

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA UFBA-UFAL

GREGÓRIO MANOEL DA SILVA NETO

**Hipersuperfícies Estáveis e Fórmula de
Monotonicidade Envolvendo Curvatura
Escalar em Espaços de Curvatura
Seccional Limitada**

Tese de Doutorado

Maceió
2014

GREGÓRIO MANOEL DA SILVA NETO

**Hipersuperfícies Estáveis e Fórmula de Monotonicidade
Envolvendo Curvatura Escalar em Espaços de Curvatura
Seccional Limitada**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática UFBA-UFAL do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Orientador: *Prof. Dr. Hilário Alencar da Silva*

Maceió
2014

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Maria Auxiliadora G. da Cunha

S586h Silva Neto, Gregório Manoel da.
Hipersuperfícies estáveis e fórmula de monotonicidade envolvendo curvatura escalar em espaços de curvatura seccional limitada / Gregório Manoel da Silva Neto. – 2014.
64 f. : il.

Orientador: Hilário Alencar da Silva.
Tese (Doutorado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas.
Instituto de Matemática. Maceió, 2014.

Bibliografia: f. 60-62.
Apêndice: f. 63.
Índice: f. 64.

1. Estabilidade . 2. Curvatura escalar. 3. Gráficos. 4. Volume curvatura de Gauss-Kronecker. 5. Curvatura média. 6. Vizinhança tubular. 7. Monotonicidade. 8. Desigualdade de Poincaré. 9. Valor médio. 10. Desigualdade isoperimétrica.
I. Título.

CDU: 514.464.27

*Ao meu orientador, professor Dr. Hilário Alencar, aos
meus pais, irmão e amigos.*

Agradecimentos

Ao professor Dr. Hilário Alencar, pela sua amizade e apoio, por ser muito mais que um orientador, pelos conselhos e pela paciência, mas acima de tudo pelo exemplo e referencial de pessoa e de profissional que tem sido.

À minha colega de doutorado Adina Rocha pela leitura crítica desta tese e pelas valiosas discussões durante sua elaboração.

Aos professores Dr. Detang Zhou, Dr. Gregório Pacelli, Dr. Harold Rosenberg, Dr. Manofredo do Carmo e Dra. Walcy Santos, pelas discussões e sugestões para melhoria deste trabalho.

Aos meus pais Geine Pereira e João Gregório da Silva, por todos os sacrifícios que fizeram por mim, desde o início da minha educação e que possibilitaram que eu chegasse até aqui.

A geometria é uma ciência de todas as espécies possíveis de espaços.

—IMMANUEL KANT

Resumo

Nesta tese provamos que não existem hipersuperfícies de dimensão três no espaço Euclidiano de dimensão quatro, com curvatura escalar zero, completas e estáveis, satisfazendo certas condições de curvatura. Em seguida provamos, em colaboração com Hilário Alencar, uma desigualdade do valor médio e uma fórmula de monotonicidade envolvendo as curvaturas média e escalar de uma hipersuperfície imersa em uma variedade Riemanniana de curvatura seccional limitada superiormente por uma constante. Além disso, demonstramos uma desigualdade tipo Poincaré envolvendo curvaturas média e escalar de hipersuperfícies imersas em variedades Riemannianas de curvatura seccional limitada superiormente por uma constante. Aplicamos essa desigualdade para obter um resultado sobre hipersuperfícies estáveis de curvatura escalar zero no espaço Euclidiano.

Palavras-chave: Estabilidade, Curvatura escalar, Gráficos, Curvatura de Gauss-Kronecker, Volume, Curvatura média, Vizinhança tubular, Monotonicidade, Desigualdade de Poincaré, Valor médio, Desigualdade isoperimétrica.

Abstract

In this thesis we prove there is no complete hypersurfaces of dimension three in the Euclidean space of dimension four, satisfying some conditions of curvature. Next, we prove in a work jointly with Hilário Alencar, a mean value inequality and a monotonicity formula involving the mean and scalar curvatures of hypersurfaces immersed into a Riemannian manifold of sectional curvature bounded above by some constant. Moreover, we prove a Poincaré type inequality involving the mean curvature and the scalar curvature of hypersurfaces immersed into Riemannian manifolds of sectional curvature bounded above by some constant. We apply this inequality to obtain a result about stable hypersurfaces with zero scalar curvature in Euclidean space.

Keywords: Stability, Scalar curvature, Graphs, Gauss-Kronecker curvature, Volume, Mean curvature, Tubular neighbourhood, Monotonicity, Poincaré Inequality, Mean value, Isoperimetric inequality.

Lista de Ilustrações

- 1 Representação do domínio N_ω de $\frac{K}{H^3}$ sobre \mathbb{S}^2 , considerando o quociente como uma função algébrica de seus autovalores. Este domínio é a intersecção do plano $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ com \mathbb{S}^2 . A hipótese suprime apenas três pequenas vizinhanças em torno dos eixos coordenados.

Sumário

1	Hipersuperfícies estáveis com curvatura escalar zero	12
1.1	Introdução	12
1.2	Resultados preliminares	14
1.3	Resultados principais	19
1.4	Exemplos	25
1.5	Tubos não mergulhados	26
2	Fórmula de monotonicidade e desigualdade de Poincaré	30
2.1	Introdução	30
2.2	Resultados preliminares	37
2.3	Desigualdade do valor médio e fórmula de monotonicidade	42
2.4	Demonstração da desigualdade de Poincaré	50
2.5	Demonstração do resultado de estabilidade	58

Introdução

Nesta tese demonstramos alguns resultados envolvendo curvatura escalar de hipersuperfícies em variedades Riemannianas.

No primeiro capítulo, provamos que não existem hipersuperfícies de curvatura escalar zero, estáveis, completas no espaço Euclidiano de dimensão quatro, com crescimento de volume polinomial, tais que $\frac{(-K)}{H^3} \geq c > 0$ em todo ponto para alguma constante $c > 0$, onde K denota a curvatura de Gauss-Kronecker e H denota a curvatura média da imersão. Como consequência obtemos que não existem gráficos inteiros com curvatura escalar zero e tais que $\frac{(-K)}{H^3} \geq c > 0$ em todo ponto para alguma constante $c > 0$. Finalmente mostramos que, se existem hipersuperfícies estáveis com curvatura escalar zero e $\frac{(-K)}{H^3} \geq c > 0$ em todo ponto para alguma constante $c > 0$, então a vizinhança tubular não é mergulhada para um raio adequado.

No segundo capítulo estabelecemos alguns resultados, obtidos em colaboração com Hilário Alencar, sobre monotonicidade de funções envolvendo as curvaturas média e escalar de uma hipersuperfície própria imersa em uma variedade Riemanniana com curvatura seccional limitada superiormente por uma contante. Como consequência das técnicas usadas na demonstração dos resultados acima, provamos uma desigualdade de Poincaré envolvendo as curvaturas média e escalar de hipersuperfícies imersas em uma variedade Riemanniana com curvatura seccional limitada superiormente por uma constante. Aplicamos essa desigualdade para obter uma desigualdade isoperimétrica envolvendo a integral da curvatura média, além de um resultado sobre hipersuperfícies estáveis de curvatura escalar zero no espaço Euclidiano.

Hipersuperfícies estáveis com curvatura escalar zero

Neste capítulo demonstramos que *não existem hipersuperfícies de \mathbb{R}^4 com curvatura escalar zero, estáveis, com crescimento de volume polinomial e tais que $\frac{(-K)}{H^3} \geq c > 0$ em todo ponto para alguma constante $c > 0$, onde K é curvatura de Gauss-Kronecker e H é a curvatura média da imersão. Nosso segundo resultado é o teorema do tipo Bernstein: *Não existem gráficos inteiros de \mathbb{R}^4 com curvatura escalar zero e tal que $\frac{(-K)}{H^3} \geq c > 0$ em todo ponto, para alguma constante $c > 0$.* Concluímos este capítulo provando que, se existem hipersuperfícies com curvatura escalar zero, estáveis e tais que $\frac{(-K)}{H^3} \geq c > 0$ em todo ponto então sua vizinhança tubular não é mergulhada para um raio adequado.*

1.1 Introdução

Seja $x : M^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma imersão isométrica. Se $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ são os autovalores da segunda forma fundamental, então a curvatura escalar não normalizada R , a curvatura média não normalizada H e a curvatura de Gauss-Kronecker K são dadas, respectivamente, por

$$R = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3, \quad H = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \quad \text{e} \quad K = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3. \quad (1.1)$$

Em 1959, Hartman e Nirenberg, ver [HN59], mostraram que as únicas superfícies com curvatura Gaussiana nula no espaço Euclidiano tridimensional são os planos e os cilindros.

Generalizando este fato, em 1977, Cheng e Yau, ver [CY77], mostraram que as únicas hipersuperfícies completas e não compactas com curvatura escalar zero e curvatura seccional não negativa no espaço Euclidiano \mathbb{R}^{n+1} são os cilindros generalizados $\mathbb{S}^{n-p} \times \mathbb{R}^p$.

Seja $D \subset M^3$ um domínio regular, isto é, um domínio com fecho compacto e fronteira suave por partes. Uma variação com suporte compacto da imersão x é uma aplicação diferenciável $X : (-\varepsilon, \varepsilon) \times D \rightarrow \mathbb{R}^4$, $\varepsilon > 0$, tal que, para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, a aplicação $X_t : D \rightarrow \mathbb{R}^4$, definida por $X_t(p) = X(t, p)$ é uma imersão satisfazendo $X_0 = x|_D$ e $X_t|_{\partial D} = X_0|_{\partial D}$. É conhecido que hipersuperfícies de \mathbb{R}^4 com curvatura escalar nula são pontos críticos do funcional

$$\mathcal{A}_1(t) = \int_M H(t) dM_t$$

dentre todas as variações com suporte compacto em D (ver [Rei73], [AdCC93], [Ros93], [BC97]).

Seguindo Alencar, do Carmo e Elbert, ver [AdCE03], iremos definir a seguir o conceito de estabilidade para imersões com curvatura escalar zero. Seja $A : TM \rightarrow TM$ o operador linear associado à segunda forma fundamental da imersão x . Definimos a primeira transformação de Newton $P_1 : TM \rightarrow TM$ por $P_1 = HI - A$, onde I denota o operador identidade em TM .

Introduzimos agora o operador diferencial de segunda ordem que irá desempenhar um papel similar ao do Laplaciano no caso de hipersuperfícies mínimas, a saber,

$$L_1(f) = \operatorname{div}(P_1(\nabla f)), \quad (1.2)$$

onde $\operatorname{div} X$ denota a divergência do campo de vetores X e ∇f denota o gradiente da função f na métrica induzida pela imersão x . Em [HL99b], Hounie e Leite mostraram que L_1 é elíptico se, e somente se, o posto de $A > 1$. Logo, se $K \neq 0$ em todo ponto, então L_1 é elíptico e, se $H > 0$, então P_1 é um operador linear positivo definido.

Calculando a segunda derivada do funcional \mathcal{A}_1 , obtemos

$$\left. \frac{d^2 \mathcal{A}_1}{dt^2} \right|_{t=0} = -2 \int_M f(L_1 f - 3Kf) dM,$$

onde $f = \langle \frac{dX}{dt}(0), \eta \rangle$ e η é o campo de vetores normais à imersão.

Como $H^2 = |A|^2 + 2R$, se $R = 0$ então $H^2 = |A|^2$. Logo, se $K \neq 0$ em todo ponto, então $H^2 = |A|^2 \neq 0$ em todo ponto. Isto implica que $H > 0$ em todo ponto ou $H < 0$ em todo ponto. Desta forma, ao contrário do caso de hipersuperfícies mínimas, o sinal do funcional \mathcal{A}_1 depende da escolha da orientação de M^3 . Se escolhermos uma orientação tal que $H > 0$ em todo ponto, então a imersão será estável se $\left. \frac{d^2 \mathcal{A}_1}{dt^2} \right|_{t=0} > 0$ para todas as variações com suporte compacto. Caso contrário, ou seja, se escolhermos uma orientação tal que $H < 0$, então x é estável se $\left. \frac{d^2 \mathcal{A}_1}{dt^2} \right|_{t=0} < 0$. Mais detalhes podem ser encontrados em [AdCE03].

Em [AdCE03], Alencar, do Carmo e Elbert formularam a seguinte

Pergunta 1.1.1. Existem hipersuperfícies M^3 em \mathbb{R}^4 com curvatura escalar zero, completas, estáveis e tais que a curvatura de Gauss-Kronecker é não-nula em todo ponto?

O objetivo deste capítulo é dar algumas respostas parciais a essa pergunta.

Seja $B_r(p)$ a bola geodésica de M , de centro $p \in M$ e raio r . Dizemos que uma variedade Riemanniana M^3 tem crescimento de volume polinomial, se existe $\alpha \in [0, 4]$ tal que

$$\frac{\operatorname{vol}(B_r(p))}{r^\alpha} < \infty, \quad (1.3)$$

para $p \in M$ e para todo $r > 0$. Uma desigualdade consagrada na literatura estabelece que

$$HK \leq \frac{1}{2}R^2. \quad (1.4)$$

Se $R = 0$ e $K \neq 0$ em todo ponto, então o quociente $\frac{K}{H^3}$ é sempre negativo, independente da escolha de orientação. Além disso, considerando K e H^3 como funções dos autovalores da segunda forma fundamental, podemos ver que

$$0 < \frac{(-K)}{H^3} \leq \frac{4}{27},$$

visto que K e H^3 são polinômios homogêneos de grau 3. Mais detalhes podem ser vistos no Apêndice.

O primeiro resultado apresentado neste capítulo é

Teorema A. *Não existem hipersuperfícies completas M^3 de \mathbb{R}^4 com curvatura escalar zero, estáveis, com crescimento de volume polinomial e tais que*

$$\frac{(-K)}{H^3} \geq c > 0$$

em todo ponto para alguma constante $c > 0$.

Como consequência do Teorema A, obtemos o seguinte resultado do tipo Bernstein:

Teorema B. *Não existem gráficos inteiros M^3 de \mathbb{R}^4 com curvatura escalar zero e tais que*

$$\frac{(-K)}{H^3} \geq c > 0$$

em todo ponto para alguma constante $c > 0$.

Seguindo Nelli e Soret, ver [NS07], mostramos na seção 5 que se M^3 é uma hipersuperfície de \mathbb{R}^4 com curvatura escalar zero, estável e tal que $\frac{(-K)}{H^3} \geq c > 0$ em todo ponto, então o tubo em torno de M não é mergulhado para um raio adequado. Precisamente, se definirmos o tubo de raio r em torno de M por

$$T(M, h) = \{x \in \mathbb{R}^4; \exists p \in M, x = p + t\eta, t \leq h(p)\}$$

onde η é o campo de vetores normais à imersão e $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave e positiva em todo ponto, provamos:

Teorema C. *Seja M^3 uma hipersuperfície completa e estável de \mathbb{R}^4 , com curvatura escalar nula. Se a segunda forma fundamental da imersão é limitada e existe uma constante $c > 0$ tal que $\frac{(-K)}{H^3} \geq c > 0$ em todo ponto, então, para quaisquer constantes $0 < b_1 \leq 1$, $b_2 > 0$ e para qualquer função suave $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo*

$$h(p) \geq \inf \left\{ \frac{b_1}{|A(p)|}, b_2 \rho(p)^\delta \right\}, \quad \delta > 0, \quad (1.5)$$

o tubo $T(M, h)$ não é mergulhado. Aqui $\rho(p)$ denota a distância intrínseca em M de p a um ponto fixo $p_0 \in M$.

1.2 Resultados preliminares

Seja $B(X, Y) = \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$ a segunda forma fundamental da imersão x , onde ∇ e $\bar{\nabla}$ são as conexões de M^3 e \mathbb{R}^4 , respectivamente. Seja $A : TM \rightarrow TM$ definido por

$$B(X, Y) = \langle A(X), Y \rangle \eta, \quad \forall X, Y \in TM,$$

o único operador linear simétrico associado à segunda forma fundamental da imersão, onde η é o campo de vetores normal à imersão x .

Denotemos por $|A|^2 = \text{tr}(A^2)$ a norma ao quadrado da matriz do operador linear associado à segunda forma fundamental. Como $H^2 = |A|^2 + 2R$, se $R = 0$, então $H^2 = |A|^2$. Logo, se $K \neq 0$ em todo ponto então $|H| = |A| \neq 0$ em todo ponto e podemos escolher uma orientação de M tal que $H > 0$ em todo ponto.

Observação 1.2.1. De agora em diante, vamos fixar uma orientação de M^3 tal que $H > 0$ em todo ponto.

Uma desigualdade consagrada na literatura estabelece que

$$HK \leq \frac{1}{2}R^2.$$

Portanto, usando a desigualdade acima, se $R = 0$ e $H > 0$ em todo ponto, então $K < 0$ em todo ponto.

Definimos a primeira transformação de Newton $P_1 : TM \rightarrow TM$ por

$$P_1 = HI - A.$$

Se $R = 0$ e $H > 0$, então P_1 é positiva definida. A seguir vamos dar uma prova deste fato, e para isto, é suficiente mostrar que $H - \lambda_i > 0$, $i = 1, 2, 3$. De fato,

$$\lambda_1^2(H - \lambda_1) = \lambda_1^2(\lambda_2 + \lambda_3) = \lambda_1^2\lambda_2 + \lambda_1^2\lambda_3.$$

Visto que $R = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = 0$, temos

$$0 = \lambda_1 R = \lambda_1(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3) = \lambda_1^2\lambda_2 + \lambda_1^2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3,$$

isto é,

$$\lambda_1^2\lambda_2 + \lambda_1^2\lambda_3 = -\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -K > 0.$$

Logo

$$\lambda_1^2(H - \lambda_1) = \lambda_1^2\lambda_2 + \lambda_1^2\lambda_3 = -\lambda_1\lambda_2\lambda_3 > 0,$$

e, portanto, $H - \lambda_1 > 0$. Os outros casos são análogos.

Hounie e Leite, ver [HL99b], demonstraram que se P_1 é positiva definida, então $L_1(f) = \text{div}(P_1(\nabla f))$ é um operador diferencial elíptico.

Nossa escolha de orientação, isto é, tal que $H > 0$ em todo ponto, implica que a condição de estabilidade é equivalente a

$$-3 \int_M K f^2 dM \leq \int_M \langle P_1(\nabla f), \nabla f \rangle dM. \quad (1.6)$$

A desigualdade (1.6) acima é conhecida como desigualdade de estabilidade.

Observação 1.2.2. Quando $H < 0$, então $K > 0$ e P_1 é negativa definida. Neste caso, a condição de estabilidade é equivalente a

$$3 \int_M K f^2 dM \leq \int_M \langle (-P_1)(\nabla f), \nabla f \rangle dM.$$

Seja $\nabla A(X, Y, Z) := \langle \nabla_Z(A(X)) - A(\nabla_Z X), Y \rangle$ a derivada covariante do operador A . A posição a seguir irá desempenhar um papel fundamental nas provas dos teoremas apresentados neste capítulo. Em [dCP79], do Carmo e Peng demonstraram um resultado análogo para hiper-superfícies mínimas.

Proposição 1.2.1. *Se $R = 0$ e existe $c > 0$ tal que $\frac{-K}{H^3} \geq c > 0$ em todo ponto, então existe $c_0 > 0$, dependendo apenas de c , tal que*

$$|\nabla A|^2 - |\nabla H|^2 \geq \frac{2}{1 + 2c_0^2} |\nabla H|^2,$$

onde ∇H é o gradiente de H .

Demonstração. Vamos fixar $p \in M$ e escolha $\{e_1(p), e_2(p), e_3(p)\}$ uma base ortonormal $T_p M$ tal que $h_{ij}(p) = \lambda_i(p) \delta_{ij}$, onde $h_{ij} = \langle A(e_i), e_j \rangle$, $\lambda_i(p)$ denotam os autovalores de A em p e δ_{ij} é o delta de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j; \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Estendendo esta base via transporte paralelo ao longo de geodésicas partindo de p para um referencial em uma vizinhança de p , temos $\nabla_{e_i(p)} e_j(p) = 0$, para todo $i, j = 1, 2, 3$. Este referencial é chamado referencial geodésico em p .

