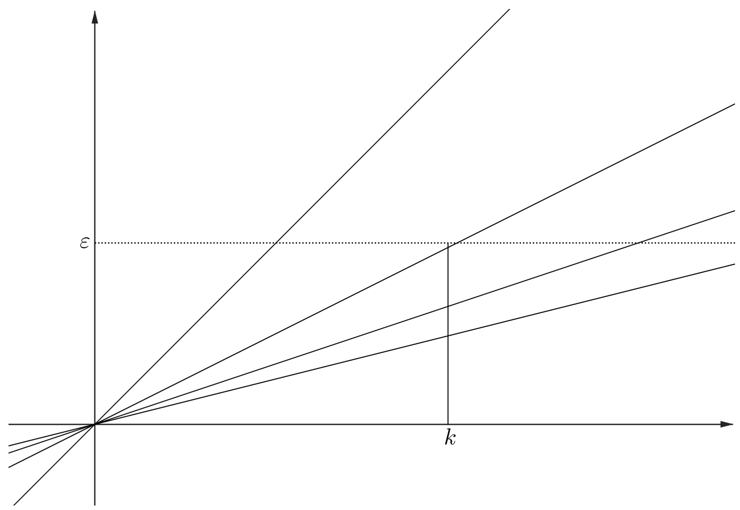
Mais precisamente, a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergir uniformemente para a função f, significa afirmar que, qualquer que seja $\epsilon > 0$, existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que os gráficos de todas as funções f_n, com $n > n_0$, estão contidos na faixa de raio ϵ em torno do gráfico de f.

Exemplo 2.3.1. *Dadas $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, a sequência de funções $f_n(x) = x/n$ converge uniformemente para a função $f(x) = 0$ se o conjunto $X \subset \mathbb{R}$ for limitado. De fato, como X é um conjunto limitado em $\mathbb{R}$, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $|x| \leq k$, para todo $x \in X$. Assim, dado $\epsilon > 0$, queremos encontrar um $n_o \in \mathbb{N}$, para todo $x \in X$, tal que $n \geq n_0$ implique $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. Desse modo, note que para todo $x \in X$ e $n > n_0$, temos*

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x}{n} - 0\right| = \left|\frac{x}{n}\right| = \frac{|x|}{n} \leq \frac{k}{n} < \frac{k}{n_0}.$$

Logo, ao tomar $n_0 = k/\epsilon$, obtemos $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. Logo, a sequência de funções $f_n(x) = x/n$ converge uniformemente para a função $f(x) = 0$.

Figura 2.4 - Gráfico das funções $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$



Fonte: Autoria própria

Esse exemplo e o exemplo 2.2.1 evidênciam a diferênça entre as duas formas de convergências. Observe que, ao contrário da convergência pontual, a escolha do n_0 na convergência uniforme depende apenas do ϵ, ou seja, o n_0 será o mesmo para todos os pontos x do domíno.

Exemplo 2.3.2. *A sequência de funções $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, dadas por $f_n(x) = \dfrac{sen(nx)}{\sqrt{n}}$, converge uniformemente para a função identicamente nula. Com efeito, queremos mostrar que, dado $\epsilon > 0$ e para todo $x \in [0,1]$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica*

$$\left| \frac{sen(nx)}{\sqrt{n}} \right| < \epsilon.$$

Note que

$$\left| \frac{sen(nx)}{\sqrt{n}} \right| = \frac{|sen(nx)|}{\sqrt{n}}.$$

Como $|sen(nx)| \leq 1$, temos

$$\frac{|sen(nx)|}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

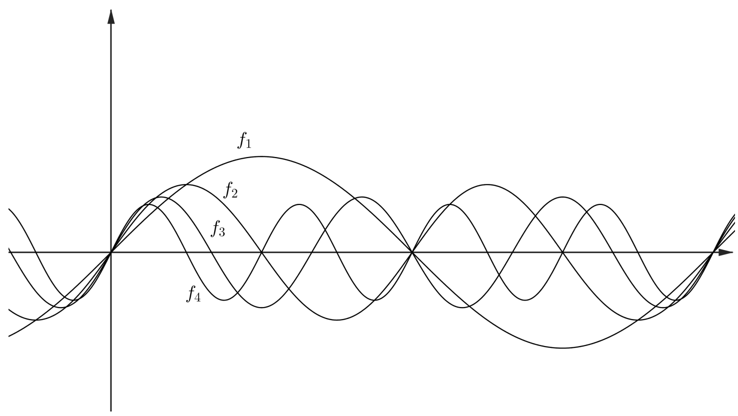
Neste caso,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\epsilon^2}.$$

