UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

BRUNO SANTOS LIMA

A HISTÓRIA DOS CONCEITOS PARA ABORDAR FRAÇÕES NO ENSINO FUNDAMENTAL

MACEIÓ
2022

BRUNO SANTOS LIMA

A HISTÓRIA DOS CONCEITOS PARA ABORDAR FRAÇÕES NO ENSINO FUNDAMENTAL

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Universidade Federal de Alagoas – UFAL, como parte dos requisitos necessários para obtenção de Grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof. Dra. Lúcia Cristina Silveira Monteiro

MACEIÓ

2022

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário: Valter dos Santos Andrade

L732h Lima, Bruno Santos.
A história dos conceitos para abordar frações no Ensino fundamental / Bruno Santos Lima. Maceió – 2022.
30 f. : il.

Orientadora: Lúcia Cristina Silveira Monteiro.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática: Licenciatura) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática Maceió, 2022.

Bibliografia: f. 29-30.

1. Matemática - História. 2. Matemática - Conceitos. 3. Frações - Estudo e ensino. 4. Ensino fundamental. I. Título.

CDU: 511.13

RESUMO

O presente trabalho consiste em uma revisão integrativa da literatura com vistas a analisar a importância da abordagem à matemática considerando a história dos conceitos como um espaço para investigação nos processos de ensino e de frações. Aqui nesse trabalho destacaremos o público-alvo do sexto ano do ensino fundamental. Para essa construção tomaremos como referência as bases legais para a Educação Nacional. Portanto, essa pesquisa busca avaliar a importância de se repensar o ensino da Matemática na atualidade, que predominantemente, faz referência apenas as suas estruturas operatórias formais e passar a considerar a história dos conceitos matemáticos para investigação em sala de aula. Com a construção dessa pesquisa, foi possível perceber as lacunas que existem entre as possibilidades de interpretação e representações dos conceitos considerando a história antiga e recente e, buscando traduzir novas relações entre as representações por meio de investigações, explorando atividades que sejam significativas e motivadoras para estimular o protagonismo dos estudantes.

Palavras-chave: História dos conceitos na Matemática; Ensino de Frações; atividade simbólica.

ABSTRACT

The present work consists of an integrative literature review in order to analyze the importance of the approach to mathematics considering the history of concepts as a space for investigation in the teaching and fractions processes. Here in this work we will highlight the target audience of the sixth year of elementary school. For this construction, we will take as a reference the legal bases for National Education. Therefore, this research seeks to assess the importance of rethinking the teaching of Mathematics today, which predominantly makes reference only to its formal operational structures, and to start considering the history of mathematical concepts for investigation in the classroom. With the construction of this research, it was possible to perceive the gaps that exist between the possibilities of interpretation and representations of the concepts considering the ancient and recent history and, seeking to translate new relationships between the representations through investigations, exploring activities that are significant and motivating for encourage student involvement.

Key words: History of concepts in Mathematics; Teaching Fractions; symbolic activity.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Aprender sobre as origens e a evolução dos temas favoritos é uma curiosidade inata que vem com os seres humanos. Na escola, aprende-se e há interesse por muitos temas, em todas as disciplinas. No entanto, a maioria das práticas docentes atuais parecem querer indicar que não há nada a ser “descoberto” ou “criado”, principalmente quando se trata de conhecimento matemático. O modo como esses conteúdos são apresentados passam a ideia de que sempre tiveram a mesma forma, abstrata e sem contextualização, portanto, sem significado.

Diante dessa questão problemáticas, há uma necessidade de pensar sobre metodologias de ensino, e aqui, serão descritos fatos com base na literatura desse campo de pesquisa sobre a importância de se considerar a História dos conceitos no desenvolvimento da matemática pode tornar as aulas mais dinâmicas e interessantes. A fundamentação na história dos conceitos pode se tornar uma ferramenta para construção de significados que podem ser interpretados e ressignificados, buscando sair dessa prática estática para repetições mecânicas de algoritmos como única alternativa para abordar os conceitos da matemática.

O resgate da história do conhecimento matemático em ambiente escolar traz um exame crítico das disciplinas pertinentes, uma reflexão sobre a relação entre história e matemática. Podemos acreditar que a presença da história de um conceito na sala de aula constitui um recurso didático que os professores precisam investigar para contribuir com a construção de sentido do que se está aprendendo.

Por exemplo, tomemos o conceito de medidas em seu processo de desenvolvimento e percebemos que em um dado momento da história desse conceito foi necessário um novo número para representar uma medida, pois apenas valores "inteiros" não levam em consideração alguns casos, de modo que números racionais aparecem em representações fracionárias. Questões sobre o significado desses conceitos matemáticos levaram a uma série de estudos sobre as maneiras pelas quais o significado desses números é aprendido no ambiente escolar. Buscam alternativas de contextos históricos e sociais para contextualizar o ensino de determinados conceitos e, para isso, os professores dispõem de metodologias que incluem investigações matemáticas, que devem ser vistas como suporte para o processo de ensino.

Nesse contexto, o presente trabalho buscou analisar como o uso da História do conceito de fração pode contribuir para a diversificação de atividades a serem propostas para a construção de significados nos processos de ensino e aprendizagem de frações no 6ª ano do ensino fundamental.

Portanto, a hipótese que permeia esse trabalho é a de que investigando a história dos conceitos da matemática como metodologia de ensino deixaremos de tornar o processo de aprendizagem da matemática enfadonho, visando uma maior motivação dos alunos para apreender o conteúdo.

Para atingir os objetivos propostos, esse trabalho teve como base a pesquisa de natureza qualitativa de cunho bibliográfico, tendo como norte de descrição e análise dos dados bibliográficos coletados.

Vale destacar a importância da realização dessa pesquisa, uma vez que há notadamente uma necessidade de aprimoramento no ensino da matemática, no sentido de instigar os alunos a se relacionarem de forma mais positiva com esse campo de conhecimento. Ainda, há uma importância para o pesquisador, enquanto atuante da área como professor e também como contribuição para sua formação e a continuação dela.

Assim, no primeiro capítulo apresentamos as Bases Legais como orientadora de abordagem ao currículo do ensino Fundamental...em seguida, uma descrição sobre o conceito de fração e sua relação com significados em tempos remotos.

Já no segundo capítulo, temos como inicio o mapa conceitual que a maioria dos alunos, ou até mesmo licenciandos tem sobre a história do conceito de fração, não percebendo que elas surgiram no antigo Egito e com a necessidade de resolver problemas que envolvem medidas.

A partir disso, abordamos outros conceitos e até outras representações para o conceito de fração, propondo novos signos usando signos e registros de representação semiótica para poder abordar até mesmo os erros que podem ser cometidos pelos alunos, para poder direcioná-los a uma metodologia de ensino ativa, sendo ele o protagonista do seu aprendizado.

