UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

A ENGENHARIA DIDÁTICA COMO METODOLOGIA PARA A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE ÁREA NO ENSINO MÉDIO

Rodolfo dos Santos Silva

Maceió, março de 2024

Instituto de Matemática

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

RODOLFO DOS SANTOS SILVA

A ENGENHARIA DIDÁTICA COMO METODOLOGIA PARA A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE ÁREA NO ENSINO MÉDIO

Maceió-AL, março de 2024

RODOLFO DOS SANTOS SILVA

A ENGENHARIA DIDÁTICA COMO METODOLOGIA PARA A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE ÁREA NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas.
Orientador: Prof. Dr. Vânio Fragoso de Melo

Maceió-AL, março de 2024

Catalogação na Fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário: Jone Sidney A. de Oliveira – CRB-4 – 1485

S586e Silva, Rodolfo dos Santos.
A Engenharia didática como metodologia para a construção do Conceito de área no ensino médio. / Rodolfo dos Santos Silva. - 2024.
111 f. : il.

Orientador: Vanio Fragoso de Melo.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2024.

Bibliografia: f. 97-99.
Anexo: f. 100-111.

1. Engenharia Didática. 2. Etnomatemática – Geogebra. 3. Geometria Plana. 4. Sequência Didática. I. Título.

CDU: 514.12

"A Geometria existe por toda a parte. É preciso, porém, olhos para vê-la, inteligência para compreendê-la e alma para admirá-la."

Johannes Kepler

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer primeiramente a Deus por ter permitido eu chegar aqui.

Quero agradecer à minha esposa que sempre esteve ao meu lado torcendo por mim e ajudando sempre que possível.

Ao meu orientador, professor Dr. Vânio Fragoso de Melo, por todas as contribuições pertinentes ao desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus colegas de curso Cícero, Jamille e Fernando Lopes por aguentarem às minhas reclamações.

Finalmente, mas não menos importante, quero agradecer à minha irmã Juliete dos Santos (em memória) que sempre me incentivou na carreira acadêmica.

RESUMO

Este trabalho tem o objetivo de desenvolver os conceitos de áreas de figuras planas por meio de uma Sequência Didática norteado pela metodologia da Engenharia Didática tendo como variáveis globais o Geogebra, a história da matemática e a cultura local relacionada à produção artesanal do filé. A sequência será composta por quatro problemas que foram elaborados de acordo com análises de livros didáticos e aplicação de uma atividade diagnóstica. Aplicou-se uma atividade prática que tem por objetivo relacionar a matemática formal com a matemática intuitiva praticada na Etnomatemática usando conhecimentos utilizados por artesãos.

Palavras-chave: Engenharia Didática; Etnomatemática; Geogebra; Geometria Plana; Sequência Didática.

ABSTRACT

This work aims to develop the concepts of areas of flat figures through a Didactic Sequence guided by the methodology of Didactic Engineering having as global variables the Geogebra, the history of mathematics and the local culture related to the artisanal production of the fillet. The sequence will consist of four problems that were elaborated according to textbook analysis and application of a diagnostic activity. A practical activity was applied that aims to relate formal mathematics to the intuitive mathematics practiced in Ethnomathematics using knowledge used by craftsmen.

Keywords: Didactic Engineering; Ethnomathematics; Geogebra; Plane Geometry; Didactic Sequence.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE IMAGENS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Nesse trabalho de pesquisa, buscou-se reforçar os conceitos de áreas de figuras planas através de uma sequência didática, embasada nos moldes da metodologia de pesquisa da Engenharia Didática, que será aplicada em uma turma de ensino médio. Fez-se necessária uma breve análise sobre a Etnomatemática e algumas de suas características que podem ser encontradas na realização de trabalhos artesanais como, por exemplo, o filé que é uma espécie de bordado. Conhecimentos básicos de matemática que são utilizados nesse tipo de artesanato foram apresentados e repassados para os alunos por meio de aula expositiva com o objetivo de facilitar a aplicação de uma das fases da sequência didática.

Buscaremos compreender como a Etnomatemática influencia na produção artesanal do filé, trazendo uma visão mais detalhada dos indivíduos participantes do processo através de entrevistas semiestruturada[1], tendo como um dos objetivos secundários entender como os conhecimentos matemáticos foram e são transmitidos ao longo do tempo e de que forma eles são aplicados.

Os resultados preliminares colhidos durante a pesquisa, foram levados para a sala de aula e apresentados a uma turma de 3º ano do Ensino Médio da Escola Estadual Padre Aurélio Góis, situada no município de Junqueiro – AL, com o objetivo de despertar a curiosidade sobre uma aplicabilidade de conceitos de áreas de figuras planas que são empregadas em utensílios artesanais.

A aplicação do projeto de pesquisa foi realizada durante as aulas de oficina de matemática, uma disciplina eletiva da antiga matriz curricular do Ensino Médio, extinta em 2024, tendo como objetivo reforçar os conhecimentos de conteúdos de anos anteriores.

A iniciação da sequência didática foi dada por meio da aplicação de uma atividade diagnóstica que tinha por objetivo verificar quais eram as dificuldades e obstáculos que os alunos apresentariam com relação à resolução de alguns problemas sobre áreas de figuras planas.

Tomando como parâmetro os resultados obtidos, foi proposta uma sequência didática que englobava algumas questões que foram elaboradas criteriosamente, de forma que seguissem uma lógica que possibilitasse a construção de conceitos

[1] É um modelo de entrevista flexível. Ou seja, ela possui um roteiro prévio, mas abre espaço para que o candidato e entrevistador façam perguntas fora do que havia sido planejado.

inerentes ao estudo de áreas da geometria plana. Na última atividade da sequência didática, a turma de 39 alunos foi dividida em trios e cada um deles recebeu peças artesanais que eram compostas por figuras planas, tais como quadrados, retângulos, triângulos, círculos, losangos, entre outras. Nessa aula, a temática foi abordada por um ponto de vista mais técnico e por uma sequência didática mais voltada para uma matemática formal[2], respeitando a cultura e a própria Etnomatemática.

Diante do que foi exposto, podemos propor alguns objetivos que serão trabalhados por meio de algumas atividades ao longo da pesquisa: Compreensão dos conceitos geométricos fundamentais, como área e perímetro; desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas, aplicando fórmulas e técnicas para encontrar áreas de diversas figuras; capacidade de representar geometricamente uma situação – problema; Melhorias das habilidades de raciocínio lógico e abstrato.

A Etnomatemática[3] é apresentada ao longo do capítulo 1, trazendo à tona um pouco da sua historicidade, seu desenvolvimento teórico e aplicabilidade, evidenciando como a matemática está vinculada a este processo no decorrer do tempo.

A metodologia do nosso estudo está relacionada com observações preliminares do campo de pesquisa, isto é, questionamentos que podem ser levantados a priori, as hipóteses, as fundamentações teóricas e metodológicas da pesquisa.

No capítulo 2 será feita uma rápida abordagem dos indícios da geometria plana, trazendo um problema que é encontrado no papiro de Rhind. Além disso, faremos uma correlação da geometria plana identificada no artesanato do filé e a Etnomatemática.

Em seguida, fazemos uma análise comparativa dos dados coletados no início e final da pesquisa, validando ou refutando os dados a posteriori, características que vão ser melhores desenvolvidas ao longo do capítulo 3.

Além disso, também teremos o capítulo 4 voltado para o estudo das áreas das principais figuras planas, bem como o desenvolvimento de uma forma dedutiva de suas fórmulas por meio de um software matemático chamado Geogebra.

---

[2] aquela derivada de conhecimentos adquiridos em sala de aula, mais especificamente as fórmulas e conceitos.

[3] É a matemática praticada por certos grupos, sem a obrigatoriedade de ser aprendida ou ensinada dentro de um contexto escolar.

1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo será apresentado um estudo teórico sobre a Etnomatemática, a metodologia de estudo baseado na Engenharia Didática e o Geogebra (software matemático). Além disso, serão apresentadas condições inerentes a essas três ferramentas, fazendo um breve contexto histórico.

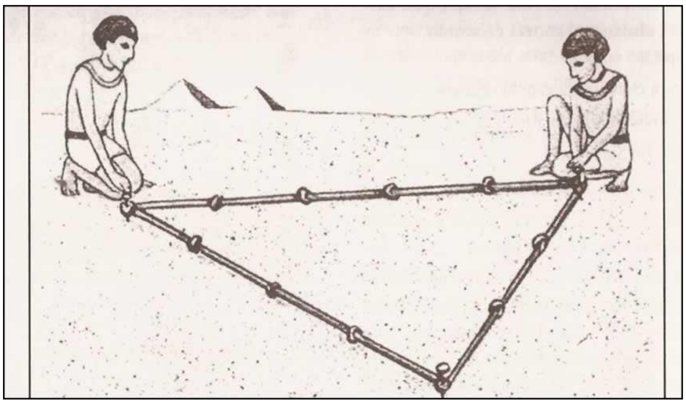
1.1 Etnomatemática: primeiros passos

Podemos observar que a matemática está presente na cultura de todos os povos e isso está relacionado com a necessidade de resolver problemas do cotidiano, estritamente voltados à sobrevivência.

Antes de começarmos a nossa análise acerca do tema Etnomatemática, façamos um breve comentário de como essa temática estava associada aos conhecimentos matemáticos nos tempos passados. Tomemos como exemplo a cultura dos povos egípcios que se deparou com a necessidade de contar, enumerar, organizar e demarcar. No contexto da civilização egípcia, de acordo com Boyer (1996), as primeiras experiências com a matemática se deram da necessidade de dividir lotes de terra à beira do rio Nilo. Esse processo era feito logo após inundações desfazerem todas as demarcações. O autor afirma que o procedimento de medição era feito por uma corda com subdivisões que continham uma certa unidade própria de comprimento utilizada no período.

A figura abaixo mostra como o procedimento era.

Figura 1 - Demarcação dos lotes à beira do Rio Nilo



Fonte: Toledo (1997, p. 19)

Um outro aspecto muito importante foi a necessidade de contar objetos. Isso se fazia necessário desde o cultivo até a organização comercial. Um dos exemplos de contagem que podemos mencionar é o de pastores de ovelhas que teriam sentido a falta de alguma ferramenta que fosse capaz de registrar a quantidade de animais do rebanho e isso, inicialmente, foi sanado fazendo a associação de cada ovelha a uma pedra. Posteriormente, o processo de contagem teria se desenvolvido sendo o registro feito por riscos impressos em ossos e placas de argilas.

Imagem 1 - Osso de Ishanho

Fonte: livro Tópicos de História da Matemática, 2016

Assim como na sociedade egípcia que desenvolveu os princípios matemáticos de contagem devido à necessidade de subsistência, como o controle na arrecadação de impostos, por exemplo, os babilônios também utilizavam os conceitos de contagem para registrar e enumerar e resolver problemas do cotidiano. Não se sabe, ao certo, se os babilônios desenvolveram a sua própria matemática ou se usaram a que já tinha sido desenvolvida pelos egípcios.

As placas de argila também eram utilizadas pelos babilônios e continham uma escrita chamada de cuneiforme[4] que tinha o objetivo de facilitar a contagem e organização.

Pozzer (1998) afirma que,

> A escrita cuneiforme foi utilizada para se gravar em paredes de rochedos, corpos de estátuas e grandes monumentos, sendo sempre as inscrições um decalque do texto escrito no tablete de argila. Lê-se um texto em escrita cuneiforme da esquerda para a direita e de cima para baixo, como em

[4] foi criada pelos sumérios, e sua definição pode ser dada como uma escrita que é produzida com o auxílio de objetos em formato de cunha.

> português. [...] o tablete de argila possui, em geral, 10 cm (a dimensão da palma da mão), mas pode variar de 3 cm a mais de 50 cm. (POZZER, 1998, p. 41)

Imagem 2**-** Tábua de argila de escrita cuneiforme

Fonte: Pozzer (1999, p. 76)

Segundo Barbosa (2009), a escrita cuneiforme juntamente com os símbolos egípcios, hoje chamados de hieróglifos, constituem as mais antigas escritas feitas pela humanidade.

Podemos constatar que a matemática desenvolvida pelas sociedades egípcia e babilônica contribuíram de forma efetiva para a matemática que conhecemos atualmente, como a criação dos números, por exemplo. Observamos, também, que o que foi implementado por alguns grupos não foi "menosprezado", isto é, todas as contribuições foram valiosas, sendo aplicadas no dia a dia da sociedade.

É nesse contexto que começaremos a falar sobre a Etnomatemática e suas contribuições para as classes sociais que aplicam essa linha de matemática. Vamos mostrar a importância de uma matemática mais humanizada, a qual está relacionada à realização de atividades do cotidiano de alguns grupos sociais.

1.2 O que é a Etnomatemática?

A Etnomatemática é um conceito que está associado a uma matemática mais humanizada que busca entender e valorizar os conhecimentos matemáticos vivenciados e repassados por diferentes grupos sociais ao longo do tempo. Isso é confirmado por Ubiratan D'Ambrósio (2001) quando diz: "As diferentes formas de matemática que são próprias de grupos culturais, chamamos de Etnomatemática".

De acordo com as literaturas, o surgimento do termo Etnomatemática se deu por volta dos anos de 1970 e 1980, sendo o pesquisador e matemático brasileiro, Ubiratan D'Ambrósio, o pioneiro nos estudos.

Analisando a estrutura da palavra Etnomatemática, a primeira parte -Etno- está associada a uma palavra já conhecida – Etnia, que por sua vez está relacionada aos costumes de um grupo de pessoas, suas tradições, conhecimentos, cultura, dentre outras características.

De acordo com D'Ambrósio (2005, p.114):

> A disciplina denominada Matemática é, na verdade, uma Etnomatemática que se originou e se desenvolveu na Europa Mediterrânea, tendo recebido algumas contribuições das civilizações indiana e islâmica, e que chegou à forma atual nos séculos XVI e XVII, sendo, a partir de então, levada e imposta a todo o mundo. Hoje, essa matemática adquire um caráter de universalidade, sobretudo devido ao domínio da ciência e tecnologia modernas, que foram desenvolvidas a partir do século XVII na Europa.

Completando e corroborando com o autor, podemos afirmar que as contribuições de outras sociedades no contexto da Etnomatemática foram de grande relevância para o desenvolvimento da matemática propriamente dita de modo que a utilizavam de forma intuitiva como principal ferramenta na resolução de problemas do cotidiano. Provavelmente, por meio dessa prática intuitiva tenha se originado a matemática ocidental, isto é, aquela praticada nos moldes formais e que é repassada ao longo do tempo.

Segundo Oliveira (2019, p.768),

> Construir modos próprios de se fazer Matemática, reconhecer a Matemática presente no cotidiano das pessoas conforme suas vivências, realidades, necessidades enquanto prática de aprendizagem a ser aplicada na sua própria vida quando necessário é uma estratégia pertinente para a superação dos desafios cotidianos enfrentados pelos discentes.

Concordando com os pesquisadores, podemos verificar que a Etnomatemática nasceu da necessidade de aplicação de ferramentas que fossem capazes de sanar as problemáticas do dia a dia.

De fato, se fizermos uma rápida contextualização com a história da matemática, podemos verificar que diferentes povos utilizavam a matemática de formas diferentes para o mesmo propósito. Tome como exemplo os povos Babilônios e Egípcios que trabalhavam com o método da divisão de quantidades de formas peculiares, sendo que os primeiros faziam uso do sistema sexagesimal e o segundo estava embasado no sistema de dobros e metades, ou seja, de proporções. É fácil concluir que povos que possuem culturas diferentes tendem a desenvolver conceitos diferentes.

Conforme a Etnomatemática evoluiu, suas aplicações também se expandiram. Ela passou a ser incorporada em pesquisas educacionais para desenvolver métodos de ensino mais inclusivos e culturalmente sensíveis. Além disso, a Etnomatemática também desempenhou um papel importante na preservação de sistemas matemáticos tradicionais ameaçados de extinção.

É inegável que o contexto histórico de cada sociedade nos lembra de como é importante reconhecer a pluralidade na matemática e de cada civilização em geral. À medida que expomos as ideias relacionadas à Etnomatemática podemos observar como ela transforma a nossa compreensão de cultura. Esta linha de pesquisa continua a crescer e a fomentar ideias que inspiram novos pesquisadores a estreitar a coexistência entre o mundo da matemática e os diversos tipos de culturas que estão vinculadas a ela.

Além do mais, a Etnomatemática está preocupada com o fator social inclusão e equidade, visto que muitas vezes os métodos tradicionais de ensino da matemática segregam e não levam em consideração as diferentes formas de aprender e reproduzir conhecimento.

Sendo assim, a Etnomatemática sugere uma abordagem não excludente, de forma que os conhecimentos dos seres envolvidos no processo sejam valorizados e integrado ao ensino formal.

Outro ponto que merece destaque, é a relação da Etnomatemática com a preservação da cultura, dito como patrimônio social. Ao analisar e repassar as informações acerca das diversidades culturais, a ciência contribui no fortalecimento tradicional, que muitas vezes acaba no esquecimento.

Dessa forma, podemos concluir que a Etnomatemática pode ser vista como uma ramificação da matemática que pode relacionar a matemática formal com a informal de forma que uma complementa a outra e ainda que suas aplicações variam de acordo com a necessidade de sua utilidade, assim como as classes sociais que as aplicam.

1.3 Visão dos teóricos sobre a Etnomatemática

Considerado o "pai da Etnomatemática", D'Ambrosio em um de seus trabalhos, "Etnomatemática – Elo entre as tradições e a modernidade", classifica o termo como segue:

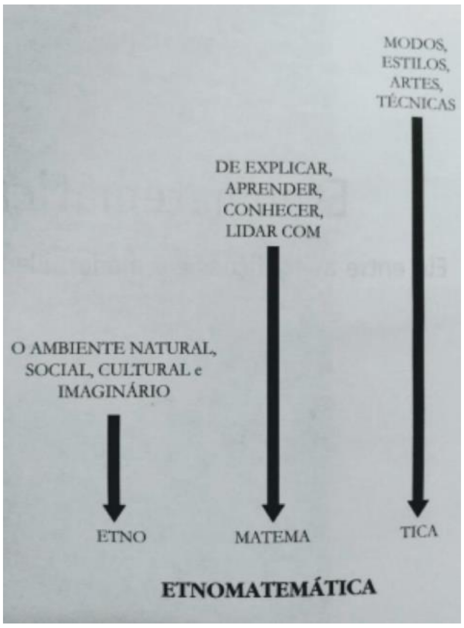
> A Etnomatemática é a matemática praticada por grupos culturais tais como comunidades urbanas e rurais, grupos de trabalhadores, classes profissionais, crianças de uma determinada faixa etária, sociedades indígenas, e tantos outros grupos que se identificam por objetos e tradições comuns ao grupo. (D'AMBROSIO, 2001, p. 11).

Percebe-se que a matemática utilizada por diferentes grupos sociais se mostra ser superficial, isto é, intuitiva, sendo aplicada de forma não rigorosa. Por matemática intuitiva, entende-se que é aquela que é aplicada de forma natural, sem necessariamente fazer uso de uma análise rigorosa ou formalização completa. É a forma como muitas pessoas se deparam com problemas matemáticos do cotidiano, recorrendo em sua intuição e/ou raciocínio lógico informal.

D'Ambrósio propôs ainda que a etimologia da palavra Etnomatemática poderia ser subdividida da seguinte forma: "[...] as raízes tica, matema e etno para significar que há várias maneiras, técnicas, habilidades (tica) de explicar, de entender, de lidar e de conviver (matema) com distintos contextos naturais e socioeconômicos da realidade (etno)." (D'AMBROSIO, 1997, p.111-112).

A figura 2 ilustra o esquema proposto no livro do pesquisador,

Figura 2- Etimologia da palavra Etnomatemática



Fonte: Etnomatemática: Elo entre as tradições e a modernidade. D'Ambrósio (2002, p.2)

Ainda de acordo com D'Ambrósio, a Etnomatemática pode ser destrinchada em algumas dimensões, a destacar:

Quadro 1 - As várias dimensões da Etnomatemática.

Dimensões	Resumo
A dimensão conceitual	Conceitua o que é e como surgiu a matemática, passando por exemplo de sociedade que culmina na etnomatemática de grupos sociais
A dimensão histórica	Relata o apogeu da ciência moderna, que é um sistema de conhecimento que se originou na bacia do Mediterrâneo, há cerca de 3000 mil anos, e que se impôs a todo o planeta.
A dimensão cognitiva	São as ideias matemática como: classificar, quantificar, medir, explicar, generalizar, inferir e, algum modo,

	avaliar, são formas de pesar, presente em toda a espécie humana.
A dimensão epistemológica	Os sistemas de conhecimento referentes a sobrevivência, que busca responder perguntas como: de onde eu vim? Para onde eu vou? Qual é o meu passado e o passado da minha gente?
A dimensão política	Remete a ascensão política onde gregos e romanos impõem as terras conquistadas, seu sistema de conhecimento, sua organização social e política. Com isso, a política tem influência direta sobre e sociedade.
A dimensão educacional	A proposta da etnomatemática não significa a rejeição da matemática acadêmica, mas sim, aprimorá-los, incorporando a eles valores de humanidade, sintetizados numa ética de respeito, solidariedade e cooperação.

Fonte: (D'AMBROSIO, 2002. p.27- 42)

Corroborando com D'Ambrósio, o teórico Gerdes (1989, p.2) sintetiza afirmando que "[...] a Etnomatemática tenta estudar a Matemática (ou ideias matemáticas) nas suas relações com o conjunto da vida cultural e social".

Dessa forma, podemos notar que os pesquisadores concordam que a Etnomatemática está intrinsicamente relacionada aos padrões de vida dos grupos sociais, destacando-se a sua vida cotidiana, socioeconômica, política, localização territorial, visto que esses diferentes fatores agregam em diversas pluralidades.

Como reafirma Knijnik (2012, p.23),

> [...] a Etnomatemática estuda diferentes tipos de Matemática que emergem de distintos grupos culturais. No entanto, destaca que é impossível reconhecer e descrever qualquer objeto sem que o pesquisador use seus próprios referenciais. Em outras palavras, ao identificar e descrever diferentes

> Matemáticas, usamos como referencial a "nossa" Matemática (KNIJNIK et al, 2012, p.23).

De fato, percebe-se que a matemática é modelada de acordo com a necessidade de cada grupo social, de acordo com o que é repassado ao longo do tempo, isso inclui saberes antigos que se relacionam com a resolução de problemas do cotidiano de determinado povo.

A Etnomatemática é uma tendência que está em constante crescimento. Dentre os eventos sobre o tema no Brasil podemos citar o Congresso Brasileiro sobre Etnomatemática (CBEm) que culminou nas seguintes localidades do território nacional:

Quadro 2 - Principais Congressos de Etnomatemática no Brasil

ANO	CONFERÊNCIA BRASILEIRA DE ETNOMATEMÁTICA	SIGLA	LOCALIDADE
2000	CONFERÊNCIA BRASILEIRA DE ETNOMATEMÁTICA 1	CBEm1	Universidade São Paulo (USP)
2004	CONFERÊNCIA BRASILEIRA DE ETNOMATEMÁTICA 2	CBEm2	Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN);
2008	CONFERÊNCIA BRASILEIRA DE ETNOMATEMÁTICA 3	CBEm3	Universidade Federal Fluminense (UFF);
2012	CONFERÊNCIA BRASILEIRA DE ETNOMATEMÁTICA 4	CBEm4	Universidade Federal do Pará (UFPA)
2016	CONFERÊNCIA BRASILEIRA DE ETNOMATEMÁTICA 5	CBEm5	Universidade Federal de Goiás (UFG)

Fonte: Adaptado de D'Ambrósio, 2014

Mostrada tamanha solidez do tema, vemos que a Etnomatemática reconhece a importância das práticas matemáticas em diferentes culturas e comunidades. Ela destaca a diversidade de perspectivas matemáticas fora do contexto acadêmico tradicional e traz várias contribuições significativas.

1.4 Como se apresenta a Etnomatemática na LDB e BNCC?

No Brasil, a Lei Nº 9.394 de 1996, denominada Lei de Diretrizes e Bases da Educação – LDB é a responsável por organizar e orientar a educação brasileira levando em consideração os princípios de equidade da Constituição Federal. Fazendo uma análise no seu artigo 3º e nos incisos X, XI, XII e XIII, segue que:

- Inciso X: está relacionado às experiências fora da vida escolar, ou seja, o que é aprendido durante o dia a dia;
- Inciso XI: está relacionado às práticas educacionais associadas às sociais no desempenho de trabalhos;
- Inciso XII: está relacionado com a diversidade étnico-racial;
- Inciso XIII: está relacionado a segurabilidade do direito à educação e aprendizagem ao longo da vida.

No contexto da Etnomatemática, os incisos acima estão associados, fortemente, a algumas características que são abordadas pelo eixo, tais como os conhecimentos que diversos grupos sociais podem desenvolver ao longo da vida, levando em consideração o conhecimento informal, além das características étnicas-raciais que toda sociedade apresenta.

No ano de 2018, o Ministério da Educação (MEC) por meio da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) reformulou a sua proposta, dessa vez com o objetivo de nortear a elaboração dos currículos escolares, tanto para instituições públicas quanto para instituições privadas.

De forma geral, a BNCC não trata do tema Etnomatemática, mas deixa claro a importância do ensino da matemática voltado para a sociedade, assim como seus costumes e tradições, que é uma das características marcantes da temática.

Podemos observar que, de fato, a BNCC atrela o conhecimento matemático à interação de grupos sociais por meio de suas vivências e experiências. Como podemos observar no seguinte trecho:

> “[...] no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos. Consequentemente, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio [...]” (BNCC, 2018, p. 528).

Dessa forma, podemos entender que a Etnomatemática está presente na educação, mesmo que não seja de forma explícita nos documentos norteadores. Entretanto, podemos observar diversas práticas que são realizadas no vasto campo do ensinar e aprender que estão fortemente vinculadas a essa matemática e que nos auxilia no processo do aprendizado.

1.5 Aporte Teórico sobre a Engenharia Didática

As primeiras ideias sobre Engenharia Didática surgiram por volta do início dos anos 80 sob a visão da didática da escola francesa.

Foi sobretudo nas concepções de Engenharia Didática proposta por Michèle Artigue que este trabalho buscou fundamentos teóricos. Artigue (1996) compreende que o papel do professor – pesquisador pode ser comparado ao trabalho de um engenheiro, quando diz:

> [...] comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto, se apoia nos conhecimentos científicos do seu domínio, aceita submeter-se a um controle de tipo científico, mas ao mesmo tempo, se encontra obrigado a trabalhar sobre objetos muito mais complexos do que os objetos depurados da ciência, e, portanto, a estudar de uma forma prática, com todos os meios ao seu alcance, problemas de que a ciência não quer ou ainda não é capaz de se encarregar. (ARTIGUE, 1996, p.193)

Corroborando com a Autora, Douady (1993) reforça afirmando que a Engenharia Didática pode ser aplicada através de uma sequência didática quando se compara o ofício do professor e o engenheiro. De acordo com o autor,

> [...] uma sequência de aula(s) concebida(s), organizada(s) e articulada(s) no tempo, de forma constante, por um professor-engenheiro para realizar um projeto de aprendizagem para certa população de alunos. No decurso das

> trocas entre professor e alunos, o projeto evolui sob as reações dos alunos e em função das escolhas e decisões do professor (DOUADY, 1993, p. 2).

De fato, pode-se encarar a Engenharia Didática como uma ferramenta que auxilia no gerenciamento do processo de aprendizagem em sala de aula, visto que quando o professor busca novas metodologias de ensino, tem-se uma interação maior entre os integrantes do processo de ensino - aprendizagem.

A metodologia de pesquisa da Engenharia Didática é caracterizada por ações didáticas que são realizadas em sala de aula. Por meio dela, são feitas observações de seções de ensino. Além disso, também se caracteriza por ser um método de pesquisa comparativo, que está voltado a uma análise a priori e a uma análise a posteriori que culminará na validação ou refutação dos dados coletados durante a pesquisa. Esse tipo de validação é uma peculiaridade desse tipo de metodologia, por ser realizada internamente, isto é, através de um determinado grupo.

A metodologia da Engenharia Didática se estrutura com a escolha de um campo de pesquisa, determinação de hipóteses a serem alcançadas, implementação de um plano, execução do plano e, em seguida, é feita uma outra análise confrontando os dados obtidos, por meio de experimentação dos resultados coletados durante a pesquisa. Para Chizzotti (1991)

> A experimentação significa que se recorre à experiência, ou seja, os fatos e acontecimentos são apreendidos em um contexto de normas constantes e, por isso, podem ser sistematicamente observados, deliberadamente organizados e sujeitos a uma intervenção planificada para permitir inferências e previsões sobre os fatos que se deem nas mesmas condições (p.26).

