



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

CAMPUS A.C SIMÕES

CURSO DE FÍSICA - LICENCIATURA

GENNIFER MARTINS DA SILVA

AS LEIS DE KEPLER

Maceió - AL

2024

GENNIFER MARTINS DA SILVA

AS LEIS DE KEPLER

Trabalho de conclusão de curso apresentada ao corpo docente do Curso de Física Licenciatura da Universidade Federal de Alagoas-UFAL, Campus A.C. Simões, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciada em Física.

Orientador: Prof. Dr. José Anderson de Lima e Silva

Maceió - AL

2024

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecária: Helena Cristina Pimentel do Vale – CRB4 –661

S5861

Silva, Gennifer Martins da.

As leis de Kepler / Gennifer Martins da Silva. – 2024.
42 f : il.

Orientador: José Anderson de Lima e Silva.

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Física: Licenciatura) – Universidade Federal de Alagoas, Instituto de Física. Maceió, 2024.

Bibliografia: f. 42.

1. Leis de Kepler. 2. Astronomia. 3. Geocentrismo. 4. Heliocentrismo. 5. Modelos astronômicos. I. Título.

CDU: 52

Aos Meus pais, meu alicerce.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, por ser comigo em todos os momentos e em toda minha trajetória acadêmica. Agradeço também aos meus pais Marilene Martins e Genilson Caetano e também a minha irmã Jakline Martins. Obrigada por todo amor, cuidado, suporte e conselhos que me ajudaram a não desistir.

Agradeço também às minhas amigas que me acompanham desde o ensino médio e que iniciaram comigo essa caminhada: Dayane Siqueira, Elisangela Maurilane, Maria Luiza e Rayane Gabriele, foram vários momentos de descontração, estudos e conversas de incentivo para que eu continuasse.

Em especial quero agradecer a Cleisiane Fernandes, uma amiga que Deus colocou na minha vida nessa reta final da minha graduação e que foi de suma importância para que hoje eu conseguisse concluir mais essa etapa. Te agradeço pelos conselhos, conversas, por ouvir minhas reclamações, pelas noites de vinho com fandangos e principalmente por me fazer ver o quanto eu era capaz.

Ao professor Dr. José Anderson meus sinceros agradecimentos, por me orientar. Agradeço também a todo corpo docente do Instituto de Física, por cada contribuição na minha formação e aos professores da banca, que disponibilizaram seu tempo para avaliarem esse trabalho de conclusão.

Por fim, agradeço a todos que contribuíram indiretamente na minha vida.

Sumário

1 Modelos Astronômicos.....	11
1.1 O Formato da Terra	11
1.2 Modelo Geocêntrico	12
1.3 Modelo Heliocêntrico	13
2. Conceitos Fundamentais.....	15
2.1.Vetores.....	15
2.1.1Modulo de um Vetor	17
2.1.2.Vetor Unitário	17
2.1.3.Produto Escalar	17
2.2.Cônicas.....	20
2.2.1.Parábola.....	20
2.2.2.Elipse	21
2.2.3.Hipérbole.....	23
2.3.Coordenadas Polares	23
2.3.1.Curvas Polares	24
2.4.Noções de Derivadas.....	26
2.4.1.Derivada do Produto	26
2.4.2.Derivada do Quociente	27
2.4.3.Regra da Cadeia.....	27
2.5.Newton.....	28
2.5.1.Segunda Lei da Dinâmica	28
2.5.2.Lei da Gravitação Universal	28
3. As Leis de Kepler	29
3.1. Primeira Lei de Kepler.....	29
3.2. Segunda Lei de Kepler.....	33
3.3 Terceira Lei de Kepler	36
4 Aplicações	39
5. Considerações Finais.....	41
Referências	42

“Porque sou Eu que conheço os planos que tenho para vocês’, diz o Senhor, ‘planos de fazê-los prosperar e não de causar dano, planos de dar a vocês esperança e um futuro. Então vocês clamarão a mim, virão orar a mim, e Eu os ouvirei. Vocês me procurarão e me acharão quando me procurarem de todo o coração”.

(Bíblia Sagrada, Jeremias 29: 11-13.)

Resumo

As leis de Kepler surgiram a partir das divergências apresentadas nos modelos astronômicos anteriormente criados pelos astrônomos Claudio Ptolomeu e Nicolau Copérnico. Logo, este Trabalho tem como objetivo descrever como foi realizada a passagem do modelo geocêntrico para o modelo vigente, o heliocentrismo, que serviu de base para que Kepler formalizasse suas leis e para apresentar as demonstrações de cada uma delas através de ferramentas matemáticas como o Cálculo Diferencial e Geometria Analítica, e de física, como as Leis de Newton. Além disso, apresentamos algumas aplicações para que seja possível a compreensão do conteúdo de forma mais objetiva.

Palavras-chave: Leis de Klepler; Astronomia; Geocentrismo; Heliocentrismo; Modelos Astonômicos; Kepler; Elipse

Abstract

Kepler's laws emerged from the discrepancies presented in the astronomical models previously created by the astronomers Claudius Ptolemy and Nicholas Copernicus. Therefore, this paper aims to describe how the transition from the geocentric model to the current heliocentrism model was accomplished, which served as the foundation for Kepler to formalize his laws. It also aims to present the demonstrations of each of them through mathematical tools such as Differential Calculus and Analytical Geometry, as well as physics, like Newton's Laws. Furthermore, we will provide some applications to enable a more objective understanding of the content.

Keywords: Kepler's laws; Astronomy; Geocentrism; Heliocentrism; Astronomic Models; Kepler; Ellipse

Introdução

Várias teorias sobre o universo surgiram a partir da observação dos céus. Abordaremos algumas dessas teorias cosmológicas sobre os movimentos dos planetas, como o geocentrismo de Cláudio Ptolomeu, no qual acreditava-se que o centro do universo era o planeta Terra. Outra teoria proposta, desta vez por Nicolau Copérnico, é a do heliocentrismo, na qual Copérnico afirmava que o Sol é o centro do universo e que serviu de base para as leis de Newton.

No Capítulo 1, discutimos brevemente a história do desenvolvimento das teorias sobre o movimento dos planetas e como chegamos à teoria do heliocentrismo. A primeira teoria abordada é o geocentrismo, que foi influenciado pela Igreja Católica e afirmava que a Terra era estática e era o centro do universo, com os demais astros orbitando ao seu redor.

Alguns anos mais tarde, devido a algumas dúvidas sobre essa teoria, Copérnico propôs o heliocentrismo, no qual, em vez da Terra, o Sol era o centro do sistema, e os demais planetas orbitavam ao seu redor em trajetórias circulares. Anos depois, essa teoria foi comprovada por Galileu Galilei com o auxílio de seu primeiro telescópio.

Esse modelo explicava algumas questões, como as variações noturnas, mas suscitava outras sobre o movimento de alguns planetas. A partir dos estudos de cientistas como Isaac Newton e Tycho Brahe, tomando como base o modelo heliocêntrico, coube ao jovem astrônomo alemão Johannes Kepler estabelecer como os planetas se movem em torno do Sol. Kepler herdou as precisas observações de seu mestre Tycho Brahe, que lhe proporcionaram, após muito trabalho, estabelecer de forma definitiva as leis que descrevem os movimentos dos planetas de nosso sistema solar, tomando o Sol como nosso referencial.

No Capítulo 2, abordaremos alguns conceitos fundamentais para possibilitar a compreensão dos capítulos posteriores. Inicialmente, começaremos com a geometria

analítica, onde explanaremos um pouco sobre vetores, soma de vetores, produto vetorial, cônicas e coordenadas polares. Logo após, falaremos sobre as regras de derivação, como a regra do produto e do quociente. Destinaremos uma seção às leis de Newton, incluindo a lei da gravitação universal e a lei da dinâmica. Essas leis têm em comum o fato de tratarem das forças. A segunda lei de Newton ou Princípio fundamental da dinâmica trata da força resultante sobre um corpo, e a lei da gravitação universal lida com a força de interação entre dois corpos.

No Capítulo 3, abordaremos as três leis de Kepler. Onde será possível afirmar, por meio de cálculos, que a trajetória de um planeta se dá na forma de uma elipse e que o Sol está em um de seus focos. Demonstraremos a segunda lei, na qual, calculando por coordenadas polares a área varrida por um planeta, observaremos que um planeta varre áreas iguais em intervalos de tempos iguais. Já a terceira lei utilizaremos as cônicas para demonstrar que o tempo de revolução de um planeta é proporcional ao cubo do comprimento do raio médio da órbita em questão.

Finalmente, no Capítulo 4, exemplificamos algumas aplicações das leis de Kepler, nas quais utilizaremos cálculos básicos que podem ser aplicados na área de ensino de ciências nas séries fundamentais e no ensino médio como forma de utilizar a matemática de maneira prática e visível.

1 Modelos Astronômicos

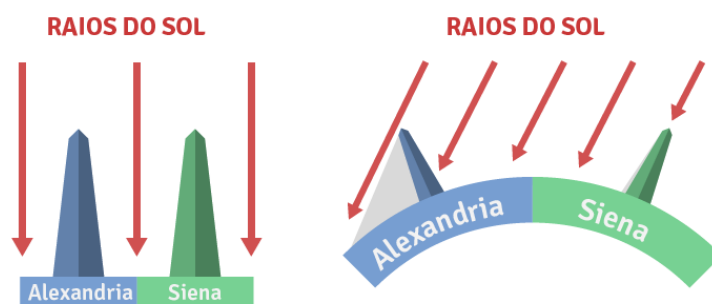
Neste capítulo, exploramos a trajetória histórica sobre o formato da terra, os modelos astronômicos, começando com o geocentrismo e avançando até o modelo atualmente aceito, o heliocentrismo.

1.1 O Formato da Terra

O movimento terraplanista, proposto por Samuel Birley Rowbotham, continua sendo motivo de acalorados debates nos dias atuais. Rowbotham publicou o livro "Astronomia Zetética," no qual ele tentou comprovar, por meio de experimentos, a teoria de que a Terra é plana. Nas palavras de Rowbotham (traduzidas por Tolvai, 2019, p. 9), "Teorias são incertas e dependem, em grande parte, do humor e capricho de uma era, às vezes inclinando-se a favor de uma teoria, e em outros momentos, a favor de outra." Ele acreditava que a única maneira de afirmar um fato era comprovando-o.

Essa perspectiva de Rowbotham entrava em contradição com a de Eratóstenes, que deduziu que a Terra tinha uma forma esférica. Com o objetivo de medir o diâmetro da Terra, Eratóstenes observou que, ao meio-dia, no solstício de verão, não havia sombra em Siena, ao contrário de Alexandria. Ele concluiu, portanto, que a Terra era, de fato, esférica, uma vez que, se fosse plana, os raios solares incidiriam da mesma forma em ambos os lugares, resultando em sombras iguais nas duas cidades.

Figura 1: Sombra de Alexandria e Siena

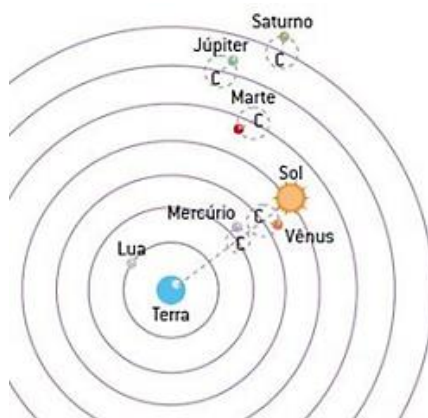


Fonte: [Usando a matemática: Como Eratóstenes mediu o tamanho da terra \(gcfglobal.org\)](https://gcfglobal.org/pt-br/uso-da-matematica-como-erastostenes-midiu-o-tamanho-da-terra/)

1.2 Modelo Geocêntrico

A observação de fenômenos naturais sempre teve presença marcante nas áreas das ciências, especialmente na física. Essas observações serviram de base para a formulação de diversas leis e estudos sobre o universo. Um exemplo notável é o modelo geocêntrico, no qual Aristóteles se esforçava para explicar o movimento dos corpos celestes. Segundo a visão de Aristóteles, o movimento planetário consistia em oito planetas perfeitamente esféricos, deslocando-se em trajetórias circulares concêntricas, tendo a Terra como centro.

Figura 2 – Modelo astronômico de Ptolomeu

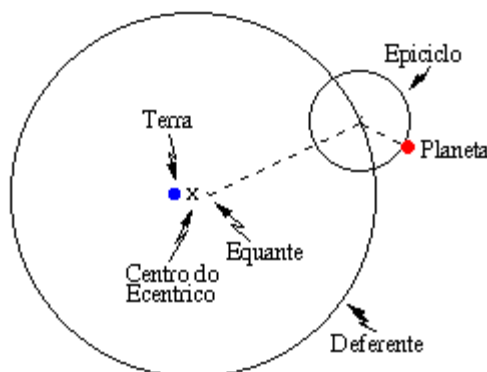


Fonte: <https://www.ufmg.br/espacodoconhecimento/geocentrismo-e-heliocentrismo/>.

Outra ideia defendida por Aristóteles era a imobilidade da Terra. Ele partiu do princípio do movimento simples, no qual, se uma pedra fosse lançada verticalmente para cima, depois de algum tempo, ela retornaria ao ponto de partida. Aristóteles argumentou que, se a Terra estivesse em movimento, a pedra não retornaria ao seu ponto inicial e ocuparia uma nova posição no espaço.

Apesar de o modelo geocêntrico afirmar que os planetas se moviam em trajetórias circulares, eram observadas irregularidades. Por vezes, os planetas estavam mais próximos, enquanto em outros momentos estavam mais distantes. Essas inconsistências foram posteriormente abordadas por Cláudio Ptolomeu, que propôs um novo modelo astronômico em que o movimento planetário era explicado por meio de combinações de círculos, conhecidos como epiciclos.

Figura 3 – Modelo Astronômico de Ptolomeu



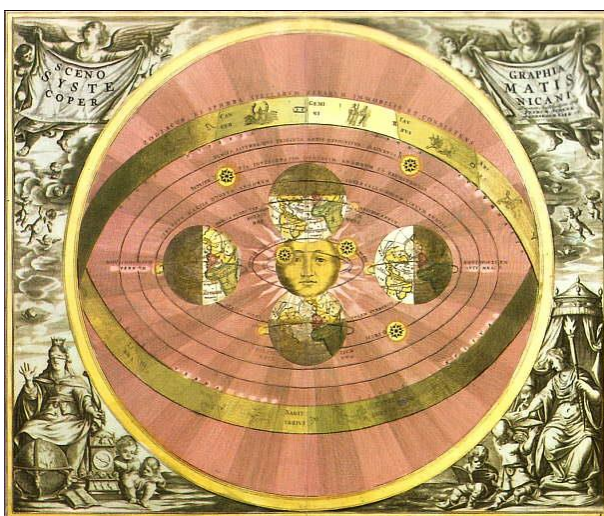
FONTE: [Movimento dos Planetas \(ufrgs.br\)](http://Movimento%20dos%20Planetas%20(ufrgs.br))

O pensamento de Ptolomeu para explicar as irregularidades era que a Terra permanecia imóvel, mas agora não mais no centro da trajetória (denominado deferente). Além do movimento proposto por Aristóteles, Ptolomeu postulou que os planetas também seguiam uma combinação de epiciclos, como ilustrado na Figura 3.

1.3 Modelo Heliocêntrico

O modelo ptolomaico dos epiciclos gerou dúvidas e incertezas sobre a uniformidade do movimento planetário. Por volta de 1540, logo após a morte de Nicolau Copérnico, um novo modelo foi proposto. Ele partia da ideia de que a Terra não estava imóvel no centro do universo, mas sim em movimento, seguindo uma trajetória circular ao redor do Sol, que ocuparia o centro desse sistema

.FIGURA 4 – MODELO ATRONÔMICO COPERNICANO



FONTE: [Sistema heliocêntrico de Copérnico \(astromia.com\)](http://Sistema%20helioc%C3%AAntrico%20de%20Cop%C3%A9rnico%20(astromia.com))

Além do movimento irregular dos planetas, outro motivo que levou Copérnico a propor esse modelo foram as variações noturnas e a observação das estrelas e constelações, nas quais se notava um movimento coletivo sem que a distância entre elas se modificasse. Essas observações corroboraram a ideia da Terra em movimento. No entanto, a proposta de Copérnico só pôde ser divulgada após sua morte, uma vez que conflitava com os dogmas impostos pela igreja durante a época da Reforma Protestante.