Assim, chegaremos a possibilidade de aplicabilidade da história dos conceitos matemáticos no ensino com uma situação-problema vivenciada no Egito, que propõe questionamentos relacionados à necessidade da numeração fracionária, pois nem sempre a unidade de medida utilizada podia ser expressa por um número exato (inteiro). Dessa maneira, o desenvolvimento do planejamento proporciona, a partir de uma necessidade, investigar conceitos relacionados ao conceito de frações para solucionar esse problema.

1 PERSPECTIVAS DO ENSINO DE FRAÇÕES NO PANORAMA NACIONAL

Apesar de terem sido publicados em 1998 e atualmente tenha sido lançada a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), este documento ainda serve como norte nas perspectivas de ensino, e por isso, entendemos a relevância de abordá-lo.

Os PCN destacam a importância do papel da escola enquanto formadora de cidadãos. Foram elaborados no intuito de criar condições nas escolas de maneira que os jovens tenham acesso ao conhecimento necessário para reconhecer a cidadania. Além disso, servem de apoio para o professor planejar as suas aulas. Foram divididos por áreas do currículo escolar básico, e apontam

> A importância de discutir, na escola e na sala de aula, questões da sociedade brasileira como as ligadas a Ética, Meio Ambiente, Orientação Sexual, Pluralidade Cultural, Saúde, Trabalho e Consumo ou a outros temas relevantes. (BRASIL, 1998, p. 9).

Os PCN indicam que a Lei Federal nº 9.394, de 1996, conhecida como Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), nomeia como Educação Básica a educação formada pela educação infantil, ensino fundamental e ensino médio; dessas, sendo ensino fundamental prioritário. Tem como finalidade “desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação indispensável para o exercício da cidadania e fornecer os meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores” (BRASIL, 1998, p. 41).

Especificamente sobre os PCN de Matemática, temos que esta faz-se presente no cotidiano das pessoas, seja para quantificar, calcular, localizar um objeto no espaço, ler gráficos e mapas, fazer previsões. Destacam também a importância da resolução de problemas, e de se deixar o procedimento mecânico de lado em Matemática. Já na história, pode-se considerar a Matemática como uma criação humana, que surgiu a partir de determinadas necessidades, podendo servir como ferramenta didática para a contextualização histórica na sala de aula.

Dando ênfase ao terceiro ciclo – que corresponde ao 6ª e 7º ano – os PCN definem que a Matemática

> (...) caracteriza-se como uma forma de compreender e atuar no mundo e o conhecimento gerado nessa área do saber como um fruto da construção humana na sua interação constante com o contexto natural, social e cultural. (BRASIL, 1998, p. 24).

Segundo esse documento, a Matemática pode contribuir para formar o cidadão, desenvolvendo metodologias que enfatizam a construção de estratégias, comprovem e justifiquem resultados, a criatividade, a iniciativa pessoal, o trabalho coletivo e a autonomia advinda da confiança em entender desafios.

Nos Parâmetros, é proposto alguns caminhos para se ensinar Matemática. Destaca-se aqui a História da Matemática, expondo que

> Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento (BRASIL, 1998, p. 42).

Além disso, a História da Matemática pode ser um meio para o resgate da própria identidade cultural do aluno. Vale destacar que essa abordagem da história serve como um recurso didático, em que o educador deve encarar "com muitas possibilidades para desenvolver diversos conceitos, sem reduzi-la a fatos, datas e nomes a serem memorizados" (BRASIL, 1998, p. 43).

1.1 Base nacional comum curricular (BNCC)

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) elenca quais aprendizagens são indispensáveis para a criança, adolescente e adultos, em cada fase de aquisição. Destaca-se aqui as aprendizagens de Matemática que constam no 6º ano. Para isso, faz-se necessário, incialmente, e explicitação de alguns conceitos.

A BNCC define competência como "a mobilização de conhecimentos (...), habilidades (...), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho." (BRASIL, 2018, p. 8). Nesse sentido, apresenta-se aqui as competências que se mostram mais relevantes para o rumo dessa pesquisa, quais sejam: as competências de número 1, 4, 6, 9 e 10, conforme constam na BNCC.

> 1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
> 4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artísticas, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
> 6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
> 9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de

> grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
> 10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários (BRASIL, 2018, p. 9 e 10).

A BNCC é dividida em competências na educação infantil, ensino fundamental e médio. As competências básicas são divididas em 10. Especificamente, o ensino fundamental, que faz parte o objeto de estudo desse trabalho (6º e 7º ano), está divido em 5 áreas do conhecimento são elas linguagens, Matemática, ciências da natureza, ciências humanas e ensino religioso. Destacamos a área do conhecimento Matemática que contém a componente curricular Matemática, objeto de estudo.

Na BNCC é destacado que nos anos finais do ensino fundamental (6º ao 9º ano) é importante que os professores aprofundem os conteúdos ensinados nos anos iniciais do ensino fundamental de modo que essas aprendizagens sejam retomadas e resinificadas. Assim:

> Ao longo do Ensino Fundamental – Anos Finais, os estudantes se deparam com desafios de maior complexidade, sobretudo devido à necessidade de se apropriarem das diferentes lógicas de organização dos conhecimentos relacionados às áreas (BRASIL, 2018, p. 58).

A base já destaca a importância da Matemática na educação básica:

> O conhecimento matemático é necessário para todos os alunos da Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais (BRASIL, 2018, p. 263).

Conforme descrito na BNCC, a Matemática não é simplesmente uma ciência hipotético-dedutiva, mas sim também é uma ciência de experimentação, para isso deve ser considerado o processo heurístico. Assim, espera-se que o aluno seja capaz de utilizar a Matemática para resolver problemas práticos através da interpretação e contextualização, utilizando de conceitos e procedimentos matemáticos. Nesse sentido, é importante considerar o letramento matemático que é definido como “as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente [...]” (BRASIL, 2018, p. 264).

Através do letramento, o aluno acaba reconhecendo o prazer de aprender e estudar Matemática, além de reconhecer a importância da Matemática para seu desenvolvimento como cidadão e inserção no mundo em sociedade.

Dos processos matemáticos descritos na Base, são ditos como estratégias de aprendizagem e são de grande importância, dentre outros, para o letramento matemático, são eles a “[...] resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem [...]” (BRASIL, 2018, p. 264).

Das competências especificas na área do conhecimento Matemática, aqui será destacado os relevantes para essa pesquisa, são elas:

> 1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentesmomentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.
> 2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
> 4. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.
> 7. Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.
> 8. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles (BRASIL, 2018, p. 265).

Assim, o ensino de Matemática deve corroborar para um ensino que considere a História da Matemática e a forma com que ela foi construída, de forma cultural, através de uma necessidade humana. Além disso, deve ser considerado o contexto social que esteja inserido o aluno para que a Matemática contribua para a sua realidade.