Vamos denotar por $h_{ij;k} = (h_{ij})_k := e_k(h_{ij})$ as derivadas covariantes da função h_{ij} , e por h_{ijk} os componentes do tensor ∇A no referencial $\{e_1, e_2, e_3\}$, isto é, $h_{ijk} = \nabla A(e_i, e_j, e_k)$. Visto que $\{e_1, e_2, e_3\}$ é um referencial geodésico, temos

$$\begin{aligned} h_{ijk} &= \nabla A(e_i, e_j, e_k) = \langle \nabla_{e_k}(A(e_i)) - A(\nabla_{e_k} e_i), e_j \rangle = \langle \nabla_{e_k}(A(e_i)), e_j \rangle \\ &= e_k(\langle A(e_i), e_j \rangle) - \langle A(e_i), \nabla_{e_k} e_j \rangle = e_k(\langle A(e_i), e_j \rangle) = e_k(h_{ij}) \\ &= h_{ij;k}. \end{aligned}$$

Como $R = 0$, temos $H^2 = |A|^2$. Usando este fato, obtemos

$$\begin{aligned} 4H^2 |\nabla H|^2 &= |\nabla(H^2)|^2 = |\nabla(|A|^2)|^2 = \sum_{k=1}^3 \left[\left(\sum_{i,j=1}^3 h_{ij}^2 \right)_k \right]^2 \\ &= \sum_{k=1}^3 \left(\sum_{i,j=1}^3 2h_{ij} h_{ij;k} \right)^2 = 4 \sum_{k=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 h_{ii} h_{ii;k} \right)^2. \end{aligned}$$

Em seguida, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned} 4 \sum_{k=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 h_{ii} h_{ii;k} \right)^2 &\leq 4 \sum_{k=1}^3 \left[\left(\sum_{i=1}^3 h_{ii}^2 \right) \left(\sum_{i=1}^3 h_{ii;k}^2 \right) \right] \\ &= 4|A|^2 \left(\sum_{i,k=1}^3 h_{ii;k}^2 \right) = 4H^2 \left(\sum_{i,k=1}^3 h_{ii;k}^2 \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$|\nabla H|^2 \leq \sum_{i,k=1}^3 h_{ii;k}^2. \quad (1.7)$$

Por outro lado, visto que $R = h_{11}h_{22} + h_{11}h_{33} + h_{22}h_{33} - h_{12}^2 - h_{13}^2 - h_{23}^2 = 0$ temos, para $k = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned} 0 &= (h_{11}h_{22} + h_{11}h_{33} + h_{22}h_{33} - h_{12}^2 - h_{13}^2 - h_{23}^2)_k \\ &= h_{11k}h_{22} + h_{11}h_{22k} + h_{11k}h_{33} + h_{11}h_{33k} + h_{22k}h_{33} + h_{22}h_{33k} \\ &\quad - 2h_{12}h_{12k} - 2h_{13}h_{13k} - 2h_{23}h_{23k} \\ &= h_{11k}h_{22} + h_{11}h_{22k} + h_{11k}h_{33} + h_{11}h_{33k} + h_{22k}h_{33} + h_{22}h_{33k} \\ &= h_{11k}(h_{22} + h_{33}) + h_{22k}(h_{11} + h_{33}) + h_{33k}(h_{11} + h_{22}) \\ &= h_{11k}(H - h_{11}) + h_{22k}(H - h_{22}) + h_{33k}(H - h_{33}). \end{aligned}$$

Logo, escolhendo $k = 1$ na desigualdade acima, temos

$$h_{111} = -\frac{1}{H - h_{11}} [h_{221}(H - h_{22}) + h_{331}(H - h_{33})].$$

Analogamente, escolhendo $k = 2$ e $k = 3$,

$$h_{222} = -\frac{1}{H - h_{22}} [h_{112}(H - h_{11}) + h_{332}(H - h_{33})]$$

e

$$h_{333} = -\frac{1}{H - h_{33}} [h_{113}(H - h_{11}) + h_{223}(H - h_{22})].$$

Elevando as identidades acima ao quadrado e somando-as, obtemos

$$\begin{aligned} h_{111}^2 + h_{222}^2 + h_{333}^2 &= \frac{1}{(H - h_{11})^2} [h_{221}(H - h_{22}) + h_{331}(H - h_{33})]^2 \\ &\quad + \frac{1}{(H - h_{22})^2} [h_{112}(H - h_{11}) + h_{332}(H - h_{33})]^2 \\ &\quad + \frac{1}{(H - h_{33})^2} [h_{113}(H - h_{11}) + h_{223}(H - h_{22})]^2. \end{aligned}$$

Agora, usando a desigualdade $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, temos

$$\begin{aligned} h_{111}^2 + h_{222}^2 + h_{333}^2 &\leq 2 \left[\left(\frac{H - h_{22}}{H - h_{11}} \right)^2 h_{221}^2 + \left(\frac{H - h_{33}}{H - h_{11}} \right)^2 h_{331}^2 \right. \\ &\quad + \left(\frac{H - h_{11}}{H - h_{22}} \right)^2 h_{112}^2 + \left(\frac{H - h_{33}}{H - h_{22}} \right)^2 h_{332}^2 \\ &\quad \left. + \left(\frac{H - h_{11}}{H - h_{33}} \right)^2 h_{113}^2 + \left(\frac{H - h_{22}}{H - h_{33}} \right)^2 h_{223}^2 \right]. \end{aligned}$$

Visto que as funções $g_{ij} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por

$$g_{ij}(h_{11}, h_{22}, h_{33}) = \left(\frac{H - h_{ii}}{H - h_{jj}} \right)^2, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

são quocientes de polinômios homogêneos de mesmo grau, os valores de g_{ij} dependem apenas de sua restrição a \mathbb{S}^2 . Como $\{(h_{11}, h_{22}, h_{33}) \in \mathbb{R}^3; R = 0\}$ é fechado em \mathbb{R}^3 ,

$$\left\{ (h_{11}, h_{22}, h_{33}) \in \mathbb{R}^3; \frac{-K}{H^3} \geq c > 0 \right\} = \left\{ (h_{11}, h_{22}, h_{33}) \in \mathbb{S}^2; \frac{-K}{H^3} \geq c > 0 \right\}$$

e \mathbb{S}^2 são subconjuntos compactos de \mathbb{R}^3 , a intersecção dos três conjuntos formam um subconjunto compacto de \mathbb{S}^2 . Portanto, todas as funções g_{ij} tem um máximo e um mínimo em \mathbb{S}^2 . Se $c_0 > 0$ é o maior dos valores máximos das funções g_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, então

$$h_{111}^2 + h_{222}^2 + h_{333}^2 \leq 2c_0^2 (h_{112}^2 + h_{113}^2 + h_{221}^2 + h_{223}^2 + h_{331}^2 + h_{332}^2).$$

Isto implica

$$\begin{aligned} |\nabla H|^2 &\leq \sum_{i,k=1}^3 h_{iik}^2 = h_{111}^2 + h_{112}^2 + h_{113}^2 + h_{221}^2 + h_{222}^2 + h_{223}^2 + h_{331}^2 + h_{332}^2 + h_{333}^2 \\ &\leq (1 + 2c_0^2) (h_{112}^2 + h_{113}^2 + h_{221}^2 + h_{223}^2 + h_{331}^2 + h_{332}^2) \\ &\leq (1 + 2c_0^2) \left[\frac{1}{2} (h_{121}^2 + h_{211}^2) + \frac{1}{2} (h_{131}^2 + h_{311}^2) + \frac{1}{2} (h_{212}^2 + h_{122}^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (h_{232}^2 + h_{322}^2) + \frac{1}{2} (h_{313}^2 + h_{133}^2) + \frac{1}{2} (h_{323}^2 + h_{233}^2) \right] \\ &= \frac{1 + 2c_0^2}{2} (h_{121}^2 + h_{211}^2 + h_{131}^2 + h_{311}^2 + h_{212}^2 + h_{122}^2 \\ &\quad + h_{232}^2 + h_{322}^2 + h_{313}^2 + h_{133}^2 + h_{323}^2 + h_{233}^2). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |\nabla A|^2 &= \sum_{i,j,k=1}^3 h_{ijk}^2 \geq \sum_{i,k=1}^3 h_{iik}^2 + \sum_{i \neq k=1}^3 h_{iki}^2 + \sum_{i \neq k=1}^3 h_{kii}^2 \\ &\geq |\nabla H|^2 + \frac{2}{1 + 2c_0^2} |\nabla H|^2 \\ &= \left(1 + \frac{2}{1 + 2c_0^2} \right) |\nabla H|^2. \end{aligned}$$

□

1.3 Resultados principais

De agora em diante, até o fim deste capítulo, vamos fixar um ponto $p_0 \in M$ e denotar por B_r a bola geodésica (intrínseca) e centro p_0 e raio r .

O resultado central a ser usado na demonstração do Teorema A é a proposição a seguir.

Proposição 1.3.1. *Seja $x : M^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma imersão isométrica com curvatura escalar zero, estável e tal que $K \neq 0$ em todo ponto. Se existe uma constante $c > 0$ tal que $\frac{-K}{H^3} \geq c > 0$ em todo ponto então, para toda função suave ψ com suporte compacto em M , para todo $\delta > 0$ e para todo $0 < q < \sqrt{\frac{2}{1+2c_0^2}}$, existem constantes $\Lambda_1(q), \Lambda_2(q) > 0$ tais que*

$$\int_M H^{5+2q} \left(\frac{(-K)}{H^3} - \Lambda_1 \delta^{\frac{5+2q}{3+2q}} \right) \psi^{5+2q} dM \leq \Lambda_2 \delta^{-\frac{5+2q}{2}} \int_M |\nabla \psi|^{5+2q} dM. \quad (1.8)$$

Demonstração. Vamos escolher uma orientação de M tal que $H > 0$ e aplicar a desigualdade de estabilidade correspondente

$$3 \int_M (-K) f^2 dM \leq \int_M \langle P_1(\nabla f), \nabla f \rangle dM, \quad (1.9)$$

para $f = H^{1+q} \varphi$, onde $q > 0$ e φ é uma função suave com suporte compacto em M . Inicialmente, notemos que

$$\nabla f = \nabla(H^{1+q} \varphi) = (1+q)H^q \varphi \nabla H + H^{1+q} \nabla \varphi.$$

Isto implica

$$\begin{aligned} \langle P_1(\nabla f), \nabla f \rangle &= (1+q)^2 H^{2q} \varphi^2 \langle P_1(\nabla H), \nabla H \rangle \\ &\quad + 2(1+q) H^{1+2q} \varphi \langle P_1(\nabla H), \nabla \varphi \rangle \\ &\quad + H^{2+2q} \langle P_1(\nabla \varphi), \nabla \varphi \rangle. \end{aligned}$$

A seguir, vamos estimar o segundo termo do lado direito da identidade acima. Visto que $H > 0$, então P_1 é positivo definido e, desta forma, existe $\sqrt{P_1}$. Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz seguida da desigualdade $xy \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$, válida para todo $x, y \in \mathbb{R}$, obtemos

$$\begin{aligned} H^{1+2q} \varphi \langle P_1(\nabla H), \nabla \varphi \rangle &= H^{2q} \langle \sqrt{\beta} \varphi \sqrt{P_1}(\nabla H), (1/\sqrt{\beta}) H \sqrt{P_1}(\nabla \varphi) \rangle \\ &\leq H^{2q} \| \sqrt{\beta} \varphi \sqrt{P_1}(\nabla H) \| \| (1/\sqrt{\beta}) H \sqrt{P_1}(\nabla \varphi) \| \\ &\leq H^{2q} \left(\frac{\| \sqrt{\beta} \varphi \sqrt{P_1}(\nabla H) \|^2}{2} + \frac{\| (1/\sqrt{\beta}) H \sqrt{P_1}(\nabla \varphi) \|^2}{2} \right) \quad (1.10) \\ &= \frac{\beta}{2} H^{2q} \varphi^2 \langle P_1(\nabla H), \nabla H \rangle + \frac{1}{2\beta} H^{2+2q} \langle P_1(\nabla \varphi), \nabla \varphi \rangle \end{aligned}$$

para qualquer constante $\beta > 0$. Desta forma, a desigualdade de estabilidade (1.9) torna-se

$$\begin{aligned}
3 \int_M (-K) H^{2+2q} \varphi^2 dM &\leq (1+q)^2 \int_M H^{2q} \varphi^2 \langle P_1(\nabla H), \nabla H \rangle dM \\
&\quad + 2(1+q) \int_M H^{1+2q} \varphi \langle P_1(\nabla H), \nabla \varphi \rangle dM \\
&\quad + \int_M H^{2+2q} \langle P_1(\nabla \varphi), \nabla \varphi \rangle dM \\
&\leq ((1+q)^2 + (1+q)\beta) \int_M H^{2q} \varphi^2 \langle P_1(\nabla H), \nabla H \rangle dM \\
&\quad + \left(1 + \frac{(1+q)}{\beta}\right) \int_M H^{2+2q} \langle P_1(\nabla \varphi), \nabla \varphi \rangle dM.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

A seguir, vamos estimar $\int_M H^{2q} \varphi^2 \langle P_1(\nabla H), \nabla H \rangle dM$. Usando a identidade

$$L_1(fg) = \operatorname{div}(P_1(\nabla(fg))) = \operatorname{div}(fP_1(\nabla g)) + gL_1 f + \langle P_1(\nabla f), \nabla g \rangle,$$

temos

$$\begin{aligned}
L_1(H^{2+2q} \varphi^2) &= \operatorname{div}(HP_1(\nabla(H^{1+2q} \varphi^2))) + H^{1+2q} \varphi^2 L_1(H) \\
&\quad + \langle P_1(\nabla H), \nabla(H^{1+2q} \varphi^2) \rangle \\
&= \operatorname{div}(HP_1(\nabla(H^{1+2q} \varphi^2))) + H^{1+2q} \varphi^2 L_1(H) \\
&\quad + (1+2q)H^{2q} \varphi^2 \langle P_1(\nabla H), \nabla H \rangle + 2H^{1+2q} \varphi \langle P_1(\nabla H), \nabla \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

Integrando ambos os lados da identidade acima e usando o teorema da divergência, obtemos

$$\begin{aligned}
(1+2q) \int_M H^{2q} \varphi^2 \langle P_1(\nabla H), \nabla H \rangle dM &= - \int_M H^{1+2q} \varphi^2 L_1(H) dM \\
&\quad - 2 \int_M H^{1+2q} \varphi \langle P_1(\nabla H), \nabla \varphi \rangle dM.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade (1.10), temos

$$\begin{aligned}
(1+2q) \int_M H^{2q} \varphi^2 \langle P_1(\nabla H), \nabla H \rangle dM &\leq - \int_M H^{1+2q} \varphi^2 L_1(H) dM \\
&\quad + \beta \int_M H^{2q} \varphi^2 \langle P_1(\nabla H), \nabla H \rangle \\
&\quad + \frac{1}{\beta} \int_M H^{2+2q} \langle P_1(\nabla \varphi), \nabla \varphi \rangle dM,
\end{aligned}$$

isto é,

$$(1+2q-\beta) \int_M H^{2q} \varphi^2 \langle P_1(\nabla H), \nabla H \rangle dM \leq - \int_M H^{1+2q} \varphi^2 L_1(H) dM \\ + \frac{1}{\beta} \int_M H^{2+2q} \langle P_1(\nabla \varphi), \nabla \varphi \rangle dM.$$

Por outro lado, é conhecido, ver [AdCC93], Lema 3.7, que

$$-L_1(H) = |\nabla H|^2 - |\nabla A|^2 - 3HK.$$

Visto que P_1 é positivo definido, temos

$$\langle P_1(\nabla H), \nabla H \rangle \leq (\text{tr } P_1) |\nabla H|^2 = 2H |\nabla H|^2,$$

ou seja,

$$|\nabla H|^2 \geq \frac{1}{2H} \langle P_1(\nabla H), \nabla H \rangle.$$

Usando a Proposição 1.2.1 e a desigualdade acima, obtemos

$$-L_1(H) \leq -\frac{2}{1+2c_0^2} |\nabla H|^2 - 3HK \leq -\frac{1}{(1+2c_0^2)H} \langle P_1(\nabla H), \nabla H \rangle - 3HK.$$

Portanto

$$\left(1 + \frac{1}{1+2c_0^2} + 2q - \beta\right) \int_M H^{2q} \varphi^2 \langle P_1(\nabla H), \nabla H \rangle dM \leq 3 \int_M H^{2+2q} (-K) \varphi^2 dM \\ + \frac{1}{\beta} \int_M H^{2+2q} \varphi \langle P_1(\nabla \varphi), \nabla \varphi \rangle dM.$$

Substituindo a última desigualdade acima em (1.11), a desigualdade de estabilidade torna-se

$$3 \int_M (-K) H^{2+2q} \varphi^2 dM \leq 3C_1 \int_M H^{2+2q} \varphi^2 (-K) dM \\ + C_2 \int_M H^{2+2q} \langle P_1(\nabla \varphi), \nabla \varphi \rangle dM,$$

isto é,

$$3(1-C_1) \int_M H^{2+2q} (-K) \varphi^2 dM \leq C_2 \int_M H^{2+2q} \langle P_1(\nabla \varphi), \nabla \varphi \rangle dM.$$

onde

$$C_1 = \frac{(1+q)^2 + \beta(1+q)}{1 + \frac{1}{1+2c_0^2} + 2q - \beta}, \quad C_2 = 1 + \frac{(1+q)}{\beta} + \frac{(1+q)^2 + (1+q)\beta}{\beta \left(1 + \frac{1}{1+2c_0^2} + 2q - \beta\right)},$$

$0 < q < \sqrt{\frac{1}{1+2c_0^2}}$ por hipótese, e β é escolhido tal que $0 < \beta < \frac{\frac{1}{1+2c_0^2} - q^2}{q+2}$. Essa escolha de β é necessária para termos $C_1 < 1$. De fato,

$$\begin{aligned}
\beta < \frac{\frac{1}{1+2c_0^2} - q^2}{q+2} &\Rightarrow q^2 + \beta q + 2\beta < \frac{1}{1+2c_0^2} \\
&\Rightarrow (1+q)^2 + \beta(1+q) < 1 + \frac{1}{1+2c_0^2} + 2q - \beta \\
&\Rightarrow C_1 = \frac{(1+q)^2 + \beta(1+q)}{1 + \frac{1}{1+2c_0^2} + 2q - \beta} < 1.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\int_M H^{2+2q}(-K)\varphi^2 dM \leq \frac{C_2}{3(1-C_1)} \int_M H^{2+2q} \langle P_1(\nabla\varphi), \nabla\varphi \rangle dM. \quad (1.12)$$

Por outro lado, como P_1 é positivo definido, temos

$$\langle P_1(\nabla\varphi), \nabla\varphi \rangle \leq (\text{tr } P_1) |\nabla H|^2 \leq 2H |\nabla\varphi|^2.$$

Denotando por $C_3 = \frac{2C_2}{3(1-C_1)}$ e usando a desigualdade acima, a desigualdade (1.12) torna-se

$$\begin{aligned}
\int_M H^{2+2q}(-K)\varphi^2 dM &\leq \frac{C_3}{2} \int_M H^{2+2q} \langle P_1(\nabla\varphi), \nabla\varphi \rangle dM \\
&\leq C_3 \int_M H^{3+2q} |\nabla\varphi|^2 dM.
\end{aligned}$$

Escolhendo $\varphi = \psi^p$, onde $2p = 5 + 2q$, obtemos

$$\int_M H^{2+2q}(-K)\psi^{5+2q} dM \leq C_3 p^2 \int_M H^{3+2q} \psi^{3+2q} |\nabla\psi|^2 dM. \quad (1.13)$$

Usando a desigualdade de Young

$$xy \leq \frac{x^a}{a} + \frac{y^b}{b}, \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1,$$

para

$$x = \delta H^{3+2q} \psi^{3+2q}, \quad y = \frac{|\nabla\psi|^2}{\delta}, \quad a = \frac{5+2q}{3+2q}, \quad b = \frac{5+2q}{2} \quad \text{e } \delta > 0,$$

obtemos

$$H^{3+2q} \psi^{3+2q} |\nabla\psi|^2 \leq \frac{3+2q}{5+2q} \delta^{\frac{5+2q}{3+2q}} H^{5+2q} \psi^{5+2q} + \frac{2}{5+2q} \delta^{-\frac{5+2q}{2}} |\nabla\psi|^{5+2q}.$$

Substituindo a última desigualdade acima na desigualdade (1.13),

$$\begin{aligned}
\int_M H^{2+2q}(-K)\psi^{5+2q} dM &\leq \frac{3+2q}{5+2q} p^2 C_3 \delta^{\frac{5+2q}{3+2q}} \int_M H^{5+2q} \psi^{5+2q} dM \\
&\quad + \frac{2}{5+2q} p^2 C_3 \delta^{-\frac{5+2q}{2}} \int_M |\nabla\psi|^{5+2q} dM,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_M H^{5+2q} \left(\frac{(-K)}{H^3} - \Lambda_1 \delta^{\frac{5+2q}{3+2q}} \right) \psi^{5+2q} dM \leq \Lambda_2 \delta^{-\frac{5+2q}{2}} \int_M |\nabla \psi|^{5+2q} dM, \quad (1.14)$$

onde $\Lambda_1 = \frac{3+2q}{5+2q} p^2 C_3$ e $\Lambda_2 = \frac{2p^2}{5+2q} C_3$. \square

Em [SSY75], Schoen, Simon e Yau obtiveram a seguinte desigualdade de Sobolev para hipersuperfícies mínimas M^n imersas em \mathbb{R}^{n+1} :

$$\int_M |A|^{2p} \psi^{2p} dM \leq C(n, p) \int_M |\nabla \psi|^{2p} dM, \quad (1.15)$$

para $p \in [2, 2 + \sqrt{2/n})$ e para toda função $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$ com suporte compacto em M . Usando a desigualdade da Proposição 1.3.1, obtemos um resultado análogo para hipersuperfícies M^3 de \mathbb{R}^4 com curvatura escalar nula. De fato, se $R = 0$, então $H^2 = |A|^2$. A escolha de uma orientação tal que $H > 0$ implica $H = |A|$. Neste caso, temos o

Corolário 1.3.1 (Desigualdade tipo Sobolev). *Se $x : M^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma imersão com curvatura escalar nula, estável e tal que $\frac{(-K)}{H^3} \geq c > 0$ em todo ponto, então, para toda função suave ψ com suporte compacto em M , para todo $\delta > 0$ e $p \in \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{1}{1+2c_0^2}} \right)$, existe uma constante $C(p) > 0$ tal que*

$$\int_M |A|^{2p} \psi^{2p} dM \leq C(p) \int_M |\nabla \psi|^{2p} dM. \quad (1.16)$$

Observação 1.3.1. *Em um artigo recente, [INS12], Ilias, Nelli e Soret obtiveram resultados similares para hipersuperfícies de curvatura média constante.*

A seguir, vamos demonstrar o Teorema A da Introdução deste capítulo.

Teorema A. *Não existem hipersuperfícies M^3 de \mathbb{R}^4 com curvatura escalar zero, completas, estáveis, com crescimento de volume polinomial e tais que*

$$\frac{(-K)}{H^3} \geq c > 0$$

em todo ponto para alguma constante $c > 0$.

Demonstração. Suponha por absurdo que existe uma hipersuperfície completa e estável satisfazendo as condições do Teorema A. Logo, podemos aplicar a Proposição 1.3.1. Escolhamos a função de suporte compacto $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\psi(\rho(p)) = \begin{cases} 1 & \text{se } p \in B_r; \\ \frac{2r - \rho(p)}{r} & \text{se } p \in B_{2r} \setminus B_r; \\ 0 & \text{se } p \in M \setminus B_{2r}, \end{cases} \quad (1.17)$$

onde $\rho(p) = \rho(p, p_0)$ é a função distância de M . Usando esta função ψ na desigualdade da Proposição 1.3.1, temos

$$\begin{aligned} \int_{B_r} H^{5+2q} \left(\frac{(-K)}{H^3} - \Lambda_1 \delta^{\frac{5+2q}{3+2q}} \right) dM &\leq \int_{B_{2r}} H^{5+2q} \left(\frac{(-K)}{H^3} - \Lambda_1 \delta^{\frac{5+2q}{3+2q}} \right) \psi^{5+2q} dM \\ &\leq \Lambda_2 \delta^{-\frac{5+2q}{2}} \int_{B_{2r}} |\nabla \psi|^{5+2q} dM \\ &\leq \Lambda_2 \delta^{-\frac{5+2q}{2}} \frac{\text{vol} B_{2r}}{r^{5+2q}}, \end{aligned} \quad (1.18)$$

para $0 < q < \sqrt{\frac{1}{1+2c_0^2}}$. Escolhendo $\delta > 0$ suficientemente pequeno e visto que, por hipótese, $\frac{(-K)}{H^3} \geq c > 0$, obtemos

$$\left(\frac{(-K)}{H^3} - \Lambda_1 \delta^{\frac{5+2q}{3+2q}} \right) > 0.$$

Por hipótese, M tem crescimento de volume polinomial. Isto implica

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(B_r)}{r^\alpha} < \infty, \quad \alpha \in (0, 4].$$

Fazendo $r \rightarrow \infty$ na desigualdade (1.18), obtemos

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{B_r} H^{5+2q} \left(\frac{(-K)}{H^3} - \Lambda_1 \delta^{\frac{5+2q}{3+2q}} \right) dM \leq \Lambda_2 \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(B_{2r})}{r^\alpha} \cdot \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r^{5+2q-\alpha}} = 0$$

e, portanto $H \equiv 0$. Esta contradição finaliza a prova do teorema. \square

Observação 1.3.2. Na demonstração do Teorema A, M não precisa ser propriamente imersa, visto que estamos considerando bolas intrínsecas (geodésicas). Visto que M é completa, temos $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{r_n}$ para alguma sequência $r_n \rightarrow \infty$, e logo podemos considerar $r \rightarrow \infty$ na estimativa.

