UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
CURSO EM MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM MATEMÁTICA

GLEYDSON SANTOS DA SILVA

QUADRATIC RESPONSE OF RANDOM AND DETERMINISTIC DYNAMICAL SYSTEMS

MACEIÓ
2023

GLEYDSON SANTOS DA SILVA

QUADRATIC RESPONSE OF RANDOM AND DETERMINISTIC DYNAMICAL SYSTEMS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Sistemas Dinâmicos.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Nóbrega de Oliveira Lucena

MACEIÓ

2023

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária: Taciana Sousa dos Santos – CRB-4 – 2062

S586q Silva, Gleydson Santos da.
Quadratic response of random and deterministic dynamical systems / Gleydson Santos da Silva. – 2023.
71 f.

Orientador: Rafael Nóbrega de Oliveira Lucena.
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. Maceió, 2023.

Bibliografia: f. 71.

1. Sistemas dinâmicos. 2. Resposta quadrática. 3. Aplicações expansoras. I. Título.

CDU: 51

Folha de Aprovação

GLEYDSON SANTOS DA SILVA

QUADRATIC RESPONSE OF RANDOM AND DETERMINISTIC DYNAMICAL SYSTEMS

Dissertação de mestrado submetida ao corpo docente do Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas-PPGMAT-UFAL, Campus A.C. Simões, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática, apresentado em 16/02/2024.

Banca Examinadora:

gov.br Documento assinado digitalmente
RAFAEL NOBREGA DE OLIVEIRA LUCENA
Data: 21/02/2024 09:28:21-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Orientador: Prof. Dr. Rafael Nóbrega de Oliveira Lucena
(Universidade Federal de Alagoas)

gov.br Documento assinado digitalmente
DAVI DOS SANTOS LIMA
Data: 21/02/2024 10:20:36-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Examinador Interno: Prof. Dr. Davi dos Santos Lima
(Universidade Federal de Alagoas)

RAFAEL JOSE ALVAREZ BILBAO
Firmado digitalmente por RAFAEL JOSE ALVAREZ BILBAO
Fecha: 2024.02.20 16:43:00 -05'00'

Examinador Externo: Prof. PhD. Rafael José Álvarez Bilbao - UPTC
(Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia)

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a mim mesmo por sempre tentar me apoiar e buscar encontrar em mim as perguntas, as respostas e a força para investigá-las, abandoná-las ou aceitá-las. Mas se cheguei aqui foi porque eu não estive sozinho. Por isso eu agradeço a minha família, aos meus colegas, aos meus amigos, e aos meus amados irmãos e irmãs que estiveram comigo.

Agradeço ao meu orientador, Rafael Lucena, pelo apoio e acolhimento que me forneceu desde a graduação. Agradeço também aos professores Márcio Cavalcante e Renan Medrado pelo apoio e incentivo que me forneceram nas disciplinas em momentos difíceis. Agradeço imensamente ao professor Isnaldo Isaac pelas conversas e conselhos nos corredores sobre educação e a vida, e agradeço-o enfaticamente por me inspirar e me animar a continuar tentando. Agradeço ao professor Dione Lara que me acolheu em minhas reflexões acerca das matemáticas e das lógicas.

Agradeço a todos que partilharam comigo essa agridoce refeição a que chamamos de vida. Listo algumas - e temo esquecer muitas - dessas figuras: Maxmilian Barros, Victor Santos, Monique Melo, George Tavares, Symon Igor, Wanessa Alquino, Jefferson Rocha, Jennifer Rotandaro, José Marques, Jonny Wollace, Lucas Bulandeira, Leandro Lucena, Murilo dos Santos, Talvanes Araújo, Caio Philipe, Hegel Marinho, Davi Matheus, Rebeca Alves, Daniel Silva, Weverson Clayton, Mariana Bispo, José Isaias, Lucas Honorato, Kaique Cabral, Gerson Dantas, Jardilene Gomes, Lucas Hiroshi, Francisco Alan, Jeann Rocha, Renata Sharmenik, Nicolas Bourbaki, Wagner Xavier, Cleisiane Fernandes, Barbara Amorim, Josafá Júnior, Vinícius Guardiano, Pedro Otávio, Luan Souza, Edson Leoncio, Amanda Maria, Lucivaldo Vitor e Ana Maria.

Agradeço especialmente a Maxmilian Barros de Siqueira, Victor Ferreira de Araújo Santos, Monique Paulo de Melo, George Tavares da Silva e Symon Igor Pinheiro da Silva Lima, Wanessa Amancio Alquino, Jefferson da Rocha Silva, Jennifer Nathieli da Silva Rotandaro de Oliveira, Mariana Bispo da Silva, José Isaias Martins da Silva e Jonny Wollace Gomes Muniz. Sou pobre em agradecimentos, mas ainda assim lhes ofereço todo o agradecimento que tenho.

Agradeço, por fim, à agência de fomento FAPEAL, que deu suporte financeiro a este trabalho por meio do processo de número E:60030.0000001046/2022 e edital 007/2022.

"Relaxa, e deixa fluir."

(Maxmilian Barros de Siqueira)

RESUMO

O presente trabalho consiste no estudo do artigo Quadratic Response of Random and Deterministic Dynamical Systems [1] o qual investiga condições suficientes para que sistemas dinâmicos apresentem uma resposta linear e que, se em adição a tais condições, forem observadas também outras condições o sistema apresente, além disso, uma resposta quadrática nas suas medidas estacionárias. Destacamos que, embora o artigo original trate também de sistemas dinâmicos aleatórios, o foco do atual trabalho está no estudo dos sistemas dinâmicos determinísticos, enfaticamente no estudo dos sistemas dinâmicos determinísticos de aplicações expansoras no círculo unitário, o que constitui uma vasta gama de sistemas dinâmicos determinísticos e, como veremos, manifestam as condições desejadas e, portanto, exibem respostas linear e/ou quadrática em suas medidas invariantes quando submetidos a pequenas perturbações.
Palavras-chave: Sistemas Dinâmicos, Resposta Quadrática, Aplicações Expansoras.

ABSTRACT

The present work consists of studying the article Quadratic Response of Random and Deterministic Dynamical Systems [1] which investigates sufficient conditions for the dynamic systems to present a linear response and that, if in addition to such conditions, other conditions were also observed, the system presented, in addition, a quadratic response in its stationary measures. We emphasize that, although the original article also deals with random dynamical systems, the focus of the current work is on the study of deterministic dynamical systems, emphatically on the study of deterministic dynamical systems of expanding maps in the unitary circle, which constitutes a wide range of deterministic dynamical systems and, as we shall see, manifest the desired conditions and therefore exhibit linear and/or quadratic responses in their invariant measures when manifested to small perturbations.

Keywords: Dynamical Systems, Quadratic Response, Expanding Maps.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Sistemas dinâmicos são modelos matemáticos que representam um conjunto de objetos que possivelmente se movimentam (ou mudam de "estado") com o passar do tempo. A definição precisa de um sistema dinâmico pode ser um pouco mais ou um pouco menos complexa conforme se deseje modelar a passagem do tempo de formas distintas. Para os nossos objetivos, é suficiente trabalharmos com sistemas dinâmicos de tempo discreto e, portanto, para nós, um sistema dinâmico será uma dupla (X,T) composta de um conjunto X e uma função $T : X \to X$. Os elementos de X serão eventualmente chamados de pontos. A função T será chamada de dinâmica e denotaremos por

$$T^2 := T \circ T \text{ e } T^3 := T \circ T \circ T$$

e, de maneira geral, $T^n := T \circ T^{n-1}, \forall n \geq 3$ e os chamaremos de iterados de T. Também denotaremos por $T^0 := I_d$ (a função identidade $I_d : X \to X$) e $T^1 := T$ e também os chamaremos de iterados de T. Um conjunto importante no estudo de um sistema dinâmico é a órbita de um ponto $x \in X$ que é definida por

$$\mathscr{O}(x,T) := \{T^n(x) \in X \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

Caso a dinâmica $T : X \to X$ seja uma função inversível, então os iterados de T podem ser estendidos por $T^{-n} := \left(T^{-1}\right)^n$ (ou seja, são os iterados da função inversa T^{-1}) e, neste caso, a órbita de um ponto se torna

$$\mathscr{O}(x,T) := \{T^n(x) \in X \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

A teoria ergódica é um ramo da matemática que estuda sistemas dinâmicos (e, de certa forma mais precisa, as órbitas dos pontos) sob o ponto de vista da teoria da medida. Nosso estudo neste trabalho está concentrado na teoria ergódica, então teremos de trabalhar com medidas e, em dado momento, será imprescindível que o leitor possua alguma familiaridade com essa teoria. Ainda assim, tentaremos fornecer referências ao leitor interessado e já adiantamos que [9] é uma boa referência, aos nossos olhos, para uma introdução detalhada à teoria da medida.

Sob esses dois pontos de vista, é-nos conveniente pensar em um sistema dinâmico como uma tripla ordenada (X,T,μ) formada por um conjunto X, uma dinâmica $T : X \to X$ e uma medida μ definida em alguma σ-álgebra associada a X que mantemos fixada. Vamos admitir que o leitor possui alguma familiaridade com espaços topológicos - recomendamos [11] para uma introdução à topologia - e, mais ainda, com espaços métricos (recomendamos [12] ao leitor interessado e o aconselhamos estudar espaços métricos antes de espaços topológicos).

Compreender como as propriedades estatísticas mudam quando um sistema é perturbado é de interesse significativo tanto na matemática pura quanto na aplicada. Quando uma propriedade estatística de um sistema varia continuamente após resultados determinísticos ou mesmo variações estocásticas, dizemos que ele é estatisticamente estável. O estudo destas propriedades é motivado pelo desejo de compreender como a incerteza impacta as medições quantitativas e qualitativas dos sistemas. Para estudar as propriedades estatísticas dos sistemas dinâmicos vamos precisar de resultados de análise funcional e, portanto, vamos admitir que o leitor está acostumado com essa teoria; e recomendamos [2] ao leitor interessado para uma boa introdução.

Um importante objeto ergódico de um sistema dinâmico que torna interessante a investigação de sua estabilidade é a medida invariante, visto que é chave na compreensão do comportamento de longo prazo da dinâmica. Para fazer isso, considere uma família a um parâmetro de dinâmicas $\{F_\delta\}_{\delta\in[0,1)}$ como uma perturbação de um sistema $F = F_0$. Suponha que $\{F_\delta\}_{\delta\in[0,1)}$ admite uma família a um parâmetro de medidas invariantes $\{\mu_\delta\}_{\delta\in[0,1)}$, ou seja, μ_δ é uma medida de probabilidade invariante para F_δ para todo $\delta \in [0,1)$. Dizemos que μ_0 é estatisticamente estável se a função $\delta \mapsto \mu_\delta$ é contínua em 0 em uma topologia adequada.

Quando tais medidas respondem às perturbações de maneira suave, dizemos que o sistema exibe resposta linear, e isso pode ser descrito por uma derivada adequada. Mais precisamente, a resposta linear de F_0 sob a perturbação dada é definida pelo limite

$$R := \lim_{\delta\to 0} \frac{\mu_\delta - \mu_0}{\delta},$$

onde o significado desta convergência pode variar de sistema para sistema. A resposta linear à perturbação, portanto, representa o termo de primeira ordem da resposta de um sistema a uma perturbação e, quando vale, uma fórmula de resposta linear pode ser escrita:

$$\mu_\delta = \mu_0 + R\cdot\delta + o(\delta).$$

Onde $o(\delta)$ é um símbolo utilizado para representar alguma função (cuja expressão não interessa muito, mas) que satisfaz $\lim\limits_{\delta\to 0} \dfrac{o(\delta)}{\delta} = 0$. Ou seja, $o(\delta)$ é um "resto pequeno", significando que ele vai a 0 junto com δ e vai mais rápido do que δ. Ou seja, o sistema exibe resposta linear quando a função $\delta \mapsto \mu_\delta$ é diferenciável em 0.

Uma vez que a primeira ordem (a parte linear) da resposta de um sistema a uma perturbação está compreendida, é natural estudar outras ordens. A segunda ordem da resposta pode então estar relacionada com a segunda derivada e com outras questões naturais, como aspectos de convexidade da resposta do sistema sob perturbação, ou a estabilidade da resposta de primeira ordem. Assim, se a resposta linear R representa o termo de primeiro ordem da resposta, a resposta quadrática Q representará o termo de segunda ordem desta resposta, análoga às segundas derivadas na usual expansão de Taylor:

$$\mu_\delta = \mu_0 + R \cdot \delta + \frac{1}{2} Q \cdot \delta^2 + o(\delta^2),$$

onde $o\left(\delta^2\right)$ é um "resto pequeno"que vai a 0 junto com δ e vai mais rápido do que δ^2. Ou seja, $\lim_{\delta \to 0} \frac{o\left(\delta^2\right)}{\delta^2} = 0$. Em outras palavras, o sistema exibe resposta quadrática quando a função $\delta \mapsto \mu_\delta$ é duas vezes diferenciável em 0.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo listamos algumas definições, notações e fazemos alguns comentários acerca de resultados - que não fazem parte do nosso trabalho, mas - que nos são necessários para a compreensão do que virá a seguir.

Definição 1. (Operador de Markov)

Seja $(X,\mathbb{B})$ um espaço mensurável. Um operador de Markov é um operador linear $L: B \to B$, onde B é um espaço vetorial de medidas com sinal (ou medidas complexas) definidas em $\mathbb{B}$, tal que, se $\mu \in B$ e $\mu \geq 0$, então $L(\mu) \geq 0$; além disso para cada $\mu \in B$ que satisfaz $\mu \geq 0$ vale que

$$[L(\mu)](X) = \mu(X).$$

Precisamos fixar a notação para a norma de um operador linear entre espaços normados distintos.