2 A FRAÇÃO

Ainda é comum algumas pessoas, incluindo alguns professores classificarem os conceitos matemáticos em dois grupos: fáceis e difíceis. Essa classificação está associada a "ideia de funcionalidade", ou seja, conceitos que aparecem com mais frequência em nosso cotidiano são considerados fáceis, como, por exemplo, o conteúdo curricular designado por fração. Uma consequência derivada dessa ideia é que por ser considerado de simples compreensão as frações devem ser abordadas, prioritariamente, no Ensino Fundamental, logo nos primeiros ciclos. Não compactuamos com as ideias anteriores e, a título de justificativa, devemos atentar para o diagrama abaixo, figura 1, que esquematiza a compreensão de licenciandos de matemática sobre o que é fração (GIMENEZ, 2005).

Figura 1

Fonte: Gimenez, 2005, p.7.

Analisando o esquema/diagrama da figura 1, é possível perceber uma limitação da compreensão do conceito de fração e as possíveis conexões com outros conceitos e formas de raciocínios encontrados ao longo da história desse conceito, mesmo por futuros professores de matemática. Sendo assim, é necessário produzir reflexões a respeito do tema para que as investigações em aulas de matemática sobre esse tema, continuem. Aqui nesse trabalho objetivamos contribuir para essa reflexão.

2.1 Referência e sentido: fração é número, fração precisa de uma unidade de referência

Frege (2013) argumenta que, para construção dos conceitos, são necessários dois elementos: a referência e o sentido. Sendo assim, alguns sentidos encontrados na história dos conceitos, que são formas de raciocínio sobre fração devem ser considerados importantes para investigação em aulas de matemática. Para exemplificar, nos reportemos à história desse conceito, quando os egípcios (GIMENEZ, p.8) se deparavam com a necessidade de dividir duas unidades para três pessoas. O procedimento tomado inicialmente era dividir as duas unidades em metades e distribuindo uma metade para cada uma das três pessoas, sobrando, portanto, uma metade a ser dividida por três. Então, cada um receberia a metade mais um terço da metade ou, seja, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \quad = \frac{1}{2}+\frac{1}{6}$. Esse procedimento, que faz uma divisão e uma subdivisão considerando conceito de metade, não pode ser desconsiderado nas investigações em sala de aula que tenham objetivo da construção de significados em torno do conceito de frações. Se os egípcios dividiam terras, podemos sugerir divisões e subdivisões em chocolates, bolos, pizzas etc., utilizando divisões por metades, metades da metade, metade da metade da metade etc.

Mas, há outras concepções mais atuais que são fundamentais, por exemplo, a insistência apenas nas subdivisões pode conduzir, em outros tipos problemas ao não reconhecimento da unidade a que está se referindo. Por exemplo, procurar um número cujo $\frac{3}{4}$ é igual a 12, pois nesse caso, a unidade de referência é maior que a unidade apresentada e seria necessário compreender a o conceito de reversibilidade das frações, ou seja, se 12 é $\frac{3}{4}$ de uma certa unidade, esta unidade procurada é $\frac{4}{3}$ de 12, ou seja, $\frac{4}{3} \times 12 = 16$, que é maior que a unidade considerada inicialmente.

Sendo assim, compreender o conceito de reversibilidade das frações de uma unidade, considerando a evolução das interpretações e representações e considerando os casos específicos da generalidade da álgebra das frações são questões importantes para reflexão sobre abordar frações pois, precisam ser apresentados aos estudantes da educação básica, buscando contextos significativos, utilizando valores numéricos, inclusive pode ser apresentado como curiosidade, pois, é interessante notar que 10% de 30 é igual 30% de 10.

Existem três ideias erradas que geralmente são apresentadas por estudantes a respeito das frações, e que podem ser fruto dos obstáculos conceituais que vão sendo construídos subliminarmente, a saber: (1) As frações são a uma parte inferior da unidade; (2) As frações são dois números separados com um traço; (3) As frações são um operador sempre indicando uma subdivisão e, portanto, o resultado sempre resultará números mais baixos. Quando não buscamos desconstruir essas ideias falsas, ao abordarmos raciocínios trazidos das interpretações de frações em diferentes contextos significativos, questões como as abordadas anteriormente podem parecer contraditórias, e se dissermos que 7/5 são uma pequena parte, também pode parecer que estamos em uma contradição, porque se a "fração é usada para apenas coisas menores que a unidade" o que pode tornar difícil aceitar que essa fração é um número, ficando mais fácil reconhecer que eles são dois (Kerslake, 1986).

Tradicionalmente, a unidade é algo que não fica explicitado, mas, a unidade é a referência que se precisa ter para atribuir algum sentido. O denominador "termo que denomina (o que dá o nome)", se refere à unidade porque a constrói, a recupera. Por exemplo, 1/4 é algo que se repete quatro vezes para reconstruir a unidade. Por isso é importante apresentar situações significativas que precisam ser percebidas em diferentes contextos, que contenham essas referências significativas de uma unidade específica, nas quais devemos construir e reconstruir ideias de fração sobre aquela unidade.

Outra questão importante a ser considerada para construção de significado de frações em diferentes contextos, é com relação a representação com figuras e podemos pensar: por que só trabalhamos frações de figuras regulares ("certinhas")? Observem que esse tipo de planejamento não tem sentido isoladamente, uma vez que perguntas como estas devem surgir de um trabalho contextualizado e ampliado a outras situações.

Para avançar por uma abordagem conceitual para frações, é necessário integrar a reflexão sobre conhecimento do mundo que nos envolve ao pensamento proporcional.

Segundo Spinillo (1997) o pensamento proporcional refere-se basicamente à habilidade em estabelecer relações. Dois tipos de relações estão envolvidas na resolução de tarefas e problemas de proporção: relações de primeira ordem e relações de segunda ordem. Para entender as relações, vejamos o seguinte problema proposto por Karplus & Peterson (1970).

> Dois bonecos eram apresentados, Sr. Alto e Sr. Baixinho, cujas alturas podiam ser medidas em botões e em clipes. A altura do Sr. Baixinho era de quatro botões ou de seis clipes. A altura do Sr. Altão era de seis botões. A tarefa da criança consistia em determinar qual seria a altura do Sr. Altão em clipes. (SPINILLO, 1997, p. 42)

As relações de primeira ordem são aquelas entre o número de clipes e botões em cada um dos bonecos, o que permite inferir a altura do Sr. Altão em clipes. A relação de segunda ordem consiste em comparar essas duas relações para verificar se são equivalentes ou não. Spinillo (1990, 1992, prelo) implementou uma análise da natureza das relações de acordo com as tarefas proporcionais, proporcionando uma diferença importante entre os dois tipos de relações de primeira ordem: relações do tipo parte-parte e relações do tipo parte-todo. As relações parte-parte (razão) são estabelecidas entre partes diretamente comparáveis, (a parte de um retângulo pintada em branco com a parte pintada em azul; espaço com água e espaço vazio em um recipiente) enquanto nas relações parte-todo (fração), a parte e o todo não são diretamente comparáveis, (a parte de um retângulo pintada em azul com sua área total; espaço coma água e o volume total do recipiente) embora tenham que ser simultaneamente considerados.

