



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**LIMITANTE SUPERIOR EXTRÍNSECO PARA O PRIMEIRO AUTOVALOR DO
LAPLACIANO**

JOSÉ IVAN DA SILVA SANTOS

Maceió

2012

JOSÉ IVAN DA SILVA SANTOS

LIMITANTE SUPERIOR EXTRÍNSECO PARA O PRIMEIRO AUTOVALOR DO
LAPLACIANO

Dissertação de Mestrado, na área de concentração de Geometria Diferencial submetida em 07 de Março de 2012 à banca examinadora, designada pelo Programa de Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva.

Maceió

2012

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Fabiana Camargo dos Santos

S2371 Santos, José Ivan da Silva.
Limitante superior extrínseco para o primeiro autovalor do laplaciano / José Ivan da Silva Santos. – 2012.
73 f.

Orientador: Márcio Henrique Batista da Silva.
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2012.

Bibliografia: f. 73.

1. Isometria. 2. Imersão. 3. Laplaciano. 4. Primeiro autovalor. 5. Limitante superior. I. Título.

CDU: 514.76

*Aos meus pais Djesima Maria e
Antônio Artur.*

*“Bem sei eu que tudo podes, e que
nenhum dos teus propósitos pode ser
impedido”...(Jó 42:2)*

AGRADECIMENTOS

A Deus primeiramente, pois Ele permitiu o acontecimento de todos os meios necessários para a conclusão desse trabalho. Ao Prof. Dr. Márcio Henrique Batista, Orientador, que sempre se colocou a disposição quando surgiam as dúvidas, pela contribuição no meu desenvolvimento intelectual e também como profissional, pelo apoio motivacional e pelo amigo que sempre soube ser e que com certeza sem o seu apoio esse trabalho teria sido mais difícil, a você Prof. o meu muitíssimo obrigado.

A todos os professores do Instituto de Matemática da UFAL que contribuíram para eu me tornar o que sou. Vocês me ensinaram mais que Matemática, me ensinaram também a ser uma pessoa que sabe cumprir com seus deveres e lutar pelos objetivos, muito obrigado a todos.

Agora, não por ordem de importância, gostaria de agradecer a Jaaresias Silva do Nascimento, Esposa e Companheira, que teve paciência e compreensividade para aguentar os desabafos e aborrecimentos, a te sou grato.

A todos os colegas da turma de mestrados de 2010 que com os quais me divertia e principalmente pelas discussões matemáticas que fazíamos.

A Fundação de Amparo e Pesquisa do Estado de Alagoas, FAPAL, por proporcionar as condições financeiras para a conclusão do meu curso de mestrado.

RESUMO

Nesse trabalho descrevemos um resultado obtido por Ernst Heintze que melhora o seguinte resultado devido a Reilly: seja M uma variedade Riemanniana n -dimensional imersa isometricamente em $\mathbb{R}^N$, $N \geq n$, e $\lambda_1(M)$ o primeiro autovalor do operador laplaciano de M , então

$$\lambda_1(M) \leq \frac{n}{\text{vol}M} \int_M H^2 dM.$$

E. Heintze, em 1988, generalizou o resultado acima. Ele provou que:

Se M está imersa isometricamente em $\bar{M}$, onde $K_{\bar{M}} \leq \delta$, então:

(i) $\lambda_1(M) \leq n\delta + \frac{n}{\text{vol}M} \int_M H^2 dM$, para $\delta \geq 0$;

(ii) $\lambda_1(M) \leq n\delta + n \max H^2$, para $\delta < 0$.

Além disso se vale a igualdade em (i), então M é imersa minimamente em alguma esfera geodésica.

Palavras chave: Isometria. Imersão. Laplaciano. Primeiro Autovalor. Limitante Superior.

ABSTRACT

In this work we describe a result obtained by Ernst Heintze which improves the following results due to Reilly: let M be a compact n -dimensional Riemannian manifold and $\lambda_1(M)$ is the first eigenvalue of laplacian. If M is isometrically immersed in $\mathbb{R}^N$, $N \geq n$, then

$$\lambda_1(M) \leq \frac{n}{\text{vol}M} \int_M H^2 dM.$$

E. Heintze, in 1988, generalized the above result. He proved that:

If M is isometrically immersed in $\bar{M}$, where, $K_{\bar{M}} \leq \delta$, then:

(i) $\lambda_1(M) \leq n\delta + \frac{n}{\text{vol}M} \int_M H^2 dM$, para $\delta \geq 0$;

(ii) $\lambda_1(M) \leq n\delta + n \max H^2$, para $\delta < 0$.

Furthermore, if the equality in (i), then M is minimally immersed into some geodesic sphere.

Keywords: Isometry. Immersion. Laplacian. First Eigenvalue. Upper Bound.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	p. 9
1 RESULTADOS FUNDAMENTAIS DE GEOMETRIA RIEMANNIANA	p. 11
1.1 Métrica Riemanniana	p. 11
1.2 Conexões	p. 12
1.3 Geodésicas e variedades completas	p. 15
1.4 Curvaturas e campos de Jacobi	p. 18
1.5 Coordenadas polares	p. 23
1.6 A segunda forma fundamental	p. 25
2 DIVERGENTE, GRADIENTE, HESSIANA E LAPLACIANO EM VARIEDADE RIEMANNIANA	p. 28
2.1 Gradiente e Divergente	p. 28
2.2 Laplaciano e Hessiana	p. 32
3 LIMITES SUPERIORES EXTRÍNSECOS PARA λ_1	p. 44
3.1 Rayleigh e o método MinMax	p. 44
3.2 Resultados principais	p. 48
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	p. 71

INTRODUÇÃO

Esse trabalho tem como objetivo obter uma cota superior para o primeiro autovalor do Laplaciano. Um autovalor é um número real λ tal que existe uma solução não trivial $\phi \in C^2(M)$ satisfazendo

$$\Delta\phi + \lambda\phi = 0,$$

onde M é uma variedade fechada e conexa. No caso em que M é imersa isometricamente em $\bar{M}$ a estimativa é muito interessante, visto que a cota superior só depende essencialmente de elementos extrínsecos a M , isto é, depende da forma como M é imersa em $\bar{M}$.

Os principais resultados desse trabalho foram obtidos por E. Heintze, tais resultados foram parte do paper **Extrinsic Upper Bounds for λ_1** , publicado em 1988 no Math. Annalen. O trabalho de Heintze é uma extensão do resultado obtido por Reilly e publicado em 1977 intitulado **On the first eigenvalue of the Laplacian for compact submanifolds of Euclidean space**, o qual afirma que: se M é uma variedade Riemanniana n -dimensional compacta, conexa e imersa isometricamente em $\mathbb{R}^N$ e $\lambda_1(M)$ é o primeiro autovalor do operador laplaciano de M , então

$$\lambda_1(M) \leq \frac{n}{\text{vol}M} \int_M H^2 dM.$$

Nas mesmas condições do Teorema de Reilly, trocando-se o $\mathbb{R}^N$ por uma variedade Riemanniana completa $\bar{M}$ com curvatura seccional $K_{\bar{M}} \leq \delta$, Heintze obteve que:

$$(i) \quad \lambda_1(M) \leq n\delta + \frac{n}{\text{vol}M} \int_M H^2 dM, \quad \text{para } \delta \geq 0. \quad (\text{Teorema 3.4})$$

$$(ii) \quad \lambda_1(M) \leq n\delta + n \max H^2, \quad \text{para } \delta < 0; \quad (\text{Teorema 3.8})$$

Além disso, se vale a igualdade em (i), então M é imersa minimamente em alguma esfera geodésica.

Nas demonstrações dos **Teoremas 3.4 e 3.8**, uma das ferramentas que utilizaremos é o Teorema de Rayleigh, **Teorema 3.1**, o qual afirma que, se f é uma função não nula admissível, isto é, f pertence ao espaço de Sobolev $H^1 = W^{1,2}(M)$ com $\int_M f dM = 0$, então

$$\lambda_1(M) \leq \frac{\int_M |\text{grad } f|^2 dM}{\int_M f^2 dM}.$$

No Teorema de Rayleigh usaremos as funções $\frac{s_\delta(r)}{r} \cdot x_i$ e $\frac{c_\delta(r) - c}{\sqrt{\delta}}$ no caso $\delta > 0$, onde $c := \frac{1}{\text{vol}M} \int_M c_\delta(r) dM$ é constante, x_i são as coordenadas normais de $\bar{M}$ centrada em algum ponto $p_0 \in \bar{M}$ e $r = d(p_0, \cdot)$ é a distância a p_0 .

Com o objetivo de deixar esse trabalho o mais completo possível o organizamos em três capítulos. No primeiro capítulo descrevemos os resultados fundamentais de Geometria Riemanniana, que são apresentados sem demonstração, pois podem ser facilmente encontrados na literatura, e que imprescindivelmente nos auxilia no entendimento dos resultados tratados nos capítulos seguintes. Ressaltamos que alguns conceitos básicos, como por exemplo, o conceito de espaço tangente e diferenciabilidade serão admitidos, o leitor pode consultar [5] ou [11] para mais detalhes. No segundo capítulo definimos e obtemos as principais propriedades do Gradiente, do Hessiano e do Laplaciano de uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, e do Divergente de um campo de vetores em M . Apresentamos resultados como, por exemplo, o teorema de comparação do hessiano da função distância.

Por fim, o último capítulo é dedicado as demonstrações dos **Teoremas 3.4 e 3.8**, para os quais faremos alguns lemas que irá nos auxiliar nas demonstrações.

1 **RESULTADOS FUNDAMENTAIS DE GEOMETRIA RIEMANNIANA**

Nesse capítulo apresentaremos os principais resultados de geometria Riemanniana que utilizaremos no restante da dissertação. Nessa primeira seção definiremos os elementos que utilizaremos e apresentamos alguns teoremas tais como o teorema de Hopf-Rinow, que nos permite obter propriedades interessantes de variedades compactas.

1.1 Métrica Riemanniana

Iniciamos definindo o conceito de métrica Riemanniana, além disso escreveremos as métricas do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, da esfera $\mathbb{S}^n$ e do espaço hiperbólico real $\mathbb{H}^n$ em coordenadas polares.

Definição 1.1 *Uma métrica Riemanniana, ou estrutura Riemanniana, em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ no espaço tangente $T_p M$ que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Se $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é uma parametrização, ou sistema de coordenadas locais, em torno de p , com $x(x_1, \dots, x_n) = q \in x(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx(0, \dots, 1, \dots, 0)$, então $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$ é uma função diferenciável em U .*

Ressaltamos que essa definição não depende da escolha do sistema de coordenadas.

Uma variedade diferenciável munida com uma métrica Riemanniana é chamada uma variedade Riemanniana.

Definição 1.2 *Sejam M e N variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $f : M \rightarrow N$ é chamado uma isometria se, para todo $p \in M$ e $u, v \in T_p M$,*

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}. \quad (1.1)$$

Se f satisfaz (1.1) numa vizinhança de p , para todo $p \in M$, dizemos que M e N são localmente isométricas.

Exemplo 1 Se $M = \mathbb{R}^n$, é o espaço euclidiano de dimensão n , identificando $\frac{\partial}{\partial x_i}$ com $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$. A métrica é dada por $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$.

Exemplo 2 Seja $f : M \rightarrow \bar{M}$ uma imersão, ou seja, f é diferenciável e $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} \bar{M}$ é injetiva para todo $p \in M$. Se $\bar{M}$ é uma variedade Riemanniana, então f induz uma métrica Riemanniana em M por

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}, \quad u, v \in T_p M.$$

A métrica assim obtida é chamada de métrica induzida por f , e assim f é uma imersão isométrica.

Seja $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$ a esfera unitária de $\mathbb{R}^{n+1}$. A métrica induzida por $\mathbb{R}^{n+1}$ em S^n é chamada métrica canônica de S^n .

Exemplo 3 O semi-espaço do $\mathbb{R}^n$ dado por

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$$

munido da métrica

$$g_{ij}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta_{ij}}{x_n^2}$$

é chamado de Espaço Hiperbólico.

1.2 Conexões

Um dos conceitos que ajuda a entender o comportamento das variedades Riemannianas e nos auxilia no conhecimento de suas propriedades é o conceito de campos de vetores, que tem a seguinte definição:

Definição 1.3 Um campo de vetores X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um vetor $X(p) \in T_p M$. Como aplicação, X é uma aplicação de M no fibrado tangente TM . O campo é diferenciável se a aplicação $X : M \rightarrow TM$ é diferenciável.

Se $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é um sistema de coordenadas, é possível escrever o campo X como

$$X(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde cada $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função em U e $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$ é a base associada a x . Consequentemente o campo X é diferenciável se, e somente se, as funções a_i são diferenciáveis para toda parametrização.

Denotaremos por $\mathcal{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em M e por $\mathcal{D}(M)$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M .

Definição 1.4 Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M),$$

que satisfaz para todos $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ e todas $f, g \in \mathcal{D}(M)$ as seguintes propriedades:

- i) $\nabla_{(fX+gY)}Z = f\nabla_XZ + g\nabla_YZ.$
- ii) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ.$
- iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_XY + X(f)Y.$

Proposição 1.1 Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo da curva diferenciável $c : I \rightarrow M$ um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c , denominado derivada covariante de V , tal que

- i) $\frac{D}{dt}(V+W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}.$
- ii) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt},$

onde W é um campo de vetores ao longo de c e f é uma função diferenciável em I .

- iii) Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathcal{X}(M)$, isto é, $V(t) = Y(c(t))$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{dc/dt}Y.$

Demonstração. Ver [5], página 57. ■

Definição 1.5 Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Um campo de vetores X ao longo de uma curva $c : I \rightarrow M$ é chamado paralelo quando $\frac{DX}{dt} = 0$, para todo $t \in I$.

Definição 1.6 Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ e uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dizemos que a conexão é compatível com a métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$, quando para toda curva diferenciável c e quaisquer campos de vetores paralelos P e P' ao longo de c , tivermos que $\langle P, P' \rangle = \text{const.}$. A conexão é dita simétrica quando

$$\nabla_XY - \nabla_YX = [X, Y],$$

para todo $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ e $[X, Y] := XY - YX$ é o colchete de Lie.

Proposição 1.2 *Uma conexão ∇ em uma variedade Riemanniana M é compatível com métrica se, e somente se, para quaisquer campos de vetores V e W ao longo de uma curva diferenciável $c : I \rightarrow M$ tem-se*

$$\frac{d}{dt}\langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle, \quad t \in I. \quad (1.2)$$

Demonstração. Ver [5], página 59. ■

Corolário 1.3 *Uma conexão ∇ em uma variedade Riemanniana M é compatível com a métrica se, e somente se,*

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle,$$

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$. Em particular se $\langle Y, Z \rangle = 0$, então

$$\langle \nabla_X Y, Z \rangle = -\langle Y, \nabla_X Z \rangle. \quad (1.3)$$

Demonstração. Ver [5], página 60. ■

Teorema 1.4 (Levi-Civita) *Seja M uma variedade Riemanniana, então existe uma única conexão afim ∇ em M que satisfaz:*

- a) ∇ é simétrica.
- b) ∇ é compatível com a métrica Riemanniana.

Demonstração. Ver [5], página 61. ■

A conexão dada pelo teorema acima é também conhecida como conexão Riemanniana.

Em um sistema de coordenadas (x, U) , as funções Γ_{ij}^k definidas em U por

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k X_k,$$

onde $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, são chamadas os coeficientes da conexão ∇ em U ou símbolos de Christoffel. Um simples cálculo nos mostra que

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{kl}, \quad (1.4)$$

onde (g^{kl}) é a inversa da matriz (g_{kl}) , e usando a simetria da conexão, obtém-se que $\Gamma_{ij}^l = \Gamma_{ji}^l$.

Se $M = \mathbb{R}^n$ munido com a métrica $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ temos $\Gamma_{ij}^l = 0$ para quaisquer $i, j, l = 1, \dots, n$. Portanto

$$\nabla_{e_i} e_j = \Gamma_{ij}^l e_l = 0. \quad (1.5)$$

1.3 Geodésicas e variedades completas

Agora definiremos o conceito de geodésica que dentre suas aplicações nos permite obter informações topológicas da variedade como mostra o Teorema de Ropf-Rinow. Sua importância também é caracterizada pela propriedade de localmente minimizar distância entre dois pontos da variedade.

Definição 1.7 Uma curva parametrizada $\gamma: I \rightarrow M$ é uma geodésica em $t_0 \in I$ se $\frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = 0$ no ponto t_0 . Se γ é geodésica em todo $t \in I$, dizemos que γ é uma geodésica.

Se $\gamma: I \rightarrow M$ é uma geodésica, então por (1.2)

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{D}{dt} \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 0,$$

ou seja, o comprimento do vetor tangente é constante.

Proposição 1.5 Dado $p \in M$, existem uma vizinhança V de p em M , um número $\varepsilon > 0$ e uma aplicação C^∞ , $\gamma: (-2, 2) \times U \rightarrow M$, $U = \{(q, w) \in TM; q \in V, w \in T_p M, |w| < \varepsilon\}$ tal que $t \rightarrow \gamma(t, q, w)$, $t \in (-2, 2)$, é a única geodésica de M que no instante $t = 0$ passa por q com velocidade w , para cada $q \in V$ e cada $w \in T_p M$, com $|w| < \varepsilon$.

Demonstração. Ver [5], página 72. ■

Sejam $p \in M$ e $U \subset TM$ o aberto dado pela proposição acima. A aplicação $\exp: U \rightarrow M$ dada por

$$\exp(q, v) = \gamma(1, q, v) = \gamma\left(|v|, q, \frac{v}{|v|}\right),$$

está bem definida e é chamada aplicação exponencial em U . É fácil observar que $\exp$ é diferenciável.

Por simplicidade, utilizaremos a restrição da $\exp$ a um aberto do $T_q M$, como

$$\exp_q: B_\varepsilon(0) \subset T_q M \rightarrow M,$$

onde $\exp_q(v) = \exp(q, v)$ e $B_\varepsilon(0)$ é a bola aberta centrada na origem do $T_q M$ e raio ε . Além disso, prova-se que existe um $\varepsilon > 0$ tal que $\exp_q : B_\varepsilon(0) \subset T_q M \rightarrow M$ é um difeomorfismo sobre um aberto de M .

Como consequência temos que a aplicação exponencial satisfaz o seguinte resultado:

Lema 1.1 (Gauss) *Sejam $p \in M$ e $v \in T_p M$ tal que $\exp_p v$ esteja definida. Seja $w \in T_p M \approx T_v(T_p M)$. Então*

$$\langle d(\exp_p)_v(v), d(\exp_p)_v(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Demonstração. Ver [5], página 77. ■

Definição 1.8 *Se $\exp_p$ é um difeomorfismo em uma vizinhança V da origem do $T_p M$, $\exp_p V = U$ é chamada de vizinhança normal de p . Se $B_\varepsilon(0)$ é tal que $\overline{B_\varepsilon(0)} \subset V$, chamamos $\exp_p B_\varepsilon(0) = B_\varepsilon(p)$ de bola normal, ou geodésica, de centro p e raio ε . Pelo Lema de Gauss, a fronteira de uma bola normal é uma hipersuperfície em M ortogonal as geodésicas que partem de p , ela é chamada de esfera normal, ou geodésica, e será denotada por $S_\varepsilon(p)$.*

Definição 1.9 *Sejam $p, q \in M$, a distância $d(p, q)$ é o ínfimo dos comprimentos de todas as curvas $c_{p,q}$, onde c é uma curva diferenciável por partes ligando p a q .*

Agora veremos que localmente as geodésicas minimizam distância.