De fato, o fator experimentação é de suma importância, pois é por meio dele que podemos verificar se o trabalho desenvolvido vai proporcionar o alcance das hipóteses que foram propostas a priori, isto é, no estágio inicial da pesquisa, visto que a metodologia da Engenharia Didática está atrelada ao fato de que esse processo leva em consideração tanto as argumentações teóricas, quanto a experimental. Artigue (1995) ainda reforça afirmando: “esta metodologia favorece uma ligação entre a pesquisa e a ação pedagógica, possibilitando o enfrentamento de problemas práticos para os quais não existe teoria prévia”.

Ainda segundo a autora,

> A Engenharia Didática, vista como metodologia de investigação, caracteriza-se em primeiro lugar por um esquema experimental baseado em realizações didáticas em classe, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de sequências de ensino (ARTIGUE 1995, p.36).

Artigue (2001) define que o processo de análise de uma pesquisa por meio da Engenharia Didática se fragmenta em 4 etapas, a saber:

1) Análises prévias;

   Para este aspecto é preciso verificar:

   - a análise didática dos conteúdos curriculares da rede de ensino básico;
   - a análise das concepções dos alunos, das dificuldades e obstáculos que marcam a sua evolução;

2) Concepção e análise a priori de experiências didático-pedagógicas a serem desenvolvidas na sala de aula de matemática;
3) Implementação da experiência/aplicação;
4) Análise a posteriori e validação da experiência.

De acordo com Artigue (1988) cada fase da Engenharia Didática é revista e aprofundada durante a pesquisa. Segundo a autora, as fases da pesquisa são mutáveis, ou seja, pode-se retomar a uma fase anterior com o objetivo de fazer adequações em função das necessidades vão surgindo no desenvolvimento da pesquisa.

A primeira fase da Engenharia Didática, a análise prévia, é a etapa em que o pesquisador faz a escolha do campo de pesquisa, objeto de estudo e questões que podem ser levantas, assim como as hipóteses que espera ser alcançadas. Segundo Almouloud (2007), o pesquisador deve traçar uma vertente de pesquisa para se debruçar, como resume o autor,

> [...] um dos objetivos das análises preliminares é identificar os problemas de ensino e aprendizagem do objeto de estudo e delinear de modo

> fundamentado a(s) questão(ões), as hipóteses, os fundamentos teóricos e metodológicos de pesquisa. (Almouloud 2007, p. 172).

Na segunda fase da Engenharia Didática, a fase da analise a priori, é nessa etapa que o pesquisador desenvolve uma sequência didática com o objetivo de responder as hipóteses da pesquisa, originárias da fase anterior. Almouloud (2007) afirma que o sucesso da pesquisa depende dessa fase, salientando,

> [...] a análise a priori é importantíssima, pois de sua qualidade depende o sucesso da situação-problema; além disso, ela permite, ao professor, poder controlar a realização das atividades dos alunos, e, também, identificar e compreender os fatos observados. Assim, as conjecturas que vão aparecer poderão ser consideradas, e algumas poderão ser objeto de um debate científico em sala de aula. (Almouloud, 2007, p. 176, grifo do autor)

Na fase três, a etapa da experimentação/aplicação, o pesquisador realiza a aplicação em sala de aula com o objetivo de analisar todas as variáveis envolvidas no processo de ensino – aprendizagem.

A última fase, a etapa da análise a posteriori, observa-se se os dados coletados na experimentação/aplicação serão validados ou refutados, confirmando ou não as hipóteses levantadas na primeira fase.

Concordando com o autor, compreende-se que que a utilização da Engenharia Didática como ferramenta pedagógica e prática seja de grande potencial no processo do ensino – aprendizagem.

Baseando-se nos estudos de Artigue (1988) e Douady (1990), Machado (1999) afirma que a noção de engenharia didática, construída pela Didática da Matemática, possui dupla função: ela pode ser compreendida tanto como uma metodologia de pesquisa, (resultante de uma análise a priori - que será discutida mais adiante), como uma produção para o ensino de determinado conteúdo, ou seja, uma sequência de aula(s), concebida(s), organizada(s) e articulada(s) no tempo, de maneira coerente, por um professor.

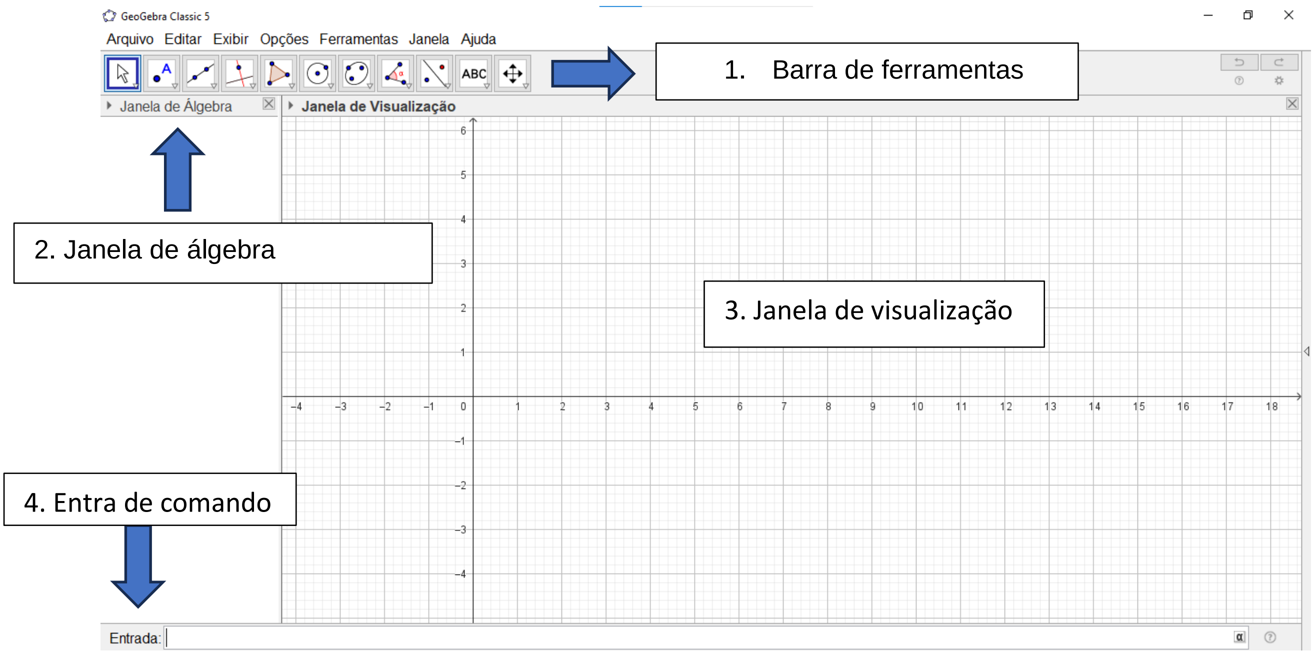
Dessa forma, corroborando com os autores e acrescentando, pode-se notar a possibilidade da aplicação da Engenharia Didática como ferramenta de pesquisas relacionadas às didáticas matemáticas que pode auxiliar no processo de ensino –

aprendizagem, culminando como metodologia facilitadora na transposição das dificuldades e obstáculos apresentados pelos alunos sobre um determinado tema.

1.6 Geogebra como ferramenta de aprendizagem

O Geogebra é um software matemático criado em 2001 pelo austríaco Markus Hohenwartez. O programa possui acesso gratuito e pode ser baixado facilmente pelo link https://www.geogebra.org/download?lang=pt. Abaixo é apresentada a interface do Geogebra.

Figura 3- Interface do Geogebra



Fonte: O Autor, 2024

Podemos observar alguns campos principais na figura acima.

1. Barra de ferramentas: é onde se concentra as principais ferramentas para a construção de pontos, retas, figuras geométricas, medidas de objetos, entre outros. Clicando com o mouse em cada ícone, outros aparecerão com funções semelhantes.
2. Janela de visualização: área de visualização das formas gráficas originadas pelos comandos das seleções dos ícones da barra de ferramentas. As visualizações também podem ser formadas por comandos digitados.

3. Janela de álgebra: área onde é exibida as coordenadas de pontos, equações, medidas e outras informações inerentes de cada comando.
4. Entrada de comandos: espaço destinado a inserção de comandos que podem ser digitados, como por exemplo, fórmulas e coordenadas de pontos.

É importante salientar que o uso de softwares dinâmicos como o Geogebra auxilia na compreensão de propriedades por meio de visualização de conceitos e propriedades em duas ou três dimensões, facilitando o pensamento abstrato que a matemática impõe, o que antes era representado por meio de quadro e giz, o que às vezes impossibilitava a observação de detalhes que ajudam na compreensão. Essas ferramentas podem ser compreendidas como:

> São ferramentas de construção: desenhos de objetos e configurações geométricas são feitos a partir das propriedades que os definem. Através de deslocamentos aplicados aos elementos que compõe o desenho, este se transforma, mantendo as relações geométricas que caracterizam a situação. Assim, para um dado objeto ou propriedade, temos associada uma coleção de “desenhos em movimento”, e os invariantes que aí aparecem correspondem as propriedades geométricas intrínsecas ao problema. E este é o recurso didático importante oferecido: a variedade de desenhos estabelece harmonia entre os aspectos conceituais e figurais; configurações geométricas clássicas passam a ter multiplicidade de representações; propriedades geométricas são descobertas a partir dos invariantes no movimento (GRAVINA, 1996, p. 6)

Ao se fazer uso do Geogebra, o software possibilita o desenvolvimento de importantes aspectos relacionados ao processo de ensino – aprendizagem, contribuindo na valorização dos conhecimentos científicos e sua construção através da experimentação, interpretação, visualização, abstração e demonstração.

A aprendizagem vinculada aos recursos computacionais é vista como uma proposta metodológica atrativa que contribui na fixação de conceitos, promovendo um conhecimento mais elaborado. Segundo Lorenzato (2006, p.195),

> A mediação do professor desempenha um papel determinante, à medida que, ao trabalhar com a tecnologia, ele pode criar situações desafiantes, recortá-las em vários problemas intermediários que possibilitam aos alunos se deslocarem muitas vezes do problema principal, percebendo-o por outra perspectiva, possibilitando-lhes a busca de novos caminhos, a constante

> reavaliação de suas estratégias e objetivos. Envolvendo-se no processo de construção do conhecimento.

A utilização de um recurso tecnológico tem o objetivo de facilitar a aprendizagem, promovendo discussões críticas entre os seres envolvidos no processo, desenvolvendo estratégias na busca da solução da problemática trabalhada. Além disso, a aplicação de algum diferencial durante as aulas favorece para que as atividades sejam desempenhadas de forma descontraída, estimulando os alunos na busca do conhecimento.

Dessa forma, o professor deve estar sempre se qualificando, buscando alternativas efetivas que promovam o aprendizado dos alunos, observando as limitações dos mesmos.

De acordo com os PCN (1997), as tecnologias podem ser empregadas nas aulas de matemáticas de diferentes formas:

- Fonte de informação;
- Auxiliar no processo de construção do conhecimento;
- Meio para desenvolver a autonomia, ajudam os alunos a pensarem, refletirem e criarem soluções;
- Ferramenta para realizar algumas tarefas.

Dessa forma, pode-se notar as importantes contribuições que o uso da tecnologia na sala de aula pode promover, facilitando no processo de ensino – aprendizagem, superando dificuldades apresentadas pelos alunos, promovendo maior interação, desenvolvimento do autoconhecimento, entre outros.

De acordo com as DCE’s (p.65) citando D’Ambrosio e Barros (1988):

> Atividades com lápis e papel ou mesmo quadro e giz, para construir gráficos, por exemplo, se forem feitas com o uso de computadores, permitem ao estudante ampliar suas possibilidades de observação e investigação, porque algumas etapas formais do processo construtivo são sintetizadas.

Concordando com os autores, pode-se notar que quando as atividades são aplicadas fazendo uso de uma metodologia diferenciada, os alunos demonstram maior interesse. Software dinâmicos como o Geogebra possibilitam os alunos a manipularem o conteúdo de forma concreta, o que antes era estático. Além disso, o programa oferece o aprofundamento de conhecimentos abstratos e simbólicos no estudo da matemática através das interações que são estabelecidas entre professor – aluno e aluno – software.

Autores como Gerônimo, Barros e Franco afirmam que o Geogebra é um software matemático com um potencial gigantesco e pode substituir o uso de cadernos geométricos. Segundo os autores,

> O software Geogebra pode substituir satisfatoriamente o caderno de desenho geométrico. Podemos utilizar sua interface gráfica e suas ferramentas para traçar retas, ângulos, circunferências etc. Uma das vantagens do uso do Geogebra é que as construções são dinâmicas, isto é, sem a perda dos vínculos geométricos. Isso permite que o usuário faça grande quantidade de experimentações que lhe possibilite construir proposições geométricas. (2010, p.11)

De fato, concordando com os autores e mostrada tamanha importância como ferramenta educacional, o Geogebra é um software matemático completo que possibilita trabalhar geometria e álgebra de forma dinâmica e concreta.

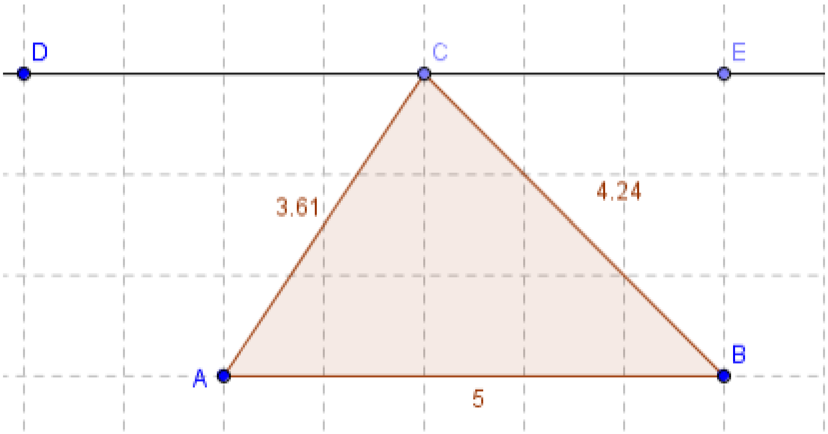
Diante do que foi exposto, pode-se concluir que o software possui uma grande aprovação na prática da educação matemática, sendo visto como um importante instrumento auxiliador na promoção do processo de ensino – aprendizagem.

1.6.1 Algumas aplicações utilizando o Geogebra

O software Geogebra é uma ferramenta matemática que auxilia no entendimento de conceitos matemáticos de forma dinâmica. Por meio do programa, pode-se realizar estudos geométricos e aritméticos com uma clareza mais aprofundada e precisa. Abaixo são mostradas algumas aplicações.

- Cálculo de área e de perímetro de triângulo;

Figura 4 - Cálculo de área e de perímetro de triângulo.

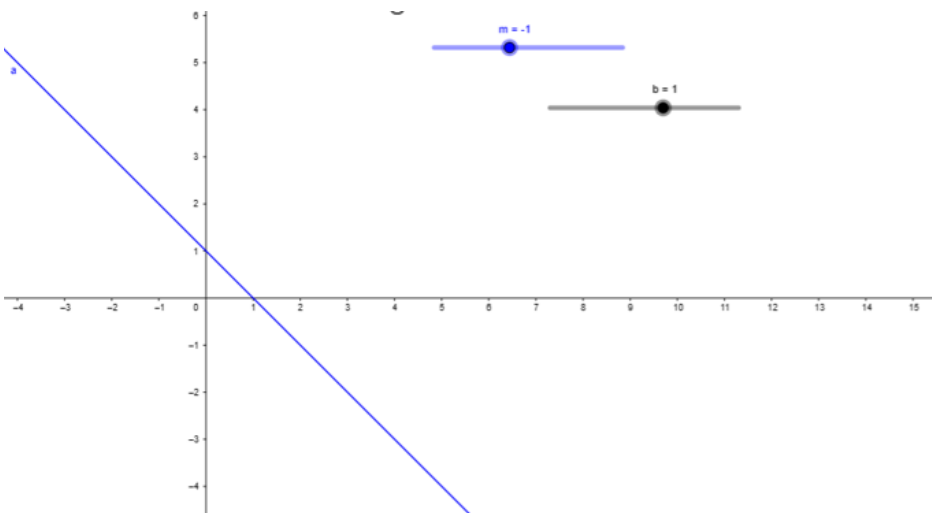


Fonte: O Autor, 2024

Utilizando a ferramenta distância, comprimento ou perímetro e clicando nos lados do triângulo para que sejam mostrados os seus comprimentos e após a ferramenta área e novamente a ferramenta distância, comprimento ou perímetro e clicando na figura serão mostrados a área e o perímetro do triângulo, respectivamente.

- Coeficiente angular de uma reta;

Figura 5 - Declividade da reta.

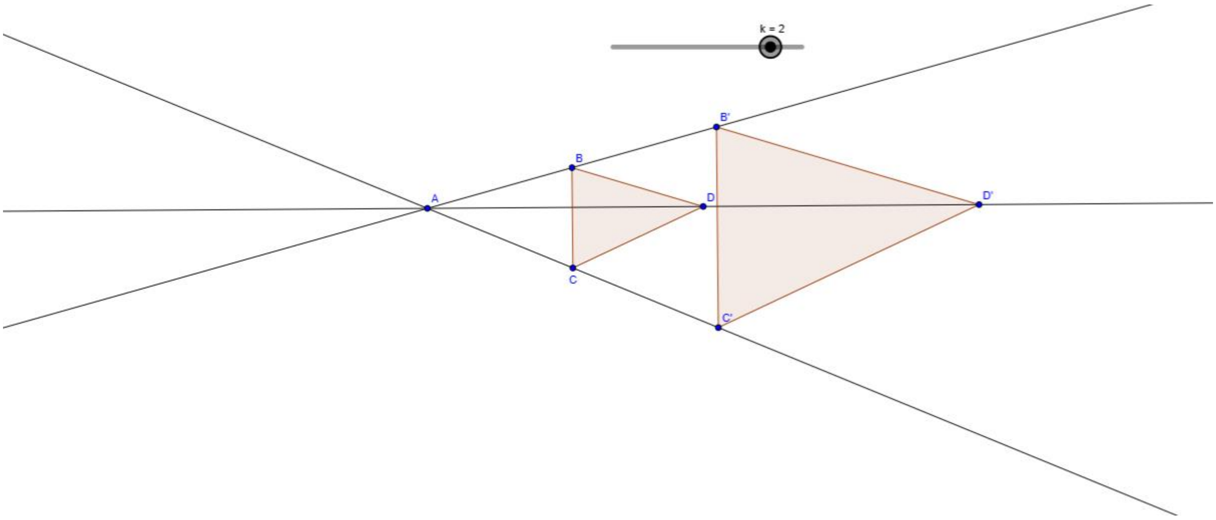


Fonte: O Autor, 2024

Para a construção acima, pode-se fazer a análise da declividade da reta, assim como do seu coeficiente linear. Para isso, basta variar os valores de m e b no controle deslizante e observar o comportamento da reta. Para a reta acima, podemos verificar que a sua declividade é -1, o que implica que a reta é decrescente, enquanto o seu coeficiente linear é igual a 1, isto é, a reta corta o eixo Oy no ponto (0,1).

- Homotetias;

Figura 6 - Homotetia



Fonte: O Autor, 2024

A homotetia pode ser definida de forma simplificada como a ampliação ou redução de segmentos ou de áreas a partir de um ponto fixo. Um detalhe importante é que nas homotetias as proporções são preservadas.

Em uma homotetia se faz corresponder uma aplicação afim, na qual é dada pelo seu centro A e por uma razão $k,$ onde cada ponto D se relaciona a outro ponto D', isto é, $AD = k.AD'$.

2 INDÍCIOS DA GEOMETRIA PLANA

Não se sabe o ano nem o século dos primeiros estudos que tiveram relação com a geometria plana. Sabe-se que os babilônios e os egípcios foram os primeiros povos a estabelecerem algum uso de conceito geométrico por meio do cálculo de áreas e volumes, chamada de geometria métrica.

As evidências podem ser analisadas através de documentos de civilizações antigas como a egípcia, suméria, babilônia e mesopotâmia por meio de descobertas como os papiros de Moscou também conhecido por Golenishev e Rind mais usualmente chamado de Ahmes, datados de 1850 a.E.C.(antes da era comum) e 1650 a.E.C, respectivamente. Segundo Eves (1995, p.75), os dois papiros somam um total de 110 problemas dos quais 26 são geométricos, mostrando, dessa forma, o conhecimento de geometria desses povos. Por exemplo, o problema 51 do papiro de Ahmes diz: Qual é a área de um triângulo de lado 10 jet[5] e base 4 jet? O problema compete em se determinar a área de um terreno em forma triangular.

Imagem 3 - Problema 51 do papiro de Ahmes

Fonte: dia a dia Educação

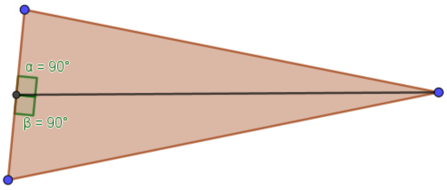
Usando o software Geogebra para auxiliar na compreensão dos leitores, acompanhemos a resolução do problema 51 do papiro de Ahmes.

Solução. Ahmes admitia que o triângulo era isósceles e o dividia em duas partes iguais passando pela altura. Como mostra a figura abaixo.

---

[5] Unidade de medida egípcia.

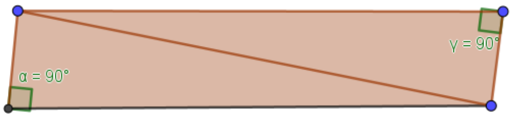
Figura 7 - Representação do triângulo proposto no problema 51 do papiro de Ahmes



Fonte: o Autor, 2023

Observa-se que o triângulo é dividido pela sua altura de forma que sejam formados dois triângulos retângulos cuja base é metade da base do triângulo. Veja:

Figura 8 - Retângulo formado pela divisão da figura 3



Fonte: O Autor, 2023

Como o lado do retângulo é igual ao lado do triângulo e base do triângulo foi dividida ao meio, segue que a área procurada é 20.

Os textos matemáticos afirmam que os povos antigos conheciam estratégias de resolução de problema mais sofisticados, como o cálculo de áreas de terrenos que representavam figuras planas mais complexas. Geralmente, os detentores dos conhecimentos matemáticos usavam o quadrado como unidade padrão de medida de forma que particionavam a figura que queriam determinar a sua área em quadrados e cuja área final era dada pela soma das suas áreas. Essa mesma estratégia era adotada dividindo as figuras planas em retângulos e triângulos, obtendo-se, dessa forma, uma área aproximada da região desejada.

Um detalhe importante é que esses povos aplicavam algumas propriedades da geometria plana, entretanto, não se sabe como as desenvolveram.

Sabe-se que o nascimento da geometria se deu da necessidade de resolver problemas do cotidiano que estavam atrelados à sociedade. Fazendo uma rápida reflexão, isso se caracteriza como uma espécie de Etnomatemática, visto que era aplicado algum conhecimento não formalizado que contribuía na realização de algumas práticas.

Umas das aplicações de conhecimentos sobre geometria plana se dava na sociedade do antigo Egito após o período das grandes cheias do rio Nilo. Era muito comum a demarcação das terras nas suas margens, visto que o transbordamento das águas desfazia as divisões existentes. Essas divisões estavam relacionadas ao cálculo de áreas de terrenos destinados para a agricultura de subsistência. Esta situação é representada nos escritos de Herôdoto, que diz:

> "[Quando das inundações do Nilo,] o rei Sésostris enviava pessoas para inspecionar o terreno e medir a diminuição dos mesmos para atribuir ao homem uma redução proporcional de impostos. Aí está, creio eu, a origem da geometria que migrou, mais tarde, para a Grécia". (Herôdoto, Oeuvres complètes II 109, p.183).

As literaturas sobre a história da matemática indicam que o matemático Tales de Mileto que viveu entre os séculos VII e VI a.E.C. (antes da era comum) teria sido influenciado pelos povos egípcios e mesopotâmicos por meio de sua matemática geométrica que estava em ascensão. Um dos grandes feitos teria sido o cálculo da altura de uma das obras arquitetônicas de grande prestígio, as pirâmides. Ele teria realizado esse cálculo utilizando a sombra da própria pirâmide com a sua altura, fazendo uma semelhança da sua altura corporal com a sua sombra. Dessa forma, percebe-se que já se conhecia os princípios de semelhança de triângulos naquele período.

Cálculos de geometria incluindo cálculo de áreas realizados pelos babilônios são encontrados, atualmente, em tabletes de argila, sendo um dos mais conhecidos o YBC 7289. Abaixo, segue uma imagem do tablete mencionado.

Imagem 4 - tablete de argila YBC 7289

Fonte: Science blogs – Unicamp, 2014

Na imagem acima é representado em argila e escrita cuneiforme[6] um quadrado com dimensões em números sexagesimais. Um dos lados do quadrado indica o número sexagesimal 30. Umas das diagonais é indicada pelo número sexagesimal 1;24,51,10 que convertendo para o sistema decimal, teremos:

$$1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}=\frac{305470}{216000}\approx 1{,}414213$$

uma aproximação muito boa de $\sqrt{2}$, que sabemos que é a diagonal de um quadrado de lado 1.

Na outra diagonal temos o número sexagesimal 42;25,35 que convertendo para o sistema decimal, teremos:

$$42+\frac{25}{60}+\frac{35}{60^2}=\frac{30547}{720}\approx 42{,}426$$

o que é equivalente multiplicar pela aproximação de $\sqrt{2}$ e obter a diagonal de um quadrado de lado 30.

Portanto, percebe-se que o início da aplicação de geometria plana, mesmo sendo conhecimentos intuitivos/dedutivos, faz-nos notar que essa prática está vinculada à necessidade de resolver problemas do cotidiano e que com o passar do tempo os saberes foram sendo aprimorados, desenvolvendo-se artifícios e fórmulas

[6] criada pelos sumérios, e sua definição pode ser dada como uma escrita que é produzida com o auxílio de objetos em formato de cunha.

que facilitaram consideravelmente a execução com exatidão do cálculo que relacionam as figuras planas.

2.1 Geometria Plana e Etnomatemática presentes no artesanato têxtil

Podemos encontrar a Etnomatemática presente no artesanato têxtil de diversas formas de representações matemáticas como, por exemplo, nos desenhos geométricos, nas simetrias que estão presentes na composição dos utensílios, nos cálculos de medição e proporção que são necessários para a confecção, no processo de contagem, divisão, multiplicação, dentre outras.

Iremos verificar de que forma a matemática influencia no processo de produção artesanal, além de analisarmos como os conhecimentos são transmitidos ao longo dos anos e, não apenas, mostrar como se dá a sua replicação. De acordo com Gerdes (2012): O artesão que imita uma técnica de produção conhecida não está, geralmente, a fazer muita matemática. Mas o artesão que descobriu a técnica, fez matemática, desenvolveu matemática, estava a pensar matematicamente” (Gerdes, 2012, p. 72).

De fato, concordando com o autor, estamos em busca de mostrar como o conhecimento matemático está vinculado à produção de peças artesanais que fazem uso de objetos da matemática explícitos ou implícitos, além de explorá-los ao longo do texto.

Sabe-se que a preocupação de representar traços da geometria em trabalhos artesanais vem de muito tempo atrás. Segundo o autor Gerdes,

> Com o “desvendar” do pensamento geométrico ‘escondido’ em técnicas que têm uma longa história, como as de entrelaçamento, torna-se possível refletir sobre o despertar histórico da geometria. A este respeito o meu estudo mostra que o aspecto da atividade tem sido, até agora, demasiado pouco considerado na tentativa de compreender a origem dos conceitos e relações geométricos básicos (GERDES, 2012, p. 195).

Dessa forma, o nosso estudo consiste em analisar quais conceitos matemáticos estão sendo empregados em peças como a da imagem abaixo.

Imagem 5 - Suplá de filé

Fonte: O Autor, 2023

Na imagem podemos observar uma peça construída em filé que foi utilizada simetrias priorizando a formação de quadrados “vazados”. No contexto da geometria plana, podemos fazer algumas análises como cálculo de perímetro, áreas, proporcionalidade, contagem, observando ainda que os objetos planos são construídos em uma malha quadriculada que se assemelha ao plano cartesiano.

2.2 Entrevista semiestruturada[7] e perfil das entrevistadas.

Com o objetivo de entender como a matemática se relaciona com a produção artesanal do filé, foi realizada uma entrevista com duas artesãs que fizeram parte da Associação das Mulheres Rendeiras de Marechal Deodoro (AMUR) – Alagoas.

O questionário consistiu nas questões que são apresentadas no quadro abaixo:

Quadro 3 - Questionário aplicado na entrevista

Questões	Entrevista
1	Qual a sua idade?