Anos mais tarde, Galileu, por meio de observações realizadas com o telescópio, confirmou o movimento cíclico de alguns planetas, como Vênus, os anéis de Saturno e até mesmo as fases da Lua (Claudio Maia, 2020). Todas essas observações feitas por Galileu fortaleceram o modelo heliocêntrico proposto por Copérnico. No entanto, essas descobertas resultaram em perseguição e, posteriormente, na prisão de Galileu, imposta pela igreja durante a época da Reforma Protestante.

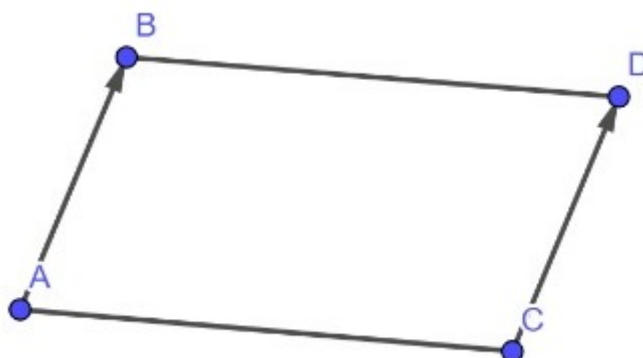
2. Conceitos Fundamentais

Neste capítulo, abordaremos conceitos fundamentais, tais como vetores, derivadas e as leis de Newton, com ênfase na segunda lei da dinâmica e na lei da gravitação universal. Esses conceitos serão essenciais para a compreensão dos capítulos subsequentes.

2.1. Vetores

Vetores do plano ou do espaço são representados por segmentos orientados que têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento e são representados de um mesmo vetor. Por exemplo, no paralelogramo da figura abaixo, os segmentos orientados AB e CD determinam o mesmo vetor $v = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

Figura 5: Representação de um vetor no plano cartesiano

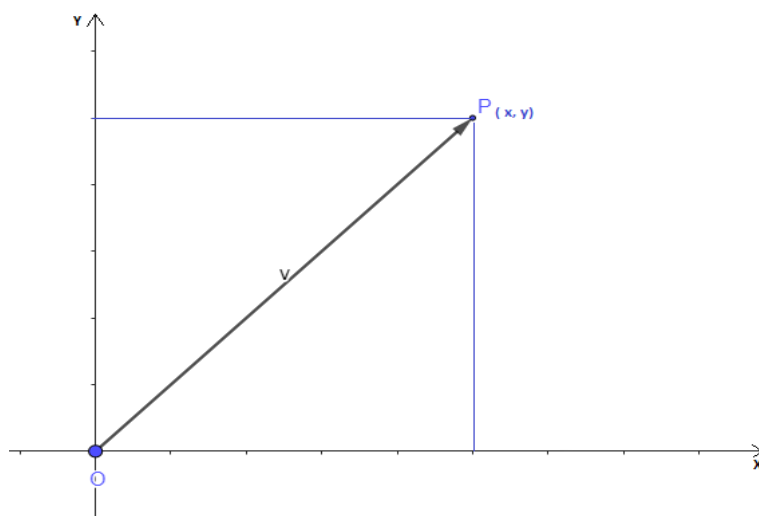


Autor, 2023

O conjunto $\mathbb{R}^2$, representado por

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}.\}$$

é interpretado como o plano cartesiano xOy . Em qualquer vetor v neste plano, sempre podemos encontrar um representante OP , cuja origem é o ponto de partida do sistema, como ilustrado na figura abaixo.

Figura 6: Vetor v 

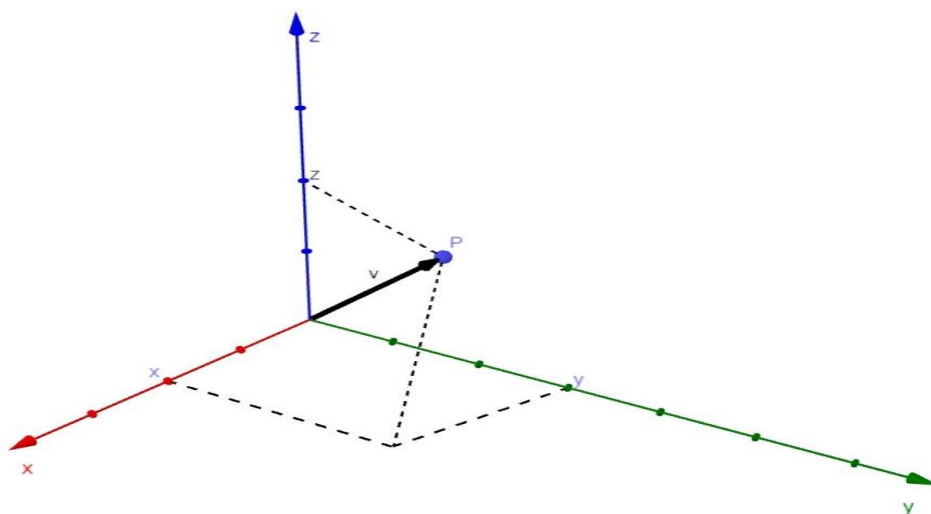
Autor, 2024

O conjunto

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z); x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

é interpretado como sendo o espaço cartesiano tridimensional Oxyz.

De forma análoga ao que foi feito no plano, qualquer vetor pode ser representado por um segmento orientado com origem na origem do sistema no espaço tridimensional. Nessas condições, cada vetor OP no espaço é determinado pelo extremo do segmento P , onde o ponto $P(x, y, z)$ indica o vetor $v = \overrightarrow{OP}$

Figura 7 – Vetor no Espaço $\mathbb{R}^3$ 

Autor 2024

2.1.1. Módulo de um Vetor

O modulo de um vetor $v = (x, y, z)$, representado por $|v|$, é um número real e não negativo:

$$|v| = \sqrt{v \cdot v}.$$

Reescrevendo em coordenadas,

$$|v| = \sqrt{(x, y, z) \cdot (x, y, z)}$$

$$|v| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

EXEMPLO 1. Sendo o vetor $v = (-2, 2, 1)$ temos que,

$$|v| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3.$$

2.1.2. Produto Escalar

Chama-se produto escalar de dois vetores $u(x_1, y_1, z_1)$ e $v(x_2, y_2, z_2)$ representado por $u \cdot v$, onde obtemos um número real.

$$u \cdot v = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 z_2$$

EXEMPLO 1. Sendo os vetores $u(3, 2, 5)$ e $v(5, 4, 7)$, então

$$\begin{aligned} u \cdot v &= x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 z_2 \\ &= 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 5 \cdot 7 \\ &= 15 + 8 + 30 \\ &= \mathbf{53} \end{aligned}$$

Partindo da definição acima, temos as seguintes propriedades do produto escalar:

- I. $u \cdot u \geq 0$ e $u \cdot u = 0$ se, e somente se, $u = 0 = (0, 0, 0)$;
- II. $u \cdot v = v \cdot u$;
- III. $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$;

$$\text{IV. } (ku) \cdot v = u \cdot (kv) = k(u \cdot v);$$

$$\text{V. } u \cdot u = |u|^2,$$

onde temos que u, v e w são vetores quaisquer e k um número real.

Outra forma de representar um produto escalar é:

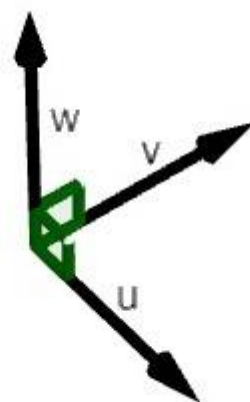
$$u \cdot v = |u||v| \cos \theta$$

onde θ é o ângulo (medido em radianos) entre os vetores u e v (não nulos)

2.1.3. Produto Vetorial

Diferentemente do produto escalar, que gera um número real, o produto vetorial representado por $u \times v$, resulta em um vetor perpendicular aos vetores u e v , portanto podemos representá-lo no espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$ como ilustrado na figura abaixo

Figura 8 - Representação do produto vetorial



Autor 2024

Considere os vetores $u = (a, b, c)$, $v = (a_1, b_1, c_1)$ para que o vetor $w = (x, y, z)$ seja perpendicular aos vetores u e v simultaneamente, devemos garantir que os produtos escalares $w \cdot u = 0$ e $w \cdot v = 0$

Portanto, as condições para que seja perpendicular a u e v são:

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= 0, \\ xa_1 + yb_1 + zc_1 &= 0. \end{aligned}$$

Dessa forma, podemos reescrever da seguinte maneira

$$\begin{aligned} x &= bc_1 - b_1c, \\ y &= a_1c - ac_1, \\ z &= ab_1 - a_1b. \end{aligned}$$

Assim, o vetor resultante é dito produto vetorial de u e v , onde

$$\begin{aligned} u \times v &= w \\ u \times v &= bc_1 - b_1c, a_1c - ac_1, ab_1 - a_1b. \end{aligned}$$

Outra forma de entender o produto vetorial entre dois vetores é por meio do determinante envolvendo a base canônica do $\mathbb{R}^3$, vejamos:

Considere os vetores $u = (a, b, c)$ e $v = (a_1, b_1, c_1)$,

Dados:

$$\begin{aligned} i &= (1, 0, 0), \\ j &= (0, 1, 0), \\ k &= (0, 0, 1). \end{aligned}$$

Admitindo que

$$u \times v = \det \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}.$$

Resolvendo o determinante de terceira ordem, temos:

$$\det \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = (bc_1 - b_1c) i + (a_1c - ac_1) j + (ab_1 - a_1b) k.$$

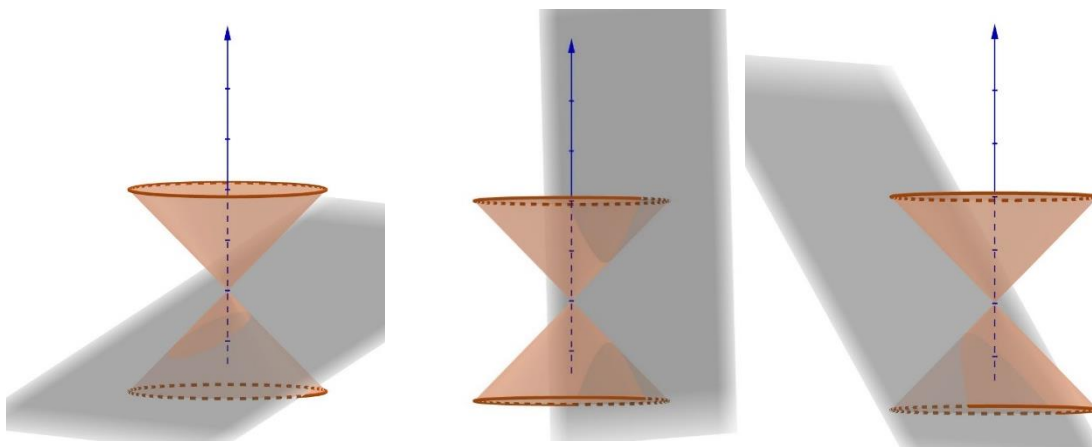
Donde,

$$u \times v = (bc_1 - b_1c, a_1c - ac_1, ab_1 - a_1b).$$

2.2. Cônicas

São figuras resultantes da interseção de um plano com um cone. Como representada na figura a seguir

FIGURA 9 - Interseção do plano com um cone

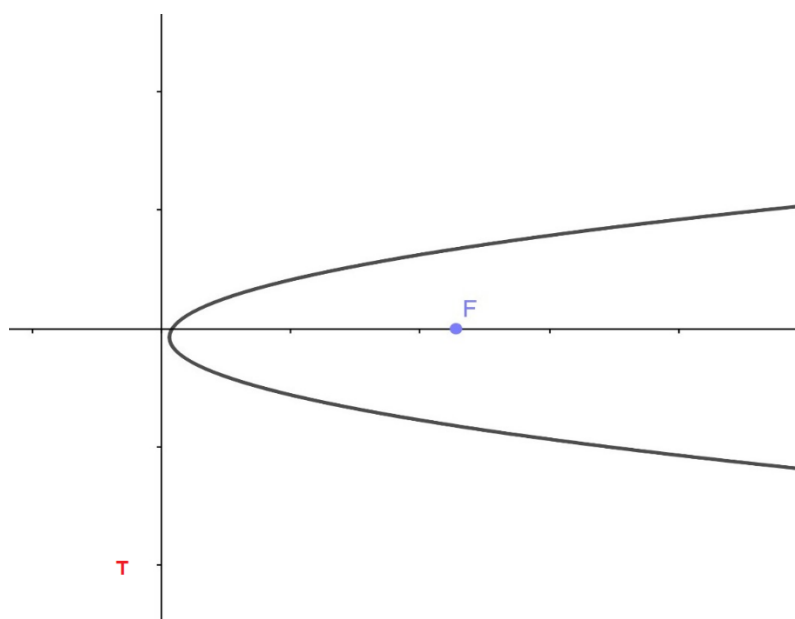


Autor, 2024

2.2.1. Parábola

A parábola é uma figura plana formada pela intersecção do plano com um cone, como representado na figura abaixo.

Figura 10 – Parábola



Autor, 2024

Dados um ponto F e uma reta r , chama-se parábola de foco F e diretriz r ao conjunto de pontos P do plano tais que

$$d(P, F) = d(P, r), \text{ Onde } d \text{ denota a distância.}$$

Seja $P(x, y)$ é um ponto qualquer que pertence a parábola e a distância de r ao foco é igual a $2a$, então

$$\sqrt{x^2 + (y - a)^2} = |y + a|.$$

Elevando ao quadrado cada termo, obtemos a seguinte equação da parábola

$$4ay = x^2 \text{ ou } y = \frac{1}{4a} x^2.$$

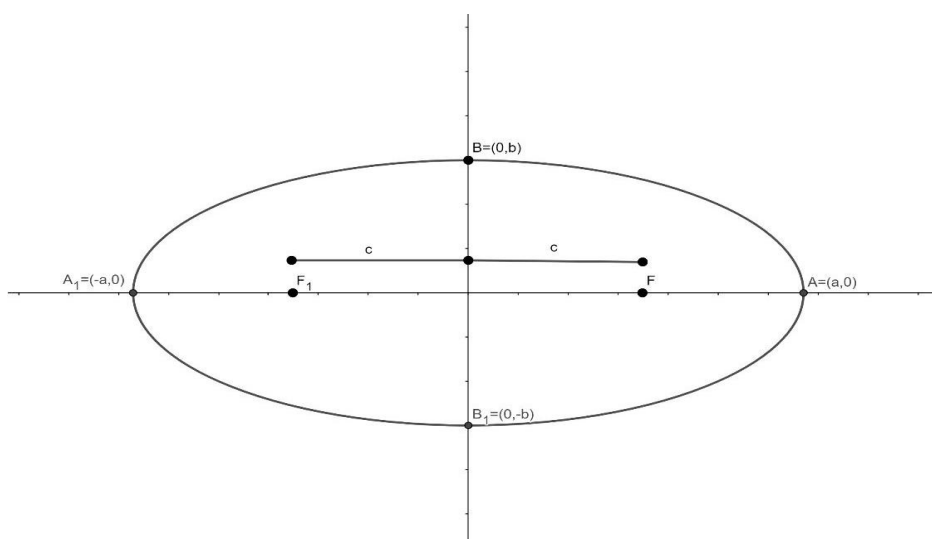
2.2.2. Elipse

Dados dois pontos F e F_1 e um número $r > d(F_1, F)$, o conjunto dos pontos P do plano tais que

$$d(P_1, F) + d(P, F_1).$$

É chamado elipse de focos F e F_1 e eixo maior r

Figuras 11 – Elipse



Autor, 2024

Os pontos A_1 e A e os pontos B e B_1 são chamados vértices da elipse. Observe que a distância entre A_1 e A é igual ao eixo maior r da elipse e que o segmento BB_1 , é perpendicular a A_1A . E a intersecção de A_1A e BB_1 é o centro da elipse.