Proposição 1.6 *Sejam $p \in M$, U uma vizinhança normal de p , e $B \subset U$ uma bola normal de centro p . Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$ um segmento de geodésica com $\gamma(0) = p$. Se $c : [0, 1] \rightarrow M$ é qualquer curva diferenciável por partes ligando $\gamma(0)$ a $\gamma(1)$, então $l(\gamma) \leq l(c)$ e se a igualdade vale então $\gamma([0, 1]) = c([0, 1])$.*

Demonstração. Ver [5], página 79. ■

Agora trataremos de alguns conceitos globais ligados as variedades Riemannianas. Inicialmente definiremos a noção de completude de uma variedade, e também enunciaremos o teorema de Hopf-Rinow que tem como consequência imediata que toda variedade compacta é completa.

Definição 1.10 *Uma variedade Riemanniana M é dita completa, ou geodesicamente completa, se para todo $p \in M$, a aplicação exponencial está definida para todo $v \in T_p M$, equivalentemente as geodésicas $\gamma(t)$ que partem de p estão definidas para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Teorema 1.7 (Hopf-Rinow) *Seja M uma variedade Riemanniana e seja $p \in M$. As seguintes afirmações são equivalentes*

- a) $\exp_p$ está definida em todo o T_pM .
- b) Os limitados e fechados de M são compactos.
- c) M é completa como espaço métrico.
- d) M é geodesicamente completa.

Além disso, cada uma das afirmações acima implica que

- e) Para todo $q \in M$ existe uma geodésica γ ligando p a q com $l(\gamma) = d(p, q)$.

Demonstração. Ver [5], página 163. ■

Corolário 1.8 *Se M é compacta, então M é completa.*

Demonstração. Como todo espaço métrico compacto é completo, a conclusão segue da parte (c) do teorema. ■

O próximo resultado, devido a Nash, nos dá uma importante caracterização das variedades Riemannianas completas, mais precisamente:

Teorema 1.9 (Nash) *Se M^n é uma variedade Riemanniana completa, então ela pode ser imersa isometricamente em $\mathbb{R}^N$, para algum $N \geq n$.*

Demonstração. Ver [8]. ■

Sejam M uma variedade Riemanniana completa e $p \in M$. Considere $\gamma : [0, \infty) \rightarrow M$ uma geodésica normalizada (isto é, $|\gamma'(t)|=1$) com $\gamma(0) = p$. sabemos que para $t > 0$ suficientemente pequeno,

$$d(\gamma(0), \gamma(t)) = t,$$

isto é, $\gamma([0, t])$ é uma geodésica minimizante. Além disso, é fácil ver que, se $\gamma([0, t_1])$ não é minimizante, então o mesmo acontece para $t > t_1$. Por continuidade, o conjunto dos números $t > 0$ para os quais $d(\gamma(0), \gamma(t)) = t$ é da forma $[0, t_0]$ ou $[0, \infty)$. No primeiro caso, $\gamma(t_0)$ é chamado o ponto mínimo de p ao longo de γ ; no último caso diz-se que o ponto mínimo não existe.

Definimos o lugar dos pontos mínimos de p , “cut locus” de p , denotado por $\text{Cut}(p)$, como sendo o conjunto de todos os pontos mínimos de p ao longo de todas as geodésicas que partem de p .

1.4 Curvaturas e campos de Jacobi

Sem dúvida a curvatura é um dos conceitos mais presentes em geometria Riemanniana, e entre suas diversas aplicações ela mede intuitivamente o quanto uma variedade Riemanniana deixa de ser euclidiana.

Definição 1.11 A curvatura $\mathcal{R}$ de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ uma aplicação $\mathcal{R}(X, Y) : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ dada por

$$\mathcal{R}(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z,$$

onde $Z \in \mathcal{X}(M)$ e ∇ é a conexão Riemanniana de M .

Definição 1.12 Dados um ponto $p \in M$ e um subespaço bidimensional $\sigma \subset T_p M$, o número real

$$K(x, y) = \frac{(x, y, x, y)}{|x \wedge y|^2},$$

é chamado curvatura seccional de M no ponto p com respeito a σ , onde x, y é uma base de σ ,

$$(x, y, x, y) = \langle \mathcal{R}(x, y)x, y \rangle \text{ e } |x \wedge y|^2 = |x|^2 |y|^2 - \langle x, y \rangle^2.$$

Proposição 1.10 O número

$$K(x, y) = \frac{(x, y, x, y)}{|x \wedge y|^2}$$

não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$.

Demonstração. Ver [5], página 105. ■

Lema 1.2 A curvatura seccional de $\mathbb{R}^n$ é identicamente nula.

Demonstração. Pela definição de curvatura seccional é suficiente mostrarmos que, para quaisquer $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ tem-se que $\mathcal{R}(X, Y)Z \equiv 0$.

Se $Z = \sum_{i=1}^n z_i e_i$, $X = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $Y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, onde $e_1, \dots, e_n$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$, então

$$\begin{aligned}\nabla_X Z &= \nabla_X \sum_{i=1}^n z_i e_i = \sum_{i=1}^n z_i \nabla_X e_i + \sum_{i=1}^n X(z_i) e_i \\ &= \sum_{i,j=1}^n z_i x_j \nabla_{e_j} e_i + \sum_{i=1}^n X(z_i) e_i \\ &= \sum_{i=1}^n X(z_i) e_i,\end{aligned}$$

onde a última igualdade é devida a (1.5). Analogamente,

$$\nabla_Y \nabla_X Z = \sum_{i=1}^n Y(X(z_i)) e_i,$$

e

$$\nabla_{[X,Y]} Z = \sum_{i=1}^n [X,Y](z_i) e_i$$

portanto

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(X,Y)Z &= \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z \\ &= \sum_{i=1}^n Y(X(z_i)) e_i - \sum_{i=1}^n X(Y(z_i)) e_i + \sum_{i=1}^n [X,Y](z_i) e_i \\ &= - \sum_{i=1}^n [X,Y](z_i) e_i + \sum_{i=1}^n [X,Y](z_i) e_i = 0.\end{aligned}$$

■

Lema 1.3 *Sejam M uma variedade Riemanniana e $p \in M$. Defina uma aplicação trilinear $\tilde{\mathcal{R}} : T_p M \times T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M$ por*

$$\langle \tilde{\mathcal{R}}(X,Y,Z)W, Z \rangle = \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle Y, W \rangle \langle X, Z \rangle,$$

para todo $X, Y, Z, W \in T_p M$. Então M tem curvatura seccional constante igual a K_0 se, e somente se $\mathcal{R} = K_0 \tilde{\mathcal{R}}$, onde $\mathcal{R}$ é a curvatura de M .

Demonstração. Ver [5], página 107. ■

Uma Variedade Riemanniana completa M de curvatura seccional constante é chamada de forma espacial.

Definição 1.13 *Seja $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ uma geodésica de M . Um campo de vetores J ao longo de γ é*

um campo de Jacobi se satisfaz a equação de Jacobi

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + \mathcal{R}(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t) = 0, \quad \forall t \in [0, a].$$

Os exemplos triviais de campos de Jacobi ao longo de $\gamma(t)$ são $\gamma'(t)$ e $t\gamma'(t)$.

Agora veremos algumas das propriedades dos campos de Jacobi, dentre as quais, um campo de Jacobi nos permite saber onde a aplicação $\exp_p$ deixa de ser um difeomorfismo local.

Exemplo 4 *Sejam M uma variedade Riemanniana de curvatura seccional constante K , $\gamma: [0, a] \rightarrow M$ uma geodésica normalizada em M e J um campo de Jacobi ao longo de γ , normal a γ' . Então*

$$R(\gamma', J)\gamma' = KJ.$$

De fato, pelo Lema 1.3, para todo campo de vetores T ao longo de γ tem-se

$$\begin{aligned} \langle R(\gamma', J)\gamma', T \rangle &= K(\langle \gamma', \gamma' \rangle \langle J, T \rangle - \langle \gamma', T \rangle \langle J, \gamma' \rangle) \\ &= K\langle J, T \rangle. \end{aligned}$$

Assim a equação de Jacobi tem a forma

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + KJ = 0, \tag{1.6}$$

e é fácil ver que, se $w(t)$ é um campo paralelo ao longo de γ com $\langle \gamma', w(t) \rangle = 0$ e $|w(t)| = 1$

$$J(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t\sqrt{K})}{\sqrt{K}} w(t), & \text{se } K > 0, \\ t w(t), & \text{se } K = 0, \\ \frac{\sinh(t\sqrt{-K})}{\sqrt{-K}} w(t), & \text{se } K < 0, \end{cases}$$

é solução de (1.6) com condições iniciais $J(0) = 0$ e $J'(0) = w(0)$.

Lema 1.4 *Seja $\gamma: [0, a] \rightarrow M$ uma geodésica. Então um campo de Jacobi J ao longo de γ com $J(0) = 0$ é dado por*

$$J(t) = d(\exp_p)_{t\gamma'(0)}(tJ'(0)), \quad t \in [0, a].$$

Demonstração. Ver [5], página 126. ■

Com a definição seguinte teremos outras relações entre os campos de Jacobi e a aplicação exponencial, mais precisamente, como encontrar as singularidades da aplicação exponencial:

Definição 1.14 Seja $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ uma geodésica. dizemos que o ponto $\gamma(t_0)$ é conjugado de $\gamma(0)$ ao longo de γ , $t_0 \in (0, a]$, se existe um campo de Jacobi J ao longo de γ , não identicamente nulo, com $J(0) = 0 = J(t_0)$. O número máximo de tais campos linearmente independentes é a multiplicidade do ponto conjugado $\gamma(t_0)$.

Proposição 1.11 Suponha que $\gamma(t_0)$ é o ponto mínimo de $p = \gamma(0)$ ao longo da geodésica $\gamma : [0, a] \rightarrow M$. Então:

- a) ou $\gamma(t_0)$ é o primeiro ponto conjugado de p ao longo de γ ,
 - b) ou existe uma geodésica $\tilde{\gamma} \neq \gamma$ que liga p a $\gamma(t_0)$ com $l(\tilde{\gamma}) = l(\gamma)$.
- E a recíproca é também verdadeira.

Demonstração. Ver [5], página 267. ■

Corolário 1.12 Seja M uma variedade Riemanniana completa. Se $p \in M$ e $q \in M \setminus \text{Cut}(p)$, então existe uma única geodésica minimizante ligando p a q , e q não é conjugado a p ao longo da mesma.

Demonstração. Seja $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ uma geodésica minimizante tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma(a) = q$. Suponhamos que p se liga q por duas geodésicas minimizantes ou que q é conjugado de p ao longo de γ . Pela recíproca da **Proposição 1.11**, existe $t_0 \in (0, a]$ tal que $\gamma(t_0)$ é o ponto mínimo de p ao longo de γ . Como $q \notin \text{Cut}(p)$, devemos ter que $t_0 < a$, mas assim γ não é minimizante em $(0, a]$. ■

Teorema 1.13 (Rauch) Sejam $\gamma : [0, a] \rightarrow M^n$ e $\tilde{\gamma} : [0, a] \rightarrow \bar{M}^{n+k}$, $k \geq 0$, geodésicas com a mesma velocidade, e sejam J e $\bar{J}$ campos de Jacobi ao longo de γ e $\tilde{\gamma}$, respectivamente, satisfazendo

- i) $\tilde{\gamma}(t)$ não é conjugado a $\tilde{\gamma}(0)$, $\forall 0 < t \leq a$;
- ii) $J(0) = \bar{J}(0) = 0$, $\langle J'(0), \gamma'(0) \rangle = \langle \bar{J}'(0), \tilde{\gamma}'(0) \rangle$, $|J'(0)| = |\bar{J}'(0)|$;
- iii) $K_{\bar{M}}(\bar{x}, \tilde{\gamma}'(t)) \geq K_M(x, \gamma'(t))$,

onde $K(x, y)$ é a curvatura seccional segundo o plano gerado por x, y . Então

- a) $|\bar{J}| \leq |J|$, além disso, se para algum $t_0 \in (0, a]$, tem-se $|\bar{J}(t_0)| = |J(t_0)|$, então

$$K_{\bar{M}}(\bar{x}, \tilde{\gamma}'(t)) = K_M(x, \gamma'(t)),$$

para todo $t \in [0, a]$.

$$\mathbf{b)} \quad \langle J', J \rangle \geq \frac{|J|^2}{|\bar{J}|^2} \langle \bar{J}', \bar{J} \rangle \text{ para todo } t \in (0, a].$$

Demonstração. Faremos a demonstração apenas do item **(b)**, uma demonstração do item **(a)** é encontrada em [5], página 238.

Para mostrarmos o item **(b)**, observamos primeiro que, como $\bar{\gamma}(t)$ não é conjugado a $\bar{\gamma}(0)$ ao longo de $\bar{\gamma}$, temos que $\bar{J}(t) \neq 0$ em $(0, a]$. Defina $f(t) = |J(t)|^2$ e $\bar{f}(t) = |\bar{J}(t)|^2$ em $(0, a]$, assim $f'(t) = 2\langle J'(t), J(t) \rangle$ e $\bar{f}'(t) = 2\langle \bar{J}'(t), \bar{J}(t) \rangle$, agora basta mostrarmos que

$$\frac{f'(t_0)}{f(t_0)} \geq \frac{\bar{f}'(t_0)}{\bar{f}(t_0)}.$$

Por (2.7)

$$\frac{f'(t_0)}{2f(t_0)} = \frac{\langle J', J \rangle(t_0)}{|J(t_0)|^2} = \mathcal{J}_{t_0} \left(\frac{J}{|J(t_0)|}, \frac{J}{|J(t_0)|} \right) = \mathcal{J}_{t_0}(J_1, J_1) \quad (1.7)$$

e

$$\frac{\bar{f}'(t_0)}{2\bar{f}(t_0)} = \frac{\langle \bar{J}', \bar{J} \rangle(t_0)}{|\bar{J}(t_0)|^2} = \mathcal{J}_{t_0} \left(\frac{\bar{J}}{|\bar{J}(t_0)|}, \frac{\bar{J}}{|\bar{J}(t_0)|} \right) = \mathcal{J}_{t_0}(\bar{J}_1, \bar{J}_1), \quad (1.8)$$

onde $J_1 = \frac{J}{|J(t_0)|}$ e $\bar{J}_1 = \frac{\bar{J}}{|\bar{J}(t_0)|}$. Escolha campos ortogonais e paralelos $e_1, \dots, e_n$ ao longo de $\gamma|_{[0, t_0]}$ e $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{n+k}$ ao longo de $\bar{\gamma}|_{[0, t_0]}$, com $e_1 = \gamma'$, $e_2(t_0) = J_1(t_0)$ e $\bar{e}_1 = \bar{\gamma}'$, $\bar{e}_2(t_0) = \bar{J}_1(t_0)$.

Para $V = \beta_i(t)e_i(t)$ campo diferenciável por partes ao longo de γ , defina

$$\phi(V) = \beta_i(t)\bar{e}_i(t)$$

campo diferenciável ao longo de $\bar{\gamma}$. Então $\phi(J_1) = 0 = \bar{J}_1(0)$ e

$$J_1(t_0) = e_2(t_0) \Rightarrow \phi(J_1)(t_0) = \bar{e}_2(t_0) = \bar{J}_1(t_0),$$

assim, pelo Lema do Índice (**Teorema 2.5**),

$$\mathcal{J}_{t_0}(\phi(J_1), \phi(J_1)) \geq \mathcal{J}_{t_0}(\bar{J}_1, \bar{J}_1). \quad (1.9)$$

Mas para todos os campos V, W diferenciáveis por partes ao longo de γ , tem-se

$$\langle \phi(V), \phi(W) \rangle = \langle V, W \rangle \quad \text{e} \quad \phi(V)' = \phi(V'),$$

donde

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}_{t_0}(J_1, J_1) &= \int_0^{t_0} [\langle J'_1, J'_1 \rangle - |\gamma' \wedge J_1|^2 K_M(J_1, \gamma')] dt \\
 &\geq \int_0^{t_0} [\langle \phi(J_1)', \phi(J_1)' \rangle - |\bar{\gamma}' \wedge \phi(J_1)|^2 K_{\bar{M}}(\phi(J_1), \bar{\gamma}')] dt \\
 &= \mathcal{J}_{t_0}(\phi(J_1), \phi(J_1)).
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Segue de (1.7), (1.8), (1.9) e (1.10) que

$$\frac{f'(t_0)}{2f(t_0)} = \mathcal{J}_{t_0}(J_1, J_1) \geq \mathcal{J}_{t_0}(\phi(J_1), \phi(J_1)) \geq \mathcal{J}_{t_0}(\bar{J}_1, \bar{J}_1) = \frac{\bar{f}'(t_0)}{2\bar{f}(t_0)},$$

isto é,

$$\frac{f'(t_0)}{f(t_0)} \geq \frac{\bar{f}'(t_0)}{\bar{f}(t_0)}$$

ou

$$\langle J', J \rangle \geq \frac{|J|^2}{|\bar{J}|^2} \langle \bar{J}', \bar{J} \rangle.$$

■

Observação 1.14 A igualdade vale se, e somente se, $K_{\bar{M}}(\bar{x}, \bar{\gamma}'(t)) = K_M(x, \gamma'(t))$ e vale a igualdade em (1.9).

1.5 Coordenadas polares

Nessa seção escreveremos as métricas do $\mathbb{R}^n$, de $\mathbb{S}^{n-1}$ e do $\mathbb{H}^n$ em coordenadas polares as quais precisaremos futuramente.