No parágrafo anterior destacamos a importância de tomar como referência o conceito de "metade" na avaliação, onde as crianças avaliam a taxa de relação ao comparar o limite da "metade" ("maior do que metade" vs. "menor do que metade") ou explicitamente envolvem este referencial ("maior/menor do que metade" vs. "igual a metade"); mas também, considerar que há limitações, pois, as crianças estudadas por Spinillo (1997) apresentaram dificuldade quando as comparações não atravessam este referencial.

Alguns autores como Carraher e Campos (2005), Spinillo (1997), acreditam que as primeiras noções sobre frações é a distribuição de uma quantidade e que também pode ser chamada de "fração como expressão de uma partição no sentido geral". Essa noção é caracterizada por qualquer tipo de situação em que um conjunto de objetos é dividido em um certo número de partes, com a designação das consequências do que corresponde a cada parte. Crianças muitos pequenas (CARRAHER e CAMPOS, 199), chegam a reconhecer resto da divisão como parte do divisor.

Portanto, a noção de distribuição de objetos, partindo de uma quantidade pequena para os níveis iniciais, é outra noção conceitual relacionada que pode anteceder o conceito de divisão, por vezes presente nas entrelinhas para compreensão do conceito de fração de uma quantidade discreta, ou conjunto de objetos discretos.

Fração como expressão de um escalar: Atribui-se às situações em que a fração é utilizada explicitamente para designar medidas ou processos de medição. Por exemplo: o corredor conseguiu fazer o percurso em 9/10 seg. corresponde também às situações de comensurabilidade mediante estratégias de agrupamento, e parece implicar a aquisição de um raciocínio proporcional. Sugere a obtenção de um par ordenado como modo de representação. Nem sempre a ordem do par coincide com a expressão usual. Por exemplo: 3 barras verdes correspondem a 2 barras vermelhas. Ou seja, a barra verde é 2/3 da barra vermelha. A visão escalar está associada a grandezas de todo tipo, não apenas com a expressão da quantidade em si, mas com a expressão da relação com uma unidade de medida, seja essa convencional ou não. Assim, repartir 1 m de fita em tiras de 5 cm, leva-nos a pensar sobre o que representa cada pedaço com relação ao total (1/20), isso indicaria uma quantidade. No entanto, falar de 1/20 m, significa pensar na expressão de uma medida, ou seja, de cada pedaço. A fração relacional se associa a dois tipos de situações que podem envolver duas situações similares ou não. No primeiro caso, podemos falar de fração-escala 1:30000 (que expressa a relação desenho-realidade) aonde se comparam comprimentos, ou no caso da inclinação de 15% de uma rampa (aonde se diz que para cada 100m na horizontal sobe-se 15m na vertical), ou ainda, no caso das liquidações, em situações do tipo "pague 3 e leve 4". Nesse último caso está evidente que nem sempre a fração é expressa com dois números separados por um traço. Por outro lado, uma fração pode não relacionar as mesmas grandezas. É o caso, por exemplo, dos fatores de conversão, os índices ou taxas de variação (como a velocidade, a pressão, etc.). Em outro tipo de situações, na construção de colares, por exemplo, "para cada 4 contas amarelas coloco 7 azuis", as frações expressam relação de proporcionalidade.

Fração como função: Este aspecto indica a fração como relação entre duas coleções de objetos ou realidades. Podemos identificar usualmente dois tipos de situações, (1) como expressão de uma comparação simples: Forma de expressar a relação entre duas partes distintas de um todo, ou coleções claramente definidas. O caso mais frequente é o das misturas. Por exemplo: Na mesa, as fichas brancas representam o dobro das pretas. Ou seja, supondo que só houvesse fichas brancas e pretas, 1/3 são pretas e 2/3 são brancas. (2) Como operador que "transforma" uma quantidade em outra, por exemplo: Obtive 25% de desconto, ou seja, de cada 100 paguei 75. As quantidades podem ser do mesmo tipo ou de tipos diferentes. Um exemplo destes últimos são os chamados "fatores de proporção" ou constante de proporcionalidade: 25 reais por cada kilograma.

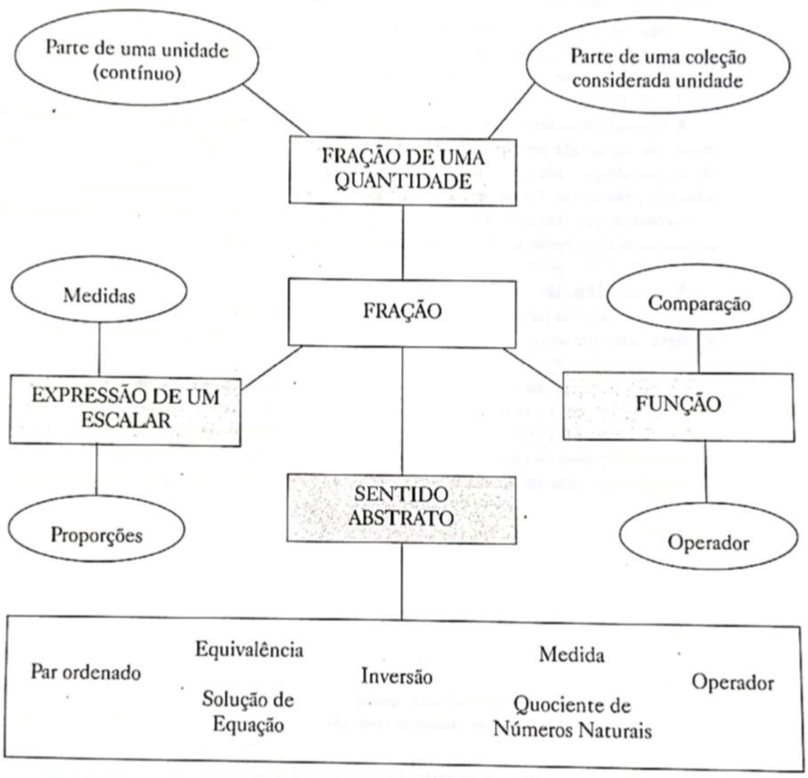
Fração como símbolo: *Frações como par ordenado*, podem surgir de situações de qualquer tipo citado anteriormente, estabelecendo-se um significado distinto aos dois elementos do par. Por exemplo: (3 , 5) indicando que se 3 barras medem sequencialmente 5mm de largura, cada barra mede 3/5 mm na formulação usual. *Equivalência como diversidade de representações de uma mesma realidade*, por exemplo: 3/5 ~ 6/10. Ela permite descrever a situação mediante a fração equivalente que seja mais cômoda. Caso particular, a porcentagem (%). *Inverso ou inversão de uma fração:* Observação do fato de que um par de números possui significação diferente segundo a sua ordem. Ou seja, parte -> todo; todo -> parte. Por exemplo, se 5 é a metade, o total é o dobro de 5. *Fração como quociente de dois números naturais:* Abstração das situações de repartição, que são representadas usualmente pela divisão e também por fração. Aplicação deste fato a outras situações. Aqui surge a utilização de decimais como forma de representação equivalente às frações e propõe-se a mudança de representações que leva a falarmos em frações decimais e periódicas. Aparece também o problema da utilização da fração como aproximação. Por exemplo: ter um desconto de 33% é como pagar aproximadamente 2/3 do valor. A fração probabilidade é um caso misto aonde se expressa uma relação ou uma determinada quantidade. Por exemplo, num jogo de roleta com dois jogadores, cada um tem a metade das possibilidades de ganhar.