Observação 1. Sejam $(A, \|\cdot\|_A)$ e $(B, \|\cdot\|_B)$ espaços vetoriais normados e seja $L: A \to B$ um operador linear. Denotaremos a norma do operador por

$$\|L\|_{A\to B} := \sup_{\substack{\mu\in A, \\ \|\mu\|_A \leq 1}} \|L(\mu)\|_B.$$

Um operador linear importante para o nosso trabalho será o operador de transferência que age sobre espaços de medidas. Vejamos a seguir a sua definição.

Definição 2. (Operador de Transferência)

Sejam $X := (X,\mathbb{B})$ um espaço mensurável, $T: X \to X$ uma dinâmica (isto é, uma transformação mensurável) e B um espaço vetorial de medidas com sinal (ou medidas complexas) definidas em $\mathbb{B}$. **O operador de transferência** $L_T: B \to B$ é definido por $L_T(\mu) = T^*\mu$, onde $T^*\mu: \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ é a medida-imagem que é definida por $T^*\mu(A) := \mu\left(T^{-1}(A)\right)$ para todo $A \in \mathbb{B}$.

Outro operador linear que também nos será muito importante, principalmente no estudo de aplicações expansoras no círculo, e que tem uma relação com o operador de transferência (os dois operadores são "quase iguais- eles são duais -, mas um age em um espaço de medidas e o outro age em um espaço de funções), é o operador de Perron-Frobenius que nós o definiremos a seguir.

Definição 3. (Operador de Perron-Frobenius)

Seja $X := (X, \mathbb{B}, \lambda)$ um espaço de probabilidade e seja $T : X \to X$ uma dinâmica (ou seja, uma transformação mensurável tal que λ é T-invariante). Definimos **o operador de Perron-Frobenius** $P_T : L^1(X) \to L^1(X)$ como segue: para cada $f \in L^1(X)$, $P_T f$ é a única função (a menos de equivalência qtp) em $L^1(X)$ tal que

$$\int_A P_T f d\lambda = \int_{T^{-1}(A)} f d\lambda$$

para todo $A \in \mathbb{B}$.

A validade dessa definição segue do teorema de Radon-Nikodym de teoria da medida. Remetemos o leitor interessado ao capítulo 4 de [5] para uma motivação e para aprofundamento acerca do operador de Perron-Frobenius.

A relação acima (que é conhecida como relação de dualidade) é equivalente à seguinte identidade:

$$\int_A P_T f d\lambda = \int_A f dT^* \lambda.$$

Devido a ela nós identificaremos o operador de Perron-Frobenius com o operador de transferência e não faremos menção a esses detalhes técnicos. O contexto deixará claro qual o operador em questão a depender de os objetos estudados serem medidas ou funções. Chamá-lo-emos sempre de operador de transferência.

Em algumas situações, como por exemplo no caso de transformações expansoras definidas no círculo, o operador de Perron-Frobenius admite a seguinte expressão analítica (confira [5], páginas 85 e 86):

$$[P_T f](x) = \sum_{y \in T^{-1}(x)} \frac{f(y)}{|T'(y)|} = \sum_{y \in T^{-1}(x)} \frac{f(y)}{T'(y)}.$$

Definição 4. (Medida Invariante)

Sejam $X := (X, \mathbb{B})$ um espaço mensurável, $T : X \to X$ uma dinâmica, B um espaço vetorial de medidas com sinal (ou medidas complexas) definidas em $\mathbb{B}$ e $L_T : B \to B$ o operador de transferência associado a T. Dizemos que uma medida $\mu \in B$ é **uma medida invariante para o operador** L_T, se $L_T(\mu) = \mu$.

As medidas invariantes para os operadores de transferência serão nossas principais ferramentas ao longo do nosso texto.

Definição 5. (Respostas a Perturbações)

Seja $(X, \mathbb{B})$ um espaço mensurável e uma dinâmica $T : X \to X$, e consideremos uma família a um parâmetro de operadores $\{F_\delta\}_{\delta \in [0,\overline{\delta}]}$ como uma perturbação de um operador $F = F_0$ definido em um espaço vetorial normado $(B, \|\cdot\|)$ de medidas com sinal (ou medidas complexas) definidas em $\mathbb{B}$. Suponha que $\{F_\delta\}_{\delta \in [0,\overline{\delta}]}$ admite uma família a um parâmetro de probabilidades invariantes $\{\mu_\delta\}_{\delta \in [0,\overline{\delta}]}$, ou seja, μ_δ é uma medida de probabilidade que é um ponto fixo para F_δ para todo $\delta \in \left[0, \overline{\delta}\right]$. Dizemos que μ_0 é **estatisticamente estável** (ou que o sistema exibe **estabilidade estatística**), se a função $\delta \mapsto \mu_\delta$ é contínua em 0. Dizemos que μ_0 **responde linearmente** (ou que o sistema exibe **resposta linear**), se a função $\delta \mapsto \mu_\delta$ é diferenciável em 0. Por fim, dizemos que μ_0 **responde quadraticamente** (ou que o sistema exibe **resposta quadrática**), se a função $\delta \mapsto \mu_\delta$ é duas vezes diferenciável em 0.

3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

3.1 A Primeira Derivada

Sejam (X,d) um espaço métrico compacto (para nossas aplicações no contexto de transformações expansoras definidas no círculo essa hipótese será importante e la ela já nos é dada, então não precisamos nos preocupar com ela) e $\mathbb{B}$ a σ-álgebra de Borel de X. Consideremos $BS(X)$ o espaço vetorial de todas as medidas $\mu : \mathbb{B} \to \mathbb{R}$ com sinal. Suponhamos que $B_{ss} \subseteq B_s \subseteq B_w \subseteq BS(X)$ são subconjuntos de $BS(X)$ tais que $(B_{ss}, \|\|_{ss})$, $(B_s, \|\|_s)$ e $(B_w, \|\|_w)$ são espaços vetoriais normados que satisfazem

$$\|\mu\|_s \leq \|\mu\|_{ss}, \forall \mu \in B_{ss}$$

e

$$\|\nu\|_w \leq \|\nu\|_s, \forall \nu \in B_s.$$

Vamos assumir que o funcional linear $F_i : B_i \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$F_i(\mu) = \mu(X), \forall \mu \in B_i, \forall i \in \{ss, s, w\},$$

é um funcional linear contínuo. Consideremos os espaços das medidas "de média zero"

$$V_i := \{\mu \in B_i \mid \mu(X) = 0\} = Ker(F_i), \forall i \in \{ss, s, w\}.$$

Como assumimos que F_i é contínuo, então $V_i = Ker(F_i)$ é um subespaço vetorial fechado de B_i, para cada $i \in \{ss, s, w\}$ (confira [2], corolário 2.7-10(b), página 98).

Teorema 1. (Resposta linear)

Consideremos uma família $\{L_\delta\}_{\delta \in [0,\overline{\delta}]}$ de operadores de Markov $L_\delta : B_w \to B_w$ limitados satisfazendo $L_\delta(B_i) \subseteq B_i, \forall i \in \{ss, s, w\}$, $\forall \delta \in \left[0, \overline{\delta}\right]$, e as seguintes condições:

(LR1) (Limitação uniforme): Para cada $\delta \in \left[0, \overline{\delta}\right]$ existe uma probabilidade $h_\delta \in B_{ss}$ tal que

$$L_\delta(h_\delta) = h_\delta.$$

Mais ainda, existe $M \geq 0$ tal que para cada $\delta \in \left[0, \overline{\delta}\right]$ vale que

$$\|h_\delta\|_{ss} \leq M.$$

(LR2) (Convergência para o equilíbrio do operador não perturbado): Existe uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ tal que $a_n \to 0$ e para cada $g \in V_{ss}$ vale que

$$||L_0^n(g)||_s \leq a_n ||g||_{ss}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

(LR3) (Resolvente do operador não perturbado): O operador

$$(I_d - L_0)^{-1} := \sum_{i=0}^{+\infty} L_0^i : V_w \to V_w$$

é um operador linear bem definido e limitado.

(LR4) (Pequena perturbação e operador derivada): Existe $k \geq 0$ tal que para cada $\delta \in \left[0, \overline{\delta}\right]$ vale

$$||L_0 - L_\delta||_{B_s \to B_w} \leq k\delta$$

e

$$||L_0 - L_\delta||_{B_{ss} \to B_s} \leq k\delta.$$

Além disto, existe $\dot{L}(h_0) \in V_w$ tal que

$$\lim_{\delta\to 0} \left|\left| \frac{(L_\delta - L_0)}{\delta}(h_0) - \dot{L}(h_0) \right|\right|_w = 0.$$

Então, satisfeitas todas essas hipóteses, temos a seguinte fórmula de resposta linear:

$$\lim_{\delta\to 0} \left|\left| \frac{h_\delta - h_0}{\delta - 0} - (I_d - L_0)^{-1} \dot{L}(h_0) \right|\right|_w = 0.$$

Ou seja, a resposta linear

$$\dot{h} := \lim_{\delta\to 0} \frac{h_\delta - h_0}{\delta - 0}$$

está bem definida e é dada pela fórmula

$$\dot{h} = (I_d - L_0)^{-1} \dot{L}(h_0).$$

Demonstração. Vamos primeiro mostrar que, sob essas hipóteses, o sistema tem estabilidade estatística em B_s, ou seja,

$$\lim_{\delta\to 0} ||h_\delta - h_0||_s = 0.$$

De fato, pela hipótese (LR1), para $\delta \in \left[0, \overline{\delta}\right]$ existe uma probabilidade $h_\delta \in B_{ss}$ tal que $L_\delta(h_\delta) = h_\delta$. Então, para $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\|h_\delta - h_0\|_s &= \|L_\delta^N(h_\delta) - L_0^N(h_0)\|_s \\
&= \|L_\delta^N(h_\delta) - L_0^N(h_\delta) + L_0^N(h_\delta) - L_0^N(h_0)\|_s \\
&\leq \|L_\delta^N(h_\delta) - L_0^N(h_\delta)\|_s + \|L_0^N(h_\delta) - L_0^N(h_0)\|_s.
\end{aligned}$$

Como h_δ e h_0 são probabilidades, então

$$F_{ss}(h_\delta - h_0) = (h_\delta - h_0)(X) = h_\delta(X) - h_0(X) = 1 - 1 = 0.$$

Ou seja, $h_\delta - h_0 \in V_{ss}$. E, por (LR1), temos:

$$\begin{aligned}
\|h_\delta - h_0\|_{ss} &\leq \|h_\delta\|_{ss} + \|h_0\|_{ss} \\
&\leq M + M \\
&= 2M.
\end{aligned}$$

Então, ficamos com

$$\begin{aligned}
\|h_\delta - h_0\|_s &\leq \|L_\delta^N(h_\delta) - L_0^N(h_\delta)\|_s + \|L_0^N(h_\delta) - L_0^N(h_0)\|_s \\
&\leq \|L_\delta^N(h_\delta) - L_0^N(h_\delta)\|_s + a_N\|h_\delta - h_0\|_{ss} \text{ (LR2)} \\
&\leq \|L_\delta^N(h_\delta) - L_0^N(h_\delta)\|_s + 2a_N M.
\end{aligned}$$

Seja $Q(N) = 2a_N M$. Assim,

$$\|h_\delta - h_0\|_s \leq \|L_\delta^N(h_\delta) - L_0^N(h_\delta)\|_s + Q(N).$$

Vemos que $Q(N) \to 0$ quando $N \to +\infty$ (sem depender de δ) por causa de (LR2).

A seguir, re-escrevemos o operador soma $L_0^n - L_\delta^n$ telescopicamente. Notamos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} L_0^{N-k}(L_0 - L_\delta) L_\delta^{k-1} &= \sum_{k=1}^{N} \left(L_0^{N-k+1} - L_0^{N-k} L_\delta\right) L_\delta^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{N} \left[L_0^{N-k+1} L_\delta^{k-1} - L_0^{N-k} L_\delta^{k}\right] \\
&= \left[L_0^N L_\delta^0 - L_0^{N-1} L_\delta\right] + \left[L_0^{N-1} L_\delta - L_0^{N-2} L_\delta^2\right] + \cdots + \left[L_0 L_\delta^{N-1} - L_0^0 L_\delta^N\right] \\
&= L_0^N - L_\delta^N.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\left(L_0^N - L_\delta^N\right)(h_\delta) &= \left[\sum_{k=1}^{N} L_0^{N-k}(L_0 - L_\delta) L_\delta^{k-1}\right](h_\delta)\\ &= \left[\sum_{k=1}^{N} L_0^{N-k}(L_0 - L_\delta)\right]\left(L_\delta^{k-1}(h_\delta)\right)\\ &= \left[\sum_{k=1}^{N} L_0^{N-k}(L_0 - L_\delta)\right](h_\delta)\,,\ \text{pois } L_\delta(h_\delta) = h_\delta.\end{aligned}$$

Agora, afirmamos que a hipótese de que $\|h_\delta\|_{ss} \leq M$, juntamente com a hipótese da pequena perturbação (LR4), fornece

$$\|\left(L_\delta - L_0\right)(h_\delta)\|_s \leq \delta K M.$$

De fato, temos por (LR4) que $\|L_0 - L_\delta\|_{B_{ss}\to B_s} \leq K\delta$. Ou seja,

$$\sup\left\{\|\left(L_0 - L_\delta\right)(f)\|_s \in \mathbb{R} \mid f \in B_{ss}, \|f\|_{ss} \leq 1\right\} \leq K\delta.$$