Com esse objetivo, sejam

$$\begin{aligned}
 x : U \subset \mathbb{R}^{n-1} &\rightarrow \mathbb{S}^{n-1} \\
 (u_1, \dots, u_{n-1}) &\rightarrow x(u_1, \dots, u_{n-1})
 \end{aligned}$$

parametrização e

$$\gamma(r, u_1, \dots, u_{n-1}) := \exp_p(rx(u_1, \dots, u_{n-1})),$$

então

$$\begin{aligned}\gamma_r &= d(\exp_p)_q(x(u_1, \dots, u_{n-1})) \\ \gamma_{u_i} &= d(\exp_p)_q\left(r \frac{\partial x}{\partial u_i}\right)\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}\langle \gamma_r, \gamma_r \rangle &= \langle d(\exp_p)_q(x(u_1, \dots, u_{n-1})), d(\exp_p)_q(x(u_1, \dots, u_{n-1})) \rangle \\ &= \langle x(u_1, \dots, u_{n-1}), x(u_1, \dots, u_{n-1}) \rangle = 1.\end{aligned}\tag{1.11}$$

$$\begin{aligned}\langle \gamma_r, \gamma_{u_i} \rangle &= \left\langle d(\exp_p)_q(x(u_1, \dots, u_{n-1})), d(\exp_p)_q\left(r \frac{\partial x}{\partial u_i}\right) \right\rangle \\ &= \left\langle x(u_1, \dots, u_{n-1}), r \frac{\partial x}{\partial u_i} \right\rangle = 0.\end{aligned}\tag{1.12}$$

onde $q = rx(u_1, \dots, u_{n-1})$ e as igualdades (1.11) e (1.12) são devidas ao Lema de Gauss. Finalmente,

$$\langle \gamma_{u_i}, \gamma_{u_j} \rangle = \left\langle d(\exp_p)_q\left(r \frac{\partial x}{\partial u_i}\right), d(\exp_p)_q\left(r \frac{\partial x}{\partial u_j}\right) \right\rangle,\tag{1.13}$$

Observe que, para cada i fixado, $J_i(r) = d(\exp_p)_q\left(r \frac{\partial x}{\partial u_i}\right)$ é um campo de Jacobi dado pelo **Lema 1.4**, e pelo **exemplo 4**

$$J(r) = \begin{cases} r w(r), & \text{em } \mathbb{R}^n. \\ \text{sen}(r)w(r), & \text{em } \mathbb{S}^{n-1}. \\ \text{senh}(r)w(r), & \text{em } \mathbb{H}^n. \end{cases}$$

Portanto, para o $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}\langle \gamma_{u_i}, \gamma_{u_j} \rangle &= \langle r w_i(r), r w_j(r) \rangle \\ &= r^2 \langle w_i(r), w_j(r) \rangle = r^2 \delta_{ij}.\end{aligned}$$

donde

$$ds^2 := \sum_{i,j=1}^n g_{ij} du_i du_j = dr^2 + r^2 d\omega^2,$$

onde $d\omega^2$ é a métrica canônica de S^{n-1} .

Para a esfera $\mathbb{S}^{n-1}$

$$\begin{aligned}\langle \gamma_{u_i}, \gamma_{u_j} \rangle &= \langle \sin(r) w_i(r), \sin(r) w_j(r) \rangle \\ &= \sin^2(r) \langle w_i(r), w_j(r) \rangle = \sin^2(r) \delta_{ij},\end{aligned}$$

donde

$$ds^2 = dr^2 + \sin^2(r) d\omega^2.$$

Para $\mathbb{H}^n$

$$\begin{aligned}\langle \gamma_{u_i}, \gamma_{u_j} \rangle &= \langle \sinh(r) w_i(r), \sinh(r) w_j(r) \rangle \\ &= \sinh^2(r) \langle w_i(r), w_j(r) \rangle = \sinh^2(r) \delta_{ij},\end{aligned}$$

donde

$$ds^2 = dr^2 + \sinh^2(r) d\omega^2.$$

1.6 A segunda forma fundamental

Sejam M^n e $\bar{M}^{n+k}$, $k \geq 0$, variedades Riemanniana e $f : M \rightarrow \bar{M}$ uma imersão isométrica, então para cada $p \in M$ o produto interno em $T_p \bar{M}$ decompõe $T_p \bar{M}$ na soma direta

$$T_p \bar{M} = df(T_p M) \oplus (df(T_p M))^\perp,$$

Por simplicidade de notação identificamos $df(T_p M)$ com $T_p M$ onde $(T_p M)^\perp$ é o complemento ortogonal de $T_p M$ em $T_p \bar{M}$ e p é identificado com $f(p)$.

Denotaremos a conexão Riemanniana de $\bar{M}$ por $\bar{\nabla}$, e se X e Y são campos locais de vetores em M , e $\bar{X}, \bar{Y}$ são extensões locais em $\bar{M}$, de $df(X)$ e $df(Y)$, definimos

$$\nabla_X Y := (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^T,$$

onde $(\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^T$ denota a componente tangencial de $\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}$.

Proposição 1.15 *Seja $f : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+k}$ uma imersão isométrica. Então para $X, Y \in \mathcal{X}(M)$*

$$\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^T$$

é a conexão Riemanniana de M .

Demonstração. Para mostrarmos que $(\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^T$ é uma conexão em M , sejam $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, $g, h \in \mathcal{D}(M)$ e $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z} \in \mathcal{X}(\bar{M})$, $\bar{g}, \bar{h} \in \mathcal{D}(\bar{M})$ suas extensões em $\bar{M}$, respectivamente. Então,

$$\begin{aligned}
\nabla_{(gX+hY)}Z &= (\bar{\nabla}_{(\bar{g}\bar{X}+\bar{h}\bar{Y})}\bar{Z})^T \\
&= (\bar{g}\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Z} + \bar{h}\bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{Z})^T \\
&= (\bar{g}\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Z})^T + (\bar{h}\bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{Z})^T \\
&= g\nabla_X Z + h\nabla_Y Z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_X(Y+Z) &= (\bar{\nabla}_{\bar{X}}(\bar{Y}+\bar{Z}))^T \\
&= (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} + \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Z})^T \\
&= (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})^T + (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Z})^T \\
&= \nabla_X Y + \nabla_X Z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_X(gY) &= (\bar{\nabla}_{\bar{X}}(\bar{g}\bar{Y}))^T \\
&= (\bar{g}\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} + \bar{X}(\bar{g})\bar{Y})^T \\
&= (\bar{g}\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})^T + (\bar{X}(\bar{g})\bar{Y})^T \\
&= g\nabla_X Y + X(g)Y
\end{aligned}$$

Agora mostraremos a simetria e a compatibilidade com a métrica de M , induzida por f . Com efeito, $\nabla_X Y - \nabla_Y X = (\nabla_{\bar{X}}\bar{Y} - \nabla_{\bar{Y}}\bar{X})^T = [\bar{X}, \bar{Y}]^T = [X, Y]$, onde a última igualdade é devida a (**Proposição 13.4** de [9]).

Para a compatibilidade, temos

$$\begin{aligned}
X\langle Y, Z \rangle &= \bar{X}\langle \bar{Y}, \bar{Z} \rangle \\
&= \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}, \bar{Z} \rangle + \langle \bar{Y}, \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Z} \rangle \\
&= \langle (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})^T + (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})^\perp, Z \rangle + \langle Y, (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Z})^T + (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Z})^\perp \rangle,
\end{aligned}$$

como $\langle (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})^\perp, Z \rangle = \langle Y, (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Z})^\perp \rangle = 0$, temos

$$\begin{aligned}
X\langle Y, Z \rangle &= \langle (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})^T, Z \rangle + \langle Y, (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Z})^T \rangle \\
&= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle.
\end{aligned}$$

Portanto, pelo **Corolário 1.3** $(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})^T$ é compatível com a métrica de M . ■

Definição 1.15 Sejam $f : M \rightarrow \bar{M}$ uma imersão e X, Y campos locais definidos em $U \subset M$. A aplicação $\alpha : \mathcal{X}(U) \times \mathcal{X}(U) \rightarrow \mathcal{X}(U)^\perp$ dada por

$$\alpha(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y,$$

é chamada a segunda forma fundamental da imersão f , onde $\mathcal{X}(U)^\perp$ é o conjunto dos campos diferenciáveis em U normais a $f(U)$, que o identificamos com U .

Proposição 1.16 A aplicação $\alpha(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y$ é bilinear e simétrica.

Demonstração. Ver [5], página 140. ■

Definição 1.16 O traço da segunda forma fundamental, $\text{tr } \alpha =: \vec{H}$, é chamado de vetor curvatura média e $H := \frac{1}{n} |\vec{H}|$ é chamada de curvatura média de M , onde n é a dimensão de M . Quando $H \equiv 0$ diz-se que a imersão $f : M \rightarrow \bar{M}$ é mínima.

O seguinte resultado, devido a Gauss, relaciona as geometrias intrínseca e extrínseca:

Teorema 1.17 (Gauss) Sejam $p \in M$ e x, y vetores ortonormais de $T_p M$. Então

$$K_M(x, y) - K_{\bar{M}}(x, y) = \langle \alpha(x, x), \alpha(y, y) \rangle - |\alpha(x, y)|^2$$

Demonstração. Ver [5], página 143. ■

2 *DIVERGENTE, GRADIENTE, HESSIANA E LAPLACIANO EM VARIEDADE RIEMANNIANA*

Nesse capítulo trabalharemos com o gradiente, o laplaciano e o hessiano de funções definidas em variedade e com o divergente de campos de vetores em variedades, onde discutiremos alguns resultados relevantes, os quais serão utilizados nessa dissertação.

2.1 Gradiente e Divergente

Sejam M uma variedade Riemanniana e $p \in M$. Considere uma função f de classe C^1 definida numa vizinhança de p e $\xi \in T_p M$. Definimos a derivada direcional de f em p na direção de ξ , denotada por $\xi(f)$, por

$$\xi(f) = (f \circ \omega)'(0),$$

onde $\omega(t)$ é um caminho em M satisfazendo $\omega(0) = p$ e $\omega'(0) = \xi$. A aplicação de $T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\xi \rightarrow \xi(f)$ é linear. Além disso, para funções $f, h \in C^1$ temos

$$\begin{aligned}\xi(f+h) &= \xi(f) + \xi(h); \\ \xi(fh) &= \xi(h)f + f\xi(h).\end{aligned}$$

Definição 2.1 *Dada uma função $f \in C^k$, $k \geq 1$ sobre M , o gradiente de f , denotado por $\text{grad} f$, é um campo de vetores sobre M definido pela seguinte relação*

$$\langle \text{grad} f, \xi \rangle = \xi(f),$$

para todo $\xi \in TM$.

Para funções $f, h \in C^1$ temos

$$\begin{aligned}\text{grad}(f+h) &= \text{grad} f + \text{grad} h; \\ \text{grad}(fh) &= h \text{grad} f + f \text{grad} h.\end{aligned}$$

Proposição 2.1 *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Dados $p \in M$ e $\xi \in T_p M$, seja $\omega : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ um caminho em M tal que $\omega(0) = p$ e $\omega'(0) = \xi$. Então*

$$\langle \text{grad} f, \xi \rangle = \left. \frac{d}{dt}(f \circ \omega)(t) \right|_{t=0}.$$

Além disso, se p é ponto de máximo ou de mínimo local para f , então $\text{grad} f(p) = 0$.

Demonstração. A afirmação

$$\langle \text{grad} f, \xi \rangle = \left. \frac{d}{dt}(f \circ \omega)(t) \right|_{t=0},$$

é a definição de derivada direcional.

Para a segunda parte, suponha que p é ponto de máximo ou de mínimo para f . Então existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f(p) \geq (f(q))$ para todo $q \in U$. Seja $\xi \in T_p M$ e $\omega : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ tal que $\omega(0) = p$ e $\omega'(0) = \xi$, então $f \circ \omega$ tem um máximo ou um mínimo em 0. Portanto

$$\langle \text{grad} f, \xi \rangle = \left. \frac{d}{dt}(f \circ \omega)(t) \right|_{t=0} = 0.$$

Como $\xi \in T_p M$ é arbitrário, temos que $\text{grad} f(p) = 0$. ■

Proposição 2.2 *Seja $E_p = \{v \in T_p M; \exp_p(tv) \in M \setminus \text{Cut}(p), \forall 0 \leq t \leq 1\}$, então $\exp_p : E_p \rightarrow M \setminus \text{Cut}(p)$ é um difeomorfismo.*

Demonstração. Obviamente $\exp_p(E_p) = M \setminus \text{Cut}(p)$. Seja $q \in M \setminus \text{Cut}(p)$, então pelo **corolário 1.12** existe uma única geodésica minimizante $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ normalizada ligando $p = \gamma(0)$ a $q = \gamma(1)$ e q não é conjugado a p ao longo de γ . Portanto $v \in T_p M$ não é ponto crítico da $\exp_p$ e, portanto é um difeomorfismo local sobre $M \setminus \text{Cut}(p)$. Agora, basta mostrarmos que $\exp_p$ é injetiva. Suponha que existam $v, w \in E_p$, tais que $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ e $\tilde{\gamma}(t) = \exp_p(tw)$ ligam p a $q = \gamma(1) = \tilde{\gamma}(1)$. Como $q \notin \text{Cut}(p)$ segue que ao menos uma dentre $\tilde{\gamma}$ e γ , digamos γ , não é minimizante até q . Assim, existe $0 < t_0 < 1$ tal que $\gamma(t_0) = \exp_p(t_0 v) \in \text{Cut}(p)$, contradizendo o fato de v pertencer a E_p . ■

Teorema 2.3 *Seja $\gamma : [0, a] \rightarrow M \setminus \text{Cut}(p)$ uma geodésica normalizada partindo de p . Então*

$$\text{grad } r(\gamma(t)) = \gamma'(t), \forall 0 < t \leq a,$$

onde $r(q) = d(p, q)$ é a função distância a partir de p . Além disso, $|\text{grad } r| = 1$.

Demonstração. Primeiro observamos que, se $r : M \setminus \text{Cut}(p) \rightarrow \mathbb{R}^+$ é a função distância a partir de p , então a função $r \circ \exp_p : E_p \rightarrow \mathbb{R}^+$ é dada por

$$(r \circ \exp_p)(v) = d(p, \exp_p(v)) = |v|,$$

é diferenciável em $E_p \setminus 0$.

Agora seja $\gamma(t) = \exp_p(tv)$, $0 \leq t \leq a$ e $q = \gamma(t_0)$. Se $w \in T_p M$, com

$$w \perp \gamma'(t_0) = d(\exp_p)_{t_0v}(v),$$

pela **Proposição 2.2** $\exp_p$ é um difeomorfismo e, portanto $d(\exp_p)_{t_0v}$ é isomorfismo, assim existe um $W \in T_v(T_p M)$ tal que $d(\exp_p)_{t_0v}(W) = w$ e pelo Lema de Gauss

$$0 = \langle \gamma'(t_0), w \rangle = \langle d(\exp_p)_{t_0v}(v), d(\exp_p)_{t_0v}(W) \rangle = \langle v, W \rangle.$$

Consideremos $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow E_p$ tal que $|\alpha(s)| = t_0$, $\alpha(0) = t_0v$ e $\alpha'(0) = W$. Então pela unicidade da geodésica minimizante que liga $\exp_p(\alpha(s))$ a p tem-se que

$$r(\exp_p(\alpha(s))) = t_0,$$

e daí temos

$$0 = \langle \text{grad } r(q), d(\exp_p)_{t_0v}W \rangle = \langle \text{grad } r(q), w \rangle.$$

Como a igualdade acima vale para todo $w \perp \gamma'(t_0)$, segue que $\text{grad } r(q)$ é um múltiplo de $\gamma'(t_0)$. Por outro lado $r(\gamma(t)) = t$ para $0 \leq t \leq a$, temos

$$\langle \text{grad } r(\gamma(t)), \gamma' \rangle = 1, \quad \forall 0 < t \leq a,$$

e daí $\text{grad } r(\gamma(t)) = \gamma'(t)$ para $0 < t \leq a$. Além disso, sendo γ normalizada temos

$$|\text{grad } r| = |\gamma'| = 1.$$

■

Agora escreveremos o gradiente em função da métrica de M . Assim, se $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é uma carta, a ela estão associados n campos de vetores coordenados, que denotaremos por ∂_j , $j =$

$1, \dots, n$, que formam uma base do $T_p M$. Assim, se $\xi \in T_p M$ podemos escrever

$$\xi = \sum_{j=1}^n a_j \partial_j,$$

e portanto

$$\xi(f) = \sum_{j=1}^n a_j \partial_j(f),$$

onde $\partial_j(f)$ é a derivada direcional de f na direção de ∂_j .

Dada uma métrica Riemanniana, sejam

$$\begin{aligned} g_{jk} &= \langle \partial_j, \partial_k \rangle, & G &= (g_{jk}), \\ g &= \det G, & G^{-1} &= (g^{jk}), \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde $j, k = 1, \dots, n$. Então

$$\begin{aligned} \langle \text{grad} f, \xi \rangle &= \xi(f) = \sum_{j=1}^n a_j \partial_j(f) = \sum_{j,k,l=1}^n a_j g_{jk} g^{kl} \partial_l(f) \\ &= \sum_{j,k,l=1}^n a_j \langle \partial_j, \partial_k \rangle g^{kl} \partial_l(f) \\ &= \left\langle \sum_{j=1}^n a_j \partial_j, \sum_{k,l=1}^n (g^{kl} \partial_l(f)) \partial_k \right\rangle \\ &= \left\langle \xi, \sum_{k,l=1}^n (g^{kl} \partial_l(f)) \partial_k \right\rangle. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\text{grad} f = \sum_{k,l=1}^n g^{kl} \partial_l(f) \partial_k. \quad (2.2)$$

Se a base ∂_j , $j = 1, \dots, n$, de $T_p M$ for ortonormal o $\text{grad} f$ pode também ser expresso por

$$\text{grad} f = \sum_{i=1}^n \partial_i(f) \partial_i. \quad (2.3)$$

Com efeito, $g^{kl} = \delta_{kl}$ em (2.2).

Definição 2.2 Dado o campo de vetores $X \in C^k$, $k \geq 1$, sobre M , a divergência de X denotada por

$\operatorname{div} X$, é a função definida por

$$(\operatorname{div} X)(p) := \operatorname{traço}(Y \rightarrow \nabla_Y X(p)),$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M .

Para $f \in C^k, k \geq 1$, e campos de vetores $X, Y \in C^k, k \geq 1$, temos

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(X + Y) &= \operatorname{div} X + \operatorname{div} Y; \\ \operatorname{div}(fX) &= f \operatorname{div} X + \langle \operatorname{grad} f, X \rangle. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Lema 2.1 *Sejam M uma variedade Riemanniana imersa em $\bar{M}$ e X um campo de vetores em $\bar{M}$, denote por X^T e $X^\perp$ as componentes tangente e normal de X , com respeito a M , então*

$$\operatorname{div}_M X = \operatorname{div}_M X^T + \langle \vec{H}, X \rangle,$$

onde $\vec{H}$ é o vetor curvatura média.

Demonstração.