A expansão sucessiva do uso de frações no currículo só pode ser vislumbrada pela abstração desse conjunto em outras frações. É essencial uma abordagem que parta dos conceitos mais simples aos mais complexos. Desta forma, diferentes aspectos das frações podem ser explorados em diferentes ciclos, com diferentes níveis de aprofundamento,

Segundo Gimenez (2005), assim como o esquema seguinte, figura 2, que sintetiza algumas dessas questões

Figura 2

Fonte - Gimenez (2005, p.13)



Nesse sentido, compreendemos que em uma abordagem significativa para compreensão dos conceitos e não apenas para memorização de procedimentos operacionais desvinculados de significados há necessidade de compreensão de que por ser tão importante, mas, não tão fácil quanto possa parecer, o conteúdo do currículo conhecido como frações deve estar presente em todos os ciclos de ensino, abordado por diferentes níveis de interpretação e representação, por construção de significados, considerando os diferentes contextos aprofundando por graus de generalidade.

2.2 Outras questões sobre a origem das atividades com frações

Os egípcios, Roque (2012), conheciam vários tipos de frações, principalmente frações unitárias, cujo numerador é 1. De fato, os estudiosos apontam que os egípcios usavam frações extensivamente. Isto é, principalmente porque eles têm tratado muito no levantamento, no que diz respeito ao movimento das águas do rio Nilo. Todos os anos, o rio Nilo passa por um período de inundação e faz com que grandes áreas de terra sejam inundadas e o tamanho de alguns lotes foram reduzidos. Esse fato, nos remete a necessidade da compreensão sobre frações unitárias, para aprofundamento de outras questões.

Roque (2012) também cita Heródoto[1] para justificar que os impostos cobrados pelo faraó eram baseados nos tamanhos das propriedades. Por isso, frequentemente, essas terras tinham de ser remarcadas a fim de que os impostos fossem ajustados ao tamanho de cada propriedade. Toda via, era comum durante o processo de medição a unidade de medida utilizada por eles, precisar ser fracionada para se adequar a exata medida do terreno. As pessoas responsáveis por essa remarcação eram chamadas esticadores de cordas. O nome se justifica por eles usarem cordas como uma espécie de fita métrica.

> Essa hipótese tem sua origem nos escritos de Heródoto, datados do século V a.E.C.: "Quando das inundações do Nilo, o rei Sesóstris enviava pessoas para inspecionar o terreno e medir a diminuição dos mesmos para atribuir ao homem uma redução proporcional de impostos. (ROQUE, 2012 p. 71)

De acordo com dados mencionados, identificamos a importância da utilização de diferentes ferramentas para compreensão das unidades, construção de unidades em diferentes contextos para contribuir com a compreensão de relações entre quantidades e significado dos padrões numéricos como construção humana, assim como também, a construção de ferramentas para contagem de objetos e frações, como nas atividades de medição, mais especificamente a medição da terra e outros objetos.

2.3 Os registros das representações semióticas da fração para o ensino.

A investigação em aulas de matemática explorando a produção de novos signos[2] na didática da matemática tem uma relação direta com a necessidade da abordagem contextualizada, como atividade humana, com construção de significado como prescrevem as Bases Legais para a Educação Básica. Para Monteiro (2021) um signo é tanto uma coisa quanto um processo de estabelecimento de uma relação entre o objeto e a interpretação dada ao objeto. Desta forma temos um fluxo de sentido, ou seja, uma interpretação que sugere uma nova interpretação, em um fluxo sem fim. Nesse sentido, provocar a interpretação com representação em nossos alunos, incluindo as ferramentas atuais das tecnologias digitais faz parte desse

[1] Heródoto foi um importante historiador da antiguidade. Conhecido como o "pai da História", nasceu na cidade de Helicarnasso (atual Bodrum na Turquia) por volta de 485 a.C. e morreu em 430 a.C.
[2] Os signos são traços, diagramas, ideias representadas.

processo de produção simbólica a respeito de algo. Obviamente os conceitos matemáticos também estão incluídos nesse desafio.

São muitas as possibilidades de interpretação com representação de um símbolo e a exploração de um símbolo específico já carrega uma infinidade delas.

2.4 O ensino de frações

Buscando-se situar a temática em seu contexto histórico, Lima apud Figueiredo (2018, p. 16) diz que as frações “(...) tiveram sua construção ao longo da história da humanidade a partir do momento que as divisões apenas em partes inteiras não resolviam os problemas, era necessário dividir em partes menores que um inteiro”.

É importante salientar que, na antiguidade, uma das civilizações que mais contribuíram para o desenvolvimento da matemática foi a Egípcia. Apesar disso, foram através dos gregos que se fez conhecido o primeiro sistema de numeração para representar frações, utilizando a ideia de parte de um inteiro.

Partindo para o ensino de frações trabalhado nas escolas atualmente, as ideias iniciais de fração iniciam-se no 2º ano do Ensino Fundamental e percorrem todo o currículo da Educação Básica. Garcez (2013) aponta que o conteúdo frações

> (...) representa uma grande dificuldade (...) mesmo após o tema já ter sido abordado de maneira exaustiva, ainda é possível observar as mais variadas dúvidas, inclusive em séries mais avançadas da educação básica, onde era obrigatória a compreensão do conteúdo. (GARCEZ, 2013, p. 19).

Pode-se destacar entre as razões que dificultam a compreensão desse conteúdo, a preocupação de ensinar a sua nomenclatura antes mesmo da sua significação, como também o tempo para o ensino do conteúdo, visto que o conteúdo frações é deixado para ser ensinado sempre no final do ano letivo (SMOLE; DINIZ, 2016).

Buscando maneiras de solucionar essa problemática, os docentes devem levar em consideração todos os significados existentes sobre este conteúdo em diferentes contextos. Nesse sentido, Figueiredo (2018) diz que para o ensino eficaz de fração é necessário

> (...) a abordagem de alguns aspectos dos números fracionários, tais como a sua conceituação, seus diferentes significados e formas de representação e demais elementos a eles conectados (...) (FIGUEIREDO, 2018, p. 17).