Como $h_\delta \in B_{ss}$ e $\|h_\delta\|_{ss} \leq M$, por (LR1), então $\dfrac{h_\delta}{M} \in B_{ss}$, $\left\|\dfrac{h_\delta}{M}\right\|_{ss} \leq 1$ e

$$\begin{aligned}\|\left(L_\delta - L_0\right)(h_\delta)\|_s &= \left\|\left(L_\delta - L_0\right)\left(\frac{h_\delta \cdot M}{M}\right)\right\|_s\\ &= M \cdot \|\left(L_\delta - L_0\right)(\frac{h_\delta}{M})\|_s\\ &\leq M \cdot \sup\left\{\|\left(L_0 - L_\delta\right)(f)\|_s \in \mathbb{R} \mid f \in B_{ss}, \|f\|_{ss} \leq 1\right\}\\ &\leq MK\delta,\end{aligned}$$

como afirmamos. Então,

$$\begin{aligned}\|h_\delta - h_0\|_s &\leq \|L_\delta^N(h_\delta) - L_0^N(h_\delta)\|_s + Q(N)\\ &= \|\left(L_\delta^N - L_0^N\right)(h_\delta)\|_s + Q(N)\\ &= \left\|\left[\sum_{k=1}^{N} L_0^{N-k}(L_\delta - L_0)\right](h_\delta)\right\|_s + Q(N)\\ &\leq \sum_{k=1}^{N}\left\|L_0^{N-k}(L_\delta - L_0)(h_\delta)\right\|_s + Q(N)\\ &\leq \sum_{k=1}^{N}\|L_0^{N-k}\|_{B_s\to B_s} \cdot \|\left(L_\delta - L_0\right)(h_\delta)\|_s + Q(N)\,.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\|h_\delta - h_0\|_s &\leq \left(\sum_{k=1}^{N} \max_{1\leq j\leq N} \left\|L_0^{N-j}\right\|_{B_s\to B_s}\right)\cdot \|(L_\delta - L_0)(h_\delta)\|_s + Q(N)\\
&= N\cdot M_2(N)\cdot \|(L_\delta - L_0)(h_\delta)\|_s + Q(N), \text{ onde } M_2(N) = \max_{1\leq j\leq N} \left\|L_0^{N-j}\right\|_{B_s\to B_s},\\
&\leq N\cdot M_2(N)\cdot \delta K M + Q(N).
\end{aligned}$$

Como $Q(N)\to 0$ quando $N\to+\infty$, então dado $\varepsilon>0$ tomamos $N_0\in\mathbb{N}$ tal que $Q(N)<\dfrac{\varepsilon}{2}$, para todo $N\geq N_0$. Assim,

$$\|h_\delta - h_0\|_s \leq N_0 M_2(N_0)\,\delta K M + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Agora, tomamos $0<\delta<\dfrac{\varepsilon}{2}\cdot\dfrac{1}{N_0 M_2(N_0) K M}$ e obtemos

$$\|h_\delta - h_0\|_s < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

O que prova que $\lim\limits_{\delta\to 0}\|h_\delta - h_0\|_s = 0$. Ou seja, prova a estabilidade estatística em B_s.

Agora, pela hipótese (LR3) o resolvente $(I_d - L_0)^{-1}: V_w\to V_w$ é um operador linear contínuo. Observamos que, como $\dot{L}(h_0)\in V_w$, o resolvente pode ser computado em $\dot{L}(h_0)$. Além disso, usando que $L_0(h_0)=h_0$ e $L_\delta(h_\delta)=h_\delta$, obtemos que

$$\begin{aligned}
(I_d - L_0)\left(\frac{h_\delta - h_0}{\delta}\right) &= \frac{1}{\delta}(I_d - L_0)(h_\delta - h_0)\\
&= \frac{1}{\delta}\left[(I_d - L_0)(h_\delta) - (I_d - L_0)(h_0)\right]\\
&= \frac{1}{\delta}\left[I_d(h_\delta) - L_0(h_\delta) - I_d(h_0) + L_0(h_0)\right]\\
&= \frac{1}{\delta}\left(h_\delta - L_0(h_\delta) - h_0 + h_0\right)
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
(I_d - L_0)\left(\frac{h_\delta - h_0}{\delta}\right) &= \frac{1}{\delta}\left(h_\delta - L_0(h_\delta)\right)\\
&= \frac{1}{\delta}\left(L_\delta(h_\delta) - L_0(h_\delta)\right)\\
&= \frac{1}{\delta}(L_\delta - L_0)(h_\delta).
\end{aligned}$$

Aplicamos o resolvente em ambos os lados da igualdade acima e obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{h_\delta - h_0}{\delta} &= \left[(I_d - L_0)^{-1}\right]\left(\frac{(L_\delta - L_0)}{\delta}(h_\delta)\right)\\
&= \left[(I_d - L_0)^{-1}\left(\frac{L_\delta - L_0}{\delta}\right)\right](h_0) + \left[(I_d - L_0)^{-1}\left(\frac{L_\delta - L_0}{\delta}\right)\right](h_\delta - h_0).
\end{aligned}$$

Como o resolvente é contínuo por (LR3), então

$$\begin{aligned}\left\|\left[(I_d-L_0)^{-1}\left(\frac{L_\delta-L_0}{\delta}\right)\right](h_\delta-h_0)\right\|_w &\leq \left\|(I_d-L_0)^{-1}\right\|_{V_w\to V_w}\cdot\left\|\frac{L_\delta-L_0}{\delta}(h_\delta-h_0)\right\|_w\\ &\leq \left\|(I_d-L_0)^{-1}\right\|_{V_w\to V_w}\cdot\|L_\delta-L_0\|_{B_s\to B_w}\cdot\left\|\frac{h_\delta-h_0}{\delta}\right\|_s.\end{aligned}$$

Aplicamos a hipótese (LR4) e obtemos

$$\begin{aligned}\left\|\left[(I_d-L_0)^{-1}\left(\frac{L_\delta-L_0}{\delta}\right)\right](h_\delta-h_0)\right\|_w &\leq \left\|(I_d-L_0)^{-1}\right\|_{V_w\to V_w}\cdot K\delta\cdot\left\|\frac{h_\delta-h_0}{\delta}\right\|_s\\ &= \left\|(I_d-L_0)^{-1}\right\|_{V_w\to V_w}\cdot K\cdot\|h_\delta-h_0\|_s\\ &\to 0,\end{aligned}$$

devido à estabilidade estatística forte, quando $\delta\to 0$. Portanto,

$$\frac{h_\delta-h_0}{\delta}-\left[(I_d-L_0)^{-1}\left(\frac{L_\delta-L_0}{\delta}\right)\right](h_0)=\left[(I_d-L_0)^{-1}\left(\frac{L_\delta-L_0}{\delta}\right)\right](h_\delta-h_0)$$

Daí,

$$\lim_{\delta\to 0}\left\|\frac{h_\delta-h_0}{\delta}-(I_d-L_0)^{-1}\left(\dot{L}(h_0)\right)\right\|_w=\lim_{\delta\to 0}\left\|\left[(I_d-L_0)^{-1}\left(\frac{L_\delta-L_0}{\delta}\right)\right](h_\delta-h_0)\right\|_w=0.$$

Q.E.D.

Agradecemos ao Prof. Dr. Davi Lima dos Santos por observar e nos mostrar que este teorema nos permite definir um operador $\dot{L}:B_{ss}\to V_w$.

3.2 A Segunda Derivada

Consideremos agora mais um espaço $(B_{ww},\|\|_{ww})$ tal que

$$B_w\subseteq B_{ww}\subseteq BS(X)$$

e

$$\|\mu\|_{ww}\leq\|\mu\|_w,\forall\mu\in B_w.$$

Vamos assumir também que o funcional linear $F_{ww}:B_{ww}\to B_{ww}$ definido por $F_{ww}(\mu)=\mu(X),\forall\mu\in B_{ww}$, é contínuo e consideraremos o espaço $V_{ww}=Ker(F_{ww})$.

Teorema 2. (Resposta quadrática)

Seja $\{L_\delta\}_{\delta\in[0,\overline{\delta}]}$ uma família de operadores de Markov como no teorema anterior e satisfazendo (LR1), (LR2), (LR3) e (LR4). Assumimos ainda que:

(QR1): O operador derivada $\dot{L}$ admite uma extensão limitada $\dot{L}: B_w \to V_{ww}$ tal que

$$\lim_{\delta\to 0}\left|\left|\frac{(L_\delta - L_0)}{\delta} - \dot{L}\right|\right|_{B_w\to B_{ww}} = 0.$$

(QR2): Existe um "operador segunda derivada"em h_0, ou seja, existe $\ddot{L}(h_0)\in V_{ww}$ tal que

$$\lim_{\delta\to 0}\left|\left|\frac{(L_\delta - L_0)\,h_0 - \delta\dot{L}\,(h_0)}{\delta^2} - \ddot{L}\,(h_0)\right|\right|_{ww} = 0.$$

(QR3): O operador resolvente $(I_d - L_0)^{-1}$ admite uma extensão limitada como um operador de $V_{ww}\to V_{ww}$.

Então, a aplicação $\delta\mapsto h_\delta$, ou seja, a aplicação $G:\left[0,\overline{\delta}\right]\to B_{ss}$ definida por $G(\delta) = h_\delta$ admite uma expansão de Taylor de ordem dois em $\delta = 0$, i.e.,

$$h_\delta = h_0 + \delta\dot{h} + \frac{\delta^2}{2}\ddot{h} + o\left(\delta^2\right),$$

com

$$\lim_{\delta\to 0}\left|\left|\frac{h_\delta - h_0 - \delta\left[(I_d - L_0)^{-1}\dot{L}\right](h_0)}{\delta^2} - J\right|\right|_{ww} = 0,$$

onde

$$\frac{\ddot{h}}{2} = J := (I_d - L_0)^{-1}\left[\ddot{L}\,(h_0) + \dot{L}\,(I_d - L_0)^{-1}\dot{L}\,(h_0)\right].$$

Demonstração. Escrevemos para $\delta\neq 0$,

$$\begin{aligned}
(I_d - L_0)\frac{h_\delta - h_0 - \delta\left[(I_d - L_0)^{-1}\dot{L}\right](h_0)}{\delta^2} &= \frac{1}{\delta^2}\left[(I_d - L_0)\,(h_\delta - h_0) - \delta\dot{L}\,(h_0)\right]\\
&= \frac{1}{\delta^2}\left[I_d\,(h_\delta) - I_d\,(h_0) - L_0\,(h_\delta) + L_0\,(h_0) - \delta\dot{L}\,(h_0)\right]\\
&= \frac{1}{\delta^2}\left[h_\delta - h_0 - L_0\,(h_\delta) + h_0 - \delta\dot{L}\,(h_0)\right]\\
&= \frac{1}{\delta^2}\left[h_\delta - L_0\,(h_\delta) - \delta\dot{L}\,(h_0)\right]\\
&= \frac{1}{\delta^2}\left[L_\delta\,(h_\delta) - L_0\,(h_\delta) - \delta\dot{L}\,(h_0)\right]\\
&= \frac{1}{\delta^2}\left[(L_\delta - L_0)\,(h_\delta) - \delta\dot{L}\,(h_0)\right]\\
&= \frac{1}{\delta^2}\left[(L_\delta - L_0)\,(h_\delta - h_0 + h_0) - \delta\dot{L}\,(h_0)\right]\\
&= \frac{1}{\delta^2}\left[(L_\delta - L_0)\,(h_\delta - h_0)\right] + \frac{1}{\delta^2}\left[(L_\delta - L_0)\,(h_0) - \delta\dot{L}\,(h_0)\right].
\end{aligned}$$

Pela hipótese (QR2) temos que

$$\frac{1}{\delta^2}\left[\left(L_\delta - L_0\right)(h_0) - \delta \dot{L}(h_0)\right] \stackrel{\delta\to 0}{\longrightarrow} \ddot{L}(h_0)$$

na norma de V_{ww}. O primeiro termo do lado direito da igualdade acima pode ser re-escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\delta^2}\left[\left(L_\delta - L_0\right)(h_\delta - h_0)\right] &= \left[\left(\frac{L_\delta - L_0}{\delta}\right)\right]\left(\frac{h_\delta - h_0}{\delta}\right) \\
&= \left[\left(\frac{L_\delta - L_0}{\delta} - \dot{L} + \dot{L}\right)\right]\left(\frac{h_\delta - h_0}{\delta}\right) \\
&= \left[\left(\frac{L_\delta - L_0}{\delta} - \dot{L}\right)\right]\left(\frac{h_\delta - h_0}{\delta}\right) + \dot{L}\left(\frac{h_\delta - h_0}{\delta}\right) \\
&= \left[\left(\frac{L_\delta - L_0}{\delta} - \dot{L}\right)\right]\left(\dot{h} - \dot{h} + \frac{h_\delta - h_0}{\delta}\right) + \dot{L}\left(\frac{h_\delta - h_0}{\delta}\right),
\end{aligned}$$

onde $\dot{h} := \lim_{\delta\to 0}\frac{h_\delta - h_0}{\delta} \in V_w$ (está bem definido pelo Teorema 1). Pela convergência uniforme de $\frac{L_\delta - L_0}{\delta}$ para o operador derivada $\dot{L}$ em (QR1), o termo $\left[\left(\frac{L_\delta - L_0}{\delta} - \dot{L}\right)\right]\left(\dot{h} - \dot{h} + \frac{h_\delta - h_0}{\delta}\right)$ converge para $[0]\left(\dot{h}+0\right) = 0$ em V_{ww} quando $\delta \to 0$. Já para o segundo termo, escrevemos

$$\left\|\dot{L}\left(\frac{h_\delta - h_0}{\delta}\right) - \dot{L}\left(I_d - L_0\right)^{-1}\dot{L}(h_0)\right\|_{ww} \leq \left\|\dot{L}\right\|_{V_w \to V_{ww}} \cdot \left\|\frac{h_\delta - h_0}{\delta} - \left(I_d - L_0\right)^{-1}\dot{L}(h_0)\right\|_{w}$$

que vai para 0 quando $\delta \to 0$, graças ao teorema 1. Então, temos que na norma de V_{ww}:

$$\left(I_d - L_0\right)\frac{h_\delta - h_0 - \delta\left[\left(I_d - L_0\right)^{-1}\dot{L}\right](h_0)}{\delta^2} \stackrel{\delta\to 0}{\longrightarrow} \ddot{L}(h_0) + \dot{L}\left(I_d - L_0\right)^{-1}\dot{L}(h_0).$$

Aplicamos o resolvente $\left(I_d - L_0\right)^{-1} : V_{ww} \to V_{ww}$ e sua continuidade para concluirmos que

$$\frac{h_\delta - h_0 - \delta\left[\left(I_d - L_0\right)^{-1}\dot{L}\right](h_0)}{\delta^2} \stackrel{\delta\to 0}{\longrightarrow} \left(I_d - L_0\right)^{-1}\left[\ddot{L}(h_0) + \dot{L}\left(I_d - L_0\right)^{-1}\dot{L}(h_0)\right].$$

Q.E.D.