Assim, ao tomar $n_0 = 1/\epsilon^2$*, concluímos que*

$$\left| \frac{sen(nx)}{\sqrt{n}} \right| = \frac{|sen(nx)|}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon.$$

Figura 2.5 - Gráfico das funções $f_n(x) = \dfrac{sen(nx)}{\sqrt{n}}$



Fonte: Autoria própria

Exemplo 2.3.3. *A sequência de funções* $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*, definidas por* $f_n(x) = \dfrac{x^2}{1+nx^2}$*, converge uniformemente para a função* $f(x) = 0$*. De fato, dado* $\epsilon > 0$*, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $n > n_0$ *implica*

$$\left| \frac{x^2}{1+nx^2} \right| < \epsilon.$$

Observe que

$$\left| \frac{x^2}{1+nx^2} \right| = \frac{x^2}{1+nx^2},$$

e

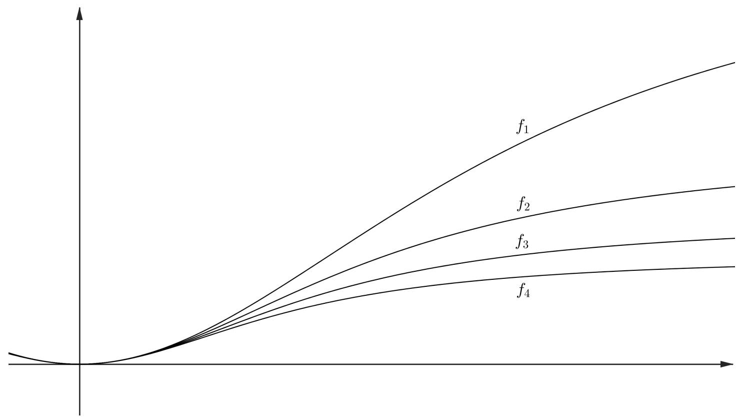
$$\frac{x^2}{1+nx^2} < \frac{1}{n} \Leftrightarrow nx^2 < 1 + nx^2,$$

o que é verdade. Logo,

$$\frac{x^2}{1+nx^2} < \frac{1}{n} < \epsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\epsilon}.$$

Neste caso, basta tomar $n_0 = 1/\epsilon$.

Figura 2.6 - Gráfico das funções $f_n(x) = \dfrac{x^2}{1+nx^2}$



Fonte: Autoria própria

Proposição 2.3.1. *Toda sequência uniformemente convergente é pontualmente convergente.*

Demonstração. Seja $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma sequência de funções que converge uniformemente para a função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in X$ e $n > n_0$ implicam

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Em particular, para um ponto $x_0 \in X$ e para todo $n > n_0$, vale que

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Portanto, a convergência também é pontual. $\square$

No exemplo 2.2.2, mostramos uma sequência de funções contínuas que converge pontualmente para uma função descontínua. O teorema que se segue afirma que esse inconveniente não ocorre na convergência uniforme. Nessas condições, verifica-se que a recíproca da proposição 2.3.1 é falsa.

Teorema 2.3.1. *Seja $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma sequência de funções contínuas no ponto $x_0 \in X$. Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para a função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, então f é contínua em x_0.*

Demonstração. Fixemos $\epsilon > 0$. Por hipótese, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $x \in X$, $n > n_0$ implica

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Como f_n é contínua no ponto $x_0 \in X$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $0 < |x - x_0| < \delta$ implicam

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Além disso, como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente para a função f (pela proposição 2.3.1), segue que $n > n_0$ implica

$$|f_n(x_0) - f_n(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &= |f(x) + f_n(x) - f_n(x) + f_n(x_0) - f_n(x_0) - f(x_0)| \\
&\leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f_n(x_0)| \\
&< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que f é contínua no ponto x_0. $\square$

Teorema 2.3.2. *Seja $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma sequência de funções contínuas que converge uniformemente para a função $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Então,*

$$\lim \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b [\lim f_n(x)]dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Demonstração. Por hipótese, para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Logo, para $n > n_0$, temos que

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| &= \left| \int_a^b f_n(x) - f(x)dx \right| \\
&\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \\
&< \epsilon \int_a^b dx \\
&= \epsilon(b - a).
\end{aligned}$$

O que prova o desejado. $\square$

Em outras palavras, o teorema que acabamos de apresentar enfatiza que podemos trocar a ordem das operações de integração e de tomar o limite com n tendendo ao infinito, sob a condição da convergência uniforme.