Donde temos num plano dois pontos quaisquer F_1 e F , distantes $2c > 0$ entre si, esses pontos são chamados de focos. A soma das distâncias de um ponto qualquer $P(x,y)$ aos focos de elipse é chamado de eixo maior $d(A_1, A)$.

$$d(P, F_1) + d(P, F) = d(A_1, A).$$

Para simplificar iremos indicar o eixo maior como $2a$ e a distância entre os focos como $2c$. Aplicando a fórmula da distância entre dois pontos, temos

$$d(P, F_1) + d(P, F) = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a.$$

Ou ainda,

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}.$$

Elevando os dois membros da equação ao quadrado, temos

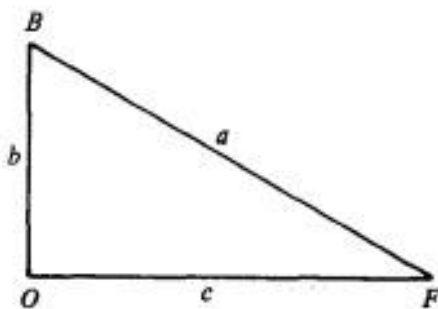
$$\begin{aligned} \left(\sqrt{(x + c)^2 + y^2} \right)^2 &= \left(2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \right)^2 \\ (x + c)^2 + y^2 &= \left(2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \right)^2 \\ (x + c)^2 + y^2 &= (2a)^2 - 2 \cdot 2 \cdot a \cdot \left(\sqrt{(x - c)^2 + y^2} \right) + \left(\sqrt{(x - c)^2 + y^2} \right)^2 \\ (x + c)^2 - (x - c)^2 - 4a^2 &= -4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} \\ 4xc - 4a^2 &= -4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} \\ xc - a^2 &= -a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Elevando, novamente, ao quadrado e simplificando, obtemos

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Ao observar a figura 12 observamos um triângulo retângulo OBF

Figura 12 – Triângulo OBF



Autor, 2024

Donde $a^2 + b^2 = c^2$, assim pela equação anterior, temos

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

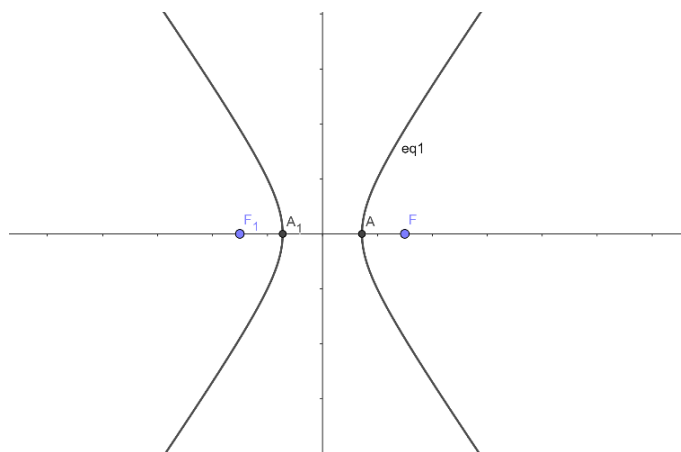
Logo, a equação da elipse será

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

2.2.3. Hipérbole

A hipérbole é uma cônica formada pela secção de um plano com um duplo cone

Figura 13– Hipérbole



Autor, 2024

Os pontos A_1 e A são seus vértices, F_1 e F seus focos e o centro seu ponto medio do segmento. Composta de dois ramos e simétrica em relação a reta que contém os focos e em relação à mediatriz.

Dados dois pontos F_1 e F e um número $r < d(F_1, F)$, o conjunto dos pontos

P do plano tais que

$$|d(P, F_1) - d(P, F)| = d(A, A_1).$$

Admitindo que a distância entre os focos seja $2c$ e a distância entre os vértices igual a $2a$, assim

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a.$$

Após elevar os dois termos ao quadrado, podemos reescrever a equação da seguinte forma

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Admitindo que $c^2 - a^2 = b^2$, obtemos

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

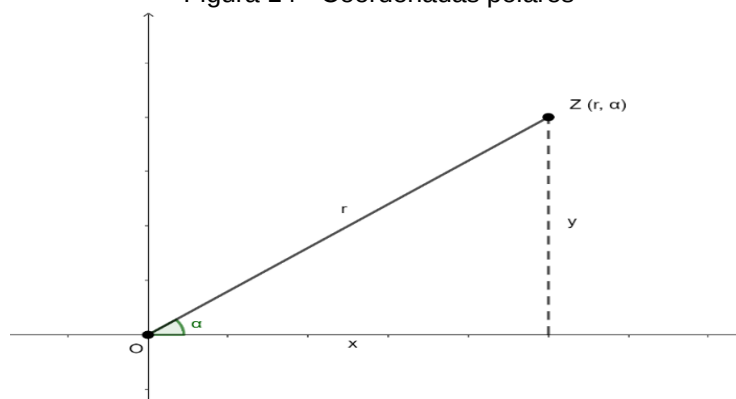
Assim, temos a equação da hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

2.2.4. Coordenadas Polares

As coordenadas polares pontos no plano são constituídos por um par ordenado (r, α) , onde determina a distância a ângulo, em radianos, em relação ao ponto de origem O .

Figura 14 - Coordenadas polares



Fonte: Autor, 2024

Temos que r é a distância do ponto Z até à origem em O e α é o ângulo que Z faz com o eixo Ox .

Se as coordenadas polares de $Z = x + iy$ são (r, α) , com $r > 0$, e relacionando as coordenadas polares com as cartesianas temos,

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

$$x = r \cos \alpha.$$

$$y = r \operatorname{sen} \alpha.$$

$$z = x + iy.$$

$$\frac{y}{x} = \tan \alpha.$$

A partir das equações acima podemos encontrar os valores de r e α , a partir dos valores de x e y .

2.2.5. Curvas Polares

Algumas equações são expressas de forma mais simples quando escritas em coordenadas polares, devido sua natureza circular. Um exemplo é a equação da circunferência de raio r

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Escrevendo em curvas polares, temos

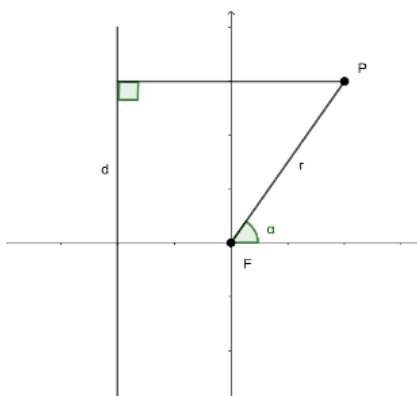
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Proposição: uma cônica de diretriz d , foco F e excentricidade e é o conjunto dos pontos P tais que

$$d(P, F) = e d(P, d).$$

Adotando um sistema de coordenadas xy , como na figura a seguir, temos:

Figura 15 – Sistemas de coordenadas xy



Autor, 2024

$$d(P, F) = r$$

$$d(P, d) = r \cos \alpha + p.$$

Onde em coordenadas polares

$$r = e(r \cos \alpha + p)$$

$$r = \frac{ep}{1 - e \cos \alpha}.$$

onde $1 - e \cos \alpha \neq 0$

2.3. Noções de Derivadas

Nesse capítulo iremos revisar as noções de derivadas que serão essenciais para a compreensão dos capítulos posteriores.

2.3.1. Derivada do Produto

Se f e g são deriváveis e seja $F(x) = f(x) \cdot g(x)$, tem-se então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [f(x) \cdot g(x)] &= \frac{d}{dx} F(x) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} + \frac{f(x+h)g(x)}{h} - \frac{f(x+h)g(x)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (f(x+h)) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] + \lim_{h \rightarrow 0} g(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] \\ &= f(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] + g(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] \\ &= f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x). \end{aligned}$$

2.3.2. Derivada do Quociente

Usando o quociente de Newton, encontramos

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x-a} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x-a} \cdot \frac{1}{g(x)g(a)} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \left[\left(\frac{f(x)g(a) - f(a)g(x) + f(a)g(a) - f(a)g(a)}{x-a} \right) \cdot \frac{1}{g(x)g(a)} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \left[\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} g(a) - f(a) \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \right) \cdot \frac{1}{g(x)g(a)} \right] \\
 &= \left[\frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{[g(a)]^2} \right].
 \end{aligned}$$

2.3.3. Regra da Cadeia

Sabemos que se $y = f(x)$ e x varia de a para $a + \Delta x$, o incremento de y é definido por

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a).$$

E pela definição de derivada, tem-se

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a).$$

Denotando por ε a diferença do quociente de diferenças e a derivada, temos

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a) \right) = f'(a) - f'(a) = 0.$$

Porém

$$\varepsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a) \Rightarrow \Delta y = f'(a)\Delta x + \varepsilon\Delta x.$$

Definindo ε como 0, quando $\Delta x = 0$, ε é uma função contínua de Δx , portanto para uma f diferenciável, podemos escrever, com $\varepsilon \rightarrow 0$ e $\Delta x \rightarrow 0$,

$$\Delta y = f'(a)\Delta x + \varepsilon\Delta x.$$

E ε é uma função contínua de Δx .

Suponha que $u = g(x)$ seja derivável em a e $y = f(u)$ seja derivável em $b = g(a)$.

Se Δx , Δu e Δy forem incrementos em x , u e y respectivamente, logo da equação acima, fazendo $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ e $\Delta x \rightarrow 0$

$$\Delta u = g'(a) \cdot \Delta x + \varepsilon_1 \Delta x = \Delta x(g'(a) + \varepsilon_1).$$

e fazendo $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ e $\Delta u \rightarrow 0$

$$\Delta y = f'(b) \cdot \Delta u + \varepsilon_2 \Delta u = \Delta u(f'(b) - \varepsilon_2).$$

Substituindo Δu na equação, obtemos

$$\Delta y = \Delta x(g'(a) + \varepsilon_1)(f'(b) - \varepsilon_2).$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = (g'(a) + \varepsilon_1)(f'(b) - \varepsilon_2).$$

Quando $\Delta x \rightarrow 0$, temos $\Delta u \rightarrow 0$, assim, $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ e $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ quando $\Delta x \rightarrow 0$. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1] \\ &= f'(b)g'(a) \\ &= f'(g(a))g'(a). \end{aligned}$$

2.4. Newton

Nessa seção iremos abordar algumas leis de Newton, para compreensão dos capítulos seguintes

2.4.1. Segunda Lei da Dinâmica

A segunda lei da dinâmica afirma que a força resultante que atua em um corpo é o produto da massa pela aceleração adquirida pelo mesmo.

$$F_r = m \cdot a.$$

2.4.2. Lei da Gravitação Universal

A lei da gravitação universal afirma que dois corpos exercem uma força de atração mútua e que essa força é diretamente proporcional ao produto das suas massas e da constante gravitacional e inversamente proporcional ao quadrado da distância

$$F_G = \frac{G \cdot M \cdot m}{d^2}.$$

3. As Leis de Kepler

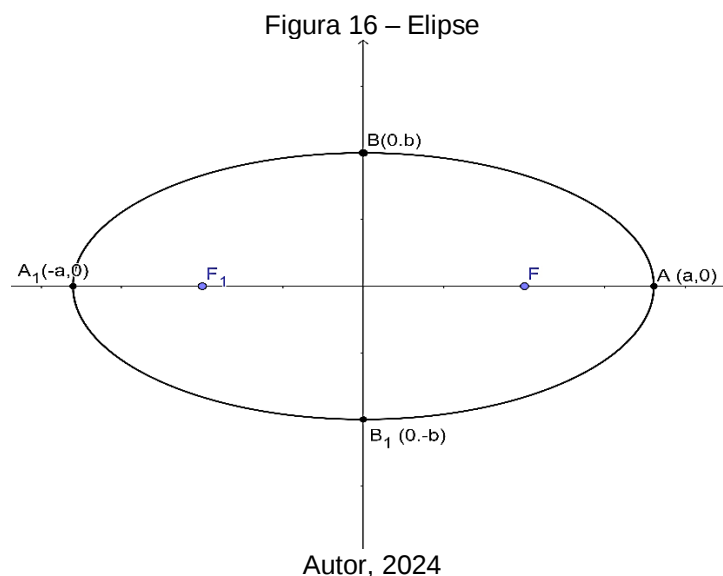
Desde muito tempo tem-se a ideia de que os planetas fazem uma trajetória circular em torno de um astro, no caso do geocentrismo seria a Terra e do heliocentrismo o Sol, porém, eles acreditavam que essa trajetória era de uma circunferência perfeita e que o astro em questão estaria no centro da circunferência (figura 2).

As leis de Kepler têm como objetivo descrever as razões do movimento planetário do nosso sistema solar, tendo como base o modelo Copernicano e das observações do astrônomo dinamarquês Tycho Brahe.

3.1. Primeira Lei de Kepler

A primeira lei de Kepler afirma que “os planetas descrevem órbitas elípticas em torno do sol”, confirmando a hipótese que os planetas fazem movimentos circulares e refutando que esses movimentos formam um círculo perfeito.

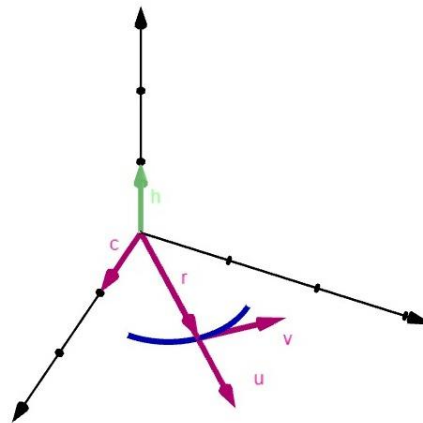
Em 1687 Newton mostrou que a primeira lei de Kepler derivava de duas leis de sua autoria: Segunda lei da dinâmica e a Lei da gravitação universal. Onde, desprezando qualquer interação com outros corpos celestes, o movimento planetário tinha como força resultante a força gravitacional.



A elipse é descrita pela equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, os focos ficam localizados no maior eixo da elipse, se $a > b$ então os focos estão no eixo horizontal e se $b > a$ então os focos estão no eixo vertical. A elipse possui também uma excentricidade e , que é a razão entre o comprimento c da elipse e a metade do comprimento do eixo maior da mesma.

Demonstração 1. Usando um sistema de coordenadas onde teremos o Sol como ponto de origem, $\vec{r} = \vec{r}(t)$ o vetor posição do planeta, r a distância entre os centros de massa do planeta ao Sol, $\vec{v}$ o vetor velocidade e $\vec{u}$ o vetor unitário que indica a direção radial.

Figura 17 – Diagrama de Vetores



Autor, 2024

Como a força gravitacional do Sol sobre um planeta é muito maior em relação a força exercida por outros corpos celestes iremos desconsiderar todos os outros corpos celestes.

A princípio, igualamos as leis de Newton:

Segunda lei do movimento: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$.

Lei da gravitação universal: $\vec{F} = -\frac{G \cdot m M}{r^3} \cdot \vec{r} = \vec{F} = -\frac{G \cdot m M}{r^2} \cdot \vec{u}$.

Onde $\vec{F}$ é a força da gravidade sobre o planeta, m e M são as massas do planeta e do Sol, G é a constante gravitacional, $r = |\vec{r}|$ e $\vec{u} = (1/r)\vec{r}$ é o vetor unitário na direção de $\vec{r}$.

Mostraremos inicialmente que o planeta se move em um plano. De fato igualando as forças $\vec{F}$ nas duas leis de Newton.

$$m \cdot \vec{a} = -\frac{G \cdot mM}{r^2} \cdot \vec{u}$$

$$\vec{a} = -\frac{G \cdot M}{r^2} \cdot \vec{u}.$$

Donde, $\vec{a}$ é paralelo a $\vec{r}$ e o seu produto vetorial $\vec{r} \times \vec{a} = 0$.

Observe que

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v}) = \vec{r}' \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{v}'. \quad (*)$$

Como $\vec{r}' = \vec{v}$, $\vec{v}' = \vec{a}$ e $\vec{r} \times \vec{a} = 0$, temos que

$$\vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{a} = 0 + 0 = 0.$$

Logo, segue de (*) que

$$\vec{r} \times \vec{v} = \vec{h}.$$

onde $\vec{h} \neq 0$ é um vetor constante perpendicular á v e $\vec{r} = \vec{r}(t)$ em todos os valores de t . Isso significa que o vetor que o planeta está situado em está um plano que passa pela origem e que sua orbita é uma curva plana.

Para demonstrar a primeira lei de Kepler, vamos reescrever o vetor $\vec{h}$ como segue:

$$\begin{aligned} \vec{h} &= \vec{r} \times \vec{v} = \vec{r} \times \vec{r}' = r\vec{u} \times (r\vec{u})' \\ &= r^2(\vec{u} \times \vec{u}'). \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{h} &= -\frac{G \cdot M}{r^2} \vec{u} \times (r^2 \vec{u} \times \vec{u}') \\ &= -GM \vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{u}') \\ &= -GM [(\vec{u} \cdot \vec{u}')\vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{u})\vec{u}']. \end{aligned}$$

Sabendo que $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 = 1$, $|\vec{u}(t)| = 1$ e que $u \cdot u' = 0$, logo

$$\begin{aligned} a \times h &= GMu' \\ (\vec{v} \times h)' &= \vec{v}' \times h = a \times h = GMu' \\ v \times h &= GMu + \vec{c}. \end{aligned}$$

Com $\vec{c}$ sendo um vetor constante.