[7] A entrevista semiestruturada consiste em um modelo de entrevista flexível. Ou seja, ela possui um roteiro prévio, mas abre espaço para que o candidato e entrevistador façam perguntas fora do que havia sido planejado

2	Qual o seu grau de escolaridade?
3	Como você aprendeu a fazer o filé?
4	Há quanto tempo você trabalha com filé?
5	Você gostava da escola?
6	Você usa matemática no seu ofício?
7	O que você precisa para trabalhar foi aprendido na escola?
8	Você acha que suas ferramentas tem ligação com a matemática?
9	Você pode justificar a pergunta anterior?
10	Existe algum cálculo que você se sente inseguro e que é importante para o seu trabalho?

Fonte: O Autor, 2024

Segue um quadro resumo das respostas das entrevistadas.

Quadro 4 – Respostas da artesã 1

Respostas	Artesã 1
1	55 anos
2	Estudei até a 6ª série
3	Observando minha família
4	35 anos
5	sim
6	sim
7	Conta de mais e de menos ajuda muito
8	Sim
9	Acho que os quadros e os outros desenhos que faço tem a ver com a matemática.
10	De dividir. As vezes preciso fazer isso e uso a calculadora do celular e quando dar número quebrado eu me confundo.

Fonte: O Autor, 2024

Quadro 5 – Respostas da artesã 2

Respostas	Artesã 2
1	48 anos
2	Não tive oportunidade de estudar.
3	Observando minha família
4	22 anos
5	
6	sim
7	Eu não estudei, mas preciso sempre fazer medição com fita métrica para depois somar e diminuir.
8	Sim
9	Tudo tem a ver com a matemática: a fita métrica, os desenhos, o dinheiro que gasto para comprar linha e muito mais.
10	Eu tenho dificuldade em dividir, por isso sempre peço ajuda as minhas colegas quando é preciso fazer um ponto que não seja um número sem ser com vírgula.

Fonte: O Autor, 2024

Vale salientar que o principal trabalho artesanal desenvolvido por elas é o filé. Esse nome deriva do francês “filet” e quer dizer rede. Analisando o campo de atuação das artesãs, verificamos que o nome filé justifica a tradução da palavra, pois os trabalhos são desenvolvidos em uma espécie de rede quadriculada como mostram as imagens abaixo.

Imagem 6 - passadeira de filé

Fonte: O Autor, 2023

Imagem 7 - Vestido sendo produzido em rede de filé

Fonte: O Autor, 2023

No primeiro momento da entrevista foi explicado que o motivo da pesquisa era de cunho investigativo, tendo como principal objetivo analisar como se dava a confecção dos produtos têxteis aplicando conhecimentos matemático explícitos ou implícitos, além de buscar informações que explicassem como os conhecimentos matemáticos aplicados nas peças eram repassados para outros artesãos.

É importante mencionar que as perguntas da entrevista foram elaboradas criteriosamente, de forma que fossem de fácil interpretação e que deixassem as entrevistadas mais à vontade, proporcionando, dessa forma, respostas mais descontraídas e claras.

A entrevista foi estruturada de forma que pudesse ser moldada ao longo dos questionamentos, se fosse necessário, novas perguntas poderiam ser inseridas de acordo com o andamento da enquete. O processo durou cerca de 25 minutos para cada entrevista.

Após uma conversa informal com as fileseiras (artesã que produz o filé), foi possível perceber que toda a base dos seus conhecimentos práticos da produção do filé, tem como principal fonte a tradição oral, uma vez que a maioria delas aprendeu a profissão com parentes e/ou amigos próximos.

Segundo uma das entrevistadas, o processo inicial para aprender a fazer filé é construir uma rede quadriculada com fios de algodão. Para isso, utilizam uma fita métrica como ferramenta auxiliadora na medição de linhas paralelas horizontais e verticais equidistantes que são fixadas em uma grade retangular ou quadrada de madeira, cujo formato varia de acordo com a peça a ser confeccionada. Em seguida, para dar continuidade ao processo de aprendizagem é ensinado o primeiro ponto chamado de “corrente”, ele deve ser praticado incessantemente até desenvolver o domínio necessário sobre todos os instrumentos utilizados como a agulha e malha. Só a partir daí, o artesão passa para um outro nível que é o de aprender outros tipos de pontos mais complexos como, por exemplo, o cerzido, palhinha, casa de noca, que trazem uma ilustração perfeita de figuras planas como quadrados, retângulos, triângulos, losangos, paralelogramos, que darão origem a peças extraordinárias.

Ambas as artesãs entrevistadas atuam na profissão a mais de 20 anos, mostrando-se muito competentes e objetivas nos questionamentos levantados. Elas não possuem grau escolar elevado, sendo que uma delas não chegou a concluir o ensino fundamental II (6º ao 9º ano). As profissionais tinham afinidade com a matemática básica, afirmando que o aprendizado de operações como soma, subtração, multiplicação e divisão contribuíram significativamente no desempenho do seu ofício.

Citaram também a necessidade da matemática na contagem de pontos, na medição dos quadrados da rede quadriculada e isso é feito com o auxílio de uma fita métrica; noção de paridade de pontos, sendo que alguns pontos requerem uma quantidade par de quadrados e outros uma quantidade ímpar.

Intuitivamente, também é trabalhada uma matemática de simetria de figuras planas, que é replicação de uma mesma figura geométrica. Além disso, usam a proporcionalidade para fazer cálculos de quantidade de rolos de linha que necessitam para confeccionar uma determinada peça, evitando, dessa forma, desperdício e prejuízo financeiro.

Uma das dificuldades apresentadas pelas fileseiras[8] é o de encontrar o “meio” de uma peça, isto é, determinar o ponto que seja equidistante aos lados do utensílio

[8] Artesão que trabalha com filé (espécie de bordado).

que está sendo construído. O processo que usam para resolver tal situação é o de tentativas, isto é, erros e acertos. Algumas contagens do número de quadrados são feitas até encontrar o quadrado central da rede quadriculada. Com o objetivo de contornar a situação foi sugerido a utilização da fita métrica, já manuseadas pelas artesãs. A proposta consistia em medir as dimensões da rede e encontrar o ponto médio de cada segmento, de forma que a intersecção entre eles determinava o procurado quadrado central da malha.

Atualmente, as fileseiras criam diversos tipos de produtos tais como roupas de praia, sacolas, cestos, porta – guardanapos, dentre outras obras de arte. Segundo as profissionais, os trabalhos são inspirados em tradições antigas, como as portas de casas do período colonial, visto que a cidade faz parte do período histórico do presidencialismo do Brasil.

As artesãs complementaram dizendo que o ofício que realizam faz parte da complementação da renda familiar, visto que a região é de turismo, visto que Marechal Deodoro é uma cidade histórica e litorânea.

3 A ENGENHARIA DIDÁTICA COMO METODOLOGIA DE PESQUISA

Um dos objetivos apresentados na introdução desse trabalho é analisar a compreensão do aluno com relação à alguns conceitos do conteúdo de geometria plana, a citar: cálculos de áreas e perímetros.

A necessidade de revisitar tal conteúdo foi notada em aulas de uma disciplina eletiva chamada Oficina de Matemática, na qual tem como objetivo reforçar conhecimentos de séries anteriores, visto que estudo de áreas é de grande importância e com uma incomensurável aplicabilidade no dia a dia dos alunos.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1997) para o ensino fundamental, os conceitos geométricos são parte importante do currículo de matemática porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive (BRASIL, p. 41).

Obviamente, essa visão que os PCN trazem pode ser estendida para qualquer nível de escolaridade, visto que isso contribui de forma efetiva para a compreensão de alguns conceitos geométricos que são de extrema importância na formação dos alunos.

Artigue (1995) ainda traz a necessidade de formular algumas hipóteses na fase das análises prévias.

Para isso, será levada em consideração que o interesse pelo aprendizado, por parte dos alunos, possui uma maior efetividade quando estes entendem que o conteúdo estudado por eles está relacionado às suas vivências e que podem ser trabalhados por meio de metodologias ativas. Mediante esse contexto, apontam-se três hipóteses gerais para esta pesquisa, que podem contribuir para o aprendizado dos estudantes. Mostraremos se elas foram alcançadas ou não ao longo do trabalho.

Hipótese 1: O uso do software matemático Geogebra proporciona a visualização de como as figuras planas se relacionam, além de podermos deduzir as fórmulas para o cálculo de áreas de figuras planas, o que contribui no entendimento de certos conceitos geométricos.

Hipótese 2: A proposta de problemas das vivências dos alunos juntamente com contextualização histórica sobre cálculos de áreas, de perímetros, reconhecimento de figuras planas ajudarão na compreensão dos seus conceitos.

Hipótese 3: A representação de figuras planas em utensílios de filé ajuda a entender a composição das mesmas, cálculos de áreas e perímetros por meio da contagem do número de quadrados que as compõem.

3.1. Fases da Engenharia Didática

Quando o professor de matemática leciona, um dos principais objetivos é formular situações que explorem o domínio do saber dos alunos. Concomitantemente, a metodologia da Engenharia Didática se configura em estruturar sequências didáticas de ensino e isso possibilita as interrelações entre alunos, professor e os conteúdos matemáticos.

De acordo com Artigue (1995),

> A Engenharia Didática, vista como metodologia de investigação, caracteriza-se em primeiro lugar por um esquema experimental baseado em realizações didáticas em classe, isto é, sobre a concepção, a realização a observação e a análise de sequências de ensino (Artigue, 1995, p.36).

Refletindo sobre as dificuldades que os alunos apresentam na compreensão do conteúdo sobre áreas de figuras planas devido a grande quantidade de conceitos e fórmulas, busca-se implementar uma sequência didática que propicie uma aprendizagem significativa contribuindo na compreensão do conceito de alguns tópicos da geometria plana.

Dessa forma, a primeira etapa da Engenharia Didática, a fase das análises prévias, é estruturada com a finalidade de identificar lacunas, falhas e erros de aprendizagem de determinado conhecimento, para propor intervenções que possam atenuar dificuldades, reparar faltas, corrigir erros e ampliar conhecimentos.

De forma geral, de acordo com Artigue (1995), as experimentações que acontecem em sala de aula estão embasadas em comparações estatísticas do rendimento do grupo avaliado, proporcionando informações mais concretas. Um dos fatores da escolha da Engenharia Didática como metodologia de pesquisa é a maneira como as informações são registradas e posteriormente validadas, ou seja, isso pode ser feito por meio de apenas um grupo. A partir daí, desenvolve-se uma sequência didática, na qual é realizada uma aplicação, coletadas as informações e posteriormente comparadas com as informações obtidas da análise prévia.

Nessa fase do desenvolvimento da Engenharia Didática, o professor interfere apenas quando é solicitado e o aluno deve ser o ator principal, ou seja, o que vale são as considerações e colocações dos alunos acerca das questões propostas na sequência de ensino. O professor deve ser considerado, essencialmente, do ponto de vista das suas relações com a devolução e a institucionalização (ARTIGUE, 1996).

Segundo Artigue:

> A análise a priori deve ser concebida como uma análise do controle do sentido, pois a teoria das situações didáticas que serve de referência à metodologia da engenharia didática teve desde sua origem a ambição de se constituir como uma teoria de controle das relações entre sentido e situações. [...] o objetivo da análise a priori é determinar no que as escolhas feitas permitem controlar os comportamentos dos alunos e o significado de cada um desses comportamentos. Para isso, ela vai se basear em hipóteses e são essas hipóteses cuja validação estará, em princípio, indiretamente em jogo, na confrontação entre a análise a priori e a análise a posteriori a ser operada na quarta fase (1988 apud MACHADO, 1999, p.205).

Corroborando com a autora, na fase final da pesquisa dever-se-á fazer um comparativo das informações, incluindo, nesse momento, a aplicação em sala de aula. É preciso salientar que essas análises são feitas de acordo com as hipóteses anteriores, possibilitando validar ou refutar as hipóteses pré-estabelecidas.

3.1.1 Análises Prévias

Para essa primeira fase da Engenharia Didática, analisaremos:

I. A análise epistemológica dos conteúdos curriculares da rede de ensino básico;

II. A análise das concepções dos alunos, das dificuldades e obstáculos que marcam a sua evolução;

I - Análise didática dos conteúdos curriculares da rede de ensino básico.

Nesta seção, analisaremos os três últimos livros da 3ª série do Ensino Médio adotados pela escola Estadual Padre Aurélio Góis, situada no município de Junqueiro – AL. Os livros que são direcionados para a educação são, de forma geral, "orientados" pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), que tem como principal objetivo contribuir no processo de ensino e aprendizagem.

A análise tem como principal objetivo verificar se os livros trazem a proposta defendida pelos teóricos da atualidade que é a contextualização de problemas práticos que os alunos vivenciam no seu cotidiano. Isso nos ajudará a entender de que forma está sendo construído os conceitos relacionados ao estudo da geometria plana, especialmente os que envolvem cálculos de áreas de figuras planas e afins. A verificação se faz no sentido de responder alguns questionamentos: Como é apresentado o conceito de geometria plana? Os livros apresentam uma conexão histórica que contribua para despertar o interesse do aluno? A linguagem que o livro traz é de fácil entendimento? O livro aborda alguma situação que motive o aluno a pesquisar sobre o conteúdo que está sendo apresentado?

É importante entender que o livro didático é uma ferramenta auxiliadora e não a principal para lecionar. De acordo com os PCN, o professor deve ser proativo, buscar sempre novos métodos que complementem o seu fazer enquanto docente.

Vale salientar que a análise do livro didático não tem como objetivo criticar como os autores trazem o conteúdo. Estamos na busca de entender como eles são expostos e se estão próximos da didática pedagógica defendida pelos estudiosos.

O pesquisador pode definir alguns critérios para a análise dos livros. Faremos o estudo dos critérios que seguem que nos possibilitará fazer algumas inferências.

Vamos analisar alguns livros didáticos por meio de alguns critérios, embasados no contexto geral dessa pesquisa.

1) Critério relacionado à historicidade do conteúdo analisado;
2) Critério relacionado à introdução do conceito do conteúdo;
3) Critério relacionado à linguagem abordada pelo livro na apresentação do conteúdo.

<u>Livro 1:</u> Matemática Completa (BONJORNO; CÂMARA; GIOVANNI, 2016)

O capítulo do livro sobre geometria plana é iniciado com imagens que apresentam a construção de um prédio e uma planta baixa. Na segunda figura é mostrada um esquema de divisões dos cômodos de uma casa. Entretanto, os autores não deixam claro qual relação está sendo estabelecida entre a introdução do capítulo e o desenvolver do mesmo. Como mostra a figura que segue:

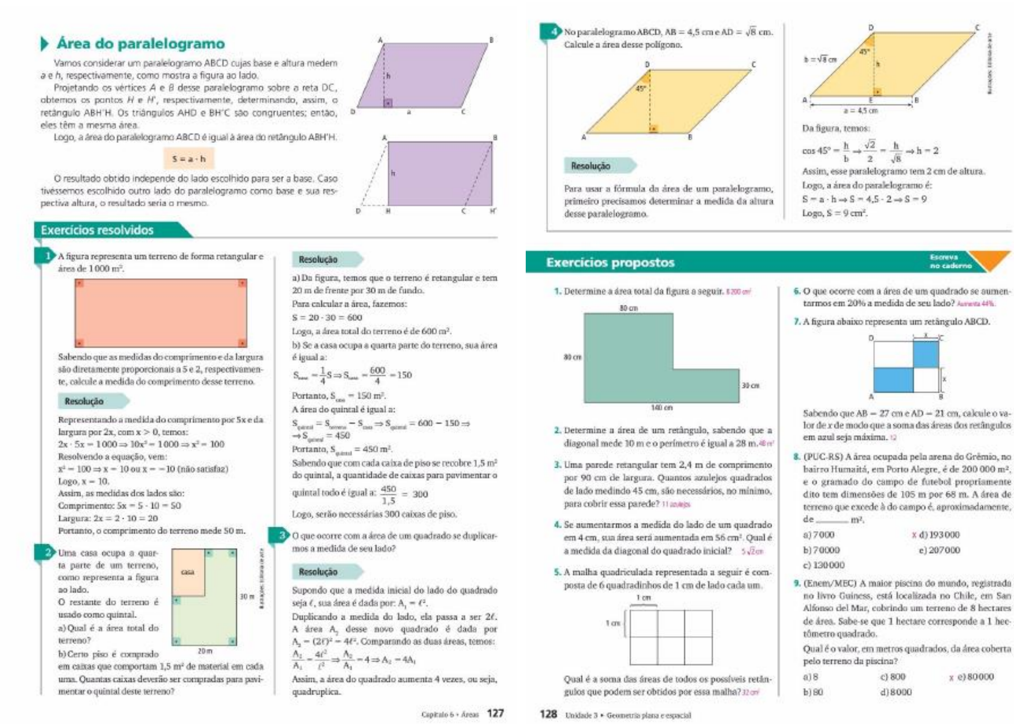
Figura 9 - Páginas de abertura sobre o estudo da Geometria Plana

Fonte: Livro Matemática Completa, 2016

O livro não faz uma correlação histórica, inicialmente, do conteúdo com a história da matemática, fazendo isso apenas quando já foi exposto boa parte do conteúdo, antes de ser iniciada a seção dos polígonos regulares.

As seções seguem com a apresentação de exercícios resolvidos ao fim da explanação de cada figura plana e suas definições e em seguida seguem com exercícios propostos que trazem questões de faculdades e de provas externas como o ENEM, por exemplo, como podemos observar na figura abaixo.

Figura 10 - Seção de exercícios resolvidos



Fonte: Livro Matemática Completa, 2016

Além disso, a questões são divididas em contextualizadas e não-contextualizadas, resumindo-se à aplicação de conceitos e fórmulas.

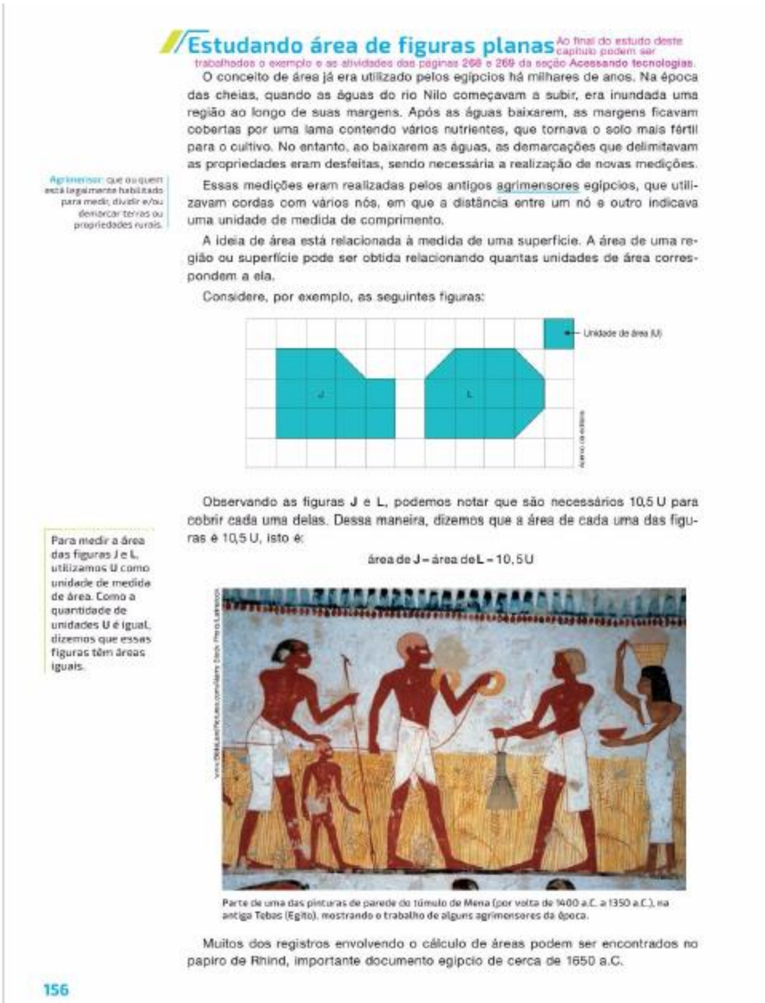
A linguagem abordada no livro é de fácil compreensão, visto que o conteúdo em si é autoexplicativo e com questões de fácil interpretação, mesmo aquelas que são contextualizadas.

Livro 2: Contato Matemática (GARCIA; SOUZA, 2019)

Inicia-se com uma contextualização histórica utilizando a história da matemática sobre o conteúdo, fazendo uma abordagem da aplicação de conhecimentos relacionados ao estudo da geometria plana.

O conceito de área é feito pela apresentação de figuras planas na malha quadriculada com o objetivo de desenvolver no aluno a ideia de composição de áreas dada pelo somatório de quadrados unitários, ou seja, de lado 1 u.c. (unidade de comprimento). Como se pode observar na figura que segue.

Figura 11 - Estudando as figuras planas



Estudando área de figuras planas

Ao final do estudo deste capítulo podem ser trabalhados o exemplo e as atividades das páginas 268 e 269 da seção **Acessando tecnologias**.

O conceito de área já era utilizado pelos egípcios há milhares de anos. Na época das cheias, quando as águas do rio Nilo começavam a subir, era inundada uma região ao longo de suas margens. Após as águas baixarem, as margens ficavam cobertas por uma lama contendo vários nutrientes, que tornava o solo mais fértil para o cultivo. No entanto, ao baixarem as águas, as demarcações que delimitavam as propriedades eram desfeitas, sendo necessária a realização de novas medições.

Agrimensor: que ou quem está legalmente habilitado para medir, dividir e/ou demarcar terras ou propriedades rurais.

Essas medições eram realizadas pelos antigos agrimensores egípcios, que utilizavam cordas com vários nós, em que a distância entre um nó e outro indicava uma unidade de medida de comprimento.

A ideia de área está relacionada à medida de uma superfície. A área de uma região ou superfície pode ser obtida relacionando quantas unidades de área correspondem a ela.

Considere, por exemplo, as seguintes figuras:

Observando as figuras **J** e **L**, podemos notar que são necessários 10,5 U para cobrir cada uma delas. Dessa maneira, dizemos que a área de cada uma das figuras é 10,5 U, isto é:

área de **J** = área de **L** = 10,5 U

Para medir a área das figuras J e L, utilizamos U como unidade de medida de área. Como a quantidade de unidades U é igual, dizemos que essas figuras têm áreas iguais.

Parte de uma das pinturas de parede do túmulo de Mena (por volta de 1400 a.C. a 1350 a.C.), na antiga Tebas (Egito), mostrando o trabalho de alguns agrimensores da época.

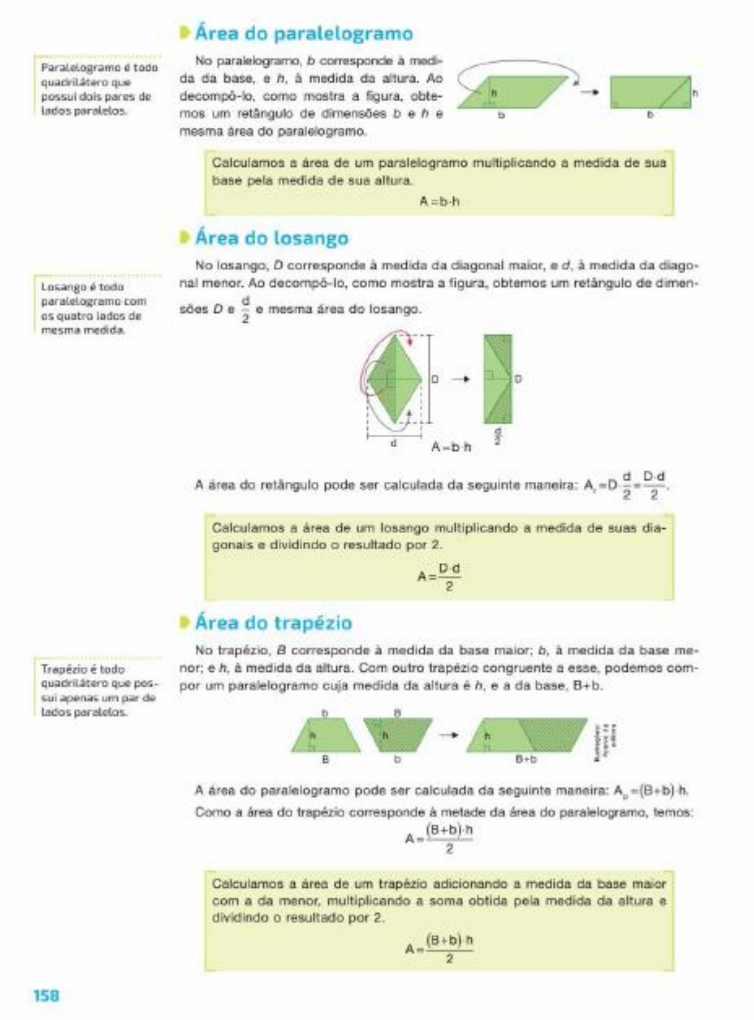
Muitos dos registros envolvendo o cálculo de áreas podem ser encontrados no papiro de Rhind, importante documento egípcio de cerca de 1650 a.C.

156

Fonte: livro Contato Matemática, 2019

Logo após, os autores apresentam uma sequência de construções de figuras planas que dão “origem” a outras figuras planas por meio de rotações e/ou translações de partes delas, como se fosse um quebra-cabeças, acompanhadas das definições. Por exemplo, um quadrado pode ser bipartido pela sua diagonal em dois triângulos retângulos e isósceles. Um paralelogramo pode ser decomposto um retângulo e dois triângulos congruentes e o losango pode ser “montado” utilizando quatro triângulos retângulos congruentes, ou seja, é dessa forma que os autores trazem a ideia de composição de figuras planas. Veja:

Figura 12 - Composição de figuras planas



Área do paralelogramo

Paralelogramo é todo quadrilátero que possui dois pares de lados paralelos.

No paralelogramo, b corresponde à medida da base, e h, à medida da altura. Ao decompô-lo, como mostra a figura, obtemos um retângulo de dimensões b e h e mesma área do paralelogramo.

Calculamos a área de um paralelogramo multiplicando a medida de sua base pela medida de sua altura.

$$A = b \cdot h$$

Área do losango

Losango é todo paralelogramo com os quatro lados de mesma medida.

No losango, D corresponde à medida da diagonal maior, e d, à medida da diagonal menor. Ao decompô-lo, como mostra a figura, obtemos um retângulo de dimensões D e $\frac{d}{2}$ e mesma área do losango.

$$A = b \cdot h$$

A área do retângulo pode ser calculada da seguinte maneira: $A_r = D \cdot \frac{d}{2} = \frac{D \cdot d}{2}$.

Calculamos a área de um losango multiplicando a medida de suas diagonais e dividindo o resultado por 2.

$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

Área do trapézio

Trapézio é todo quadrilátero que possui apenas um par de lados paralelos.

No trapézio, B corresponde à medida da base maior; b, à medida da base menor; e h, à medida da altura. Com outro trapézio congruente a esse, podemos compor um paralelogramo cuja medida da altura é h, e a da base, $B+b$.

A área do paralelogramo pode ser calculada da seguinte maneira: $A_p = (B+b) \cdot h$.

Como a área do trapézio corresponde à metade da área do paralelogramo, temos:

$$A = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$$

Calculamos a área de um trapézio adicionando a medida da base maior com a da menor, multiplicando a soma obtida pela medida da altura e dividindo o resultado por 2.

$$A = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$$

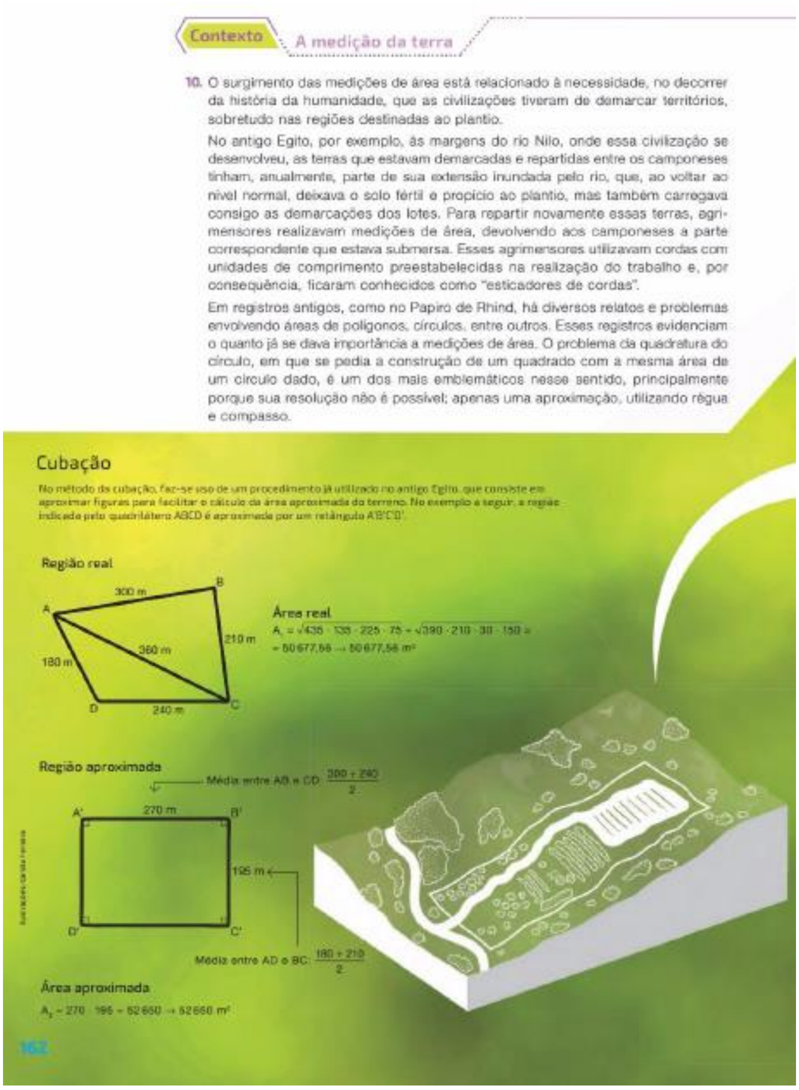
158

Fonte: livro Contato Matemática, 2019

Em seguida são apresentados alguns exemplos resolvidos de cálculos de áreas e perímetros com o objetivo de fixar as ideias anteriores por meio de uma pequena revisão. Os exercícios propostos apresentam uma mistura de questões mais diretas, sem contextualizações, e alguns exercícios contextualizados.