Schoen, Simon e Yau usaram a sua desigualdade tipo Sobolev (1.15) para dar uma nova demonstração do teorema de Bernstein, a saber, que os únicos gráficos inteiros mínimos M^n em \mathbb{R}^{n+1} , $n \leq 5$, são os hiperplanos. Usando nossa versão da desigualdade de Sobolev (1.16), demonstramos o seguinte teorema tipo Bernstein:

Teorema B. *Não existem gráficos inteiros M^3 de \mathbb{R}^4 com curvatura escalar zero e tais que*

$$\frac{(-K)}{H^3} \geq c > 0$$

em todo ponto para alguma constante $c > 0$.

Demonstração. Suponhamos que existe um gráfico inteiro M satisfazendo as condições do Teorema B. Em [ASZ10], na Proposição 4.1, p. 3308, Alencar, Santos e Zhou mostraram que gráficos inteiros com curvatura escalar nula e cuja curvatura média não muda de sinal são estáveis. A hipótese $R = 0$ implica $H^2 = |A|^2$. Como $K \neq 0$ em todo ponto, temos que

$H^2 = |A|^2 > 0$ e isto implica que H não muda de sinal. Logo, o gráfico inteiro M é estável. Por outro lado, gráficos satisfazem $\text{vol}(B_r) \leq Cr^4$, para alguma constante $C > 0$. De fato, como M é um gráfico, se $\Omega_r := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leq r^2 \text{ e } -r \leq x_4 \leq r\}$, então

$$\text{vol}(B_r) \leq \int_{\Omega_r} 1 dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = Cr^4.$$

Portanto, usando a hipótese $\frac{-K}{H^3} \geq c > 0$, a desigualdade (1.18) na prova do Teorema A, p.24, e fazendo $r \rightarrow \infty$, obtemos a mesma contradição. \square

1.4 Exemplos

A classe de hipersuperfícies tratadas aqui não é vazia, como veremos no exemplo a seguir, ver [HL99a], Lema 2.1, p. 400, [AdCE03], p. 213 – 214 e [dCE04], p. 161.

Exemplo 1.4.1. Seja $M^3 \subset \mathbb{R}^4$ a hipersuperfície de rotação parametrizada por

$$X(t, \theta, \varphi) = (f(t) \cos \theta \cos \varphi, f(t) \cos \theta \sin \varphi, f(t) \sin \theta, t),$$

onde $f(t) = \frac{t^2}{4m} + m$ e m é uma constante não negativa. As curvaturas principais são

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{m^{1/2}}{f^{3/2}} \text{ e } \lambda_3 = -\frac{1}{2} \frac{m^{1/2}}{f^{3/2}}.$$

Isto implica que $R = 0$ e $\frac{-K}{H^3} = \frac{4}{27}$ em todo ponto. Visto que M^3 é uma hipersuperfície de rotação e a curva geratriz é quadrática, a hipersuperfície tem crescimento de volume polinomial. Portanto, o Teorema A implica que a imersão é instável.

Este exemplo aparece em Teoria da Relatividade como um mergulho da variedade de Schwarzschild tipo espaço e de massa $m/2 > 0$, ver por exemplo a introdução de [Bra01] para mais detalhes.

A classe de hipersuperfícies a seguir é bem conhecida, ver [AdCE03], p. 214, e são exemplos clássicos de hipersuperfícies estáveis com curvatura escalar nula. Esta classe nos mostra que a condição sobre a nulidade da curvatura de Gauss-Kronecker é necessária.

Exemplo 1.4.2. Seja $M^3 \subset \mathbb{R}^4$ o cilindro parametrizado por

$$\mathbf{x}(u, v, t) = (u, v, \alpha(t), \beta(t)), \quad u, v, t \in \mathbb{R},$$

onde $c(t) = (\alpha(t), \beta(t))$ é uma curva parametrizada com curvatura $k(t)$ positiva em todo ponto. Neste caso, as curvaturas principais são

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0 \text{ e } \lambda_3 = k(t).$$

Logo $R = 0$, $H > 0$ e $K = 0$ em todo ponto. Portanto, M^3 é estável, ver [AdCE03]. Observe que se $c(t) = (t, f(t))$, o cilindro M é o gráfico de uma função suave $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(u, v, t) = f(t)$. Em particular, escolhendo $f(t) = t^2$ ou $f(t) = \sqrt{1+t^2}$, obtemos um gráfico inteiro com $R = 0$, $H > 0$ e $K = 0$ em todo ponto.

1.5 Tubos não mergulhados

Seja $x : M^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma imersão isométrica. Seguindo Nelli e Soret, ver [NS07], definimos o tubo de raio h em torno de M por

$$T(M, h) = \{x \in \mathbb{R}^4; \exists p \in M, x = p + t\eta, t \leq h(p)\},$$

onde η é o campo de vetores normais à segunda forma fundamental de x e $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função positiva em todo ponto. Se $|A| \neq 0$ em todo ponto, definimos o tubo subfocal por

$$T\left(M, \frac{\varepsilon}{|A|}\right), \quad 0 < \varepsilon \leq 1.$$

Denotemos por $T(r, h)$ o tubo de raio h em torno de $B_r \subset M$, isto é, considerando $M = B_r$ na definição acima e seja

$$V(r, h) = \int_{T(r, h)} dT,$$

onde dT denota o elemento de volume do tubo. Se $R = 0$ e escolhermos uma orientação para M tal que $H > 0$, então $H = |A|$. Sob as condições da Proposição 1.3.1, p.19, e assumindo que $\frac{(-K)}{H^3} \geq c > 0$, o Corolário 1.3.1, p. 23, afirma que existe uma constante $C(q)$ dependendo apenas de $0 < q < \sqrt{\frac{1}{1+2c_0^2}}$, tal que

$$\int_{B_r} |A|^{5+2q} \psi^{5+2q} dM \leq C(q) \int_{B_r} |\nabla \psi|^{5+2q} dM. \quad (1.19)$$

Escolhendo a mesma função com suporte compacto usada na demonstração do Teorema A (ver (1.17), p. 23), obtemos

$$\int_{B_r} |A|^{5+2q} dM \leq C(q) \frac{\text{vol}(B_{2r})}{r^{5+2q}}.$$

O lema a seguir é essencialmente o mesmo Lema 1 de [NS07], p. 496, e omitiremos sua demonstração aqui.

Lema 1.5.1. *Seja M^3 uma hipersuperfície de \mathbb{R}^4 com curvatura escalar nula, completa, estável e tal que $\frac{(-K)}{H^3} \geq c > 0$ em todo ponto.*

(a) *Para $r > 0$ suficientemente grande, existe uma constante $\alpha(q)$, dependendo apenas de $0 < q < \sqrt{\frac{1}{1+2c_0^2}}$ tal que*

$$\text{vol}(B_r) > \alpha(q) r^{5+2q}. \quad (1.20)$$

(b) *Para cada $\beta > 1$, $0 < q < \sqrt{\frac{1}{1+2c_0^2}}$ e $r > 0$ satisfazendo a desigualdade (1.20) acima, existe $\tilde{r} > r$ suficientemente grande tal que*

$$\text{vol}(B_{\tilde{r}}) - \text{vol}(B_{\beta^{-1}\tilde{r}}) > \alpha(q) r^{5+q}.$$

O próximo resultado é uma versão para curvatura escalar nula do Teorema 1, p. 499 de [NS07].

Teorema C. *Seja M^3 uma hipersuperfície completa e estável de \mathbb{R}^4 , com curvatura escalar nula. Se a segunda forma fundamental da imersão é limitada e existe uma constante $c > 0$ tal que $\frac{(-K)}{H^3} \geq c > 0$ em todo ponto, então, para quaisquer constantes $0 < b_1 \leq 1$, $b_2 > 0$ e para qualquer função suave $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo*

$$h(p) \geq \inf \left\{ \frac{b_1}{|A(p)|}, b_2 \rho(p)^\delta \right\}, \quad \delta > 0, \quad (1.21)$$

o tubo $T(M, h)$ não é mergulhado. Aqui $\rho(p)$ denota a distância intrínseca em M de p a um ponto fixo $p_0 \in M$.

Demonstração. Em [NS07], Nelli e Soret mostraram que

$$V(r, h) = \int_{B_r} h(p) dM - \frac{1}{2} \int_{B_r} h(p)^2 H(p) dM - \frac{1}{4} \int_{B_r} h(p)^4 K(p) dM.$$

Usando a desigualdade clássica entre as médias geométrica e quadrática, obtemos

$$\begin{aligned} K &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \leq |\lambda_1| |\lambda_2| |\lambda_3| \\ &\leq \left(\frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}{3} \right)^{3/2} \\ &= \frac{1}{3\sqrt{3}} |A|^3, \end{aligned}$$

isto é,

$$K(p) \leq \frac{1}{3\sqrt{3}} |A(p)|^3. \quad (1.22)$$

Seja B_r^+ o subconjunto de B_r tal que $\frac{b_1}{|A(p)|}$ é o ínfimo em (1.21) e $B_r^- = B_r \setminus B_r^+$. Temos

$$\begin{aligned} V(r, h) &\geq b_1 \int_{B_r^+} \frac{1}{|A|} dM - \frac{b_1^2}{2} \int_{B_r^+} \frac{1}{|A|^2} H dM - \frac{b_1^4}{4} \int_{B_r^+} \frac{1}{|A|^4} K dM \\ &\quad + b_2 \int_{B_r^-} \rho^\delta dM - \frac{b_2^2}{2} \int_{B_r^-} \rho^{2\delta} H dM - \frac{b_2^4}{4} \int_{B_r^-} \rho^{4\delta} K dM. \end{aligned}$$

Visto que $H = |A|$, temos

$$\begin{aligned} V(r, h) &\geq \left(b_1 - \frac{b_1^2}{2} - \frac{b_1^4}{12\sqrt{3}} \right) \int_{B_r^+} \frac{1}{|A|} dM \\ &\quad + b_2 \int_{B_r^-} \rho^\delta dM - \frac{b_2^2}{2} \int_{B_r^-} \rho^{2\delta} H dM - \frac{b_2^4}{4} \int_{B_r^-} \rho^{4\delta} K dM. \end{aligned}$$

Vamos estimar as integrais sobre B_r^- . Usando a desigualdade (1.22) acima, obtemos

$$-K \geq -\frac{1}{3\sqrt{3}}|A|^3 \geq -\frac{b_1}{b_2} \frac{1}{3\sqrt{3}}\rho^{-3\delta}$$

e

$$-H = -|A| \geq \frac{b_1}{b_2}\rho^{-\delta}.$$

Visto que $|A|$ é limitado por hipótese, existe $a := \inf_M \frac{1}{|A|}$. Logo

$$\begin{aligned} V(r, h) &\geq \left(b_1 - \frac{b_1^2}{2} - \frac{b_1^4}{12\sqrt{3}}\right) \int_{B_r^+} \frac{1}{|A|} dM + \left(b_2 - \frac{b_2 b_1}{2} - \frac{b_2^3 b_1}{12\sqrt{3}}\right) \int_{B_r^-} \rho^\delta dM \\ &\geq a \left(b_1 - \frac{b_1^2}{2} - \frac{b_1^4}{12\sqrt{3}}\right) \text{vol}(B_r^+) + \left(b_2 - \frac{b_2 b_1}{2} - \frac{b_2^3 b_1}{12\sqrt{3}}\right) \int_{B_r^-} \rho^\delta dM. \end{aligned}$$

Por outro lado, para r suficientemente grande,

$$\begin{aligned} \int_{B_r^-} \rho^\delta dM &= \int_{B_r^- \setminus B_{\beta^{-1}r}^-} \rho^\delta dM + \int_{B_{\beta^{-1}r}^-} \rho^\delta dM \geq \int_{B_r^- \setminus B_{\beta^{-1}r}^-} \rho^\delta dM \\ &\geq \left(\frac{r}{\beta}\right)^\delta [\text{vol}(B_r^-) - \text{vol}(B_{\beta^{-1}r}^-)] \\ &\geq [\text{vol}(B_r^-) - \text{vol}(B_{\beta^{-1}r}^-)]. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} V(r, h) &\geq a \left(b_1 - \frac{b_1^2}{2} - \frac{b_1^4}{12\sqrt{3}}\right) \left(\text{vol}(B_r^+) - \text{vol}(B_{\beta^{-1}r}^+) + \text{vol}(B_{\beta^{-1}r}^+)\right) \\ &\quad + \left(b_2 - \frac{b_2 b_1}{2} - \frac{b_2^3 b_1}{12\sqrt{3}}\right) \left(\text{vol}(B_r^-) - \text{vol}(B_{\beta^{-1}r}^-)\right) \\ &\geq C[\text{vol}(B_r) - \text{vol}(B_{\beta^{-1}r})]. \end{aligned}$$

Usando o Lema 1.5.1, item (b), existe $\tilde{r} > r$ tal que

$$V(\tilde{r}, h) \geq C\tilde{r}^{5+q}. \quad (1.23)$$

Visto que a distância Euclidiana é menor ou igual à distância intrínseca, temos

$$B_r(p) \subset \mathbb{B}(p, r),$$

onde $B_r(p) \equiv B_r$ e $\mathbb{B}(p, r)$ denotam as bolas intrínseca e Euclidiana de centro p e raio r , respectivamente. Usando (1.21), temos

$$h(q) \geq \min \left\{ \frac{b_1}{|A|}, b_2 \rho(q)^\delta \right\} \geq \min \left\{ \inf_M \frac{b_1}{|A|}, b_2 \rho(q)^\delta \right\} = \inf_M \frac{b_1}{|A|} = b_1 a.$$

Logo, para $0 < b_1 \leq 1$ e ρ suficientemente grande, temos

$$T(r, b_1 a) \subset T(r, h).$$

Suponha, por contradição, que $T(r, b_1 a)$ é mergulhado. Visto que

$$T(r, b_1 a) \subset \mathbb{B}(p, r + 2b_1 a),$$

então seu volume $V(r, b_1 a)$ satisfaz

$$V(r, b_1 a) \leq \text{vol}(\mathbb{B}(p, r + 2b_1 a)) = \omega_4 (r + 2b_1 a)^4,$$

onde ω_4 é o volume de $\mathbb{B}(p, 1)$. Vamos considerar dois casos diferentes. Primeiro, se M não está contida em nenhuma bola, a desigualdade acima é uma contradição com (1.23) para r suficientemente grande. Portanto $T(r, b_1 a)$ e, desta forma, $T(r, h)$ não é mergulhado para r suficientemente grande. No segundo caso, se M está contida em alguma bola, então $T(M, h)$ tem volume finito (visto que $T(M, h)$ é mergulhada) e isto também contradiz (1.23). \square

Fórmula de monotonicidade e desigualdade de Poincaré

Neste capítulo provamos uma desigualdade do valor médio e uma fórmula de monotonicidade envolvendo as curvaturas média e escalar de uma hipersuperfície propriamente imersa em uma variedade Riemanniana com curvatura seccional limitada superiormente por uma constante. Como consequência das técnicas usadas na demonstração dos resultados acima, provamos uma desigualdade de Poincaré envolvendo as curvaturas média e escalar de hipersuperfícies imersas em uma variedade Riemanniana com curvatura seccional limitada superiormente por uma constante. Aplicamos essa desigualdade para obter uma desigualdade isoperimétrica envolvendo a integral da curvatura média, além de um resultado sobre hipersuperfícies estáveis de curvatura escalar zero no espaço Euclidiano.

2.1 Introdução

A desigualdade clássica de Poincaré estabelece que para qualquer função suave e não negativa $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, onde Ω é um subconjunto limitado, conexo e aberto de \mathbb{R}^m , com fronteira de classe \mathcal{C}^1 e para todo $1 \leq q < \infty$, existe uma constante $C = C(m, q, \Omega)$ dependendo apenas de m , q e Ω , tal que

$$\int_{\Omega} f^q dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla f|^q dx,$$

onde dx denota a medida de Lebesgue de \mathbb{R}^m . Em particular, se $\Omega = B_r(x_0)$, onde $B_r(x_0)$ denota a bola aberta de \mathbb{R}^m , existe uma constante $C = C(m, q)$ dependendo apenas de m e q tal que

$$\int_{B_r(x_0)} f^q dx \leq Cr \int_{B_r(x_0)} |\nabla f|^q dx,$$

ver por exemplo [Eva10], p. 289-290. Desigualdades do tipo Poincaré são um tópico fértil de pesquisa para funções definidas no espaço Euclidiano, assim como para variedades Riemannianas mais gerais. Podemos citar, por exemplo, [AD04], [FG13], [LW08], [Sim83] e suas referências.

Neste capítulo estabelecemos uma nova desigualdade de Poincaré envolvendo funções simétricas dos autovalores da segunda forma fundamental de uma hipersuperfície imersa em uma variedade Riemanniana com curvatura seccional limitada superiormente por uma constante. Estas funções simétricas podem ser interpretadas como múltiplos da curvatura média e da curvatura escalar, em um contexto que detalharemos em breve. Antes de estabelecer os principais resultados deste capítulo, vamos fixar algumas definições e notações.

Seja M^m , $m \geq 3$, uma hipersuperfície, possivelmente com bordo, de uma variedade Riemanniana \overline{M}^{m+1} . Se denotarmos por $A : TM \rightarrow TM$ o operador linear associado à segunda

forma fundamental da imersão, então a curvatura média da imersão é definida por

$$H = \frac{1}{m} \operatorname{tr}_M A.$$

É conhecido que A é um operador linear auto-adjunto e seus autovalores k_1, k_2, \dots, k_m são chamados de curvaturas principais da imersão. Definimos a primeira e a segunda funções simétricas associadas aos autovalores de A , respectivamente, por

$$S_1 = \sum_{i=1}^m k_i \text{ e } S_2 = \sum_{i<j}^m k_i k_j. \quad (2.1)$$

Estas funções tem significado geométrico natural. De fato, $S_1 = mH$ e, usando a equação de Gauss, se \bar{M} tem curvatura seccional constante κ , então $2S_2 = m(m-1)(R - \kappa)$, onde R denota a curvatura escalar de M .

Seja $i(\bar{M})$ o raio de injetividade de \bar{M} . Denotando por $K_{\bar{M}} = K_{\bar{M}}(x, \Pi_x)$ a curvatura seccional de \bar{M} em $x \in M$ relativa ao subespaço bidimensional $\Pi_x \subset T_x \bar{M}$, definimos

$$\kappa_0(x) = \inf_{\Pi_x \subset T_x \bar{M}} K_{\bar{M}}(x, \Pi_x).$$

Um domínio $\Omega \subset M$ é chamado um domínio regular se Ω tem fecho compacto $\bar{\Omega}$ e fronteira suave por partes. Neste capítulo vamos considerar domínios regulares Ω tais que $\bar{\Omega} \cap \partial M = \emptyset$. Sejam ρ a função distância de \bar{M} e

$$\operatorname{diam} \Omega = \sup \{ \rho(x, y); x, y \in \Omega \}$$

o diâmetro extrínseco de Ω . Definimos

$$r_0 = \begin{cases} \frac{5}{2\sqrt{\kappa}} \arcsen \left(\sqrt{\kappa} \times 2^{\frac{m+1}{m-1}} (\operatorname{diam} \Omega) \right) & \text{se } \kappa > 0; \\ 5 \times 2^{\frac{2}{m-1}} (\operatorname{diam} \Omega) & \text{se } \kappa \leq 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

onde assumimos

$$\sqrt{\kappa} \times 2^{\frac{m+1}{m-1}} (\operatorname{diam} \Omega) \leq 1,$$

se $\kappa > 0$.

O primeiro resultado deste capítulo é uma desigualdade do tipo Poincaré envolvendo as funções simétricas S_1 e S_2 .

Teorema 2.1.1 (Desigualdade tipo Poincaré). *Seja \bar{M}^{m+1} , $m \geq 3$, uma variedade Riemanniana $(m+1)$ -dimensional de curvatura seccional limitada superiormente por uma constante $\kappa \in \mathbb{R}$. Seja M^m uma hipersuperfície de \bar{M}^{m+1} , possivelmente com bordo, tal que $S_1 \neq 0$ e $S_2 \geq 0$. Assuma uma orientação de M tal que $S_1 > 0$. Sejam $\Omega \subset M$ um domínio regular tal que $\bar{\Omega} \cap \partial M = \emptyset$ e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função não negativa, de classe \mathcal{C}^1 e com suporte compacto contido em Ω . Se $2r_0 < i(\bar{M})$, então*

$$\int_{\Omega} f S_1 dM \leq \Lambda(m) (\operatorname{diam} \Omega) \int_{\Omega} \left[|\nabla f| S_1 + \left(\frac{m(\kappa - \kappa_0)}{4} + S_2 \right) f \right] dM,$$

onde

$$\Lambda(m) = \begin{cases} \pi \times 5^{\frac{m-3}{2}} \times 2^{\frac{m+1}{m-1}}, & \text{se } \kappa > 0; \\ 2^{\frac{2m}{m-1}} \times 5^{\frac{m-3}{2}}, & \text{se } \kappa \leq 0. \end{cases}$$

Observação 2.1.1. Visto que $k_i k_j = (-k_i)(-k_j)$, o sinal de S_2 não depende da escolha de orientação de M . Logo, se $S_1 \neq 0$ e $S_2 \geq 0$, podemos escolher uma orientação de M tal que $S_1 > 0$ e $S_2 \geq 0$.

Observação 2.1.2. Uma pergunta interessante é sobre a otimização da constante $\Lambda(m)$. As técnicas usadas aqui não nos permitem responder a essa questão. Em 2003, Acosta e Durán, ver [AD04], obtiveram uma desigualdade ótima para domínios convexos em \mathbb{R}^m , a saber: *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ é um subconjunto convexo e $f \in W^{1,1}(\Omega)$ satisfaz $\int_{\Omega} f dM = 0$, então*

$$\int_{\Omega} |f| dx \leq \frac{1}{2} (\text{diam } \Omega) \int_{\Omega} |\nabla f| dx.$$

Além disso, a constante $1/2$ é ótima.

Observação 2.1.3. Se $\kappa \leq 0$ e \bar{M} é uma variedade Riemanniana completa e simplesmente conexa, então $i(\bar{M}) = \infty$ e a condição $2r_0 \leq i(\bar{M})$ do Teorema 2.1.1 é automaticamente satisfeita.