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_M X &= \operatorname{div}_M (X^T + X^\perp) \\ &= \operatorname{div}_M X^T + \operatorname{div}_M X^\perp \\ &= \operatorname{div}_M X^T + \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} X^\perp, e_i \rangle \\ &= \operatorname{div}_M X^T + \sum_{i=1}^n \langle -\bar{\nabla}_{e_i} e_i, X^\perp \rangle \\ &= \operatorname{div}_M X^T - \sum_{i=1}^n \langle \alpha(e_i, e_i), X - X^T \rangle \\ &= \operatorname{div}_M X^T - \langle \vec{H}, X \rangle \end{aligned}$$

■

2.2 Laplaciano e Hessiana

Definição 2.3 *Para toda função $f \in C^k, k \geq 2$, sobre M o laplaciano de f , denotado por Δf , é definido por*

$$\Delta f := \operatorname{div}(\operatorname{grad} f).$$

Para funções f e h temos

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(h(\operatorname{grad} f)) &= h\Delta f + \langle \operatorname{grad} h, \operatorname{grad} f \rangle; \\ \Delta(f+h) &= \Delta f + \Delta h; \\ \Delta(fh) &= h(\Delta f) + 2\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h \rangle + f(\Delta h).\end{aligned}$$

Definição 2.4 *Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 . A hessiana de f é a forma bilinear e simétrica $\operatorname{Hess} f : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$, definida para $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ por*

$$\operatorname{Hess} f(X, Y) = X(Y(f)) - \nabla_X Y(f).$$

A simetria e bilinearidade da hessiana segue das propriedades da conexão Riemanniana de M . De fato, a simetria da hessiana segue da simetria da conexão,

$$\nabla_X Y(f) - \nabla_Y X(f) = [X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)),$$

assim

$$\operatorname{Hess} f(X, Y) = X(Y(f)) - \nabla_X Y(f) = Y(X(f)) - \nabla_Y X(f) = \operatorname{Hess} f(Y, X).$$

Para a bilinearidade, temos

$$\begin{aligned}\operatorname{Hess} f(X + Z, Y) &= (X + Z)(Y(f)) - \nabla_{X+Z} Y(f) \\ &= X(Y(f)) + Z(Y(f)) - \nabla_X Y(f) - \nabla_Z Y(f) \\ &= (\operatorname{Hess} f)_p(X, Y) + (\operatorname{Hess} f)_p(Z, Y);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Hess} f(X, Y + Z) &= X((Y + Z)(f)) - \nabla_X (Y + Z)(f) \\ &= X(Y(f)) + X(Z(f)) - \nabla_X Y(f) - \nabla_X Z(f) \\ &= \operatorname{Hess} f(X, Y) + \operatorname{Hess} f(X, Z).\end{aligned}$$

Sabemos que a toda forma bilinear simétrica $\mathcal{B} : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ está associado um operador auto-adjunto $\mathcal{A}$ tal que

$$\mathcal{B}(a_1, a_2) = \langle \mathcal{A}(a_1), a_2 \rangle,$$

onde E é um espaço vetorial com produto interno de dimensão finita, em particular o operador auto-adjunto associado a forma hessiana é o operador hessiano

$$(\operatorname{Hess} f)_p : T_p M \rightarrow T_p M.$$

Agora veremos que regra define o operador $(\text{Hess}f)_p$. Com efeito, para $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ quaisquer

$$\begin{aligned}
 \langle (\text{Hess}f)_p(X), Y \rangle &= \text{Hess}f(X, Y) \\
 &= X(Y(f)) - \nabla_X Y(f) \\
 &= X(\langle Y, \text{grad} f \rangle) - \nabla_X Y(f) \\
 &= X(\langle Y, \text{grad} f \rangle) - \langle \nabla_X Y, \text{grad} f \rangle \\
 &= \langle \nabla_X Y, \text{grad} f \rangle + \langle Y, \nabla_X \text{grad} f \rangle - \langle \nabla_X Y, \text{grad} f \rangle \\
 &= \langle Y, \nabla_X \text{grad} f \rangle,
 \end{aligned}$$

portanto

$$(\text{Hess}f)_p(X) = \nabla_X \text{grad} f(p). \quad (2.5)$$

Lema 2.2 *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Se $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ é uma geodésica em M , então*

$$(\text{Hess}f)_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) = \frac{d^2}{dt^2}(f \circ \gamma)(t).$$

Demonstração. Basta observar que

$$\begin{aligned}
 (\text{Hess}f)_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) &= \langle \nabla_{\gamma'(t)} \text{grad} f, \gamma'(t) \rangle \\
 &= \frac{d}{dt} \langle \text{grad} f, \gamma'(t) \rangle - \left\langle \text{grad} f, \frac{D\gamma'(t)}{dt} \right\rangle \\
 &= \frac{d}{dt} \langle \text{grad} f, \gamma'(t) \rangle \\
 &= \frac{d^2}{dt^2}(f \circ \gamma)(t).
 \end{aligned}$$

A última igualdade é devida a **Proposição 2.1**. ■

Lema 2.3 *Se $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 . Então*

$$\Delta f = \text{tr}(\text{Hess})_p.$$

Demonstração. Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base em $T_p M$, então

$$\begin{aligned} \text{tr}(\text{Hess} f)_p &= \sum_{i=1}^n \langle (\text{Hess} f)_p(e_i), e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} \text{grad} f, e_i \rangle \\ &= \text{div}(\text{grad} f) = \Delta f. \end{aligned}$$

■

Agora, com objetivo de demonstrarmos o teorema de comparação do hessiano, definiremos a forma do índice de uma geodésica.

Seja $\gamma: [0, a] \rightarrow M^n$ uma geodésica. Indicaremos por $\mathcal{V}(0, a) = \mathcal{V}$ o espaço vetorial formado por campos vetoriais V ao longo de γ , diferenciáveis por partes e tais que $V(0) = V(a) = 0$.

Definição 2.5 A forma do índice de γ é a forma bilinear simétrica $\mathcal{I}_a$ definida em $\mathcal{V}$ por

$$\mathcal{I}_a(V, W) = \int_0^a (\langle V', W' \rangle - \langle \mathcal{R}(\gamma', V)\gamma', W \rangle) dt. \quad (2.6)$$

Em particular se $J \in \mathcal{V}$ é um campo de Jacobi ao longo de γ , então

$$\mathcal{I}_a(J, J) = \langle J', J \rangle(a). \quad (2.7)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_a(J, J) &= \int_0^a (\langle J', J' \rangle - \langle \mathcal{R}(\gamma', J)\gamma', J \rangle) dt \\ &= \int_0^a (\langle J', J' \rangle + \langle J'', J \rangle) dt \\ &= \int_0^a \frac{d}{dt} \langle J', J \rangle dt \\ &= \langle J', J \rangle(a). \end{aligned}$$

Proposição 2.4 Sejam M^n uma variedade Riemanniana completa e $\gamma: [0, a] \rightarrow M$ uma geodésica normalizada partindo de p e que não intersecta o $\text{Cut}(p)$. Se $0 < t_0 \leq a$ e $X \in T_{\gamma(t_0)} M$ é ortogonal a $\gamma'(t_0)$, então

$$(\text{Hess} r)_{\gamma(t_0)}(X, X) = \langle J', J \rangle(t_0), \quad (2.8)$$

onde J é o campo de Jacobi ao longo de γ tal que $J(0) = 0$ e $J(t_0) = X$.

Demonstração. Como o $Cut(p)$ é fechado em M , podemos tomar uma geodésica $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \setminus Cut(p)$ tal que $\alpha(0) = \gamma(t_0)$ e $\alpha'(0) = X$. Sendo α geodésica temos pelo **Lema 2.2** que

$$(\text{Hess } r)_{\gamma(t_0)}(X, X) = (r \circ \alpha)''(0). \quad (2.9)$$

Seja $\beta = ((\exp_p)|_{E_p})^{-1} \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow E_p$ e $\phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, t_0] \rightarrow M \setminus Cut(p)$ a variação da geodésica $\gamma|_{[0, t_0]}$ dada por

$$\phi(s, t) = \exp_p \left(\frac{t}{t_0} \beta(s) \right),$$

com campo variacional, de Jacobi, J . De $\phi(s, 0) = p$ para todo s temos $J(0) = 0$; de $\phi(s, t_0) = \alpha(s)$, temos $J(t_0) = \frac{\partial \phi}{\partial s}(s, t_0)|_{s=0} = \alpha'(0) = X$. Como $X \perp \gamma'(t_0)$, segue que $J \perp \gamma'$ ao longo de γ e consequentemente $\langle J', \gamma' \rangle = 0$.

Por outro lado, sendo $E : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcional energia de ϕ (ver [5] pág. 214), segue que

$$\begin{aligned} (r \circ \alpha)(s) = l(\phi_s) &= \int_0^{t_0} \left| \frac{\partial \phi}{\partial t}(s, t) \right| dt \\ &\leq \sqrt{t_0} \left(\int_0^{t_0} \left| \frac{\partial \phi}{\partial t}(s, t) \right|^2 dt \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{t_0} E(s)^{1/2}, \end{aligned}$$

onde na segunda igualdade usamos o fato de ϕ_s estar parametrizada proporcionalmente ao comprimento de arco. Portanto,

$$(r \circ \alpha)'(s) = l(\phi_s) = \frac{\sqrt{t_0}}{2} E(s)^{-1/2} E'(s)$$

e

$$(r \circ \alpha)''(s) = -\frac{\sqrt{t_0}}{4} E(s)^{-3/2} E'(s)^2 + \frac{\sqrt{t_0}}{2} E(s)^{-1/2} E''(s). \quad (2.10)$$

Pela a fórmula da primeira variação da energia (ver [5] pág. 215)

$$\frac{1}{2} E'(0) = - \int_0^{t_0} \left\langle J, \frac{D\gamma'}{dt} dt \right\rangle + \langle J, \gamma' \rangle|_0^{t_0} = 0,$$

uma vez que $J \perp \gamma'$. Logo, aplicando a fórmula da segunda variação da energia (ver [5] pág. 218) em **(2.10)**, obtém-se

$$\begin{aligned} (r \circ \alpha)''(0) &= \frac{\sqrt{t_0}}{2} E(0)^{-1/2} E''(0) \\ &= \frac{\sqrt{t_0}}{2} \cdot \frac{\sqrt{t_0}}{r(\gamma(t_0))} \cdot 2 (I_{t_0}(J, J) + \langle J', \gamma' \rangle|_0^{t_0}) \\ &= I_{t_0}(J, J) = \langle J', J \rangle(t_0). \end{aligned}$$

Logo por (2.9)

$$(\text{Hess } r)_{\gamma(t_0)}(X, X) = \langle J', J \rangle(t_0).$$

■

Teorema 2.5 (Lema do Índice) *Sejam M^n uma variedade Riemanniana e $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ uma geodésica tal que para todo $t \in (0, a]$ $\gamma(t)$ não é conjugado a $\gamma(0)$ ao longo de γ . Se V é um campo diferenciável por partes e J um campo de Jacobi ao longo de γ , com $V(0) = J(0) = 0$ e $V(t_0) = J(t_0)$ para $t_0 \in (0, a]$, então*

$$\mathcal{J}_{t_0}(V, V) \geq \mathcal{J}_{t_0}(J, J),$$

além disso, ocorre a igualdade se, e somente se, $V(t) = J(t)$ para todo $t \in [0, a]$.

Demonstração. Se $\mathcal{J}$ é o espaço vetorial dos campos de Jacobi ao longo de γ com $J(0) = 0$, então a $\dim \mathcal{J} = n$, pelo isomorfismo

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &\rightarrow T_{\gamma(0)}M \\ J &\mapsto J'(0). \end{aligned}$$

Como para $J \in \mathcal{J}$ tem-se $\langle J, \gamma' \rangle(t) = \langle J'(0), \gamma'(0) \rangle t$, segue que $\langle J, \gamma' \rangle \equiv 0 \Leftrightarrow \langle J'(0), \gamma'(0) \rangle = 0$. Podemos então tomar uma base $\{J_1, \dots, J_{n-1}, J_n = t\gamma'(t)\}$ de $\mathcal{J}$, tal que $\langle J_i, \gamma' \rangle \equiv 0$ para $1 \leq i \leq n-1$. Sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$ tais que

$$J = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i J_i.$$

Como $\gamma(t)$ não é conjugado a $\gamma(0)$ ao longo γ , para $0 < t \leq a$, temos que $\{J_1(t), \dots, J_{n-1}(t)\}$ é base do $(\text{span}\{\gamma'(t)\})^\perp \subset T_{\gamma(t)}M$, para $t \in (0, a]$. Mas

$$J_i(t) = (d \exp_{\gamma(0)})_{t\gamma'(0)} t J_i'(0) = t \underbrace{(d \exp_{\gamma(0)})_{t\gamma'(0)} J_i'(0)}_{A_i(t)} = t A_i(t),$$

com $A_i(0) = J_i'(0)$ e $A_n(t) = \gamma'(t)$, de modo que $\{A_1(t), \dots, A_{n-1}(t)\}$ é base do $(\text{span}\{\gamma'(t)\})^\perp \subset T_{\gamma(t)}M$, para $0 \leq t \leq a$. Segue que existem funções $\beta_1, \dots, \beta_n : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciáveis por partes tais que $\beta_i(0) = 0$ para $1 \leq i \leq n$ e

$$V(t) = \sum_{i=1}^n \beta_i(t) A_i(t), \quad \forall t \in [0, a].$$

Mas para $0 \leq i \leq n$ e $0 \leq t \leq a$, temos

$$\beta_i(t) = \int_0^t \beta'_i(s) ds = \int_0^1 \beta'_i(t\tau) t d\tau = t \underbrace{\int_0^1 \beta'_i(t\tau) d\tau}_{b_i(t)},$$

onde cada b_i é diferenciável por partes em $[0, a]$, assim

$$V(t) = \sum_{i=1}^n b_i(t) J_i(t), \quad \forall t \in [0, a]$$

e observe que

$$V(t_0) = J(t_0) \Rightarrow b_i(t_0) = \alpha_i, \quad \forall i \in [1, n]. \quad (2.11)$$

Como $\mathcal{J}_{t_0}(J, J) = \langle J', J \rangle(t_0)$ e $V' = \sum_{i=1}^n (b'_i J_i + b_i J'_i)$ onde V for diferenciável, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{t_0}(V, V) &= \int_0^{t_0} [\langle V', V' \rangle - \langle \mathcal{R}(\gamma', V) \gamma', V \rangle] dt \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_0^{t_0} [\langle b'_i J_i + b'_j J_j, b'_i J_i + b'_j J_j \rangle - \langle b_i \underbrace{\mathcal{R}(\gamma', J_i)}_{-J''_i} \gamma', b_j J_j \rangle] dt \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_0^{t_0} [|b'_i J_i|^2 + \langle b'_i J_i, b_j J'_j \rangle + \langle b_i J'_i, b'_j J_j \rangle + \langle b_i J'_i, b_j J'_j \rangle + \langle b_i J''_i, b_j J_j \rangle] dt. \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle b_i J'_i, b_j J_j \rangle &= \langle b'_i J'_i + b_i J''_i, b_j J_j \rangle + \langle b_i J'_i, b'_j J_j + b_j J'_j \rangle \\ &= \langle b'_i J'_i, b_j J_j \rangle + \langle b_i J''_i, b_j J_j \rangle + \langle b_i J'_i, b'_j J_j \rangle + \langle b_i J'_i, b_j J'_j \rangle \end{aligned}$$

Donde

$$\mathcal{J}_{t_0}(V, V) = \sum_{i,j=1}^n \int_0^{t_0} \left[|b'_i J_i|^2 + \langle b'_i J_i, b_j J'_j \rangle - \langle b'_i J'_i, b_j J_j \rangle + \frac{d}{dt} \langle b_i J'_i, b_j J_j \rangle \right] dt$$

Agora afirmamos que

$$\langle J'_i, J_j \rangle = \langle J_i, J'_j \rangle, \quad \text{para quaisquer } 1 \leq i, j \leq n \text{ e } t \in [0, a].$$

De fato, sendo $\phi(t) = \langle J'_i, J_j \rangle - \langle J_i, J'_j \rangle$ temos $\phi(0) = 0$ e

$$\phi'(t) = \langle J''_i, J_j \rangle - \langle J_i, J''_j \rangle = -\langle \mathcal{R}(\gamma', J_i) \gamma', J_j \rangle + \langle J_i, \mathcal{R}(\gamma', J_j) \gamma' \rangle = 0,$$

logo $\phi \equiv 0$. Segue de (2.11) e da afirmação acima que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}_{t_0}(V, V) &= \sum_{i=1}^n \int_0^{t_0} |b'_i J_i|^2 dt + \sum_{i,j=1}^n \int_0^{t_0} \frac{d}{dt} \langle b_i J'_i, b_j J_j \rangle dt \\
 &\geq \sum_{i,j=1}^n \langle b_i J'_i, b_j J_j \rangle \Big|_0^{t_0} \\
 &= \sum_{i,j=1}^n \langle \alpha_i J'_i(t_0), \alpha_j J_j(t_0) \rangle \\
 &= \mathcal{J}_{t_0}(J, J).
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Para a igualdade, é imediato de (2.12) que devemos ter $b'_i(t) = 0$ para $t \in (0, t_0]$ onde V for diferenciável. Portanto, $b_i(t) = \alpha_i$ para $t \in [0, t_0]$ por continuidade, logo

$$V(t) = \alpha_i J_i(t) = J(t), \quad \forall t \in [0, t_0].$$

■

Teorema 2.6 (Comparação do Hessiano) *Sejam M^n e $\bar{M}^n$ variedades Riemannianas completas e $\gamma: [0, a] \rightarrow M$ e $\bar{\gamma}: [0, a] \rightarrow \bar{M}$ geodésicas normalizadas que não intersectam respectivamente $\text{Cut}(\gamma(0))$ e $\text{Cut}(\bar{\gamma}(0))$. Se*

$$K_M(\gamma'(t), X) \leq K_{\bar{M}}(\bar{\gamma}'(t), \bar{X}),$$

para todo $t \in [0, a]$, $X \in T_{\gamma(t)}M$ e $\bar{X} \in T_{\bar{\gamma}(t)}\bar{M}$, unitários e ortogonais respectivamente a $\gamma'(t)$ e $\bar{\gamma}'(t)$, e r e $\bar{r}$ são respectivamente as funções distância em M e $\bar{M}$ a partir de $\gamma(0)$ e $\bar{\gamma}(0)$. Então para $0 < t \leq a$,

$$(\text{Hess } r)_{\gamma(t)}(X, X) \geq (\text{Hess } \bar{r})_{\bar{\gamma}(t)}(\bar{X}, \bar{X}).$$

Além disso, vale a igualdade se e só se $K_M(\gamma'(t), X) = K_{\bar{M}}(\bar{\gamma}'(t), \bar{X})$.