Próximo ao final do capítulo, os autores apresentam uma curiosidade contextualizando o conteúdo abordado nas seções anteriores por meio de um problema que relacione a história da matemática, reforçando a importância das contribuições das civilizações antigas para a matemática moderna. Observe na figura abaixo.

Figura 13 - Cubação de terreno realizado pelos egípcios



Contexto A medição da terra

10. O surgimento das medições de área está relacionado à necessidade, no decorrer da história da humanidade, que as civilizações tiveram de demarcar territórios, sobretudo nas regiões destinadas ao plantio.

No antigo Egito, por exemplo, às margens do rio Nilo, onde essa civilização se desenvolveu, as terras que estavam demarcadas e repartidas entre os camponeses tinham, anualmente, parte de sua extensão inundada pelo rio, que, ao voltar ao nível normal, deixava o solo fértil e propício ao plantio, mas também carregava consigo as demarcações dos lotes. Para repartir novamente essas terras, agrimensores realizavam medições de área, devolvendo aos camponeses a parte correspondente que estava submersa. Esses agrimensores utilizavam cordas com unidades de comprimento preestabelecidas na realização do trabalho e, por consequência, ficaram conhecidos como "esticadores de cordas".

Em registros antigos, como no Papiro de Rhind, há diversos relatos e problemas envolvendo áreas de polígonos, círculos, entre outros. Esses registros evidenciam o quanto já se dava importância a medições de área. O problema da quadratura do círculo, em que se pedia a construção de um quadrado com a mesma área de um círculo dado, é um dos mais emblemáticos nesse sentido, principalmente porque sua resolução não é possível; apenas uma aproximação, utilizando régua e compasso.

Cubação

No método da cubação, faz-se uso de um procedimento já utilizado no antigo Egito, que consiste em aproximar figuras para facilitar o cálculo da área aproximada do terreno. No exemplo a seguir, a região indicada pelo quadrilátero ABCD é aproximada por um retângulo A'B'C'D'.

Fonte: livro Contato Matemática, 2019

A linguagem que o conteúdo é abordado, pode-se dizer que é bastante clara e objetiva, à medida que as ideias e definições matemáticas são apresentadas, os autores vão esclarecendo por meio de exemplos e justificativas.

<u>Livro 3</u>: Prisma (BONJORNO; CÂMARA; GIOVANNI, 2023)

O livro inicia com a apresentação de projetos realizados por ONG's relacionados à construção civil de casas para pessoas em situação de vulnerabilidade social, fazendo menção aos estudos de cálculos de áreas e perímetros de figuras planas que podem ser determinadas com exatidão ou aproximação, evitando desperdícios e gastos desnecessários. Como se pode observar na imagem abaixo.

Figura 14 - Abertura do conteúdo sobre áreas de figuras planas do livro Prisma


CAPÍTULO 1

Áreas

A BNCC NESTE CAPÍTULO:

- Competências gerais da BNCC: 1, 4, 7, 9 e 10
- Competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias:
  - Competência específica 2: EM13MAT201
  - Competência específica 3: EM13MAT307
  - Competência específica 5: EM13MAT505 e EM13MAT506
- Competência específica da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias:
  - Competência específica 1

O texto na íntegra das competências gerais, competências específicas e habilidades da BNCC citadas encontra-se ao final do livro.

No Brasil, assim como em outros países do mundo, o acesso à moradia ainda é um desafio para muitas pessoas. Inúmeras famílias não possuem condições dignas de habitação e, muitas vezes, com poucos recursos disponíveis, acabam vivendo em locais inadequados. As organizações não governamentais (ONGs) são entidades sem fins lucrativos que, entre outros propósitos, auxiliam na captação de verbas e na distribuição do orçamento para auxiliar as camadas menos favorecidas da população.

Algumas dessas ONGs promovem campanhas específicas voltadas para esse fim e realizam projetos para a construção de moradias populares e para a reconstrução de lares de pessoas que sofreram com alguma catástrofe natural, como enchentes, terremotos, furacões e *tsunamis*.

Muitos conjuntos habitacionais concebidos por meio de programas sociais, governamentais ou não, seguem uma série de especificações que ajudam a padronizar as construções. Entre as especificações, encontram-se, por exemplo, a área útil da residência (espaço interno sem considerar a área das paredes) e as dimensões de tanques, pias, corredores e cômodos. Essas medidas são muito importantes para garantir conforto e acessibilidade aos moradores.

Hospital de campanha montado no Estádio do Pacaembu, em São Paulo (SP) para tratamento de pacientes com covid-19. Fotografia de 2020.

Introdução

Na abertura deste Capítulo, vimos como algumas ONGs auxiliam na construção de moradias para famílias sem recursos. Nesse processo de construção ou na reforma de um imóvel, muitas atividades envolvem medições e cálculos de áreas e perímetros. Neste Capítulo, veremos como calcular a área de algumas figuras planas.

As áreas que precisamos determinar no dia a dia nem sempre são de polígonos perfeitos, mas saber como realizar esse cálculo nos ajuda a fazer uma boa aproximação de áreas que não têm uma forma específica.

Área de polígonos

O Estádio Municipal Paulo Machado de Carvalho, conhecido como Pacaembu, em São Paulo, teve seu campo de futebol, de 105 m de comprimento por 68 m de largura, ocupado por um hospital de campanha durante 84 dias, em 2020, para o tratamento de pacientes com covid-19.

Para determinar a área do hospital de campanha, utilizando essas informações, podemos realizar uma aproximação, calculando a área do campo de futebol. Para isso, precisamos retomar o cálculo da área de um retângulo visto no Ensino Fundamental. A seguir, veremos como determinar a área desse e de outros polígonos.

PENSE E RESPONDA

Calcule a área do campo de futebol do Estádio do Pacaembu e determine a porcentagem ocupada pelo hospital de campanha montado em 2020, sabendo que a área do hospital era de 6 300 m².

7 140 m²; aproximadamente 88%

Área do retângulo

A área S de um retângulo de lados de medidas b e h, com b e h reais positivos, é dada pelo produto da medida da base b pela medida da altura h.

h

b

$S = b \cdot h$

PARA ASSISTIR

ÁREA de figuras planas: qualquer área com uma única fórmula: "porque sim" não é resposta. 2020. Vídeo (20min22s). Publicado pelo canal A Matemaníaca por Julia Jaccoud. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=I0z1uX0_sMA. Acesso em: 28 jul. 2020.

Esse vídeo apresenta, de maneira clara e sucinta, como obter as fórmulas de áreas de figuras planas.

Fonte: Livro Prisma, 2023

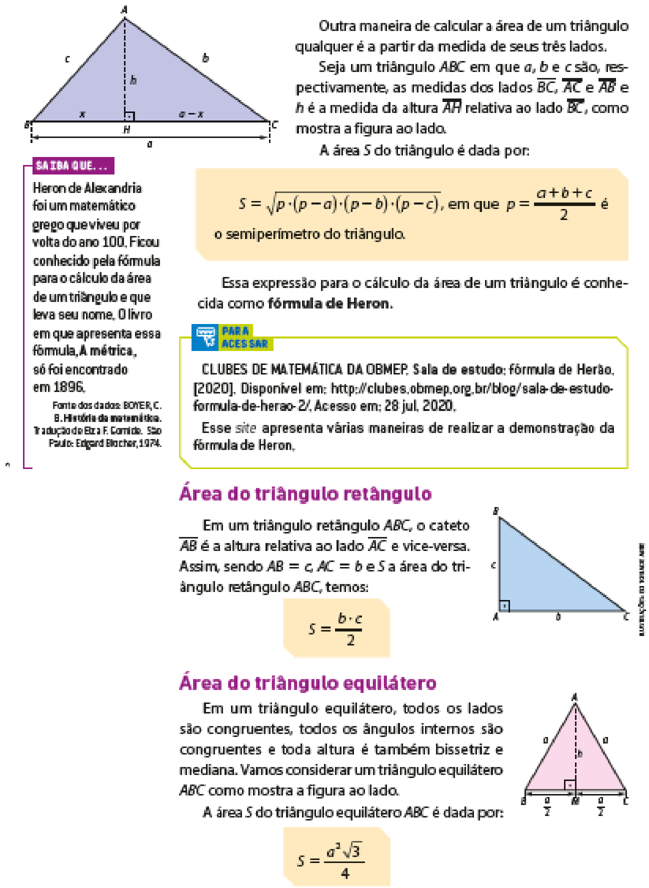
O texto também traz um exemplo abaixo com o objetivo de instigar o aluno no estudo de áreas de figuras planas:

“O Estádio Municipal Paulo Machado de Carvalho, conhecido como Pacaembu, em São Paulo, teve seu campo de futebol, de 105 m de comprimento por 68 m de largura, ocupado por um hospital de campanha durante 84 dias, em 2020, para o tratamento de pacientes com covid 19. Para determinar a área do hospital de campanha, utilizando essas informações, podemos realizar uma aproximação, calculando a área do campo de futebol”.

Uma relação do conteúdo com a história da matemática é apresentada após o encerramento da seção, percebendo-se que há um distanciamento histórico em tópicos da história da matemática e a definição do conteúdo.

O livro também traz pequenas curiosidades matemáticas, sejam de fórmulas ou de matemáticos da antiguidade, nas laterais esquerdas das páginas, percebendo-se a importância de uma relação histórica com a matemática do passado, como mostra a figura que segue.

Figura 15 - Conhecimento adicional mostrado ao lado da página



Outra maneira de calcular a área de um triângulo qualquer é a partir da medida de seus três lados.

Seja um triângulo ABC em que a, b e c são, respectivamente, as medidas dos lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ e h é a medida da altura $\overline{AH}$ relativa ao lado $\overline{BC}$, como mostra a figura ao lado.

A área S do triângulo é dada por:

$S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$, em que $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ é o semiperímetro do triângulo.

Essa expressão para o cálculo da área de um triângulo é conhecida como **fórmula de Heron**.

SAIBA QUE...

Heron de Alexandria foi um matemático grego que viveu por volta do ano 100. Ficou conhecido pela fórmula para o cálculo da área de um triângulo e que leva seu nome. O livro em que apresenta essa fórmula, A métrica, só foi encontrado em 1896.

Fonte dos dados: BOYER, C. B. História da matemática. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

PARA ACESSAR

CLUBES DE MATEMÁTICA DA OBMEP. Sala de estudo: fórmula de Herão. [2020]. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-estudo-formula-de-herao-2/. Acesso em: 28 jul. 2020.

Esse *site* apresenta várias maneiras de realizar a demonstração da fórmula de Heron.

Área do triângulo retângulo

Em um triângulo retângulo ABC, o cateto $\overline{AB}$ é a altura relativa ao lado $\overline{AC}$ e vice-versa. Assim, sendo $AB = c$, $AC = b$ e S a área do triângulo retângulo ABC, temos:

$$S = \frac{b \cdot c}{2}$$

Área do triângulo equilátero

Em um triângulo equilátero, todos os lados são congruentes, todos os ângulos internos são congruentes e toda altura é também bissetriz e mediana. Vamos considerar um triângulo equilátero ABC como mostra a figura ao lado.

A área S do triângulo equilátero ABC é dada por:

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Fonte: Livro Prisma, 2023

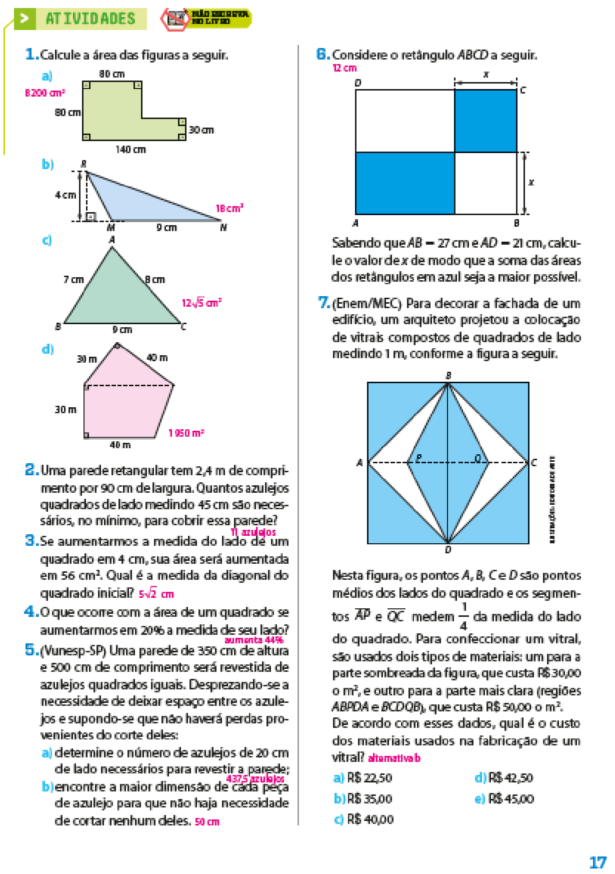
A sequência didática é baseada, basicamente, na exposição objetiva das figuras planas e definições, seguidos de exemplos resolvidos e indicação de vídeo aulas com o objetivo de fixação das ideias e esclarecimento de dúvidas.

Os problemas são de fácil interpretação consistindo em uma mescla de questões contextualizadas e não-contextualizadas. Os alunos são desafiados entre uma seção e outra, devendo mostrar uma solução alternativa para uma determinada questão, o que favorece o desenvolvimento de novas estratégias de resolução de problemas.

A linguagem abordada pelo livro é de fácil interpretação, trazendo questões que são vistas no cotidiano do aluno, o que proporciona o maior interesse em suas resoluções. Tanto as fórmulas matemáticas, assim como as definições são explicadas e exemplificados ao longo do texto, facilitando a absorção das principais ideias que desencadeiam o processo de ensino e aprendizagem.

O que foi descrito nos dois últimos parágrafos podem ser ilustrados pela seguinte figura:

Figura 16 - Questões contextualizadas e não – contextualizadas



ATIVIDADES

1. Calcule a área das figuras a seguir.

a) 80 cm; 80 cm; 30 cm; 140 cm — 8 200 cm²

b) R; 4 cm; M; 9 cm; N — 18 cm²

c) A; 7 cm; 8 cm; B; 9 cm; C — $12\sqrt{5}$ cm²

d) 30 m; 40 m; 30 m; 40 m — 1 950 m²

2. Uma parede retangular tem 2,4 m de comprimento por 90 cm de largura. Quantos azulejos quadrados de lado medindo 45 cm são necessários, no mínimo, para cobrir essa parede? 11 azulejos

3. Se aumentarmos a medida do lado de um quadrado em 4 cm, sua área será aumentada em 56 cm². Qual é a medida da diagonal do quadrado inicial? $5\sqrt{2}$ cm

4. O que ocorre com a área de um quadrado se aumentarmos em 20% a medida de seu lado? aumenta 44%

5. (Vunesp-SP) Uma parede de 350 cm de altura e 500 cm de comprimento será revestida de azulejos quadrados iguais. Desprezando-se a necessidade de deixar espaço entre os azulejos e supondo-se que não haverá perdas provenientes do corte deles:

a) determine o número de azulejos de 20 cm de lado necessários para revestir a parede; 437,5 azulejos

b) encontre a maior dimensão de cada peça de azulejo para que não haja necessidade de cortar nenhum deles. 50 cm

6. Considere o retângulo *ABCD* a seguir. 12 cm

D; x; C; x; A; B

Sabendo que $AB = 27$ cm e $AD = 21$ cm, calcule o valor de x de modo que a soma das áreas dos retângulos em azul seja a maior possível.

7. (Enem/MEC) Para decorar a fachada de um edifício, um arquiteto projetou a colocação de vitrais compostos de quadrados de lado medindo 1 m, conforme a figura a seguir.

B; A; P; Q; C; D

Nesta figura, os pontos *A*, *B*, *C* e *D* são pontos médios dos lados do quadrado e os segmentos $\overline{AP}$ e $\overline{QC}$ medem $\frac{1}{4}$ da medida do lado do quadrado. Para confeccionar um vitral, são usados dois tipos de materiais: um para a parte sombreada da figura, que custa R$ 30,00 o m², e outro para a parte mais clara (regiões *ABPDA* e *BCDQB*), que custa R$ 50,00 o m². De acordo com esses dados, qual é o custo dos materiais usados na fabricação de um vitral? alternativa b

a) R$ 22,50

b) R$ 35,00

c) R$ 40,00

d) R$ 42,50

e) R$ 45,00

17

Fonte: Livro Prisma, 2023

II - A análise das concepções dos alunos, das dificuldades e obstáculos que marcam a sua evolução.

Para que fosse pensado em uma estratégia que contribuísse no aprendizado de alguns conceitos importantes no estudo de geometria plana foi preciso analisar as concepções dos alunos por meio de um teste diagnóstico, com o objetivo de verificar os conhecimentos prévios sobre o conteúdo. O teste foi realizado com 39 alunos, o que possibilitou analisar as ideias errôneas e obstáculos enfrentados por eles, para que pudessem ser trabalhados na Sequência Didática.

A atividade diagnóstica foi realizada durante uma aula da disciplina de Oficina de Matemática, que tem por objetivo reforçar os conhecimentos dos alunos, trabalhando conteúdos de séries anteriores. A aplicação foi realizada com a presença do professor-pesquisador e durou cerca de uma hora. É importante salientar que os alunos não tiveram ajuda em momento algum do professor, visto que o objetivo era verificar os que eles detinham de conhecimento naquele momento. As questões foram abertas, mesclando em perguntas mais diretas e outras contextualizadas.

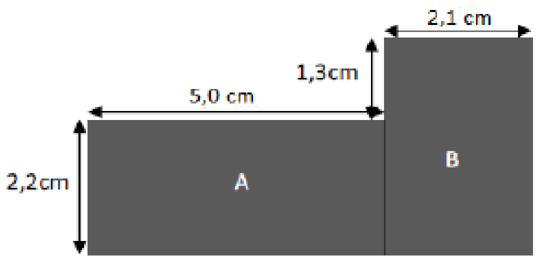
Atividade Diagnóstica

A atividade diagnóstica composta por 8 questões foi aplicada no dia 26 de outubro de 2023 e teve tempo máximo de realização uma hora. Tinha como objetivo analisar quais conhecimentos os 39 alunos da 3ª série e turma do matutino M04, da Escola Estadual Padre Aurélio Góis, situada no município de Junqueiro – AL, detinham até aquele momento.

Segue a atividade aplicada em sala.

1. A figura abaixo representa o recorte de duas toalhas de mesa

Figura 17 - área de toalhas

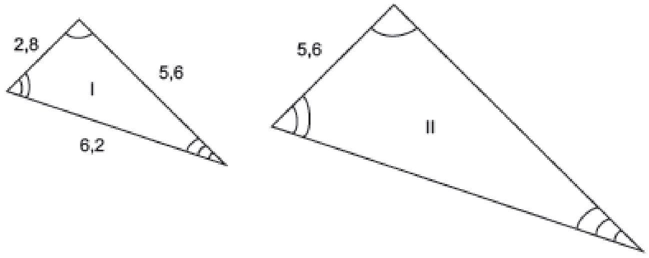


Fonte: O autor, 2023

Determine a sua área total.

2. Os triângulos desenhados abaixo são semelhantes.

Figura 18 - Triângulos semelhantes

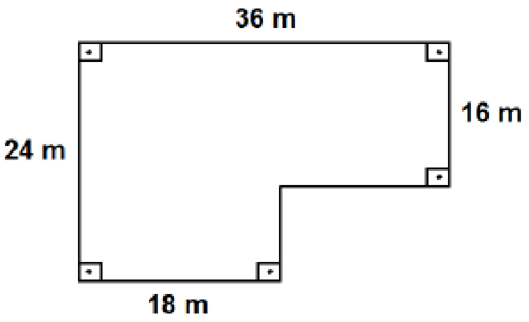


Fonte: O Autor, 2023

Determine a medida do perímetro do triângulo II.

3. Uma praça em forma de L tem a forma da figura abaixo.

Figura 19 - Praça em L

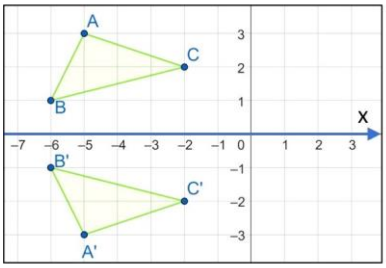


Fonte: O Autor, 2023

De acordo com as medidas indicadas na figura, determine a área da praça.

4. Na figura abaixo está representada qual tipo de simetria?

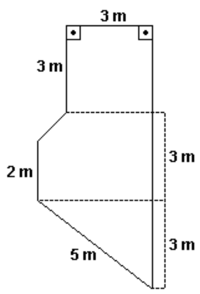
Figura 20 - Simetria de Triângulos



Fonte: O Autor, 2023

5. Dada as dimensões de uma sala de uma casa representada pela figura abaixo:

Figura 21 - Dimensões da sala de uma casa



Fonte: O Autor, 2023

Qual a área total da sala?

6. A área A de um triângulo pode ser calculada pela fórmula:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

onde a, b, c são os comprimentos dos lados e p é o semi-perímetro. Calcule a área do triângulo cujos lados medem 21, 17 e 10 centímetros.

7. A base de um retângulo é o dobro de sua altura. Determine suas dimensões, em cm, sendo 72 cm^2 sua área.
8. As bases de um trapézio isósceles medem respectivamente 4cm e 12cm. Determinar a área desse trapézio sabendo que o perímetro do trapézio é igual a 26 cm.

Resultados da Atividade Diagnóstica

Apresentaremos resumidamente os dados coletados da resolução das questões da atividade diagnóstica por meio do quadro abaixo:

Quadro 6 - Resultados da atividade diagnóstica

QUESTÕES	ACERTOS	ERROS	NÃO RESOLVEU
1ª	46,4%	30,5%	23,1%
2ª	80,1%	15,3%	4,6%
3ª	40,3%	38,8%	20,9%
4ª	98,2%	1,8%	0,0%
5ª	32,6%	48,9%	18,5%
6ª	55,8%	34,8%	9,4%
7ª	40,8%	58,1%	1,1%
8ª	25,7%	68,9%	5,4%

Fonte: O Autor, 2023

Diante dos dados coletados podemos fazer algumas observações e tirar algumas conclusões.

Na primeira questão os alunos sabiam que para obter a área total da figura era necessário somar as áreas dos dois retângulos. Entretanto, o obstáculo deparado pela maioria deles foi identificar que a medida da altura do retângulo B era complementada pelo valor da altura do retângulo A.

No segundo problema, a maior parte da turma conseguiu resolver sem nenhum problema. Uma minoria não obteve êxito na solução devido à falta de atenção nas proporcionalidades dos lados dos triângulos.

Na questão seguinte, muito semelhante a questão um, o problema identificado foi o mesmo. Nota-se que a turma tem muita dificuldade na interpretação de dados implícitos.

Na questão quatro quase totalidade da turma conseguiu resolver a questão sem problemas.

Na questão cinco, um pouco mais complexa, tinha como critério calcular a área de cada figura separadamente. Entretanto, seria necessário observar que a figura central deveria ser dividida de forma que ela fosse decomposta em um retângulo de altura 2 m e base igual ao lado do triângulo adjacente a ele e a segunda figura um trapézio retângulo. Por esse motivo, mais da metade da turma não conseguiu resolver o problema.

Com relação à questão seis, os alunos tiveram dificuldades em lembrar o que era semiperímetro para efetuar o cálculo da área do triângulo pela fórmula de Heron. Os erros foram a maioria devido, provavelmente, ao desuso da fórmula.

Já na questão sete a maior parte da turma não conseguiu resolver problema por se tratar de uma questão que necessitava de conhecimentos de equações com uma variável. Os alunos conheciam a fórmula para calcular a área do retângulo, mas se depararam com o problema algébrico.

Na questão oito os alunos se depararam com o obstáculo de representar o problema por meio de uma figura. Isso contribuiu com a maior parte dos erros. Alguns outros, não conseguiam lembrar da fórmula para calcular a área do trapézio, aumentando ainda mais a quantidade de erros.

Pode-se concluir que os alunos chegaram na 3ª série com muitos problemas que vão desde a interpretação de problemas, assim como representação de figuras que são essenciais no auxílio do desenvolvimento dos cálculos.

Dessa forma, a proposta desse trabalho é construir uma Sequência Didática no contexto da Engenharia Didática que seja capaz de superar os obstáculos deparados pelos alunos, desmistificando seus anseios e angústias, além de estabelecer uma boa compreensão do conceito de áreas de figuras planas.

4 UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Nesta seção apresentaremos uma proposta de Sequência Didática com a finalidade de desenvolver o conceito de áreas de figuras planas que será formulada através das informações coletadas das análises dos livros didáticos e atividade diagnóstica através da qual pôde-se verificar quais foram as principais dificuldades e obstáculos enfrentados pelos alunos. A atividade diagnóstica foi elaborada com base nos livros analisados anteriormente, trazendo algumas questões contextualizadas, outras que apenas exigiam o conhecimento de fórmulas e algumas a representação do problema por meio de uma figura com a finalidade de facilitar a compreensão do enunciado. Salienta-se que algumas das atividades da sequência didática estão voltadas para uma aplicação em sala de aula por meio dos conhecimentos matemáticos básicos que são utilizados no artesanato do filé.

Destrincharemos a Sequência Didática em algumas subseções nas quais serão apresentadas uma análise a priori seguida de uma análise a posteriori. É importante reforçar que na primeira é feita previsões que podem ser refutadas ou confirmadas na segunda etapa, mediante a situação formulada, visto que, na Engenharia Didática a validação é interna, isto é, está baseada no confronto das informações entre a fase a priori e a fase a posteriori de um determinado grupo estudado.

4.1 Analisando a construção do conceito de áreas de figuras planas no contexto da Engenharia Didática utilizando o Geogebra

i) Análise a priori

Espera-se mediante à aplicação da referida atividade que seja possível:

- Compreender e visualizar propriedades geométricas de figuras, facilitando a compreensão dos conceitos matemáticos;
- Entender o conceito de área pela composição de quadrados unitários;

- Exploração dinâmica: manipular parâmetros para observar como as mudanças afetam as figuras, promovendo uma compreensão mais profunda das relações matemáticas;
- Facilitar a instrução matemática de forma interativa, permitindo que estudantes explorem conceitos e construam intuições;
- Aplicar a decomposição de figuras planas;
- Construir figuras planas pela composição de outras;
- Deduzir fórmulas de áreas de figuras planas.

Para o início da sequência didática, foi proposta uma atividade em trio no laboratório de informática que durou cerca de três encontros de uma hora.

Foi apresentado o software Geogebra para a turma, assim como a sua interface e suas principais ferramentas. Além disso, foi destinado um tempo para que os trios se afeiçoassem ao software, visto que ele é de fácil manuseio.