Capítulo 3

Teorema da Aproximação de Weierstrass

Este capítulo tem como objetivo explorar o Teorema de Weierstrass, que será apresentado e demonstrado de acordo com [3].

3.1 Noções iniciais

Seja $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. O n-ésimo polinômio de Bernstein associado a função f é dado por

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}. \tag{3.1}$$

Além disso, dados x e y números reais e n um número natural, lembre-se que o Binômio de Newton é dado pela equação

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \tag{3.2}$$

neste caso, ao substituir $x + y = 1$, obtemos a equação

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}. \tag{3.3}$$

Lema 3.1.1. *Para qualquer n inteiro positivo, tem-se*

$$nx(1-x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (k-nx)^2 (1-x)^{n-k}. \tag{3.4}$$

Demonstração. De fato, ao derivar a equação 3.2 em relação x, encontramos

$$n(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1} y^{n-k}. \tag{3.5}$$

Multiplicando por x, temos

$$xn(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^{k} y^{n-k}. \tag{3.6}$$

Devivando 3.5 em relação x, obtemos

$$(n-1)n(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) x^{k-2} y^{n-k}.$$

Multiplicando por x^2, tem-se

$$(n-1)nx^2(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) x^{k} y^{n-k}. \tag{3.7}$$

Agora, tomando $x+y=1$ nas equações 3.6 e 3.7, encontramos

$$xn = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^{k} (1-x)^{n-k} \tag{3.8}$$

e

$$(n-1)nx^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) x^{k} (1-x)^{n-k}. \tag{3.9}$$

Somando 3.8 e 3.9, tem-se

$$\begin{aligned} xn + (n-1)nx^2 &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^{k} (1-x)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) x^{k} (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^{k} (1-x)^{n-k} + k(k-1) x^{k} (1-x)^{n-k}. \end{aligned}$$

Logo,

$$xn + (n-1)nx^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 x^{k} (1-x)^{n-k}. \tag{3.10}$$

Agora, note que

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k-nx)^2x^k(1-x)^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k^2-2knx+n^2x^2)x^k(1-x)^{n-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^2x^k(1-x)^{n-k}\\ &\quad -2nx\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kx^k(1-x)^{n-k}\\ &\quad +\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}n^2x^2x^k(1-x)^{n-k}.\end{aligned}$$

Utilizando, respectivamente, as equações 3.10, 3.8 e 3.3 nos somatórios acima, obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k-nx)^2x^k(1-x)^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^2x^k(1-x)^{n-k}\\ &\quad -2nx\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kx^k(1-x)^{n-k}\\ &\quad +n^2x^2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\ &= [xn+(n-1)nx^2]-2nx(nx)+n^2x^2\\ &= xn+n^2x^2-nx^2-2n^2x^2+n^2x^2\\ &= xn-nx^2.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k-nx)^2x^k(1-x)^{n-k} = nx(1-x).$$

□

3.2 Teorema da Aproximação de Weierstrass

Teorema 3.2.1. *Seja* $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua definida no intervalo fechado* $[0,1]$. *Então, existe uma sequência* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de polinômios que converge uniformemente para* f *em* $[0,1]$.

Demonstração. Queremos mostrar que dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $|B_n(x) - f(x)| < \epsilon$, para todo $x \in [0,1]$.

Por hipótese, como a função f é contínua e o intervalo [0,1] é compacto, temos:

(a) a função f é limitada (via corolário 1.3.1), ou seja, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$, para todo $x \in [0,1]$;

(b) a função f é uniformemente contínua (via teorema 1.3.5), isto é, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x, \dfrac{k}{n} \in [0,1]$ e $\left|x - \dfrac{k}{n}\right| < \delta$ implicam $\left|f(x) - f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right| < \dfrac{\epsilon}{2}$.