Escolhe-se convenientemente os eixos coordenados para que o vetor na base canônica $\vec{k}$ aponte na direção do vetor $\vec{h}$. Da equação anterior, tem-se que $\vec{c}$ pertence ao plano xy , dado que $\vec{v} \times \vec{h}$ e $\vec{u}$ são perpendiculares a $\vec{h}$. Podemos então escolher os eixos x e y tais que o vetor i esteja na direção à excentricidade e .

Dado θ , o ângulo entre $\vec{c}$ e $\vec{r}$, então (r, θ) são as coordenadas polares do planeta, da equação acima, temos então

$$\begin{aligned} r \cdot (\vec{v} \times \vec{h}) &= \vec{r} \cdot (GM \vec{u} + \vec{c}) \\ &= GM \vec{r} \cdot \vec{u} + \vec{r} \cdot \vec{c} \\ &= GM r \vec{u} \cdot \vec{u} + |\vec{r}| |\vec{c}| \cos \theta \\ &= GM r + r c \cos \theta. \end{aligned}$$

onde $c = |\vec{c}|$. Portanto,

$$r = \frac{\vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{h})}{GM + c \cos \theta} = \frac{1}{GM} \frac{\vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{h})}{1 + e \cos \theta}.$$

Com $e = \frac{c}{GM}$. Porém

$$\vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{h}) = (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{h} = \vec{h} \cdot \vec{h} = |\vec{h}|^2 = h^2.$$

onde $h = |\vec{h}|$. Portanto,

$$r = \frac{\frac{h^2}{GM}}{1 + e \cos \theta} = \frac{\frac{eh^2}{c}}{1 + e \cos \theta}.$$

escreva $d = \frac{h^2}{c}$, e obtém-se

$$r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}.$$

Esta equação corresponde à forma polar da seção cônica da elipse com excentricidade e . Portanto, conclui-se que os planetas fazem um movimento elíptico em torno do Sol.

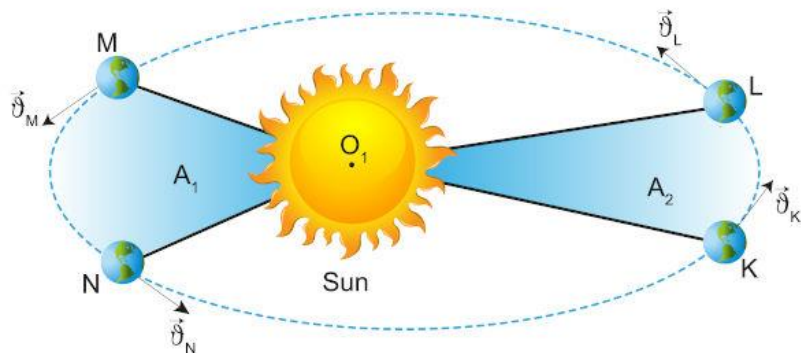
3.2. Segunda Lei de Kepler

A segunda lei de Kepler, lei das áreas, afirma que “em um referencial fixo no Sol, a reta que une o planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais”, essa lei pode ser descrita pela fórmula matemática

$$T = \frac{A_1}{\Delta t_1} = \frac{A_2}{\Delta t_2} = \dots = k.$$

onde, T é o período de revolução dos planetas, A_1 e A_2 são as áreas varridas pelos planetas, Δt_1 e Δt_2 são os intervalos de tempo e k é uma constante.

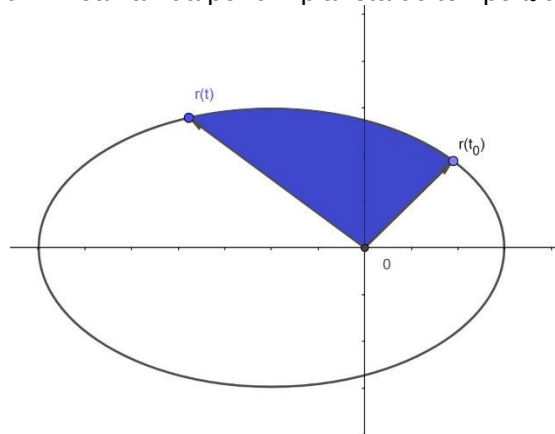
Figura 18 - Área de Varredura



Fonte: [Segunda lei de Kepler: resumo e exercícios - Mundo Educação \(uol.com.br\)](http://Segunda%20lei%20de%20Kepler%3A%20resumo%20e%20exerc%C3%ADcios%20-%20Mundo%20Educa%C3%A7%C3%A3o%20(uol.com.br))

Nessa seção iremos demonstrar a segunda Lei de Kepler e usaremos coordenadas polares

Figura 19 – Área varrida por um planeta do tempo t_0 ao tempo t



Autor 2024

Considerando que o deslocamento de um planeta em um curto intervalo de tempo ($\Delta t \rightarrow 0$), ficará próximo a um triângulo e que a área do triângulo é:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Onde, b é o comprimento da base, h comprimento da altura.

Admitindo que a área varrida pelo planeta se trata de uma área diferencial com distância entre os centros de massa r e altura o valor, em módulo, do arco, temos:

$$dA = \frac{r \cdot r d\theta}{2}.$$

A área e o ângulo variam com o tempo, assim:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}.$$

Assim temos que a região de uma curva é dada pela integral da equação polar do capítulo 2:

$$A = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{2} r^2 dt.$$

Sabendo que $r = f(\theta)$, $\theta = \theta(t)$, derivamos A em função de θ e obtemos:

$$\frac{dA}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{1}{2} r^2.$$

Pela regra da cadeia, temos que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt},$$

onde $A = A(t)$ é a área varrida pelo vetor radial $\vec{r} = r(t)$ no intervalo de tempo $[t_0, t]$, como mostra a Figura 19.

Admitindo que $\vec{r}$ pode ser escrito em coordenadas polares, temos

$$\vec{r} = r \cos \theta \vec{i} + r \sin \theta \vec{j} + 0 \vec{k}.$$

E que vetor unitário $\vec{u}$ é dado por

$$\vec{u} = \frac{1}{r} \cdot \vec{r}.$$

Então

$$\vec{u} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} + 0 \vec{k},$$

E daí

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\sin\theta \frac{d\theta}{dt} \vec{i} + \cos\theta \frac{d\theta}{dt} \vec{j} + 0\vec{k}.$$

Calculando o produto vetorial obtemos

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \frac{d\vec{u}}{dt} &= \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta \frac{d\theta}{dt} & \cos\theta \frac{d\theta}{dt} & 0 \end{bmatrix}, \\ \vec{u} \times \frac{d\vec{u}}{dt} &= \begin{bmatrix} \sin\theta & 0 \\ \cos\theta \frac{d\theta}{dt} & 0 \end{bmatrix} \vec{i} - \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ -\sin\theta \frac{d\theta}{dt} & 0 \end{bmatrix} \vec{j} + \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta \frac{d\theta}{dt} & \cos\theta \frac{d\theta}{dt} \end{bmatrix} \vec{k}, \\ \vec{u} \times \frac{d\vec{u}}{dt} &= (\cos^2\theta + \sin^2\theta) \frac{d\theta}{dt} \vec{k}, \\ \vec{u} \times \frac{d\vec{u}}{dt} &= \frac{d\theta}{dt} \vec{k}. \end{aligned}$$

Temos, pela demonstração da primeira lei de Kepler, que

$$\vec{h} = r^2 \left(\vec{u} \times \frac{d\vec{u}}{dt} \right),$$

logo,

$$\vec{h} = r^2 \left(\vec{u} \times \frac{d\vec{u}}{dt} \right),$$

então

$$h = r^2 \frac{d\theta}{dt}.$$

relembre que,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

Comparando as expressões,

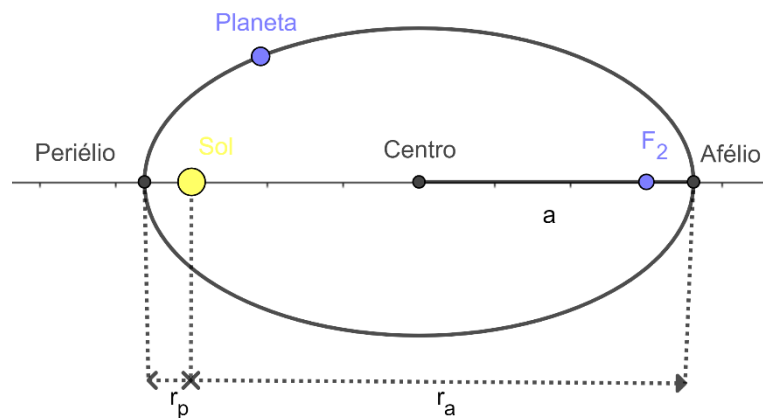
$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} h.$$

Como que h é constante, temos que a variação da área com respeito ao tempo é constante.

3.3 Terceira Lei de Kepler

A terceira lei de Kepler afirma que “O quadrado do período de translação de cada planeta em torno do Sol é proporcional ao cubo do raio médio da respectiva órbita”.

Figura 20 - Translação do planeta ao redor do sol



Autor, 2024

Sabendo que T é o período de translação da Terra em torno do Sol, que sua trajetória é uma elipse e que a é a medida do raio médio do semieixo maior, temos que:

$$T^2 = ka^3$$

Sendo k uma constante que depende apenas da massa do Sol, pois a massa do planeta é desprezível em relação ao do Sol, logo temos que a razão $\frac{T^2}{a^3}$ é constante para todos os planetas.

Admitindo que

$$a = \frac{ed}{1 - e^2}$$

A princípio, para demonstrar iremos reescrevendo em coordenadas polares de secções cônicas, assim temos

$$a = \frac{p}{1 - e^2}$$

Sabendo que $e = \frac{c}{a}$ e que $c^2 = a^2 - b^2$, temos

$$e = \frac{a^2 - b^2}{a^2},$$

$$ea^2 = a^2 - b^2.$$

Logo temos que

$$b^2 = a^2(1 - e^2),$$

$$\frac{b^2}{a^2} = (1 - e^2).$$

Substituindo em $a = \frac{p}{1-e^2}$, temos

$$a = \frac{p}{\frac{b^2}{a^2}},$$

$$b^2 = pa.$$

Temos da demonstração da primeira lei de Kepler que

$$r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta} = \frac{p}{1 + e \cos \theta}.$$

onde $p = \frac{h^2}{GM}$ e $e = \frac{c}{GM}$

Sabendo que T é o tempo em que o planeta dá uma volta ao redor do Sol e que a área variada no intervalo de tempo $[0, T]$ é dado por:

$$A = \int_0^T \left(\frac{dA}{dt} \right) dt$$

$$A = \int_0^T \frac{1}{2} h dt$$

$$A = \frac{1}{2} hT.$$

Comparando com a área de uma região plana de uma elipse, com eixos $2a$ e $2b$

$$A = \pi ab.$$

Assim temos

$$\frac{1}{2}hT = \pi ab \text{ ou ainda } T = \frac{2\pi ab}{h}$$

Elevando ao quadrado T

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{h^2}.$$

Substituindo $b^2 = pa$ na equação anterior

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 pa}{h^2},$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3 p}{h^2}.$$

Admitindo $p = \frac{h^2}{GM}$, temos

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}.$$

Fazendo $k = \frac{4\pi^2}{GM}$, temos

$$T^2 = ka^3.$$

Como queríamos demonstrar.

4 Aplicações

Exemplo 1. O Planeta Terra, que orbita em torno do Sol, tem período orbital de 1 ano. Se um planeta qualquer, que também orbita em torno do Sol e que tem raio orbital 3 vezes maior, fará a volta em torno sol em quanto tempo?

Note que aplicando a terceira lei de Kepler encontramos que

$$\frac{T_T^2}{R_T^3} = \frac{T_b^2}{R_b^3}.$$

Admitindo que $R_b = 3R_a$, $T_a = 1$ temos

$$\frac{1^2}{R_a^3} = \frac{T_b^2}{(3R_a)^3}$$

$$T_b^2 = \frac{27R_a^3}{R_a^3}$$

$$T_b^2 = 27$$

$$T_b = \sqrt{27}$$

$$T_b = 3\sqrt{3}.$$

$$T_b \cong 5,2 \text{ anos.}$$

Portanto, concluímos que o planeta B demora 5,2 anos terrestres para girar ao redor do Sol.

Exemplo 2. O planeta Terra realiza uma trajetória elíptica em torno do sol cujo a área varria é de $A = 6,98 \cdot 10^{22} \text{ m}^2$ em um ano. Qual seria a área varrida pelo planeta Terra no intervalo de tempo de 30 dias?

Sabendo que, pela segunda leis de Kepler, a área varrida pelo raio que liga o centro do sol ao centro de um planeta é proporcional ao tempo para varrê-la, temos

$$\text{Áreas Total} = 6,98 \cdot 10^{22} \text{ m}^2$$

$$1 \text{ ano} = 12 \text{ meses}$$

Encontrando a área mensal (A_M), temos

$$A_M = \frac{6,98 \cdot 10^{22}}{12} \\ \approx 5,82 \cdot 10^{21} \text{ m}^2$$

5. Considerações Finais

Percebemos, ao longo deste trabalho, como as observações dos céus resultaram em algumas teorias cosmológicas sobre o movimento dos planetas. Algumas dessas teorias foram o geocentrismo, onde a Terra era o centro do universo, o heliocentrismo, teoria proposta por Nicolau Copérnico que afirmava que o Sol era o centro do universo e as leis de Kepler, teoria aceita até os dias atuais, que tem como base a teoria copernicana, onde, afirmam que os planetas estão em uma trajetória elíptica com o Sol em um dos seus focos.

Através da utilização da geometria analítica, dos cálculos diferenciais, e das leis de Newton, abordados no capítulo 2, obtemos os resultados presente neste trabalho, como a demonstração de cada lei e a importância para diversas áreas científica.

Referências

- [1] GARMS, Marco Antônio; CALDAS, Iberê Luiz, Síntese das Leis de Kepler , Revista Brasileira de ensino de física, São Paulo, Brasil, vol. 40, n. 2, p 1-12, Outubro, 2017. Disponível em : <http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2017-0253>
- [2] LOPES, Ideusa Celestino. Giordano Bruno: Entre o geocentrismo e o heliocentrismo. Griot:Revista de filosofia, vol. 6, num. 1, p 1-25, Junho, 2014. Disponível em: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=576664778002>
- [3] PAULO, Boulos; CAMARGO, Ivan de. Geometria Analítica: Um tratamento Vetorial. 3° ed, Brasil, São Paulo, 2005
- [4] PORTO, Claudio Maia A revolução copernicana: Aspectos históricos e epistemológicos, Revista Brasileira de Física, Rio de Janeiro, Brasil, vol. 42, p 1-20, dezembro, 2019. Disponível : <http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2019-0190>
- [5] RAMALHO, Francisco; GILBERTO, Nicolau; SOARES, Paulo Antônio. Fundamentos da Física, parte 3. Brasil, São Paulo, 2014
- [6] REIS, Genésio Lima dos; SILVA, Valdir Vilmar, Geometria Analítica, 2°ed. Brasil, Goiânia, 1993
- [7] SILVA, Gil Alves. Leis de Kepler do movimento planetário: um breve panorama de como a história da cosmologia mostra sua descoberta. 2016. 16. Artigo – Universidade Federal do Rio de Janeiro
- [8] STEWART, J. *Cálculo: Volume 1*. Brasil, São Paulo: Trilha, 2014.
- [9] STEWART, J. *Cálculo: Volume 2*. Brasil, São Paulo: Trilha, 2016.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

CAMPUS A.C SIMÕES

CURSO DE FÍSICA - LICENCIATURA

GENNIFER MARTINS DA SILVA

AS LEIS DE KEPLER

Maceió - AL

2024

GENNIFER MARTINS DA SILVA

AS LEIS DE KEPLER

Trabalho de conclusão de curso apresentada ao corpo docente do Curso de Física Licenciatura da Universidade Federal de Alagoas-UFAL, Campus A.C. Simões, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciada em Física.