3.3 Existência do Operador Resolvente para L_0

As hipóteses (LR3) e (QR3) podem ser difíceis de se obter ao tentar aplicar os teoremas anteriores em contextos específicos, porém a presença de alguma regularização e compacidade nos permite mostrar que o operador resolvente $\left(I_d - L_0\right)^{-1}$ está bem definido e é contínuo no espaço das medidas de média zero. O seguinte teorema é uma versão de uma ferramenta clássica para obter gap espectral em sistemas satisfazendo uma desigualdade de Lasota-Yorke. Ela nos permite estimar a taxa de contração de medidas de média zero e implica gap espectral quando aplicada para operadores de Markov.

Vamos considerar um operador de transferência L_0 agindo em dois espaços de Banach de medidas complexas ou medidas com sinal $(B_s, \|\|_s)$, $(B_w, \|\|_w)\,, B_s \subseteq B_w$ com

$$\|\mu\|_w \leq \|\mu\|_s, \forall \mu \in B_s.$$

Nós assumimos também que o funcional linear $\mu \mapsto \mu\,(X)$ é contínuo nas topologias induzidas por $\|\|_s$ e $\|\|_w$, e consideraremos $V_i := \{\mu \in B_i \mid \mu\,(X) = 0\}\,, i \in \{s, w\}$.

Teorema 3. Consideremos um operador de transferência $L_0 : B_w \to B_w$ tal que $L_0\,(B_s) \subseteq B_s$ e suponhamos:

(1) (Desigualdade de Lasota-Yorke): Existem $A, B > 0$ e $0 < \lambda_1 < 1$ tais que para cada $g \in B_s$ vale que

$$||L_0^n\,(g)||_s \leq A\lambda_1^n\,||g||_s + B\,||g||_w\,.$$

(2) (Convergência para o equilíbrio): Para cada $g \in V_s$, vale

$$\lim_{n \to +\infty} ||L_0^n\,(g)||_w = 0.$$

(3) (Inclusão compacta): A imagem da bola unitária fechada em B_s, sob L_0 é relativamente compacta em B_w. Ou seja, $\overline{L_0\,(B\,[0,1])}$ é um subconjunto compacto de B_w.

Sob estas condições, temos que: L_0 admite um único ponto fixo $h \in B_s$, satisfazendo $h\,(X) = 1$ e existem $C > 0$ e $0 < \rho < 1$ tais que para toda $f \in V_s$ e todo m grande o suficiente,

$$||L_0^m\,(f)||_s \leq C\rho^m\,||f||_s\,.$$

Demonstração. A demonstração do artigo original [1] utiliza o teorema de Hennion em [3] com conceitos de [13] e [4] para mostrar a existência do ponto fixo. Preferimos adaptar as demonstrações das proposições 12 e 13 de [6], páginas 12 e 13, para mostrar a existência do ponto fixo, pois pareceu-nos mais clara.

Primeiro, mostraremos a existência do ponto fixo. Começamos observando que para $g \in B_s$ a desigualdade de Lasota-Yorke nos fornece que

$$\begin{aligned}
\|L_0^n(g)\|_s &\leq A\lambda_1^n \|g\|_s + B\|g\|_w \\
&\leq A\lambda_1^n \|g\|_s + B\|g\|_s, \text{ pois } \|\cdot\|_w \leq \|\cdot\|_s, \\
&\leq A\|g\|_s + B\|g\|_s, \text{ pois } \lambda_1 < 1, \\
&= (A+B)\|g\|_s.
\end{aligned}$$

O que nos fornece que

$$\|L_0^n\|_{B_s \to B_s} \leq A + B,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Agora vamos construir o ponto fixo, para isso fixaremos $f_0 \in B_s$ uma medida positiva não-nula com $\|f_0\|_s \leq \dfrac{1}{A+B}$ e definiremos

$$\varphi_n := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} L_0^j(f_0).$$

Como o operador de transferência é um operador de Markov, então ele preserva a positividade das medidas e preserva a média de medidas positivas. Portanto, φ_n é uma medida positiva, para todo $n \in \mathbb{N}$, e

$$\begin{aligned}
\varphi_n(X) &= \left[\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} L_0^j(f_0)\right](X) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} L_0^j(f_0)(X) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f_0(X) \\
&= f_0(X).
\end{aligned}$$

Portanto, todos os φ_n possuem a mesma média que é igual à média de f_0. Este fato nos será útil mais a frente.

Como $f_0 \in B_s$, então $L_0^j(f_0) \in B_s$, para todo $j \in \mathbb{N}$, já que L_0 deixa B_s invariante. Além disso, como B_s é um espaço vetorial, então $\varphi_n \in B_s$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Podemos então calcular a norma $\|\|_s$ em φ_n. Vemos que

$$\begin{aligned}
\|\varphi_n\|_s &\leq \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left\|L_0^j(f_0)\right\|_s \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\|L_0^n\|_{B_s\to B_s}\,||f_0||_s \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}[A+B]\frac{1}{A+B} \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}1 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Ou seja, $\varphi_n \in B[0,1] \subseteq B_s$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, pela inclusão compacta, $(L_0(\varphi_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{L_0(B[0,1])} \subseteq B_w$ possui uma subsequência $(L_0(\varphi_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ que converge para um certo $h \in B_w$. Afirmamos que h é um ponto fixo de L_0. De fato, vemos que $L_0(h) = L_0(\lim L_0(\varphi_{n_k})) = \lim L_0(L_0(\varphi_{n_k}))$, por continuidade de L_0, e que

$$\begin{aligned}
L_0(L_0(\varphi_{n_k})) &= \frac{1}{n_k}\sum_{j=2}^{n_k+1}L_0^j(f_0) \\
&= \frac{1}{n_k}\sum_{j=2}^{n_k+1}L_0^j(f_0) + \frac{1}{n_k}L_0(f_0) - \frac{1}{n_k}L_0(f_0) \\
&= \frac{1}{n_k}\sum_{j=1}^{n_k+1}L_0^j(f_0) - \frac{1}{n_k}L_0(f_0) \\
&= \frac{1}{n_k}\sum_{j=1}^{n_k}L_0^j(f_0) + \frac{1}{n_k}L_0^{n_k+1}(f_0) - \frac{1}{n_k}L_0(f_0) \\
&= L_0(\varphi_{n_k}) + \frac{1}{n_k}\left[L_0^{n_k+1}(f_0) - L_0(f_0)\right].
\end{aligned}$$

E como vimos acima que $L_0^n(f_0) \in B_s$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então podemos calcular a norma forte no último termo do lado direito da igualdade acima e, lembrando que $\|L_0^n\|_{B_s\to B_s} \leq A+B$, obtemos

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{1}{n_k}\left[L_0^{n_k+1}(f_0) - L_0(f_0)\right]\right\|_s &\leq \frac{1}{n_k}\left[\left\|L_0^{n_k+1}(f_0)\right\|_s + \|L_0(f_0)\|_s\right] \\
&\leq \frac{1}{n_k}\left[\left\|L_0^{n_k+1}\right\|_{B_s\to B_s}\|f_0\|_s + \|L_0\|_{B_s\to B_s}\|f_0\|_s\right] \\
&\leq \frac{1}{n_k}\left[(A+B)\frac{1}{A+B} + (A+B)\frac{1}{A+B}\right] \\
&= \frac{2}{n_k}.
\end{aligned}$$

Que converge para 0. Isto nos mostra que

$$L_0(h) = L_0(\lim L_0(\varphi_{n_k})) = \lim L_0(L_0(\varphi_{n_k})) = \lim L_0(\varphi_{n_k}) + 0 = \lim L_0(\varphi_{n_k}) = h.$$

Então, h é um ponto fixo de L_0 como afirmamos. Vamos mostrar que $h \in B_s$.

Seja $g_n := L_0(\varphi_n)$ e seja $g_{n,m} := L_0^m(g_n)$. Lembramos que $\varphi_n \in B_s$ e L_0 mantém B_s invariante e percebemos que $g_{n,m} = L_0^m(g_n) = L_0^m(L_0(\varphi_n)) = L_0^{m+1}(\varphi_n) \in B_s$, para todo $n, m \in \mathbb{N}$. Além disso, temos $\|g_{n,m}\|_s = \left\|L_0^{m+1}(\varphi_n)\right\|_s \leq \left\|L_0^{m+1}\right\|_{B_s \to B_s} \cdot \|\varphi_n\|_s \leq (A+B) \cdot 1 = A+B$, para todo $n, m \in \mathbb{N}$. Além disso, a desigualdade de Lasota-Yorke nos diz que

$$\begin{aligned}
\left\|g_{n_1,a+m} - g_{n_2,b+m}\right\|_s &= \left\|L_0^{a+m+1}(\varphi_{n_1}) - L_0^{b+m+1}(\varphi_{n_2})\right\|_s \\
&= \left\|L_0^m\left(L_0^{a+1}(\varphi_{n_1}) - L_0^{b+1}(\varphi_{n_2})\right)\right\|_s \\
&\leq A\lambda_1^m \left\|L_0^{a+1}(\varphi_{n_1}) - L_0^{b+1}(\varphi_{n_2})\right\|_s + B\left\|L_0^{a+1}(\varphi_{n_1}) - L_0^{b+1}(\varphi_{n_2})\right\|_w \\
&\leq A\lambda_1^m \left\|g_{n_1,a} - g_{n_2,b}\right\|_s + B\left\|g_{n_1,a} - g_{n_2,b}\right\|_w.
\end{aligned}$$

Mais acima mostramos que

$$\lim L_0(L_0(\varphi_{n_k})) = h.$$

Ou seja, mostramos que $\lim L_0^2(\varphi_{n_k}) = h$. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $\lim L_0^n(\varphi_{n_k}) = h$. Vemos então que

$$\lim L_0^{n+1}(\varphi_{n_k}) = \lim L_0(L_0^n(\varphi_{n_k})) = L_0(\lim L_0^n(\varphi_{n_k})) = L_0(h) = h.$$

Portanto, $\lim L_0^n(\varphi_{n_k}) = h$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, se $\left\|g_{n_k,0} - h\right\|_w \leq \varepsilon$, ou seja, se $\|L_0(\varphi_{n_k}) - h\|_w \leq \varepsilon$, então $\left\|g_{n_k,j} - h\right\|_w \leq \varepsilon$ para todo $j \geq 0$. Daí, $g_{n_k,k} \to h$ em B_w e afirmamos que $\left(g_{n_k,k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em B_s. De fato, vemos que se $k_1 \leq k_2$, então

$$\begin{aligned}
\left\|g_{n_{k_1},k_1} - g_{n_{k_2},k_2}\right\|_s &\leq A\lambda_1^{k_1}\left\|g_{n_{k_1},0} - g_{n_{k_2},k_2-k_1}\right\|_s + B\left\|g_{n_{k_1},0} - g_{n_{k_2},k_2-k_1}\right\|_w \\
&= A\lambda_1^{k_1}\left\|L_0\left(\varphi_{n_{k_1}}\right) - L_0^{k_2-k_1+1}\left(\varphi_{n_{k_2}}\right)\right\|_s + B\left\|L_0\left(\varphi_{n_{k_1}}\right) - L_0^{k_2-k_1+1}\left(\varphi_{n_{k_2}}\right)\right\|_w \\
&\leq A \cdot \lambda_1^{k_1} \cdot \left(\left\|L_0\left(\varphi_{n_{k_1}}\right)\right\|_s + \left\|L_0^{k_2-k_1+1}\left(\varphi_{n_{k_2}}\right)\right\|_s\right) + B \cdot \left\|L_0\left(\varphi_{n_{k_1}}\right) - L_0^{k_2-k_1+1}\left(\varphi_{n_{k_2}}\right)\right\|_w \\
&\leq A \cdot \lambda_1^{k_1} \cdot ((A+B) + (A+B)) + B \cdot \left\|L_0\left(\varphi_{n_{k_1}}\right) - L_0^{k_2-k_1+1}\left(\varphi_{n_{k_2}}\right)\right\|_w \\
&\to A \cdot 0 \cdot 2(A+B) + B \cdot \|h-h\|_w \\
&= 0.
\end{aligned}$$

O que prova que $\left(g_{n_k,k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em B_s e como B_s é um espaço de Banach, então $g_{n_k,k}$ é convergente em B_s, mas como $g_{n_k,k}$ converge para h em B_w, então devemos ter $h \in B_s$, como queríamos demonstrar.