Por outro lado, se $\kappa > 0$, então $r_0 \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$ por definição de r_0 , ver (2.2) acima. Em particular, se \bar{M} é a esfera Euclidiana $(m+1)$ -dimensional de curvatura constante κ , então $i(\bar{M}) = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ e a condição $2r_0 \leq i(\bar{M})$ é automaticamente satisfeita. Mais geralmente, se as curvaturas seccionais de \bar{M} estão entre $\frac{1}{4}\kappa$ e κ , então $i(\bar{M}) \geq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$, ver por exemplo [dC92], p.276. Logo, também neste caso, a condição $2r_0 \leq i(\bar{M})$ é automaticamente satisfeita.

Seja

$$\bar{M}^{m+1}(\kappa) = \begin{cases} \mathbb{S}^{m+1}(\kappa) & \text{se } \kappa > 0; \\ \mathbb{R}^{m+1} & \text{se } \kappa = 0; \\ \mathbb{H}^{m+1}(\kappa) & \text{se } \kappa < 0, \end{cases}$$

onde $\mathbb{S}^{m+1}(\kappa)$ denota a esfera Euclidiana $(m+1)$ -dimensional de curvatura seccional constante $\kappa > 0$, \mathbb{R}^{m+1} é o espaço Euclidiano $(m+1)$ -dimensional e $\mathbb{H}^{m+1}(\kappa)$ denota o espaço hiperbólico $(m+1)$ -dimensional de curvatura seccional constante $\kappa < 0$.

Se $K_M(v, w)$ denota a curvatura seccional de M no subespaço bidimensional gerado pelos vetores $v \in TM$ e $w \in TM$, lembramos que a curvatura escalar R de M é dada por

$$R = \frac{1}{m(m-1)} \sum_{i < j}^m K_M(e_i, e_j)$$

para qualquer referencial ortonormal $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ definido em M .

Corolário 2.1.1. *Seja $M^m, m \geq 3$, uma hipersuperfície de $\bar{M}^{m+1}(\kappa)$, possivelmente com fronteira, com curvatura média $H \neq 0$ e curvatura escalar $R \geq \kappa$. Assuma uma orientação de M tal que $H > 0$. Seja $\Omega \subset M$ um domínio regular tal que $\bar{\Omega} \cap \partial M = \emptyset$. Se $\kappa > 0$, assumamos ainda que*

$$\sqrt{\kappa} \times 2^{\frac{m+1}{m-1}} (\text{diam } \Omega) \leq 1.$$

Se $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função não negativa, de classe \mathcal{C}^1 e com suporte compacto contido em Ω , então

$$\int_{\Omega} fH dM \leq \Lambda(m)(\text{diam } \Omega) \int_{\Omega} \left[|\nabla f|H + \frac{(m-1)}{2}(R - \kappa)f \right] dM.$$

Definimos

$$\mathcal{A}_1(\Omega) = \int_{\Omega} S_1 dM, \quad (2.3)$$

a 1–area de um domínio regular $\Omega \subset M$. Como aplicação do Teorema 2.1.1, obtemos

Teorema 2.1.2 (Desigualdade Isoperimétrica). *Seja \bar{M}^{m+1} , $m \geq 3$, uma variedade Riemanniana $(m+1)$ –dimensional de curvatura seccional limitada superiormente por uma constante $\kappa \in \mathbb{R}$. Seja M^m uma hipersuperfície de \bar{M}^{m+1} , possivelmente com fronteira, tal que $S_1 \neq 0$ e $S_2 \geq 0$. Assuma uma orientação de M tal que $S_1 > 0$. Seja $\Omega \subset M$ um domínio regular tal que $2r_0 < i(\bar{M})$. Então*

$$\mathcal{A}_1(\Omega) \leq \Lambda(m)(\text{diam } \Omega) \left[\mathcal{A}_1(\partial\Omega) + \int_{\Omega} \left(\frac{m(\kappa - \kappa_0)}{4} + S_2 \right) dM \right]. \quad (2.4)$$

Como casos particulares do Teorema 2.1.2, temos

Corolário 2.1.2. *Assuma as hipóteses do Teorema 2.1.2.*

(i) *Se $\bar{M}^{m+1} = \bar{M}^{m+1}(\kappa)$, então*

$$\mathcal{A}_1(\Omega) \leq \Lambda(m)(\text{diam } \Omega) \left[\mathcal{A}_1(\partial\Omega) + \frac{m-1}{2} \int_{\Omega} (R - \kappa) dM \right].$$

Em particular, se $R = \kappa$, então

$$\mathcal{A}_1(\Omega) \leq \Lambda(m)(\text{diam } \Omega) \mathcal{A}_1(\partial\Omega).$$

(ii) *Se M é compacta e sem fronteira, então*

$$\mathcal{A}_1(M) \leq \Lambda(m)(\text{diam } M) \left[\int_M \left(\frac{m(\kappa - \kappa_0)}{4} + S_2 \right) dM \right],$$

onde $\text{diam } M$ denota o diâmetro extrínscico de M .

(iii) *Se M é compacta, sem fronteira e $\bar{M}^{m+1} = \bar{M}^{m+1}(\kappa)$, então*

$$\text{diam } M \geq \frac{\Lambda(m)^{-1}}{(m-1)} \left(\frac{\min H}{\max R - \kappa} \right).$$

A última aplicação da desigualdade de Poincaré que apresentaremos neste capítulo refere-se à estabilidade de hipersuperfícies com curvatura escalar zero em \mathbb{R}^{m+1} , no sentido que introduzimos a seguir.

Seja M^m , $m \geq 3$, uma hipersuperfície de \mathbb{R}^{m+1} e $\Omega \subset M$ um domínio regular. Uma variação de Ω com suporte compacto é uma aplicação diferenciável $F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$, $\varepsilon > 0$, tal que, para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, a aplicação $F_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$, definida por $F_t(p) = F(t, p)$ é uma imersão, F_0 é a imersão original restrita a Ω e $F_t|_{\partial\Omega} = F_0|_{\partial\Omega}$. É conhecido que hipersuperfícies de \mathbb{R}^{m+1} com curvatura escalar constante são pontos críticos do funcional

$$\mathcal{A}_1(t) = \int_{\Omega} S_1(t) dM_t$$

para todas as variações com suporte compacto em Ω . Mais detalhes a respeito desta discussão podem ser encontrados em [Rei73], [AdCC93], [Ros93] e [BC97].

Seguindo Alencar, do Carmo e Elbert, ver [AdCE03], iremos definir o conceito de estabilidade para imersões com curvatura escalar nula.

Se $S_1 \neq 0$ em todo ponto, podemos escolher uma orientação de M tal que $S_1 > 0$ em todo ponto ou $S_1 < 0$ em todo ponto. Ao contrário do caso de hipersuperfícies mínimas, o sinal do funcional \mathcal{A}_1 depende da escolha da orientação de M^m . Se escolhermos uma orientação tal que $S_1 > 0$ em todo ponto, então a imersão será estável se $\left. \frac{d^2 \mathcal{A}_1}{dt^2} \right|_{t=0} > 0$ para todas as variações com suporte compacto. Caso contrário, isto é, se escolhermos uma orientação tal que $S_1 < 0$, então a imersão será estável se $\left. \frac{d^2 \mathcal{A}_1}{dt^2} \right|_{t=0} < 0$.

Modificando convenientemente a prova do Teorema 2.1.1, obtemos uma desigualdade de Poincaré modificada, ver Proposição 2.5.1, p. 58, a qual usamos para demonstrar o resultado a seguir. Seja

$$S_3 = \sum_{i < j < l}^m k_i k_j k_l$$

a terceira função simétrica dos autovalores da segunda forma fundamental da imersão.

Teorema 2.1.3. *Seja M^m , $m \geq 3$, uma hipersuperfície de \mathbb{R}^{m+1} com curvatura escalar zero. Além disso, vamos assumir que $S_1 \neq 0$ e escolher uma orientação tal que $S_1 > 0$. Seja $\Omega \subset M$ um domínio regular. Se*

$$\sup_{\Omega} \left(\frac{-3S_3}{S_1} \right) \leq \frac{\Lambda(m)^{-1}}{2(\text{diam } \Omega)^2},$$

onde

$$\Lambda(m) = 2^{\frac{2m}{m-1}} \times 5^{\frac{m-3}{2}},$$

então Ω é estável.

Sejam

$$\text{Ric}_{\overline{M}}(\overline{V}, \overline{W}) = \text{tr}_{\overline{M}}(\overline{E} \rightarrow \overline{R}(\overline{V}, \overline{E})\overline{W}), \quad \overline{E}, \overline{V}, \overline{W} \in T\overline{M},$$

o tensor de Ricci de \overline{M} , onde \overline{R} é o tensor curvatura de \overline{M} , $P_1 : TM \rightarrow TM$ definida por

$$P_1 = S_1 I - A,$$

a primeira transformação de Newton, onde $I : TM \rightarrow TM$ é a aplicação identidade, e $B_r = B_r(p)$ a bola geodésica de \overline{M} de centro p e raio r .

O resultado a seguir será importante na demonstração da desigualdade de Poincaré, além de ser de interesse independente.

Teorema 2.1.4 (Desigualdade do Valor Médio). *Seja M^m , $m \geq 3$, uma hipersuperfície própria de uma variedade Riemanniana \bar{M}^{m+1} de curvatura seccional limitada superiormente por uma constante $\kappa \in \mathbb{R}$. Suponhamos que $S_1 \neq 0$, $S_2 \geq 0$ e escolhamos uma orientação para M tal que $S_1 > 0$. Sejam $\rho = \rho(p, \cdot)$ a função distância de \bar{M} e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função não negativa, localmente integrável e de classe \mathcal{C}^1 . Se $0 < \sigma < t < i(\bar{M})$, então*

(i) para $\kappa > 0$ e $\kappa t^2 < \pi^2$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\text{sen } \sqrt{\kappa t})^{\frac{m-1}{2}}} \int_{M \cap B_t} f S_1 dM - \frac{1}{(\text{sen } \sqrt{\kappa \sigma})^{\frac{m-1}{2}}} \int_{M \cap B_\sigma} f S_1 dM \\ & \geq \frac{1}{2} \int_\sigma^t r^{-1} (\text{sen } \sqrt{\kappa r})^{-\frac{m-1}{2}} \times \\ & \quad \times \int_{M \cap B_r} \left[\langle \rho \bar{\nabla} \rho, P_1(\nabla f) + 2S_2 f \eta \rangle + f \text{Ric}_{\bar{M}}(\rho \nabla \rho, \eta) \right] dM dr; \end{aligned}$$

(ii) para $\kappa \leq 0$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t^{\frac{m-1}{2}}} \int_{M \cap B_t} f S_1 dM - \frac{1}{\sigma^{\frac{m-1}{2}}} \int_{M \cap B_\sigma} f S_1 dM \\ & \geq \frac{1}{2} \int_\sigma^t r^{-\frac{m+1}{2}} \int_{M \cap B_r} \left[\langle \rho \bar{\nabla} \rho, P_1(\nabla f) + 2S_2 f \eta \rangle + f \text{Ric}_{\bar{M}}(\rho \nabla \rho, \eta) \right] dM dr. \end{aligned}$$

Como consequência da desigualdade do valor médio, obtemos uma fórmula de monotonicidade que enunciamos a seguir. Fórmulas de monotonicidade aparecem em muitos ramos da Análise e da Geometria Riemanniana, no estudo para determinar o comportamento variacional de grandezas geométricas ver, por exemplo, [BdLS04], [Col12], [CM14], [Eck01], [Eck05], [Grü88], [Li07], [Sim83] e [Urb03] para mais detalhes.

Teorema 2.1.5 (Monotonicidade). *Seja M^m , $m \geq 3$, uma hipersuperfície própria de uma variedade Riemanniana \bar{M}^{m+1} de curvatura seccional limitada superiormente por uma constante $\kappa \in \mathbb{R}$. Suponhamos que $S_1 \neq 0$, $S_2 \geq 0$ e escolhamos uma orientação tal que $S_1 > 0$. Se existem $0 < \alpha \leq 1$, $\Gamma \geq 0$ e $0 < R_0 < i(\bar{M})$ tais que*

$$\alpha^{-1} \int_{M \cap B_r} \left(\frac{m(\kappa - \kappa_0)}{4} + S_2 \right) dM \leq \Gamma \left(\frac{r}{R_0} \right)^{\alpha-1} \mathcal{A}_1(M \cap B_r), \quad (2.5)$$

para todo $r \in (0, R_0)$, então

(i) para $\kappa > 0$ e $\kappa R_0^2 \leq \pi^2$, a função $h : (0, R_0) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(r) = \exp(\Gamma R_0^{1-\alpha} r^\alpha) \frac{\mathcal{A}_1(M \cap B_r)}{(\text{sen } \sqrt{\kappa r})^{\frac{m-1}{2}}}$$

é monótona não decrescente;

(ii) para $\kappa \leq 0$, a função $h : (0, R_0) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(r) = \exp(\Gamma R_0^{1-\alpha} r^\alpha) \frac{\mathcal{A}_1(M \cap B_r)}{r^{\frac{m-1}{2}}}$$

é monótona não decrescente.

Observação 2.1.4. Existem resultados anteriores envolvendo fórmulas de monotonicidade e funções simétricas, ver por exemplo, [BdLS04], [Fre96] e [Urb03].

Como caso particular da fórmula de monotonicidade acima, temos

Corolário 2.1.3 (Monotonicidade). *Seja $\overline{M}^{m+1}(\kappa)$ uma variedade Riemanniana $(m+1)$ -dimensional de curvatura seccional constante κ . Seja M^m , $m \geq 3$ uma hipersuperfície própria de $\overline{M}^{m+1}(\kappa)$ tal que $S_2 = 0$ e $S_1 \neq 0$. Assuma uma orientação de M tal que $S_1 > 0$.*

(i) Se $\kappa > 0$ e $\kappa r^2 \leq \pi^2$, então a função $g : (0, \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(r) = \frac{\mathcal{A}_1(M \cap B_r)}{(\text{sen } \sqrt{\kappa} r)^{\frac{m-1}{2}}}$$

é monótona não decrescente;

(ii) Se $\kappa \leq 0$, então a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(r) = \frac{\mathcal{A}_1(M \cap B_r)}{r^{\frac{m-1}{2}}}$$

é monótona não decrescente.

Seguindo as ideias de Simon, [Sim83], p. 84-85, queremos analisar a importante questão sobre o que acontece ao assumirmos limitações L^p para S_2 . A segunda aplicação da desigualdade do valor médio é o teorema a seguir.

Teorema 2.1.6. *Seja M^m , $m \geq 3$, uma hipersuperfície própria de uma variedade Riemanniana \overline{M}^{m+1} de curvatura seccional limitada superiormente por uma constante $\kappa \leq 0$. Suponhamos que $S_1 \geq c$ para alguma constante $c > 0$ e que $S_2 \geq 0$. Se existem $0 < R_0 < i(\overline{M})$, $\Gamma > 0$ e $p > 1$ tais que*

$$\left[\int_{M \cap B_{R_0}} \left(\frac{m(\kappa - \kappa_0)}{4} + S_2 \right)^p dM \right]^{1/p} \leq \Gamma, \quad (2.6)$$

então

$$\left(\frac{\mathcal{A}_1(M \cap B_\sigma)}{\sigma^{\frac{m-1}{2}}} \right)^{1/p} \leq \left(\frac{\mathcal{A}_1(M \cap B_t)}{t^{\frac{m-1}{2}}} \right)^{1/p} + \frac{2\Gamma}{c^{1-1/p}(m-1+2p)} \left(t^{1-\frac{m-1}{2p}} - \sigma^{1-\frac{m-1}{2p}} \right)$$

para quaisquer $0 < \sigma < t < R_0$.

2.2 Resultados preliminares

Seja M^m , $m \geq 3$, uma hipersuperfície m -dimensional de uma variedade Riemanniana \bar{M}^{m+1} . Denotemos por ∇ e $\bar{\nabla}$ as conexões de M e \bar{M} , respectivamente. Seja $\bar{X} : M \rightarrow T\bar{M}$ um campo de vetores que decompos da forma $\bar{X} = X^T + X^N$, onde $X^T \in TM$ e $X^N \in TM^\perp$. Sejam $Y, Z \in TM$ e denotemos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a métrica de \bar{M} . Temos que

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nabla}_Y \bar{X}, Z \rangle &= \langle \bar{\nabla}_Y X^T + \bar{\nabla}_Y X^N, Z \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_Y X^T, Z \rangle + \langle \bar{\nabla}_Y X^N, Z \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_Y X^T, Z \rangle - \langle X^N, \bar{\nabla}_Y Z \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_Y X^T, Z \rangle - \langle X^N, \bar{\nabla}_Y Z - \nabla_Y Z \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_Y X^T, Z \rangle - \langle X^N, B(Y, Z) \rangle, \end{aligned}$$

onde $B(Y, Z) = \bar{\nabla}_Y Z - \nabla_Y Z$ denota a segunda forma fundamental da imersão. Se η denota o campo de vetores normal e unitário à imersão, então $X^N = \langle \bar{X}, \eta \rangle \eta$. Isto implica

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nabla}_Y \bar{X}, Z \rangle &= \langle \bar{\nabla}_Y X^T, Z \rangle - \langle \bar{X}, \eta \rangle \langle \eta, B(Y, Z) \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_Y X^T, Z \rangle - \langle \bar{X}, \eta \rangle \langle A(Y), Z \rangle, \end{aligned} \tag{2.7}$$

onde $A : TM \rightarrow TM$ é o operador linear associado à segunda forma fundamental, definido por

$$\langle A(V), W \rangle = \langle \eta, B(V, W) \rangle, \quad V, W \in TM.$$

Definição 2.2.1. A primeira transformação de Newton $P_1 : TM \rightarrow TM$ é definida por

$$P_1 = S_1 I - A,$$

onde $S_1 = \text{tr}_M A$ e $I : TM \rightarrow TM$ é a aplicação identidade.

Observação 2.2.1. Visto que A é auto-adjunto, temos que P_1 também é um operador linear auto-adjunto. Denotemos por k_1, k_2, \dots, k_m os de A , também conhecidos como curvaturas principais da imersão. Visto que P_1 é um operador linear auto-adjunto, podemos considerar seus autovalores $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ dados por $\theta_i = S_1 - k_i$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Observação 2.2.2. Se $S_1 > 0$ e $S_2 \geq 0$, então P_1 é semipositivo definido. Este fato é conhecido e pode ser encontrado em [AdCS02], observação 2.1, p.552. De fato, se $S_2 \geq 0$, então $S_1^2 = |A|^2 + 2S_2 \geq k_i^2$, para quaisquer $i = 1, 2, \dots, m$. Logo $0 \leq S_1^2 - k_i^2 = (S_1 - k_i)(S_1 + k_i)$ e isto implica que todos os autovalores de P_1 são não negativos, visto que $S_1 \geq 0$. Portanto, P_1 é semipositivo definido.

Definição 2.2.2. Sejam $\bar{X} : M \rightarrow T\bar{M}$ um campo de vetores. O gradiente $\bar{\nabla} \bar{X} : TM \rightarrow T\bar{M}$ de \bar{X} é definido por

$$\bar{\nabla} \bar{X}(V) = \bar{\nabla}_V \bar{X}.$$

A divergência de \bar{X} em M é definida por

$$\text{div}_M(\bar{X}) = \text{tr}_M(\bar{\nabla} \bar{X}).$$

Se $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ é um referencial ortonormal adaptado, tangente a M , então

$$\operatorname{div}_M(\bar{X}) = \sum_{i=1}^m \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{X}, e_i \rangle.$$

O tensor de Ricci de \bar{M} é definido por

$$\operatorname{Ric}_{\bar{M}}(\bar{V}, \bar{W}) = \operatorname{tr}_{\bar{M}}(\bar{E} \rightarrow \bar{R}(\bar{V}, \bar{E})\bar{W}),$$

onde $\bar{E}, \bar{V}, \bar{W} \in T\bar{M}$ e \bar{R} denota o tensor de curvatura de \bar{M} .

O lema a seguir é conhecido e incluímos uma prova aqui por razões de completeza.

Lema 2.2.1. Se $(\operatorname{div} P_1)(V) = \operatorname{tr}_M(E \mapsto (\nabla_E P_1)(V))$, onde $(\nabla_E P_1)(V) = \nabla_E(P_1(V)) - P_1(\nabla_E V)$, então

$$(\operatorname{div} P_1)(V) = \operatorname{Ric}_{\bar{M}}(V, \eta)$$

para todo $V \in TM$, onde η denota o campo de vetores unitários normais à imersão. Em particular, se \bar{M}^{m+1} tem curvatura seccional constante κ , então $\operatorname{div} P_1 = 0$.

Demonstração. Seja $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ um referencial geodésico tangente a $p \in M$. Usando a equação de Codazzi

$$\langle (\nabla_V A)(Y), Z \rangle - \langle (\nabla_Y A)(V), Z \rangle = \langle \bar{R}(Y, V)Z, \eta \rangle$$

para $Y = Z = e_i$ e somando sobre i de 1 a m , temos

$$\sum_{i=1}^m \langle (\nabla_V A)(e_i), e_i \rangle - \langle (\nabla_{e_i} A)(V), e_i \rangle = \langle \bar{R}(e_i, V)e_i, \eta \rangle,$$

isto é,

$$\sum_{i=1}^m \langle (\nabla_V A)(e_i), e_i \rangle - (\operatorname{div} A)(V) = \operatorname{Ric}_{\bar{M}}(V, \eta).$$

Observando que

$$\sum_{i=1}^m \langle (\nabla_V A)(e_i), e_i \rangle = \sum_{i=1}^m V \langle A(e_i), e_i \rangle = V(S_1) = \operatorname{div}(S_1 I)(V),$$

onde $I : TM \rightarrow TM$ é a aplicação identidade, concluímos

$$\operatorname{div}(S_1 I - A)(V) = \operatorname{Ric}_{\bar{M}}(V, \eta).$$

Em particular, se \bar{M} tem curvatura seccional constante κ , então $\operatorname{Ric}_{\bar{M}}(V, \eta) = m\kappa \langle V, \eta \rangle = 0$, o que implica $\operatorname{div} P_1 = 0$. \square

A proposição a seguir será uma ferramenta importante na demonstração do Teorema 2.1.1.

Proposição 2.2.1. Se $M^m, m \geq 3$, é uma hipersuperfície de \bar{M}^{m+1} e $\bar{X} : M \rightarrow T\bar{M}$ é um campo de vetores, então

$$\operatorname{div}_M(P_1(X^T)) = \operatorname{tr}_M \left(E \mapsto P_1 \left(\left(\bar{\nabla}_E \bar{X} \right)^T \right) \right) + \operatorname{Ric}_{\bar{M}}(X^T, \eta) + 2S_2 \langle \bar{X}, \eta \rangle, \quad (2.8)$$

onde $\operatorname{Ric}_{\bar{M}}$ denota o tensor de Ricci de \bar{M} e $X^T = \bar{X} - \langle \bar{X}, \eta \rangle \eta$ é a parte tangente de \bar{X} .