Além disso, note que multiplicando por $f(x)$ em ambos os lados na equação 3.3 e, em seguida, subtraindo a equação 3.1, obtem-se

$$f(x) - B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k},$$

isto é,

$$f(x) - B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right]x^k(1-x)^{n-k}.$$

Dividiremos o somatório acima convenientemente em duas partes: o conjunto

$$K_1 = \{0 \leq k \leq n; \left|x - \frac{k}{n}\right| < \delta\}$$

e o conjunto

$$K_2 = \{0 \leq k \leq n; \left|x - \frac{k}{n}\right| \geq \delta\}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} f(x) - B_n(x) = &\sum_{k\in K_1} \binom{n}{k}\left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right]x^k(1-x)^{n-k} \\ &+ \sum_{k\in K_2} \binom{n}{k}\left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right]x^k(1-x)^{n-k}. \end{aligned}$$

Pela desigualdade triangular, segue que

$$
\begin{aligned}
|f(x) - B_n(x)| \leq & \left| \sum_{k \in K_1} \binom{n}{k} \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] x^k (1-x)^{n-k} \right| \\
& + \left| \sum_{k \in K_2} \binom{n}{k} \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] x^k (1-x)^{n-k} \right|.
\end{aligned}
$$

Por um lado, utilizando o item (b), temos

$$
\begin{aligned}
\left| \sum_{k \in K_1} \binom{n}{k} \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] x^k (1-x)^{n-k} \right| & \leq \sum_{k \in K_1} \binom{n}{k} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k} \\
& < \sum_{k \in K_1} \binom{n}{k} \frac{\epsilon}{2} \cdot x^k (1-x)^{n-k} \\
& < \frac{\epsilon}{2} \sum_{k \in K_1} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.
\end{aligned}
$$

Assim, usando 3.3, encontramos

$$
\left| \sum_{k \in K_1} \binom{n}{k} \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] x^k (1-x)^{n-k} \right| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{3.11}
$$

Por outro lado, por meio do item (a), tem-se

$$
\begin{aligned}
\left| \sum_{k \in K_2} \binom{n}{k} \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] x^k (1-x)^{n-k} \right| & \leq \sum_{k \in K_2} \binom{n}{k} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k} \\
& \leq \sum_{k \in K_2} \binom{n}{k} \left[|f(x)| + \left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \right] x^k (1-x)^{n-k} \\
& \leq \sum_{k \in K_2} \binom{n}{k} 2M \cdot x^k (1-x)^{n-k} \\
& \leq 2M \cdot \sum_{k \in K_2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.
\end{aligned}
$$

Agora, pelo lema e o fato de que $|nx-k| \geq \delta n$, obtemos

$$\begin{aligned} nx(1-x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (k-nx)^2 (1-x)^{n-k} \\ &\geq \sum_{k\in K_2} \binom{n}{k} x^k (\delta^2 n^2)(1-x)^{n-k} \\ &\geq \delta^2 n^2 \sum_{k\in K_2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}. \end{aligned}$$

Neste caso,

$$\frac{nx(1-x)}{\delta^2 n^2} \geq \sum_{k\in K_2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Portanto,

$$\left| \sum_{k\in K_2} \binom{n}{k} \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right] x^k (1-x)^{n-k} \right| \leq 2M \cdot \frac{nx(1-x)}{\delta^2 n^2}.$$

Prosseguindo, como $x(1-x) \leq \dfrac{1}{4}$, para $x \in [0,1]$, temos

$$x(1-x) \leq \frac{1}{4} \Rightarrow 2Mx(1-x) \leq \frac{M}{2} \Rightarrow \frac{2Mx(1-x)}{\delta^2 n} \leq \frac{\frac{m}{2}}{\delta^2 nn} \Rightarrow \frac{2Mx(1-x)}{\delta^2 n} \leq \frac{m}{2} \cdot \delta^2 n.$$

Em tal caso,

$$m \cdot \delta^2 n < \epsilon \Leftrightarrow n > \frac{M}{\delta \cdot \epsilon}.$$

Logo, ao tomar $n_0 = M/(\delta^2 \cdot \epsilon)$, $n_0 \in \mathbb{N}$, para $n > n_0$, obtemos

$$\frac{2Mx(1-x)}{\delta^2 n} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Dese modo, encontramos

$$\left| \sum_{k\in K_2} \binom{n}{k} \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right] x^k (1-x)^{n-k} \right| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{3.12}$$

Por fim, através dos resultados 3.12 e 3.13, concluímos que

$$\begin{aligned}
|f(x) - B_n(x)| &\leq \left| \sum_{k \in K_1} \binom{n}{k} \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] x^k (1-x)^{n-k} \right| \\
&\quad + \left| \sum_{k \in K_2} \binom{n}{k} \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] x^k (1-x)^{n-k} \right| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\
&< \epsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, segue que $|f(x) - B_n(x)| < \epsilon$, para todo $x \in [0, 1]$. $\square$

Vale ressaltar que o Teorema da Aproximação de Weierstrass se estende para os conjuntos compactos em geral, o qual recebe o nome de Teorema da Aproximação de Stone-Weierstrass; para mais detalhes consulte [8].