Demonstração. Fixe $0 < t_0 \leq a$. Pela **Proposição 2.4**, temos

$$(\text{Hess } r)_{\gamma(t_0)}(X, X) = \langle J', J \rangle(t_0),$$

onde J é o campo de Jacobi ao longo de γ tal que $J(0) = 0$ e $J(t_0) = X$. Em particular $\langle J, \gamma' \rangle = 0$ em $[0, t_0]$. Analogamente

$$(\text{Hess } \bar{r})_{\bar{\gamma}(t_0)}(\bar{X}, \bar{X}) = \langle \bar{J}', \bar{J} \rangle(t_0),$$

onde $\bar{J}$ é o campo de Jacobi ao longo de $\bar{\gamma}$ tal que $\bar{J}(0) = 0$ e $\bar{J}(t_0) = \bar{X}$, com $\langle \bar{J}, \bar{\gamma}' \rangle = 0$ em $[0, t_0]$. Como $\bar{\gamma}$ não encontra o $\text{Cut}(\bar{\gamma}(0))$ em $(0, t_0]$, segue que $\bar{\gamma}(t)$ não é conjugado a $\bar{\gamma}(0)$ ao longo de $\bar{\gamma}$, para $t \in (0, t_0]$. Portanto, pela parte (b) do teorema de Rauch

$$\begin{aligned}
(\text{Hess } r)_{\gamma(t_0)}(X, X) &= \langle J', J \rangle(t_0) \geq \frac{|J(t_0)|^2}{|\bar{J}(t_0)|^2} \langle \bar{J}', \bar{J} \rangle(t_0) \\
&= \frac{|X|^2}{|\bar{X}|^2} (\text{Hess } \bar{r})_{\bar{\gamma}(t_0)}(\bar{X}, \bar{X}) \\
&= (\text{Hess } \bar{r})_{\bar{\gamma}(t_0)}(\bar{X}, \bar{X}).
\end{aligned}$$

Pela **Observação 1.14**, do teorema de Rauch, a igualdade vale se e só se

$$K_M(\gamma'(t), X) = K_{\bar{M}}(\bar{\gamma}'(t), \bar{X}).$$

■

Teorema 2.7 *Seja $\mathbb{R}^n$ munido com a métrica g , que pode ser escrita em coordenadas polares como*

$$dr^2 + f^2(r)dw^2$$

onde f é uma função suave, dw^2 é a métrica canônica sobre $\mathbb{S}^{n-1}$ e $r(x) = d(x, 0)$, onde d é a função distância. Então para $x = rw$, $r > 0$, $w \in \mathbb{S}^{n-1}$,

$$\text{Hess } r(x) = \frac{f'(r)}{f(r)}(g - dr \otimes dr)$$

além disso,

$$\Delta r(x) = (n-1) \frac{f'(r)}{f(r)}.$$

Demonstração. Usando que as curvas $r \rightarrow rw$ são geodésicas para w fixado e que $\frac{\partial}{\partial r}$ é o campo velocidade, então pela definição de hessiana

$$\begin{aligned}
\text{Hess } r \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right) &= \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r}(r) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \frac{\partial}{\partial r}(r) \\
&= \frac{\partial}{\partial r}(1) = 0
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Se X é um campo ortogonal a $\frac{\partial}{\partial r}$, então

$$\text{Hess } r \left(\frac{\partial}{\partial r}, X \right) = \text{Hess } r \left(X, \frac{\partial}{\partial r} \right) = X \left(\frac{\partial}{\partial r}(r) \right) - \nabla_X \frac{\partial}{\partial r}(r),$$

pela **Proposição 2.3** $\text{grad } r = \frac{\partial}{\partial r}$ e, portanto

$$\nabla_X \frac{\partial}{\partial r}(r) = \left\langle \nabla_X \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle,$$

ainda pela **Proposição 2.3**

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle = 1,$$

assim,

$$0 = X \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle = 2 \left\langle \nabla_X \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle.$$

Portanto, quando X é ortogonal a $\frac{\partial}{\partial r}$,

$$\text{Hess } r \left(\frac{\partial}{\partial r}, X \right) = \left\langle \nabla_X \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle = 0. \quad (2.14)$$

Agora consideremos os campos de vetores X e Y que são tangentes ao conjunto de nível $r = c$, onde c é uma constante positiva. Então $X(r) = Y(r) = 0$ e

$$\text{Hess } r(X, Y) = -\nabla_X Y(r) = -\left\langle \nabla_X Y, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle.$$

Como Y é ortogonal a $\frac{\partial}{\partial r}$, temos por **(1.3)** que

$$\text{Hess } r(X, Y) = \left\langle Y, \nabla_X \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle.$$

Seja $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$, para $i = 1, \dots, n-1$, campos de vetores coordenados sobre $\mathbb{S}^{n-1}$ e $\frac{\partial}{\partial x_n} = \frac{\partial}{\partial r}$ o campo normal a superfície $r = c$. Então para $1 \leq i, j \leq n-1$,

$$\text{Hess } r \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle = \left\langle \sum_s \Gamma_{jn}^s \frac{\partial}{\partial x_s}, \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle = \sum_s \Gamma_{jn}^s g_{si}, \quad (2.15)$$

onde Γ_{jn}^s , são os símbolos de Christoffel dados por

$$\Gamma_{jn}^s = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} g_{nk} + \frac{\partial}{\partial x_n} g_{kj} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{jn} \right\} g^{ks}.$$

Como $g_{ni} = \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle = 0$ para todo $i = 1, \dots, n-1$, temos

$$\Gamma_{jn}^s = \frac{1}{2} \sum_k \left(\frac{\partial}{\partial x_n} g_{kj} \right) g^{ks}.$$

como $g(r, w) = dr^2 + f(r)^2 dw^2$, temos que

$$g^{ks} = f^{-2}(dw^2)^{ks} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x_n} g_{kj} = \frac{\partial}{\partial r} g_{kj} = 2ff'(dw^2)_{kj}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \Gamma_{jn}^s &= \sum_k \frac{f'}{f} (dw^2)_{kj} (dw^2)^{ks} \\ &= \frac{f'}{f} \delta_{sj} \end{aligned}$$

Voltando a (2.15), temos que

$$\begin{aligned} \text{Hess } r \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) &= \sum_s \frac{f'}{f} \delta_{sj} g_{si} \\ &= \frac{f'}{f} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle. \end{aligned}$$

Por linearidade, se X e Y são ortogonais a $\frac{\partial}{\partial r}$, temos

$$\text{Hess } r(X, Y) = \frac{f'}{f} g(X, Y). \quad (2.16)$$

Agora sejam X e Y campos de vetores quaisquer, os quais podemos escrever como

$$\begin{aligned} X &= X_1 + \alpha \frac{\partial}{\partial r}, \\ Y &= Y_1 + \beta \frac{\partial}{\partial r} \end{aligned}$$

onde X_1 e Y_1 são ortogonais a $\frac{\partial}{\partial r}$, consequentemente

$$\begin{aligned} g \left(X, \frac{\partial}{\partial r} \right) &= \alpha \quad \text{e} \\ g \left(Y, \frac{\partial}{\partial r} \right) &= \beta. \end{aligned}$$

Pela linearidade da hessiana e as equações (2.13), (2.14) e (2.16) temos

$$\begin{aligned}
\text{Hess } r(X, Y) &= \text{Hess } r(X_1, Y_1) + \beta \text{Hess } r\left(X_1, \frac{\partial}{\partial r}\right) + \alpha \text{Hess } r\left(\frac{\partial}{\partial r}, Y_1\right) + \\
&\quad + \alpha\beta \text{Hess } r\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) \\
&= \text{Hess } r(X_1, Y_1) \\
&= \frac{f'}{f} g(X_1, Y_1) \\
&= \frac{f'}{f} g\left(X - \alpha \frac{\partial}{\partial r}, Y - \beta \frac{\partial}{\partial r}\right) \\
&= \frac{f'}{f} \left[g(X, Y) - \beta g\left(X, \frac{\partial}{\partial r}\right) - \alpha g\left(\frac{\partial}{\partial r}, Y\right) + \alpha\beta g\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) \right] \\
&= \frac{f'}{f} [g(X, Y) - \alpha\beta] \\
&= \frac{f'}{f} \left[g(X, Y) - g\left(X, \frac{\partial}{\partial r}\right) g\left(Y, \frac{\partial}{\partial r}\right) \right] \\
&= \frac{f'}{f} (g(X, Y) - dr \otimes dr(X, Y)).
\end{aligned}$$

Para a segunda parte temos que,

$$\Delta r(x) = \text{tr}(\text{Hess } r(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{f'}{f} \left(g(e_i, e_i) - g\left(e_i, \frac{\partial}{\partial r}\right) g\left(e_i, \frac{\partial}{\partial r}\right) \right) = (n-1) \frac{f'}{f},$$

onde $e_1, \dots, e_n = \frac{\partial}{\partial r}$ é uma base ortonormal. ■

Em particular, tomando a métrica $dr^2 + s_\delta^2(r)dw^2$, onde s_δ é solução do sistema

$$\begin{cases} y'' + \delta y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

temos que

$$\text{Hess } r(X, Y) = \frac{s'_\delta(r)}{s_\delta(r)} (g(X, Y) - dr \otimes dr(X, Y)) \quad (2.17)$$

e

$$\Delta r_\delta(x) = (n-1) \frac{s'_\delta(r)}{s_\delta(r)} = \text{Hess } r_\delta(e_i, e_i),$$

onde r_δ é a função distância na variedade M_δ de curvatura seccional constante δ .

3 *LIMITES SUPERIORES EXTRÍNSECOS PARA λ_1*

Nesse capítulo provaremos o resultado principal dessa dissertação, que é uma generalização do teorema de Reilly. No entanto, começaremos mostrando dois métodos de calcular os autovalores do laplaciano, conhecidos como quociente de Rayleigh e o princípio do MinMax, para os quais dedicamos a primeira seção.

3.1 Rayleigh e o método MinMax

Seja $L^2(M)$ o espaço das funções mensuráveis f sobre M tal que

$$\int_M |f|^2 dM < +\infty.$$

Sobre $L^2(M)$ temos o produto interno usual, e a norma induzida, respectivamente dados por

$$(f, g) := \int_M fh dM, \quad \|f\|^2 = (f, f)$$

para quaisquer $f, h \in L^2(M)$.

Nosso interesse é no seguinte problema de autovalores:

Problema fechado de autovalores: Seja M uma variedade Riemanniana compacta, sem bordo e conexa. Determine todos os números reais λ tais que exista uma solução não trivial, isto é, uma função não nula $\phi \in C^2(M)$ satisfazendo a EDP

$$\Delta\phi + \lambda\phi = 0. \tag{3.1}$$

Os números λ são chamados de autovalores do laplaciano e o espaço vetorial das soluções de (3.1) para um dado autovalor λ é chamado de autoespaço. Os elementos de cada autoespaço são chamados de autofunções.

Daqui em diante, por simplicidade, não usaremos o elemento de volume dM , no contexto

ficará implícito o seu uso.

Observe que, se ϕ satisfaz (3.1), então

$$\lambda = \frac{\int_M |\text{grad } \phi|^2}{\int_M \phi^2} \geq 0.$$

De fato, multiplicando (3.1) por ϕ e integrando obtemos

$$\int_M (\phi \Delta \phi + \lambda \phi^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{\int_M \phi \Delta \phi}{\int_M \phi^2} \quad (3.2)$$

como M não tem bordo, obtemos pela fórmula de Green

$$\int_M (f \Delta h + \langle \text{grad } f, \text{grad } h \rangle) = \int_{\partial M} h \nu(f), \quad (3.3)$$

onde ν denota o campo unitário normal exterior sobre ∂M , que

$$\int_M \phi \Delta \phi = - \int_M |\text{grad } \phi|^2,$$

substituindo em (3.2), obtemos

$$\lambda = \frac{\int_M |\text{grad } \phi|^2}{\int_M \phi^2}.$$

Agora para campos de vetores contínuos X, Y em M , definimos o produto interno

$$(X, Y) = \int_M \langle X, Y \rangle dM,$$

com norma

$$\|X\|^2 = \int_M |X|^2 dM. \quad (3.4)$$

Identificaremos $\mathcal{L}^2(M)$ como o conjunto dos campos de vetores mensuráveis sobre M (isto é, campos de vetores cujas funções coeficientes, em uma carta, são mensuráveis) para os quais a integral (3.4) é finita. Com o produto interno e a norma definidos acima, $\mathcal{L}^2(M)$ é um espaço de Hilbert.

Definição 3.1 Se $f \in L^2(M)$ dizemos que $Y \in \mathcal{L}^2(M)$ é uma derivada fraca de f se

$$(Y, X) = -(f, \text{div } X)$$

para todo campo X com suporte compacto sobre M .

Lema 3.1 *Se f é uma função de classe C^1 sobre uma variedade Riemanniana M e X é um campo também de classe C^1 e com suporte compacto sobre M , então*

$$(\operatorname{grad} f, X) = -(f, \operatorname{div} X).$$

Demonstração. Pela equação (2.4) temos que

$$\int_M \operatorname{div}(fX) = \int_M f \operatorname{div} X + \int_M \langle \operatorname{grad} f, X \rangle,$$

mas pelo teorema da divergência $\int_M \operatorname{div}(fX) = 0$, logo

$$(\operatorname{grad} f, X) = \int_M \langle \operatorname{grad} f, X \rangle = - \int_M f \operatorname{div} X = -(f, \operatorname{div} X).$$

■

Vamos denotar por $\mathcal{H}(M)$ o subespaço de $L^2(M)$ (referido como o espaço de Sobolev, pois é possível mostrar que quando $\partial M = \emptyset$, $\mathcal{H}(M)$ coincide com o espaço de Sobolev $W^{1,2}(M)$) consistindo das funções em $L^2(M)$ que possuem derivada fraca. Sobre $\mathcal{H}(M)$ definimos o produto interno

$$(f, h)_1 = (f, h) + (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h)$$

com norma associada,

$$\|f\|_1^2 = \|f\|^2 + \|\operatorname{grad} f\|^2. \quad (3.5)$$

É também conhecido que $\mathcal{H}(M)$ é o complemento de

$$\{f \in C^\infty(M) : \|f\|_1 < +\infty\}$$

na métrica induzida por (3.5). Além disso, como ∂M (quando não vazia) é C^∞ , temos que $C^\infty(\bar{M})$ é denso em $\mathcal{H}(M)$ na métrica dada. No problema fechado de autovalores, $\mathcal{H}(M)$ é também conhecido como o espaço das funções admissíveis.

Sobre $\mathcal{H}(M)$ vamos considerar a forma bilinear simétrica, conhecida como integral de Dirichlet ou da energia, dada por

$$D[f, h] = (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h) \quad (3.6)$$

para $f, h \in \mathcal{H}(M)$.

Lema 3.2 *No problema fechado de autovalores, se $\phi \in C^2(M)$ é uma autofunção e $f \in C^\infty(M)$, então*

$$(\Delta\phi, f) = -D[\phi, f].$$

Demonstração. Basta observar que sendo M compacto sem bordo, então da equação (3.3)

$$\int_M (f\Delta\phi + \langle \text{grad } f, \text{grad } \phi \rangle) = 0 \Rightarrow \int_M f\Delta\phi = - \int_M \langle \text{grad } f, \text{grad } \phi \rangle,$$

isto é

$$(\Delta\phi, f) = \int_M f\Delta\phi = - \int_M \langle \text{grad } f, \text{grad } \phi \rangle = -D[f, \phi].$$

■

Agora temos todos os elementos necessários para o teorema de Rayleigh, que enunciamos visando o problema fechado de autovalores:

Teorema 3.1 (Rayleigh) *Seja M^n uma variedade Riemanniana e considere o problema fechado de autovalores tendo espaço de funções admissíveis $\mathcal{H}(M)$ e autovalores*

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots, \quad (3.7)$$

onde cada autovalor é repetido o número de vezes igual a sua multiplicidade. Então para toda $f \in \mathcal{H}(M), f \neq 0$, temos

$$\lambda_1 \leq \frac{D[f, f]}{\|f\|^2}, \quad (3.8)$$

com igualdade se, e somente se, f é uma autofunção de λ_1 . Se $\{\phi_1, \phi_2, \dots\}$ é uma base ortonormal de $L^2(M)$ tais que ϕ_j é uma autofunção de λ_j para cada $j = 1, 2, \dots$, então para $f \in \mathcal{H}(M), f \neq 0$, satisfazendo

$$(f, \phi_1) = \dots = (f, \phi_{k-1}) = 0, \quad (3.9)$$

temos a desigualdade

$$\lambda_k \leq \frac{D[f, f]}{\|f\|^2} \quad (3.10)$$

com igualdade se, e somente se, f é uma autofunção de λ_k .

Demonstração. Ver [4], página 16. ■

Teorema 3.2 (Minmax) *Dados $v_1, \dots, v_{k-1} \in L^2(M)$, seja*

$$\mu = \inf \left(\frac{D[f, f]}{\|f\|^2} \right),$$

onde f percorre os subespaços (exceto a origem) de funções em $\mathcal{H}(M)$ ortogonais a $v_1, \dots, v_{k-1}$.

Então para o problema de autovalores dado em (3.7) temos

$$\mu \leq \lambda_k.$$

Claramente, se $v_1, \dots, v_{k-1}$ são ortogonais, com cada v_i sendo autofunção de λ_i , $i = 1, \dots, k-1$, então $\mu = \lambda_k$.

Demonstração. Ver [4], página 17. ■

3.2 Resultados principais

Nessa última seção trabalharemos com os resultados que envolvem diretamente o primeiro autovalor do laplaciano, λ_1 . Nosso principal objetivo é provar os **Teoremas 3.4 e 3.8**. Para isso provaremos alguns lemas técnicos que tornará a demonstração dos teoremas citados mais didática. Iniciamos com uma pequena introdução do resultado obtido por Reilly:

seja M uma variedade Riemanniana n -dimensional compacta, conexa e imersa isometricamente em $\mathbb{R}^N$ e $\lambda_1(M)$ o primeiro autovalor do operador laplaciano de M , Reilly mostrou que

$$\lambda_1(M) \leq \frac{n}{\text{vol}M} \int_M H^2,$$

onde $H = \frac{1}{n} |\vec{H}|$ é a curvatura média, $\vec{H} = \text{tr } \alpha$ é o vetor curvatura média e α é a segunda forma fundamental de M em $\mathbb{R}^N$. O resultado de Reilly melhora a seguinte estimativa, devida a Bleecker e Weiner [?]

$$\lambda_1(M) \leq \frac{n}{\text{vol}M} \int_M |\alpha|^2 dM.$$

Que pode ser comprovada assim,

$$\begin{aligned} nH^2 &= \frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^n \alpha(e_i, e_i) \right|^2 \leq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n |\alpha(e_i, e_i)| \right)^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n |\alpha(e_i, e_i)|^2 \\ &\leq \sum_{i,j=1}^n |\alpha(e_i, e_j)|^2 = |\alpha|^2, \end{aligned}$$

onde a segunda desigualdade é devida a Cauchy-Schwarz e $e_1, \dots, e_n$ é uma base ortonormal do espaço tangente.

Como acima mencionado nosso objetivo nessa dissertação é estender a desigualdade de Reilly para outros espaços $\bar{M}$, isto será feito de varias maneiras, por exemplo:

Teorema 3.3 *Se $\bar{M}$ é compacto então, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\lambda_1(M) \leq c + \frac{n}{\text{vol}M} \int_M H^2$$

para toda variedade M compacta, conexa e imersa isometricamente em $\bar{M}$.