Demonstração. Seja $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ um referencial ortonormal adaptado a M . Inicialmente, visto que P_1 é auto-adjunto, temos

$$\operatorname{tr}_M \left(E \mapsto P_1 \left(\left(\bar{\nabla}_E \bar{X} \right)^T \right) \right) = \sum_{i=1}^m \left\langle P_1 \left(\left(\bar{\nabla}_{e_i} \bar{X} \right)^T \right), e_i \right\rangle = \sum_{i=1}^m \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{X}, P_1(e_i) \rangle. \quad (2.9)$$

Usando (2.7), p.37, e o fato de A ser auto-adjunto, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{X}, P_1(e_i) \rangle &= \sum_{i=1}^m \langle \bar{\nabla}_{e_i} X^T, P_1(e_i) \rangle - \left(\sum_{i=1}^m \langle A(e_i), P_1(e_i) \rangle \right) \langle \bar{X}, \eta \rangle \\ &= \sum_{i=1}^m \langle \bar{\nabla}_{e_i} X^T, P_1(e_i) \rangle - \left(\sum_{i=1}^m \langle (A \circ P_1)(e_i), e_i \rangle \right) \langle \bar{X}, \eta \rangle \\ &= \sum_{i=1}^m \langle \bar{\nabla}_{e_i} X^T, P_1(e_i) \rangle - \operatorname{tr}_M(A \circ P_1) \langle \bar{X}, \eta \rangle. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^m \langle \bar{\nabla}_{e_i} X^T, P_1(e_i) \rangle = \operatorname{tr}_M \left(E \mapsto P_1 \left(\left(\bar{\nabla}_E \bar{X} \right)^T \right) \right) + \operatorname{tr}_M(A \circ P_1) \langle \bar{X}, \eta \rangle.$$

Por outro lado, o fato de P_1 ser auto-adjunto implica

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \langle \bar{\nabla}_{e_i} X^T, P_1(e_i) \rangle &= \sum_{i=1}^m \langle \nabla_{e_i} X^T + B(e_i, X^T), P_1(e_i) \rangle = \sum_{i=1}^m \langle \nabla_{e_i} X^T, P_1(e_i) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^m \langle P_1(\nabla_{e_i} X^T), e_i \rangle = \sum_{i=1}^m \langle \nabla_{e_i}(P_1(X^T)), e_i \rangle - \sum_{i=1}^m \langle (\nabla_{e_i} P_1)(X^T), e_i \rangle \\ &= \operatorname{div}_M(P_1(X^T)) - \operatorname{tr}_M(E \rightarrow (\nabla_E P_1)(X^T)) \\ &= \operatorname{div}_M(P_1(X^T)) - (\operatorname{div} P_1)(X^T). \end{aligned}$$

Logo,

$$\operatorname{div}_M(P_1(X^T)) = \operatorname{tr}_M \left(E \mapsto P_1 \left(\left(\bar{\nabla}_E \bar{X} \right)^T \right) \right) + (\operatorname{div} P_1)(X^T) + \operatorname{tr}_M(A \circ P_1) \langle \bar{X}, \eta \rangle.$$

O resultado segue, portanto, usando o Lema 2.2.1 e a igualdade abaixo

$$\operatorname{tr}_M(A \circ P_1) = \operatorname{tr}_M(A \circ (S_1 I - A)) = S_1 \operatorname{tr}_M(A) - \operatorname{tr}_M(A^2) = S_1^2 - |A|^2 = 2S_2.$$

□

Observação 2.2.3. Se a curvatura seccional $K_{\bar{M}}$ de \bar{M}^{m+1} satisfaz

$$\kappa_0 \leq K_{\bar{M}} \leq \kappa$$

para números reais κ_0 e κ , então

$$|\text{Ric}_{\bar{M}}(\bar{V}, \bar{W})| \leq \frac{m(\kappa - \kappa_0)}{2}$$

para qualquer par ortogonal de vetores $\bar{V}, \bar{W} \in T\bar{M}$ tais que $|\bar{V}| \leq 1, |\bar{W}| \leq 1$. De fato, considerando um referencial ortonormal $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_m, \bar{e}_{m+1}\}$ tangente a \bar{M} , obtemos

$$\begin{aligned} \text{Ric}_{\bar{M}}(\bar{V}, \bar{V}) &= \sum_{i=1}^{m+1} \langle \bar{R}(\bar{V}, \bar{e}_i)\bar{V}, \bar{e}_i \rangle = \sum_{i=1}^{m+1} K_{\bar{M}}(\bar{V}, \bar{e}_i)(|\bar{V}|^2 - \langle \bar{V}, \bar{e}_i \rangle^2) \\ &\leq \kappa \sum_{i=1}^{m+1} (|\bar{V}|^2 - \langle \bar{V}, \bar{e}_i \rangle^2) = \kappa[(m+1)|\bar{V}|^2 - |\bar{V}|^2] \\ &= m\kappa|\bar{V}|^2. \end{aligned}$$

Analogamente, $\text{Ric}_{\bar{M}}(\bar{V}, \bar{V}) \geq m\kappa_0|\bar{V}|^2$. Visto que $\text{Ric}_{\bar{M}}$ é uma forma bilinear simétrica,

$$\begin{aligned} \text{Ric}_{\bar{M}}(\bar{V}, \bar{W}) &= \frac{1}{4} [\text{Ric}_{\bar{M}}(\bar{V} + \bar{W}, \bar{V} + \bar{W}) - \text{Ric}_{\bar{M}}(\bar{V} - \bar{W}, \bar{V} - \bar{W})], \\ &\leq \frac{1}{4} [m\kappa|\bar{V} + \bar{W}|^2 - m\kappa_0|\bar{V} - \bar{W}|^2] \\ &= \frac{1}{4} [m\kappa(|\bar{V}|^2 + 2\langle \bar{V}, \bar{W} \rangle + |\bar{W}|^2) - m\kappa_0(|\bar{V}|^2 - 2\langle \bar{V}, \bar{W} \rangle + |\bar{W}|^2)] \\ &= \frac{1}{4} m(\kappa - \kappa_0)(|\bar{V}|^2 + |\bar{W}|^2) \\ &\leq \frac{m(\kappa - \kappa_0)}{2}. \end{aligned}$$

Analogamente, $\text{Ric}_{\bar{M}}(\bar{V}, \bar{W}) \geq -\frac{m(\kappa - \kappa_0)}{2}$. Portanto,

$$-\frac{m(\kappa - \kappa_0)}{2} \leq \text{Ric}_{\bar{M}}(\bar{V}, \bar{W}) \leq \frac{m(\kappa - \kappa_0)}{2}.$$

No lema a seguir iremos estimar $\text{tr}_M \left(E \mapsto P_1 \left(\left(\bar{\nabla}_E \bar{X} \right)^T \right) \right)$ em termos de S_1 , da função distância de \bar{M} e da cota superior κ da curvatura seccional de \bar{M} .

Lema 2.2.2. *Sejam $\bar{M}^{m+1}, m \geq 3$, uma variedade Riemanniana de curvatura seccional limitada superiormente por uma constante κ , M uma hipersuperfície de \bar{M}^{m+1} , $\rho(x) = \rho(p, x)$ a distância geodésica de \bar{M} partindo de $p \in M$ e $\bar{X} = \rho \bar{\nabla} \rho$ o campo de vetores radial partindo de $p \in M$ e restrito a M . Suponhamos que P_1 seja semipositivo definido. Se $q \in M$ é tal que $\rho(q) < i(\bar{M})$ e, além disso, para $\kappa > 0$ tivermos $\kappa \rho(q)^2 < \pi^2$, então*

$$\text{tr}_M \left(E \mapsto P_1 \left(\left(\bar{\nabla}_E \bar{X} \right)^T \right) \right) (q) \geq \begin{cases} (m-1)S_1(q)(\sqrt{\kappa}\rho(q)) \cot(\sqrt{\kappa}\rho(q)), & \text{se } \kappa > 0, \\ (m-1)S_1(q), & \text{se } \kappa \leq 0. \end{cases}$$

Demonstração. Seja $\gamma: [0, \rho(q)] \rightarrow \overline{M}$ definida por $\gamma(t) = \exp_p(tu)$, $u \in T_p\overline{M}$, a única geodésica unitária tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma(\rho(q)) = q$. Seja $\{e_1(q), e_2(q), \dots, e_m(q)\}$ uma base ortonormal de T_qM formada por autovetores de P_1 em $q \in M$, isto é,

$$P_1(e_i(q)) = \theta_i(q)e_i(q), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

ver Observação 2.2.1, p.37. Sejam Y_i , $i = 1, 2, \dots, m$, as projeções unitárias de $e_i(q)$ sobre $\gamma'(\rho(q))^\perp \subset T_q\overline{M}$, isto é,

$$Y_i = \frac{e_i(q) - \langle e_i(q), \gamma'(\rho(q)) \rangle \gamma'(\rho(q))}{\|e_i(q) - \langle e_i(q), \gamma'(\rho(q)) \rangle \gamma'(\rho(q))\|}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Portanto,

$$e_i(q) = b_i Y_i + c_i \gamma'(\rho(q)),$$

onde $b_i = \|e_i(q) - \langle e_i(q), \gamma'(\rho(q)) \rangle \gamma'(\rho(q))\|$ e $c_i = \langle e_i(q), \gamma'(\rho(q)) \rangle$. Observemos que $b_i^2 + c_i^2 = 1$ e $Y_i \perp \gamma'$ para todo $i = 1, 2, \dots, m$. Visto que a curvatura seccional $K_{\overline{M}} \leq \kappa$ e para $\kappa > 0$ temos $\kappa \rho^2(q) < \pi^2$, não existem pontos conjugados a p ao longo de γ . Se $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ denotam os autovalores de P_1 , então

$$\begin{aligned} \text{tr}_M \left(E \mapsto P_1 \left(\left(\overline{\nabla}_E \overline{X} \right)^T \right) \right) &= \sum_{i=1}^m \langle \overline{\nabla}_{e_i} \overline{X}, P_1(e_i) \rangle = \sum_{i=1}^m \theta_i \langle \overline{\nabla}_{e_i} \overline{X}, e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^m \theta_i \langle \overline{\nabla}_{b_i Y_i + c_i \gamma'} \overline{X}, b_i Y_i + c_i \gamma' \rangle \\ &= \sum_{i=1}^m \theta_i b_i^2 \langle \overline{\nabla}_{Y_i} \overline{X}, Y_i \rangle + \sum_{i=1}^m \theta_i c_i^2 \langle \overline{\nabla}_{\gamma'} \overline{X}, \gamma' \rangle \\ &\quad + \sum_{i=1}^m \theta_i b_i c_i \left[\langle \overline{\nabla}_{Y_i} \overline{X}, \gamma' \rangle + \langle \overline{\nabla}_{\gamma'} \overline{X}, Y_i \rangle \right]. \end{aligned}$$

Por outro lado, como $\overline{X}(t) = \rho(t) \overline{\nabla} \rho(t) = \rho(t) \gamma'(t)$ e $\overline{\nabla}_{\gamma'} \gamma' = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle \overline{\nabla}_{\gamma'} \overline{X}, \gamma' \rangle &= \langle \overline{\nabla}_{\gamma'} (\rho \gamma'), \gamma' \rangle = \langle \langle \overline{\nabla} \rho, \gamma' \rangle \gamma' + \rho \overline{\nabla}_{\gamma'} \gamma', \gamma' \rangle \\ &= \langle \overline{\nabla} \rho, \gamma' \rangle \langle \gamma', \gamma' \rangle = 1, \\ \langle \overline{\nabla}_{Y_i} \overline{X}, \gamma' \rangle &= \langle \overline{\nabla}_{Y_i} (\rho \gamma'), \gamma' \rangle = \langle \langle Y_i, \overline{\nabla} \rho \rangle \gamma' + \rho \overline{\nabla}_{Y_i} \gamma', \gamma' \rangle \\ &= \langle Y_i, \gamma' \rangle + \rho \langle \overline{\nabla}_{Y_i} \gamma', \gamma' \rangle \\ &= \frac{\rho}{2} Y_i \langle \gamma', \gamma' \rangle = 0, \\ \langle \overline{\nabla}_{\gamma'} \overline{X}, Y_i \rangle &= \langle \overline{\nabla}_{\gamma'} (\rho \gamma'), Y_i \rangle = \langle \langle \gamma', \overline{\nabla} \rho \rangle \gamma' + \rho \overline{\nabla}_{\gamma'} \gamma', Y_i \rangle = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\text{tr}_M \left(E \mapsto P_1 \left(\left(\overline{\nabla}_E \overline{X} \right)^T \right) \right) = \sum_{i=1}^m \theta_i b_i^2 \langle \overline{\nabla}_{Y_i} \overline{X}, Y_i \rangle + \sum_{i=1}^m \theta_i c_i^2.$$

Agora, usando o Lema 2.5, p.713 de [JK81], temos

$$\langle \bar{\nabla}_{Y_i} \bar{X}, Y_i \rangle(\rho(q)) \geq \begin{cases} \sqrt{\kappa} \rho(q) \cot(\sqrt{\kappa} \rho(q)), & \text{se } \kappa > 0; \\ 1, & \text{se } \kappa = 0; \\ \sqrt{-\kappa} \rho(q) \coth(\sqrt{-\kappa} \rho(q)), & \text{se } \kappa < 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

No caso $\kappa > 0$, visto que $0 \leq \sqrt{\kappa} \rho \cot(\sqrt{\kappa} \rho) \leq 1$ para $\rho \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$, obtemos

$$\begin{aligned} \text{tr}_M \left(E \mapsto P_1 \left(\left(\bar{\nabla}_E \bar{X} \right)^T \right) \right) &\geq \sum_{i=1}^m \theta_i b_i^2 \rho \sqrt{\kappa} \cot(\sqrt{\kappa} \rho) + \sum_{i=1}^m \theta_i c_i^2 \\ &\geq \left(\sum_{i=1}^m \theta_i (b_i^2 + c_i^2) \right) \sqrt{\kappa} \rho \cot(\sqrt{\kappa} \rho) \\ &= (\text{tr}_M P_1) \sqrt{\kappa} \rho \cot(\sqrt{\kappa} \rho) \\ &= (m-1) S_1 \sqrt{\kappa} \rho \cot(\sqrt{\kappa} \rho). \end{aligned}$$

A prova para o caso $\kappa \leq 0$ é análoga e segue das ideias do caso $\kappa > 0$ observando que $\sqrt{-\kappa} \rho \coth(\sqrt{-\kappa} \rho) \geq 1$. \square

2.3 Desigualdade do valor médio e fórmula de monotonicidade

Sejam $K_{\bar{M}} = K_{\bar{M}}(x, \Pi_x)$ a curvatura seccional de \bar{M} em $x \in M$ relativa ao subespaço bidimensional $\Pi_x \subset T_x \bar{M}$ e $\kappa_0(x) = \inf_{\Pi_x \subset T_x \bar{M}} K_{\bar{M}}(x, \Pi_x)$. De agora em diante, denotaremos por $B_r = B_r(p)$

a bola aberta em \bar{M} com centro em $p \in M$ e raio r . Assuma $B_r(p) \cap \partial M = \emptyset$. Se M é uma hipersuperfície própria de \bar{M}^{m+1} , então $\partial(M \cap B_r) \neq \emptyset$. Além disso, $M \cap B_r$ e $\partial(M \cap B_r)$ satisfazem as hipóteses do Teorema de Gauss-Green, ver [Fed69], p. 478.

Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função não negativa, localmente integrável e de classe \mathcal{C}^1 . A seguir iremos obter uma desigualdade do valor médio para a função F definida por

$$F(r) = \begin{cases} (\text{sen } \sqrt{\kappa} r)^{-\frac{m-1}{2}} \int_{M \cap B_r} f S_1 dM, & \text{se } \kappa > 0; \\ r^{-\frac{m-1}{2}} \int_{M \cap B_r} f S_1 dM, & \text{se } \kappa \leq 0. \end{cases}$$

Teorema 2.3.1 (Desigualdade do Valor Médio). *Seja M^m , $m \geq 3$, uma hipersuperfície própria de uma variedade Riemanniana \bar{M}^{m+1} com curvatura seccional limitada superiormente por uma constante κ . Suponhamos que $S_1 \neq 0$, $S_2 \geq 0$ e escolhamos uma orientação para M tal que $S_1 > 0$. Seja $\rho = \rho(p, \cdot)$ a função distância de \bar{M} e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função não negativa, localmente integrável e de classe \mathcal{C}^1 . Se $0 < \sigma < t < i(\bar{M})$, então*

(i) para $\kappa > 0$ e $\kappa t^2 < \pi^2$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\text{sen } \sqrt{\kappa t})^{\frac{m-1}{2}}} \int_{M \cap B_t} f S_1 dM - \frac{1}{(\text{sen } \sqrt{\kappa \sigma})^{\frac{m-1}{2}}} \int_{M \cap B_\sigma} f S_1 dM \\ & \geq \frac{1}{2} \int_\sigma^t r^{-1} (\text{sen } \sqrt{\kappa r})^{-\frac{m-1}{2}} \times \\ & \quad \times \int_{M \cap B_r} \left[\langle \rho \bar{\nabla} \rho, P_1(\nabla f) + 2S_2 f \eta \rangle + f \text{Ric}_{\bar{M}}(\rho \nabla \rho, \eta) \right] dM dr; \end{aligned}$$

(ii) para $\kappa \leq 0$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t^{\frac{m-1}{2}}} \int_{M \cap B_t} f S_1 dM - \frac{1}{\sigma^{\frac{m-1}{2}}} \int_{M \cap B_\sigma} f S_1 dM \\ & \geq \frac{1}{2} \int_\sigma^t r^{-\frac{m+1}{2}} \int_{M \cap B_r} \left[\langle \rho \bar{\nabla} \rho, P_1(\nabla f) + 2S_2 f \eta \rangle + f \text{Ric}_{\bar{M}}(\rho \nabla \rho, \eta) \right] dM dr. \end{aligned}$$

Demonstração. Denotemos por $\bar{X} = \rho \bar{\nabla} \rho$ o campo de vetores radial de \bar{M} restrito a M . Inicialmente, notemos que

$$\begin{aligned} \text{tr} \left(E \mapsto P_1 \left(\left(\bar{\nabla}_E f \bar{X} \right)^T \right) \right) &= \sum_{i=1}^m \langle \bar{\nabla}_{e_i} (f \bar{X}), P_1(e_i) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^m e_i(f) \langle \bar{X}, P_1(e_i) \rangle + \sum_{i=1}^m f \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{X}, P_1(e_i) \rangle \\ &= \langle \bar{X}, P_1(\nabla f) \rangle + f \text{tr} \left(E \mapsto P_1 \left(\left(\bar{\nabla}_E \bar{X} \right)^T \right) \right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Por outro lado, visto que M é própria, se ν denota o campo de vetores conormal unitário de $\partial(M \cap B_r)$, visto como uma hipersuperfície de M , então o Teorema de Gauss-Green, ver [Fed69], p. 478, implica

$$\int_{M \cap B_r} \text{div}_M(P_1(fX^T)) dM = \int_{\partial(M \cap B_r)} \langle P_1(fX^T), \nu \rangle dS_M(r), \quad (2.12)$$

onde $dS_M(r)$ é a medida $(m-1)$ -dimensional de $\partial(M \cap B_r)$. Integrando a identidade da Proposição 2.2.1 e usando (2.12) acima, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{M \cap B_r} \text{tr} \left(E \mapsto P_1 \left(\left(\bar{\nabla}_E f \bar{X} \right)^T \right) \right) dM &= \int_{M \cap B_r} \text{div}_M(P_1(fX^T)) dM \\ &\quad - \int_{M \cap B_r} \text{Ric}_{\bar{M}}(fX^T, \eta) dM - \int_{M \cap B_r} 2S_2 \langle f \bar{X}, \eta \rangle dM \\ &= \int_{\partial(M \cap B_r)} \langle P_1(fX^T), \nu \rangle dS_M(r) \\ &\quad - \int_{M \cap B_r} f [\text{Ric}_{\bar{M}}(X^T, \eta) + 2S_2 \langle \bar{X}, \eta \rangle] dM, \end{aligned} \quad (2.13)$$

Integrando (2.11) e substituindo em (2.13), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{M \cap B_r} f \operatorname{tr} \left(E \mapsto P_1 \left(\left(\overline{\nabla}_E \overline{X} \right)^T \right) \right) dM &= \int_{\partial(M \cap B_r)} f \langle P_1(X^T), \nu \rangle dS_M(r) \\ &\quad - \int_{M \cap B_r} \langle \overline{X}, P_1(\nabla f) \rangle dM \\ &\quad - \int_{M \cap B_r} f [\operatorname{Ric}_{\overline{M}}(X^T, \eta) + 2S_2 \langle \overline{X}, \eta \rangle] dM. \end{aligned} \quad (2.14)$$

A seguir, iremos estimar os termos de (2.14) que envolvem P_1 . Denotemos por θ_i , $1 \leq i \leq m$, os autovalores de P_1 . Vamos mostrar que as hipóteses $S_1 > 0$ e $S_2 \geq 0$ implicam

$$\theta_i \leq 2S_1$$

para todo $i = 1, 2, \dots, m$. De fato, os autovalores de P_1 são $\theta_i = S_1 - k_i$, onde k_i são os autovalores da segunda forma fundamental da imersão. Temos

$$\begin{aligned} \theta_i = S_1 - k_i &\leq S_1 + |k_i| \\ &\leq S_1 + \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_m^2} \\ &= S_1 + |A| = S_1 + \sqrt{S_1^2 - 2S_2} \\ &\leq 2S_1. \end{aligned}$$

Visto que P_1 é semipositivo definido, existe $\sqrt{P_1}$. Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz obtemos, para quaisquer campos de vetores U e V tangentes a M ,

$$\begin{aligned} |\langle P_1(U), V \rangle| &= |\langle \sqrt{P_1}(U), \sqrt{P_1}(V) \rangle| \\ &\leq |\sqrt{P_1}(U)| |\sqrt{P_1}(V)| \\ &= \langle P_1(U), U \rangle^{1/2} \langle P_1(V), V \rangle^{1/2} \\ &\leq (2S_1)^{1/2} |U| (2S_1)^{1/2} |V| \\ &\leq 2S_1 |U| |V|. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Usando (2.15) e o fato $|\nabla \rho| \leq |\overline{\nabla} \rho| = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\partial(M \cap B_r)} f \langle P_1(X^T), \nu \rangle dS_M(r) &= \int_{\partial(M \cap B_r)} f \rho \langle P_1(\nabla \rho), \nu \rangle dS_M(r) \leq 2r \int_{\partial(M \cap B_r)} f S_1 dS_M(r) \\ &\leq 2r \int_{\partial(M \cap B_r)} f |\nabla \rho|^{-1} S_1 dS_M(r). \end{aligned}$$

Por outro lado, a fórmula da coárea, ver [Bér86], p. 80, implica

$$2r \int_{\partial(M \cap B_r)} f |\nabla \rho|^{-1} S_1 dS_M(r) = 2r \frac{d}{dr} \left(\int_{M \cap B_r} f S_1 dM \right).$$

Portanto, aplicando (2.14),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{M \cap B_r} f \operatorname{tr} \left(E \mapsto P_1 \left(\left(\overline{\nabla}_E \overline{X} \right)^T \right) \right) dM &\leq r \frac{d}{dr} \left(\int_{M \cap B_r} f S_1 dM \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{M \cap B_r} [\langle \rho \overline{\nabla} \rho, P_1(\nabla f) + 2S_2 f \eta \rangle + f \operatorname{Ric}_{\overline{M}}(\rho \nabla \rho, \eta)] dM. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Vamos analisar separadamente os casos $\kappa > 0$ e $\kappa \leq 0$.