Por isso, faz-se necessário que os professores trabalhem com situações-problemas contextualizadas, investigações iniciadas em aulas de matemática e que extrapolem a sala de aula, para que os alunos associem a teoria que é ensinada com a prática vivenciada pelos mesmos, como sugere a Base Nacional Comum Curricular do Ensino Fundamental (BRASIL, 2017).

Segundo Jesus (2013, p. 9), as ideias sobre frações começam a ser trabalhadas desde cedo, nos anos iniciais do Ensino Fundamental, porém, nesta breve apresentação aos alunos o conteúdo é abordado de maneira elementar e mais ligado à prática do dia a dia, como dividir um bolo ou juntar as metades.

Já no 6º ano, o assunto é retomado, por exemplo, com as leituras das frações, algumas representações simples e, de um tópico para outro, começam a ser apresentadas regras para resolver situações-problema. São regras para encontrar frações equivalentes, para simplificar frações, comparar, adicionar, subtrair, multiplicar e dividir frações. Para um aluno que está, em média, com 11 anos, aceitar e memorizar essas regras que, a princípio, não fazem sentido, pode ser um caminho árduo.

Apesar disso, acredita-se que é possível levar a compreensão ao aluno, partindo de exemplos simples, ao mesmo tempo em que ele mesmo constrói as regras, através de experimentos, manipulação e observações conduzidas pelo professor, e aí entra também o uso da História da Matemática.

Diante disso, entende-se que a forma como o conteúdo é abordado faz toda a diferença para o processo de aprendizagem dos alunos, pois viabiliza aos alunos fazerem ligações com os objetos e até mesmos alimentos que encontram no seu cotidiano, facilitando a percepção deles sobre os conceitos básicos de frações. Portanto, conclui-se que o ensino de fração precisa ser visto com mais atenção, principalmente no que tange alternativas didáticas para ensiná-lo.

2.5 História dos conceitos, antiguidade com atualidade: utilizando artefatos digitais

Com origem grega, a palavra metodologia significa “percorrer um caminho”. A abordagem histórica dos conteúdos matemáticos é um dos caminhos que o professor pode escolher para mediar a construção do conhecimento. Segundo Brolezzi (1991), a História da Matemática como recurso pedagógico em sala de aula apresenta, a priori, três ganhos: (i) A História da Matemática e a lógica Matemática em construção: uma ciência em fase de constituição admite certa metodologia, denominada lógica natural, a qual é distinta da lógica que essa ciência apresentará depois de sistematizada. (ii) História da Matemática e significado: a motivação para o aprendizado, bem como o próprio, depende da interpretação da linguagem simbólica da matemática. Compreender a “evolução dos significados ao longo da História é fundamental para a elaboração de um ensino com significado, pois permite que se construam novamente os significados junto com os alunos” (BROLEZZI, 1991, p. 52). (iii) História da Matemática e visão da totalidade: dentro do currículo, os conteúdos aparecem isolados, de modo que por si mesmos não conseguem transmitir uma ideia clara do conjunto estudado. “O estudo da evolução da matemática como um todo fornece, portanto, a cada tópico do currículo, uma razão de ser, uma utilidade que transcende a sua possível aplicação prática imediata” (BROLEZZI, 1991, p. 58-59).

Além disso, Miguel e Miorim (2011) destacam diferentes argumentos a favor da História da Matemática em sala de aula. Segundo eles, a abordagem histórica dos conteúdos matemáticos é fonte de seleção e constituição de métodos para a elaboração de sequências adequadas aos diferentes tópicos de ensino da Matemática escolar.

A escolha de problemas ou episódios considerados motivadores da aprendizagem também constitui um caminho que pode ser escolhido pelo professor para abordar a História da Matemática em suas aulas. Segundo Berlinghoff e Gouvêa (2008), a presença da história nas aulas de matemática fornece uma visão ampla dessa ciência, contrariando a de uma coleção arbitrária de informações.

As pessoas agem por uma razão, e tipicamente constroem seu trabalho sobre outros anteriores em uma vasta rede de colaboração entre as gerações. A informação histórica nos permite compartilhar essa ‘grande figura’ (BERLINGHOFF E GOUVÊA, 2008, p. 3).

Ainda conforme esses autores, a História da Matemática auxilia, muitas vezes, fornecendo um contexto. Dessa forma, saber mais sobre a origem e evolução dos conhecimentos matemáticos contribui para entender como essa ciência está interligada às demais atividades humanas.

A ideia de que os números teriam surgido para permitir que governos acompanhassem dados como a produção de alimentos pode não nos ajudar a aprender aritmética, porém insere a aritmética desde o início em um contexto significativo (BERLINGHOFF; GOUVÊA, 2008, p. 3).

Dessa forma, saber mais sobre a origem e evolução dos conhecimentos matemáticos contribui para entender como essa ciência está interligada às demais atividades humanas. Cury e Motta (2008) apontam possíveis abordagens em termos da História da Matemática para o ensino em sala de aula como, por exemplo, a busca de novas soluções para problemas já resolvidos; a tentativa de solucionar problemas não resolvidos com recursos atuais mais potentes; a busca, em livros antigos ou filmes, de conhecimentos sobre o ensino de determinados conteúdos e compará-los com a forma como é trabalhado atualmente; ou ainda a apresentação de problemas clássicos através de animações computacionais.

Outro fator positivo acerca da abordagem histórica dos conteúdos matemáticos, segundo Silva e Ferreira (2011), é permitir ao docente a previsão dos possíveis erros dos alunos. De acordo com Berlinghoff e Gouvêa (2008), entender que muitas pessoas tinham dificuldades em lidar com certos assuntos matemáticos, mesmo depois de um tempo da divulgação de suas ideias básicas

Nos ajuda a compreender (e a simpatizar com) as dificuldades que os estudantes possam ter. Saber como foram superadas essas dificuldades historicamente também pode indicar um modo de ajudar os estudantes a superarem tais obstáculos. (BERLINGHOFF E GOUVÊA, 2008, p. 3).

Assim, estratégias e questionamentos podem ser preparados antecipadamente pelo professor, promovendo sua postura como mediador entre o saber e o aluno. Apesar das vantagens que a História da Matemática como metodologia de ensino traz para as aulas de matemática, deve-se cuidar para que não se tenha uma visão ingênua acerca de sua aplicação.