Podemos normalizar h de modo que $h(X) = 1$, isto é, h seja uma probabilidade. De fato, se fosse $h(X) = 0$, então teríamos $[\lim L_0(\varphi_{n_k})](X) = 0$. Como admitimos que a aplicação $\mu \mapsto \mu(X)$ é contínua, então temos que $\lim L_0(\varphi_{n_k})(X) = 0$ e como o operador de transferência é um operador de Markov, então ele preserva média de medidas positivas e, portanto, temos $\lim \varphi_{n_k}(X) = 0$. Mas como todos os φ_n possuem a mesma média que é igual à média de f_0, então ficamos com $f_0(X) = 0$, o que é uma contradição, pois supomos que f_0 era uma medida positiva não-nula e, portanto, possui média não-nula. Isso prova que a média de h é não-nula e, portanto, podemos normalizá-lo para que se torne uma probabilidade.

Mostraremos que h assim é único. De fato, se g fosse outro ponto fixo de L_0 com $g(X) = 1$, então $(h-g) \in V_s$, pois $(h-g)(X) = h(X) - g(X) = 1 - 1 = 0$. Assim, a hipótese de convergência para o equilíbrio nos fornece que:

$$\|h-g\|_w = \|L_0^n(h) - L_0^n(g)\|_w = \|L_0^n(h-g)\|_w \to 0.$$

Ou seja, $\|h-g\|_w = 0$ e, portanto, $h = g$. O que prova a unicidade do ponto fixo.

A demonstração a seguir (que está presente no artigo original [1]) será útil para consequências futuras no contexto de transformações expansoras definidas no círculo, mas terá pouco valor para a demonstração do atual teorema já que fizemos uma demonstração diferente da existência e unicidade do ponto fixo. Agradecemos ao Prof. PhD Rafael José Álvarez Bilbao que observou que para nossas hipóteses o sistema é misturador e, portanto, é ergódico.

A existência de um ponto fixo para L_0 nos diz que 1 é um autovalor de L_0. Vamos mostrar que 1 é o único autovalor de L_0 no círculo unitário. Seja $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ tal que $e^{i\theta}$ é um autovalor de L_0. Seja $f \in B_s$ um autovalor de L_0 associado a $e^{i\theta}$. Como L_0 é um operador de Markov, ele preserva médias e, portanto, temos que

$$f(X) = [L_0(f)](X) = \left[e^{i\theta} f\right](X)$$

Afirmamos que daí decorre que a média $f(X) = 0$. De fato, temos

$$\begin{aligned} f(X) &= \left[e^{i\theta} f\right](X) \\ &= e^{i\theta} \cdot f(X). \end{aligned}$$

Portanto, $\left(1 - e^{i\theta}\right) f(X) = 0$. Como $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, então $e^{i\theta} \neq 1$ e, devemos ter $f(X) = 0$, como afirmamos.

Mas então, pela hipótese de convergência para o equilíbrio, temos $\|f\|_w = 0$, pois

$$\|f\|_w = 1 \cdot \|f\|_w = \left|e^{i\theta n}\right| \cdot \|f\|_w = \left\|e^{i\theta n} f\right\|_w = \|L_0^n(f)\|_w \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

uma contradição, pois $f \neq 0$, já que é uma autofunção. Ou seja, a suposição inicial de que $e^{i\theta}$ era um autovalor com $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ é falsa. Concluímos assim que 1 é o único autovalor de L_0 no círculo unitário. Mais ainda, ele é simples, visto que se existem h_1 e h_2 satisfazendo $L_0(h_1) = h_1$ e $L_0(h_2) = h_2$ e normalizados de modo que $h_1(X) = h_2(X) = 1$, então $h_1 - h_2 \in V_s$ e, portanto, pela hipótese de convergência para o equilíbrio $\|h_1 - h_2\|_w = 0$, pois

$$\|h_1 - h_2\|_w = \|L_0^n(h_1) - L_0^n(h_2)\|_w = \|L_0^n(h_1 - h_2)\|_w \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Agora vamos provar a segunda parte do teorema. Vamos, então, estimar a taxa de convergência para o equilíbrio. Seja S_s a bola unitária fechada em V_s. Pela hipótese de compacidade, para cada $\varepsilon > 0$ existe uma ε-rede $G_\varepsilon \subseteq L_0(S_s)$ para $L_0(S_s)$ em $\|\cdot\|_w$ (veja [2], lema 8.2-2(a),(c), páginas 412, 413; confira definição 8.1-1 de [2], páginas 405, 406 e veja o exercício 8.1-6 de [2], página 411), o que implica que para cada $f \in S_s$ podemos encontrar $g \in L_0(S_s) \cap G_\varepsilon$ tal que $\|L_0(f) - g\|_w \leq \varepsilon$. Temos, para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\|L_0^m(f)\|_s &= \left\|L_0^{m-1}(L_0(f))\right\|_s \\
&= \left\|L_0^{m-1}(g + L_0(f) - g)\right\|_s \\
&= \left\|L_0^{m-1}(g) + L_0^{m-1}(L_0(f) - g)\right\|_s \\
&\leq \left\|L_0^{m-1}(g)\right\|_s + \left\|L_0^{m-1}(L_0(f) - g)\right\|_s.
\end{aligned}$$

Assim, pela desigualdade de Lasota-Yorke, obtemos

$$\begin{aligned}
\|L_0^m(f)\|_s &\leq \left\|L_0^{m-1}(g)\right\|_s + A\lambda_1^{m-1}\|L_0(f) - g\|_s + B\|L_0(f) - g\|_w \\
&\leq \left\|L_0^{m-1}(g)\right\|_s + A\lambda_1^{m-1}\|L_0(f) - g\|_s + B\varepsilon.
\end{aligned}$$

Como $g \in L_0(S_s)$, então existe $\tilde{g} \in S_s$ tal que $L_0(\tilde{g}) = g$. Logo,

$$\begin{aligned}
\|L_0^m(f)\|_s &\leq \left\|L_0^{m-1}(g)\right\|_s + A\lambda_1^{m-1}\|L_0(f) - g\|_s + B\varepsilon \\
&= \left\|L_0^{m-1}(g)\right\|_s + A\lambda_1^{m-1}\|L_0(f) - L_0(\tilde{g})\|_s + B\varepsilon \\
&= \left\|L_0^{m-1}(g)\right\|_s + A\lambda_1^{m-1}\|L_0(f - \tilde{g})\|_s + B\varepsilon \\
&\leq \left\|L_0^{m-1}(g)\right\|_s + A\lambda_1^{m-1}\|L_0\|_{B_s\to B_s} \cdot \|(f - \tilde{g})\|_s + B\varepsilon \\
&\leq \left\|L_0^{m-1}(g)\right\|_s + A\lambda_1^{m-1}\|L_0\|_{B_s\to B_s} \cdot (\|f\|_s + \|\tilde{g}\|_s) + B\varepsilon \\
&\leq \left\|L_0^{m-1}(g)\right\|_s + A\lambda_1^{m-1}\|L_0\|_{B_s\to B_s} \cdot (1+1) + B\varepsilon \text{ (pois } f, \tilde{g} \in S_s) \\
&= \left\|L_0^{m-1}(g)\right\|_s + 2A\lambda_1^{m-1}\|L_0\|_{B_s\to B_s} + B\varepsilon.
\end{aligned}$$

Vamos analisar o primeiro termo do lado direito da desigualdade acima. Escrevemos, então, $m-1=n+k$ e observamos que

$$\begin{aligned}
\left\|L_0^{m-1}(g)\right\|_s &= \left\|L_0^n\left(L_0^k(g)\right)\right\|_s \\
&\leq A\lambda_1^n\left\|L_0^k(g)\right\|_s + B\left\|L_0^k(g)\right\|_w \text{ (Lasota-Yorke)} \\
&\leq A\lambda_1^n\left(A\lambda_1^k\|g\|_s + B\|g\|_w\right) + B\left\|L_0^k(g)\right\|_w \text{ (Lasota-Yorke)} \\
&= A^2\lambda_1^{n+k}\|g\|_s + AB\lambda_1^n\|g\|_w + B\left\|L_0^k(g)\right\|_w,
\end{aligned}$$

de onde obtemos

$$\|L_0^m(f)\|_s \leq \left[A^2\lambda_1^{n+k}\|g\|_s + AB\lambda_1^n\|g\|_w + B\left\|L_0^k(g)\right\|_w\right] + 2A\lambda_1^{m-1}\|L_0\|_{B_s\to B_s} + B\varepsilon.$$

Ou seja,

$$\|L_0^m(f)\|_s \leq A^2\lambda_1^{n+k}\|g\|_s + AB\lambda_1^n\|g\|_w + B\left\|L_0^k(g)\right\|_w + 2A\lambda_1^{n+k}\|L_0\|_{B_s\to B_s} + B\varepsilon.$$

Fixamos ε pequeno o suficiente para termos $B\varepsilon < \frac{1}{4}$. Pela hipótese de mistura, podemos tomar k grande o suficiente para termos $\sup_{g\in G_\varepsilon}\left\|L_0^k(g)\right\|_w \leq \frac{1}{4B}$. De fato, como vimos, dado $g\in G_\varepsilon \subseteq L_0(S_s)$ existe $\tilde{g}\in S_s\subseteq V_s$ tal que $L_0(\tilde{g})=g$. Assim,

$$\left\|L_0^k(g)\right\|_w = \left\|L_0^{k+1}(\tilde{g})\right\|_w \to 0,$$

para cada $g\in G_\varepsilon$. Desta forma, para k grande obtemos $\left\|L_0^k(g)\right\|_w \leq \frac{1}{4B}$ para cada $g\in G_\varepsilon$. Logo, tomando o sup obtemos $\sup_{g\in G_\varepsilon}\left\|L_0^k(g)\right\|_w \leq \frac{1}{4B}$ como afirmamos.

Podemos, então, escolher n grande o suficiente, já que $0<\lambda_1<1$, para obtermos

$$A^2\lambda_1^{n+k}\|g\|_s + AB\lambda_1^n\sup_{g\in G_\varepsilon}\left\|L_0^k(g)\right\|_w + 2A\lambda_1^{n+k}\|L_0\|_{B_s\to B_s} \leq \frac{1}{4},$$

daí segue que $\|L_0^m(f)\|_s \leq \frac{3}{4}$. Seja $k_0\in\mathbb{N}$ o menor $m\in\mathbb{N}$ tal que $\|L_0^m(f)\|_s \leq \frac{3}{4}$, para cada $f\in S_s$. Assim, dado $f\in V_s$ temos que

$$\left\|L_0^{k_0}\left(\frac{f}{\|f\|_s}\right)\right\|_s \leq \frac{3}{4}.$$

Ou seja,

$$\left\|L_0^{k_0}(f)\right\|_s \leq \frac{3}{4}\cdot\|f\|_s.$$

Sejam $C' := \max\left\{\|L_0^m\|_{V_s\to V_s} \in \mathbb{R} \mid 0 \le m < k_0\right\}$ e $\rho' := \dfrac{3}{4}$. Assim, dado $m \in \mathbb{N}$, $m > k_0$ pelo algoritmo da divisão de Euclides existem $q, r \in \mathbb{N}$ tais que $0 \le r < k_0$ e $m = q \cdot k_0 + r$. Decorre daí que

$$\|L_0^m(f)\|_s = \left\|L_0^{q\cdot k_0+r}(f)\right\|_s \le \left\|L_0^{q\cdot k_0}(L_0^r(f))\right\|_s \le \left(\frac{3}{4}\right)^q \|L_0^r(f)\|_s \le \left(\frac{3}{4}\right)^q \cdot \|L_0^r\|_{V_s\to V_s} \cdot \|f\|_s$$

Portanto,

$$\|L_0^m(f)\|_s \le C'\rho'^q \|f\|_s = C'\left(\rho'\right)^{\frac{m-r}{k_0}} \|f\|_s = C\rho^m \|f\|_s,$$

onde $C := C'\left(\rho'\right)^{\frac{-r}{k_0}}$ e $\rho := \left(\rho'\right)^{\frac{1}{k_0}}$.

Q.E.D.

Com este resultado, o resolvente $(I_d - L_0)^{-1} : V_s \to V_s$ está bem definido e é contínuo.

Corolário 1. Sob as hipóteses do teorema anterior, o resolvente $(I_d - L_0)^{-1} : V_s \to V_s$ está bem definido e é contínuo.

Demonstração. Seja $f \in V_s$. Então, por definição,

$$(I_d - L_0)^{-1}(f) = \sum_{i=0}^{+\infty} L_0^i(f).$$

Pela hipótese de que L_0 é um operador de Markov, $L_0^i(f) \in V_s$ para $i \ge 1$, pois $L_0(f)(X) = f(X) = 0$, já que $f \in V_s$. Como $\|L_0^m(f)\|_s \le C\rho^m \|f\|_s$, pelo teorema anterior, e $\sum_{n=1}^{+\infty} C\rho^n < +\infty$ (pois $0 < \rho < 1$, então a série sendo geométrica converge para $C \cdot \dfrac{1}{1-\rho}$), a soma $\sum_{i=1}^{+\infty} L_0^i(f)$ converge absolutamente, pelo critério de comparação de séries, em V_s, com respeito à norma $\|\cdot\|_s$ (e, portanto, converge já que o espaço é de Banach), e

$$\left\|(I_d - L_0)^{-1}\right\|_{V_s\to V_s} \le \sum_{n=1}^{+\infty} C\rho^n.$$

Q.E.D.

Observação 2. No caso em que $B_s = B_w = B$, o teorema 3 continua valendo. Neste caso, obtemos o resultado de que um operador compacto que é "power-bounded"(isto significa que a sequência $(\|T^n\|)_{n\in\mathbb{N}} := (\|T^n\|_s)_{n\in\mathbb{N}} = (\|T^n\|_w)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada) em B e que satisfaz a hipótese de convergência para o equilíbrio tem um único, a menos de normalização, ponto fixo, e a hipótese de convergência para o equilíbrio é satisfeita com velocidade exponencial de convergência.