Orientador: Prof. Dr. José Anderson de Lima e Silva

Maceió - AL

2024

FOLHA DE APROVAÇÃO

Gennifer Martins da Silva

AS LEIS DE KEPLER

Trabalho de conclusão de curso apresentado como requisito para obtenção do grau de licenciado em Física pela Universidade Federal de Alagoas.

Documento assinado digitalmente
 JOSE ANDERSON DE LIMA E SILVA
Data: 09/02/2024 08:45:16-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

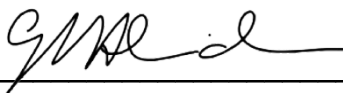
Prof. Dr. José Anderson de Lima e Silva

IM / UFAL

Documento assinado digitalmente
 MARCOS RANIERI DA SILVA
Data: 08/02/2024 15:20:50-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Marcos Ranieri da Silva

IM / UFAL



Prof. Dr. Guilherme Martins Alves de Almeida

Coordenador – Física Licenciatura

IF / UFAL

Aos Meus pais, meu alicerce.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, por ser comigo em todos os momentos e em toda minha trajetória acadêmica. Agradeço também aos meus pais Marilene Martins e Genilson Caetano e também a minha irmã Jakline Martins. Obrigada por todo amor, cuidado, suporte e conselhos que me ajudaram a não desistir.

Agradeço também às minhas amigas que me acompanham desde o ensino médio e que iniciaram comigo essa caminhada: Dayane Siqueira, Elisangela Maurilane, Maria Luiza e Rayane Gabriele, foram vários momentos de descontração, estudos e conversas de incentivo para que eu continuasse.

Em especial quero agradecer a Cleisiane Fernandes, uma amiga que Deus colocou na minha vida nessa reta final da minha graduação e que foi de suma importância para que hoje eu conseguisse concluir mais essa etapa. Te agradeço pelos conselhos, conversas, por ouvir minhas reclamações, pelas noites de vinho com fandangos e principalmente por me fazer ver o quanto eu era capaz.

Ao professor Dr. José Anderson meus sinceros agradecimentos, por me orientar. Agradeço também a todo corpo docente do Instituto de Física, por cada contribuição na minha formação e aos professores da banca, que disponibilizaram seu tempo para avaliarem esse trabalho de conclusão.

Por fim, agradeço a todos que contribuíram indiretamente na minha vida.

“Porque sou Eu que conheço os planos que tenho para vocês’, diz o Senhor, ‘planos de fazê-los prosperar e não de causar dano, planos de dar a vocês esperança e um futuro. Então vocês clamarão a mim, virão orar a mim, e Eu os ouvirei. Vocês me procurarão e me acharão quando me procurarem de todo o coração”.

(Bíblia Sagrada, Jeremias 29: 11-13.)

Resumo

As leis de Kepler surgiram a partir das divergências apresentadas nos modelos astronômicos anteriormente criados pelos astrônomos Claudio Ptolomeu e Nicolau Copérnico. Logo, este Trabalho tem como objetivo descrever como foi realizada a passagem do modelo geocêntrico para o modelo vigente, o heliocentrismo, que serviu de base para que Kepler formalizasse suas leis e para apresentar as demonstrações de cada uma delas através de ferramentas matemáticas como o Cálculo Diferencial e Geometria Analítica, e de física, como as Leis de Newton. Além disso, apresentamos algumas aplicações para que seja possível a compreensão do conteúdo de forma mais objetiva.

Palavras-chave: Leis de Klepler; Astronomia; Geocentrismo; Heliocentrismo; Modelos Astonômicos; Kepler; Elipse

Abstract

Kepler's laws emerged from the discrepancies presented in the astronomical models previously created by the astronomers Claudius Ptolemy and Nicholas Copernicus. Therefore, this paper aims to describe how the transition from the geocentric model to the current heliocentrism model was accomplished, which served as the foundation for Kepler to formalize his laws. It also aims to present the demonstrations of each of them through mathematical tools such as Differential Calculus and Analytical Geometry, as well as physics, like Newton's Laws. Furthermore, we will provide some applications to enable a more objective understanding of the content.

Keywords: Kepler's laws; Astronomy; Geocentrism; Heliocentrism; Astronomic Models; Kepler; Ellipse

Sumário

1 Modelos Astronômicos.....	11
1.1 O Formato da Terra	11
1.2 Modelo Geocêntrico	12
1.3 Modelo Heliocêntrico	13
2. Conceitos Fundamentais.....	15
2.1.Vetores.....	15
2.1.1Modulo de um Vetor	17
2.1.2.Vetor Unitário	17
2.1.3.Produto Escalar	17
2.2.Cônicas.....	20
2.2.1.Parábola.....	20
2.2.2.Elipse	21
2.2.3.Hipérbole.....	23
2.3.Coordenadas Polares	23
2.3.1.Curvas Polares	24
2.4.Noções de Derivadas.....	26
2.4.1.Derivada do Produto	26
2.4.2.Derivada do Quociente	27
2.4.3.Regra da Cadeia.....	27
2.5.Newton.....	28
2.5.1.Segunda Lei da Dinâmica	28
2.5.2.Lei da Gravitação Universal	28
3. As Leis de Kepler	29
3.1. Primeira Lei de Kepler.....	29
3.2. Segunda Lei de Kepler.....	33
3.3 Terceira Lei de Kepler	36
4 Aplicações	39
5. Considerações Finais.....	41
Referências	42

Introdução

Várias teorias sobre o universo surgiram a partir da observação dos céus. Abordaremos algumas dessas teorias cosmológicas sobre os movimentos dos planetas, como o geocentrismo de Cláudio Ptolomeu, no qual acreditava-se que o centro do universo era o planeta Terra. Outra teoria proposta, desta vez por Nicolau Copérnico, é a do heliocentrismo, na qual Copérnico afirmava que o Sol é o centro do universo e que serviu de base para as leis de Newton.

No Capítulo 1, discutimos brevemente a história do desenvolvimento das teorias sobre o movimento dos planetas e como chegamos à teoria do heliocentrismo. A primeira teoria abordada é o geocentrismo, que foi influenciado pela Igreja Católica e afirmava que a Terra era estática e era o centro do universo, com os demais astros orbitando ao seu redor.

Alguns anos mais tarde, devido a algumas dúvidas sobre essa teoria, Copérnico propôs o heliocentrismo, no qual, em vez da Terra, o Sol era o centro do sistema, e os demais planetas orbitavam ao seu redor em trajetórias circulares. Anos depois, essa teoria foi comprovada por Galileu Galilei com o auxílio de seu primeiro telescópio.

Esse modelo explicava algumas questões, como as variações noturnas, mas suscitava outras sobre o movimento de alguns planetas. A partir dos estudos de cientistas como Isaac Newton e Tycho Brahe, tomando como base o modelo heliocêntrico, coube ao jovem astrônomo alemão Johannes Kepler estabelecer como os planetas se movem em torno do Sol. Kepler herdou as precisas observações de seu mestre Tycho Brahe, que lhe proporcionaram, após muito trabalho, estabelecer de forma definitiva as leis que descrevem os movimentos dos planetas de nosso sistema solar, tomando o Sol como nosso referencial.

No Capítulo 2, abordaremos alguns conceitos fundamentais para possibilitar a compreensão dos capítulos posteriores. Inicialmente, começaremos com a geometria

analítica, onde explanaremos um pouco sobre vetores, soma de vetores, produto vetorial, cônicas e coordenadas polares. Logo após, falaremos sobre as regras de derivação, como a regra do produto e do quociente. Destinaremos uma seção às leis de Newton, incluindo a lei da gravitação universal e a lei da dinâmica. Essas leis têm em comum o fato de tratarem das forças. A segunda lei de Newton ou Princípio fundamental da dinâmica trata da força resultante sobre um corpo, e a lei da gravitação universal lida com a força de interação entre dois corpos.

No Capítulo 3, abordaremos as três leis de Kepler. Onde será possível afirmar, por meio de cálculos, que a trajetória de um planeta se dá na forma de uma elipse e que o Sol está em um de seus focos. Demonstraremos a segunda lei, na qual, calculando por coordenadas polares a área varrida por um planeta, observaremos que um planeta varre áreas iguais em intervalos de tempos iguais. Já a terceira lei utilizaremos as cônicas para demonstrar que o tempo de revolução de um planeta é proporcional ao cubo do comprimento do raio médio da órbita em questão.

Finalmente, no Capítulo 4, exemplificamos algumas aplicações das leis de Kepler, nas quais utilizaremos cálculos básicos que podem ser aplicados na área de ensino de ciências nas séries fundamentais e no ensino médio como forma de utilizar a matemática de maneira prática e visível.

1 Modelos Astronômicos

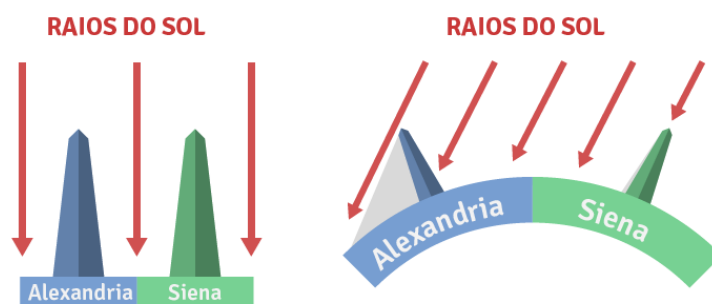
Neste capítulo, exploramos a trajetória histórica sobre o formato da terra, os modelos astronômicos, começando com o geocentrismo e avançando até o modelo atualmente aceito, o heliocentrismo.

1.1 O Formato da Terra

O movimento terraplanista, proposto por Samuel Birley Rowbotham, continua sendo motivo de acalorados debates nos dias atuais. Rowbotham publicou o livro "Astronomia Zetética," no qual ele tentou comprovar, por meio de experimentos, a teoria de que a Terra é plana. Nas palavras de Rowbotham (traduzidas por Tolvai, 2019, p. 9), "Teorias são incertas e dependem, em grande parte, do humor e capricho de uma era, às vezes inclinando-se a favor de uma teoria, e em outros momentos, a favor de outra." Ele acreditava que a única maneira de afirmar um fato era comprovando-o.

Essa perspectiva de Rowbotham entrava em contradição com a de Eratóstenes, que deduziu que a Terra tinha uma forma esférica. Com o objetivo de medir o diâmetro da Terra, Eratóstenes observou que, ao meio-dia, no solstício de verão, não havia sombra em Siena, ao contrário de Alexandria. Ele concluiu, portanto, que a Terra era, de fato, esférica, uma vez que, se fosse plana, os raios solares incidiriam da mesma forma em ambos os lugares, resultando em sombras iguais nas duas cidades.

Figura 1: Sombra de Alexandria e Siena

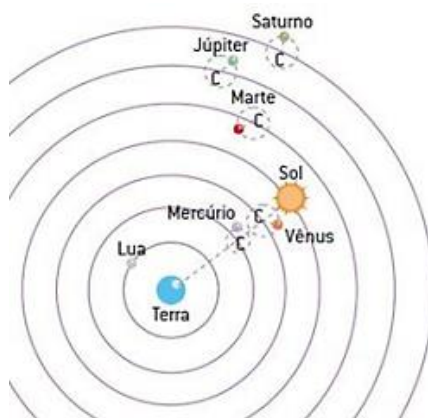


Fonte: [Usando a matemática: Como Eratóstenes mediu o tamanho da terra \(gcfglobal.org\)](https://gcfglobal.org/pt-br/uso-da-matematica-como-erastostenes-midiu-o-tamanho-da-terra/)

1.2 Modelo Geocêntrico

A observação de fenômenos naturais sempre teve presença marcante nas áreas das ciências, especialmente na física. Essas observações serviram de base para a formulação de diversas leis e estudos sobre o universo. Um exemplo notável é o modelo geocêntrico, no qual Aristóteles se esforçava para explicar o movimento dos corpos celestes. Segundo a visão de Aristóteles, o movimento planetário consistia em oito planetas perfeitamente esféricos, deslocando-se em trajetórias circulares concêntricas, tendo a Terra como centro.

Figura 2 – Modelo astronômico de Ptolomeu

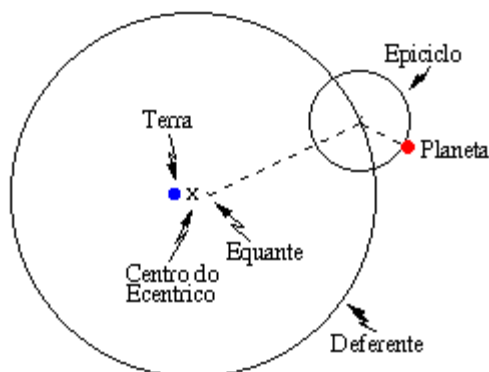


Fonte: <https://www.ufmg.br/espacodoconhecimento/geocentrismo-e-heliocentrismo/>.

Outra ideia defendida por Aristóteles era a imobilidade da Terra. Ele partiu do princípio do movimento simples, no qual, se uma pedra fosse lançada verticalmente para cima, depois de algum tempo, ela retornaria ao ponto de partida. Aristóteles argumentou que, se a Terra estivesse em movimento, a pedra não retornaria ao seu ponto inicial e ocuparia uma nova posição no espaço.

Apesar de o modelo geocêntrico afirmar que os planetas se moviam em trajetórias circulares, eram observadas irregularidades. Por vezes, os planetas estavam mais próximos, enquanto em outros momentos estavam mais distantes. Essas inconsistências foram posteriormente abordadas por Cláudio Ptolomeu, que propôs um novo modelo astronômico em que o movimento planetário era explicado por meio de combinações de círculos, conhecidos como epiciclos.

Figura 3 – Modelo Astronômico de Ptolomeu



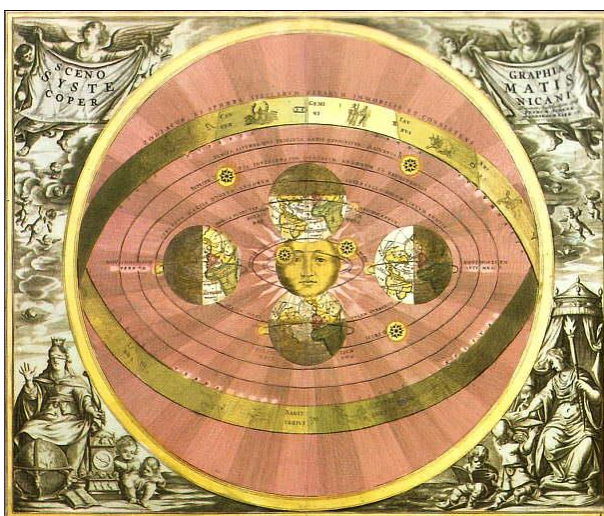
FONTE: [Movimento dos Planetas \(ufrgs.br\)](http://Movimento%20dos%20Planetas%20(ufrgs.br))

O pensamento de Ptolomeu para explicar as irregularidades era que a Terra permanecia imóvel, mas agora não mais no centro da trajetória (denominado deferente). Além do movimento proposto por Aristóteles, Ptolomeu postulou que os planetas também seguiam uma combinação de epiciclos, como ilustrado na Figura 3.

1.3 Modelo Heliocêntrico

O modelo ptolomaico dos epiciclos gerou dúvidas e incertezas sobre a uniformidade do movimento planetário. Por volta de 1540, logo após a morte de Nicolau Copérnico, um novo modelo foi proposto. Ele partia da ideia de que a Terra não estava imóvel no centro do universo, mas sim em movimento, seguindo uma trajetória circular ao redor do Sol, que ocuparia o centro desse sistema

.FIGURA 4 – MODELO ATRONÔMICO COPERNICANO



FONTE: [Sistema heliocêntrico de Copérnico \(astromia.com\)](http://Sistema%20helioc%C3%AAntrico%20de%20Cop%C3%A9rnico%20(astromia.com))

Além do movimento irregular dos planetas, outro motivo que levou Copérnico a propor esse modelo foram as variações noturnas e a observação das estrelas e constelações, nas quais se notava um movimento coletivo sem que a distância entre elas se modificasse. Essas observações corroboraram a ideia da Terra em movimento. No entanto, a proposta de Copérnico só pôde ser divulgada após sua morte, uma vez que conflitava com os dogmas impostos pela igreja durante a época da Reforma Protestante.