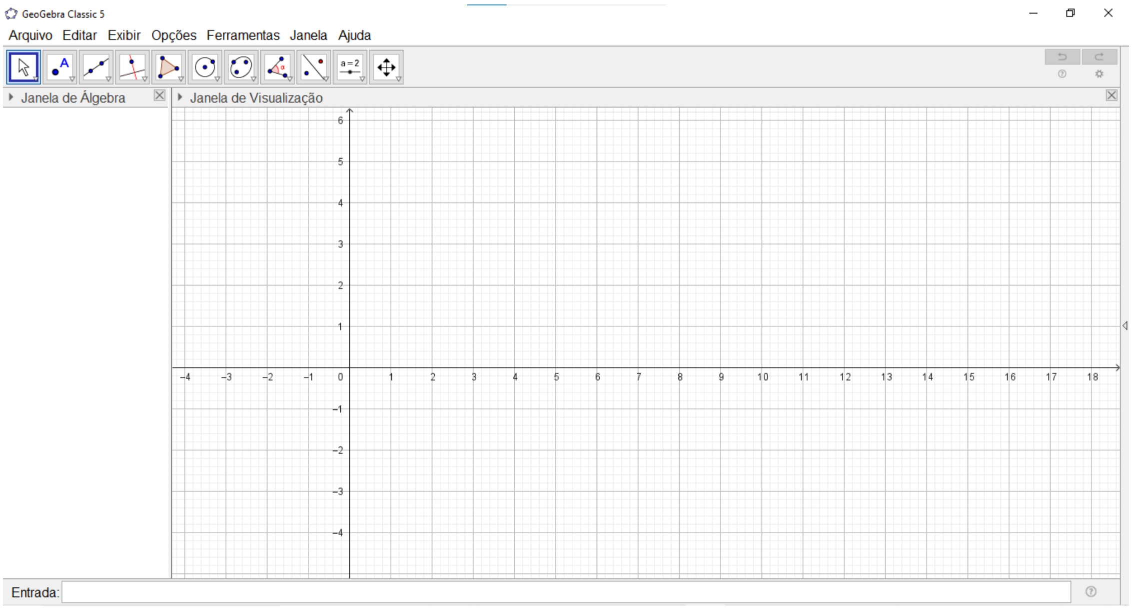
A primeira atividade da Sequência Didática consistiu em solicitar a construção de figuras planas no Geogebra. A interface inicial do software pode apresentar diversas configurações. Para um melhor entendimento e facilidade nas construções, decidiu-se trabalhar com uma interface que é composta por uma malha quadriculada de $1\ cm^2$ que contém os eixos coordenados.

Atividade 1 - Construções e deduções de fórmulas de figuras planas com o auxílio do Geogebra

A aplicação de ferramentas tecnológicas aliadas à exposição de conteúdo é de grande importância, visto que facilita o processo de entendimento do aluno.

Para tentarmos contemplar a hipótese geral 1, faremos uso do software matemático Geogebra, que consiste em um programa computacional de fácil manuseio e intuição. Segue abaixo uma imagem da interface do Geogebra.

Figura 22 - interface do Geogebra



Fonte: O Autor, 2023

Acredita-se que um instrumento que traz um ambiente mais tecnológico, culmina em uma maior participação dos envolvidos, onde o processo de ensino-aprendizagem pode ser facilitado. Além disso, o Geogebra é um software de fácil manuseio, favorecendo por despertar a curiosidade e criatividade dos alunos.

No primeiro encontro com a turma no laboratório de informática, o professor – pesquisador fez a apresentação da interface e comandos do Geogebra. Logo em seguida, fez algumas construções geométricas simples, mostrando para os alunos como o software é dinâmico e intuitivo.

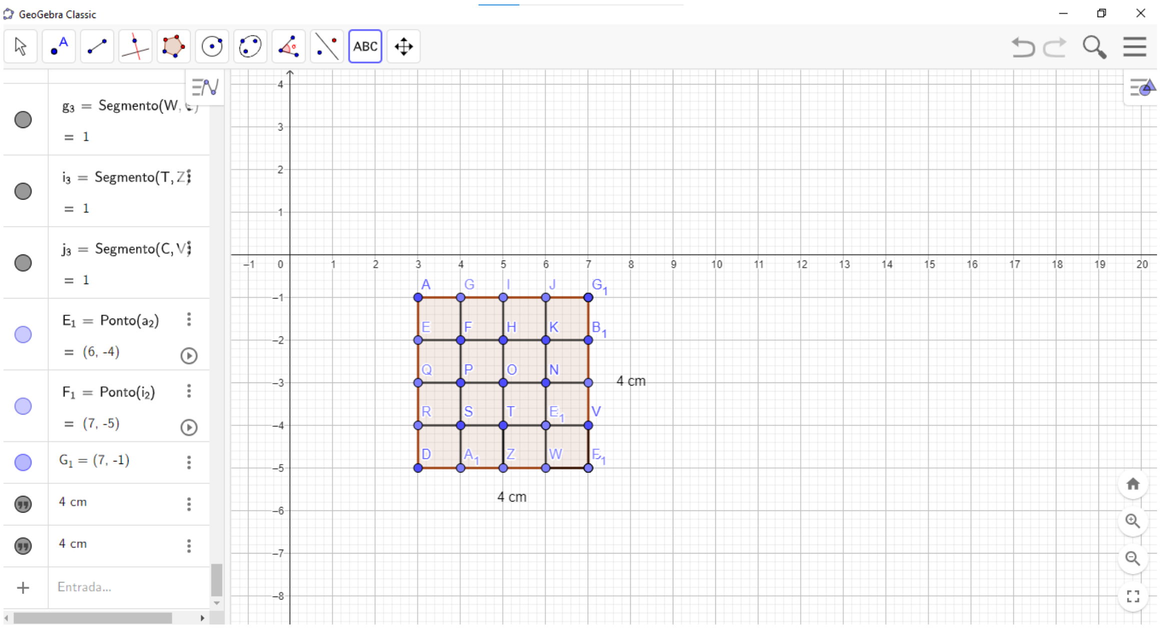
Nos 3 encontros seguintes, a turma de 39 alunos foi dividida em trios. Em seguida, foi solicitado que construíssem algumas figuras planas.

Para a primeira proposta de atividade, foi destinado um total de 3 horas/aula. A atividade em grupo consistiu em fazer a construção de algumas figuras planas por meio do Geogebra. Devido a quantidade de computadores disponibilizados pela escola, o trabalho foi realizado em equipes de três estudantes.

Quadrado

Com o auxílio da ferramenta polígono, todos os trios conseguiram construir uma figura como a que está representada na figura abaixo.

Figura 23 - Dedução da figura plana quadrado por um dos trios de alunos

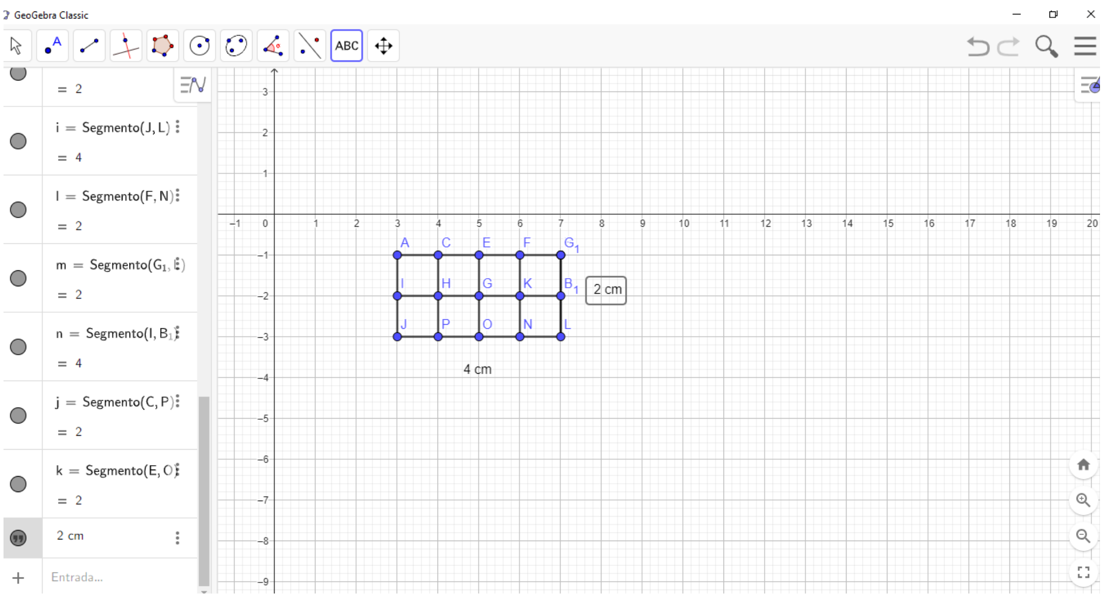


Fonte: O Autor, 2023

Retângulo

A segunda figura plana solicitada que fosse construída foi o retângulo. A construção foi análoga a anterior.

Figura 24 - Dedução da figura plana retângulo por um dos trios de alunos

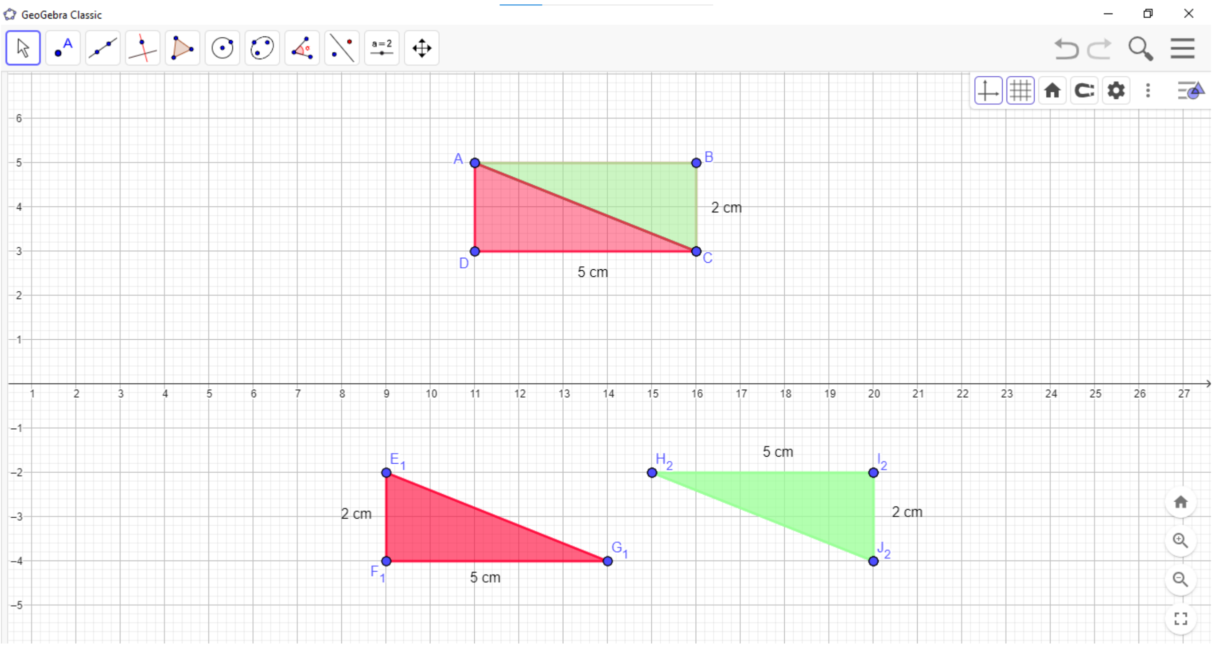


Fonte: O Autor, 2023

Triângulo

Sob orientação do professor – pesquisador, foi sugerido que usassem a construção anterior para facilitar a dedução da fórmula da área do triângulo.

Figura 25 - Dedução da figura plana triângulo por um dos trios de alunos

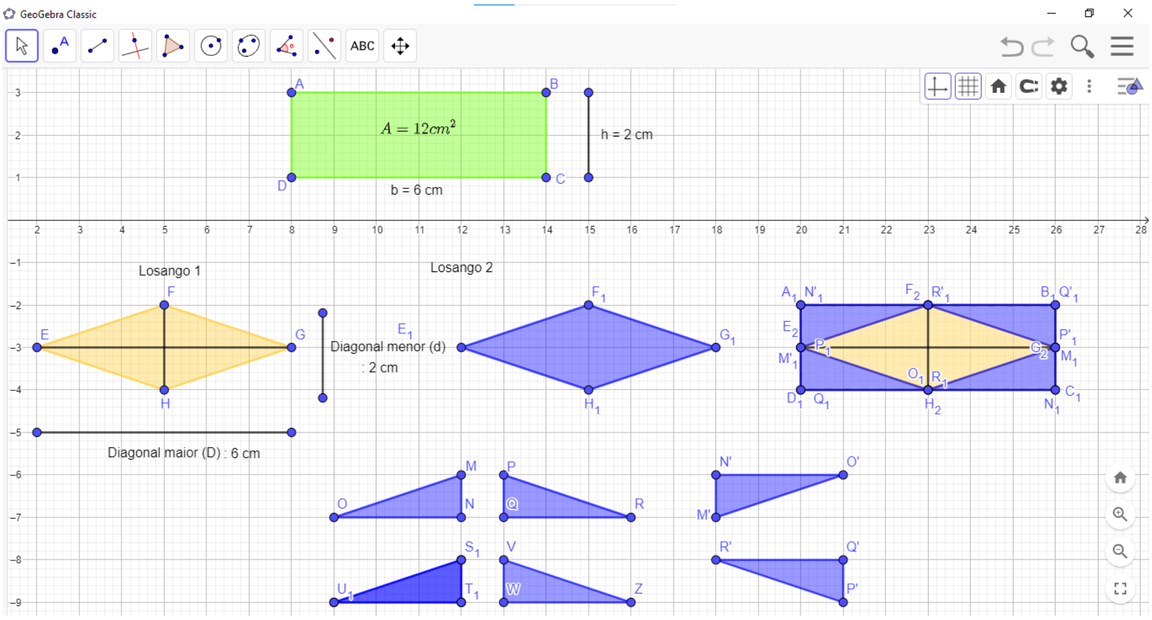


Fonte: O Autor, 2023

Losango

Para a construção seguinte, foi preciso o professor - pesquisador relembrar qual seria a figura plana losango e foi instruído que usassem a construção anterior.

Figura 26 - Dedução da figura plana losango por um dos trios de alunos

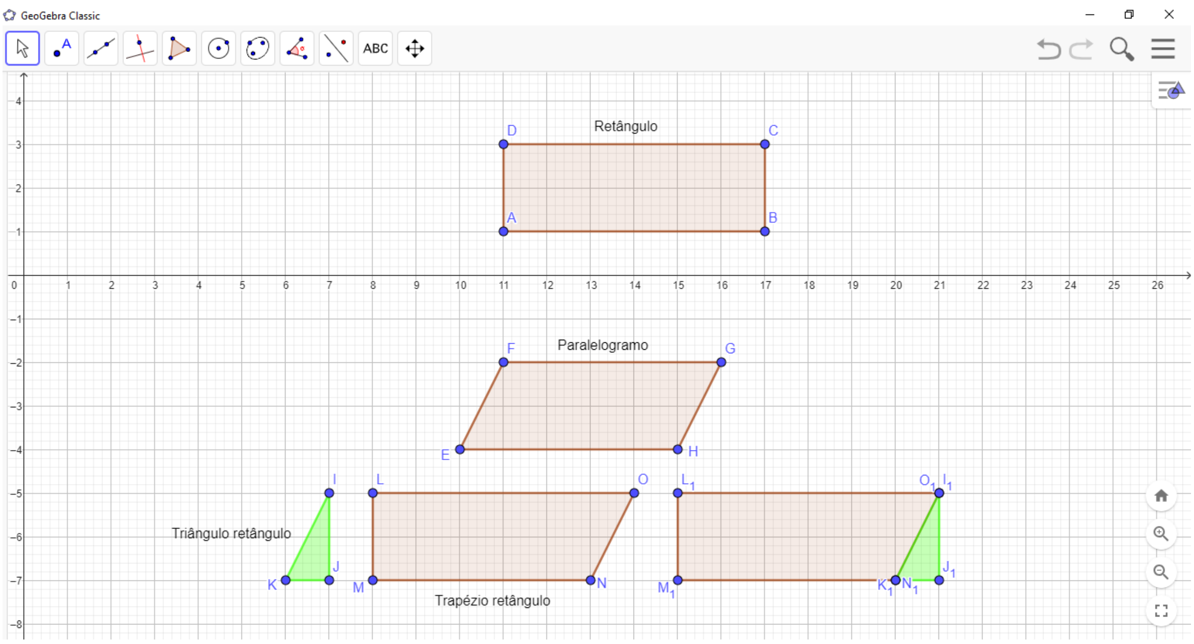


Fonte: O Autor, 2023

Paralelogramo

Para a construção seguinte, foi preciso o professor - pesquisador relembrar qual seria a figura plana paralelogramo e foi instruído que usassem a construção da área do retângulo.

Figura 27 - Dedução da figura plana paralelogramo por um dos trios de alunos

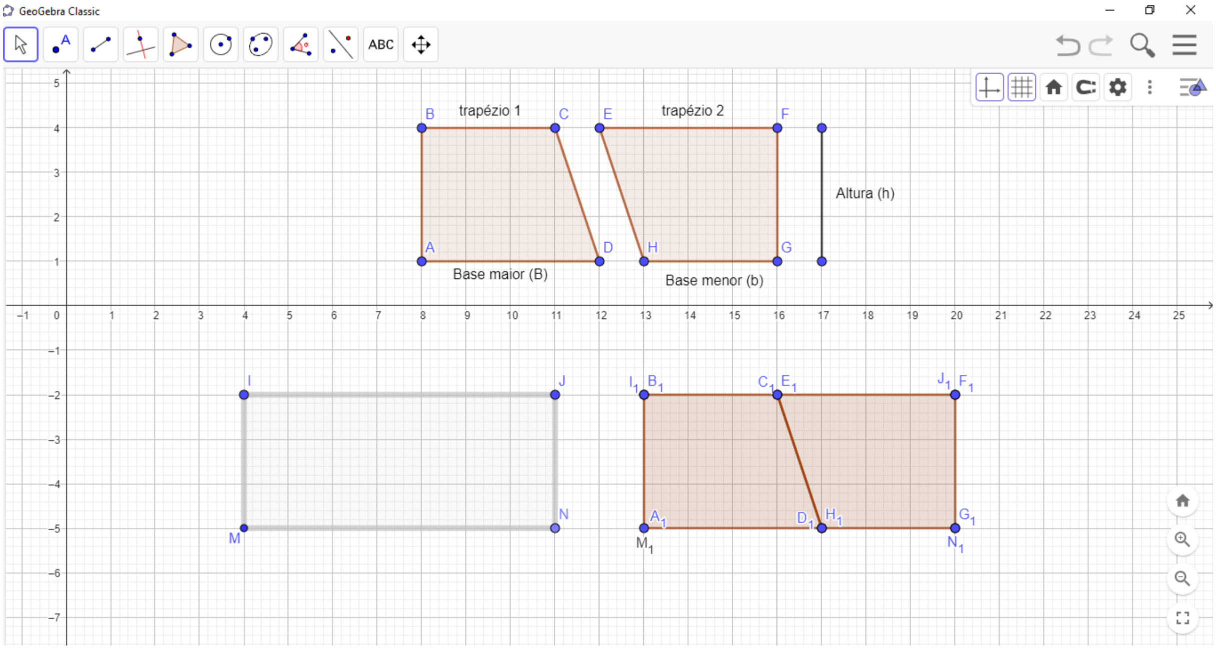


Fonte: O Autor, 2023

Trapézio

Para a construção seguinte, foi preciso o professor - pesquisador relembrar qual seria a figura plana trapézio e foi instruído que usassem a construção da área do retângulo.

Figura 28 - Dedução da figura plana trapézio por um dos trios de alunos



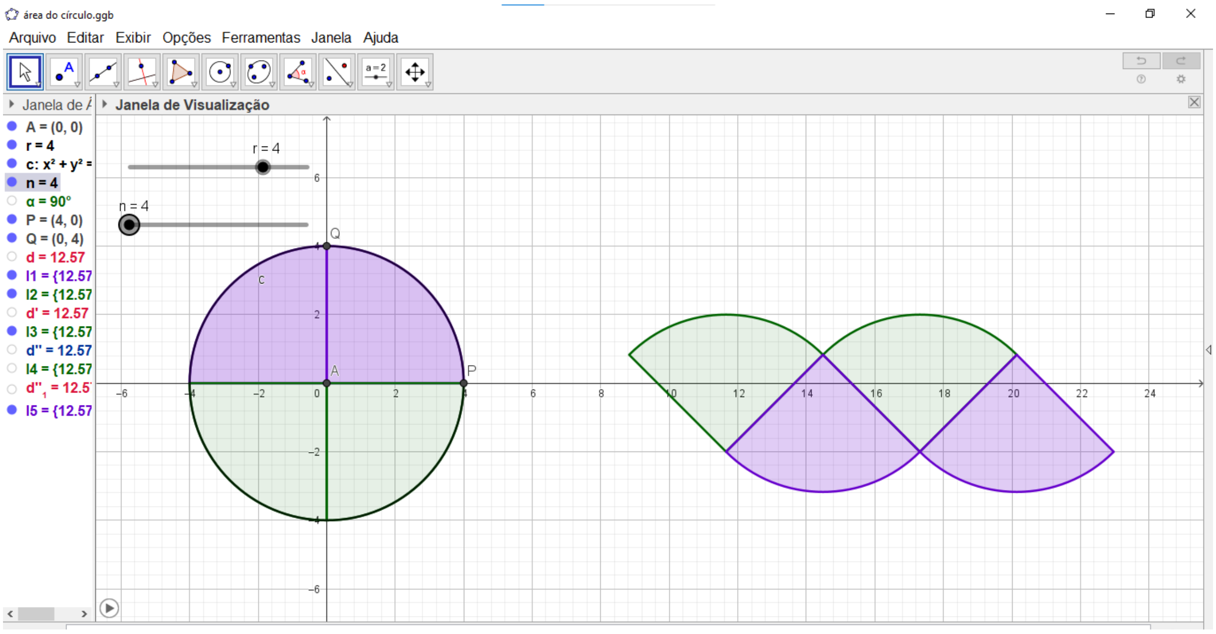
Fonte: O Autor, 2023

Área do círculo

O processo consiste em subdividir um círculo de centro A e raio r em uma sucessão de setores.

Para essa construção o professor - pesquisador teve que intervir ativamente por se tratar de uma construção que envolvia comandos avançados no Geogebra.

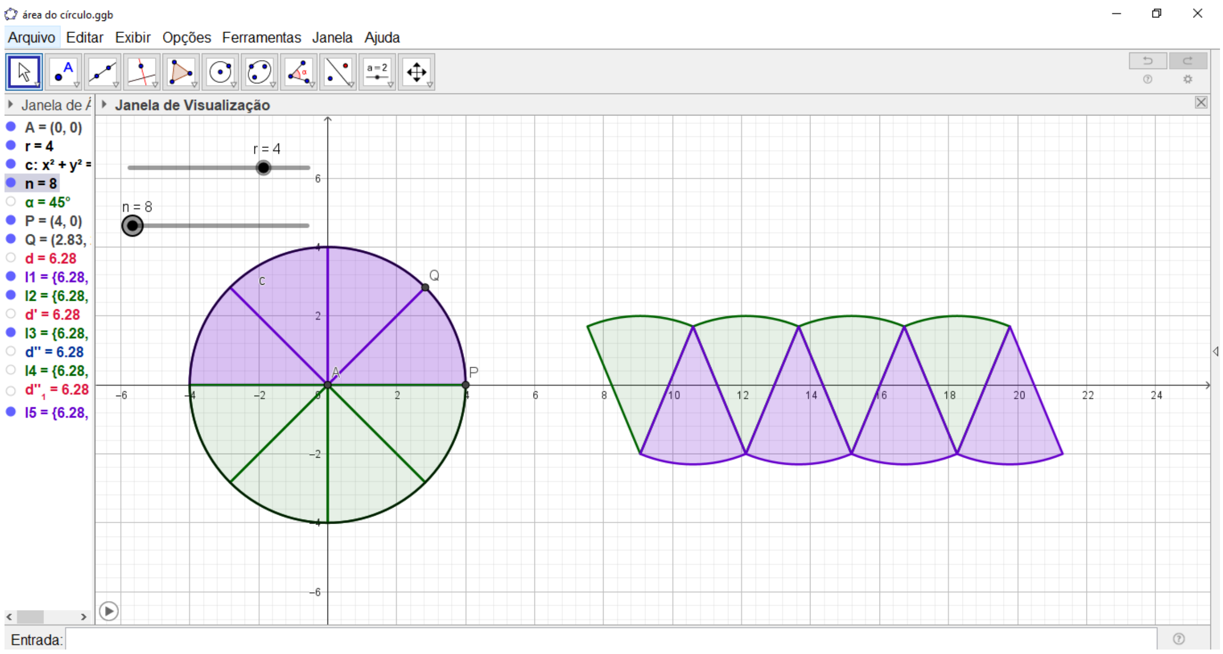
Figura 29 - Dedução da fórmula da área do círculo: divisão do círculo em n=4 setores circulares



Fonte: O Autor, 2023

Na figura acima, o círculo C de centro A e raio r foi seccionado em $n = 4$ setores, sendo feito uma construção ao lado de forma que os setores de cor verde e lilás se complementassem.

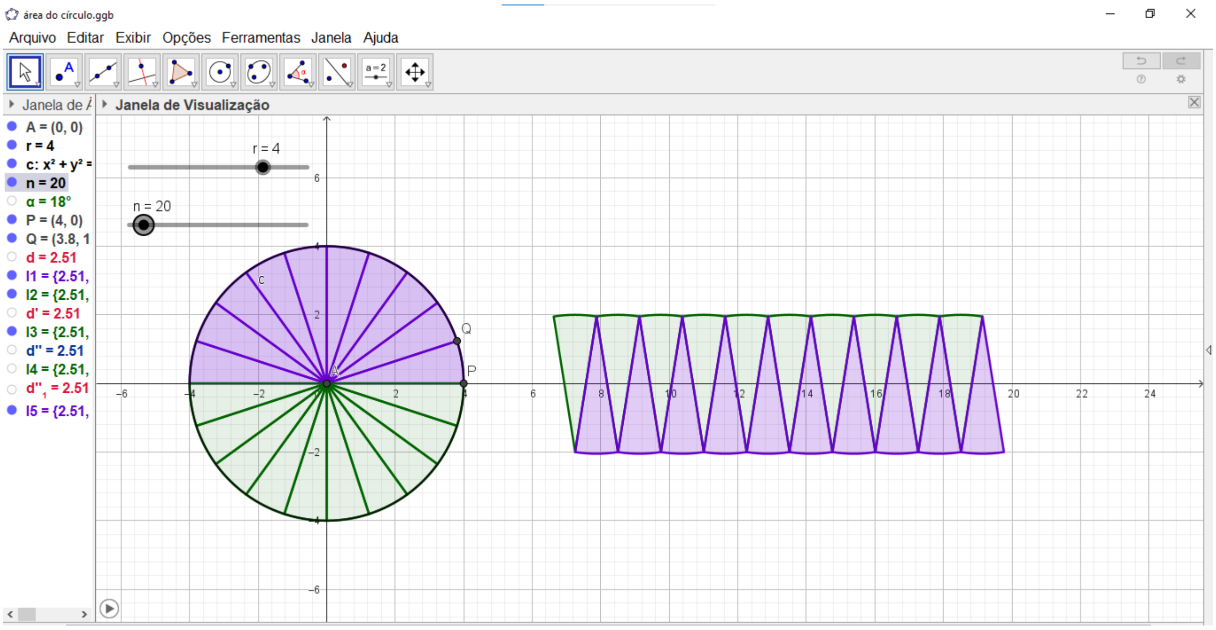
Figura 30 - Dedução da fórmula da área do círculo: divisão do círculo em n=6 setores circulares



Fonte: O Autor, 2023

Na imagem acima, o círculo C de centro A e raio r foi dividido em $n = 8$ setores, sendo feita a mesma construção da anterior com os setores verdes e lilás.

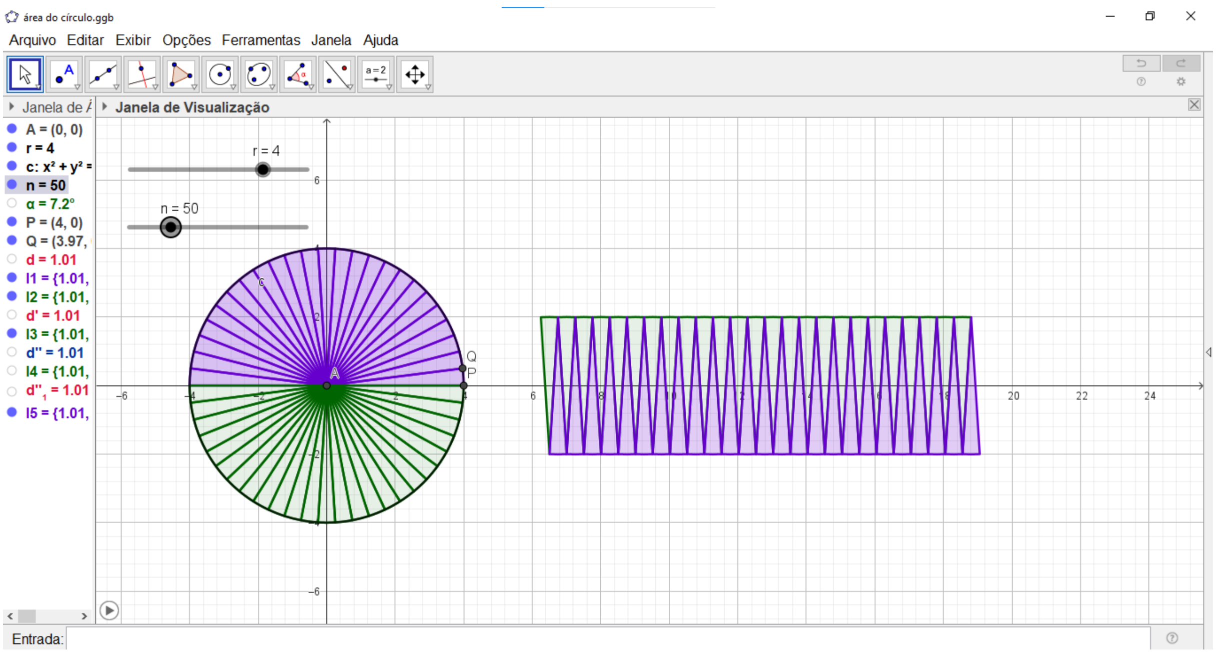
Figura 31 - Dedução da fórmula da área do círculo: divisão do círculo em n=20 setores circulares



Fonte: O Autor,2023

Na imagem acima, o círculo C de centro A e raio r foi seccionado em $n = 20$ setores, sendo que cada setor verde "encaixa" perfeitamente em cada setor lilás.