Um caso importante em que as hipóteses do teorema 3 são satisfeitas é o caso de sistemas com "ruído aditivo", no qual o operador de transferência geralmente satisfaz uma hipótese de regularização.

Definição 6. Sejam $B_s \subset B_w$ dois espaços de Banach com $\|\cdot\|_w \leq \|\cdot\|_s$. Dizemos que L_0 é regularizante de B_w para B_s, se $L_0 : B_w \to B_s$ é contínuo, i.e., se existe $B > 0$ tal que a desigualdade

$$\|L_0(f)\|_s \leq B\|f\|_w$$

é satisfeita.

Se, mais ainda, uma hipótese de limitação fraca é verificada em B_w, isto é, se existe algum $C > 0$ tal que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}, f\in B_w} \|L_0^n(f)\|_w = C\|f\|_w,$$

então temos a desigualdade de Lasota-Yorke

$$\|L_0^n(g)\|_s \leq CB\|g\|_w$$

valendo para cada $n \in \mathbb{N}$. Se a hipótese de compacidade no teorema 3 é satisfeita, isto implica (pelo teorema de Hennion) que no espaço forte (B_s) o operador L_0 apenas tem espectro discreto (que é o complemento com respeito ao espectro de L_0 do espectro essencial de L_0, confira [4]).

Corolário 2. Se L_0 é regularizante de B_w para B_s, e se as hipóteses (2) e (3) no teorema 3 são satisfeitas, então o resolvente $(I_d - L_0)^{-1}$ está bem definido e é contínuo também em V_w. Mais ainda, seja $B_{ww} \supseteq B_w$ como no início da seção 3. Suponhamos L_0 regularizante de B_{ww} para B_w, i.e, $L_0 : B_{ww} \to B_w$ é contínuo, então $(I_d - L_0)^{-1}$ está bem definido e é contínuo em V_{ww} também.

Demonstração. Seja $f \in V_w$. Como $(I_d - L_0)^{-1}(f) = f + \sum_{i=1}^{+\infty} L_0^i(f)$ obtemos

$$\left\|(I_d - L_0)^{-1}(f)\right\|_w \leq \|f\|_w + \|L_0\|_{B_w\to B_s} \cdot \sum_{i=0}^{+\infty} \left\|L_0^i\right\|_{B_s\to B_s} \cdot \|f\|_w < +\infty,$$

pelo corolário anterior.

Isto mostra que $(I_d - L_0)^{-1} = I_d + \sum_{i=1}^{+\infty} L_0$ é um operador contínuo de V_w em V_w. No caso $L_0 : V_{ww} \to V_{ww}$ contínuo, podemos repetir a mesma prova com V_{ww} e V_w no lugar de V_w e V_s, obtendo assim um operador contínuo de V_{ww} em V_{ww}.

Q.E.D.

4 APLICAÇÕES EXPANSORAS

4.1 A Construção do Círculo

Aqui consideraremos $\mathbb{S}^1 = \left\{ e^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$ a circunferência unitária (também chamaremos de círculo unitário). Dito isto, desde que $e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$ iremos identificar um ponto do círculo somente com seu argumento θ, o qual poderá (e é mais preciso) ser visto como uma classe de equivalência $[\theta] = \{\theta + 2k\pi \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Colocamos em $\mathbb{R}$ a seguinte relação de equivalência

$$x \sim y \Longleftrightarrow x \equiv y \pmod{2\pi} \Longleftrightarrow \frac{x-y}{2\pi} \in \mathbb{Z}.$$

Veja que em $\dfrac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}} = \{[\theta] \in \mathscr{P}(\mathbb{R}) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ podemos colocar uma soma natural,

$$[\theta] + [\alpha] = [\theta + \alpha],$$

a qual de fato está bem definida pois qualquer representante de $[\theta]$ é da forma $\theta + 2k\pi$ e qualquer representante de $[\alpha]$ é da forma $\alpha + 2m\pi$, onde $k, m \in \mathbb{Z}$. Daí, qualquer representante de $[\theta] + [\alpha]$ é da forma $\theta + \alpha + 2(k+m)\pi$ que é um representante de $[\theta + \alpha]$.

Proposição 1. $\left(\dfrac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}, +\right)$ é um grupo abeliano.

Demonstração. Vamos mostrar que $\left(\dfrac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}, +\right)$ é um grupo abeliano.

- 1. Comutatividade: $[\theta] + [\alpha] = [\theta + \alpha] = [\alpha + \theta] = [\alpha] + [\theta]$.

- 2. Associatividade: $[\theta] + ([\alpha] + [\beta]) = [\theta + (\alpha + \beta)] = [(\theta + \alpha) + \beta] = ([\theta] + [\alpha]) + [\beta]$.

- 3. Elemento Neutro: Vemos que $[0] + [\theta] = [0 + \theta] = [\theta]$.

- 4. Inverso: Dado $[\theta] \in \dfrac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$ consideramos $[-\theta] \in \dfrac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$ e vemos que $[\theta] + [-\theta] = [\theta + (-\theta)] = [0]$.

Q.E.D.

Em $\mathbb{S}^1$ definimos o produto $e^{i\theta} \cdot e^{i\alpha} = e^{i(\theta+\alpha)}$.

Proposição 2. $\left(\mathbb{S}^1, \cdot\right)$ é um grupo abeliano.

Demonstração. Vamos mostrar que $\left(\mathbb{S}^1, \cdot\right)$ é um grupo abeliano.

- 1. Comutatividade: $e^{i\theta} \cdot e^{i\alpha} = e^{i(\theta+\alpha)} = e^{i(\alpha+\theta)} = e^{i\alpha} \cdot e^{i\theta}$.

- 2. Associatividade: $e^{i\theta} \cdot \left(e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta}\right) = e^{i(\theta+(\alpha+\beta))} = e^{i((\theta+\alpha)+\beta)} = \left(e^{i\theta} \cdot e^{i\alpha}\right) \cdot e^{i\beta}$.

- 3. Elemento Neutro: Vemos que $e^{i\cdot 0} \cdot e^{i\theta} = e^{i(0+\theta)} = e^{i\theta}$.

- 4. Inverso: Dado $e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1$ consideramos $e^{-i\theta}$ e temos $e^{i\theta} \cdot e^{-i\theta} = e^{i(\theta+(-\theta))} = e^{i\cdot 0} = 1$.

Q.E.D.

Proposição 3. Os grupos $\left(\dfrac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}, +\right)$ e $\left(\mathbb{S}^1, \cdot\right)$ são isomorfos.

Demonstração. Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ definida por $F(\theta) = e^{i\theta}$. Vamos mostrar que F é um homomorfismo do grupo $(\mathbb{R}, +)$ para o grupo $\left(\mathbb{S}^1, \cdot\right)$. De fato, vemos que

$$F(\theta+\alpha) = e^{i(\theta+\alpha)} = e^{i\theta} \cdot e^{i\alpha} = F(\theta) \cdot F(\alpha).$$

Vemos que o núcleo de F é

$$\begin{aligned}
\mathscr{N}(F) &= \{\theta \in \mathbb{R} \mid F(\theta) = 1\} \\
&= \left\{\theta \in \mathbb{R} \mid e^{i\theta} = 1 = e^{i\cdot 0}\right\} \\
&= \{\theta \in \mathbb{R} \mid \exists k \in \mathbb{Z} : \theta = 2k\pi\} \\
&= \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \\
&= 2\pi\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Além disso, dado $e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1$ temos que $e^{i\theta} = F(\theta)$. Portanto, F é sobrejetivo.

Por conseguinte, pelo primeiro teorema do homomorfismo temos que

$$\frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}} \cong \mathbb{S}^1.$$

Q.E.D.

Assim, $\dfrac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}} = \{[\theta] \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ pode ser visto como $\mathbb{S}^1$ sob o ponto de vista algébrico, como grupos.

Coloque em $\dfrac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$ a topologia quociente, isto é, se

$$\pi : \underset{\theta}{\mathbb{R}} \underset{\longmapsto}{\longrightarrow} \underset{\pi(\theta)=[\theta]}{\dfrac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}}$$

é a projeção canônica, então declaramos que $U \subseteq \dfrac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$ é aberto se, e somente se, $\pi^{-1}(U)$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$. Além disso, declaramos $V \subseteq \mathbb{S}^1$ aberto, se existe um aberto W do plano $\mathbb{R}^2$ tal que $V = W \cap \mathbb{S}^1$. Temos então duas coleções $\tau_1 = \left\{ U \mid U \text{ é aberto em } \dfrac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}} \right\}$ e $\tau_2 = \left\{ V \mid V \text{ é aberto em } S^1 \right\}$. Pode-se demonstrar que $\left(\dfrac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}, \tau_1 \right)$ e $\left(\mathbb{S}^1, \tau_2 \right)$ são espaços topológicos e são homeomorfos.

Desta maneira, além do ponto de vista algébrico, os conjuntos $\dfrac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$ e $\mathbb{S}^1$ têm a mesma estrutura topológica. Mais ainda, usando a topologia quociente de $\dfrac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$, pode-se mostrar que este conjunto é de fato uma variedade de classe C^∞, bem como pode-se mostrar que $\mathbb{S}^1$ é uma variedade C^∞ e que $\dfrac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$ é difeomorfo a $\mathbb{S}^1$.

Desta maneira, fica claro, sob os pontos de vista, algébrico, topológico e diferencial que podemos identificar $\dfrac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}} \sim \mathbb{S}^1$ e o faremos sem mais detalhes. Mudando a parametrização do ângulo em $e^{i\theta}$ e passando para $e^{i \cdot 2\pi\theta}$ e seguindo exatamente os mesmos passos, podemos escrever $\dfrac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}} = \{[x] \mid x \in \mathbb{R}\}$ com $[x] = \{y + k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ e teremos $\dfrac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}} \sim \mathbb{S}^1$. Dado isto, usaremos somente θ em vez de $[\theta]$ ou x em vez de $[x]$.

Em vista de todos esses morfismos entre o círculo unitário e a reta real, somos capazes de atribuir ao círculo estruturas algébrica, métrica, mensurável e de medida, topológica e diferencial. Não nos aprofundaremos nos detalhes técnicos dessas estruturas e as utilizaremos conforme a necessidade.

4.2 Respostas Linear e Quadrática para Aplicações Expansoras no Círculo

Vamos agora aplicar os resultados de respostas linear e quadrática para aplicações expansoras no círculo unitário.

Para a resposta linear consideraremos aplicações $T : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ satisfazendo:

(1) $T \in C^4\left(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1\right)$;

(2) Existe $\beta > 1$ tal que $\left|T'(x)\right| \geq \beta, \forall x \in \mathbb{S}^1$.

Para a resposta quadrática vamos considerar $T \in C^5\left(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1\right)$. Consideraremos uma família de perturbações

$$T_0 := T \text{ e } T_\delta := D_\delta \circ T,$$

onde $D_\delta := I_d + o_{\delta\to 0}(1)$ é um difeomorfismo em $\mathbb{S}^1$ e $\lim\limits_{\delta\to 0} \dfrac{o_{\delta\to 0}(1)}{1} = 0$. Usualmente, teremos $o_{\delta\to 0}(1) := \delta S$ com $S : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$.

Mostraremos que os operadores de transferência associados a aplicações expansoras satisfazem a desigualdade de Lasota-Yorke quando agem em espaços de Sobolev apropriados.

Definição 7. Definimos o espaço de Banach $W^{1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)$ de funções densidade absolutamente contínuas. Isto é, funções $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ para as quais existe alguma função $f' \in L^1\left(\mathbb{S}^1\right)$ que satisfaz

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\, dt.$$

Este espaço é munido com a norma

$$\|f\|_{W^{1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} := \|f\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)} + \left\|f'\right\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)}.$$

Definimos para $k \geq 2$ o espaço de Banach $W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right) = \left\{f \in W^{1,1}\left(\mathbb{S}^1\right) \mid f' \in W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)\right\}$ munido com a norma

$$\|f\|_{W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} := \|f\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)} + \left\|f'\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)}$$

que equivale a

$$\|f\|_{W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} := \|f\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)} + \left\|f'\right\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)} + \left\|f''\right\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)} + \ldots + \left\|f^{(k)}\right\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)}.$$

Usaremos também a notação $W^{0,1}\left(\mathbb{S}^1\right) := L^1\left(\mathbb{S}^1\right)$. Remetemos o leitor interessado em espaços de Sobolev ao capítulo 5 de [7], onde um tratamento mais formal e mais profundo é realizado, incluindo demonstrações de alguns fatos que aqui utilizaremos e, embora façamos as devidas referências, não os demonstraremos.

Vamos precisar do seguinte lema técnico bastante útil antes de demonstrarmos a desigualdade de Lasota-Yorke para o caso de aplicações expansoras.

Lema 1. Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $g \in C^k\left(\mathbb{S}^1\right)$. O operador $M_g : W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right) \to W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)$ definido por $M_g(f) := g \cdot f$ é limitado em $W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)$.