Anos mais tarde, Galileu, por meio de observações realizadas com o telescópio, confirmou o movimento cíclico de alguns planetas, como Vênus, os anéis de Saturno e até mesmo as fases da Lua (Claudio Maia, 2020). Todas essas observações feitas por Galileu fortaleceram o modelo heliocêntrico proposto por Copérnico. No entanto, essas descobertas resultaram em perseguição e, posteriormente, na prisão de Galileu, imposta pela igreja durante a época da Reforma Protestante.

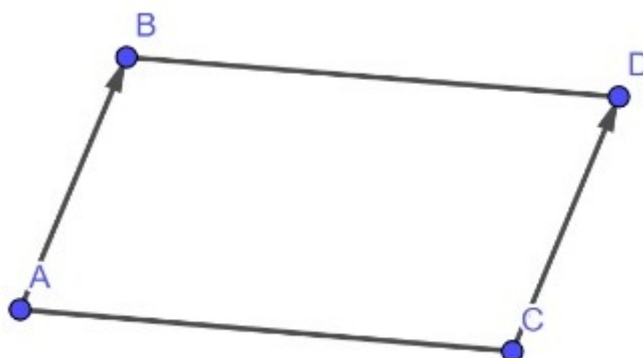
2. Conceitos Fundamentais

Neste capítulo, abordaremos conceitos fundamentais, tais como vetores, derivadas e as leis de Newton, com ênfase na segunda lei da dinâmica e na lei da gravitação universal. Esses conceitos serão essenciais para a compreensão dos capítulos subsequentes.

2.1. Vetores

Vetores do plano ou do espaço são representados por segmentos orientados que têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento e são representados de um mesmo vetor. Por exemplo, no paralelogramo da figura abaixo, os segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ determinam o mesmo vetor $v = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

Figura 5: Representação de um vetor no plano cartesiano

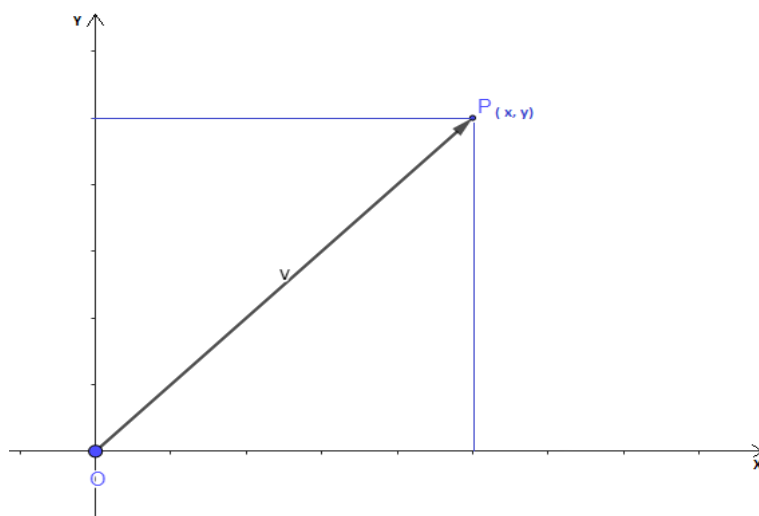


Autor, 2023

O conjunto $\mathbb{R}^2$, representado por

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}.\}$$

é interpretado como o plano cartesiano xOy . Em qualquer vetor v neste plano, sempre podemos encontrar um representante OP , cuja origem é o ponto de partida do sistema, como ilustrado na figura abaixo.

Figura 6: Vetor v 

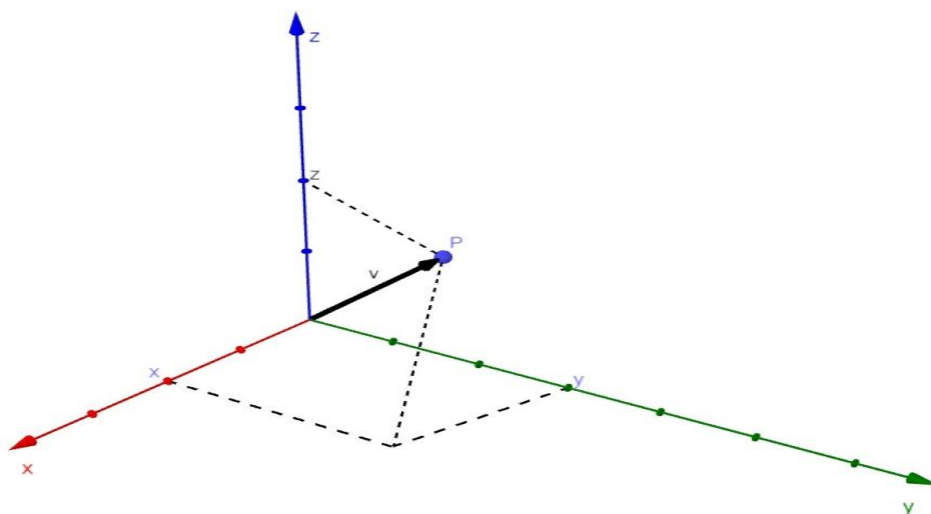
Autor, 2024

O conjunto

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z); x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

é interpretado como sendo o espaço cartesiano tridimensional Oxyz.

De forma análoga ao que foi feito no plano, qualquer vetor pode ser representado por um segmento orientado com origem na origem do sistema no espaço tridimensional. Nessas condições, cada vetor OP no espaço é determinado pelo extremo do segmento P , onde o ponto $P(x, y, z)$ indica o vetor $v = \overrightarrow{OP}$

Figura 7 – Vetor no Espaço $\mathbb{R}^3$ 

Autor 2024

2.1.1. Módulo de um Vetor

O modulo de um vetor $v = (x, y, z)$, representado por $|v|$, é um número real e não negativo:

$$|v| = \sqrt{v \cdot v}.$$

Reescrevendo em coordenadas,

$$|v| = \sqrt{(x, y, z) \cdot (x, y, z)}$$

$$|v| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

EXEMPLO 1. Sendo o vetor $v = (-2, 2, 1)$ temos que,

$$|v| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3.$$

2.1.2. Produto Escalar

Chama-se produto escalar de dois vetores $u(x_1, y_1, z_1)$ e $v(x_2, y_2, z_2)$ representado por $u \cdot v$, onde obtemos um número real.

$$u \cdot v = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 z_2$$

EXEMPLO 1. Sendo os vetores $u(3, 2, 5)$ e $v(5, 4, 7)$, então

$$\begin{aligned} u \cdot v &= x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 z_2 \\ &= 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 5 \cdot 7 \\ &= 15 + 8 + 30 \\ &= \mathbf{53} \end{aligned}$$

Partindo da definição acima, temos as seguintes propriedades do produto escalar:

- I. $u \cdot u \geq 0$ e $u \cdot u = 0$ se, e somente se, $u = 0 = (0, 0, 0)$;
- II. $u \cdot v = v \cdot u$;
- III. $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$;

$$\text{IV. } (ku) \cdot v = u \cdot (kv) = k(u \cdot v);$$

$$\text{V. } u \cdot u = |u|^2,$$

onde temos que u, v e w são vetores quaisquer e k um número real.

Outra forma de representar um produto escalar é:

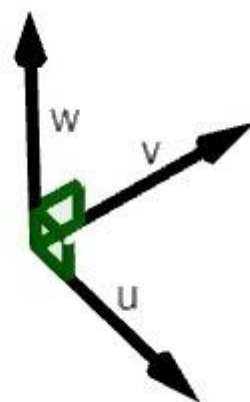
$$u \cdot v = |u||v| \cos \theta$$

onde θ é o ângulo (medido em radianos) entre os vetores u e v (não nulos)

2.1.3. Produto Vetorial

Diferentemente do produto escalar, que gera um número real, o produto vetorial representado por $u \times v$, resulta em um vetor perpendicular aos vetores u e v , portanto podemos representá-lo no espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$ como ilustrado na figura abaixo

Figura 8 - Representação do produto vetorial



Autor 2024

Considere os vetores $u = (a, b, c)$, $v = (a_1, b_1, c_1)$ para que o vetor $w = (x, y, z)$ seja perpendicular aos vetores u e v simultaneamente, devemos garantir que os produtos escalares $w \cdot u = 0$ e $w \cdot v = 0$

Portanto, as condições para que seja perpendicular a u e v são:

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= 0, \\ xa_1 + yb_1 + zc_1 &= 0. \end{aligned}$$

Dessa forma, podemos reescrever da seguinte maneira

$$\begin{aligned} x &= bc_1 - b_1c, \\ y &= a_1c - ac_1, \\ z &= ab_1 - a_1b. \end{aligned}$$

Assim, o vetor resultante é dito produto vetorial de u e v , onde

$$\begin{aligned} u \times v &= w \\ u \times v &= bc_1 - b_1c, a_1c - ac_1, ab_1 - a_1b. \end{aligned}$$

Outra forma de entender o produto vetorial entre dois vetores é por meio do determinante envolvendo a base canônica do $\mathbb{R}^3$, vejamos:

Considere os vetores $u = (a, b, c)$ e $v = (a_1, b_1, c_1)$,

Dados:

$$\begin{aligned} i &= (1, 0, 0), \\ j &= (0, 1, 0), \\ k &= (0, 0, 1). \end{aligned}$$

Admitindo que

$$u \times v = \det \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}.$$

Resolvendo o determinante de terceira ordem, temos:

$$\text{Det} \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = (bc_1 - b_1c) i + (a_1c - ac_1) j + (ab_1 - a_1b) k.$$

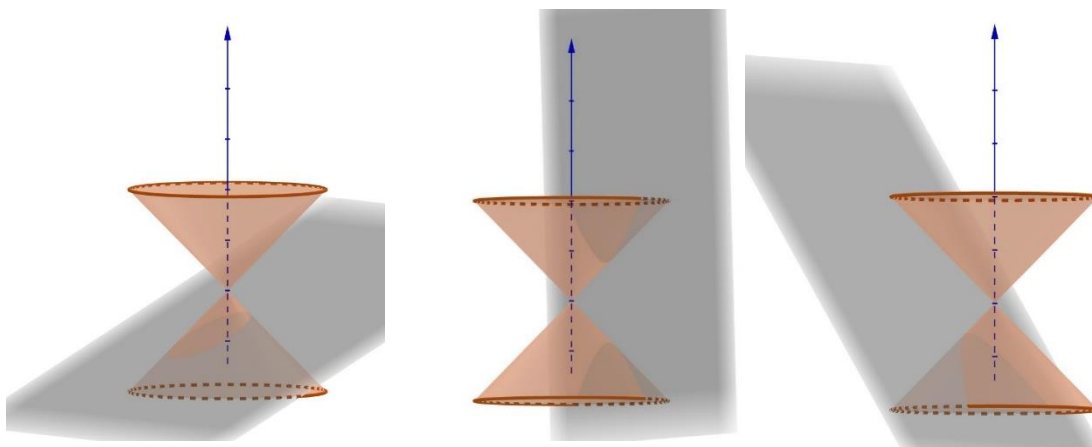
Donde,

$$u \times v = (bc_1 - b_1c, a_1c - ac_1, ab_1 - a_1b).$$

2.2. Cônicas

São figuras resultantes da interseção de um plano com um cone. Como representada na figura a seguir

FIGURA 9 - Interseção do plano com um cone

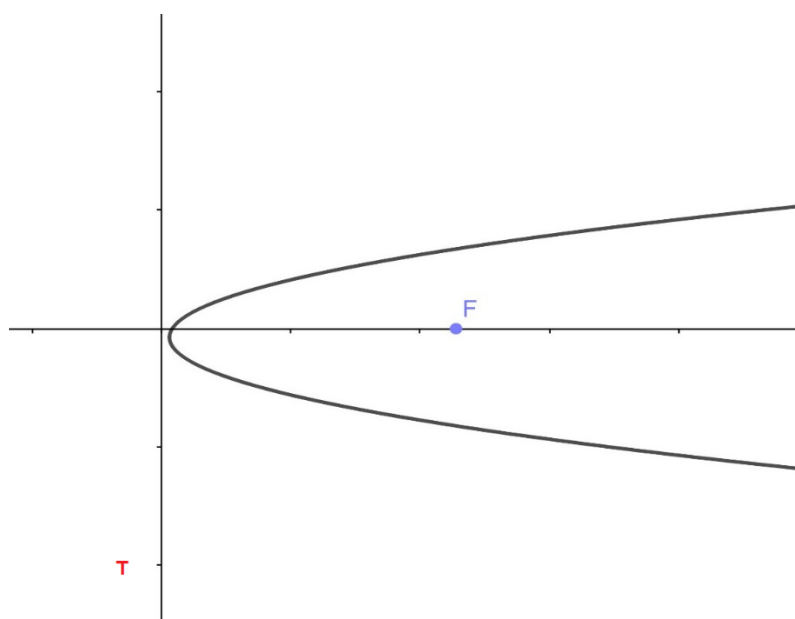


Autor, 2024

2.2.1. Parábola

A parábola é uma figura plana formada pela intersecção do plano com um cone, como representado na figura abaixo.

Figura 10 – Parábola



Autor, 2024

Dados um ponto F e uma reta r , chama-se parábola de foco F e diretriz r ao conjunto de pontos P do plano tais que

$$d(P, F) = d(P, r), \text{ Onde } d \text{ denota a distância.}$$

Seja $P(x, y)$ é um ponto qualquer que pertence a parábola e a distância de r ao foco é igual a $2a$, então

$$\sqrt{x^2 + (y - a)^2} = |y + a|.$$

Elevando ao quadrado cada termo, obtemos a seguinte equação da parábola

$$4ay = x^2 \text{ ou } y = \frac{1}{4a} x^2.$$

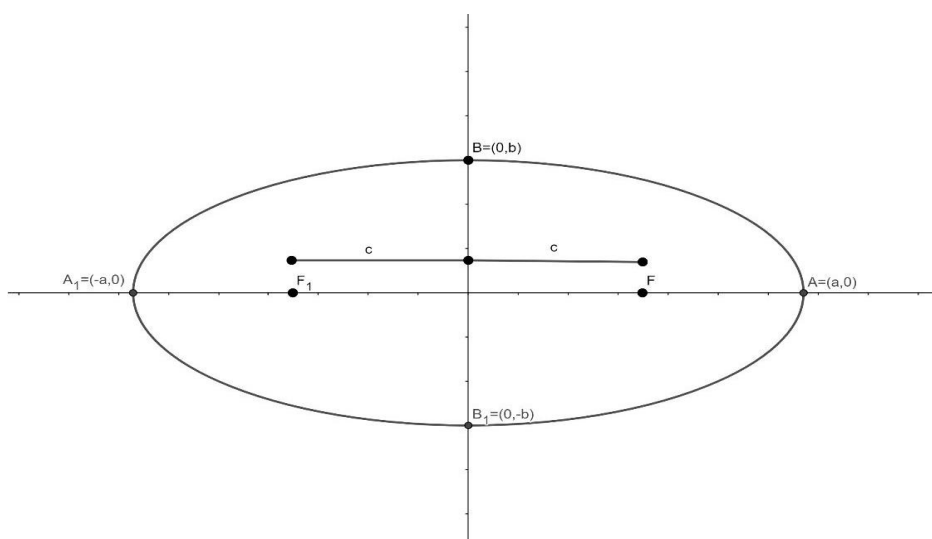
2.2.2. Elipse

Dados dois pontos F e F_1 e um número $r > d(F_1, F)$, o conjunto dos pontos P do plano tais que

$$d(P_1, F) + d(P, F_1).$$

É chamado elipse de focos F e F_1 e eixo maior r

Figuras 11 – Elipse



Autor, 2024

Os pontos A_1 e A e os pontos B e B_1 são chamados vértices da elipse. Observe que a distância entre A_1 e A é igual ao eixo maior r da elipse e que o segmento BB_1 , é perpendicular a A_1A . E a intersecção de A_1A e BB_1 é o centro da elipse.