Figura 32 - Dedução da fórmula da área do círculo: divisão do círculo em n=50 setores circulares

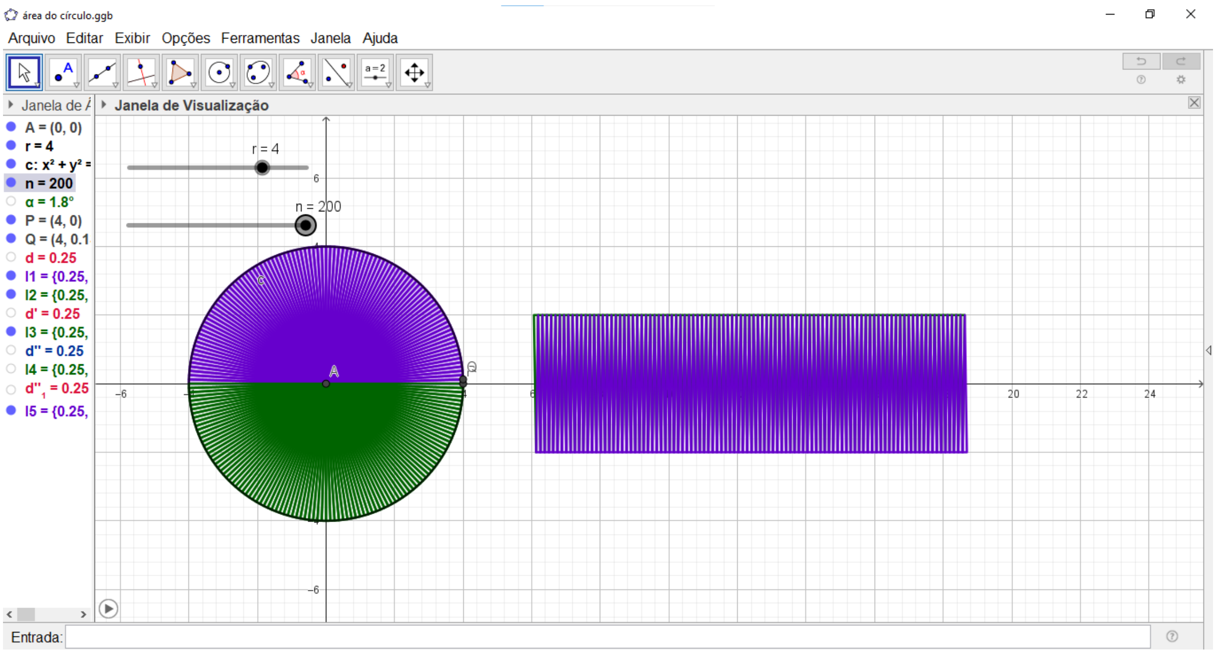


Fonte: O Autor,2023

Nesta imagem, o círculo C de centro A e raio r foi subdividido em $n = 50$ setores. Observamos que a figura construída ao lado se aproxima de um retângulo.

Dividindo o círculo, dessa vez, em $n = 200$ setores, temos a seguinte imagem:

Figura 33 - Dedução da fórmula da área do círculo: divisão do círculo em n=200 setores circulares



Fonte: O Autor, 2023

Podemos concluir que se repetirmos o processo indefinidamente a figura construída com os n setores se aproxima de um retângulo, cuja base é metade do comprimento da circunferência e altura se aproximando do raio do círculo.

ii) Análise a posteriori

As análises a posteriori das construções foram realizadas considerando as estratégias que os alunos adotaram em cada situação, os conhecimentos prévios adquiridos no ano anterior, as observações do professor – pesquisador, além das previsões apresentadas na análise a priori.

Na primeira e segunda construções, figuras planas quadrado e retângulo, os trios não apresentaram nenhuma dificuldade.

De fato, nota-se que os alunos perceberam que o polígono[9] AG_1E_1D gerado pode ser decomposto em quadrados unitários cuja área total é calculada somando a

[9] polígonos são figuras geométricas inteiramente formadas por lados.

área de todos os quadrados, resultando em 16 cm^2. Foi percebido também que esse mesmo valor pôde ser encontrado quando fizeram a contagem do número de quadrados que formam a base do polígono, seguido da multiplicação do número de quadrados que se encontram na lateral.

Dessa forma, mediante alguns conhecimentos prévios, os trios concluíram que a área do quadrado poderia ser dada por

$$A = b.h$$

onde A é a área do quadrado e $b\ e\ h$ são, respectivamente, a base e a altura.

Fazendo $b = h$, pois um quadrado possui lados iguais, chegaram à conclusão de que a sua área é dada por

$$A = b^2$$

Analogamente, foi notado que o polígono AG_1LJ gerado pode ser decomposto em quadrados unitários cuja área total é calculada somando a área de todos os quadrados, resultando em $8\ cm^2$. Os trios notaram que esse mesmo valor pode ser encontrado quando fizeram a contagem do número de quadrados que se encontram na base do polígono, seguido da multiplicação do número de quadrados que formam a sua lateral.

Dessa forma, facilmente os trios conseguiram deduzir que a área do retângulo é dada por

$$A = b.h$$

onde A é a área do quadrado e $b\ e\ h$ são, respectivamente, a base e a altura.

Na construção do polígono triângulo, vendo a dificuldade de alguns trios, foi sugerido pelo professor – pesquisador que usassem a construção do retângulo com o objetivo de facilitar a dedução da sua fórmula de área. Cerca de 76,9% conseguiram entender a proposta dividindo o retângulo pela sua diagonal formando dois triângulos retângulos congruentes. Três trios (aproximadamente 23,1%) não conseguiram deduzir a fórmula da área do triângulo. Os demais grupos conseguiram visualizar que bastava dividir a área do retângulo por 2 para obter a área do polígono. Chegando à conclusão que a área do triângulo é dada por

$$A = \frac{b.h}{2}$$

onde $b\ e\ h$ são, respectivamente, a base e a altura do triângulo.

Para que a Sequência Didática tivesse continuidade foi necessário o professor – pesquisador relembrar o que era um losango fazendo menção a figura amarela que se encontra na bandeira do Brasil. Além disso, foi sugerido que usassem a construção do retângulo com o objetivo de auxiliar na dedução da fórmula da área do losango.

Todos os trios notaram que o losango poderia ser construído pela união de quatro triângulos retângulos iguais, isto é, congruentes, de forma que fossem criados de forma estratégica, ou seja, de modo que o ângulo reto dos triângulos se encontrasse no ponto médio das diagonais do losango.

Para a dedução da fórmula da área do losango, os trios construíram dois losangos congruentes e dividiram um deles em quatro triângulos também congruentes. Com o auxílio da ferramenta “mover” do Geogebra, foram encaixando o losango 1 e os quatro triângulos “dentro” do retângulo. Os trios notaram que a diagonal maior e menor do losango eram iguais a base e a altura do retângulo, respectivamente, donde se concluiu que a área do losango era dada por

$$A = b.h$$

Fazendo $b = D\ e\ h = d$, onde $D\ e\ d$ são, respectivamente, a diagonal maior e menor do losango, teríamos:

$$A = D.d$$

Todos os trios conseguiram chegar à dedução acima.

Entretanto, quatro trios (30,7% das equipes) não conseguiram finalizar a dedução correta da fórmula, muito provavelmente, devido à falta de atenção. Cerca de 69,3% conseguiu observar que o desejado era determinar a área de apenas um dos losangos que foram dispostos no interior do retângulo. Dessa forma, chegaram à conclusão que a área anterior deveria ser dividida por 2, obtendo

$$A = \frac{D.d}{2}$$

Para a construção do paralelogramo foi necessário o professor – pesquisador relembrar qual seria a referida figura plana, além de sugerir o uso da construção do retângulo para o desenvolvimento da dedução da fórmula da sua área.

Os trios, na sua totalidade, perceberam que o retângulo poderia ser decomposto de forma que fosse extraído dele dois triângulos retângulos congruentes de forma estratégica, resultando no paralelogramo.

Para a dedução da fórmula da área do paralelogramo, onze trios (84,6% dos trios) conseguiram desenvolver o raciocínio. Conseguiram observar que a extração estratégica de um triângulo retângulo do paralelogramo e sua realocação usando a ferramenta mover do Geogebra poderia formar um retângulo. Portanto, a maior parte dos trios conseguiram concluir que a área do paralelogramo era dada pela mesma área do retângulo, isto é,

$$A = b.h$$

Onde $b\ e\ h$ são, respectivamente, a base e a altura do paralelogramo.

Na construção do trapézio a maior parte dos trios já conheciam a figura. Com o auxílio da ferramenta polígono conseguiram facilmente construí-la. Entretanto, usando a estratégia anterior, tiveram dificuldades na dedução da fórmula da sua área, já conhecida pela maioria. Foi sugerido pelo professor – pesquisador que fizessem uso da construção do retângulo com a finalidade de ajudar na dedução da fórmula.

Os trios perceberam que se fizessem um corte em diagonal passando pela base do retângulo, obtinham dois trapézios retângulos. Para a dedução da fórmula da área do trapézio maior parte dos trios não apresentou dificuldades, correspondendo 69,2% deles. Com a ferramenta mover do software, os dois trapézios foram realocados no quadrilátero $IJNM$ de forma que a base maior e a base menor dos dois trapézios sejam a base do retângulo $M_1N_1J_1I_1$.

Como os trios já sabiam que para calcular a área de um retângulo basta efetuar o produto da base pela sua altura, concluíram que a base do quadrilátero $M_1N_1J_1I_1$ é dada pela soma das bases maior e menor dos quadriláteros $A_1B_1C_1D_1\ e\ E_1F_1G_1H_1$, ambos com altura h. Daí,

$$A = (B + b).h$$

Como o desejado era determinar a área de apenas um dos trapézios que completam $M_1N_1J_1I_1$, concluíram que a área do trapézio pode ser dada por

$$A = \frac{(B + b).h}{2}$$

onde $B, b\ e\ h$ são, nessa ordem, a base maior, a base menor e a altura do trapézio.

Para determinar a construção do círculo todos os trios conseguiram concluir a atividade com o auxílio da ferramenta “círculo: centro e raio”. O problema surgiu na dedução da sua área visto que era necessário dominar alguns comandos específicos do Geogebra. Para contornar a situação, o professor - pesquisador teve que intervir ativamente, visto que a dedução da fórmula da área do círculo era, basicamente, uma demonstração intuitiva com base em ferramentas oferecidas pelo software. Nessa atividade, os trios foram avaliados de acordo com o seu entendimento do que estava sendo exposto e a compreensão do produto final da construção. Para maiores detalhes é recomendado o leitor fazer a leitura da última construção.

Confrontando as hipóteses que foram projetadas na fase a priori com os dados que foram apresentados a posteriori, podemos fazer algumas considerações: podemos considerar que maior parte dos objetivos foram alcançados. Foi percebido que os alunos conseguiram entender que algumas figuras eram compostas por uma sequência de quadrados unitários, cuja área era dada pela sua quantidade. Além disso, conseguiram explorar dinamicamente a mudança de forma, fazendo decomposições, originando outras figuras. Também conseguiram visualizar algumas propriedades geométricas de alguns polígonos que podem ser aplicadas em outros. Entretanto, alguns trios não conseguiram alcançar a segunda parte da atividade que era referente à dedução das fórmulas. Abaixo é apresentada um quadro que melhor ilustra a situação.

Quadro 7 - Quantidade de alunos

Construções	Conseguiram	Quantidade aproximada de alunos	Conseguiram Parcialmente	Quantidade aproximada de alunos
Quadrado	100%	39		
Retângulo	100%	39		
Triângulo	76,9%	30	23,1%	9
Losango	69,3%	27	30,7%	12
Paralelogramo	84,6%	33	15,4%	6
Trapézio	69,2%	27	30,8%	12
Círculo	100%	39		

Fonte: O Autor, 2023

Diante dos dados, podemos concluir que os alunos demonstraram maiores dificuldades nas figuras planas losango e trapézio. Em ambos os casos por se tratarem de polígonos poucos visualizados no dia a dia, o que acarreta o esquecimento de fórmulas e conceitos de grande importância.

Além disso, após a análise a posteriori da atividade 1, podemos refutar ou confirmar a primeira hipótese geral da pesquisa.

Hipótese 1: O uso do software matemático Geogebra proporciona a visualização de como as figuras planas se relacionam, além de podermos deduzir as fórmulas para o cálculo de áreas de figuras planas, o que contribui no entendimento de certos conceitos geométricos.

De certa forma, podemos verificar que todos os critérios que esperávamos alcançar já estavam bem descritos na fase a priori da atividade 1.

Dessa forma, podemos concluir por meio de uma análise a posteriori da atividade 1 que a Hipótese 1 da pesquisa não foi totalmente alcançada, visto que uma pequena porcentagem de alunos não conseguiu desenvolver estratégias suficientes que os ajudassem a determinar as fórmulas fechadas para o cálculo de áreas de algumas figuras planas. Porém, fica evidente que o auxílio da ferramenta digital Geogebra contribuiu significativamente no aprendizado dos alunos, pois eles viram no programa uma forma concreta de representar a matemática que até então era muito abstrata para eles.

4.1.2 Atividade 2 – Problema com contextualização histórica

No capítulo 2 falamos um pouco da geometria plana relacionando à história da matemática. Para Mendes (2009), a construção do conhecimento matemático é fruto de representações mentais e simbólicas que se constrói num processo de generalização e síntese.

Concordando com o autor e acrescentando, construir um conceito matemático não é fácil, visto que existe diversas variáveis envolvidas no processo. No entanto, quando se traz conhecimentos que despertem a curiosidade, o processo de aprendizado pode se tornar mais efetivo.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), a História da Matemática é importante por que:

> Ao revelar a matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor tem a possibilidade de desenvolver atitudes e valores mais favoráveis do aluno diante do conhecimento matemático (BRASIL, 2001, p. 45).

Com isso, propõe-se a atividade abaixo que foi contemplada em uma hora/ aula e que teve como metodologia a resolução individual de uma questão – problema do papiro de Rhind que foi adaptada. O processo consistiu em analisar as respostas encontradas pelos alunos, seguido de uma análise mais detalhada que será feita na fase da análise a posteriori.

Texto adicional:

O papiro de Rind ou Ahmes é um dos documentos matemáticos mais antigos, datando de cerca de 1650 a.C., que contém uma série de problemas de aritmética, fração, cálculo de áreas, cálculo de volumes, progressões, proporcionalidade, repartições, regra de três simples, equações lineares, trigonometria básica e geometria.

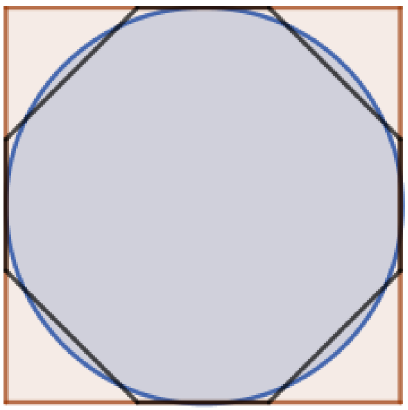
Problema 48 do Papiro de Rhind: Mostra uma possível solução para o cálculo da área do círculo. Ahmes compara a área do círculo com a área do quadrado circunscrito.

Imagem 8 - Representação geométrica do problema 48 do Papiro de Rhind

Fonte: webpages.ciencias.ulisboa.pt

Os egípcios concluíram que a área do círculo poderia ser dada pela aproximação de um octógono gerado pela circunscrição de um quadrado.

Figura 34 - Quadratura do círculo



Fonte: O Autor, 2023

Com base nessas informações, foram propostas as atividades I e II em trio.

I. Representar o esquema ilustrativo de resolução que é proposto no problema 48 do Papiro de Rhind sabendo que o lado do quadrado circunscrito deve ser particionado no seu terço médio;
II. Adaptando o problema 48 do Papiro de Rhind e observando à seguinte conclusão dos egípcios: “a área do círculo poderia ser dada pela aproximação de um octógono gerado pela circunscrição de um quadrado”, foi solicitado calcular a área do octógono, sabendo que o quadrado tem lado l e o círculo diâmetro D.

Análise a priori da atividade 2

Trazer a história da matemática aplicada em uma das questões da Sequência Didática, tem o objetivo de envolver os alunos na busca de informações, despertando a curiosidade em entender como os egípcios desenvolviam estratégias no cálculo de áreas.

Para a atividade I, espera-se que os grupos representem corretamente o esquema gráfico da resolução do problema 48 do Papiro de Rhind, entendendo o conceito de circunscrição.

Na atividade II, espera-se que os grupos visualizem que a área do círculo é aproximada à área do octógono não regular. Tal estratégia foi adotada pelos egípcios; processo conhecido como quadratura do círculo. Além disso, espera-se que os alunos consigam calcular a área do octógono pela diferença da área do quadrado e dos quatros triângulos retângulos isósceles e congruentes que são formados pelos terços médios dos lados do quadrado.

Análise a posteriori da atividade 2

Na atividade I, notou-se que a maior dificuldade em representar a situação do problema 48 do Papiro de Rhind foi o fato de como usar a informação da partição dos lados do quadrado no seu terço médio. Dois trios, correspondendo 15,38% dos alunos não conseguiram interpretar que o lado do quadrado deveria ser particionado em três partes de mesmo comprimento. Nesse momento, o professor – pesquisador teve que intervir, com o objetivo de esclarecer a dúvida dos seis alunos. Após os devidos esclarecimentos, todas as equipes conseguiram alcançar a primeira hipótese da análise a priori.

Na atividade II, temos a seguinte análise:

- Cinco trios, cerca de 38,46% dos alunos, perguntaram se tinha uma fórmula para o cálculo da área do octógono com o objetivo de facilitar os cálculos, visto que a maioria das figuras planas apresentam uma fórmula específica para o cálculo de sua área.
- Oito trios, cerca de 61,53% dos alunos, notaram que se a área dos quatro triângulos fosse retirada, sobraria apenas a área do octógono. Entretanto, as equipes não conseguiram concluir o raciocínio correto, sendo que a área dos triângulos deveria ser retirada da área do quadrado.
- Após uma breve discursão entre os alunos, e observando as ideias que cada grupo apresentava na euforia do momento, todos os grupos conseguiram entender que a área do octógono era dada pela diferença da área do quadrado e áreas dos triângulos. Isto é,

$$A_O = A_Q - 4A_T$$

  Denotando,

  A_O: área do octógono,

  A_Q: área do quadrado e

  A_T: área do triângulo.

Uma dificuldade que surgiu durante os cálculos foi o de usar o diâmetro do círculo para calcular a área do octógono, assim como faziam os egípcios. Para contornar a situação, o professor – pesquisador teve que intervir, orientando que a lado l do quadrado era igual ao diâmetro D do círculo.

Por conseguinte, algumas análises puderam ser feitas mediante às observações:

- De imediato onze dos treze trios, correspondendo 84,61% dos alunos, conseguiram entender que o lado do quadrado em função do diâmetro do círculo era dado por $l = \frac{D}{3}$. Dessa forma, concluíram que a base e altura dos triângulos também eram iguais a $\frac{D}{3}$. Após uma breve explicação, as demais equipes conseguiram compreender o porquê de o lado do quadrado ser $\frac{D}{3}$.

- A totalidade de trios conseguiu calcular a área do quadrado, obtendo

$$A_Q = D^2$$

- A totalidade dos trios conseguiu calcular a área dos triângulos, obtendo

$$A_T = \frac{\frac{D}{3} \cdot \frac{D}{3}}{2} = \frac{D^2}{18}$$

- Como todos os trios já sabiam que a área do octógono era dada pela diferença da área do quadrado e dos triângulos, conseguiram facilmente alcançar a hipótese II após a superação de alguns obstáculos, como foi discutido. Os grupos conseguiram desenvolver o seguinte cálculo:

$$A_O = A_Q - 4. A_T \Rightarrow$$

$$A_O = D^2 - 4. \frac{D^2}{18} \Rightarrow$$

$$A_O = \frac{7}{9} D^2$$

Dessa forma, mediante ao que foi verificado, podemos confrontar as hipóteses da análise a priori com as observações da análise a posteriori. Como relatado anteriormente, o professor – pesquisador teve que intervir em alguns momentos, além de os próprios alunos que contribuíram com sugestões, o que favoreceu para que alguns trios pudessem fazer uso das informações. Tal episódio foi permitido, pois o processo de ensino e aprendizagem vai além da transmissão de informações pelo professor. Paulo Freire enfatiza essa questão quando coloca que:

> Ensinar não é transferir conteúdo a ninguém, assim como aprender não é memorizar o perfil do conteúdo transferido no discurso vertical do professor, a aprendizagem não se dá por transferência de conteúdo, mas por interação que é o caminho da construção. (Freire, 1994, p.134)

De fato, pode-se verificar que a interação dos alunos contribuiu para uma aula mais dinâmica que favoreceu a participação de todos os estudantes.

Com isso, podemos concluir que apesar das dificuldades interpretativas que os alunos apresentaram durante o desenvolvimento da segunda atividade, a totalidade dos alunos conseguiram calcular a área do octógono, alcançando a hipótese II traçada na fase da análise a priori.

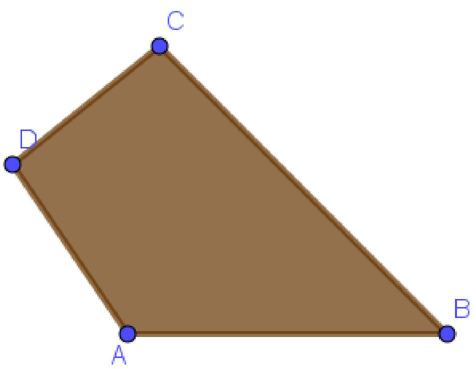
4.1.3 Atividade 3 – Resolução de situação – problema

No capítulo 3, apresentamos a atividade diagnóstica que tinha como objetivo analisar os obstáculos que os alunos enfrentariam na resolução das questões. Observou-se que uma delas foi a que tratava de situações - problemas que necessitavam de uma representação geométrica, isto é, por meio de um desenho. Na atividade 3 será apresentado um problema no qual será preciso aplicar esses conhecimentos.

Proporemos uma atividade – problema que retrata uma aplicação do cálculo de áreas de terrenos que era utilizada pelos egípcios e que ainda é usado em comunidades que não possuem métodos muito sofisticados. Esse sistema de medição era chamado de cubação que é feita com o uso de cordas ou uma vara chamada de braça e consiste em medir o contorno de terrenos cuja área é dada considerando o seu relevo.

Para que a Sequência Didática tivesse continuidade, foi preciso o professor – pesquisador intervir e explicar para os alunos como funcionava a cubação. Foi esclarecido que o processo é aplicado apenas em terrenos em forma de quadriláteros e que está relacionado à aproximação de figuras para facilitar os cálculos de áreas.

Figura 35 - Cubação de terreno



Fonte: O Autor, 2023

O quadrilátero ABCD pode ser aproximado para um retângulo fazendo a média aritmética dos comprimentos dos lados opostos. Por conseguinte, segue atividade a ser aplicada em sala de aula que teve duração de uma hora/aula. A proposta da atividade foi para ser feita de forma individual, fazendo uso apenas de lápis de caderno. Os resultados coletados foram discutidos ao longo da análise a posteriori.

Um terreno quadrangular foi destinado para o plantio de milho. Sabe-se que as suas dimensões são 300 m, 240 m, 210 m e 180 m. Com o objetivo de irrigar toda a área, um agricultor mediu a maior diagonal do terreno para instalar um cano responsável pelo transporte de água, obtendo 360 m. Determine a área aproximada do plantio.

Análise a priori da atividade 3

Para a atividade proposta, espera-se que os alunos consigam:

I. Representar a situação – problema de forma geométrica;
II. Calcular a área aproximada usando conhecimentos sobre a cubação de terrenos;
III. Usar conhecimentos específicos da geometria plana, como a fórmula de Herão, para calcular a área exata do terreno.

Análise a posteriori da atividade 3

Para a realização da atividade 3, foi sugerido que os alunos a executassem de forma individual. Observou-se na atividade I que todos os alunos conseguiram representar a situação - problema sem dificuldades, visto que já conheciam o que era um quadrilátero irregular, pois o terreno descrito no problema era composto por dimensões de valores diferentes.

Na atividade II todos os 39 alunos também não apresentaram dificuldades, pois a aproximação do quadrilátero formado pelo terreno em um retângulo era feita por meio de cálculos simples de média aritmética dos lados opostos. E como já conheciam a fórmula básica para o cálculo da área de um retângulo, conseguiram chegar ao valor aproximado da área do terreno que foi de 52650 m^2.

Como a atividade III necessitava de alguma estratégia para determinar a área da superfície irregular, cerca de 15 alunos, correspondendo a 38,46% da turma apresentaram dificuldades para desenvolver uma estratégia viável para o cálculo exato da área do terreno. Os alunos alegaram que não existia uma fórmula específica para calcular a área da figura que tinham encontrado na atividade I. No entanto, mais da metade da turma, cerca de 61,54% dos alunos, conseguiram identificar uma maneira de contornar o obstáculo. Viram que poderiam usar a informação do comprimento da maior diagonal do quadrilátero para particionar a figura e obter dois triângulos. Dessa forma, observaram que poderiam aplicar a pouco usada fórmula de Heron, para calcular a área do terreno, obtendo o valor de 50677,56 m^2.

Confrontando-se as informações da análise a priori com as da análise a posteriori podemos perceber que nem todas as hipóteses foram alcançadas em sua totalidade para essa atividade. Percebeu-se que quando é necessário desenvolver algum raciocínio mais elaborado, um pequeno percentual de alunos ainda apresenta dificuldades em interpretação, visto que esse obstáculo será superado com o desenvolvimento do hábito da prática matemática, que consiste em leitura e resolução de problemas.

De acordo com o que foi apresentado, podemos fazer algumas considerações a respeito da hipótese geral 2 da pesquisa.

Hipótese 2: A proposta de problemas das vivências dos alunos juntamente com contextualização histórica sobre cálculos de áreas, de perímetros, reconhecimento de figuras planas ajudarão na compreensão dos seus conceitos.

Podemos confirmar que quando os problemas que são apresentados aos alunos estão relacionados às suas vivências, a aprendizagem se torna mais efetiva, visto que isso desperta o interesse do estudante por se tratar de questões relacionadas a alguma aplicabilidade do seu cotidiano, como por exemplo, calcular áreas de lotes de terra para o plantio, sendo possível verificar, por meio de proporcionalidade, a quantidade máxima de grãos que será necessária para realizar o plantio.

A contextualização histórica também se faz necessária, uma vez que se trata da possibilidade de adquirir algum conhecimento da história da matemática, possibilitando o despertar pela curiosidade pelo aprendizado.

Durante a realização das atividades 2 e 3, pudemos verificar um alto grau de comprometimento da turma, potencializando o desenvolvimento da atividade que foi proposta. Notou-se também, perguntas curiosas tais como: Como “eles” (os matemáticos) conseguiam calcular a área de uma figura dentro da outra? Como calcular a área do círculo usando o quadrado? Para que “eles” (os matemáticos) queriam calcular a área da figura central?

Dessa forma, pode-se concluir que quando uma atividade vincula historicidade, no mínimo, algumas indagações são levantas, o que implica interesse pela busca do conhecimento. Sendo assim, diante do que foi exposto ao longo dessa pequena síntese, podemos confirmar a hipótese geral 2 da pesquisa.

4.1.4 Atividade 4 - Uma aplicação para o estudo de áreas de figuras planas usando a Etnomatemática presente no artesanato têxtil.