Demonstração. Faremos indução em $k \in \mathbb{N}$. Para $k = 1$: sejam $g \in C^1\left(\mathbb{S}^1\right)$ e $f \in W^{1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)$. Vemos que:

$$\begin{aligned}
\left\|M_g(f)\right\|_{W^{1,1}(\mathbb{S}^1)} &= \left\|(g\cdot f)'\right\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} + \|g\cdot f\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} \\
&\leq \left\|(g\cdot f)'\right\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} + \|g\|_{L^\infty(\mathbb{S}^1)}\cdot\|f\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} \text{ (Desigualdade de Hölder)} \\
&= \left\|g'\cdot f + g\cdot f'\right\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} + \|g\|_{L^\infty(\mathbb{S}^1)}\cdot\|f\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} \\
&\leq \left\|g'\cdot f\right\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} + \left\|g\cdot f'\right\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} + \|g\|_{L^\infty(\mathbb{S}^1)}\cdot\|f\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} \\
&\leq \left\|g'\right\|_{L^\infty(\mathbb{S}^1)}\cdot\|f\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} + \|g\|_{L^\infty(\mathbb{S}^1)}\cdot\left\|f'\right\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} + \|g\|_{L^\infty(\mathbb{S}^1)}\cdot\|f\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} \\
&= \left\|g'\right\|_{L^\infty(\mathbb{S}^1)}\cdot\|f\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} + \|g\|_{L^\infty(\mathbb{S}^1)}\cdot\left(\left\|f'\right\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} + \cdot\|f\|_{L^1(\mathbb{S}^1)}\right) \\
&= \left\|g'\right\|_{L^\infty(\mathbb{S}^1)}\cdot\|f\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} + \|g\|_{L^\infty(\mathbb{S}^1)}\cdot\left\|f'\right\|_{W^{1,1}(\mathbb{S}^1)}.
\end{aligned}$$

Notamos que $\|\cdot\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} \leq \|\cdot\|_{W^{1,1}(\mathbb{S}^1)}$ e obtemos

$$\begin{aligned}
\left\|M_g(f)\right\|_{W^{1,1}(\mathbb{S}^1)} &\leq \left\|g'\right\|_{L^\infty(\mathbb{S}^1)}\cdot\|f\|_{W^{1,1}(\mathbb{S}^1)} + \|g\|_{L^\infty(\mathbb{S}^1)}\cdot\|f\|_{W^{1,1}(\mathbb{S}^1)} \\
&= \left(\left\|g'\right\|_{L^\infty(\mathbb{S}^1)} + \|g\|_{L^\infty(\mathbb{S}^1)}\right)\cdot\|f\|_{W^{1,1}(\mathbb{S}^1)} \\
&= \|g\|_{C^1(\mathbb{S}^1)}\cdot\|f\|_{W^{1,1}(\mathbb{S}^1)}.
\end{aligned}$$

Isto mostra que $M_g : W^{1,1}\left(\mathbb{S}^1\right) \to W^{1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)$ é um operador linear limitado com

$$\left\|M_g\right\|_{W^{1,1}(\mathbb{S}^1)\to W^{1,1}(\mathbb{S}^1)} \leq \|g\|_{C^1(\mathbb{S}^1)}.$$

Seja agora $k \in \mathbb{N}$ tal que se $g \in C^k\left(\mathbb{S}^1\right)$, então $M_g : W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right) \to W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)$ é um operador linear limitado. Sejam $g \in C^{k+1}\left(\mathbb{S}^1\right)$ e $f \in W^{k+1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)$. Vemos que

$$\begin{aligned}
\left\|M_g(f)\right\|_{W^{k+1,1}(\mathbb{S}^1)} &= \left\|(g\cdot f)'\right\|_{W^{k,1}(\mathbb{S}^1)} + \|g\cdot f\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} \\
&= \left\|g'\cdot f + g\cdot f'\right\|_{W^{k,1}(\mathbb{S}^1)} + \|g\cdot f\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} \\
&\leq \left\|g'\cdot f\right\|_{W^{k,1}(\mathbb{S}^1)} + \left\|g\cdot f'\right\|_{W^{k,1}(\mathbb{S}^1)} + \|g\cdot f\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} \\
&\leq \left\|g'\cdot f\right\|_{W^{k,1}(\mathbb{S}^1)} + \left\|g\cdot f'\right\|_{W^{k,1}(\mathbb{S}^1)} + \|g\|_{L^\infty(\mathbb{S}^1)}\cdot\|f\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} \text{ (Desig. de Hölder)} \\
&= \left\|M_{g'}(f)\right\|_{W^{k,1}(\mathbb{S}^1)} + \left\|M_g\left(f'\right)\right\|_{W^{k,1}(\mathbb{S}^1)} + \|g\|_{L^\infty(\mathbb{S}^1)}\cdot\|f\|_{L^1(\mathbb{S}^1)}.
\end{aligned}$$

Como $g \in C^{k+1}\left(\mathbb{S}^1\right)$ e $f \in W^{k+1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)$, então $g' \in C^k\left(\mathbb{S}^1\right)$ e $f' \in W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)$, portanto a hipótese de indução nos diz que

$$\left\|M_{g'}(f)\right\|_{W^{k,1}(\mathbb{S}^1)} \leq \left\|M_{g'}\right\|_{W^{k,1}(\mathbb{S}^1)\to W^{k,1}(\mathbb{S}^1)}\cdot\|f\|_{W^{k,1}(\mathbb{S}^1)}$$

e

$$\left\|M_g\left(f'\right)\right\|_{W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} \leq \left\|M_g\right\|_{W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)\to W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} \cdot \left\|f'\right\|_{W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)}.$$

Seja $C := max\left\{\left\|M_{g'}\right\|_{W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)\to W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)}, \left\|M_g\right\|_{W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)\to W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)}\right\}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\left\|M_g(f)\right\|_{W^{k+1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} &\leq C \cdot \|f\|_{W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} + C \cdot \left\|f'\right\|_{W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} + \|g\|_{L^\infty\left(\mathbb{S}^1\right)} \cdot \|f\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)} \\
&\leq C \cdot \|f\|_{W^{k+1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} + C \cdot \|f\|_{W^{k+1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} + \|g\|_{L^\infty\left(\mathbb{S}^1\right)} \cdot \|f\|_{W^{k+1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} \\
&= \left(2C + \|g\|_{L^\infty\left(\mathbb{S}^1\right)}\right) \cdot \|f\|_{W^{k+1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)}.
\end{aligned}$$

Isto mostra que $M_g : W^{k+1,1}\left(\mathbb{S}^1\right) \to W^{k+1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)$ é um operador linear limitado. O nosso resultado segue então do Princípio de Indução Finita.

Q.E.D.

Agora já somos capazes de verificar a desigualdade de Lasota-Yorke no seguinte resultado.

Lema 2 (Lasota-Yorke). Para uma aplicação expansora T de classe C^{k+1} em $\mathbb{S}^1$ o seu operador de transferência L associado satisfaz uma desigualdade de Lasota-Yorke em $W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)$. Ou seja, existem $0 < \alpha < 1$ e $A_k, B_k \geq 0$ tais que os operadores L^n são uniformemente limitados por A_k, sabidamente

$$\left\|L^n(f)\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} \leq A_k \cdot \|f\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)}$$

e, além disso, para cada $n \in \mathbb{N}$ vale a seguinte desigualdade de Lasota-Yorke

$$\left\|L^n(f)\right\|_{W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} \leq \alpha^{kn} \|f\|_{W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} + B_k \|f\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)}.$$

Demonstração. Vamos proceder por indução em $k \geq 1$. Seja $T : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1, T \in C^2\left(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1\right)$ e $\left|T'(x)\right| \geq \beta > 1, \forall x \in \mathbb{S}^1$. Para $k = 1$, temos que $A_1 = 1$, ou seja, L é uma contração fraca em $L^1\left(\mathbb{S}^1\right)$, esse fato é bem conhecido e uma demonstração para tal pode ser vista, por exemplo, na proposição 7 de [6], páginas 7 e 8. Vamos agora nos atentar para a desigualdade em si. No caso de aplicações expansoras, temos uma fórmula explícita bem conhecida para o operador de transferência (confira, por exemplo, [5] páginas 85 e 86):

$$[Lf](x) = \sum_{y \in T^{-1}(x)} \frac{f(y)}{\left|T'(y)\right|} = \sum_{y \in T^{-1}(x)} \frac{f(y)}{T'(y)}.$$

Ao derivarmos esta expressão (lembrando que se $y \in T^{-1}(x)$, então y pertence a algum ramo da pré-imagem de x) e, portanto, aplica-se o teorema da função inversa e obtemos

$$\begin{aligned}
[Lf]'(x) &= \sum_{y \in T^{-1}(x)} \frac{f'(y) \cdot y' \cdot T'(y) - f(y) \cdot T''(y) \cdot y'}{(T'(y))^2} \\
&= \sum_{y \in T^{-1}(x)} \frac{f'(y) \cdot \frac{1}{T'(y)} \cdot T'(y) - f(y) \cdot T''(y) \cdot \frac{1}{T'(y)}}{(T'(y))^2} \\
&= \sum_{y \in T^{-1}(x)} \left[\frac{f'(y)}{(T'(y))^2} - \frac{f(y) \cdot T''(y)}{(T'(y))^3} \right] \\
&= \sum_{y \in T^{-1}(x)} \frac{f'(y)}{(T'(y))^2} - \sum_{y \in T^{-1}(x)} \frac{f(y) \cdot T''(y)}{(T'(y))^3} \\
&= \sum_{y \in T^{-1}(x)} \frac{\frac{f'(y)}{(T'(y))}}{T'(y)} - \sum_{y \in T^{-1}(x)} \frac{\frac{f(y) \cdot T''(y)}{(T'(y))^2}}{T'(y)} \\
&= \left[L\left(\frac{f'}{T'} \right) \right](x) - \left[L\left(\frac{f \cdot T''}{(T')^2} \right) \right](x).
\end{aligned}$$

Notamos que esta expressão é válida para todo $x \in \mathbb{S}^1$ e, portanto, obtemos a seguinte expressão bastante útil

$$(Lf)' = L\left(\frac{f'}{T'} \right) - L\left(\frac{f \cdot T''}{(T')^2} \right)$$

e aplicando a desigualdade triangular obtemos

$$\begin{aligned}
\left\| (Lf)' \right\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} &\leq \left\| L\left(\frac{1}{T'} \cdot f' \right) \right\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} + \left\| L\left(\frac{T''}{(T')^2} \cdot f \right) \right\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} \\
&\leq \left\| \frac{1}{T'} \cdot f' \right\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} + \left\| \frac{T''}{(T')^2} \cdot f \right\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} \quad (L \text{ é contração fraca em } L^1(\mathbb{S}^1)) \\
&\leq \left\| \frac{1}{T'} \right\|_{L^\infty(\mathbb{S}^1)} \cdot \left\| f' \right\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} + \left\| \frac{T''}{(T')^2} \right\|_{L^\infty(\mathbb{S}^1)} \cdot \left\| f \right\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} \quad \text{(desigualdade de Hölder)}
\end{aligned}$$

Seja $\alpha = \left\| \frac{1}{T'} \right\|_{L^\infty(\mathbb{S}^1)}$. Como T é expansora, então $\left| T'(x) \right| \geq \beta > 1, \forall x \in \mathbb{S}^1$. Logo, $\left\| \frac{1}{T'} \right\|_{L^\infty(\mathbb{S}^1)} := \sup_{x \in \mathbb{S}^1} \frac{1}{|T'(x)|} \leq \frac{1}{\beta} < 1$. Ou seja, $0 < \alpha < 1$. Portanto, utilizando esta expressão acima na norma $W^{1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)$ ficamos com

$$
\begin{aligned}
\|Lf\|_{W^{1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} &:= \left\|(Lf)'\right\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)} + \|Lf\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)} \\
&\leq \left[\alpha \cdot \|f'\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)} + \left\|\frac{T''}{(T')^2}\right\|_{L^\infty\left(\mathbb{S}^1\right)} \cdot \|f\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)}\right] + \|Lf\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)} \\
&\leq \alpha \cdot \|f'\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)} + \left\|\frac{T''}{(T')^2}\right\|_{L^\infty\left(\mathbb{S}^1\right)} \cdot \|f\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)} + \|f\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)} \text{ (L é contração fraca em $L^1\left(\mathbb{S}^1\right)$)} \\
&= \alpha \cdot \|f'\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)} + \left(\left\|\frac{T''}{(T')^2}\right\|_{L^\infty\left(\mathbb{S}^1\right)} + 1\right) \cdot \|f\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)} \\
&\leq \alpha \cdot \|f'\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)} + \left(\left\|\frac{T''}{(T')^2}\right\|_{L^\infty\left(\mathbb{S}^1\right)} + 1\right) \cdot \|f\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)} + \alpha \cdot \|f\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)} \\
&= \alpha \cdot \left[\|f'\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)} + \|f\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)}\right] + \left(\left\|\frac{T''}{(T')^2}\right\|_{L^\infty\left(\mathbb{S}^1\right)} + 1\right) \cdot \|f\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)} \\
&= \alpha \cdot \|f\|_{W^{1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} + \left(\left\|\frac{T''}{(T')^2}\right\|_{L^\infty\left(\mathbb{S}^1\right)} + 1\right) \cdot \|f\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)}.
\end{aligned}
$$

Seja $\gamma := \left(\left\|\frac{T''}{(T')^2}\right\|_{L^\infty\left(\mathbb{S}^1\right)} + 1\right)$. Iterando esta desigualdade obtemos:

$$
\begin{aligned}
\left\|L^2 f\right\|_{W^{1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} &= \|L(Lf)\|_{W^{1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} \\
&\leq \alpha \cdot \|Lf\|_{W^{1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} + \gamma \cdot \|Lf\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)} \text{ (A desigualdade para Lf)} \\
&\leq \alpha \cdot \left[\alpha \cdot \|f\|_{W^{1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} + \gamma \cdot \|f\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)}\right] + \gamma \cdot \|Lf\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)} \text{ (A desigualdade para f)} \\
&\leq \alpha \cdot \left[\alpha \cdot \|f\|_{W^{1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} + \gamma \cdot \|f\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)}\right] + \gamma \cdot \|f\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)} \text{ (L é contração fraca em $L^1\left(\mathbb{S}^1\right)$)} \\
&= \alpha^2 \cdot \|f\|_{W^{1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} + \alpha\gamma \cdot \|f\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)} + \gamma \cdot \|f\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)} \\
&= \alpha^2 \cdot \|f\|_{W^{1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} + (\alpha + 1)\,\gamma \cdot \|f\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)}.
\end{aligned}
$$