Donde temos num plano dois pontos quaisquer F_1 e F , distantes $2c > 0$ entre si, esses pontos são chamados de focos. A soma das distâncias de um ponto qualquer $P(x,y)$ aos focos de elipse é chamado de eixo maior $d(A_1, A)$.

$$d(P, F_1) + d(P, F) = d(A_1, A).$$

Para simplificar iremos indicar o eixo maior como $2a$ e a distância entre os focos como $2c$. Aplicando a fórmula da distância entre dois pontos, temos

$$d(P, F_1) + d(P, F) = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a.$$

Ou ainda,

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}.$$

Elevando os dois membros da equação ao quadrado, temos

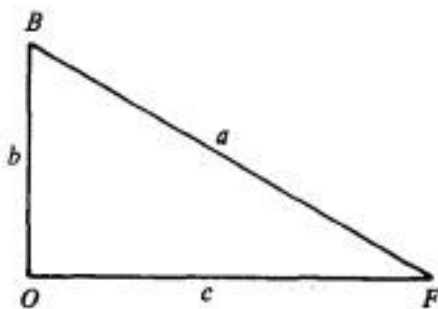
$$\begin{aligned} \left(\sqrt{(x + c)^2 + y^2} \right)^2 &= \left(2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \right)^2 \\ (x + c)^2 + y^2 &= \left(2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \right)^2 \\ (x + c)^2 + y^2 &= (2a)^2 - 2 \cdot 2 \cdot a \cdot \left(\sqrt{(x - c)^2 + y^2} \right) + \left(\sqrt{(x - c)^2 + y^2} \right)^2 \\ (x + c)^2 - (x - c)^2 - 4a^2 &= -4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} \\ 4xc - 4a^2 &= -4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} \\ xc - a^2 &= -a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Elevando, novamente, ao quadrado e simplificando, obtemos

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Ao observar a figura 12 observamos um triângulo retângulo OBF

Figura 12 – Triângulo OBF



Autor, 2024

Donde $a^2 + b^2 = c^2$, assim pela equação anterior, temos

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

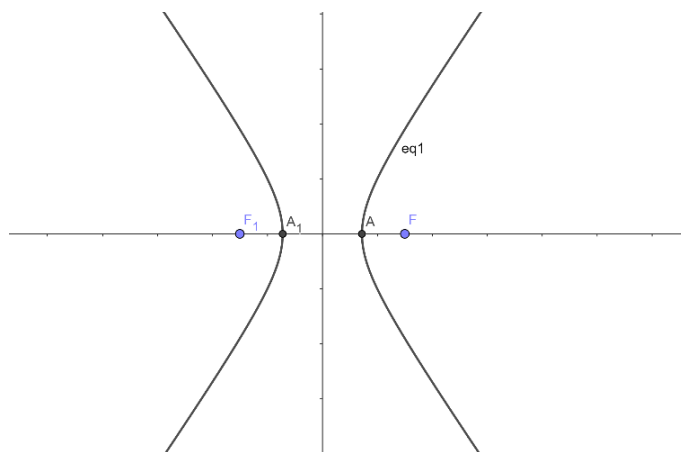
Logo, a equação da elipse será

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

2.2.3. Hipérbole

A hipérbole é uma cônica formada pela secção de um plano com um duplo cone

Figura 13– Hipérbole



Autor, 2024

Os pontos A_1 e A são seus vértices, F_1 e F seus focos e o centro seu ponto medio do segmento. Composta de dois ramos e simétrica em relação a reta que contém os focos e em relação à mediatriz.

Dados dois pontos F_1 e F e um número $r < d(F_1, F)$, o conjunto dos pontos

P do plano tais que

$$|d(P, F_1) - d(P, F)| = d(A, A_1).$$

Admitindo que a distância entre os focos seja $2c$ e a distância entre os vértices igual a $2a$, assim

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a.$$

Após elevar os dois termos ao quadrado, podemos reescrever a equação da seguinte forma

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Admitindo que $c^2 - a^2 = b^2$, obtemos

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

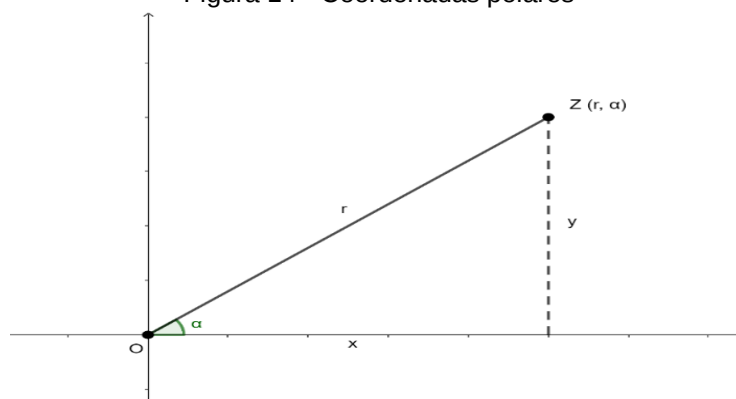
Assim, temos a equação da hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

2.2.4. Coordenadas Polares

As coordenadas polares pontos no plano são constituídos por um par ordenado (r, α) , onde determina a distância a ângulo, em radianos, em relação ao ponto de origem O .

Figura 14 - Coordenadas polares



Fonte: Autor, 2024

Temos que r é a distância do ponto Z até à origem em O e α é o ângulo que Z faz com o eixo Ox .

Se as coordenadas polares de $Z = x + iy$ são (r, α) , com $r > 0$, e relacionando as coordenadas polares com as cartesianas temos,

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

$$x = r \cos \alpha.$$

$$y = r \operatorname{sen} \alpha.$$

$$z = x + iy.$$

$$\frac{y}{x} = \tan \alpha.$$

A partir das equações acima podemos encontrar os valores de r e α , a partir dos valores de x e y .

2.2.5. Curvas Polares

Algumas equações são expressas de forma mais simples quando escritas em coordenadas polares, devido sua natureza circular. Um exemplo é a equação da circunferência de raio r

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Escrevendo em curvas polares, temos

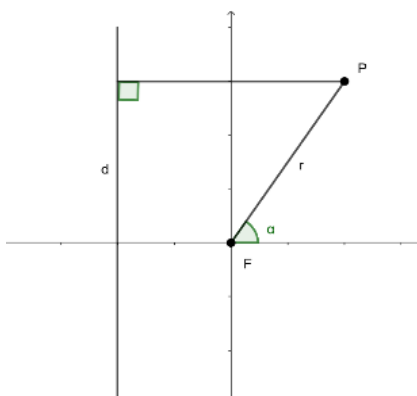
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Proposição: uma cônica de diretriz d , foco F e excentricidade e é o conjunto dos pontos P tais que

$$d(P, F) = e d(P, d).$$

Adotando um sistema de coordenadas xy , como na figura a seguir, temos:

Figura 15 – Sistemas de coordenadas xy



Autor, 2024

$$d(P, F) = r$$

$$d(P, d) = r \cos \alpha + p.$$

Onde em coordenadas polares

$$r = e(r \cos \alpha + p)$$

$$r = \frac{ep}{1 - e \cos \alpha}.$$

onde $1 - e \cos \alpha \neq 0$

2.3. Noções de Derivadas

Nesse capítulo iremos revisar as noções de derivadas que serão essenciais para a compreensão dos capítulos posteriores.

2.3.1. Derivada do Produto

Se f e g são deriváveis e seja $F(x) = f(x) \cdot g(x)$, tem-se então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [f(x) \cdot g(x)] &= \frac{d}{dx} F(x) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} + \frac{f(x+h)g(x)}{h} - \frac{f(x+h)g(x)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (f(x+h)) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] + \lim_{h \rightarrow 0} g(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] \\ &= f(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] + g(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] \\ &= f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x). \end{aligned}$$

2.3.2. Derivada do Quociente

Usando o quociente de Newton, encontramos

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x-a} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x-a} \cdot \frac{1}{g(x)g(a)} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \left[\left(\frac{f(x)g(a) - f(a)g(x) + f(a)g(a) - f(a)g(a)}{x-a} \right) \cdot \frac{1}{g(x)g(a)} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \left[\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} g(a) - f(a) \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \right) \cdot \frac{1}{g(x)g(a)} \right] \\
 &= \left[\frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{[g(a)]^2} \right].
 \end{aligned}$$

2.3.3. Regra da Cadeia

Sabemos que se $y = f(x)$ e x varia de a para $a + \Delta x$, o incremento de y é definido por

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a).$$

E pela definição de derivada, tem-se

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a).$$

Denotando por ε a diferença do quociente de diferenças e a derivada, temos

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a) \right) = f'(a) - f'(a) = 0.$$

Porém

$$\varepsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a) \Rightarrow \Delta y = f'(a)\Delta x + \varepsilon\Delta x.$$

Definindo ε como 0, quando $\Delta x = 0$, ε é uma função contínua de Δx , portanto para uma f diferenciável, podemos escrever, com $\varepsilon \rightarrow 0$ e $\Delta x \rightarrow 0$,

$$\Delta y = f'(a)\Delta x + \varepsilon\Delta x.$$

E ε é uma função contínua de Δx .

Suponha que $u = g(x)$ seja derivável em a e $y = f(u)$ seja derivável em $b = g(a)$.

Se Δx , Δu e Δy forem incrementos em x , u e y respectivamente, logo da equação acima, fazendo $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ e $\Delta x \rightarrow 0$

$$\Delta u = g'(a) \cdot \Delta x + \varepsilon_1 \Delta x = \Delta x(g'(a) + \varepsilon_1).$$

e fazendo $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ e $\Delta u \rightarrow 0$

$$\Delta y = f'(b) \cdot \Delta u + \varepsilon_2 \Delta u = \Delta u(f'(b) - \varepsilon_2).$$

Substituindo Δu na equação, obtemos

$$\Delta y = \Delta x(g'(a) + \varepsilon_1)(f'(b) - \varepsilon_2).$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = (g'(a) + \varepsilon_1)(f'(b) - \varepsilon_2).$$

Quando $\Delta x \rightarrow 0$, temos $\Delta u \rightarrow 0$, assim, $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ e $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ quando $\Delta x \rightarrow 0$. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1] \\ &= f'(b)g'(a) \\ &= f'(g(a))g'(a). \end{aligned}$$

2.4. Newton

Nessa seção iremos abordar algumas leis de Newton, para compreensão dos capítulos seguintes

2.4.1. Segunda Lei da Dinâmica

A segunda lei da dinâmica afirma que a força resultante que atua em um corpo é o produto da massa pela aceleração adquirida pelo mesmo.

$$F_r = m \cdot a.$$

2.4.2. Lei da Gravitação Universal

A lei da gravitação universal afirma que dois corpos exercem uma força de atração mútua e que essa força é diretamente proporcional ao produto das suas massas e da constante gravitacional e inversamente proporcional ao quadrado da distância

$$F_G = \frac{G \cdot M \cdot m}{d^2}.$$

3. As Leis de Kepler

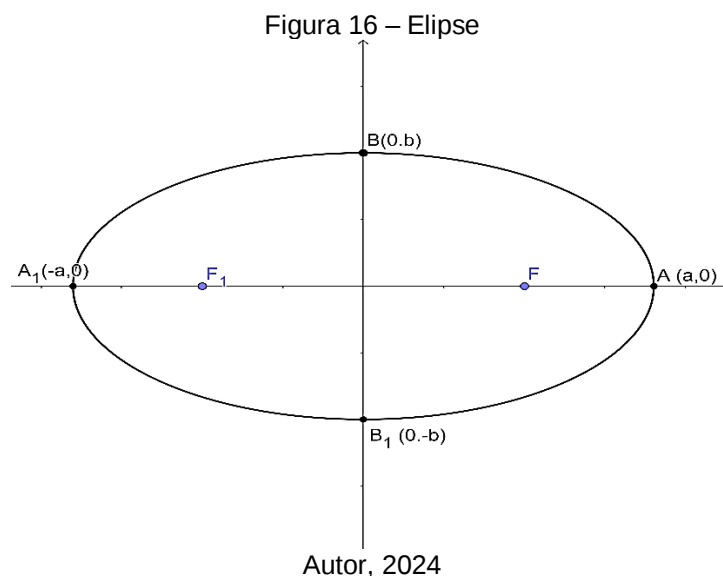
Desde muito tempo tem-se a ideia de que os planetas fazem uma trajetória circular em torno de um astro, no caso do geocentrismo seria a Terra e do heliocentrismo o Sol, porém, eles acreditavam que essa trajetória era de uma circunferência perfeita e que o astro em questão estaria no centro da circunferência (figura 2).

As leis de Kepler têm como objetivo descrever as razões do movimento planetário do nosso sistema solar, tendo como base o modelo Copernicano e das observações do astrônomo dinamarquês Tycho Brahe.

3.1. Primeira Lei de Kepler

A primeira lei de Kepler afirma que “os planetas descrevem órbitas elípticas em torno do sol”, confirmando a hipótese que os planetas fazem movimentos circulares e refutando que esses movimentos formam um círculo perfeito.

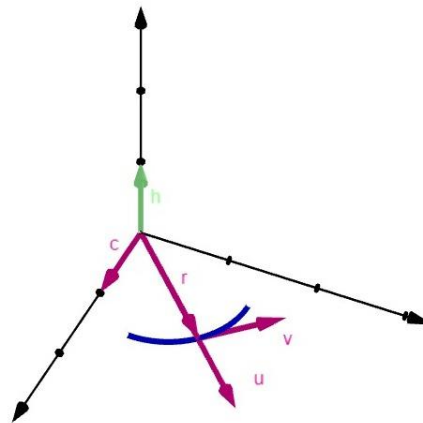
Em 1687 Newton mostrou que a primeira lei de Kepler derivava de duas leis de sua autoria: Segunda lei da dinâmica e a Lei da gravitação universal. Onde, desprezando qualquer interação com outros corpos celestes, o movimento planetário tinha como força resultante a força gravitacional.



A elipse é descrita pela equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, os focos ficam localizados no maior eixo da elipse, se $a > b$ então os focos estão no eixo horizontal e se $b > a$ então os focos estão no eixo vertical. A elipse possui também uma excentricidade e , que é a razão entre o comprimento c da elipse e a metade do comprimento do eixo maior da mesma.

Demonstração 1. Usando um sistema de coordenadas onde teremos o Sol como ponto de origem, $\vec{r} = \vec{r}(t)$ o vetor posição do planeta, r a distância entre os centros de massa do planeta ao Sol, $\vec{v}$ o vetor velocidade e $\vec{u}$ o vetor unitário que indica a direção radial.

Figura 17 – Diagrama de Vetores



Autor, 2024

Como a força gravitacional do Sol sobre um planeta é muito maior em relação a força exercida por outros corpos celestes iremos desconsiderar todos os outros corpos celestes.

A princípio, igualamos as leis de Newton:

Segunda lei do movimento: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$.

Lei da gravitação universal: $\vec{F} = -\frac{G \cdot m M}{r^3} \cdot \vec{r} = \vec{F} = -\frac{G \cdot m M}{r^2} \cdot \vec{u}$.

Onde $\vec{F}$ é a força da gravidade sobre o planeta, m e M são as massas do planeta e do Sol, G é a constante gravitacional, $r = |\vec{r}|$ e $\vec{u} = (1/r)\vec{r}$ é o vetor unitário na direção de $\vec{r}$.

Mostraremos inicialmente que o planeta se move em um plano. De fato igualando as forças $\vec{F}$ nas duas leis de Newton.

$$m \cdot \vec{a} = -\frac{G \cdot m M}{r^2} \cdot \vec{u}$$

$$\vec{a} = -\frac{G \cdot M}{r^2} \cdot \vec{u}.$$

Donde, $\vec{a}$ é paralelo a $\vec{r}$ e o seu produto vetorial $\vec{r} \times \vec{a} = 0$.

Observe que

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v}) = \vec{r}' \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{v}'. \quad (*)$$

Como $\vec{r}' = \vec{v}$, $\vec{v}' = \vec{a}$ e $\vec{r} \times \vec{a} = 0$, temos que

$$\vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{a} = 0 + 0 = 0.$$

Logo, segue de (*) que

$$\vec{r} \times \vec{v} = \vec{h}.$$

onde $\vec{h} \neq 0$ é um vetor constante perpendicular á v e $\vec{r} = \vec{r}(t)$ em todos os valores de t . Isso significa que o vetor que o planeta está situado em está um plano que passa pela origem e que sua orbita é uma curva plana.

Para demonstrar a primeira lei de Kepler, vamos reescrever o vetor $\vec{h}$ como segue:

$$\begin{aligned} \vec{h} &= \vec{r} \times \vec{v} = \vec{r} \times \vec{r}' = r\vec{u} \times (r\vec{u})' \\ &= r^2(\vec{u} \times \vec{u}'). \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{h} &= -\frac{G \cdot M}{r^2} \vec{u} \times (r^2 \vec{u} \times \vec{u}') \\ &= -GM \vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{u}') \\ &= -GM [(\vec{u} \cdot \vec{u}')\vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{u})\vec{u}']. \end{aligned}$$

Sabendo que $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 = 1$, $|\vec{u}(t)| = 1$ e que $u \cdot u' = 0$, logo

$$\begin{aligned} a \times h &= GM u' \\ (\vec{v} \times h)' &= \vec{v}' \times h = a \times h = GM u' \\ v \times h &= GM u + \vec{c}. \end{aligned}$$

Com $\vec{c}$ sendo um vetor constante.