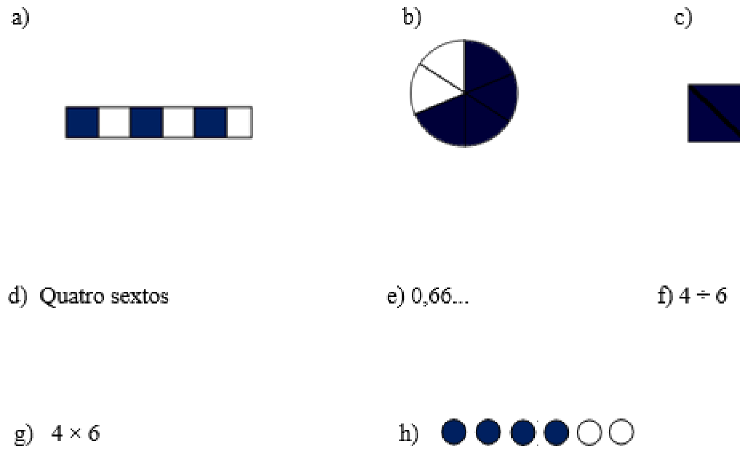
Nesse sentido, Silva e Ferreira (2011) destacam que:

A História da Matemática sozinha, sem o auxílio de outros recursos didáticos, não é suficiente para resolver todos os problemas pedagógicos que permeiam uma sala de aula, pois devemos mesclar várias metodologias com o objetivo de contemplar todos os alunos (p. 1-2).

Diante destas proposições, destaca-se que a história dos conceitos na matemática pode ser inserida no contexto de uma atividade, seja ela investigativa e/ou manipulativa. A partir de problemas históricos cria-se o cenário para as novas aprendizagens, sendo a história um fator constituinte dos conceitos para proporcionar a sua compreensão.

3 A IMPORTÂNCIA DOS ERROS DOS ALUNOS PARA RETOMADA DAS INVESTIGAÇÕES

Seja o seguinte problema: Qual das alternativas abaixo representa a fração 4/6?



Fonte: criação do autor

Diante das, temos diversas representações dos signos e podemos discutir sobre as alternativas, a partir dos erros e acertos dos alunos ao responder o problema, tendo em vista que podemos considerar como acerto a associação correta entre as representações e erro a associação errada entre as mesmas. Os itens "a", "b", "c", e "h" apresentam registros de representação figurais que remetiam às relações parte-todo. Nos itens "a", "b" e "c" foram abordadas quantidades contínuas[3] e no item "h" uma quantidade discreta[4]. Assim, a partir das respostas do aluno no problema, podemos identificar a dificuldade de interpretação, e ainda sim, direcioná-lo a reflexão do porque a alternativa está correta ou incorreta, ligando cada alternativa a uma outra representação, por exemplo, no item "a" e "b" podemos usar a representação de barra de chocolate e pizzas, respectivamente, frequentemente empregada na escola, ou ainda, no item "c" são enfatizados os mesmos aspectos dos dois itens anteriores, no entanto, a disposição dos cortes que dividem o todo foi colocada de uma forma diferente, rompendo com o modelo tradicional das "pizzas" ou "barras de chocolate. Assim, como um complemento para este problema, é pedir para que se criem mais representações para o signo em questão, assim como sugere Monteiro (2015) ao examinar a dinâmica das mudanças que um signo pode sofrer, propomos metodologias adicionais de resolução de problemas em um ciclo de interpretações como uma provocação de mudança e criamos novos signos. "A noção de representação semiótica pressupõe, então, a consideração de sistemas semióticos diferentes

[3] Por quantidades contínuas consideram-se aquelas passíveis de serem dividas exaustivamente sem que percam suas características naturais. Por exemplo, uma torta pode ser dividida em quantas partes se desejar sem que deixe de ser torta.

[4] As quantidades discretas referem-se a uma coleção de objetos que representam unidades naturais, por exemplo, "três bolas, "duas camisas". O resultado da divisão de quantidades discretas é produzido por subconjuntos destas unidades.

e de uma operação cognitiva de conversão das representações de um sistema semiótico para outro” (DUVAL, 2009, p. 32).

4 POSSIBILIDADE DE APLICABILIDADE DA HISTÓRIA DO CONCEITO NO ENSINO DE FRAÇÕES PARA O 6º ANO

Para a realização desse tipo de abordagem, leva-se em conta os conceitos aqui já explicitados e a construção de um planejamento de ensino baseado na investigação matemática que utiliza como recurso metodológico a história da matemática.

No planejamento de ensino devem ser consideradas situações da história da matemática, relacionadas ao problema da medida apresentado por Caraça (2002), no que trata do problema da medida como construção do Campo Racional. Este diz que, no Egito o rei Sesóstris repartiu entre os egípcios as terras às margens do rio Nilo de modo que cada um ficasse com a mesma quantidade de terra, sendo que a cada ano pagariam os impostos desta terra ao rei. Algumas terras acabavam sendo desmarcadas com a enchente do rio, e quem se sentisse prejudicado deveria falar com o rei, que este mandava medidores para novamente medir as terras, cobrando os impostos somente da porção de terra que restara após a enchente.

O planejamento de ensino considera esta situação-problema vivenciada no Egito, propõe questionamentos relacionados à necessidade da numeração fracionária, pois nem sempre a unidade de medida utilizada podia ser expressa por um número exato (inteiro). Esta unidade de medida utilizada pelos egípcios era chamada de côvado ou cúbito e correspondia a medida do cotovelo ao dedo médio do braço do rei.

Dessa maneira, o desenvolvimento do planejamento proporciona, a partir de uma necessidade, o estudo de um novo número capaz de solucionar esse problema. O planejamento possibilita o entendimento de que, a partir da necessidade de resolver problemas foi criado a representação fracionária de números racionais, tendo como ideia a subdivisão da unidade de medida em partes menores, ou seja, em frações que tiveram suas primeiras representações nas frações egípcias. A situação de ensino proposta no planejamento foi elaborada tendo como princípio uma situação análoga a vivenciada pelos egípcios quando precisavam demarcar suas terras à beira do rio Nilo.

Para tanto, considera situações em que devam ser realizadas medições com uma unidade de medida pré-estabelecida. Assim, a partir da medida surge a necessidade da representação de números não inteiros, de forma semelhante ao que aconteceu no Egito, na história que posteriormente foi relatada aos alunos.

Para que o conteúdo seja exposto de maneira mais eficaz, propõe-se a elaboração desse planejamento considerando sua execução em diferentes momentos de proposição de ensino, em que o primeiro momento seja a proposta de alguns questionamentos referentes à medida. O segundo momento contempla a atividade investigativa com a realização da medição de alguns objetos da sala de aula e a representação desses valores em um quadro, sendo considerada uma unidade de medida estabelecida.

O relato da primeira parte da história matemática encontra-se no terceiro momento, juntamente com alguns questionamentos, considerando no quarto momento a ideia da divisão da unidade de medida em partes menores e iguais e a segunda medição dos objetos utilizando estas novas unidades de medida. O quinto momento se encarrega da discussão e análise das novas medidas e a comparação da solução proposta em sala de aula com o que foi presenciado na história da matemática. O sexto e último momento, considera os processos de ressignificação e formalização do conceito abordado no desenvolvimento dos momentos anteriores.