Demonstração. A prova segue de uma combinação da desigualdade de Reilly com o teorema de Nash, **Teorema 1.9**. Por Nash temos que $\bar{M}$ está imersa isometricamente num espaço euclidiano $\mathbb{R}^N$. Consequentemente, M está imersa isometricamente em $\mathbb{R}^N$, assim

$$\lambda_1(M) \leq \frac{n}{\text{vol}M} \int_M \tilde{H}^2,$$

onde $\tilde{H}$ é a curvatura média de M em $\mathbb{R}^N$. Se $\tilde{\alpha}$, $\alpha_{\bar{M}}$ denotam as segundas formas fundamentais de M e $\bar{M}$ em $\mathbb{R}^N$, respectivamente, então $\tilde{\alpha} = \alpha + \alpha_{\bar{M}}$, onde α é a segunda forma fundamental de M em $\bar{M}$. Com efeito, se α denota a segunda forma fundamental de M em $\bar{M}$, então por definição para $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, X_1, Y_1 suas extensões a $\bar{M}$, respectivamente, e X', Y' extensões a $\mathbb{R}^N$ de X_1, Y_1 , respectivamente e denotando por C a conexão Riemanniana de $\mathbb{R}^N$ temos que:

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}(X, Y) &= C_{X'}Y' - \nabla_X Y \\ \alpha(X, Y) &= \bar{\nabla}_{X_1}Y_1 - \nabla_X Y \\ \alpha_{\bar{M}}(X_1, Y_1) &= C_{X'}Y' - \bar{\nabla}_{X_1}Y_1.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\alpha(X, Y) + \alpha_{\bar{M}}(X_1, Y_1) = C_{X'}Y' - \nabla_X Y = \tilde{\alpha}(X, Y), \quad (3.11)$$

e consequentemente

$$\vec{H}_1 = \sum_{i=1}^n \tilde{\alpha}(e_i, e_i) = \vec{H} + \sum_{i=1}^n \alpha_{\bar{M}}(e_i, e_i),$$

onde $\vec{H}_1$ é o vetor curvatura média de M em $\mathbb{R}^N$ e $e_1, \dots, e_n$ é uma base ortonormal do espaço tangente. Assim,

$$\begin{aligned}\tilde{H}^2 &= \frac{1}{n^2} |\vec{H}_1|^2 = \frac{1}{n^2} \left\langle \vec{H} + \sum_{i=1}^n \alpha_{\bar{M}}(e_i, e_i), \vec{H} + \sum_{i=1}^n \alpha_{\bar{M}}(e_i, e_i) \right\rangle \\ &= \frac{1}{n^2} \langle \vec{H}, \vec{H} \rangle + \frac{1}{n^2} \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_{\bar{M}}(e_i, e_i), \sum_{i=1}^n \alpha_{\bar{M}}(e_i, e_i) \right\rangle + \frac{2}{n^2} \left\langle \vec{H}, \sum_{i=1}^n \alpha_{\bar{M}}(e_i, e_i) \right\rangle \\ &= H^2 + \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_{\bar{M}}(e_i, e_i) \right|^2,\end{aligned}$$

pois $\alpha_{\bar{M}}(e_i, e_i)$ é perpendicular a $\bar{M}$, consequentemente

$$\left\langle \vec{H}, \sum_{i=1}^n \alpha_{\bar{M}}(e_i, e_i) \right\rangle = 0,$$

assim

$$\lambda_1(M) \leq \frac{1}{n \operatorname{vol} M} \int_M \left| \sum_{i=1}^n \alpha_{\bar{M}}(e_i, e_i) \right|^2 + \frac{n}{\operatorname{vol} M} \int_M H^2 \leq c + \frac{n}{\operatorname{vol} M} \int_M H^2$$

onde $c := \max_{v \in S\bar{M}} |\alpha_{\bar{M}}(v, v)|$ e $S\bar{M}$ denota o fibrado tangente unitário. Isto completa a prova do teorema. ■

O primeiro dos objetivos principais dessa dissertação é mostrar a seguinte extensão da desigualdade de Reilly:

Teorema 3.4 *Se $K_{\bar{M}} \leq \delta$ para algum $\delta \geq 0$ e se além disso M está em uma bola convexa de raio $r \leq \frac{\pi}{4\sqrt{\delta}}$ quando $\delta > 0$, então*

$$\lambda_1(M) \leq n\delta + \frac{n}{\operatorname{vol} M} \int_M H^2.$$

Se vale a igualdade, então M é imersa minimamente em alguma esfera geodésica.

Para mostrarmos um caso particular do **Teorema 3.4**, vamos usar os dois resultados seguintes:

Teorema 3.5 *Duas variedades Riemannianas compactas 2-dimensionais são homeomorfas se, e somente se, elas têm a mesma característica de Euler e são ambas orientáveis ou não orientáveis.*

Demonstração. Ver [10], página 33. ■

Teorema 3.6 *Seja M uma superfície de Riemann orientada de gênero g com área A . Então*

$$\lambda_1 \leq 8\pi(g+1)A^{-1}.$$

Demonstração. Ver [12], página 4. ■

Agora para $n = 2$, temos o seguinte caso particular do **Teorema 3.4**:

Proposição 3.7 *Seja M homeomorfa a $\mathbb{S}^2$ e $K_{\bar{M}} \leq \delta$ para algum $\delta \in \mathbb{R}$. Então*

$$\lambda_1(M) \leq 2\delta + \frac{2}{\operatorname{vol} M} \int_M H^2.$$

Demonstração. Sendo M homeomorfa a $\mathbb{S}^2$, segue que M tem dimensão 2, pelo **Teorema de Invariância da dimensão**, e pelo **Teorema 3.5** M e $\mathbb{S}^2$ têm a mesma característica de Euler e consequentemente o mesmo gênero $g = 0$. Usando o **Teorema 3.6** temos

$$\lambda_1(M) \leq \frac{8\pi(g+1)}{\text{vol}M} = \frac{8\pi}{\text{vol}M},$$

usando o teorema de Gauss-Bonnet

$$\lambda_1(M) \leq \frac{8\pi}{\text{vol}M} = \frac{2}{\text{vol}M} \int_M K_M,$$

onde K_M denota a curvatura seccional de M .

Tendo M dimensão 2, então temos duas curvaturas principais k_1 e k_2 . Agora, observamos que

$$0 \leq (k_1 - k_2)^2 = k_1^2 - 2k_1k_2 + k_2^2$$

e portanto,

$$2k_1k_2 \leq k_1^2 + k_2^2.$$

Mas,

$$(k_1 + k_2)^2 = k_1^2 + 2k_1k_2 + k_2^2 \geq 4k_1k_2$$

logo,

$$k_1k_2 \leq \frac{(k_1 + k_2)^2}{4} = \left(\frac{k_1 + k_2}{2}\right)^2.$$

Pelo teorema de Gauss $K_M(x, y) - K_{\bar{M}}(x, y) = \langle \alpha(x, x), \alpha(y, y) \rangle - |\alpha(x, y)|^2$, temos

$$\begin{aligned} K_M(x, y) - K_{\bar{M}}(x, y) &\leq \langle \alpha(x, x), \alpha(y, y) \rangle = k_1k_2 \\ &\leq \left(\frac{k_1 + k_2}{2}\right)^2 = H^2. \end{aligned}$$

Portanto

$$K_M(x, y) \leq K_{\bar{M}}(x, y) + H^2 \leq \delta + H^2.$$

Logo

$$\begin{aligned}\lambda_1(M) &\leq \frac{2}{\text{vol}M} \int_M (\delta + H^2) \\ &= 2\delta + \frac{2}{\text{vol}M} \int_M H^2.\end{aligned}$$

■

Nosso resultado mais geral quando $\delta < 0$ é o seguinte:

Teorema 3.8 *Se $K_{\bar{M}} \leq \delta$ para algum $\delta < 0$ e M está em uma bola convexa, então*

$$\lambda_1(M) \leq n\delta + n \max H^2.$$

Agora, seja s_δ a solução de

$$y'' + \delta y = 0 \tag{3.12}$$

com $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ e ponha $c_\delta := s'_\delta$. Então, $c'_\delta = -\delta s_\delta$ e $c_\delta^2 + \delta s_\delta^2 = 1$. Para comprovar esta última igualdade seja $f(t) = (c_\delta(t))^2 + \delta(s_\delta(t))^2$, então

$$\begin{aligned}f'(t) &= 2c_\delta(t)c'_\delta(t) + 2\delta s_\delta(t)s'_\delta(t) \\ &= -2\delta s'_\delta s_\delta + 2\delta s'_\delta s_\delta = 0,\end{aligned}$$

portanto f é constante, e

$$\begin{aligned}f(0) &= (c_\delta(0))^2 + \delta(s_\delta(0))^2 \\ &= (s'_\delta(0))^2 + \delta(s_\delta(0))^2 \\ &= 1,\end{aligned}$$

pois $s'_\delta(0) = 1$ e $s_\delta(0) = 0$.

Vamos usar $\frac{s_\delta(r)}{r} \cdot x_i$ e $\frac{c_\delta(r) - c}{\sqrt{\delta}}$ no caso $\delta > 0$, onde $c := \frac{1}{\text{vol}M} \int_M c_\delta(r)$ é constante, como funções teste no quociente de Rayleigh onde x_i são as coordenadas normais de $\bar{M}$ centrada em algum ponto $p_0 \in \bar{M}$ e $r = d(p_0, \cdot)$ é a distância a p_0 . Assuma, que M está numa bola convexa em torno de p_0 de raio menor ou igual $\frac{\pi}{4\sqrt{\delta}}$ se $\delta > 0$. Em particular $c_\delta \geq 0$. Seja $X := s_\delta(r)\text{grad}r$,

onde o gradiente é tomado em $\bar{M}$. Como, $|\text{grad } r| = 1$ temos

$$|X|^2 = s_\delta^2(r) \langle \text{grad } r, \text{grad } r \rangle = s_\delta^2(r),$$

logo

$$\begin{aligned} \lambda_1(M) \int_M s_\delta^2(r) &= \lambda_1(M) \int_M |X|^2 = \lambda_1(M) \int_M \sum_{i=1}^n \left(\frac{s_\delta(r)}{r} x_i \right)^2 \\ &\leq \int_M \sum_{i=1}^n \left| \text{grad}_M \frac{s_\delta(r)}{r} x_i \right|^2, \end{aligned} \quad (3.13)$$

e a desigualdade é pelo quociente de Rayleigh.

No caso $\delta > 0$

$$\lambda_1(M) \int_M \frac{(c_\delta(r) - c)^2}{\delta} \leq \int_M \frac{1}{\delta} |\text{grad}_M c_\delta(r)|^2. \quad (3.14)$$

Aqui grad_M denota o gradiente em M , isto é, a componente tangente do gradiente em $\bar{M}$. Note, que $\text{grad } c_\delta = -\delta X$, com efeito

$$\begin{aligned} \text{grad } c_\delta(r) &= \text{grad } s'_\delta(r) \\ &= s''_\delta(r) \text{grad } r \\ &= -\delta s_\delta \text{grad } r \\ &= -\delta X, \end{aligned}$$

e consequentemente $\text{grad}_M c_\delta = -\delta X^T$ onde T denota a parte tangente.

Pelo teorema de Rayleigh, as desigualdades (3.13) e (3.14) são válidas apenas se

$$\int_M \frac{c_\delta(r) - c}{\sqrt{\delta}} = \int_M \frac{s_\delta(r)}{r} x_i = 0.$$

Com esse objetivo definimos

$$P_f^\delta(y) = \frac{1}{\text{vol } M} \int_M \int_0^{r(y, f(x))} s_\delta(t) dt dx,$$

onde $f : M \rightarrow B_r(p) \subset \bar{M}$ é uma imersão isométrica da variedade compacta M numa bola convexa de $\bar{M}$ e $r(y, f(x))$ é a função distância de y a $f(x)$.

Para a próxima proposição, relembremos algumas definições:

Definição 3.2 Uma função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada convexa se para todo $a < b$ e $s \in (0, 1)$ temos

$$g((1-s)a + sb) \leq (1-s)g(a) + sg(b).$$

A função g é chamada estritamente convexa se a desigualdade é estrita. Uma função f sobre uma variedade Riemanniana M é (estritamente) convexa se para toda geodésica não trivial $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ a função $f \circ \gamma$ é (estritamente) convexa. Um subconjunto $A \subset M$ é chamado convexo se para quaisquer $p, q \in A$ existe uma única geodésica normalizada γ em M ligando p a q com $\gamma \subset A$.

Proposição 3.9 Se $K_{\bar{M}} \leq \delta$ e B é a bola convexa de raio $r \leq \frac{\pi}{4\sqrt{\delta}}$, então P_f^δ tem um único ponto mínimo em B , além disso, esse ponto mínimo está no interior de B .

Demonstração. Primeiramente calcularemos o gradiente de P_f^δ . Como

$$P_f^\delta(y) = \frac{1}{\text{vol}M} \int_M \int_0^{r(y, f(x))} s_\delta(t) dt dx,$$

usando o teorema fundamental do cálculo com a regra da cadeia e coordenadas normais com $y = \exp_p(y_1, \dots, y_n)$ e $f(x) = \exp_p(f_1(x), \dots, f_n(x))$ temos

$$r = r(y, f(x)) = \left(\sum_{i=1}^n (y_i - f_i(x))^2 \right)^{1/2}.$$

Pela equação (2.3) $\text{grad} P_f^\delta(y) = \sum_i^n \partial_i(P_f^\delta(y)) \partial_i$, assim temos que

$$\begin{aligned} \partial_i(P_f^\delta(y)) &= \frac{1}{\text{vol}M} \int_M s_\delta(r) \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n (y_i - f_i(x))^2 \right)^{\frac{1}{2}-1} \partial_i \left(\sum_{i=1}^n (y_i - f_i(x))^2 \right) dx \\ &= \frac{1}{\text{vol}M} \int_M s_\delta(r) \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n (y_i - f_i(x))^2 \right)^{-\frac{1}{2}} 2(y_i - f_i(x)) dx \\ &= \frac{1}{\text{vol}M} \int_M \frac{s_\delta(r)}{r} (y_i - f_i(x)) dx. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \text{grad} P_f^\delta(y) &= \sum_i^n \frac{1}{\text{vol}M} \int_M \frac{s_\delta(r)}{r} (y_i - f_i(x)) dx \partial_i \\ &= \frac{1}{\text{vol}M} \int_M \frac{s_\delta(r)}{r} \sum_i^n (y_i - f_i(x)) \partial_i dx. \end{aligned}$$

Identificando os vetores $\sum_i^n y_i \partial_i$ e $\sum_i^n f_i(x) \partial_i$ como pré-imagem da $\exp_y$ temos que

$$\sum_i^n y_i \partial_i = \exp_y^{-1}(y) = 0$$

e

$$\sum_i^n f_i(x) \partial_i = \exp_y^{-1}(f(x)).$$

Portanto,

$$\text{grad } P_f^\delta(y) = -\frac{1}{\text{vol}M} \int_M \frac{s_\delta(r)}{r} \exp_y^{-1}(f(x)) dx.$$

Agora, pela compacidade de B , temos que P_f^δ tem pelo menos um ponto mínimo em B .

Sendo

$$P_f^\delta(y) = \frac{1}{\text{vol}M} \int_M \int_0^{r(y,f(x))} s_\delta(t) dt dx,$$

seja

$$\mathcal{E}_{f(x)}(y) := \int_0^{r(y,f(x))} s_\delta(t) dt.$$

Então

$$\begin{aligned} \text{grad } \mathcal{E}_{f(x)}(y) &= s_\delta(r(y, f(x))) \cdot \text{grad } r(y, f(x)) \\ &= -\frac{s_\delta(r(y, f(x)))}{r(y, f(x))} \exp_y^{-1}(f(x)). \end{aligned}$$

Agora, para $X, Y \in \mathcal{X}(\bar{M})$ temos pela equação (2.5) e por (iii) da definição de conexão que

$$\begin{aligned} \text{Hess}_{\mathcal{E}_{f(x)}}(X, Y) &= \langle \nabla_X \text{grad } \mathcal{E}_{f(x)}, Y \rangle \\ &= \langle \nabla_X s_\delta(r) \text{grad } r, Y \rangle \\ &= \langle s_\delta(r) \nabla_X \text{grad } r + X(s_\delta(r)) \text{grad } r, Y \rangle \\ &= s_\delta(r) \langle \nabla_X \text{grad } r, Y \rangle + X(s_\delta(r)) \langle \text{grad } r, Y \rangle \\ &= s_\delta(r) \text{Hess} r + \langle \text{grad } s_\delta(r), X \rangle \langle \text{grad } r, Y \rangle \\ &= s_\delta(r) \text{Hess} r + s'_\delta(r) \langle \text{grad } r, X \rangle \langle \text{grad } r, Y \rangle \\ &\geq s_\delta(r) \frac{s'_\delta(r)}{s_\delta(r)} (\langle X, Y \rangle - \langle \text{grad } r, X \rangle \langle \text{grad } r, Y \rangle) + s'_\delta(r) \langle \text{grad } r, X \rangle \langle \text{grad } r, Y \rangle \\ &= s'_\delta(r) \langle X, Y \rangle, \end{aligned}$$

onde a desigualdade é devida ao teorema de comparação do hessiano, **Teorema 2.6**, e a equação (2.17).

Agora sejam γ uma geodésica normalizada em B e $\phi(t) = \mathcal{E}_{f(x)}(\gamma(t))$, então

$$\phi'(t) = \langle \text{grad } \mathcal{E}_{f(x)}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$$

e por (1.2)

$$\phi''(t) = \left\langle \frac{D}{dt} \text{grad } \mathcal{E}_{f(x)}(\gamma(t)), \gamma'(t) \right\rangle,$$

mas pelo item (iii) da **Proposição 1.1**

$$\begin{aligned} \phi''(t) &= \langle \nabla_{\gamma'(t)} \text{grad } \mathcal{E}_{f(x)}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \\ &= \text{Hess } \mathcal{E}_{f(x)}(\gamma(t))(\gamma'(t), \gamma'(t)) \\ &\geq s'_\delta(r) \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = c_\delta > 0, \end{aligned}$$

portanto $\mathcal{E}_{f(x)}$ é estritamente convexa em B , consequentemente P_f^δ também é, pois se γ é uma geodésica normalizada em B , então $\psi(t) = P_f^\delta(\gamma(t))$ é tal que

$$\psi''(t) = \frac{1}{\text{vol}M} \int_M \phi''(t) dx \geq 0.$$

Agora seja $\bar{y}$ o ponto mínimo de P_f^δ em B , observamos inicialmente que $\bar{y} \notin \partial B$, pois na ∂B o campo

$$\text{grad } P_f^\delta(y) = -\frac{1}{\text{vol}M} \int_M \frac{s_\delta(r)}{r} \exp_y^{-1}(f(x)) dx$$

aponta para dentro de B (observe que $\frac{s_\delta(r)}{r}$ é sempre positivo em B) e portanto o $\text{grad } P_f^\delta$ não se anula na ∂B , logo $\bar{y}$ está no interior de B . Para a unicidade, como $\psi''(t) > 0$ isso significa que $\psi'(t)$ é estritamente crescente, e portanto $\psi'(t)$ anula-se em um único ponto para o qual temos $\bar{y}$ como ponto mínimo de P_f^δ . ■

O ponto mínimo dado pela **Proposição 3.9** é chamado de centro de massa de M em $\bar{M}$.