Capítulo 4

Aplicações

Neste capítulo, apresentaremos algumas aplicações do Teorema da Aproximação de Weierstrass.

4.1 Problema dos momentos da Física

Seja E um espaço vetorial real. Lembremos que uma *norma* em E é uma função real $|\cdot| : E \to \mathbb{R}$, que associa a cada vetor $x \in E$ o número real $|x|$, tal que, para quaisquer $x, y \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, satisfaz as seguintes propriedades:

(i) : $|x| > 0$ e $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(ii) : $|\alpha \cdot x| = |\alpha| \cdot |x|$;

(iii) : $|x + y| \leq |x|| + |y|$.

Nesse contexto, dada uma função contínua $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, lembre-se que a sua norma é dada por

$$|f| = \sqrt{\int_a^b [f(x)]^2 dx},$$

neste caso, tem-se

$$|f|^2 = \int_a^b [f(x)]^2 dx. \tag{4.1}$$

Além disso, seja $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Os *momentos* de f são definidos por

$$M_n = \int_0^1 x^n f(x) dx,$$

com $n = 0, 1, 2, \ldots$.

O problema dos momentos consiste em saber se, dados os números $M_0, M_1, \ldots$, é possível determinar uma função contínua em que seus momentos sejam esses números. A questão da existência da função foge ao objetivo deste trabalho. Assim, nos limitaremos, apenas, a questão da unicidade desse problema, que é enunciado pela proposição que se segue.

Proposição 4.1.1. *Se $f, g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ forem funções contínuas com os mesmos momentos, então $f(x) = g(x)$, para todo $x \in [0,1]$.*

Demonstração. Com efeito, por hipótese, temos que

$$\int_0^1 x^n f(x)dx = M_n$$

e

$$\int_0^1 x^n g(x)dx = M_n.$$

Logo,

$$\int_0^1 x^n f(x)dx - \int_0^1 x^n g(x)dx = 0,$$

isto é,

$$\int_0^1 x^n \cdot [f(x) - g(x)]dx = 0.$$

Além disso, como todo polinômio é uma combinação linear finita das funções $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$, segue que

$$\int_0^1 P(x) \cdot [f(x) - g(x)]dx = 0, \tag{4.2}$$

para todo polinômio $P(x)$. Pelo Teorema da Aproximimação de Weierstrass, existe uma sequência de polinômios $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge uniformemente para a função $f - g$. De 4.2, temos

$$\int_0^1 P_n(x) \cdot [f(x) - g(x)]dx = 0. \tag{4.3}$$

Passando ao limite em 4.3, tem-se

$$\lim \int_0^1 P_n(x) \cdot [f(x) - g(x)]dx = 0.$$

Utilizando o teorema 2.3.2, obtemos

$$\int_0^1 \lim P_n(x) \cdot [f(x) - g(x)]dx = 0.$$

Como $\lim P_n = f - g$, segue que

$$\int_0^1 [f(x) - g(x)]^2 dx = 0. \tag{4.4}$$

Portanto, de 4.1 e 4.4, obtemos

$$|f(x) - g(x)|^2 = \int_0^1 [f(x) - g(x)]^2 dx = 0.$$

Então, $|f(x) - g(x)|^2 = 0 \Rightarrow f(x) - g(x) = 0$. Logo, $f(x) = g(x)$, para todo $x \in [0, 1]$. □

Portanto, dadas duas funções contínuas com os mesmos momentos, essas funções contínuas devem ser necessariamente iguais. Em outras palavras, existe somente uma única função contínua que possui determinados momentos.

4.2 O conjunto $C([0, 1], \mathbb{R})$ é separável

Seja $C([0, 1], \mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções contínuas definidas no intervalo [0,1] e tomando valores reais. Além disso, considere P o conjunto de todos os polinômios com coeficientes racionais.