Caso $\kappa > 0$. A estimativa do Lema 2.2.2 implica

$$\begin{aligned} \int_{M \cap B_r} f \operatorname{tr} \left(E \mapsto P_1 \left(\left(\overline{\nabla}_E \overline{X} \right)^T \right) \right) dM &\geq (m-1) \int_{M \cap B_r} \sqrt{\kappa} \rho \cot(\sqrt{\kappa} \rho) f S_1 dM \\ &\geq (m-1) \sqrt{\kappa} r \cot(\sqrt{\kappa} r) \int_{M \cap B_r} f S_1 dM, \end{aligned} \quad (2.17)$$

visto que $\rho \leq r$. Substituindo (2.17) em (2.16) temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{M \cap B_r} [\langle \rho \overline{\nabla} \rho, P_1(\nabla f) + 2S_2 f \eta \rangle + f \operatorname{Ric}_{\overline{M}}(\rho \nabla \rho, \eta)] dM \\ + \frac{(m-1)}{2} \sqrt{\kappa} r \cot(\sqrt{\kappa} r) \int_{M \cap B_r} f S_1 dM \\ \leq r \frac{d}{dr} \left(\int_{M \cap B_r} f S_1 dM \right). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(\int_{M \cap B_r} f S_1 dM \right) - \frac{(m-1)}{2} \sqrt{\kappa} \cot(\sqrt{\kappa} r) \int_{M \cap B_r} f S_1 dM \\ = (\operatorname{sen} \sqrt{\kappa} r)^{\frac{m-1}{2}} \frac{d}{dr} \left((\operatorname{sen} \sqrt{\kappa} r)^{-\frac{m-1}{2}} \int_{M \cap B_r} f S_1 dM \right), \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\operatorname{sen} \sqrt{\kappa} r)^{-\frac{m-1}{2}} \int_{M \cap B_r} [\langle \rho \overline{\nabla} \rho, P_1(\nabla f) + 2S_2 f \eta \rangle + f \operatorname{Ric}_{\overline{M}}(\rho \nabla \rho, \eta)] dM \\ \leq r \frac{d}{dr} \left((\operatorname{sen}(\sqrt{\kappa} r))^{-\frac{m-1}{2}} \int_{M \cap B_r} f S_1 dM \right). \end{aligned} \quad (2.19)$$

O resultado para o caso $\kappa > 0$ segue, portanto, dividindo a expressão acima por r e integrando de σ a t .

Caso $\kappa \leq 0$. Usando o Lema 2.2.2 temos

$$\int_{M \cap B_r} f \operatorname{tr} \left(E \mapsto P_1 \left(\left(\overline{\nabla}_E \overline{X} \right)^T \right) \right) dM \geq (m-1) \int_{M \cap B_r} f S_1 dM.$$

Substituindo a estimativa acima em (2.16) e usando o fato

$$\frac{d}{dr} \left(\int_{M \cap B_r} f S_1 dM \right) - \frac{m-1}{2} \int_{M \cap B_r} f S_1 dM = r^{\frac{m-1}{2}} \frac{d}{dr} \left(r^{-\frac{m-1}{2}} \int_{M \cap B_r} f S_1 dM \right),$$

obtemos

$$\begin{aligned} r^{-\frac{m-1}{2}} \frac{1}{2} \int_{M \cap B_r} [\langle \rho \bar{\nabla} \rho, P_1(\nabla f) + 2S_2 f \eta \rangle + f \operatorname{Ric}_{\bar{M}}(\rho \nabla \rho, \eta)] dM \\ \leq r \frac{d}{dr} \left(r^{-\frac{m-1}{2}} \int_{M \cap B_r} f S_1 dM \right). \end{aligned} \quad (2.20)$$

O resultado para o caso $\kappa \leq 0$ segue, portanto, da desigualdade acima dividindo por r e integrando de σ a t . \square

Observação 2.3.1. (Caso convexo) Se $A \geq 0$, então podemos estimar os autovalores de P_1 por $\theta_i = S_1 - k_i \leq S_1$ no lugar de $\theta_i \leq 2S_1$ e, desta forma, os expoentes da desigualdade do valor médio tornam-se $m-1$ no lugar de $\frac{m-1}{2}$. Neste caso, a desigualdade do valor médio torna-se

(i) para $\kappa > 0$ e $\kappa t^2 \leq \pi^2$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\operatorname{sen} \sqrt{\kappa} t)^{m-1}} \int_{M \cap B_t} f S_1 dM - \frac{1}{(\operatorname{sen} \sqrt{\kappa} \sigma)^{m-1}} \int_{M \cap B_\sigma} f S_1 dM \\ \geq \int_\sigma^t r^{-1} (\operatorname{sen} \sqrt{\kappa} r)^{-(m-1)} \int_{M \cap B_r} \left[\langle \rho \bar{\nabla} \rho, P_1(\nabla f) + 2S_2 f \eta \rangle + f \operatorname{Ric}_{\bar{M}}(\rho \nabla \rho, \eta) \right] dM dr; \end{aligned}$$

(ii) para $\kappa \leq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{t^{m-1}} \int_{M \cap B_t} f S_1 dM - \frac{1}{\sigma^{m-1}} \int_{M \cap B_\sigma} f S_1 dM \\ \geq \int_\sigma^t r^{-(m-2)} \int_{M \cap B_r} \left[\langle \rho \bar{\nabla} \rho, P_1(\nabla f) + 2S_2 f \eta \rangle + f \operatorname{Ric}_{\bar{M}}(\rho \nabla \rho, \eta) \right] dM dr. \end{aligned}$$

O corolário a seguir será útil na prova da desigualdade de Poincaré.

Corolário 2.3.1. Seja M^m , $m \geq 3$, uma hipersuperfície de uma variedade Riemanniana \bar{M}^{m+1} com curvatura seccional limitada superiormente por uma constante κ . Suponhamos $S_1 \neq 0$, $S_2 \geq 0$ e escolhamos uma orientação tal que $S_1 > 0$. Seja $\rho = \rho(p, \cdot)$ a função distância de \bar{M} . Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função não negativa, de classe \mathcal{C}^1 , com suporte compacto em M , tal que $\operatorname{supp} f \cap \partial M = \emptyset$. Se $0 < \sigma < t < i(\bar{M})$, então

(i) para $\kappa > 0$ e $\kappa t^2 \leq \pi^2$,

$$\begin{aligned} (\operatorname{sen} \sqrt{\kappa} \sigma)^{-\frac{m-1}{2}} \int_{M \cap B_\sigma} f S_1 dM \leq (\operatorname{sen} \sqrt{\kappa} t)^{-\frac{m-1}{2}} \int_{M \cap B_t} f S_1 dM \\ + \int_\sigma^t (\operatorname{sen} \sqrt{\kappa} r)^{-\frac{m-1}{2}} \int_{M \cap B_r} \left[|\nabla f| S_1 + \left(\frac{m(\kappa - \kappa_0)}{4} + S_2 \right) f \right] dM dr; \end{aligned}$$

(ii) para $\kappa \leq 0$,

$$\begin{aligned} \sigma^{-\frac{m-1}{2}} \int_{M \cap B_\sigma} f S_1 dM \leq t^{-\frac{m-1}{2}} \int_{M \cap B_t} f S_1 dM \\ + \int_\sigma^t r^{-\frac{m-1}{2}} \int_{M \cap B_r} \left[|\nabla f| S_1 + \left(\frac{m(\kappa - \kappa_0)}{4} + S_2 \right) f \right] dM dr. \end{aligned}$$

Demonstração. Visto que $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ tem suporte compacto, podemos considerar integrais sobre qualquer domínio de M sem requerer a hipótese adicional que M é própria. Neste caso, o resultado segue observando que

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{M \cap B_r} [\langle \rho \bar{\nabla} \rho, P_1(\nabla f) + 2S_2 f \eta \rangle + f \text{Ric}_{\bar{M}}(\rho \nabla \rho, \eta)] dM \\
&= \frac{1}{2} \int_{M \cap B_r} \rho \langle \bar{\nabla} \rho, P_1(\nabla f) \rangle dM + \int_{M \cap B_r} \rho f S_2 \langle \bar{\nabla} \rho, \eta \rangle dM \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{M \cap B_r} f \rho \text{Ric}_{\bar{M}}(\nabla \rho, \eta) dM \\
&\geq -r \int_{M \cap B_r} |\nabla f| S_1 dM - r \int_{M \cap B_r} S_2 f dM \\
&\quad - r \int_{M \cap B_r} \left(\frac{m(\kappa - \kappa_0)}{4} \right) f dM \\
&= -r \int_{M \cap B_r} \left[|\nabla f| S_1 + \left(\frac{m(\kappa - \kappa_0)}{4} + S_2 \right) f \right] dM,
\end{aligned}$$

onde usamos que $\rho \leq r$, $|\nabla \rho| \leq |\bar{\nabla} \rho| = 1$, além da Observação 2.2.3, p. 40, para estimar $\text{Ric}_{\bar{M}}(\nabla \rho, \eta)$ e das desigualdades em (2.15) para estimar $\langle \bar{\nabla} \rho, P_1(\nabla f) \rangle$. \square

Seguindo as ideias de Simon, [Sim83], p. 84-85, iremos analisar a questão importante sobre o que acontece ao assumirmos limitações L^p para S_2 . A primeira consequência nesta direção é a seguinte fórmula de monotonicidade:

Teorema 2.3.2 (Monotonicidade). *Seja M^m , $m \geq 3$, uma hipersuperfície própria de uma variedade Riemanniana \bar{M}^{m+1} de curvatura seccional limitada superiormente por uma constante $\kappa \in \mathbb{R}$. Suponhamos que $S_1 \neq 0$, $S_2 \geq 0$ e escolhamos uma orientação tal que $S_1 > 0$. Se existem $0 < \alpha \leq 1$, $\Gamma \geq 0$ e $0 < R_0 < i(\bar{M})$ tais que*

$$\alpha^{-1} \int_{M \cap B_r} \left(\frac{m(\kappa - \kappa_0)}{4} + S_2 \right) dM \leq \Gamma \left(\frac{r}{R_0} \right)^{\alpha-1} \mathcal{A}_1(M \cap B_r) \quad (2.21)$$

para todo $r \in (0, R_0)$, então

(i) para $\kappa > 0$ e $\kappa R_0^2 \leq \pi^2$, a função $h : (0, R_0) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(r) = \exp(\Gamma R_0^{1-\alpha} r^\alpha) \frac{\mathcal{A}_1(M \cap B_r)}{(\text{sen } \sqrt{\kappa} r)^{\frac{m-1}{2}}}$$

é monótona não decrescente;

(ii) para $\kappa \leq 0$, a função $h : (0, R_0) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(r) = \exp(\Gamma R_0^{1-\alpha} r^\alpha) \frac{\mathcal{A}_1(M \cap B_r)}{r^{\frac{m-1}{2}}}$$

é monótona não decrescente.

Demonstração. Vamos demonstrar o teorema para o caso $\kappa > 0$. O caso $\kappa \leq 0$ é inteiramente análogo. Usando o Corolário 2.3.1 acima para $f \equiv 1$ temos, para $0 < \sigma < t < R_0$,

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{A}_1(M \cap B_t)}{(\operatorname{sen} \sqrt{\kappa t})^{\frac{m-1}{2}}} - \frac{\mathcal{A}_1(M \cap B_\sigma)}{(\operatorname{sen} \sqrt{\kappa \sigma})^{\frac{m-1}{2}}} &\geq - \int_\sigma^t (\operatorname{sen} \sqrt{\kappa r})^{-\frac{m-1}{2}} \int_{M \cap B_r} \left(\frac{m(\kappa - \kappa_0)}{4} + S_2 \right) dM dr \\ &\geq -\alpha \Gamma \int_\sigma^t (\operatorname{sen} \sqrt{\kappa r})^{-\frac{m-1}{2}} \left(\frac{r}{R_0} \right)^{\alpha-1} \mathcal{A}_1(M \cap B_r) dM dr, \end{aligned}$$

onde, na última desigualdade acima, usamos a hipótese (2.21). Denotando por $g(r) = \frac{\mathcal{A}_1(M \cap B_r)}{(\operatorname{sen} \sqrt{\kappa r})^{\frac{m-1}{2}}}$ e dividindo a desigualdade acima por $t - \sigma$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{g(t) - g(\sigma)}{t - \sigma} &\geq -\frac{1}{t - \sigma} \int_\sigma^t \alpha \Gamma \left(\frac{r}{R_0} \right)^{\alpha-1} g(r) dr \\ &= -\frac{1}{t - \sigma} \left[\int_\varepsilon^t \alpha \Gamma \left(\frac{r}{R_0} \right)^{\alpha-1} g(r) dr - \int_\varepsilon^\sigma \alpha \Gamma \left(\frac{r}{R_0} \right)^{\alpha-1} g(r) dr \right], \end{aligned}$$

para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Tomando $t \rightarrow \sigma$, o lado esquerdo da desigualdade tende a $g'(\sigma)$ e o lado direito da desigualdade tende a $\alpha \Gamma \left(\frac{\sigma}{R_0} \right)^{\alpha-1} g(\sigma)$. Portanto,

$$g'(\sigma) + \alpha \Gamma \left(\frac{\sigma}{R_0} \right)^{\alpha-1} g(\sigma) \geq 0.$$

Visto que

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\exp(\Gamma R_0^{1-\alpha} \sigma^\alpha) g(\sigma) \right) = \exp(\Gamma R_0^{1-\alpha} \sigma^\alpha) \left(\alpha \Gamma \left(\frac{\sigma}{R_0} \right)^{\alpha-1} g(\sigma) + g'(\sigma) \right) \geq 0,$$

concluimos que $h(\sigma) = \exp(\Gamma R_0^{1-\alpha} \sigma^\alpha) g(\sigma)$ é monótona não decrescente para todo $\sigma \in (0, R_0)$. \square

Como caso particular da fórmula de monotonicidade acima, temos o

Corolário 2.3.2 (Monotonicidade). *Seja $\overline{M}^{m+1}(\kappa)$ uma variedade Riemanniana $(m+1)$ -dimensional de curvatura seccional constante κ . Seja M^m , $m \geq 3$, uma hipersuperfície própria de $\overline{M}^{m+1}(\kappa)$ tal que $S_2 = 0$ e $S_1 \neq 0$. Assuma uma orientação de M tal que $S_1 > 0$.*

(i) *Se $\kappa > 0$ e $\kappa r^2 \leq \pi^2$, então a função $g : (0, \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$g(r) = \frac{\mathcal{A}_1(M \cap B_r)}{(\operatorname{sen} \sqrt{\kappa r})^{\frac{m-1}{2}}}$$

é monótona não decrescente;

(ii) Se $\kappa \leq 0$, então a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(r) = \frac{\mathcal{A}_1(M \cap B_r)}{r^{\frac{m-1}{2}}}$$

é monótona não decrescente.

A segunda aplicação da desigualdade do valor médio é o teorema a seguir.

Teorema 2.3.3. *Seja $M^m, m \geq 3$, uma hipersuperfície própria de uma variedade Riemanniana \overline{M}^{m+1} de curvatura seccional limitada superiormente por uma constante $\kappa \leq 0$. Suponhamos que $S_1 \geq c$ para alguma constante $c > 0$ e que $S_2 \geq 0$. Se existem $0 < R_0 < i(\overline{M}), \Gamma > 0$ e $p > 1$ tais que*

$$\left[\int_{M \cap B_{R_0}} \left(\frac{m(\kappa - \kappa_0)}{4} + S_2 \right)^p dM \right]^{1/p} \leq \Gamma, \quad (2.22)$$

então

$$\left(\frac{\mathcal{A}_1(M \cap B_\sigma)}{\sigma^{\frac{m-1}{2}}} \right)^{1/p} \leq \left(\frac{\mathcal{A}_1(M \cap B_t)}{t^{\frac{m-1}{2}}} \right)^{1/p} + \frac{2\Gamma}{c^{1-1/p}(m-1+2p)} \left(t^{1-\frac{m-1}{2p}} - \sigma^{1-\frac{m-1}{2p}} \right),$$

para quaisquer $0 < \sigma < t < R_0$.

Demonstração. Usando a desigualdade (2.20), p. 46, para $f \equiv 1$, temos

$$\begin{aligned} r \frac{d}{dr} \left(\frac{\mathcal{A}_1(M \cap B_r)}{r^{\frac{m-1}{2}}} \right) &\geq r^{-\frac{m-1}{2}} \frac{1}{2} \int_{M \cap B_r} [\langle \rho \overline{\nabla} \rho, 2S_2 \eta \rangle + \text{Ric}(\rho \nabla \rho, \eta)] dM \\ &\geq -r^{-\frac{m+1}{2}} \int_{M \cap B_r} \left(\frac{m(\kappa - \kappa_0)}{4} + S_2 \right) dM. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder e a hipótese (2.22), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{M \cap B_r} \left(\frac{m(\kappa - \kappa_0)}{4} + S_2 \right) dM &\leq \left[\int_{M \cap B_r} \left(\frac{m(\kappa - \kappa_0)}{4} + S_2 \right)^p dM \right]^{1/p} \text{vol}(M \cap B_r)^{1-1/p} \\ &\leq \Gamma \text{vol}(M \cap B_r)^{1-1/p} \\ &\leq \frac{\Gamma}{c^{1-1/p}} \mathcal{A}_1(M \cap B_r)^{1-1/p}. \end{aligned}$$

Isto implica

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{\mathcal{A}_1(M \cap B_r)}{r^{\frac{m-1}{2}}} \right) \geq -\frac{\Gamma}{c^{1-1/p}} r^{-\frac{m-1}{2}} \mathcal{A}_1(M \cap B_r)^{1-1/p}.$$

Logo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(\left(\frac{\mathcal{A}_1(M \cap B_r)}{r^{\frac{m-1}{2}}} \right)^{1/p} \right) &= \frac{1}{p} \left(\frac{\mathcal{A}_1(M \cap B_r)}{r^{\frac{m-1}{2}}} \right)^{\frac{1}{p}-1} \frac{d}{dr} \left(\frac{\mathcal{A}_1(M \cap B_r)}{r^{\frac{m-1}{2}}} \right) \\ &\geq -\frac{\Gamma}{pc^{1-1/p}} \left(\frac{\mathcal{A}_1(M \cap B_r)}{r^{\frac{m-1}{2}}} \right)^{\frac{1}{p}-1} r^{-\frac{m-1}{2}} \mathcal{A}_1(M \cap B_r)^{1-\frac{1}{p}} \\ &= -\frac{\Gamma}{pc^{1-1/p}} r^{-\frac{m-1}{2p}}. \end{aligned}$$

Integrando a desigualdade acima de σ a t , obtemos o resultado. \square

2.4 Demonstração da desigualdade de Poincaré

O objetivo desta seção é demonstrar o Teorema 2.1.1, p. 31. A etapa principal da demonstração é o Lema 2.4.2 a seguir, que estabelece uma desigualdade local do tipo Poincaré para bolas extrínsecas, requerendo condições especiais sobre f . O passo seguinte é usar o Lema 2.4.1 abaixo para “colar as bolas” e, desta forma, obter uma desigualdade global tipo Poincaré.

A prova do lema a seguir pode ser encontrada, por exemplo, em [CM11], p. 115.

Lema 2.4.1. *Se \mathcal{B} é uma família de bolas fechadas em um espaço métrico com $\sup\{\text{diam}(B); B \in \mathcal{B}\} < \infty$, então existe uma subcoleção de bolas duas a duas disjuntas $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ tal que*

$$\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subset \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} 5B,$$

onde $5B$ é a bola de mesmo centro que B e raio 5 vezes o raio de B .

No lema a seguir usamos algumas ideias inspiradas em [MS73], Lema 2.3, [HS74], Lema 4.2, ver também [HS75] e [Ôtspl].

Sejam $\Omega \subset M$ um domínio regular tal que $\bar{\Omega} \cap \partial M = \emptyset$ e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função não negativa, de classe \mathcal{C}^1 e com suporte compacto em Ω . Definimos, para $0 < \alpha < 2$,

$$r_1 = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \arcsen \left(\sqrt{\kappa} \left(\left(\frac{2(1+\alpha)}{2-\alpha} \right)^2 \frac{(\text{diam } \Omega)^{m-1}}{\mathcal{A}_1(\Omega)} \int_{\Omega} f S_1 dM \right)^{\frac{1}{m-1}} \right), & \text{se } \kappa > 0; \\ \left(\left(\frac{2(1+\alpha)}{2-\alpha} \right)^2 \frac{(\text{diam } \Omega)^{m-1}}{\mathcal{A}_1(\Omega)} \int_{\Omega} f S_1 dM \right)^{\frac{1}{m-1}}, & \text{se } \kappa \leq 0, \end{cases}$$

onde assumimos

$$\sqrt{\kappa} \left(\left(\frac{2(1+\alpha)}{2-\alpha} \right)^2 \frac{(\text{diam } \Omega)^{m-1}}{\mathcal{A}_1(\Omega)} \int_{\Omega} f S_1 dM \right)^{\frac{1}{m-1}} \leq 1,$$

se $\kappa > 0$.