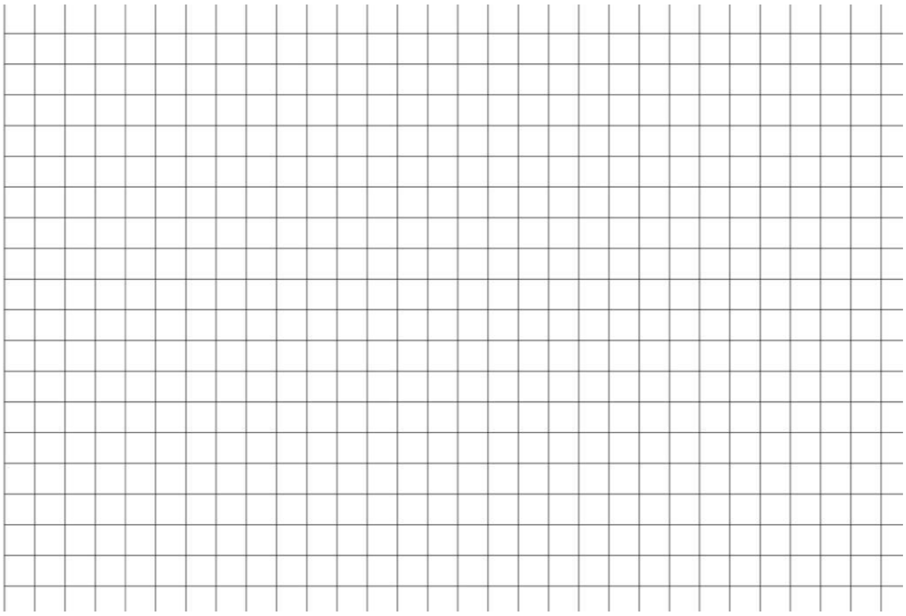
Para que a última atividade da Sequência Didática fosse realizada, foi necessário o professor – pesquisador apresentar o material que seria trabalhado em sala que consistia em peças artesanais confeccionadas na arte do filé.

Inicialmente, foi feito um breve relato sobre o artesanato de filé relacionando contextualização histórica, econômica, cultural, social, artística e matemática, sendo esta última o nosso foco, visto que a produção dos utensílios é feita em uma malha quadriculada que se assemelha ao plano cartesiano. Além disso, a sua trama é formada por um agrupamento de figuras planas variadas como, por exemplo, quadrados, retângulos, losangos, triângulos, entre outras.

Seguindo com a aplicação da atividade, foi solicitado que a turma de 39 alunos fosse dividida em trios. Logo em seguida, foi entregue alguns utensílios para cada equipe, como tapetes, suplat, marca página e guardanapos.

A atividade foi composta de dois momentos: o primeiro foi em que cada grupo replicasse em tamanho real, em uma malha quadriculada com quadrados de 1 cm de lado, como a da imagem abaixo, algumas figuras planas que encontrassem nos materiais que lhes foram entregues. Essa primeira fase da atividade durou uma hora/aula e os materiais que os alunos fizeram uso foram lápis para colorir, folhas A4, régua e uma malha quadriculada.

Figura 36 - Malha quadriculada



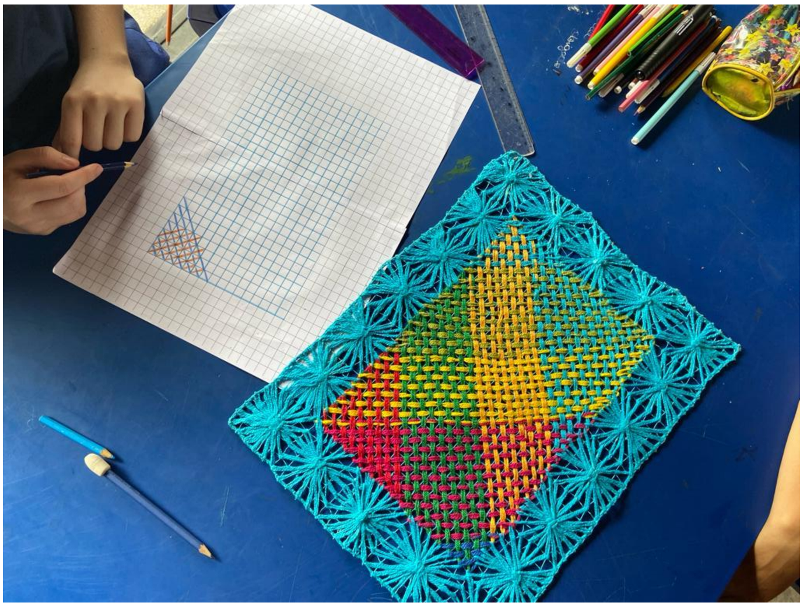
Fonte: O Autor, 2024

Seguem algumas imagens da realização da primeira parte da atividade.

Imagem 9 - Reprodução de figura plana em malha quadriculada

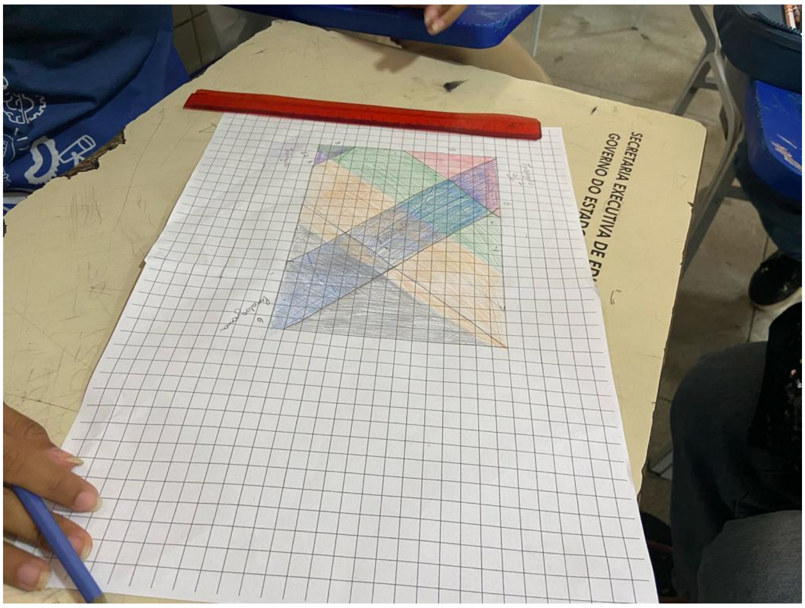
Fonte: O Autor, 2024

Imagem 10 - Reprodução de figura plana em malha quadriculada



Fonte: O Autor, 2024

Imagem 11 - Reprodução de figura plana em malha quadriculada



Fonte: O Autor, 2024

Imagem 12 - Reprodução de figura plana em malha quadriculada

Fonte: O Autor, 2024

O segundo momento, que também durou uma hora/aula, da atividade consistiu em usar conhecimentos básicos da geometria plana para calcular área e perímetro das figuras representadas na malha quadriculada. O objetivo era fazer uma correlação com o trabalho prático das artesãs e o científico. No primeiro, é feita uma contagem de quadrados que estão em uma grade com uma malha quadriculada como a que está representada na imagem abaixo, donde são originadas peças de inigualável beleza. No segundo, serão explorados conhecimentos formais por meio das técnicas que as artesãs utilizam.

Imagem 13 - Grande contendo malha quadriculada

Fonte: O Autor, 2024

Na segunda fase da atividade, os alunos devem realizar os cálculos de perímetros e áreas de duas formas: analisando as quantidades de quadrados que compõem a figura plana representada na malha quadriculada, fazendo, dessa forma, uma analogia ao trabalho artesanal das fileseiras e a segunda, usando os conhecimentos adquiridos nas atividades anteriores, como o uso de fórmulas, por exemplo.

Análise a priori da atividade 4

Para a atividade 4, espera-se que os alunos consigam:

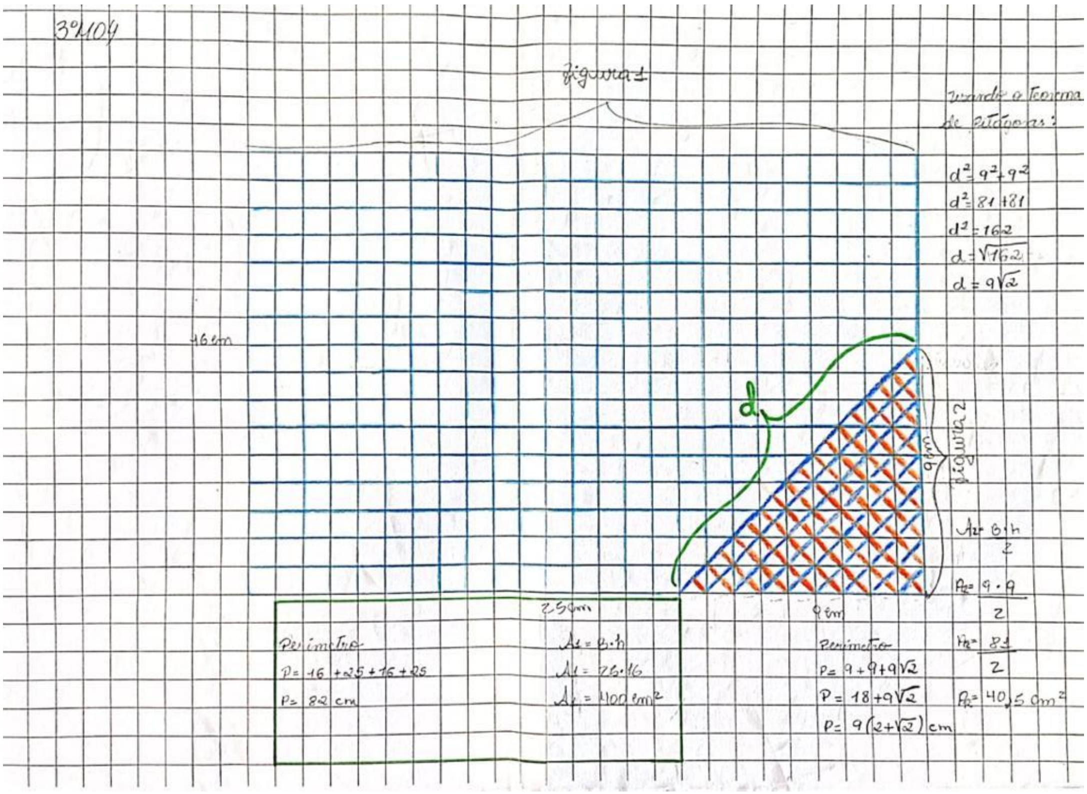
I. Identificar e reproduzir as figuras planas encontradas nos utensílios de filé nas suas dimensões reais;
II. Calcular o perímetro das figuras planas contando o número de quadrado de 1 cm de lado que as compõem;
III. Calcular a área das figuras planas contando quantidade de quadrados de 1 cm de lado que as compõem;
IV. Calcular a área das figuras planas usando fórmulas;
V. Comparar as áreas obtidas em III e IV.

Análise a posteriori da atividade 4

A primeira etapa da atividade 4 que foi a identificação e reprodução das figuras planas nos utensílios de filé foi realizada sem nenhuma dificuldade. Alguns grupos de alunos conseguiram visualizar na mesma peça, figuras planas que outras equipes não conseguiram, usando o método da decomposição de figuras visto na primeira atividade da sequência didática.

Após a reprodução das figuras planas que os grupos conseguiram identificar nos utensílios, percebeu-se que os itens II e III da análise a priori foram alcançados muito facilmente, visto que o processo consistia apenas na contagem de quadrados, seu lado e diagonal para se determinar área e perímetro de algumas figuras. Observe a imagem que segue.

Figura 37 - Cálculos utilizando a malha quadriculada

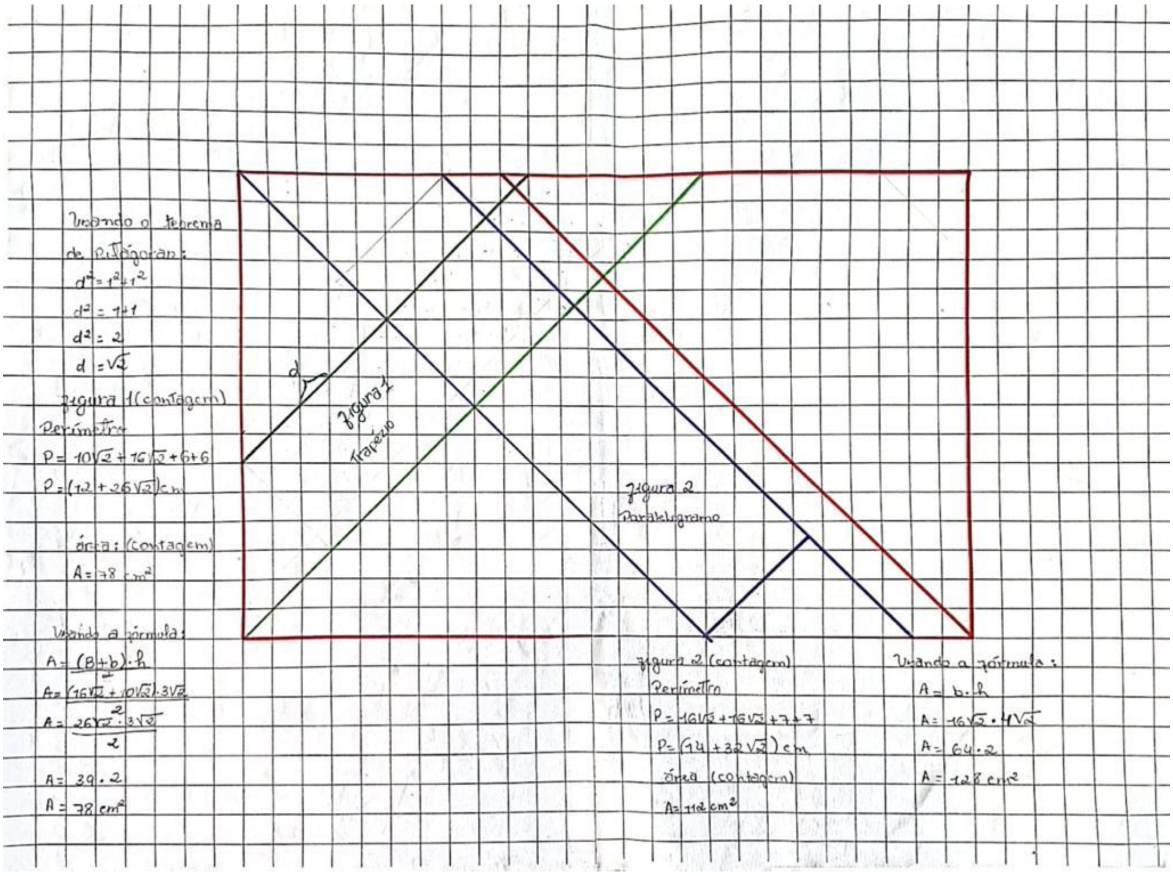


Fonte: O Autor, 2024

Um dos trios de alunos que esboçou a imagem acima, conseguiu identificar, reproduzir e calcular a área e perímetro de um retângulo e de um triângulo. Por meio da contagem do número de quadrados, chegou-se à conclusão que a figura 1 tinha 25 quadrados de comprimento e 16 de largura, obtendo-se $2P_{fig_1} = 82\ cm$ de perímetro e a área era composta por 400 quadrados unitários, obtendo-se $A_{fig_1} = 400\ cm^2$. A confirmação do cálculo da área se deu quando foi realizada a aplicação da fórmula, atingindo-se o mesmo valor anterior. Dessa forma, os alunos puderam comparar as duas situações e constataram uma aplicação imediata vista na primeira atividade da sequência didática.

Outra equipe explorou a seguinte imagem:

Figura 38 - Cálculos utilizando a malha quadriculada



Fonte: O Autor, 2024

Para o esboço acima, a equipe explorou duas figuras: figura 1 - trapézio e a figura 2 - paralelogramo. Sabendo que o perímetro é dado pela soma dos lados de uma figura, os alunos observaram que tanto a base maior quanto a base menor da figura 1 era composta por diagonais do quadrado unitário. Dessa forma, viram que seria necessário encontrar o valor dessa diagonal, fazendo uso do Teorema de Pitágoras, encontrando como valor $\sqrt{2}$ cm, o que é óbvio. Realizando a contagem do número de diagonais de ambas as bases, concluíram que a base maior era $16\sqrt{2}$ cm, a base menor $10\sqrt{2}$ cm e os lados não paralelos 6 cm, obtendo-se perímetro $2P_{fig_1} = (12 + 26\sqrt{2})$ cm.

Para o cálculo da área do trapézio, o processo foi semelhante. Os alunos contaram quantos quadrados compunham a figura, obtendo-se 78. Dessa forma, concluíram que a área do trapézio era de 78 cm$^{2.}$ Fazendo a aplicação da fórmula, notou-se que os valores das bases coletas no processo anterior seriam usados, bastando determinar o valor da altura da figura 1. Como a altura englobava três diagonais de comprimento, a equipe chegou à conclusão que o valor era dado por $3\sqrt{2}$ cm. Aplicando os dados coletados na fórmula da área do trapézio, os alunos conseguiram, sem dificuldades, chegar ao resultado anterior.

A mesma equipe também fez os cálculos de área e perímetro de um paralelogramo. De imediato os alunos notaram que as bases do paralelogramo eram compostas por diagonais de quadrado, sendo assim, já sabiam por meio de contagem que era igual a $16\sqrt{2}$ cm. Para os lados laterais paralelos, bastava apenas contar quantos lados de quadrado compunham a lateral do paralelogramo, chegando-se a 7 quadrados. Como os lados paralelos possuem o mesmo comprimento, os alunos concluíram que o perímetro da figura 2 era $2P_{fig_2} = (14 + 32\sqrt{2})$ cm.

Realizando a contagem de quadrados para determinar a área do paralelogramo, o trio contabilizou 112 quadrados, sendo assim, deduziram que a área da figura 2 seria 112 cm^2. No entanto, quando fizeram a aplicação da fórmula da área do paralelogramo, o trio se deparou com um valor diferente do encontrado anteriormente, obtendo-se nesse novo cálculo um valor para a área igual a 128 cm^2. A equipe questionou o professor – pesquisador, pois até o momento os cálculos por contagem e aplicação de fórmulas haviam “batido”. O professor – pesquisador notou no esboço da equipe que havia um erro no desenvolvimento do cálculo anterior. A altura do paralelogramo era composta por 3 diagonais mais a metade de outra e não por quatro diagonais como pensara a equipe. Como o comprimento de um diagonal do quadrado unitário é $\sqrt{2}$, a metade dela seria $\frac{\sqrt{2}}{2}$, portanto a altura da figura seria dada por $3\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$ que simplificando ficaria $\frac{7\sqrt{2}}{2}$. Aplicando os dados na fórmula da área do paralelogramo, os alunos encontrariam o valor esperado de 112 cm^2.

É preciso salientar que os demais trios reproduziram figuras planas que apresentavam as mesmas características dos grupos aqui mencionados. Por isso, preferiu-se manter omissos os esboços deles. No entanto, é preciso reforçar que todos eles conseguiram demonstrar conhecimento suficiente no desempenho da atividade.

Fazendo um confronto entre a análise a priori e a análise a posteriori, podemos perceber que todos os itens que foram apontados na fase a priori foram alcançados muito facilmente, evidenciando que a sequência didática trouxe um complemento notável para o conhecimento dos alunos acerca do conteúdo de áreas de figuras planas. É notável que todos os grupos tem um maior domínio na aplicação de fórmulas de áreas de figuras planas. Além disso, obtiveram uma ferramenta muito importante para esse estudo, que se trata da decomposição das mesmas, visto que em muitas situações do seu cotidiano, podem se deparam com problemas que necessitem do uso de cálculo de áreas e de perímetros que estejam relacionados às figuras não convencionais e que seja necessário fazer uso do processo da decomposição, chegando-se às figuras tradicionais - como exemplo temos a atividade 3 - nas quais podem ser empregadas todas os conceitos adquiridos ao longo da Sequência Didática.

Mediante o que foi exposto, podemos fazer uma inferência com relação à hipótese geral 3 da nossa pesquisa.

Hipótese 3: A representação de figuras planas em utensílios de filé ajuda a entender a composição das mesmas, cálculos de áreas e perímetros por meio da contagem do número de quadrados que as compõem.

Podemos evidenciar que uma atividade prática relacionada a um conteúdo da matriz curricular dos alunos, traz um maior envolvimento dos estudantes, visto que desperta o interesse por manusear um material concreto. Além disso, as experiências matemáticas vivenciadas pelas artesãs foram absorvidas e aprimoradas pelos alunos em um contexto mais técnico. De fato, percebeu-se que o processo artesanal facilitou no entendimento de composição de figuras planas, cálculos de perímetros e de áreas fazendo uso da contagem do número de quadrados que as compõem. Diante disso, podemos afirmar que a hipótese geral 3 foi alcançada em todos os critérios, de forma que uma correlação entre uma etnomatemática baseada no artesanato e a matemática formal foi estreitada de modo que uma ajudou a entender os conceitos da outra.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A aplicação da Sequência Didática teve como subsídio a análise de como o conteúdo de áreas de figuras planas está sendo apresentado nos livros didáticos e foi aplicado um teste diagnóstico aos alunos da 3ª série e turma M04, do Ensino Médio, da Escola Estadual Padre Aurélio Góis, com o objetivo de analisar as dificuldades e obstáculos que os alunos poderiam apresentar.

Percebeu-se que os alunos se mostraram envolvidos com a proposta da Sequência Didática, buscando novas fontes de pesquisas, aprendendo a desempenhar trabalho coletivo e fazendo uso de ferramentas digitais.

Observou-se que com aplicação da Sequência Didática os alunos conseguiram desenvolver vários conhecimentos de interpretação e o desenvolvimento de raciocínio lógico - dedutivo na resolução de problemas que necessitaram ou não de representações gráficas.

As aulas de aplicação das atividades da Sequência Didática eram realizadas de forma dinâmica, onde os trios podiam trocar informações entre si, pois o conhecimento também é construído de forma coletiva.

As situações de aprendizagem foram aplicadas de forma que cada equipe seguia uma sequência lógica que tinha objetivos pré-determinados de maneira a colocar os alunos diante de problemas que necessitavam de uma solução. Algumas atividades foram simples e imediatas, outras tinham como objetivo desenvolver o senso crítico do aluno despertando as suas habilidades. Vale salientar que todas as atividades favoreceram, gradualmente, na construção do conceito de área.

Observou-se também que alguns alunos não gostam de trabalhar em grupos e que no momento das dúvidas chamava o professor ao invés de consultar os colegas da equipe. Notou-se, também, que alguns alunos não gostam de aula prática de matemática e preferem aulas expositivas, pois, dessa forma, eles não precisam desenvolver nenhum conhecimento explícito, isto é, preferem ser apenas ouvintes e não disseminadores de conhecimento.

Com tudo isso, podemos concluir que a Sequência Didática permitiu trabalhar diversos objetivos, dando prioridade à superação das dificuldades e obstáculos dos alunos verificadas no teste diagnóstico. Sob a ótica da Engenharia Didática foi considerado o conteúdo de áreas de figuras planas, apresentando atividades que favorecessem no entendimento do conceito, com o objetivo de minimizar as dificuldades que foram apresentadas pelos estudantes.

Além disso, por meio da metodologia de pesquisa da Engenharia Didática, pudemos confirmar a maioria das hipóteses que foram apontadas durante a fase a priori de cada uma das atividades da Sequência Didática, mostrando-se fundamental no desenvolvimento e fixação de conceitos inerentes ao estudo de áreas de figuras planas.

Concluímos assim, que o processo de ensino – aprendizagem pode ser facilitado quando bem articulado e norteado por uma proposta didática que seja de fácil aceitação e desenvolvimento por parte do grupo a qual foi submetida. Dessa forma, sempre se faz necessário, independente da área, um olhar crítico do professor acerca da problemática que a sua turma pode apresentar.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da Matemática**. Curitiba: UFPR, 2007.

ARTIGUE, M. Ingeniería didáctica. In: ARTIGUE, M., DOUADY, R., MORENO, L. (org.). GÓMEZ, P. (Ed.). **Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas**. Bogotá: una empresa docente & Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V., 1995, p. 33-59.

Artigue, M. (1996) “**Engenharia Didáctica**”, In: DIDÁTICA DAS MATEMÁTICAS. Brun, J. (Org.). Lisboa: Instituto Piaget.

ARTIGUE, M. (1988): **“Ingénierie Didactique”**. Recherches en Didactique des Mathématiques.

ARTIGUE, M. (1990). **Epistémologie et Didactique**. Recherches en Didactique des Mathématiques.

BARBOSA, M. T. **Do antigo Oriente Próximo a Roma: uma abordagem da antiguidade**. Guarapuava : Ed. Unicentro, 2009.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 2. ed. Sào Paulo: Edgard Blücher, 1996. Tradução: Elza F. Gomide.

BRASIL, **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática/ Ministério de Educação. Secretaria da Educação Fundamental. 3.ed. Brasília: A Secretaria, 2001

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018. <Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>.
Acesso: 17 set. 2023

BRASIL**. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996**. LDB: Lei das Diretrizes e Bases da Educação nacional. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília, 1996. Disponível em: http://www.planalto.gov. br/ccivil_03/leis/l9394.htm. Acesso em: 07 out. 2023.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Ministério da Educação e do Desporto: Secretaria de Educação Fundamental. Brasília, 1997.

CONGRESSO BRASILEIRO DE ETNOMATEMÁTICA 4., Belém, **Etnomatemática presente no contexto de estudantes ribeirinhos do Ensino Médio**. Belém: UFPA. 12p. Disponível em:

http://www.cbem4.ufpa.br/anais/Arquivos/CC_ELIANASOUZA.pdf. Acesso em 15 de dez. 2023.

CHIZZOTTI, Antônio. **Pesquisa em ciências humanas e sociais**. São Paulo: Cortez, 1991.

D’AMBRÓSIO, Ubiratan. **Etnomatemática**. São Paulo, 1990.

D’AMBRÓSIO, U. **Etnomatemática: arte ou técnica de explicar e conhecer**. 4 ed. São Paulo: Ática, 1998.

D’AMBROSIO, Ubiratan. **A História da Matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática**. In: BICUDO, M. A. V. (org.). Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999, p. 97-115.

D’AMBRÓSIO, Ubiratan. **Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2001.

D’AMBROSIO, Ubiratan. **Sociedade, cultura, matemática e seu ensino**. Educação e Pesquisa, São Paulo, v. 31, n. 1, p. 99-120, jan./abr. 2005. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/ep/v31n1/a08v31n1.pdf>. Acesso em: 01 dez. 2023.

D'AMBROSIO, U. **Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade**. 5. ed. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2013.

DOUADY, R. **A Universidade e a Didática da Matemática**. Caderno da RPM, v. 1, n. 1, 1993

GERDES, P. **Etnomatemática: cultura, matemática, educação.** Moçambique: ISP, 1991.

GERDES, Paulus. **Etnogeometria – Cultura e o despertar do pensamento geométrico**. Reedição: Instituto Superior de Tecnologias e de Gestão (ISTEG), Belo Horizonte, Boane, Moçambique, 2012a.

GRAVINA, M. A. SANTAROSA, L. M. **A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados**. IN: Anais do IV Congresso RIBIE, 1998.

HERÓDOTO, Oeuvres complètes II 109*,* p. 183*,* apud CARVALHO,. ROQUE, 2019, p. 60)

KNIJNIK, Gelsa et al. **Etnomatemática em movimento**. Belo Horizonte: Autêntica, 2012.

LORENZATO, S. **Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis**. In: LORENZATO, Sérgio. Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores. Campinas: Autores Associados, 2006. p. 3-38.

Machado, S. D. A. **Engenharia Didática**. In: Machado, S. D. A. (Org.) Educação Matemática: uma (nova) introdução. 3. ed. São Paulo: EDUC, p.233 - 247, 2008.

MENDES, I. A. **Matemática e investigação em sala de aula**: tecendo redes cognitivas na aprendizagem. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

OLIVEIRA, ROSALINE BEZERRA DE. ALVES, J. J. A. CONTRIBUIÇÕES DA ETNOMATEMÁTICA NA FORMAÇÃO DOCENTE. Revista Científica Semana Acadêmica. Fortaleza, ano MMXIX, Nº. 000182, 30/10/2019. Disponível em: https://semanaacademica.org.br/artigo/contribuicoes-da-etnomatematica-na formacao-docente. Acessado em: 05/10/2023.

Pommer, W. M. (2013). **A Engenharia Didática em sala de aula: Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares**. São Paulo.

POZZER, Katia. **A escrita cuneiforme no antigo Oriente Próximo: Origens e desenvolvimento**. In: BAKOS, M. M.; POZZER, K. M. P. (Org.). Anais da III Jornada de Estudos do Oriente Antigo: Línguas, Escritas e Imaginários. Coleção História 20. Porto Alegre: EDIPUCRS, 1998. p. 39-55.

ROQUE, Tatiana; PITOMBEIRA, João Bosco. Tópicos da História da Matemática.

ANEXOS

Anexo A: figuras das análises dos livros 1, 2 e 3

Na planta baixa, os cômodos e objetos são desenhados em escala, ou seja, proporcionais ao tamanho real do imóvel.