Afirmação 4.2.1. *O conjunto P é enumerável.*

Com efeito, seja P_n o conjunto de todos os polinômios com coeficientes racionais que posssuem grau n.

Note que um polinômio em P_n pode ser identificado como $p_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$, em que $a_n, \ldots, a_0$ são coeficientes racionais e $x \in [0, 1]$. Em outras palavras, essa é uma correspondência bijetiva da forma

$$\varphi : \mathbb{Q}^{n+1} \longrightarrow P_n.$$

Como $\mathbb{Q}$ é enumerável [5, capítulo 1, seção 4, exemplo 2], então $\mathbb{Q}^{n+1}$ é também enumerável [5, capítulo 1, seção 4, corolário 3]. Portanto, P_n é enumerável para todo n [5, capítulo 1, seção 4, corolário 2].

Ademais, dado um polinômio em P, esse possui um certo grau, digamos que seja n, então esse polinômio pertence a P_n. Isso mostra que todo polinômio em P pertence a algum P_n, ou seja, temos que

$$P \subset \bigcup P_n,$$

com $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Além disso, como os P_n formam uma famlía enumerável de conjuntos e todos eles são enumeráveis, segue que $\bigcup P_n$ é enumerável [5, capítulo 1, seção 4, corolário 4]. Desse modo, sendo P um subconjunto de $\bigcup P_n$, temos que P é enumerável [5, capítulo 1, seção 4, corolário 1].

Teorema 4.2.1. *O conjunto $C([0,1],\mathbb{R})$ é separável.*

Demonstração. Seja K a coleção de todos os polinômios com coeficientes reais. Então, dado um polinômio p em K, podemos identicá-lo como uma $(k+1)$-upla de números reais $(b_0, \dots, b_k)$, sendo k o grau do polinômio p. Além disso, como $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, tem-se que $b_0, b_1, \dots, b_k$ são limites de sequências de números racionais. Logo, existem $(q_{0n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_{1n})_{n\in\mathbb{N}}$, $\dots$, $(q_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ sequências de números racionais tais que

$$\lim q_{0n} = b_0,$$

$$\lim q_{1n} = b_1,$$

$$\vdots$$

$$\lim q_{kn} = b_k,$$

isto significa

$$\lim(q_{0n}, q_{1n}, \dots, q_{kn}) = (b_0, b_1, \dots, b_k).$$

Portanto, p é limite de polinômios $p_n = (q_{0n}, q_{1n}, \dots, q_{kn})$, estes com coeficientes racionais, ou seja, encontramos que P é denso em K e $\overline{P} = K$. Além disso, pelo Teorema da Aproximação de Weierstrass, toda função contínua é limite uniforme de uma sequência de polinômios com coeficientes reais, isto é, K é denso em $C([0,1],\mathbb{R})$ e $\overline{K} = C([0,1],\mathbb{R})$. Assim,

$$C([0,1],\mathbb{R}) = \overline{K} = \overline{\overline{P}} = \overline{P},$$

o que mostra que P é denso em $C([0,1],\mathbb{R})$. $\square$

Portanto, concluímos que o conjunto $C([0,1],\mathbb{R})$ de todas as funções contínuas é separável, ou seja, $P \subset C([0,1],\mathbb{R})$ é um subconjunto enumerável denso.

Referências Bibliográficas

[1] ÁVILA, G. **Análise matemática para licenciatura**. 1 ed. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 2001.

[2] ÁVILA, G. **Introdução à análise matemática**. 2 ed. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 1999.

[3] FIGUEIREDO, D. G. **Análise 1**. 3 ed. Rio de Janeiro: LTC Editora, 1996.

[4] LIMA, E. L. **Álgebra linear**. 8 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

[5] LIMA, E. L. **Análise real**, volume 1. 12 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2017.

[6] LIMA, E. L. **Curso de análise**, volume 1. 1 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

[7] LIMA, E. L. **Espaços métricos**. 3 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1993.

[8] LOPES, W.P. **O teorema de Stone-Weierstrass e aplicações**. 2009. 69 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, Minas Gerais, 2009.

[9] RUDIN, W. **Principles of mathematical analysis**. 3 ed. United States of America: McGraw-Hill, 1976.

[10] GUIDORIZZI, H.L. **Um curso de cálculo**, volume 2. 5 ed. Rio de Janero: LTC, 2014.