Lema 3.3 $\int_M \frac{c_\delta(r)-c}{\sqrt{\delta}} = \int_M \frac{s_\delta(r)}{r} \cdot x_i = 0.$

Demonstração. Sendo $c = \frac{1}{\text{vol}M} \int_M c_\delta(r)$ constante, temos

$$\begin{aligned} \int_M (c_\delta(r) - c) &= \int_M c_\delta(r) - c \cdot \text{vol}M \\ &= \int_M c_\delta(r) - \frac{1}{\text{vol}M} \int_M c_\delta(r) \cdot \text{vol}M = 0. \end{aligned}$$

Para a segunda integral, temos pela **Proposição 3.9** que P_f^δ tem um único ponto mínimo $\bar{y}$ no interior de B e pela **Proposição 2.1** $\text{grad} P_f^\delta(\bar{y}) = 0$. Assim tomando um sistema de coordenadas normais $(y_1, \dots, y_n) = \exp_{\bar{y}}^{-1}(y)$ em $\bar{y}$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 = \text{grad} P_f^\delta(\bar{y}) &= -\frac{1}{\text{vol}M} \int_M \frac{s_\delta(r)}{r} \exp_{\bar{y}}^{-1}(f(x)) dx \\ &= -\frac{1}{\text{vol}M} \int_M \frac{s_\delta(r)}{r} (f_1(x), \dots, f_n(x)) dx \end{aligned}$$

onde r é a distância de $f(x)$ a $\bar{y}$. Portanto

$$\int_M \frac{s_\delta(r)}{r} f_i(x) dx_i = 0.$$

Como $f_i(x)$ é identificado com x_i , temos

$$\int_M \frac{s_\delta(r)}{r} x_i dx_i = 0.$$

■

O primeiro resultado que usaremos diretamente na demonstração dos **Teoremas 3.4** e **3.8** é o seguinte

Lema 3.4 (i) $\text{div}_M X \geq n \cdot c_\delta$,

(ii) $\text{div}_M X^T \geq n \cdot c_\delta + \langle X, \vec{H} \rangle$.

Se $K_M \equiv \delta$, então vale a igualdade em (i) e em (ii).

Demonstração.

(i) Seja $p \in M$ e $e_1, \dots, e_n \in T_p M$ uma base ortonormal. Agora, observe que

$$\begin{aligned} \text{div}_M X &= \text{div}_M (s_\delta \text{grad} r) = s_\delta \text{div}_M (\text{grad} r) + \langle \text{grad} s_\delta, \text{grad} r \rangle \\ &= s_\delta \text{div}_M (\text{grad} r) + \langle s'_\delta \text{grad} r, \text{grad} r \rangle \\ &= s_\delta \text{div}_M (\text{grad} r) + c_\delta |\text{grad} r|^2. \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_M(\operatorname{grad} r) &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \operatorname{grad} r, e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \operatorname{Hess} r(e_i, e_i) \geq \operatorname{Hess} r_\delta(\bar{e}_i, \bar{e}_i) \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n \frac{c_\delta(r_\delta)}{s_\delta(r_\delta)} (\langle \bar{e}_i, \bar{e}_i \rangle - \langle \operatorname{grad} r_\delta, \bar{e}_i \rangle \langle \operatorname{grad} r_\delta, \bar{e}_i \rangle) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{c_\delta(r_\delta)}{s_\delta(r_\delta)} (1 - \langle \operatorname{grad} r_\delta, \bar{e}_i \rangle^2) \\ &= (n - |\operatorname{grad} r_\delta|^2) \frac{c_\delta(r_\delta)}{s_\delta(r_\delta)}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde a primeira desigualdade é devida ao teorema de comparação do hessiano, **Teorema 2.6**, a igualdade (3.16) é devida ao **Teorema 2.7** e r_δ é a função distância r sobre a forma espacial de curvatura seccional δ . Portanto,

$$\operatorname{div}_M X \geq c_\delta(r_\delta)(n - |\operatorname{grad} r_\delta|^2) + c_\delta(r_\delta)|\operatorname{grad} r|^2 = nc_\delta. \quad (3.17)$$

(ii) Usando o **Lema 2.1**

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_M X^T &= \operatorname{div}_M X + \langle X, \vec{H} \rangle \\ &\geq n \cdot c_\delta + \langle X, \vec{H} \rangle. \end{aligned}$$

Se $K_M \equiv \delta$, então temos igualdade em (3.15), pelo **Teorema 2.6** e, consequentemente vale a igualdade em (3.17) e em (ii). ■

As provas dos **Teoremas 3.4** e **3.8** são inspiradas na prova de Reilly (o caso $\bar{M} = \mathbb{R}^n$) que essencialmente consiste em usar as funções coordenadas de $\mathbb{R}^n$ como funções teste no quociente de Rayleigh e aplicar a fórmula de Minkowski. De fato, pelo teorema de Rayleigh, **Teorema 3.1**

$$\lambda_1(M) \cdot \int_M f^2 \leq \int_M |\operatorname{grad} f|^2,$$

para toda função suficientemente suave f com $\int_M f = 0$. Assim se 0 é o centro de massa de $M \subset \mathbb{R}^n$ e x_i são as funções coordenadas, então

$$\lambda_1 \int_M |X|^2 = \lambda_1 \int_M \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq \int_M \sum_{i=1}^n |\operatorname{grad}_M x_i|^2 = n \cdot \operatorname{vol} M, \quad (3.18)$$

onde X é o campo de vetores posição. Sendo $\bar{M} = \mathbb{R}^n$ temos que $K_{\mathbb{R}^n} \equiv 0$, pelo **Lema 1.2**, e

a equação (3.12) se torna $y'' = 0$ cuja solução satisfazendo as condições iniciais é $s_0 = t$, assim $c_0 = 1$. As desigualdades do **Lema 3.4** se tornam igualdades, isto é $\operatorname{div}_M X = nc_0 = n$ e

$$\operatorname{div}_M X = \operatorname{div}_M X^T - \langle \vec{H}, X \rangle$$

daí,

$$n \operatorname{vol} M = \int_M \operatorname{div}_M X = \int_M \operatorname{div}_M X^T - \int_M \langle \vec{H}, X \rangle,$$

pelo teorema da divergência, a primeira parcela do lado direito da segunda igualdade acima é nula, logo

$$\begin{aligned} n \operatorname{vol} M &= - \int_M \langle \vec{H}, X \rangle \\ &\leq \int_M |\vec{H}| |X| \end{aligned} \tag{3.19}$$

a equação (3.19) é conhecida como fórmula de Mikowski, assim

$$\begin{aligned} (n \operatorname{vol} M)^2 &\leq \left(\int_M |\vec{H}| |X| \right)^2 \\ &\leq \int_M |\vec{H}|^2 \int_M |X|^2 \\ &= n^2 \int_M H^2 \int_M |X|^2 \end{aligned}$$

multiplicando por λ_1 e usando (3.18) obtemos,

$$\begin{aligned} \lambda_1 (n \operatorname{vol} M)^2 &\leq n^2 \int_M H^2 \lambda_1 \int_M |X|^2 \\ &= n^3 \operatorname{vol} M \int_M H^2 \end{aligned}$$

simplificando obtemos,

$$\lambda_1 \leq \frac{n}{\operatorname{vol} M} \int_M H^2.$$

O próximo lema é uma generalização da fórmula de Minkowski (Note, que $c_\delta \equiv 1$ se $\delta = 0$). Segue integrando (ii) do **Lema 3.4** e pela a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Lema 3.5 $\int_M c_\delta \leq -\frac{1}{n} \int_M \langle X, \vec{H} \rangle \leq \int_M H s_\delta$, se $K_M \equiv \delta$ a igualdade vale na primeira desigualdade.

Demonstração. Como $X^T \perp \vec{H}$, então pelo teorema da divergência e (ii) do **Lema 3.4** temos,

$$0 = \int_{\partial M} \langle X^T, \vec{H} \rangle = \int_M \operatorname{div}_M X^T \geq \int_M n c_\delta + \int_M \langle X, \vec{H} \rangle \quad (3.20)$$

portanto,

$$\begin{aligned} \int_M c_\delta &\leq -\frac{1}{n} \int_M \langle X, \vec{H} \rangle \\ &\leq \left| -\frac{1}{n} \int_M \langle X, \vec{H} \rangle \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \int_M |X| |\vec{H}| \\ &= \int_M H s_\delta. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Se $K_M \equiv \delta$, então vale a igualdade em (ii) do **Lema 3.4**, logo vale a igualdade em (3.20), e consequentemente temos a igualdade em (3.21). ■

Lema 3.6 $\delta \int_M |X^T|^2 \geq n \int_M c_\delta^2 - n \int_M H s_\delta c_\delta$.

Demonstração. Se $\delta = 0$ a desigualdade se reduz ao **Lema 3.5**, pois neste caso $c_\delta = 1$, consequentemente

$$\int_M 1 \leq \int_M H s_\delta,$$

que é o **Lema 3.5** para $\delta = 0$. Se $\delta \neq 0$, $X^T = \operatorname{grad}_M f$ onde $f = -\frac{1}{\delta} c_\delta$, então pela fórmula de Green, temos

$$\begin{aligned} \delta \int_M |X^T|^2 &= -\delta \int_M f \Delta f = \int_M -\delta f \operatorname{div}_M X^T = \int_M c_\delta \operatorname{div}_M X^T \\ &\geq n \int_M c_\delta^2 + \int_M c_\delta \langle X, \vec{H} \rangle \\ &\geq n \int_M c_\delta^2 - \int_M c_\delta |X| |\vec{H}| \\ &= n \int_M c_\delta^2 - n \int_M H s_\delta c_\delta, \end{aligned}$$

pelo **Lema 3.4** e a desigualdade de Cauchy-Schwarz. ■

Lema 3.7 $\sum_{i=1}^n \left| \operatorname{grad}_M \frac{s_\delta(r)}{r} x_i \right|^2 + \delta |X^T|^2 \leq n$.

Demonstração. Seja $v := d(\exp_{p_0})_q(\tilde{v}) \in T_p \bar{M}$ ortogonal ao $\operatorname{grad} r$, onde $\tilde{v} \in T_{p_0} \bar{M}$, $q = r\gamma'(0)$ com $\gamma = \exp_{p_0}$ uma geodésica normalizada. Pelo **Lema 1.4**, $v = J(r) = d(\exp_{p_0})_q(rJ'(0))$, onde $J'(0) = \frac{\tilde{v}}{|\tilde{v}|}$, é um campo de Jacobi ao longo da geodésica γ tal que $\langle J, \gamma' \rangle = 0$. Como $K_{\bar{M}} \leq \delta$,

então na forma espacial de curvatura seccional δ o campo de Jacobi é dado por $J_\delta(r) = s_\delta(r)w(r)$ com $\langle \gamma'_\delta(r), w(r) \rangle = 0$ para todo r , e w é um campo paralelo e unitário conforme o **Exemplo 4**.

Agora observamos que, J e J_δ satisfazem as hipóteses do **Teorema 1.13 (Rauch)**: observando que J é linear, vem que $J(0) = 0$, por sua vez $J_\delta(0) = s_\delta(0)w(0) = 0$, lembre que $s_\delta(0) = 0$, assim $J(0) = J_\delta(0) = 0$ e $J'_\delta(0) = s'_\delta(0)w(0) = w(0)$, logo $0 = \langle J, \gamma' \rangle = \langle \gamma'_\delta(0), w(0) \rangle = \langle \gamma'_\delta(0), J'_\delta(0) \rangle$ pois $s'_\delta(0) = 1$, finalmente, sendo w unitário temos

$$1 = |w(0)| = |J'_\delta(0)| = |J'(0)|.$$

Portanto, pelo **Teorema 1.13**

$$|J_\delta(r)|^2 \leq |J(r)|^2,$$

por outro lado, $|J_\delta(r)|^2 = s_\delta^2(r)$ e usando o Lema de Gauss $|J(r)|^2 = \frac{r^2}{|\tilde{v}|^2} |\tilde{v}|^2 = \frac{r^2}{|\tilde{v}|^2} |v|^2$, logo

$$\frac{s_\delta^2(r)}{r^2} |\tilde{v}|^2 \leq |v|^2. \quad (3.22)$$

Para o que segue, seja U o aberto de $\bar{M}$ no qual está definida

$$\begin{aligned} \exp_{p_0}^{-1} : U &\rightarrow T_{p_0}\bar{M} \\ u &\rightarrow (x_1(u), \dots, x_n(u)). \end{aligned}$$

Seja π_i a projeção sobre a i -coordenada, então para $v = d(\exp_{p_0})_q(\tilde{v})$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle \text{grad } x_i, v \rangle \langle \text{grad } x_i, w \rangle &= \sum_{i=1}^n v(x_i) w(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^n d(\exp_{p_0})_q(\tilde{v}(x_i)) d(\exp_{p_0})_q(\tilde{w}(x_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n \tilde{v}(x_i \circ \exp_{p_0}) \tilde{w}(x_i \circ \exp_{p_0}) \\ &= \sum_{i=1}^n \tilde{v}(\pi_i \circ \exp_{p_0}^{-1} \circ \exp_{p_0}) \tilde{w}(\pi_i \circ \exp_{p_0}^{-1} \circ \exp_{p_0}) \\ &= \sum_{i=1}^n \pi_i(\tilde{v}) \pi_i(\tilde{w}) = \langle \tilde{v}, \tilde{w} \rangle. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Agora, se tomarmos $v = w$ temos

$$\frac{s_\delta^2(r)}{r^2} \sum_{i=1}^n \langle \text{grad } x_i, v \rangle^2 = \frac{s_\delta^2(r)}{r^2} |\tilde{v}|^2 \leq |v|^2, \quad (3.24)$$

observe que a desigualdade (3.24) vale se $v \perp \text{grad } r$.

Por outro lado, sabemos que se $\gamma(t) = \exp_{p_0}(t\tilde{w})$, então

$$\gamma'(t) = d(\exp_{p_0})_{t\tilde{w}}(\tilde{w}) = \text{grad } r(\gamma(t))$$

pelo **Teorema 2.3**. Tomando $w = \text{grad } r$ com $v \perp \text{grad } r$ e usando o Lema de Gauss em (3.23) temos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle \text{grad } x_i, v \rangle \langle \text{grad } x_i, \text{grad } r \rangle &= \langle \tilde{v}, \tilde{w} \rangle \\ &= \langle d(\exp_{p_0})_{t\tilde{w}}(\tilde{v}), d(\exp_{p_0})_{t\tilde{w}}(\tilde{w}) \rangle \\ &= \langle v, \text{grad } r \rangle = 0, \end{aligned}$$

isto é,

$$\sum_{i=1}^n \langle \text{grad } x_i, v \rangle \langle \text{grad } x_i, \text{grad } r \rangle = 0. \quad (3.25)$$

Em particular tomando $v = w = \text{grad } r$ em (3.23) temos

$$\sum_{i=1}^n \langle \text{grad } x_i, \text{grad } r \rangle^2 = \langle \tilde{w}, \tilde{w} \rangle = 1, \quad (3.26)$$

onde $d(\exp_{p_0})_q(\tilde{w}) = \text{grad } r$.

Como $r(\exp_{p_0}(v)) = |v|$, então

$$r(u)^2 = |\exp_{p_0}^{-1}(u)|^2 = \left| \sum_{i=1}^n x_i(u) e_i \right|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

portanto,

$$\text{grad } r^2 = \sum_{i=1}^n \text{grad } x_i^2 \Rightarrow 2r \text{grad } r = \sum_{i=1}^n 2x_i \text{grad } x_i$$

logo

$$r \text{grad } r = \sum_{i=1}^n x_i \text{grad } x_i. \quad (3.27)$$

Agora seja

$$\sum_{i=1}^n \left| \text{grad}_M \left(\frac{s\delta(r)}{r} x_i \right) \right|^2 = \mathcal{J},$$

então

$$\begin{aligned}
\mathcal{J} &= \sum_{i=1}^n \left| \frac{s_\delta(r)}{r} \text{grad}_M x_i + x_i \text{grad}_M \left(\frac{s_\delta^2(r)}{r^2} \right) \right|^2 \\
&= \sum_{i=1}^n \left[\frac{s_\delta^2(r)}{r^2} |\text{grad}_M x_i|^2 + 2 \frac{s_\delta(r)}{r} x_i \left\langle \text{grad}_M x_i, \text{grad}_M \left(\frac{s_\delta(r)}{r} \right) \right\rangle + x_i^2 \left| \text{grad}_M \left(\frac{s_\delta(r)}{r} \right) \right|^2 \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{s_\delta^2(r)}{r^2} |\text{grad}_M x_i|^2 + 2 \frac{s_\delta(r)}{r} \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \text{grad}_M x_i, \text{grad}_M \left(\frac{s_\delta(r)}{r} \right) \right\rangle + r^2 \left| \text{grad}_M \left(\frac{s_\delta(r)}{r} \right) \right|^2
\end{aligned}$$

na segunda parcela da última igualdade, usando (3.27) obtemos,

$$\mathcal{J} = \sum_{i=1}^n \frac{s_\delta^2(r)}{r^2} |\text{grad}_M x_i|^2 + 2s_\delta(r) \left\langle \text{grad}_M r, \text{grad}_M \left(\frac{s_\delta(r)}{r} \right) \right\rangle + r^2 \left| \text{grad}_M \left(\frac{s_\delta(r)}{r} \right) \right|^2.$$

Mas

$$\begin{aligned}
\text{grad}_M \left(\frac{s_\delta(r)}{r} \right) &= \frac{r \text{grad}_M s_\delta(r) - s_\delta(r) \text{grad}_M r}{r^2} \\
&= \frac{rc_\delta(r) \text{grad}_M r - s_\delta(r) \text{grad}_M r}{r^2} \\
&= \frac{rc_\delta(r) - s_\delta(r)}{r^2} \text{grad}_M r
\end{aligned}$$

logo,

$$\left| \text{grad}_M \left(\frac{s_\delta(r)}{r} \right) \right|^2 = \left(\frac{rc_\delta(r) - s_\delta(r)}{r^2} \right)^2 |\text{grad}_M r|^2$$

e

$$\left\langle \text{grad}_M r, \text{grad}_M \left(\frac{s_\delta(r)}{r} \right) \right\rangle = \frac{rc_\delta(r) - s_\delta(r)}{r^2} |\text{grad}_M r|^2.$$

Consequentemente

$$\mathcal{J} = \sum_{i=1}^n \frac{s_\delta^2(r)}{r^2} |\text{grad}_M x_i|^2 + \frac{2rs_\delta(r)c_\delta(r) - 2s_\delta^2(r)}{r^2} |\text{grad}_M r|^2 + \frac{(rc_\delta(r) - s_\delta(r))^2}{r^2} |\text{grad}_M r|^2.$$

Como

$$\delta |X^T|^2 = \delta |s_\delta(r) \text{grad}_M r|^2 = \delta s_\delta^2(r) |\text{grad}_M r|^2,$$

fazendo,

$$\sum_{i=1}^n \left| \text{grad}_M \left(\frac{s_\delta(r)}{r} x_i \right) \right|^2 + \delta |X^T|^2 = \mathcal{J}$$

vem que

$$\begin{aligned}
\mathcal{J} &= \sum_{i=1}^n \frac{s_\delta^2(r)}{r^2} |\text{grad}_M x_i|^2 + \frac{2rs_\delta(r)c_\delta(r) - 2s_\delta^2(r)}{r^2} |\text{grad}_M r|^2 + \left(\frac{rc_\delta(r) - s_\delta(r)}{r} \right)^2 |\text{grad}_M r|^2 + \\
&\quad + \delta s_\delta^2(r) |\text{grad}_M r|^2 \\
&= \frac{s_\delta^2(r)}{r^2} \sum_{i=1}^n |\text{grad}_M x_i|^2 + \left[\frac{2rs_\delta(r)c_\delta(r) - 2s_\delta^2(r)}{r^2} + \left(\frac{rc_\delta(r) - s_\delta(r)}{r} \right)^2 + \delta s_\delta^2(r) \right] |\text{grad}_M r|^2 \\
&= \frac{s_\delta^2(r)}{r^2} \sum_{i=1}^n |\text{grad}_M x_i|^2 + \\
&\quad + \left[\frac{2rs_\delta(r)c_\delta(r) - 2s_\delta^2(r) + r^2 c_\delta^2(r) - 2rc_\delta(r)s_\delta(r) + s_\delta^2(r) + r^2 \delta s_\delta^2(r)}{r^2} \right] |\text{grad}_M r|^2, \\
&= \frac{s_\delta^2(r)}{r^2} \sum_{i=1}^n |\text{grad}_M x_i|^2 + \left[\frac{r^2(c_\delta^2(r) + \delta s_\delta^2(r)) - s_\delta^2(r)}{r^2} \right] |\text{grad}_M r|^2 \\
&= \frac{s_\delta^2(r)}{r^2} \sum_{i=1}^n |\text{grad}_M x_i|^2 + \left(1 - \frac{s_\delta^2(r)}{r^2} \right) |\text{grad}_M r|^2
\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}
\mathcal{J} &= \frac{s_\delta^2(r)}{r^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle \text{grad}_M x_i, e_j \rangle^2 + \left(1 - \frac{s_\delta^2(r)}{r^2} \right) |\text{grad}_M r|^2 \\
&\leq n - 1 + \frac{s_\delta^2(r)}{r^2} \sum_{i=1}^n (\langle \text{grad}_M x_i, \lambda \text{grad}_M r \rangle + \langle \text{grad}_M x_i, \mu e_n^* \rangle)^2 + \left(1 - \frac{s_\delta^2(r)}{r^2} \right) |\text{grad}_M r|^2
\end{aligned}$$

onde $e_1, \dots, e_n \in T_p M$ é uma base ortonormal tal que $e_n = \lambda \text{grad}_M r + \mu e_n^*$ está na direção do $\text{grad}_M r$ com $\langle \text{grad}_M r, e_n^* \rangle = 0$, consequentemente $\lambda^2 + \mu^2 = 1$ e $\langle e_n, \text{grad}_M r \rangle = \lambda$, e a primeira parcela da desigualdade acima é devida a (3.24), pois como $e_i \perp e_n$ para todo $i = 1, \dots, n-1$ e e_n está na direção de $\text{grad}_M r$ segue que $e_i \perp \text{grad}_M r$ para todo $i = 1, \dots, n-1$.