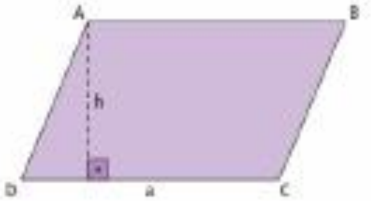
1. Você já conhecia esse tipo de representação de edificações e sua denominação? Converse com os colegas a respeito da importância desse tipo de representação. Veja o Manual do Professor.
2. Pesquise em livros e na internet o que é uma maquete. Em seguida, explique a diferença entre planta baixa e maquete.
3. Abaixo estão indicadas algumas etapas da construção de um imóvel. Reúna-se com mais dois colegas, pesquise, converse e ordene estas etapas em ordem cronológica de realização. Reflita sobre as etapas, de forma que a sequência possa ser executada.

- Nivelamento do terreno 2
- Projeto e documentação 1
- Alicerce e alvenaria 4
- Cobertura/Telhado 5
- Fundação 3
- Instalações de esquadrias, portas, pias e cerâmica 7
- Pintura 8
- Instalações elétricas 6

Escreva no caderno

125

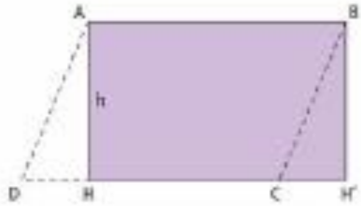
Área do paralelogramo



Vamos considerar um paralelogramo ABCD cujas base e altura medem *a* e *h*, respectivamente, como mostra a figura ao lado.

Projetando os vértices *A* e *B* desse paralelogramo sobre a reta DC, obtemos os pontos *H* e *H'*, respectivamente, determinando, assim, o retângulo ABH'H. Os triângulos AHD e BH'C são congruentes; então, eles têm a mesma área.

Logo, a área do paralelogramo ABCD é igual à área do retângulo ABH'H.



$$S = a \cdot h$$

O resultado obtido independe do lado escolhido para ser a base. Caso tivéssemos escolhido outro lado do paralelogramo como base e sua respectiva altura, o resultado seria o mesmo.

Exercícios resolvidos

1 A figura representa um terreno de forma retangular e área de 1 000 m².

Sabendo que as medidas do comprimento e da largura são diretamente proporcionais a 5 e 2, respectivamente, calcule a medida do comprimento desse terreno.

Resolução

Representando a medida do comprimento por 5x e da largura por 2x, com $x > 0$, temos:

$2x \cdot 5x = 1000 \Rightarrow 10x^2 = 1000 \Rightarrow x^2 = 100$

Resolvendo a equação, vem:

$x^2 = 100 \Rightarrow x = 10$ ou $x = -10$ (não satisfaz)

Logo, $x = 10$.

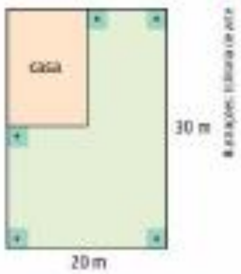
Assim, as medidas dos lados são:

Comprimento: $5x = 5 \cdot 10 = 50$

Largura: $2x = 2 \cdot 10 = 20$

Portanto, o comprimento do terreno mede 50 m.

2 Uma casa ocupa a quarta parte de um terreno, como representa a figura ao lado.



O restante do terreno é usado como quintal.

a) Qual é a área total do terreno?

b) Certo piso é comprado em caixas que comportam 1,5 m² de material em cada uma. Quantas caixas deverão ser compradas para pavimentar o quintal deste terreno?

Resolução

a) Da figura, temos que o terreno é retangular e tem 20 m de frente por 30 m de fundo.

Para calcular a área, fazemos:

$S = 20 \cdot 30 = 600$

Logo, a área total do terreno é de 600 m².

b) Se a casa ocupa a quarta parte do terreno, sua área é igual a:

$S_{casa} = \frac{1}{4}S \Rightarrow S_{casa} = \frac{600}{4} = 150$

Portanto, $S_{casa} = 150$ m².

A área do quintal é igual a:

$S_{quintal} = S_{terreno} - S_{casa} \Rightarrow S_{quintal} = 600 - 150 \Rightarrow$
$\Rightarrow S_{quintal} = 450$

Portanto, $S_{quintal} = 450$ m².

Sabendo que com cada caixa de piso se recobre 1,5 m² do quintal, a quantidade de caixas para pavimentar o quintal todo é igual a: $\frac{450}{1,5} = 300$

Logo, serão necessárias 300 caixas de piso.

3 O que ocorre com a área de um quadrado se duplicarmos a medida de seu lado?

Resolução

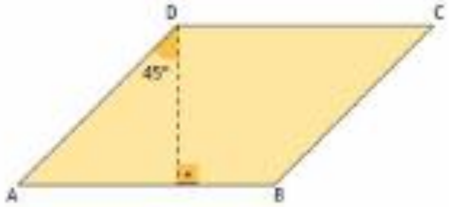
Supondo que a medida inicial do lado do quadrado seja ℓ, sua área é dada por: $A_1 = \ell^2$.

Duplicando a medida do lado, ela passa a ser 2ℓ. A área A_2 desse novo quadrado é dada por $A_2 = (2\ell)^2 = 4\ell^2$. Comparando as duas áreas, temos:

$\frac{A_2}{A_1} = \frac{4\ell^2}{\ell^2} \Rightarrow \frac{A_2}{A_1} = 4 \Rightarrow A_2 = 4A_1$

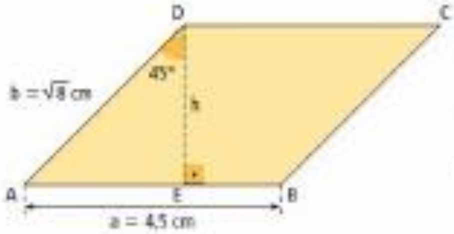
Assim, a área do quadrado aumenta 4 vezes, ou seja, quadruplica.

4 No paralelogramo ABCD, AB = 4,5 cm e AD = $\sqrt{8}$ cm. Calcule a área desse polígono.



Resolução

Para usar a fórmula da área de um paralelogramo, primeiro precisamos determinar a medida da altura desse paralelogramo.



Da figura, temos:

$$\cos 45° = \frac{h}{b} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{h}{\sqrt{8}} \Rightarrow h = 2$$

Assim, esse paralelogramo tem 2 cm de altura.

Logo, a área do paralelogramo é:

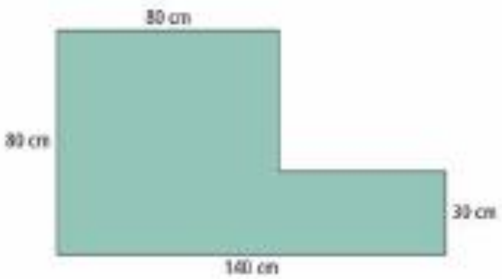
$S = a \cdot h \Rightarrow S = 4{,}5 \cdot 2 \Rightarrow S = 9$

Logo, $S = 9$ cm².

Exercícios propostos

Escreva no caderno

1. Determine a área total da figura a seguir. 8 200 cm²

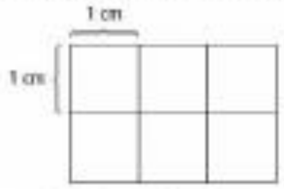


2. Determine a área de um retângulo, sabendo que a diagonal mede 10 m e o perímetro é igual a 28 m. 48 m²

3. Uma parede retangular tem 2,4 m de comprimento por 90 cm de largura. Quantos azulejos quadrados de lado medindo 45 cm, são necessários, no mínimo, para cobrir essa parede? 11 azulejos

4. Se aumentarmos a medida do lado de um quadrado em 4 cm, sua área será aumentada em 56 cm². Qual é a medida da diagonal do quadrado inicial? $5\sqrt{2}$ cm

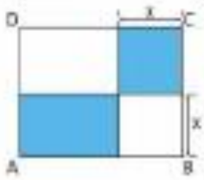
5. A malha quadriculada representada a seguir é composta de 6 quadradinhos de 1 cm de lado cada um.



Qual é a soma das áreas de todos os possíveis retângulos que podem ser obtidos por essa malha? 32 cm²

6. O que ocorre com a área de um quadrado se aumentarmos em 20% a medida de seu lado? Aumenta 44%.

7. A figura abaixo representa um retângulo ABCD.



Sabendo que AB = 27 cm e AD = 21 cm, calcule o valor de x de modo que a soma das áreas dos retângulos em azul seja máxima. 12

8. (PUC-RS) A área ocupada pela arena do Grêmio, no bairro Humaitá, em Porto Alegre, é de 200 000 m², e o gramado do campo de futebol propriamente dito tem dimensões de 105 m por 68 m. A área de terreno que excede à do campo é, aproximadamente, de ______ m².

a) 7 000
b) 70 000
c) 130 000
x d) 193 000
e) 207 000

9. (Enem/MEC) A maior piscina do mundo, registrada no livro Guiness, está localizada no Chile, em San Alfonso del Mar, cobrindo um terreno de 8 hectares de área. Sabe-se que 1 hectare corresponde a 1 hectômetro quadrado.

Qual é o valor, em metros quadrados, da área coberta pelo terreno da piscina?

a) 8
b) 80
c) 800
d) 8 000
x e) 80 000

Estudando área de figuras planas

Ao final do estudo deste capítulo podem ser trabalhados o exemplo e as atividades das páginas 268 e 269 da seção **Acessando tecnologias**.

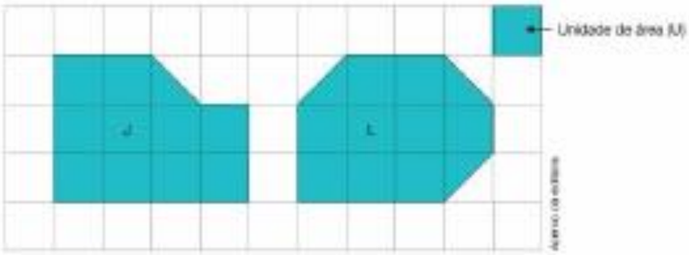
O conceito de área já era utilizado pelos egípcios há milhares de anos. Na época das cheias, quando as águas do rio Nilo começavam a subir, era inundada uma região ao longo de suas margens. Após as águas baixarem, as margens ficavam cobertas por uma lama contendo vários nutrientes, que tornava o solo mais fértil para o cultivo. No entanto, ao baixarem as águas, as demarcações que delimitavam as propriedades eram desfeitas, sendo necessária a realização de novas medições.

Agrimensor: que ou quem está legalmente habilitado para medir, dividir e/ou demarcar terras ou propriedades rurais.

Essas medições eram realizadas pelos antigos agrimensores egípcios, que utilizavam cordas com vários nós, em que a distância entre um nó e outro indicava uma unidade de medida de comprimento.

A ideia de área está relacionada à medida de uma superfície. A área de uma região ou superfície pode ser obtida relacionando quantas unidades de área correspondem a ela.

Considere, por exemplo, as seguintes figuras:



Observando as figuras **J** e **L**, podemos notar que são necessários 10,5 U para cobrir cada uma delas. Dessa maneira, dizemos que a área de cada uma das figuras é 10,5 U, isto é:

$$\text{área de } \mathbf{J} = \text{área de } \mathbf{L} = 10,5\,U$$

Para medir a área das figuras J e L, utilizamos U como unidade de medida de área. Como a quantidade de unidades U é igual, dizemos que essas figuras têm áreas iguais.

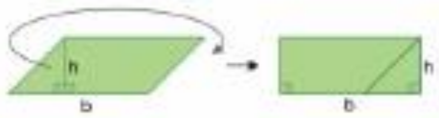
Parte de uma das pinturas de parede do túmulo de Mena (por volta de 1400 a.C. a 1350 a.C.), na antiga Tebas (Egito), mostrando o trabalho de alguns agrimensores da época.

Muitos dos registros envolvendo o cálculo de áreas podem ser encontrados no papiro de Rhind, importante documento egípcio de cerca de 1650 a.C.

Área do paralelogramo

Paralelogramo é todo quadrilátero que possui dois pares de lados paralelos.

No paralelogramo, *b* corresponde à medida da base, e *h*, à medida da altura. Ao decompô-lo, como mostra a figura, obtemos um retângulo de dimensões *b* e *h* e mesma área do paralelogramo.



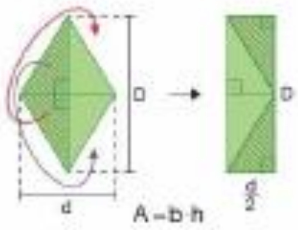
Calculamos a área de um paralelogramo multiplicando a medida de sua base pela medida de sua altura.

$$A = b \cdot h$$

Área do losango

Losango é todo paralelogramo com os quatro lados de mesma medida.

No losango, *D* corresponde à medida da diagonal maior, e *d*, à medida da diagonal menor. Ao decompô-lo, como mostra a figura, obtemos um retângulo de dimensões *D* e $\frac{d}{2}$ e mesma área do losango.



A área do retângulo pode ser calculada da seguinte maneira: $A_r = D \cdot \frac{d}{2} = \frac{D \cdot d}{2}$.

Calculamos a área de um losango multiplicando a medida de suas diagonais e dividindo o resultado por 2.

$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

Área do trapézio

Trapézio é todo quadrilátero que possui apenas um par de lados paralelos.

No trapézio, *B* corresponde à medida da base maior; *b*, à medida da base menor; e *h*, à medida da altura. Com outro trapézio congruente a esse, podemos compor um paralelogramo cuja medida da altura é *h*, e a da base, B+b.

A área do paralelogramo pode ser calculada da seguinte maneira: $A_p = (B + b) \cdot h$.

Como a área do trapézio corresponde à metade da área do paralelogramo, temos:

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

Calculamos a área de um trapézio adicionando a medida da base maior com a da menor, multiplicando a soma obtida pela medida da altura e dividindo o resultado por 2.

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

Contexto · A medição da terra

10. O surgimento das medições de área está relacionado à necessidade, no decorrer da história da humanidade, que as civilizações tiveram de demarcar territórios, sobretudo nas regiões destinadas ao plantio.

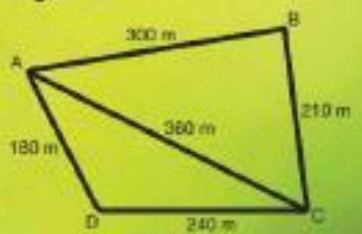
No antigo Egito, por exemplo, às margens do rio Nilo, onde essa civilização se desenvolveu, as terras que estavam demarcadas e repartidas entre os camponeses tinham, anualmente, parte de sua extensão inundada pelo rio, que, ao voltar ao nível normal, deixava o solo fértil e propício ao plantio, mas também carregava consigo as demarcações dos lotes. Para repartir novamente essas terras, agrimensores realizavam medições de área, devolvendo aos camponeses a parte correspondente que estava submersa. Esses agrimensores utilizavam cordas com unidades de comprimento preestabelecidas na realização do trabalho e, por consequência, ficaram conhecidos como "esticadores de cordas".

Em registros antigos, como no Papiro de Rhind, há diversos relatos e problemas envolvendo áreas de polígonos, círculos, entre outros. Esses registros evidenciam o quanto já se dava importância a medições de área. O problema da quadratura do círculo, em que se pedia a construção de um quadrado com a mesma área de um círculo dado, é um dos mais emblemáticos nesse sentido, principalmente porque sua resolução não é possível; apenas uma aproximação, utilizando régua e compasso.

Cubação

No método da cubação, faz-se uso de um procedimento já utilizado no antigo Egito, que consiste em aproximar figuras para facilitar o cálculo da área aproximada do terreno. No exemplo a seguir, a região indicada pelo quadrilátero ABCD é aproximada por um retângulo A'B'C'D'.

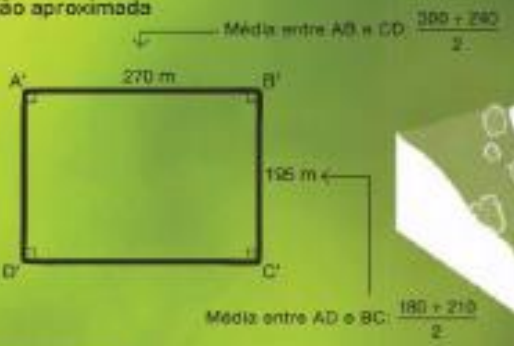
Região real

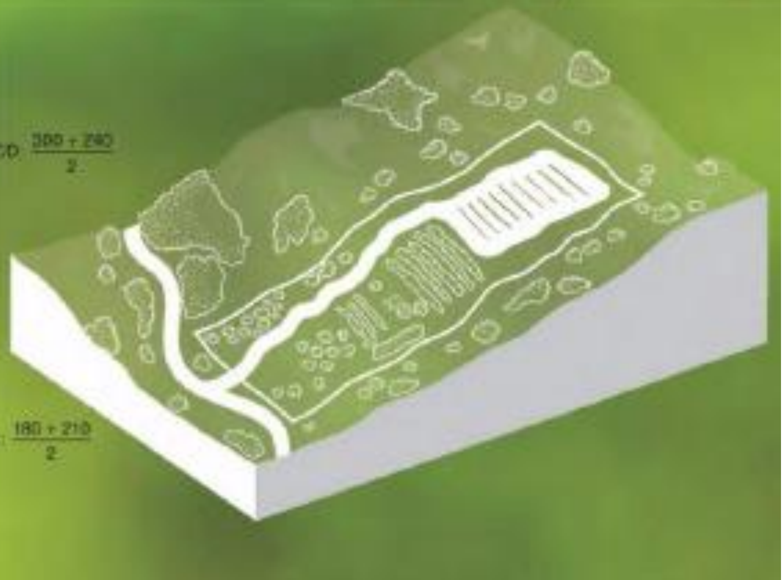


Área real

$A_1 = \sqrt{435 \cdot 135 \cdot 225 \cdot 75} + \sqrt{390 \cdot 210 \cdot 30 \cdot 150} \approx$
$\approx 50677{,}56 \rightarrow 50677{,}56\ m^2$

Região aproximada





Área aproximada

$A_2 = 270 \cdot 195 = 52650 \rightarrow 52650\ m^2$

Hospital de campanha montado no Estádio do Pacaembu, em São Paulo (SP) para tratamento de pacientes com covid-19. Fotografia de 2020.

Introdução

Na abertura deste Capítulo, vimos como algumas ONGs auxiliam na construção de moradias para famílias sem recursos. Nesse processo de construção ou na reforma de um imóvel, muitas atividades envolvem medições e cálculos de áreas e perímetros. Neste Capítulo, veremos como calcular a área de algumas figuras planas.

As áreas que precisamos determinar no dia a dia nem sempre são de polígonos perfeitos, mas saber como realizar esse cálculo nos ajuda a fazer uma boa aproximação de áreas que não têm uma forma específica.

Área de polígonos

O Estádio Municipal Paulo Machado de Carvalho, conhecido como Pacaembu, em São Paulo, teve seu campo de futebol, de 105 m de comprimento por 68 m de largura, ocupado por um hospital de campanha durante 84 dias, em 2020, para o tratamento de pacientes com covid-19.

Para determinar a área do hospital de campanha, utilizando essas informações, podemos realizar uma aproximação, calculando a área do campo de futebol. Para isso, precisamos retomar o cálculo da área de um retângulo visto no Ensino Fundamental. A seguir, veremos como determinar a área desse e de outros polígonos.

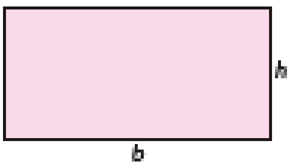
PENSE E RESPONDA

Calcule a área do campo de futebol do Estádio do Pacaembu e determine a porcentagem ocupada pelo hospital de campanha montado em 2020, sabendo que a área do hospital era de 6 300 m².

7 140 m²; aproximadamente 88%

Área do retângulo

A área S de um retângulo de lados de medidas b e h, com b e h reais positivos, é dada pelo produto da medida da base b pela medida da altura h.

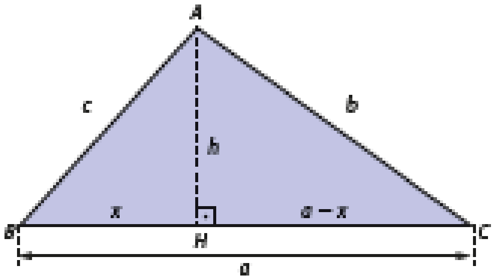


$$S = b \cdot h$$

PARA ASSISTIR

ÁREA de figuras planas: qualquer área com uma única fórmula: "porque sim" não é resposta. 2020. Vídeo (20min22s). Publicado pelo canal A Matemaníaca por Julia Jaccoud. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=I0z1uXO_sMA. Acesso em: 28 jul. 2020.

Esse vídeo apresenta, de maneira clara e sucinta, como obter as fórmulas de áreas de figuras planas.



Outra maneira de calcular a área de um triângulo qualquer é a partir da medida de seus três lados.

Seja um triângulo ABC em que a, b e c são, respectivamente, as medidas dos lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ e h é a medida da altura $\overline{AH}$ relativa ao lado $\overline{BC}$, como mostra a figura ao lado.

A área S do triângulo é dada por:

$$S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$, em que $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ é o semiperímetro do triângulo.

Essa expressão para o cálculo da área de um triângulo é conhecida como **fórmula de Heron**.

SAIBA QUE...

Heron de Alexandria foi um matemático grego que viveu por volta do ano 100. Ficou conhecido pela fórmula para o cálculo da área de um triângulo e que leva seu nome. O livro em que apresenta essa fórmula, *A métrica*, só foi encontrado em 1896.

Fonte dos dados: BOYER, C. B. **História da matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

PARA ACESSAR

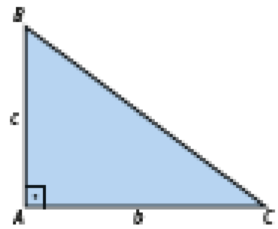
CLUBES DE MATEMÁTICA DA OBMEP. **Sala de estudo: fórmula de Herão**. [2020]. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-estudo-formula-de-herao-2/. Acesso em: 28 jul. 2020.

Esse *site* apresenta várias maneiras de realizar a demonstração da fórmula de Heron.

Área do triângulo retângulo

Em um triângulo retângulo ABC, o cateto $\overline{AB}$ é a altura relativa ao lado $\overline{AC}$ e vice-versa. Assim, sendo $AB = c$, $AC = b$ e S a área do triângulo retângulo ABC, temos:

$$S = \frac{b \cdot c}{2}$$

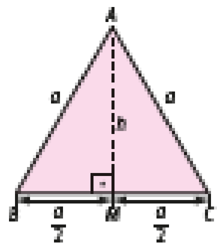


Área do triângulo equilátero

Em um triângulo equilátero, todos os lados são congruentes, todos os ângulos internos são congruentes e toda altura é também bissetriz e mediana. Vamos considerar um triângulo equilátero ABC como mostra a figura ao lado.

A área S do triângulo equilátero ABC é dada por:

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

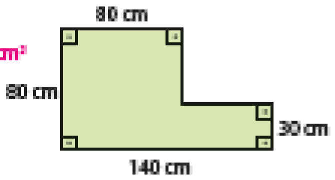


ATIVIDADES

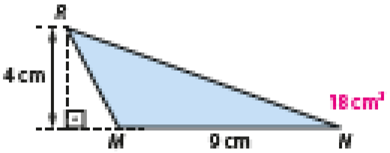
NÃO ESCREVA NO LIVRO

1. Calcule a área das figuras a seguir.

a) 8 200 cm²

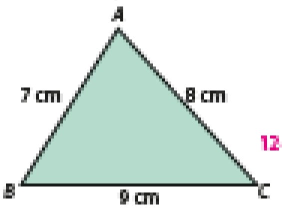


b)



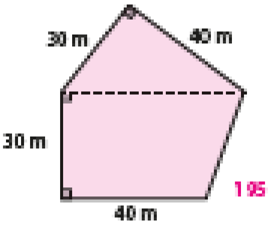
18 cm²

c)



$12\sqrt{5}$ cm²

d)



1 950 m²

2. Uma parede retangular tem 2,4 m de comprimento por 90 cm de largura. Quantos azulejos quadrados de lado medindo 45 cm são necessários, no mínimo, para cobrir essa parede? 11 azulejos

3. Se aumentarmos a medida do lado de um quadrado em 4 cm, sua área será aumentada em 56 cm². Qual é a medida da diagonal do quadrado inicial? $5\sqrt{2}$ cm

4. O que ocorre com a área de um quadrado se aumentarmos em 20% a medida de seu lado? aumenta 44%

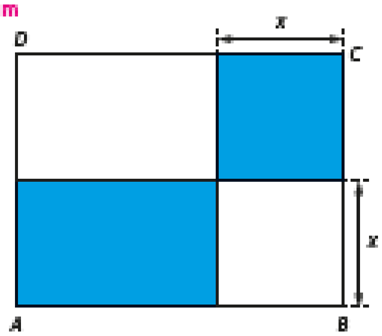
5. (Vunesp-SP) Uma parede de 350 cm de altura e 500 cm de comprimento será revestida de azulejos quadrados iguais. Desprezando-se a necessidade de deixar espaço entre os azulejos e supondo-se que não haverá perdas provenientes do corte deles:

a) determine o número de azulejos de 20 cm de lado necessários para revestir a parede; 437,5 azulejos

b) encontre a maior dimensão de cada peça de azulejo para que não haja necessidade de cortar nenhum deles. 50 cm

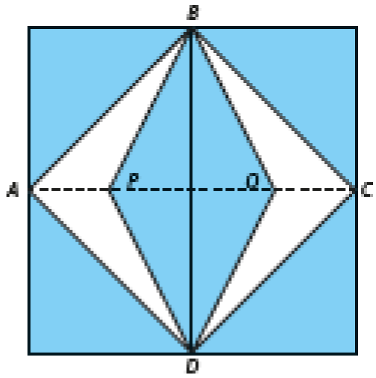
6. Considere o retângulo *ABCD* a seguir.

12 cm



Sabendo que $AB = 27$ cm e $AD = 21$ cm, calcule o valor de *x* de modo que a soma das áreas dos retângulos em azul seja a maior possível.

7. (Enem/MEC) Para decorar a fachada de um edifício, um arquiteto projetou a colocação de vitrais compostos de quadrados de lado medindo 1 m, conforme a figura a seguir.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Nesta figura, os pontos *A*, *B*, *C* e *D* são pontos médios dos lados do quadrado e os segmentos $\overline{AP}$ e $\overline{QC}$ medem $\frac{1}{4}$ da medida do lado do quadrado. Para confeccionar um vitral, são usados dois tipos de materiais: um para a parte sombreada da figura, que custa R$ 30,00 o m², e outro para a parte mais clara (regiões *ABPDA* e *BCDQB*), que custa R$ 50,00 o m².
De acordo com esses dados, qual é o custo dos materiais usados na fabricação de um vitral? alternativa b

a) R$ 22,50
b) R$ 35,00
c) R$ 40,00
d) R$ 42,50
e) R$ 45,00

Anexo B: Lei Nº 9394 de 1996

Leitor, neste anexo você irá encontrar parte da lei Nº 9394 que foi destinada para análise deste trabalho.

LEI Nº 9.394 de 20 de dezembro de 1996

Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional.

O Presidente da República

Faço saber que o Congresso Nacional decreta e eu sanciono a seguinte Lei:

TÍTULO I

DA EDUCAÇÃO

Art. 1º. A educação abrange os processos formativos que se desenvolvem na vida familiar, na convivência humana, no trabalho, nas instituições de ensino e pesquisa, nos movimentos sociais e organizações da sociedade civil e nas manifestações culturais.

§1º Esta Lei disciplina a educação escolar, que se desenvolve, predominantemente, por meio do ensino, em instituições culturais.

§2º A educação escolar deverá vincular-se ao mundo do trabalho e à prática social.

TÍTULO II

DOS PRINCÍPIOS E FINS DA EDUCAÇÃO NACIONAL

Art. 2º. A educação, dever da família e do Estado, inspirada nos princípios de liberdade e nos ideais de solidariedade humana, tem por finalidade o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho.

Art. 3º. O ensino será ministrado com base nos seguintes princípios:

I - Igualdade de condições para o acesso e permanência na escola;

II- Liberdade de aprender, ensinar, pesquisar e divulgar a cultura, o pensamento, a arte e o saber;

III - Pluralismo de ideias e de concepções pedagógicas;

IV - Respeito à liberdade e apreço à tolerância;

V - Coexistência de instituições públicas e privadas de ensino;

VI - Gratuidade do ensino público em estabelecimentos oficiais;

VII - Valorização do profissional da educação escolar;

VIII - Gestão democrática do ensino público, na forma desta Lei e da legislação dos sistemas de ensino;

IX - Garantia de padrão de qualidade;

X - Valorização da experiência extraescolar;

XI - Vinculação entre a educação escolar, o trabalho e as práticas sociais.