A partir dos questionamentos, verifica-se na história da matemática o contexto real do surgimento das frações e suas primeiras representações nas frações egípcias, desse modo evidencia e ressalta a importância desse desenvolvimento simbólico de numeração na época em que foi desenvolvida.

No momento atual, para uma experiência com matemática como atividade humana (BNCC), ou seja, atividades simbólicas para fazer matemática, é importante um estímulo à produção de interpretações com representações. Para alcançar esse objetivo, com enfoque nos conceitos resgatados nesse trabalho, propomos que além dos contextos diversos presentes nos cotidianos, também sejam executadas atividades simbólicas por investigações utilizando Softwares de Geometria e Geometria Dinâmica explorando as noções de: Metades, dobros, terços, triplos, quartos, oitavos etc.; utilização de unidades conhecidas e também construídas para contextos específicos; equivalências entre figuras; subdivisões progressiva de partes em partes de partes; estudos para compreensão numéricas das medidas atribuídas pelos softwares aos objetos construídos, em suas janelas apropriadas; Construção de gráficos para descrições de porcentagens, frações e números decimais relacionados, entre outras explorações que podem ser desenvolvidas para a produção simbólica que possam contribuir para a compreensão das frações.

CONCLUSÃO

A pesquisa realizada neste trabalho centrou-se em estabelecer a importância de se diversificar a metodologia de ensino da Matemática nos anos finais do ensino fundamental, tendo como foco possibilidades para os processos de ensino e aprendizagem de frações que são iniciados desde os primeiros ciclos, com ênfase às operações durante o 6º ano.

Através da verificação da literatura, dos documentos oficiais relacionados a nortear a educação nacional surge essa proposta de investigação em aulas de matemática no estudo das frações por compreensão dos conceitos e também por produção simbólica com base na história dos conceitos da matemática, na evolução das interpretações e representações, que possam ser reinterpretadas e representadas também por softwares consistentes de matemática, construindo referência e sentido para frações, sendo assim, indicamos possibilidades de inovação para contribuir com a compreensão das frações e seus conceitos relacionados.

Enfim, temos expectativas de que essa pesquisa venha a contribuir com futuros projetos para intervenção didática, por exploração dos conceitos relacionados a compreensão das frações, pois, visualizamos a necessidade de um aprofundamento, assim como a construção de espaços institucionais, tanto durante a formação inicial como a formação continuada de professores de matemática, para que, assim, possa ser levada para o âmbito do ensino básico, de modo que contribua para a formação dos alunos de maneira efetiva.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Brasília: MEC/CONSED/UNDIME, 2018.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs). Introdução. Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs). Matemática. Ensino Fundamental. Terceiro e quarto ciclos. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BROLEZZI, Antônio Carlos. **A arte de contar: uma introdução ao estudo do valor didático da História da Matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação). São Paulo: Universidade de São Paulo, 1991.

BERLINGHOFF, W. P.; GOUVÊA, F. Q. **A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas**. Tradução Elza Gomide, Helena Castro. 2ª e. São Paulo: Blucher, 2010.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Gradiva, 2002.

CARRAHER, T. N. (1987). **Desenvolvimento cognitivo e ensino de ciências**. Educação em Revista,2(5), 13-19.

CARRAHER, T. N., CARRAHER, D. W., & SCHLIEMANN, A. D. (1986) Proporcionalidade na educacão cientifica e matemática (III): **Desenvolvimento cognitivo e aprendizagem**. Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos, 67 (157), 586-602.

CARRAHER, T. N., CARRAHER, D. W., SCHLIEMANN, A. D., & Ruiz, E. L. (1986). **Proporcionalidade na educação cientifica e matemática** (1): Quantidades medidas por razões. Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos, 67 (155), 93-107.

CARRAHER, T. N. CARRAHER. D. W. & SCHLIEMANN, A. D. (1988). Na vida dez, na escola zero. São Paulo: Cortez.

DUVAL, R. **Quelle Sémiotique pour l’analyse de l’activité et des productions mathématiques**? Revista Latino Americana de Investigación en Matemática Educativa, 2006, Vol.9(1), p.45-82

DUVAL, R, **Semiósis e pensamento humano**: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais (FascículoI). Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

FIGUEIREDO, Jairo Vogado de. **O ensino de frações mediado por jogos de aprendizagem: uma proposta para o ensino**. Revista REAMEC, Cuiabá - MT, 2018.

FREGE, G. **Lógica e filosofia da linguagem.** EDUSP, São Paulo, 2009.

GIMÉNEZ; BAIRRAL. Frações no currículo do ensino fundamental: Conceituação, Jogos e atividades Lúdicas. Seropédira – RJ: GEPEM/EDUR, 2005.

KARPLUS, R., & PETERSON, R.W. (1970). **Intelectual development beyond elementary school (II): Ratio, a survey**. School Science and Mathematics, 70 (9), 813-820.

KERSLAKE, D. **Fractions**. London. NFER Nelson, 1986.

MENDES, Iran Abreu. **Matemática e investigação em sala de aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

MONTEIRO, L.C.S. **Complementaridade na circularidade das representações: uma abordagem semiótica para a criatividade em matemática. Educação Matemática em Pesquisa Perspectivas e Tendências** - Volume 2. (p. 687 – 704) Editora Científica Digital, 2021.

MONTEIRO, L. C. S. **Sentidos e significados para uma abordagem semiótica em educação matemática: uma análise sobre as discussões das interpretações do paradoxo de Zenão**. 2015. 180f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, Universidade Anhanguera de São Paulo – UNIAN, São Paulo, 2015.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SUZANO, Geyson. **Múltiplos aprendizados no ensino de frações e números decimais na educação básica**. Vitória, 2018.

SPINILLO, A. G., SCHLIEMANN; D. RÉGNIER (Org.) **Proporções nas séries iniciais do primeiro grau**. CARRAHER; A. SPINILLO; L. MEIRA; J. In: A. FALCAO; N. ACIOLY Estudos em Psicologia da Educação Matemática. Recife: Editora da Universidade Federal do Pernambuco, 1997.

SPINILLO, A. G. (prelo). **As relações de primeira ordem em tarefas de proporção: Uma outra explicação quanto às dificuldades das crianças**. Psicologia: Teoria e Pesquisa.

SPINILLO, A.G. **A importância do referencial de 'metade' e o desenvolvimento do conceito de proporção. Psicologia: Teoria e Pesquisa**,

SPIILLO, A.C., & Bryant P. E., (1990). **Ratio and proportion: Inadgine discrete and continuous quantities**. Anais da IV European Conference on Developmental Psychology, Stirling, Reino Unido.

SPINILLO, A. G., & BRYANT, P. E (1991). **Children's proportional judgements: The importance of 'half'**. Child Development, 62, 427-440.