Lema 2.4.2. *Seja \bar{M}^{m+1} , $m \geq 3$, uma variedade Riemanniana $(m+1)$ -dimensional de curvatura seccional limitada superiormente por uma constante $\kappa \in \mathbb{R}$. Seja M^m uma hipersuperfície de \bar{M}^{m+1} , possivelmente com bordo, tal que $S_1 \neq 0$ e $S_2 \geq 0$. Assuma uma orientação de M tal que $S_1 > 0$. Sejam $\Omega \subset M$ um domínio regular tal que $\bar{\Omega} \cap \partial M = \emptyset$ e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função não negativa, de classe \mathcal{C}^1 e com suporte compacto em Ω . Assuma ainda que*

$$\frac{1}{\mathcal{A}_1(\Omega)} \int_{\Omega} f S_1 dM \geq 1. \quad (2.23)$$

Seja $\alpha \in (0, 2)$. Se $5r_1 \leq i(\overline{M})$ então para todo $p \in \Omega$ existe $r = r(p) \in (0, r_1)$ tal que

$$\int_{M \cap B_{5r}(p)} f S_1 dM \leq 2\alpha^{-1} 5^{\frac{m-3}{2}} r_1 \int_{M \cap B_r(p)} \left[|\nabla f| S_1 + \left(\frac{m(\kappa - \kappa_0)}{4} + S_2 \right) f \right] dM. \quad (2.24)$$

Demonstração. Com o objetivo de simplificar a notação, definimos

$$F_p(r) = \int_{M \cap B_r(p)} f(x) S_1(x) dM \quad (2.25)$$

e

$$G_p(r) = \int_{M \cap B_r(p)} \left[S_1(x) |\nabla f(x)| + \left(\frac{m(\kappa - \kappa_0(x))}{4} + S_2(x) \right) f(x) \right] dM. \quad (2.26)$$

Caso $\kappa \leq 0$. Suponhamos que não existe $r \in (0, r_1)$ satisfazendo (2.24), isto é,

$$F_p(5r) > 2\alpha^{-1} 5^{\frac{m-3}{2}} r_1 G_p(r)$$

para todo $r \in (0, r_1)$, ou seja,

$$G_p(r) < \frac{1}{2} \alpha 5^{-\frac{m-3}{2}} r_1^{-1} F_p(5r). \quad (2.27)$$

Multiplicando a desigualdade (2.27) acima por $r^{-\frac{m-1}{2}}$ e integrando de 0 a r_1 ,

$$\begin{aligned} \int_0^{r_1} r^{-\frac{m-1}{2}} G_p(r) dr &< \frac{1}{2} \alpha 5^{-\frac{m-3}{2}} r_1^{-1} \int_0^{r_1} r^{-\frac{m-1}{2}} F_p(5r) dr \\ &= \frac{1}{2} \alpha r_1^{-1} \int_0^{5r_1} r^{-\frac{m-1}{2}} F_p(r) dr \\ &= \frac{1}{2} \alpha r_1^{-1} \left[\int_0^{r_1} r^{-\frac{m-1}{2}} F_p(r) dr + \int_{r_1}^{5r_1} r^{-\frac{m-1}{2}} F_p(r) dr \right]. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Tomando o supremo sobre r de 0 a r_1 na primeira integral do lado direito de (2.28),

$$\frac{1}{2} \alpha r_1^{-1} \int_0^{r_1} r^{-\frac{m-1}{2}} F_p(r) dr \leq \frac{1}{2} \alpha \sup_{\sigma \in (0, r_1)} \sigma^{-\frac{m-1}{2}} F_p(\sigma). \quad (2.29)$$

Vamos estimar a segunda integral no lado direito de (2.28). Como $\text{supp } f \subseteq \Omega$, temos

$$F_p(r) = \int_{M \cap B_r(p)} f S_1 dM \leq \int_{\Omega} f S_1 dM. \quad (2.30)$$

Usando a estimativa acima, fazendo a mudança de variáveis r por $r_1 s$ na segunda integral do lado direito de (2.28) e usando que $\int_1^5 s^{-\frac{m-1}{2}} ds < 2$, válido para $m \geq 3$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \alpha r_1^{-1} \int_{r_1}^{5r_1} r^{-\frac{m-1}{2}} F_p(r) dr &\leq \frac{1}{2} \alpha \left(r_1^{-1} \int_{r_1}^{5r_1} r^{-\frac{m-1}{2}} dr \right) \times \int_{\Omega} f S_1 dM \\ &= \frac{1}{2} \alpha r_1^{-\frac{m-1}{2}} \int_1^5 s^{-\frac{m-1}{2}} ds \times \int_{\Omega} f S_1 dM \\ &< \alpha r_1^{-\frac{m-1}{2}} \int_{\Omega} f S_1 dM, \end{aligned} \quad (2.31)$$

Substituindo (2.31) e (2.29) em (2.28), obtemos

$$\int_0^{r_1} r^{-\frac{m-1}{2}} G_p(r) dr < \frac{1}{2} \alpha \sup_{\sigma \in (0, r_1)} \sigma^{-\frac{m-1}{2}} F_p(\sigma) + \alpha r_1^{-\frac{m-1}{2}} \int_{\Omega} f S_1 dM. \quad (2.32)$$

Tomando o supremo em σ de 0 a r_1 na desigualdade (ii) do Corolário 2.3.1, p. 46, e usando (2.30), temos

$$\sup_{\sigma \in (0, r_1)} \sigma^{-\frac{m-1}{2}} F_p(\sigma) \leq r_1^{-\frac{m-1}{2}} \int_{\Omega} f S_1 dM + \int_0^{r_1} r^{-\frac{m-1}{2}} G_p(r) dr.$$

Substituindo a estimativa (2.32) na desigualdade acima, vemos que

$$\begin{aligned} \sup_{\sigma \in (0, r_1)} \sigma^{-\frac{m-1}{2}} F_p(\sigma) &\leq r_1^{-\frac{m-1}{2}} \int_{\Omega} f S_1 dM + \frac{1}{2} \alpha \sup_{\sigma \in (0, r_1)} \sigma^{-\frac{m-1}{2}} F_p(\sigma) \\ &\quad + \alpha r_1^{-\frac{m-1}{2}} \int_{\Omega} f S_1 dM. \end{aligned}$$

Agora, usando a definição de r_1 para o caso $\kappa \leq 0$,

$$\begin{aligned} \sup_{\sigma \in (0, r_1)} \sigma^{-\frac{m-1}{2}} F_p(\sigma) &< \frac{2(1+\alpha)}{2-\alpha} r_1^{-\frac{m-1}{2}} \int_{\Omega} f S_1 dM \\ &= \frac{2(1+\alpha)}{2-\alpha} \left(\frac{2(1+\alpha)}{2-\alpha} \right)^{-1} \left(\frac{(\text{diam } \Omega)^{m-1}}{\mathcal{A}_1(\Omega)} \int_{\Omega} f S_1 dM \right)^{-1/2} \int_{\Omega} f S_1 dM \\ &= \frac{(\text{diam } \Omega)^{-\frac{m-1}{2}}}{\mathcal{A}_1(\Omega)^{-1/2}} \left(\int_{\Omega} f S_1 dM \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Finalizamos a demonstração por contradição mostrando que a desigualdade (2.33) é falsa. De fato, notemos que, usando a hipótese (2.23) e a definição de r_1 para o caso $\kappa \leq 0$,

$$r_1 = \left(\left(\frac{2(1+\alpha)}{2-\alpha} \right)^2 \frac{(\text{diam } \Omega)^{m-1}}{\mathcal{A}_1(\Omega)} \int_{\Omega} f S_1 dM \right)^{\frac{1}{m-1}} \geq \left(\frac{2(1+\alpha)}{2-\alpha} \right)^{\frac{2}{m-1}} \text{diam } \Omega > \text{diam } \Omega,$$

isto é, $\text{diam } \Omega \in (0, r_1)$ e logo $\text{diam } \Omega < \frac{i(\bar{M})}{5}$. Assim, podemos considerar $B_{\text{diam } \Omega} \subset \bar{M}$ e, visto que $M \cap B_{\text{diam } \Omega} \supset \Omega$, obtemos

$$\begin{aligned} (\text{diam } \Omega)^{-\frac{m-1}{2}} \int_{\Omega} f S_1 dM &= (\text{diam } \Omega)^{-\frac{m-1}{2}} \int_{M \cap B_{\text{diam } \Omega}(p)} f S_1 dM \\ &\leq \sup_{\sigma \in (0, r_1)} \sigma^{-\frac{m-1}{2}} \int_{M \cap B_{\sigma}(p)} f S_1 dM. \end{aligned}$$

Usando a estimativa acima e a desigualdade (2.33),

$$\begin{aligned} (\text{diam } \Omega)^{-\frac{m-1}{2}} \int_{\Omega} f S_1 dM &\leq \sup_{\sigma \in (0, r_1)} \sigma^{-\frac{m-1}{2}} \int_{M \cap B_{\sigma}(p)} f S_1 dM \\ &< \frac{(\text{diam } \Omega)^{-\frac{m-1}{2}}}{\mathcal{A}_1(\Omega)^{-1/2}} \left(\int_{\Omega} f S_1 dM \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

isto é,

$$\left(\int_{\Omega} f S_1 dM \right)^{1/2} < (\mathcal{A}_1(\Omega))^{1/2}.$$

Usando a hipótese (2.23) novamente na desigualdade acima, obtemos

$$\mathcal{A}_1(\Omega)^{1/2} \leq \left(\int_{\Omega} f S_1 dM \right)^{1/2} < \mathcal{A}_1(\Omega)^{1/2},$$

o que é claramente uma contradição. Isto prova o lema para o caso em que $\kappa \leq 0$.

Caso $\kappa > 0$. Suponhamos que não existe r , $0 < r < r_1$, satisfazendo (2.24), explicitamente,

$$F_p(5r) > 2\alpha^{-1} 5^{\frac{m-3}{2}} r_1 G_p(r), \text{ para todo } 0 < r < r_1,$$

isto é,

$$G_p(r) < \frac{1}{2} \alpha 5^{-\frac{m-3}{2}} r_1^{-1} F_p(5r), \text{ para todo } 0 < r < r_1.$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade acima por $(\text{sen } \sqrt{\kappa r})^{-\frac{m-1}{2}}$ e integrando em r de 0 a r_1 ,

$$\begin{aligned} \int_0^{r_1} (\text{sen } \sqrt{\kappa r})^{-\frac{m-1}{2}} G_p(r) dr &< \frac{1}{2} \alpha 5^{-\frac{m-3}{2}} r_1^{-1} \int_0^{r_1} (\text{sen } \sqrt{\kappa r})^{-\frac{m-1}{2}} F_p(5r) dr \\ &= \frac{1}{2} \alpha 5^{-\frac{m-1}{2}} r_1^{-1} \int_0^{5r_1} \left(\text{sen } \frac{\sqrt{\kappa r}}{5} \right)^{-\frac{m-1}{2}} F_p(r) dr \\ &= \frac{1}{2} \alpha 5^{-\frac{m-1}{2}} r_1^{-1} \left[\int_0^{r_1} \left(\text{sen } \frac{\sqrt{\kappa r}}{5} \right)^{-\frac{m-1}{2}} F_p(r) dr \right. \\ &\quad \left. + \int_{r_1}^{5r_1} \left(\text{sen } \frac{\sqrt{\kappa r}}{5} \right)^{-\frac{m-1}{2}} F_p(r) dr \right]. \end{aligned} \tag{2.34}$$

A fim de estimar as integrais do lado direito da desigualdade (2.34) acima, notemos que, como $\text{sen } \theta$ é uma função côncava em $[0, \pi]$, então $\text{sen } \beta \theta \geq \beta \text{sen } \theta$ para $0 \leq \beta \leq 1$ e $\theta \in [0, \pi]$. Isto implica

$$\begin{cases} \text{sen} \left(\frac{\sqrt{\kappa r}}{5} \right) \geq \frac{1}{5} (\text{sen } \sqrt{\kappa r}) & \text{para } 0 \leq r \leq r_1; \\ \text{sen} \left(\frac{\sqrt{\kappa r}}{5} \right) \geq \frac{r}{5r_1} (\text{sen } \sqrt{\kappa r_1}) & \text{para } r_1 \leq r \leq 5r_1, \end{cases}$$

e, portanto,

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\text{sen} \frac{\sqrt{\kappa}r}{5} \right)^{-\frac{m-1}{2}} \leq 5^{\frac{m-1}{2}} (\text{sen} \sqrt{\kappa}r)^{-\frac{m-1}{2}} \quad \text{para } 0 < r \leq r_1, \\ \left(\text{sen} \frac{\sqrt{\kappa}r}{5} \right)^{-\frac{m-1}{2}} \leq 5^{\frac{m-1}{2}} r_1^{\frac{m-1}{2}} (\text{sen} \sqrt{\kappa}r_1)^{-\frac{m-1}{2}} r^{-\frac{m-1}{2}} \quad \text{para } r_1 \leq r \leq 5r_1. \end{array} \right. \quad (2.35)$$

Usando a primeira desigualdade em (2.35) acima, podemos estimar a primeira integral no lado direito de (2.34) por

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \alpha 5^{-\frac{m-1}{2}} r_1^{-1} \int_0^{r_1} \left(\text{sen} \frac{\sqrt{\kappa}r}{5} \right)^{-\frac{m-1}{2}} F_p(r) dr &\leq \frac{1}{2} \alpha r_1^{-1} \int_0^{r_1} (\text{sen} \sqrt{\kappa}r)^{-\frac{m-1}{2}} F_p(r) dr \\ &\leq \frac{1}{2} \alpha \sup_{\sigma \in (0, r_1)} (\text{sen} \sqrt{\kappa}\sigma)^{-\frac{m-1}{2}} F_p(\sigma). \end{aligned} \quad (2.36)$$

A seguir, vamos estimar a segunda integral do lado direito de (2.34). Usando a segunda desigualdade em (2.35), seguida dos fatos

$$F_p(r) = \int_{M \cap B_r(p)} f S_1 dM \leq \int_{\Omega} f S_1 dM e r_1^{\frac{m-3}{2}} \int_{r_1}^{5r_1} r^{-\frac{m-1}{2}} dr = \int_1^5 s^{-\frac{m-1}{2}} ds < 2, \quad (2.37)$$

temos que a segunda integral no lado direito de (2.34) torna-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \alpha 5^{-\frac{m-1}{2}} r_1^{-1} \int_{r_1}^{5r_1} \left(\text{sen} \frac{\sqrt{\kappa}r}{5} \right)^{-\frac{m-1}{2}} F_p(r) dr &\leq \frac{1}{2} \alpha (\text{sen} \sqrt{\kappa}r_1)^{-\frac{m-1}{2}} \left(r_1^{\frac{m-3}{2}} \int_{r_1}^{5r_1} r^{-\frac{m-1}{2}} F_p(r) dr \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \alpha (\text{sen} \sqrt{\kappa}r_1)^{-\frac{m-1}{2}} \left(r_1^{\frac{m-3}{2}} \int_{r_1}^{5r_1} r^{-\frac{m-1}{2}} dr \right) \times \int_{\Omega} f S_1 dM \\ &< \alpha (\text{sen} \sqrt{\kappa}r_1)^{-\frac{m-1}{2}} \int_{\Omega} f S_1 dM. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Aplicando as estimativas (2.36) e (2.38) acima no lado direito de (2.34), obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^{r_1} (\text{sen} \sqrt{\kappa}r)^{-\frac{m-1}{2}} G_p(r) dr &< \frac{1}{2} \alpha \sup_{\sigma \in (0, r_1)} (\text{sen} \sqrt{\kappa}\sigma)^{-\frac{m-1}{2}} F_p(\sigma) \\ &+ \alpha (\text{sen} \sqrt{\kappa}r_1)^{-\frac{m-1}{2}} \int_{\Omega} f S_1 dM. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Por outro lado, considerando o supremo em σ de 0 a r_1 na desigualdade do Corolário 2.3.1, p. 46, e aplicando a primeira desigualdade de (2.37),

$$\sup_{\sigma \in (0, r_1)} (\text{sen} \sqrt{\kappa}\sigma)^{-\frac{m-1}{2}} F_p(\sigma) \leq (\text{sen} \sqrt{\kappa}r_1)^{-\frac{m-1}{2}} \int_{\Omega} f S_1 dM + \int_0^{r_1} (\text{sen} \sqrt{\kappa}r)^{-\frac{m-1}{2}} G_p(r) dr.$$

Substituindo (2.39) na desigualdade acima,

$$\begin{aligned} \sup_{\sigma \in (0, r_1)} (\text{sen } \sqrt{\kappa} \sigma)^{-\frac{m-1}{2}} F_p(\sigma) &< (\text{sen } \sqrt{\kappa} r_1)^{-\frac{m-1}{2}} \int_{\Omega} f S_1 dM + \frac{1}{2} \alpha \sup_{\sigma \in (0, r_1)} (\text{sen } \sqrt{\kappa} \sigma)^{-\frac{m-1}{2}} F_p(\sigma) \\ &+ \alpha (\text{sen } \sqrt{\kappa} r_1)^{-\frac{m-1}{2}} \int_{\Omega} f S_1 dM, \end{aligned}$$

isto é,

$$\sup_{\sigma \in (0, r_1)} (\text{sen } \sqrt{\kappa} \sigma)^{-\frac{m-1}{2}} F_p(\sigma) < \frac{2(1+\alpha)}{2-\alpha} (\text{sen } \sqrt{\kappa} r_1)^{-\frac{m-1}{2}} \int_{\Omega} f S_1 dM. \quad (2.40)$$

Como, para $\kappa > 0$

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \arcsen \left(\sqrt{\kappa} \left(\left(\frac{2(1+\alpha)}{2-\alpha} \right)^2 \frac{(\text{diam } \Omega)^{m-1}}{\mathcal{A}_1(\Omega)} \int_{\Omega} f S_1 dM \right)^{\frac{1}{m-1}} \right),$$

temos

$$\frac{2(1+\alpha)}{2-\alpha} (\text{sen } \sqrt{\kappa} r_1)^{-\frac{m-1}{2}} \int_{\Omega} f S_1 dM = (\sqrt{\kappa})^{-\frac{m-1}{2}} \frac{(\text{diam } \Omega)^{-\frac{m-1}{2}}}{\mathcal{A}_1(\Omega)^{-1/2}} \left(\int_{\Omega} f S_1 dM \right)^{1/2}$$

e a desigualdade (2.40) torna-se

$$\begin{aligned} \sup_{\sigma \in (0, r_1)} (\text{sen } \sqrt{\kappa} \sigma)^{-\frac{m-1}{2}} F_p(\sigma) &< \frac{2(1+\alpha)}{2-\alpha} (\text{sen } \sqrt{\kappa} r_1)^{-\frac{m-1}{2}} \int_{\Omega} f S_1 dM \\ &= (\sqrt{\kappa})^{-\frac{m-1}{2}} \frac{(\text{diam } \Omega)^{-\frac{m-1}{2}}}{\mathcal{A}_1(\Omega)^{-1/2}} \left(\int_{\Omega} f S_1 dM \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Vamos estimar o lado esquerdo de (2.41). Usando a hipótese (2.23), obtemos

$$\sqrt{\kappa} \left(\left(\frac{2(1+\alpha)}{2-\alpha} \right)^2 \frac{(\text{diam } \Omega)^{m-1}}{\mathcal{A}_1(\Omega)} \int_{\Omega} f S_1 dM \right)^{\frac{1}{m-1}} > \sqrt{\kappa} \text{diam } \Omega.$$

Visto que $\arcsen x$ é uma função crescente, usando a definição de r_1 para o caso $\kappa > 0$ e a desigualdade acima, temos $r_1 > \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \arcsen(\sqrt{\kappa} \text{diam } \Omega)$. Além disso, como $\arcsen x > x$, $x \in (0, 1)$, temos

$$\text{diam } \Omega < \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \arcsen(\sqrt{\kappa} \text{diam } \Omega) < r_1. \quad (2.42)$$

Portanto, $\text{diam } \Omega \in (0, r_1)$ e, desta forma, $\text{diam } \Omega < \frac{i(\overline{M})}{5}$. Usando estes e o fato

$M \cap B_{\text{diam}\Omega} \supset \Omega$, obtemos a estimativa a seguir para o lado direito de (2.41)

$$\begin{aligned} (\sqrt{\kappa})^{-\frac{m-1}{2}} (\text{diam}\Omega)^{-\frac{m-1}{2}} \int_{\Omega} f S_1 dM &= \left(\text{sen } \sqrt{\kappa} \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa}} \arcsen(\sqrt{\kappa} \text{diam}\Omega) \right) \right)^{-\frac{m-1}{2}} \int_{\Omega} f S_1 dM \\ &\leq (\text{sen } \sqrt{\kappa} \text{diam}\Omega)^{-\frac{m-1}{2}} \int_{M \cap B_{\text{diam}\Omega}} f S_1 dM \\ &\leq \sup_{\sigma \in (0, r_1)} (\text{sen } \sqrt{\kappa} \sigma)^{-\frac{m-1}{2}} \int_{M \cap B_{\sigma}(p)} f S_1 dM, \end{aligned} \quad (2.43)$$

onde, na primeira desigualdade usamos (2.42) e o fato que $(\text{sen } \sqrt{\kappa} x)^{-\frac{m-1}{2}}$ é uma função decrescente em $(0, \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}})$, enquanto que na segunda desigualdade usamos que $\text{diam}\Omega \in (0, r_1)$.

Substituindo (2.43) em (2.41), obtemos

$$(\sqrt{\kappa})^{-\frac{m-1}{2}} (\text{diam}\Omega)^{-\frac{m-1}{2}} \int_{\Omega} f S_1 dM < (\sqrt{\kappa})^{-\frac{m-1}{2}} \frac{(\text{diam}\Omega)^{-\frac{m-1}{2}}}{\mathcal{A}_1(\Omega)^{-1/2}} \left(\int_{\Omega} f S_1 dM \right)^{1/2},$$

isto é,

$$\left(\int_{\Omega} f S_1 dM \right)^{1/2} < \mathcal{A}_1(\Omega)^{1/2}.$$

Usando a hipótese (2.23) novamente na desigualdade acima, obtemos

$$\mathcal{A}_1(\Omega)^{1/2} \leq \left(\int_{\Omega} f S_1 dM \right)^{1/2} < \mathcal{A}_1(\Omega)^{1/2},$$

que é claramente uma contradição e isto prova o lema para o caso $\kappa > 0$. \square

Agora estamos prontos para demonstrar o Teorema 2.1.1.