Como

$$e_n = \frac{\text{grad}_M r}{|\text{grad}_M r|}$$

temos

$$\langle \text{grad}_M r, \text{grad}_M r \rangle = \lambda |\text{grad}_M r|$$

mas

$$\langle \text{grad}_M r, \text{grad}_M r \rangle = \langle \text{grad}_M r, \text{grad}_M r + (\text{grad}_M r)^\perp \rangle = |\text{grad}_M r|^2$$

assim

$$|\text{grad}_M r| = \lambda \Rightarrow |\text{grad}_M r|^2 = \lambda^2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &\leq n - 1 + \frac{s_\delta^2(r)}{r^2} \sum_{i=1}^n (\langle \text{grad} x_i, \lambda \text{grad} r \rangle + \langle \text{grad} x_i, \mu e_n^* \rangle)^2 + \left(1 - \frac{s_\delta^2(r)}{r^2}\right) \lambda^2 \\ &= n - 1 + \frac{s_\delta^2(r)}{r^2} \sum_{i=1}^n [\lambda^2 \langle \text{grad} x_i, \text{grad} r \rangle^2 + 2\lambda\mu \langle \text{grad} x_i, \text{grad} r \rangle \langle \text{grad} x_i, e_n^* \rangle + \\ &\quad + \mu^2 \langle \text{grad} x_i, e_n^* \rangle^2] + \left(1 - \frac{s_\delta^2(r)}{r^2}\right) \lambda^2 \end{aligned}$$

como e_n^* é ortogonal ao $\text{grad} r$, então por (3.25)

$$\langle \text{grad} x_i, \text{grad} r \rangle \langle \text{grad} x_i, e_n^* \rangle = 0$$

e usando (3.26) na primeira parcela do somatório obtemos $\lambda^2 \frac{s_\delta^2(r)}{r^2}$; usando (3.24), a última parcela do somatório é menor ou igual a μ^2 . Portanto,

$$\mathcal{J} \leq n - 1 + \lambda^2 \frac{s_\delta^2(r)}{r^2} + \mu^2 + \left(1 - \frac{s_\delta^2(r)}{r^2}\right) \lambda^2 = n.$$

■

Lema 3.8 Se $\delta \leq 0$, então

$$\int_M s_\delta \int_M s_\delta c_\delta \leq \int_M s_\delta^2 \int_M c_\delta.$$

Demonstração. Primeiro observamos que de $c_\delta^2 = 1 - \delta s_\delta^2$, temos que

$$\begin{aligned} \int_M s_\delta^2 \int_M c_\delta^2 &= \int_M s_\delta^2 \int_M (1 - \delta s_\delta^2) \\ &= \text{vol} M \int_M s_\delta^2 - \delta \left(\int_M s_\delta^2 \right)^2, \end{aligned} \tag{3.28}$$

e pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\int_M s_\delta \leq \left(\int_M 1 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_M s_\delta^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

logo

$$\left(\int_M s_\delta \right)^2 \leq \text{vol} M \int_M s_\delta^2. \tag{3.29}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\left(\int_M s_\delta \int_M s_\delta c_\delta \right)^2 &= \left(\int_M s_\delta \right)^2 \left(\int_M s_\delta c_\delta \right)^2 \\
&\leq \left(\int_M s_\delta \right)^2 \left(\int_M |s_\delta c_\delta| \right)^2 \\
&\leq \left(\int_M s_\delta \right)^2 \int_M s_\delta^2 \int_M c_\delta^2 \\
&= \text{vol}M \left(\int_M s_\delta \right)^2 \int_M s_\delta^2 - \delta \left(\int_M s_\delta \right)^2 \left(\int_M s_\delta^2 \right)^2 \\
&\leq \left(\int_M s_\delta^2 \right)^2 \left((\text{vol}M)^2 - \delta \left(\int_M s_\delta \right)^2 \right) \leq \left(\int_M s_\delta^2 \int_M c_\delta \right)^2.
\end{aligned}$$

Observe que na segunda igualdade usamos (3.28) e na terceira desigualdade usamos (3.29), enquanto a última desigualdade é uma consequência de $|\int_M f| \leq \int_M |f|$, onde $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dada por $f(p) = (1, \sqrt{|\delta|} s_\delta(r))$. De fato,

$$\begin{aligned}
\left| \int_M (1, \sqrt{|\delta|} s_\delta(r)) \right| &= \left| (\text{vol}M, \sqrt{|\delta|} \int_M s_\delta(r)) \right| \\
&= \sqrt{(\text{vol}M)^2 + |\delta| \left(\int_M s_\delta(r) \right)^2} \\
&= \sqrt{(\text{vol}M)^2 - \delta \left(\int_M s_\delta(r) \right)^2} \\
&\leq \int_M \sqrt{1 + |\delta| s_\delta^2(r)} \\
&= \int_M \sqrt{1 - \delta s_\delta^2(r)} = \int_M c_\delta(r)
\end{aligned}$$

logo,

$$(\text{vol}M)^2 - \delta \left(\int_M s_\delta(r) \right)^2 \leq \left(\int_M c_\delta(r) \right)^2.$$

■

Agora, depois dessa preparação iniciamos com as provas dos **Teoremas 3.4 e 3.8**:

Demonstração. Se $\delta = 0$, então $c_\delta = 1$ e o **Lema 3.7** se reduz a

$$\sum_{i=1}^n \left| \text{grad}_M \frac{s_\delta^2(r)}{r} x_i \right|^2 \leq n.$$

Usando (3.13) temos,

$$\begin{aligned}\lambda_1(M) \int_M s_\delta^2(r) &\leq \int_M \sum_{i=1}^n \left| \text{grad}_M \frac{s_\delta^2(r)}{r} x_i \right|^2 \\ &\leq \int_M n = n \text{vol}M = n \int_M c_\delta\end{aligned}$$

pelo **Lema 3.5**

$$\begin{aligned}&\leq n \int_M H s_\delta = \frac{n}{\text{vol}M} \int_M c_\delta \int_M H s_\delta \\ &\leq \frac{n}{\text{vol}M} \left(\int_M H s_\delta \right)^2 \\ &\leq \frac{n}{\text{vol}M} \int_M H^2 \int_M s_\delta^2,\end{aligned}$$

onde a última desigualdade é devida a Cauchy-Schwarz . Portanto,

$$\lambda_1(M) \leq \frac{n}{\text{vol}M} \int_M H^2.$$

Se $\delta > 0$ usaremos $\frac{s_\delta(r)}{r} x_i$ e $\frac{c_\delta(r)-c}{\sqrt{\delta}}$, com $c := \frac{1}{\text{vol}M} \int_M c_\delta(r)$, como funções teste. Então, usando que $|\text{grad}_M c_\delta(r)|^2 = \delta^2 |X^T|^2$, (3.13) e (3.14), temos

$$\lambda_1(M) \int_M \left(s_\delta^2(r) + \frac{(c_\delta(r)-c)^2}{\delta} \right) \leq \int_M \sum_{i=1}^n \left| \text{grad}_M \frac{s_\delta(r)}{r} x_i \right|^2 + \int_M \frac{1}{\delta} |\text{grad}_M c_\delta(r)|^2$$

pelo **Lema 3.7**

$$\leq \int_M (n - \delta |X^T|^2) + \int_M \delta |X^T|^2 = n \text{vol}M.$$

Agora observe que

$$\begin{aligned}\int_M \left(s_\delta^2(r) + \frac{(c_\delta(r)-c)^2}{\delta} \right) &= \int_M \frac{\delta s_\delta^2(r) + c_\delta^2(r) - 2c_\delta(r)c + c^2}{\delta} \\ &= \int_M \frac{1 - 2c_\delta(r)c + c^2}{\delta} \\ &= \int_M \frac{1+c^2}{\delta} - \frac{2c}{\delta} \int_M c_\delta(r) \\ &= \frac{1+c^2}{\delta} \text{vol}M - \frac{2c^2}{\delta} \text{vol}M \\ &= \frac{1-c^2}{\delta} \text{vol}M.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lambda_1(M)(1 - c^2) \leq n\delta.$$

Agora

$$\begin{aligned} (1 - c^2) \left(1 + \frac{1}{\delta \text{vol} M} \int_M H^2 \right) &= 1 + \frac{1}{\delta \text{vol} M} \int_M H^2 - c^2 - \frac{c^2}{\delta \text{vol} M} \int_M H^2 \\ &= 1 + \frac{1}{\delta \text{vol} M} \int_M H^2 - \frac{1}{(\text{vol} M)^2} \left(\int_M c_\delta \right)^2 - \\ &\quad - \frac{1}{\delta (\text{vol} M)^3} \left(\int_M c_\delta \right)^2 \int_M H^2 \end{aligned}$$

pelo **Lema 3.5**

$$\begin{aligned} &\geq 1 + \frac{1}{\delta \text{vol} M} \int_M H^2 - \frac{1}{(\text{vol} M)^2} \left(\int_M H s_\delta \right)^2 - \\ &\quad - \frac{1}{\delta (\text{vol} M)^3} \left(\int_M c_\delta \right)^2 \int_M H^2 \end{aligned} \quad (3.30)$$

por Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} (1 - c^2) \left(1 + \frac{1}{\delta \text{vol} M} \int_M H^2 \right) &\geq 1 + \frac{1}{\delta \text{vol} M} \int_M H^2 - \frac{1}{(\text{vol} M)^2} \int_M H^2 \int_M s_\delta^2 - \\ &\quad - \frac{1}{\delta (\text{vol} M)^2} \int_M c_\delta^2 \int_M H^2, \end{aligned} \quad (3.31)$$

logo

$$\begin{aligned} (1 - c^2) \left(1 + \frac{1}{\delta \text{vol} M} \int_M H^2 \right) &\geq 1 + \int_M H^2 \left(\frac{1}{\delta \text{vol} M} - \frac{1}{(\text{vol} M)^2} \int_M s_\delta^2 - \frac{1}{\delta (\text{vol} M)^2} \int_M c_\delta^2 \right) \\ &= 1 + \int_M H^2 \left(\frac{1}{\delta \text{vol} M} - \frac{1}{\delta (\text{vol} M)^2} \int_M (\delta s_\delta^2 + c_\delta^2) \right) \\ &= 1 + \int_M H^2 \left(\frac{1}{\delta \text{vol} M} - \frac{1}{\delta (\text{vol} M)^2} \text{vol} M \right) = 1. \end{aligned}$$

Portanto

$$\lambda_1(M) \leq n\delta \left(1 + \frac{1}{\delta \text{vol} M} \int_M H^2 \right) = n\delta + \frac{n}{\text{vol} M} \int_M H^2.$$

Se vale a igualdade, então na demonstração acima todas as desigualdades se tornam igualdades, em particular, a igualdade em (3.30) implica igualdade no **Lema 3.5** e por Cauchy-Schwarz temos que $X = s_\delta \text{grad} r$ é múltiplo de $\vec{H}$, o vetor curvatura média de M em $\bar{M}$, isso implica que $\text{grad}_M r = 0$.

Agora seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{2}r(x)^2$, então para $Y \in \mathcal{X}(M)$ temos

$$\begin{aligned} Yf &= Y\left(\frac{1}{2}r^2\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot r \cdot Y(r) \end{aligned}$$

equivalentemente

$$\langle \text{grad}_M f, Y \rangle = r \langle \text{grad}_M r, Y \rangle$$

assim

$$\text{grad}_M f = r \text{grad}_M r = 0$$

logo, f é constante em M , e isso significa que M está contida em uma esfera. Agora, seja $\mathbb{S}$ a esfera de $\bar{M}$ tal que $M \subset \mathbb{S}$. Sejam α a segunda forma fundamental de M em $\bar{M}$, $\alpha_{\mathbb{S}}$ a segunda forma fundamental de M em $\mathbb{S}$ e $\bar{\alpha}$ a segunda forma fundamental de $\mathbb{S}$ em $\bar{M}$. Analogamente como feito para obter (3.11) obtemos que

$$\alpha = \alpha_{\mathbb{S}} + \bar{\alpha}$$

e observe que $\alpha_{\mathbb{S}} \in T\mathbb{S}$ e $\bar{\alpha} \in T\mathbb{S}^{\perp}$, consequentemente, se $e_1, \dots, e_n \in T_p M$ é uma base ortonormal, então

$$\eta = \vec{H}_{\mathbb{S}} + \vec{H}, \quad (3.32)$$

onde $\vec{H}_{\mathbb{S}}$ é o vetor curvatura média de M em $\mathbb{S}$ e $\vec{H} = \sum_{i=1}^n \bar{\alpha}(e_i, e_i)$, e é claro que $\vec{H}_{\mathbb{S}} \in T\mathbb{S}$ e $\vec{H} \in T\mathbb{S}^{\perp}$. No entanto, sendo $\vec{H}$ múltiplo de $X = s_{\delta}(r)\text{grad} r$ que é ortogonal a $T\mathbb{S}$ segue que $\eta \equiv 0$ e, portanto M é mínima em $\mathbb{S}$.

Agora se $\delta < 0$, observamos primeiro que de $c_{\delta}^2 + \delta s_{\delta}^2 = 1$, obtemos

$$\delta \int_M s_{\delta}^2 = \text{vol} M - \int_M c_{\delta}^2.$$

Novamente, usando (3.13) temos

$$\lambda_1(M) \int_M s_{\delta}^2(r) \leq \int_M \sum_{i=1}^n \left| \text{grad}_M \frac{s_{\delta}^2(r)}{r} x_i \right|^2$$

pelo **Lema 3.7**

$$\leq \int_M (n - \delta |X^T|^2) = n \operatorname{vol} M - \delta \int_M |X^T|^2$$

pelo **Lema 3.6**

$$\begin{aligned} &\leq n \operatorname{vol} M - n \int_M c_\delta^2 + n \int_M H s_\delta c_\delta \\ &= n \left(\operatorname{vol} M - \int_M c_\delta^2 \right) + n \int_M H s_\delta c_\delta \\ &= n \delta \int_M s_\delta^2 + n \int_M H s_\delta c_\delta \\ &\leq n \delta \int_M s_\delta^2 + n \max H \int_M s_\delta c_\delta \end{aligned}$$

pelo **Lema 3.8**

$$\leq n \delta \int_M s_\delta^2 + n \max H \int_M s_\delta^2 \times \frac{\int_M c_\delta}{\int_M s_\delta}$$

pelo **Lema 3.5**

$$\begin{aligned} &\leq n \delta \int_M s_\delta^2 + n \max H \int_M s_\delta^2 \times \frac{\int_M H s_\delta}{\int_M s_\delta} \\ &\leq n \delta \int_M s_\delta^2 + n (\max H)^2 \int_M s_\delta^2 \\ &= n \delta \int_M s_\delta^2 + n \max H^2 \int_M s_\delta^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lambda_1(M) \leq n \delta + n \max H^2,$$

e assim fica provado o resultado.

■

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BLEECKER, D.; WEINER, L. Extrinsic bounds on λ_1 of Δ on a compact manifold. Birkhäuser, **Commentarii Mathematici Helvetici**, n. 51, p. 601-609, 1976.
- [2] BREDON, G. **Topology and Geometry**. New York, Springer-Verlag, v. 139. 1993. Graduate Texts in Mathematics.
- [3] CHOW, B.; LU, P.; NI, L. **Hamilton's Ricci Flow**. Beijing, Science Press, v. 77. 2006.
- [4] CHAVEL, I. **Eigenvalues in Riemannian Geometry**. New York, Academic Press, 1984.
- [5] CARMO, M. **Geometria Riemanniana**. 4 ed. Rio de Janeiro, IMPA, 2008. Projeto Euclides.
- [6] ESCOBAR, J. **Topics in PDE's and Differential Geometry**. Goiânia, Ed. da UFG, 2002. XII Escola de Geometria Diferencial.
- [7] HEINTZE, E. Extrinsic Upper Bounds for λ_1 . **Mathematische Annalen**, Augsburg, n. 14, p. 389-402, 1988.
- [8] NASH, J. The imbedding problem for Riemannian manifolds. **Ann. of Math**, U.S.A, v. 63, n. 1, p. 20-63, 1956.
- [9] LEE, J. **Introduction to Smooth Manifolds**. Seattle, Springer, v. 218. 2000. Graduate Texts in Mathematics.
- [10] MASSEY, W. **Algebraic Topology: An Introduction**. New York, Springer-Verlag, v. 56. 1977. Graduate texts in Mathematics.
- [11] MISCHENKO, A.; FOMENKO, A. **A Course of Differential Geometry and Topology**. Moscow, Mir Publishers, 1988.
- [12] YANG, P.; YAU, S. Eigenvalues of the Laplacian of Compact Riemann Surfaces and Minimal Submanifolds. **Ann. Scuola Norm**, Pisa, n. 1, p. 55-63, 1980.