Escolhe-se convenientemente os eixos coordenados para que o vetor na base canônica $\vec{k}$ aponte na direção do vetor $\vec{h}$. Da equação anterior, tem-se que $\vec{c}$ pertence ao plano xy , dado que $\vec{v} \times \vec{h}$ e $\vec{u}$ são perpendiculares a $\vec{h}$. Podemos então escolher os eixos x e y tais que o vetor i esteja na direção à excentricidade e .

Dado θ , o ângulo entre $\vec{c}$ e $\vec{r}$, então (r, θ) são as coordenadas polares do planeta, da equação acima, temos então

$$\begin{aligned} r \cdot (\vec{v} \times \vec{h}) &= \vec{r} \cdot (GM \vec{u} + \vec{c}) \\ &= GM \vec{r} \cdot \vec{u} + \vec{r} \cdot \vec{c} \\ &= GM r \vec{u} \cdot \vec{u} + |\vec{r}| |\vec{c}| \cos \theta \\ &= GM r + r c \cos \theta. \end{aligned}$$

onde $c = |\vec{c}|$. Portanto,

$$r = \frac{\vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{h})}{GM + c \cos \theta} = \frac{1}{GM} \frac{\vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{h})}{1 + e \cos \theta}.$$

Com $e = \frac{c}{GM}$. Porém

$$\vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{h}) = (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{h} = \vec{h} \cdot \vec{h} = |\vec{h}|^2 = h^2.$$

onde $h = |\vec{h}|$. Portanto,

$$r = \frac{\frac{h^2}{GM}}{1 + e \cos \theta} = \frac{\frac{eh^2}{c}}{1 + e \cos \theta}.$$

escreva $d = \frac{h^2}{c}$, e obtém-se

$$r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}.$$

Esta equação corresponde à forma polar da seção cônica da elipse com excentricidade e . Portanto, conclui-se que os planetas fazem um movimento elíptico em torno do Sol.

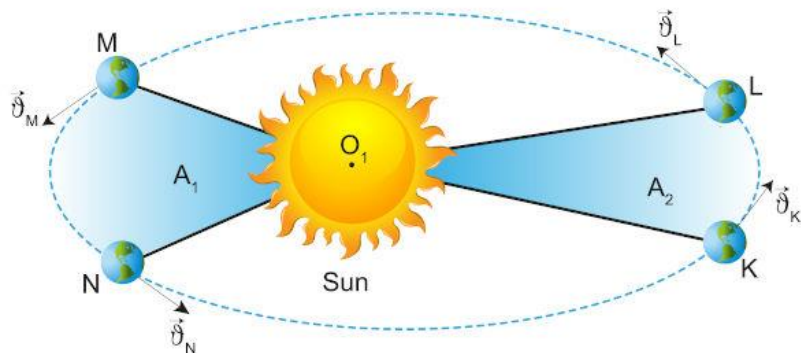
3.2. Segunda Lei de Kepler

A segunda lei de Kepler, lei das áreas, afirma que “em um referencial fixo no Sol, a reta que une o planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais”, essa lei pode ser descrita pela fórmula matemática

$$T = \frac{A_1}{\Delta t_1} = \frac{A_2}{\Delta t_2} = \dots = k.$$

onde, T é o período de revolução dos planetas, A_1 e A_2 são as áreas varridas pelos planetas, Δt_1 e Δt_2 são os intervalos de tempo e k é uma constante.

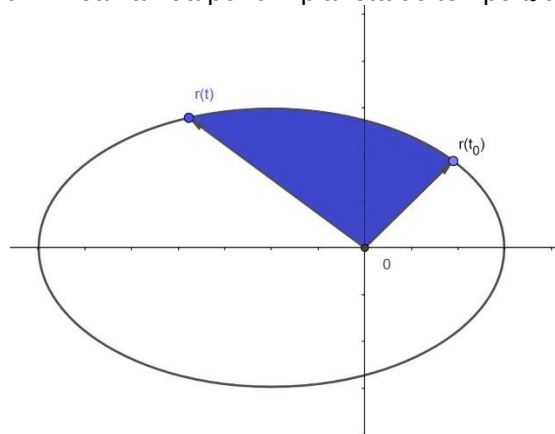
Figura 18 - Área de Varredura



Fonte: [Segunda lei de Kepler: resumo e exercícios - Mundo Educação \(uol.com.br\)](http://Segunda%20lei%20de%20Kepler%3A%20resumo%20e%20exerc%C3%ADcios%20-%20Mundo%20Educa%C3%A7%C3%A3o%20(uol.com.br))

Nessa seção iremos demonstrar a segunda Lei de Kepler e usaremos coordenadas polares

Figura 19 – Área varrida por um planeta do tempo t_0 ao tempo t



Autor 2024

Considerando que o deslocamento de um planeta em um curto intervalo de tempo ($\Delta t \rightarrow 0$), ficará próximo a um triângulo e que a área do triângulo é:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Onde, b é o comprimento da base, h comprimento da altura.

Admitindo que a área varrida pelo planeta se trata de uma área diferencial com distância entre os centros de massa r e altura o valor, em módulo, do arco, temos:

$$dA = \frac{r \cdot r d\theta}{2}.$$

A área e o ângulo variam com o tempo, assim:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}.$$

Assim temos que a região de uma curva é dada pela integral da equação polar do capítulo 2:

$$A = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{2} r^2 d\theta.$$

Sabendo que $r = f(\theta)$, $\theta = \theta(t)$, derivamos A em função de θ e obtemos:

$$\frac{dA}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{1}{2} r^2.$$

Pela regra da cadeia, temos que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt},$$

onde $A = A(t)$ é a área varrida pelo vetor radial $\vec{r} = r(t)$ no intervalo de tempo $[t_0, t]$, como mostra a Figura 19.

Admitindo que $\vec{r}$ pode ser escrito em coordenadas polares, temos

$$\vec{r} = r \cos \theta \vec{i} + r \sin \theta \vec{j} + 0 \vec{k}.$$

E que vetor unitário $\vec{u}$ é dado por

$$\vec{u} = \frac{1}{r} \cdot \vec{r}.$$

Então

$$\vec{u} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} + 0 \vec{k},$$

E daí

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\sin\theta \frac{d\theta}{dt} \vec{i} + \cos\theta \frac{d\theta}{dt} \vec{j} + 0\vec{k}.$$

Calculando o produto vetorial obtemos

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \frac{d\vec{u}}{dt} &= \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta \frac{d\theta}{dt} & \cos\theta \frac{d\theta}{dt} & 0 \end{bmatrix}, \\ \vec{u} \times \frac{d\vec{u}}{dt} &= \begin{bmatrix} \sin\theta & 0 \\ \cos\theta \frac{d\theta}{dt} & 0 \end{bmatrix} \vec{i} - \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ -\sin\theta \frac{d\theta}{dt} & 0 \end{bmatrix} \vec{j} + \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta \frac{d\theta}{dt} & \cos\theta \frac{d\theta}{dt} \end{bmatrix} \vec{k}, \\ \vec{u} \times \frac{d\vec{u}}{dt} &= (\cos^2\theta + \sin^2\theta) \frac{d\theta}{dt} \vec{k}, \\ \vec{u} \times \frac{d\vec{u}}{dt} &= \frac{d\theta}{dt} \vec{k}. \end{aligned}$$

Temos, pela demonstração da primeira lei de Kepler, que

$$\vec{h} = r^2 \left(\vec{u} \times \frac{d\vec{u}}{dt} \right),$$

logo,

$$\vec{h} = r^2 \left(\vec{u} \times \frac{d\vec{u}}{dt} \right),$$

então

$$h = r^2 \frac{d\theta}{dt}.$$

relembre que,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

Comparando as expressões,

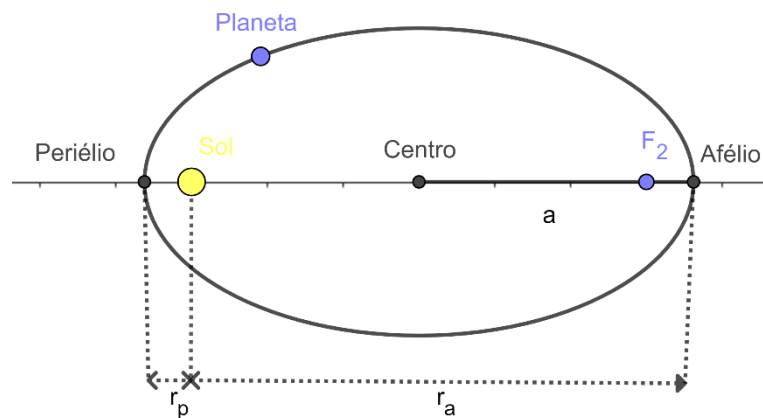
$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} h.$$

Como que h é constante, temos que a variação da área com respeito ao tempo é constante.

3.3 Terceira Lei de Kepler

A terceira lei de Kepler afirma que “O quadrado do período de translação de cada planeta em torno do Sol é proporcional ao cubo do raio médio da respectiva órbita”.

Figura 20 - Translação do planeta ao redor do sol



Autor, 2024

Sabendo que T é o período de translação da Terra em torno do Sol, que sua trajetória é uma elipse e que a é a medida do raio médio do semieixo maior, temos que:

$$T^2 = ka^3$$

Sendo k uma constante que depende apenas da massa do Sol, pois a massa do planeta é desprezível em relação ao do Sol, logo temos que a razão $\frac{T^2}{a^3}$ é constante para todos os planetas.

Admitindo que

$$a = \frac{ed}{1 - e^2}$$

A princípio, para demonstrar iremos reescrevendo em coordenadas polares de secções cônicas, assim temos

$$a = \frac{p}{1 - e^2}$$

Sabendo que $e = \frac{c}{a}$ e que $c^2 = a^2 - b^2$, temos

$$e = \frac{a^2 - b^2}{a^2},$$

$$ea^2 = a^2 - b^2.$$

Logo temos que

$$b^2 = a^2(1 - e^2),$$

$$\frac{b^2}{a^2} = (1 - e^2).$$

Substituindo em $a = \frac{p}{1-e^2}$, temos

$$a = \frac{p}{\frac{b^2}{a^2}},$$

$$b^2 = pa.$$

Temos da demonstração da primeira lei de Kepler que

$$r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta} = \frac{p}{1 + e \cos \theta}.$$

onde $p = \frac{h^2}{GM}$ e $e = \frac{c}{GM}$

Sabendo que T é o tempo em que o planeta dá uma volta ao redor do Sol e que a área variada no intervalo de tempo $[0, T]$ é dado por:

$$A = \int_0^T \left(\frac{dA}{dt} \right) dt$$

$$A = \int_0^T \frac{1}{2} h dt$$

$$A = \frac{1}{2} hT.$$

Comparando com a área de uma região plana de uma elipse, com eixos $2a$ e $2b$

$$A = \pi ab.$$

Assim temos

$$\frac{1}{2}hT = \pi ab \text{ ou ainda } T = \frac{2\pi ab}{h}$$

Elevando ao quadrado T

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{h^2}.$$

Substituindo $b^2 = pa$ na equação anterior

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 pa}{h^2},$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3 p}{h^2}.$$

Admitindo $p = \frac{h^2}{GM}$, temos

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}.$$

Fazendo $k = \frac{4\pi^2}{GM}$, temos

$$T^2 = ka^3.$$

Como queríamos demonstrar.

4 Aplicações

Exemplo 1. O Planeta Terra, que orbita em torno do Sol, tem período orbital de 1 ano. Se um planeta qualquer, que também orbita em torno do Sol e que tem raio orbital 3 vezes maior, fará a volta em torno sol em quanto tempo?

Note que aplicando a terceira lei de Kepler encontramos que

$$\frac{T_T^2}{R_T^3} = \frac{T_b^2}{R_b^3}.$$

Admitindo que $R_b = 3R_a$, $T_a = 1$ temos

$$\frac{1^2}{R_a^3} = \frac{T_b^2}{(3R_a)^3}$$

$$T_b^2 = \frac{27R_a^3}{R_a^3}$$

$$T_b^2 = 27$$

$$T_b = \sqrt{27}$$

$$T_b = 3\sqrt{3}.$$

$$T_b \cong 5,2 \text{ anos.}$$

Portanto, concluímos que o planeta B demora 5,2 anos terrestres para girar ao redor do Sol.

Exemplo 2. O planeta Terra realiza uma trajetória elíptica em torno do sol cujo a área varria é de $A = 6,98 \cdot 10^{22} \text{ m}^2$ em um ano. Qual seria a área varrida pelo planeta Terra no intervalo de tempo de 30 dias?

Sabendo que, pela segunda leis de Kepler, a área varrida pelo raio que liga o centro do sol ao centro de um planeta é proporcional ao tempo para varrê-la, temos

$$\text{Áreas Total} = 6,98 \cdot 10^{22} \text{ m}^2$$

$$1 \text{ ano} = 12 \text{ meses}$$

Encontrando a área mensal (A_M), temos

$$A_M = \frac{6,98 \cdot 10^{22}}{12} \\ \approx 5,82 \cdot 10^{21} \text{ m}^2$$

5. Considerações Finais

Percebemos, ao longo deste trabalho, como as observações dos céus resultaram em algumas teorias cosmológicas sobre o movimento dos planetas. Algumas dessas teorias foram o geocentrismo, onde a Terra era o centro do universo, o heliocentrismo, teoria proposta por Nicolau Copérnico que afirmava que o Sol era o centro do universo e as leis de Kepler, teoria aceita até os dias atuais, que tem como base a teoria copernicana, onde, afirmam que os planetas estão em uma trajetória elíptica com o Sol em um dos seus focos.

Através da utilização da geometria analítica, dos cálculos diferenciais, e das leis de Newton, abordados no capítulo 2, obtemos os resultados presente neste trabalho, como a demonstração de cada lei e a importância para diversas áreas científica.

Referências

- [1] GARMS, Marco Antônio; CALDAS, Iberê Luiz, Síntese das Leis de Kepler , Revista Brasileira de ensino de física, São Paulo, Brasil, vol. 40, n. 2, p 1-12, Outubro, 2017. Disponível em : <http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2017-0253>
- [2] LOPES, Ideusa Celestino. Giordano Bruno: Entre o geocentrismo e o heliocentrismo. Griot:Revista de filosofia, vol. 6, num. 1, p 1-25, Junho, 2014. Disponível em: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=576664778002>
- [3] PAULO, Boulos; CAMARGO, Ivan de. Geometria Analítica: Um tratamento Vetorial. 3° ed, Brasil, São Paulo, 2005
- [4] PORTO, Claudio Maia A revolução copernicana: Aspectos históricos e epistemológicos, Revista Brasileira de Física, Rio de Janeiro, Brasil, vol. 42, p 1-20, dezembro, 2019. Disponível : <http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2019-0190>
- [5] RAMALHO, Francisco; GILBERTO, Nicolau; SOARES, Paulo Antônio. Fundamentos da Física, parte 3. Brasil, São Paulo, 2014
- [6] REIS, Genésio Lima dos; SILVA, Valdir Vilmar, Geometria Analítica, 2°ed. Brasil, Goiânia, 1993
- [7] SILVA, Gil Alves. Leis de Kepler do movimento planetário: um breve panorama de como a história da cosmologia mostra sua descoberta. 2016. 16. Artigo – Universidade Federal do Rio de Janeiro
- [8] STEWART, J. *Cálculo: Volume 1*. Brasil, São Paulo: Trilha, 2014.
- [9] STEWART, J. *Cálculo: Volume 2*. Brasil, São Paulo: Trilha, 2016.

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecária: Helena Cristina Pimentel do Vale – CRB4 –661

S5861

Silva, Gennifer Martins da.

As leis de Kepler / Gennifer Martins da Silva. – 2024.
42 f : il.

Orientador: José Anderson de Lima e Silva.

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Física: Licenciatura) – Universidade Federal de Alagoas, Instituto de Física. Maceió, 2024.

Bibliografia: f. 42.

1. Leis de Kepler. 2. Astronomia. 3. Geocentrismo. 4. Heliocentrismo. 5. Modelos astronômicos. I. Título.

CDU: 52