Demonstração do Teorema 2.1.1. Denotemos por $v_m(f, \Omega) = \frac{1}{\mathcal{A}_1(\Omega)} \int_{\Omega} f S_1 dM$ o valor médio da função f . Se $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz as condições do teorema, então $\tilde{f} = \frac{1}{v_m(f, \Omega)} f$ satisfaz $v_m(\tilde{f}, \Omega) = 1$. Definimos para a função \tilde{f} a constante $r_0 = \frac{5}{2} r_1$, isto é,

$$r_0 = \begin{cases} \frac{5}{2\sqrt{\kappa}} \arcsen \left(\sqrt{\kappa} \left(\frac{2(1+\alpha)}{2-\alpha} \right)^{\frac{2}{m-1}} (\text{diam}\Omega) \right) & \text{se } \kappa > 0; \\ \frac{5}{2} \times \left(\frac{2(1+\alpha)}{2-\alpha} \right)^{\frac{2}{m-1}} (\text{diam}\Omega) & \text{se } \kappa \leq 0. \end{cases}$$

Logo, se $2r_0 < i(\overline{M})$, então $5r_1 < i(\overline{M})$. Portanto, usando o Lema 2.4.2, para todo $p \in \Omega$ existe $r(p) \in (0, r_1)$ tal que

$$\int_{M \cap B_{5r(p)}(p)} \tilde{f} S_1 dM \leq 2\alpha^{-1} 5^{\frac{m-3}{2}} r_1 \int_{M \cap B_{r(p)}(p)} \left[|\nabla \tilde{f}| S_1 + \left(\frac{m(\kappa - \kappa_0)}{4} + S_2 \right) \tilde{f} \right] dM. \quad (2.44)$$

Visto que $\Omega \subset \bigcup_{p \in \Omega} (M \cap B_{r(p)}(p))$, usando o Lema 2.4.1 existe uma subcoleção de bolas duas a duas disjuntas tais que

$$\Omega \subset \bigcup_{p \in \Omega} (M \cap B_{r(p)}(p)) \subset \bigcup_{p \in \mathcal{S}} (M \cap B_{5r(p)}(p)),$$

onde \mathcal{S} é um subconjunto discreto de Ω . Além disso, a compacidade de $\bar{\Omega}$ nos permite escolher um conjunto finito \mathcal{S} . Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \tilde{f} S_1 dM &\leq \sum_{p \in \mathcal{S}} \int_{M \cap B_{5r(p)}(p)} \tilde{f} S_1 dM \\ &\leq 2\alpha^{-1} 5^{\frac{m-3}{2}} r_1 \sum_{p \in \mathcal{S}} \int_{M \cap B_{r(p)}(p)} \left[|\nabla \tilde{f}| S_1 + \left(\frac{m(\kappa - \kappa_0)}{4} + S_2 \right) \tilde{f} \right] dM \\ &\leq 2\alpha^{-1} 5^{\frac{m-3}{2}} r_1 \int_{\Omega} \left[|\nabla \tilde{f}| S_1 + \left(\frac{m(\kappa - \kappa_0)}{4} + S_2 \right) \tilde{f} \right] dM, \end{aligned}$$

onde, na última desigualdade, usamos que as bolas extrínscas $M \cap B_{r(p)}(p)$, $p \in \mathcal{S}$, são disjuntas. Logo, para $\kappa \leq 0$,

$$\int_{\Omega} f S_1 dM \leq 2 \times 5^{\frac{m-3}{2}} \alpha^{-1} \left(\frac{2(1+\alpha)}{2-\alpha} \right)^{\frac{2}{m-1}} (\text{diam } \Omega) \int_{\Omega} \left[|\nabla f| S_1 + \left(\frac{m(\kappa - \kappa_0)}{4} + S_2 \right) f \right] dM$$

e para $\kappa > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f S_1 dM &\leq 2 \times 5^{\frac{m-3}{2}} \alpha^{-1} \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \arcsen \left(\sqrt{\kappa} \left(\left(\frac{2(1+\alpha)}{2-\alpha} \right)^{\frac{2}{m-1}} (\text{diam } \Omega) \right) \right) \times \\ &\quad \times \int_{\Omega} \left[|\nabla f| S_1 + \left(\frac{m(\kappa - \kappa_0)}{4} + S_2 \right) f \right] dM. \end{aligned}$$

Como $\arcsen x < \frac{\pi}{2}x$, temos

$$\int_{\Omega} f S_1 dM \leq \Lambda(m, \alpha) (\text{diam } \Omega) \int_{\Omega} \left[|\nabla f| S_1 + \left(\frac{m(\kappa - \kappa_0)}{4} + S_2 \right) f \right] dM,$$

onde

$$\Lambda(m, \alpha) = \begin{cases} \pi \times 5^{\frac{m-3}{2}} \alpha^{-1} \left(\frac{2(1+\alpha)}{2-\alpha} \right)^{\frac{2}{m-1}}, & \text{se } \kappa > 0. \\ 2 \times 5^{\frac{m-3}{2}} \alpha^{-1} \left(\frac{2(1+\alpha)}{2-\alpha} \right)^{\frac{2}{m-1}}, & \text{se } \kappa \leq 0. \end{cases}$$

Concluimos a prova do teorema calculando a constante $\Lambda(m)$ e, para isto, iremos otimizar $\Lambda(m, \alpha)$. Notemos que a função $g(\alpha) = \alpha^{-1} \left(\frac{1+\alpha}{2-\alpha} \right)^{\frac{2}{m-1}}$ tem um mínimo global

$$\frac{2(m-1)}{m-7 + \sqrt{9m^2 - 30m + 57}} \left(\frac{3m-9 + \sqrt{9m^2 - 30m + 57}}{3m+3 - \sqrt{9m^2 - 30m + 57}} \right)^{\frac{2}{m-1}} := h(m).$$

A função $h(m)$ é uma função decrescente para $m \geq 3$ e, além disso, $\lim_{m \rightarrow \infty} h(m) = \frac{1}{2}$. Logo $h(m) < h(3) < 2$. Portanto, as constantes da desigualdade de Poincaré podem ser dadas por

$$\Lambda(m) = \begin{cases} \pi \times 5^{\frac{m-3}{2}} \times 2^{\frac{m+1}{m-1}}, & \text{se } \kappa > 0; \\ 2^{\frac{2m}{m-1}} \times 5^{\frac{m-3}{2}}, & \text{se } \kappa \leq 0. \end{cases}$$

Finalmente, a escolha de α nos fornece $\left(\frac{1+\alpha}{2-\alpha}\right)^{\frac{2}{m-1}} < 2$ e, desta forma, podemos considerar

$$r_0 = \begin{cases} \frac{5}{2\sqrt{\kappa}} \arcsen\left(\sqrt{\kappa} \times 2^{\frac{m+1}{m-1}} (\text{diam } \Omega)\right) & \text{se } \kappa > 0; \\ 5 \times 2^{\frac{2}{m-1}} (\text{diam } \Omega) & \text{se } \kappa \leq 0. \end{cases}$$

□

2.5 Demonstração do resultado de estabilidade

Antes de demonstrar o Teorema 2.1.3, apresentamos uma desigualdade de Poincaré modificada envolvendo o primeiro operador de Newton P_1 .

Proposição 2.5.1. *Seja \bar{M}^{m+1} , $m \geq 3$, uma variedade Riemanniana $(m+1)$ -dimensional de curvatura seccional limitada superiormente por uma constante $\kappa \in \mathbb{R}$. Seja M^m uma hipersuperfície de \bar{M}^{m+1} , possivelmente com fronteira, tal que $S_1 \neq 0$ e $S_2 \geq 0$. Assuma uma orientação de M tal que $S_1 > 0$. Sejam $\Omega \subset M$ um domínio regular tal que $\bar{\Omega} \cap \partial M = \emptyset$ e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função não negativa, de classe \mathcal{C}^1 e com suporte compacto contido em Ω . Se $2r_0 < i(\bar{M})$, então*

$$\int_{\Omega} f S_1 dM \leq \frac{\Lambda(m)}{\sqrt{2}} (\text{diam } \Omega) \int_{\Omega} \left[S_1^{1/2} \langle P_1(\nabla f), \nabla f \rangle^{1/2} + \left(\frac{m(\kappa - \kappa_0)}{4} + S_2 \right) f \right] dM, \quad (2.45)$$

onde

$$\Lambda(m) = \begin{cases} \pi \times 5^{\frac{m-3}{2}} \times 2^{\frac{m+1}{m-1}}, & \text{se } \kappa > 0; \\ 2^{\frac{2m}{m-1}} \times 5^{\frac{m-3}{2}}, & \text{se } \kappa \leq 0. \end{cases}$$

Demonstração. Modificando a estimativa (2.15), p. 44, na demonstração do Teorema 2.3.1, por

$$\begin{aligned} \langle P_1(\nabla f), \bar{\nabla} \rho \rangle &\leq \langle P_1(\nabla f), \nabla f \rangle^{1/2} \langle P_1((\bar{\nabla} \rho)^T), \bar{\nabla} \rho \rangle^{1/2} \\ &\leq \langle P_1(\nabla f), \nabla f \rangle^{1/2} (2S_1)^{1/2} \\ &= \sqrt{2} S_1^{1/2} \langle P_1(\nabla f), \nabla f \rangle^{1/2}, \end{aligned}$$

podemos redefinir a função $G_p(r)$, ver (2.26), p. 51, por

$$G_p(r) = \int_{M \cap B_r(p)} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} S_1^{1/2}(x) \langle P_1(\nabla f), \nabla f \rangle^{1/2}(x) + \left(\frac{m(\kappa - \kappa_0(x))}{4} + S_2(x) \right) f(x) \right] dM.$$

Reescrevendo a demonstração do Teorema 2.1.1, passo-a-passo, usando a definição de $G_p(r)$ acima no Lema 2.4.2, obtemos o resultado. □

Demonstração do Teorema 2.1.3. Nossa escolha de orientação, isto é, tal que $S_1 > 0$ em todo ponto, e a desigualdade $S_1 S_3 \leq S_2^2$ implicam $S_3 \leq 0$ em todo ponto. Desta forma, a condição de estabilidade é equivalente a

$$-3 \int_{\Omega} S_3 u^2 dM \leq \int_{\Omega} \langle P_1(\nabla u), \nabla u \rangle dM \quad (2.46)$$

para qualquer função $u : \Omega \subset M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 , com suporte compacto e $u|_{\partial\Omega} = 0$, onde Ω é um domínio regular. Suponhamos que Ω é instável. Isto significa que existe uma função não negativa $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, de classe \mathcal{C}^1 , com suporte compacto, satisfazendo $u|_{\partial\Omega} = 0$ e tal que

$$\int_{\Omega} (-S_3) u^2 dM > \int_{\Omega} \langle P_1(\nabla u), \nabla u \rangle dM. \quad (2.47)$$

Escolhendo $f = u^2$, a desigualdade de Poincaré (2.45) acima para $S_2 = 0$ e $\overline{M}^{m+1} = \mathbb{R}^{m+1}$ torna-se

$$\int_{\Omega} u^2 S_1 dM \leq \sqrt{2} \Lambda(m) (\text{diam } \Omega) \int_{\Omega} S_1^{1/2} u \langle P_1(\nabla u), \nabla u \rangle^{1/2} dM.$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz no lado direito da desigualdade acima, obtemos

$$\int_{\Omega} S_1^{1/2} u \langle P_1(\nabla u), \nabla u \rangle^{1/2} dM \leq \left(\int_{\Omega} u^2 S_1 dM \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} \langle P_1(\nabla u), \nabla u \rangle dM \right)^{1/2}$$

e, portanto,

$$\left(\int_{\Omega} u^2 S_1 dM \right)^{1/2} \leq \sqrt{2} \Lambda(m) (\text{diam } \Omega) \left(\int_{\Omega} \langle P_1(\nabla u), \nabla u \rangle dM \right)^{1/2}.$$

Usando a hipótese (2.47) temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u^2 S_1 dM &\leq 2\Lambda(m)^2 (\text{diam } \Omega)^2 \int_{\Omega} \langle P_1(\nabla u), \nabla u \rangle dM \\ &< 2\Lambda(m)^2 (\text{diam } \Omega)^2 \int_{\Omega} (-3S_3) u^2 dM \\ &\leq 2\Lambda(m)^2 (\text{diam } \Omega)^2 \sup_{\Omega} \left(\frac{-3S_3}{S_1} \right) \int_{\Omega} u^2 S_1 dM, \end{aligned}$$

isto é,

$$1 < 2\Lambda(m)^2 (\text{diam } \Omega)^2 \sup_{\Omega} \left(\frac{-3S_3}{S_1} \right),$$

o que é uma contradição. □

Referências Bibliográficas

- [AD04] Gabriel Acosta and Ricardo G. Durán. An optimal Poincaré inequality in L^1 for convex domains. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 132(1):195–202 (electronic), 2004.
- [AdCC93] H. Alencar, M. do Carmo, and A. G. Colares. Stable hypersurfaces with constant scalar curvature. *Math. Z.*, 213(1):117–131, 1993.
- [AdCE03] Hilário Alencar, Manfredo do Carmo, and Maria Fernanda Elbert. Stability of hypersurfaces with vanishing r -mean curvatures in Euclidean spaces. *J. Reine Angew. Math.*, 554:201–216, 2003.
- [AdCS02] Hilário Alencar, Manfredo do Carmo, and Walcy Santos. A gap theorem for hypersurfaces of the sphere with constant scalar curvature one. *Comment. Math. Helv.*, 77(3):549–562, 2002.
- [ASZ10] Hilário Alencar, Walcy Santos, and Detang Zhou. Stable hypersurfaces with constant scalar curvature. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 138(9):3301–3312, 2010.
- [BC97] João Lucas Marques Barbosa and Antônio Gervasio Colares. Stability of hypersurfaces with constant r -mean curvature. *Ann. Global Anal. Geom.*, 15(3):277–297, 1997.
- [BdLS04] Cleon S. Barroso, Levi L. de Lima, and Walcy Santos. Monotonicity inequalities for the r -area and a degeneracy theorem for r -minimal graphs. *J. Geom. Anal.*, 14(4):557–566, 2004.
- [Bér86] Pierre H. Bérard. *Spectral geometry: direct and inverse problems*, volume 1207 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1986. With appendixes by Gérard Besson, and by Bérard and Marcel Berger.
- [Bra01] Hubert L. Bray. Proof of the Riemannian Penrose inequality using the positive mass theorem. *J. Differential Geom.*, 59(2):177–267, 2001.
- [CM11] Tobias Holck Colding and William P. Minicozzi, II. *A course in minimal surfaces*, volume 121 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.
- [CM14] Tobias Holck Colding and William P. Minicozzi, II. Ricci curvature and monotonicity for harmonic functions. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 49(3-4):1045–1059, 2014.
- [Col12] Tobias Holck Colding. New monotonicity formulas for Ricci curvature and applications. I. *Acta Math.*, 209(2):229–263, 2012.

- [CY77] Shiu Yuen Cheng and Shing Tung Yau. Hypersurfaces with constant scalar curvature. *Math. Ann.*, 225(3):195–204, 1977.
- [dC92] Manfredo Perdigão do Carmo. *Riemannian geometry*. Mathematics: Theory & Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1992. Translated from the second Portuguese edition by Francis Flaherty.
- [dCE04] Manfredo do Carmo and Maria F. Elbert. On stable complete hypersurfaces with vanishing r -mean curvature. *Tohoku Math. J. (2)*, 56(2):155–162, 2004.
- [dCP79] M. do Carmo and C. K. Peng. Stable complete minimal surfaces in \mathbf{R}^3 are planes. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 1(6):903–906, 1979.
- [Eck01] Klaus Ecker. A local monotonicity formula for mean curvature flow. *Ann. of Math. (2)*, 154(2):503–525, 2001.
- [Eck05] Klaus Ecker. Local monotonicity formulas for some nonlinear diffusion equations. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 23(1):67–81, 2005.
- [Eva10] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2010.
- [Fed69] Herbert Federer. *Geometric measure theory*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 153. Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969.
- [FG13] Mostafa Fazly and Nassif Ghoussoub. De Giorgi type results for elliptic systems. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 47(3-4):809–823, 2013.
- [Fre96] Katia Rosenvald Frensel. Stable complete surfaces with constant mean curvature. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)*, 27(2):129–144, 1996.
- [Grü88] Michael Grüter. The monotonicity formula in geometric measure theory, and an application to a partially free boundary problem. In *Partial differential equations and calculus of variations*, volume 1357 of *Lecture Notes in Math.*, pages 238–255. Springer, Berlin, 1988.
- [HL99a] Jorge Hounie and Maria Luiza Leite. Two-ended hypersurfaces with zero scalar curvature. *Indiana Univ. Math. J.*, 48(3):867–882, 1999.
- [HL99b] Jorge Hounie and Maria Luiza Leite. Uniqueness and nonexistence theorems for hypersurfaces with $H_r = 0$. *Ann. Global Anal. Geom.*, 17(5):397–407, 1999.
- [HN59] Philip Hartman and Louis Nirenberg. On spherical image maps whose Jacobians do not change sign. *Amer. J. Math.*, 81:901–920, 1959.
- [HS74] David Hoffman and Joel Spruck. Sobolev and isoperimetric inequalities for Riemannian submanifolds. *Comm. Pure Appl. Math.*, 27:715–727, 1974.

- [HS75] David Hoffman and Joel Spruck. A correction to: “Sobolev and isoperimetric inequalities for Riemannian submanifolds” (*Comm. Pure Appl. Math.* **27** (1974), 715–725). *Comm. Pure Appl. Math.*, 28(6):765–766, 1975.
- [INS12] Said Ilias, Barbara Nelli, and Marc Soret. Caccioppoli’s inequalities on constant mean curvature hypersurfaces in Riemannian manifolds. *Ann. Global Anal. Geom.*, 42(4):443–471, 2012.
- [JK81] L. Jorge and D. Koutroufiotis. An estimate for the curvature of bounded submanifolds. *Amer. J. Math.*, 103(4):711–725, 1981.
- [Li07] Jun-Fang Li. Eigenvalues and energy functionals with monotonicity formulae under Ricci flow. *Math. Ann.*, 338(4):927–946, 2007.
- [LW08] Peter Li and Jiaping Wang. A generalization of Cheng’s theorem. *Asian J. Math.*, 12(4):519–526, 2008.
- [MS73] J. H. Michael and L. M. Simon. Sobolev and mean-value inequalities on generalized submanifolds of R^n . *Comm. Pure Appl. Math.*, 26:361–379, 1973.
- [NS07] Barbara Nelli and Marc Soret. Stably embedded minimal hypersurfaces. *Math. Z.*, 255(3):493–514, 2007.
- [Ôtspl] Tominosuke Ôtsuki. A remark on the Sobolev inequality for Riemannian submanifolds. *Proc. Japan Acad.*, 51:785–789, 1975 suppl.
- [Rei73] Robert C. Reilly. Variational properties of functions of the mean curvatures for hypersurfaces in space forms. *J. Differential Geometry*, 8:465–477, 1973.
- [Ros93] Harold Rosenberg. Hypersurfaces of constant curvature in space forms. *Bull. Sci. Math.*, 117(2):211–239, 1993.
- [Sim83] Leon Simon. *Lectures on geometric measure theory*, volume 3 of *Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, Australian National University*. Australian National University, Centre for Mathematical Analysis, Canberra, 1983.
- [SSY75] R. Schoen, L. Simon, and S. T. Yau. Curvature estimates for minimal hypersurfaces. *Acta Math.*, 134(3-4):275–288, 1975.
- [Urb03] John Urbas. Monotonicity formulae and curvature equations. *J. Reine Angew. Math.*, 557:199–218, 2003.

Apêndice

Vamos demonstrar o seguinte fato estabelecido na Introdução:

Seja $x : M^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma imersão isométrica com curvatura escalar nula. Se H e K denotam a curvatura média e a curvatura de Gauss-Kronecker, respectivamente, então

$$0 \leq \frac{-K}{H^3} \leq \frac{4}{27}$$

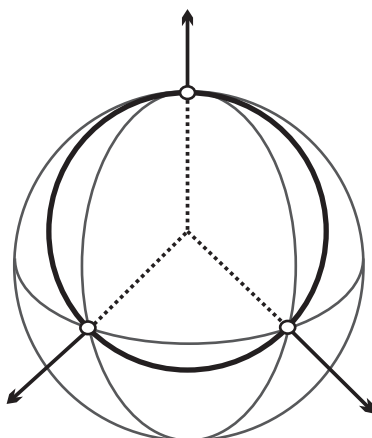
em todo ponto de M .

De fato, seja $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = t\omega$ onde $\omega \in \mathbb{S}^2$. Usando (1.1), podemos ver que R, H e K são polinômios homogêneos. Isto implica $H(t\omega) = tH(\omega)$, $R(t\omega) = t^2R(\omega)$, $K(t\omega) = t^3K(\omega)$ e portanto

$$\frac{K}{H^3}(t\omega) = \frac{K}{H^3}(\omega).$$

Desta forma, vemos que o comportamento de $\frac{K}{H^3}$ depende apenas de sua restrição à esfera \mathbb{S}^2 . Como $N := \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3; R = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = 0\}$ é fechada e \mathbb{S}^2 é compacta, obtemos que $N_\omega = N \cap \mathbb{S}^2$ é compacta, ver figura 1 abaixo. Isto implica que $\frac{K}{H^3} : N_\omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua com suporte compacto. Usando o teorema dos máximos e mínimos de Weierstrass, vemos que $\frac{K}{H^3} : N_\omega \rightarrow \mathbb{R}$ atinge um valor máximo e um valor mínimo em N_ω . O valor mínimo é obviamente igual a zero e o valor máximo $\frac{4}{27}$ pode ser calculado usando o método dos multiplicadores de Lagrange.

Figura 1 Representação do domínio N_ω de $\frac{K}{H^3}$ sobre \mathbb{S}^2 , considerando o quociente como uma função algébrica de seus autovalores. Este domínio é a intersecção do plano $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ com \mathbb{S}^2 . A hipótese suprime apenas três pequenas vizinhanças em torno dos eixos coordenados.



Índice Remissivo

- Bola geodésica, 13, 42
- Campo de vetores
 - normais, 14, 37
 - radial, 40, 43
- Cilindro, 25
- Curvatura
 - de Gauss-Kronecker, 12
 - escalar, 12, 31, 32
 - média, 12, 31
 - seccional, 31, 32, 42
- Desigualdade
 - clássica de Poincaré, 30
 - de estabilidade, 15
 - do valor médio, 35, 42
 - isoperimétrica, 33
 - tipo Poincaré, 31
 - tipo Sobolev, 23
- Diâmetro extrínscico, 31
- Distância
 - função, 31
 - geodésica, 40
 - intrínscica, 14
- Divergência, 13, 37
- Domínio regular, 12, 31
- Equação de Codazzi, 38
- Esfera Euclidiana, 32
- Espaço
 - Euclidiano, 32
 - hiperbólico, 32
- Fórmula
 - da coárea, 44
 - de Monotonicidade, 35, 47
- Função simétrica
 - primeira, 31
 - segunda, 31
 - terceira, 34
- Gradiente, 13, 37
- Hipersuperfície de rotação, 25
- Imersão estável, 13, 34
- Primeira transformação de Newton, 12, 15, 34, 37
- Referencial
 - geodésico, 16
- Segunda forma fundamental, 12, 14, 30, 37
 - autovalores, 16, 37
 - derivada covariante, 16
- Tensor de Ricci, 34, 38
- Teorema
 - A, 14, 23
 - B, 14, 24
 - C, 14, 27
 - de Bernstein, 24
 - de Gauss-Green, 42, 43
- Tubo, 14, 26
- Variação, 12, 34
- Volume, crescimento polinomial de, 13