Observaremos mais uma iteração da desigualdade para ganharmos intuição

$$
\begin{aligned}
\left\|L^3 f\right\|_{W^{1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} &= \left\|L^2(Lf)\right\|_{W^{1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} \\
&\leq \alpha^2 \cdot \|Lf\|_{W^{1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} + (\alpha + 1)\,\gamma \cdot \|Lf\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)} \text{ (A desigualdade de L^2 para Lf)} \\
&\leq \alpha^2 \cdot \left[\alpha \cdot \|f\|_{W^{1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} + \gamma \cdot \|f\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)}\right] + (\alpha + 1)\,\gamma \cdot \|Lf\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)} \text{ (A desigualdade para f)} \\
&\leq \alpha^2 \cdot \left[\alpha \cdot \|f\|_{W^{1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} + \gamma \cdot \|f\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)}\right] + (\alpha + 1)\,\gamma \cdot \|f\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)} \text{ (L contração fraca em L^1)} \\
&= \alpha^3 \cdot \|f\|_{W^{1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} + \left(\alpha^2 + \alpha + 1\right)\gamma \cdot \|f\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)}.
\end{aligned}
$$

Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|L^n f\|_{W^{1,1}(\mathbb{S}^1)} \leq \alpha^n \cdot \|f\|_{W^{1,1}(\mathbb{S}^1)} + \left(\alpha^{n-1} + \cdots + \alpha^2 + \alpha + 1\right) \gamma \cdot \|f\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} .$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\left\|L^{n+1} f\right\|_{W^{1,1}(\mathbb{S}^1)} &= \|L^n (Lf)\|_{W^{1,1}(\mathbb{S}^1)} \\
&\leq \alpha^n \cdot \|Lf\|_{W^{1,1}(\mathbb{S}^1)} + \left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i\right) \gamma \cdot \|Lf\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} \\
&\leq \alpha^n \cdot \left[\alpha \cdot \|f\|_{W^{1,1}(\mathbb{S}^1)} + \gamma \cdot \|f\|_{L^1(\mathbb{S}^1)}\right] + \left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i\right) \gamma \cdot \|Lf\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} \\
&= \alpha^{n+1} \cdot \|f\|_{W^{1,1}(\mathbb{S}^1)} + \left(\sum_{i=0}^{n} \alpha^i\right) \gamma \cdot \|Lf\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} .
\end{aligned}$$

Isto prova, pelo princípio de indução finita, que para cada $n \in \mathbb{N}$ vale que

$$\|L^n f\|_{W^{1,1}(\mathbb{S}^1)} \leq \alpha^n \cdot \|f\|_{W^{1,1}(\mathbb{S}^1)} + \left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i\right) \cdot \gamma \cdot \|f\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} .$$

Daí, vem que

$$\begin{aligned}
\|L^n f\|_{W^{1,1}(\mathbb{S}^1)} &\leq \alpha^n \cdot \|f\|_{W^{1,1}(\mathbb{S}^1)} + \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \alpha^i\right) \cdot \gamma \cdot \|f\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} \\
&= \alpha^n \cdot \|f\|_{W^{1,1}(\mathbb{S}^1)} + \left(\frac{1}{1-\alpha}\right) \cdot \gamma \cdot \|f\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} .
\end{aligned}$$

Seja $B_1 := \dfrac{\gamma}{1-\alpha}$. Então, provamos a desigualdade de Lasota-Yorke

$$\|L^n f\|_{W^{1,1}(\mathbb{S}^1)} \leq \alpha^n \cdot \|f\|_{W^{1,1}(\mathbb{S}^1)} + B_1 \cdot \|f\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} .$$

Assumimos que a desigualdade de Lasota-Yorke está estabelecida em $W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)$ para o operador de transferência de uma aplicação expansora de classe C^k, e consideremos uma aplicação expansora $T : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ de classe C^{k+1} junto com o seu operador de transferência $L : L^1\left(\mathbb{S}^1\right) \to L^1\left(\mathbb{S}^1\right)$ associado. Seja $f \in W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)$. Queremos calcular

$$\|Lf\|_{W^{k,1}(\mathbb{S}^1)} = \left\|(Lf)'\right\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)} + \|Lf\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} .$$

Vimos que

$$(Lf)' = L\left(\frac{f'}{T'}\right) - L\left(\frac{f \cdot T''}{(T')^2}\right).$$

Então, usando nossa hipótese de indução, temos

$$
\begin{aligned}
\left\|(Lf)'\right\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)} &\leq \left\|L\left(\frac{1}{T'}\cdot f'\right)\right\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)} + \left\|L\left(\frac{T''}{(T')^2}\cdot f\right)\right\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)} \\
&\leq \left[\alpha^{k-1}\cdot\left\|\frac{1}{T'}\cdot f'\right\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)} + B_{k-1}\cdot\left\|\frac{1}{T'}\cdot f'\right\|_{W^{k-2,1}(\mathbb{S}^1)}\right] + \left\|L\left(\frac{T''}{(T')^2}\cdot f\right)\right\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)} \\
&\leq \left[\alpha^{k-1}\cdot\left\|\frac{1}{T'}\cdot f'\right\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)} + B_{k-1}\cdot\left\|\frac{1}{T'}\cdot f'\right\|_{W^{k-2,1}(\mathbb{S}^1)}\right] + A_k\cdot\left\|\frac{T''}{(T')^2}\cdot f\right\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)} \\
&= \alpha^{k-1}\cdot\left\|\frac{1}{T'}\cdot f'\right\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)} + B_{k-1}\cdot\left\|M_{\frac{1}{T'}}\left(f'\right)\right\|_{W^{k-2,1}(\mathbb{S}^1)} + A_k\cdot\left\|M_{\frac{T''}{(T')^2}}\left(f\right)\right\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)}.
\end{aligned}
$$

Como $T \in C^{k+1}\left(\mathbb{S}^1,\mathbb{S}^1\right)$, então $T' \in C^{k}\left(\mathbb{S}^1,\mathbb{S}^1\right)$ e $T'' \in C^{k-1}\left(\mathbb{S}^1,\mathbb{S}^1\right)$. Então, temos que $\frac{1}{T'},\frac{T''}{(T')^2} \in C^{k-1}\left(\mathbb{S}^1,\mathbb{S}^1\right)$ e, portanto, $\frac{1}{T'} \in C^{k-2}\left(\mathbb{S}^1,\mathbb{S}^1\right)$. Assim, usando o lema 1, vemos que se $K_1 := \left\|M_{\frac{1}{T'}}\right\|_{W^{k-2,1}(\mathbb{S}^1)\to W^{k-2,1}(\mathbb{S}^1)}$ e $K_2 := \left\|M_{\frac{T''}{(T')^2}}\right\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)\to W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)}$, então

$$
\left\|(Lf)'\right\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)} \leq \alpha^{k-1}\cdot\left\|\frac{1}{T'}\cdot f'\right\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)} + B_{k-1}\cdot K_1\cdot\left\|f'\right\|_{W^{k-2,1}(\mathbb{S}^1)} + A_k\cdot K_2\cdot\|f\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)}.
$$

Seja $\tilde{C}_k := \max\{K_1,K_2\}$. Notamos que $\|f\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)} = \left\|f'\right\|_{W^{k-2,1}(\mathbb{S}^1)} + \|f\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} \geq \left\|f'\right\|_{W^{k-2,1}(\mathbb{S}^1)}$. Assim,

$$
\begin{aligned}
\left\|(Lf)'\right\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)} &\leq \alpha^{k-1}\cdot\left\|\frac{1}{T'}\cdot f'\right\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)} + B_{k-1}\cdot\tilde{C}_k\cdot\left\|f'\right\|_{W^{k-2,1}(\mathbb{S}^1)} + A_k\cdot\tilde{C}_k\cdot\|f\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)} \\
&\leq \alpha^{k-1}\cdot\left\|\frac{1}{T'}\cdot f'\right\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)} + B_{k-1}\cdot\tilde{C}_k\cdot\|f\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)} + A_k\cdot\tilde{C}_k\cdot\|f\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)} \\
&= \alpha^{k-1}\cdot\left\|\frac{1}{T'}\cdot f'\right\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)} + \left(B_{k-1}\cdot\tilde{C}_k + A_k\cdot\tilde{C}_k\right)\cdot\|f\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)}.
\end{aligned}
$$

Seja $C_k' := B_{k-1}\cdot\tilde{C}_k + A_k\cdot\tilde{C}_k$. Então, ficamos com

$$
\left\|(Lf)'\right\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)} \leq \alpha^{k-1}\cdot\left\|\frac{1}{T'}\cdot f'\right\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)} + C_k'\cdot\|f\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)}.
$$

Agora lembramos da fórmula de Leibniz (confira o capítulo 5 de [7]) e ela nos fornece:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{f'}{T'}\right)^{(k-1)} &= \sum_{l=0}^{k-1}\left(\frac{1}{T'}\right)^{(k-1-l)}\cdot f^{(l+1)}\cdot\binom{k-1}{l} \\
&= \frac{f^{(k)}}{T'} + \cdots + f'\cdot\left(\frac{1}{T'}\right)^{(k-1)}.
\end{aligned}
$$

Vamos utilizar este fato para estimar a norma $\left\|\frac{1}{T'}\cdot f'\right\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)}$. Assim, partindo da definição da norma em $W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)$ façamos as seguintes contas

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{f'}{T'}\right\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)} &= \left\|\frac{f'}{T'}\right\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} + \left\|\left(\frac{f'}{T'}\right)'\right\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} + \cdots + \left\|\left(\frac{f'}{T'}\right)^{(k-1)}\right\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} \\
&= \sum_{j=0}^{k-2}\left\|\left(\frac{f'}{T'}\right)^{(j)}\right\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} + \left\|\left(\frac{f'}{T'}\right)^{(k-1)}\right\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} \\
&= \sum_{j=0}^{k-2}\left\|\sum_{l=0}^{j}\left(\frac{1}{T'}\right)^{(j-l)}\cdot f^{(l+1)}\cdot\binom{j}{l}\right\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} + \\
&+ \left\|\frac{f^{(k)}}{T'} + \sum_{l=0}^{k-2}\left(\frac{1}{T'}\right)^{(k-1-l)}\cdot f^{(l+1)}\cdot\binom{k-1}{l}\right\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} \quad \text{(Fórmula de Leibniz)} \\
&\leq \sum_{j=0}^{k-2}\sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l}\cdot\left\|\left(\frac{1}{T'}\right)^{(j-l)}\cdot f^{(l+1)}\right\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} + \left\|\frac{f^{(k)}}{T'}\right\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} + \\
&+ \sum_{l=0}^{k-2}\binom{k-1}{l}\cdot\left\|\left(\frac{1}{T'}\right)^{(k-1-l)}\cdot f^{(l+1)}\right\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} \quad \text{(Desigualdade triangular)} \\
&\leq \sum_{j=0}^{k-2}\sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l}\cdot\left\|\left(\frac{1}{T'}\right)^{(j-l)}\right\|_{L^\infty(\mathbb{S}^1)}\cdot\left\|f^{(l+1)}\right\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} + \left\|\frac{1}{T'}\right\|_{L^\infty(\mathbb{S}^1)}\cdot\left\|f^{(k)}\right\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} + \\
&+ \sum_{l=0}^{k-2}\binom{k-1}{l}\cdot\left\|\left(\frac{1}{T'}\right)^{(k-1-l)}\right\|_{L^\infty(\mathbb{S}^1)}\cdot\left\|f^{(l+1)}\right\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} \quad \text{(Desigualdade de Hölder)} \\
&\leq \sum_{j=0}^{k-2}\sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l}\cdot\left\|\left(\frac{1}{T'}\right)^{(j-l)}\right\|_{L^\infty(\mathbb{S}^1)}\cdot\|f\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)} + \alpha\cdot\left\|f^{(k)}\right\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} + \\
&+ \sum_{l=0}^{k-2}\binom{k-1}{l}\cdot\left\|\left(\frac{1}{T'}\right)^{(k-1-l)}\right\|_{L^\infty(\mathbb{S}^1)}\cdot\|f\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)} \quad \text{(Norma } W^{k-1,1} \text{ supera as demais)} \\
&= \alpha\cdot\left\|f^{(k)}\right\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} + C_k''\cdot\|f\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)},
\end{aligned}
$$

onde $C_k'' = \left[\sum_{j=0}^{k-2}\sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l}\cdot\left\|\left(\frac{1}{T'}\right)^{(j-l)}\right\|_{L^\infty(\mathbb{S}^1)} + \sum_{l=0}^{k-2}\binom{k-1}{l}\cdot\left\|\left(\frac{1}{T'}\right)^{(k-1-l)}\right\|_{L^\infty(\mathbb{S}^1)}\right]$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
\|Lf\|_{W^{k,1}(\mathbb{S}^1)} &= \left\|(Lf)'\right\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)} + \|Lf\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} \\
&\leq \alpha^{k-1}\cdot\left\|\frac{f'}{T'}\right\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)} + C'_k\,\|f\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)} + \|Lf\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} \\
&\leq \alpha^{k-1}\cdot\left(\alpha\cdot\left\|f^{(k)}\right\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} + C''_k\cdot\|f\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)}\right) + C'_k\,\|f\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)} + \|Lf\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} \\
&= \alpha^{k}\cdot\left\|f^{(k)}\right\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} + \alpha^{k-1}\cdot C''_k\cdot\|f\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)} + C'_k\,\|f\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)} + \|Lf\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} \\
&\leq \alpha^{k}\cdot\left\|f^{(k)}\right\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} + \alpha^{k-1}\cdot C''_k\cdot\|f\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)} + C'_k\,\|f\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)} + \|f\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} \\
&\leq \alpha^{k}\cdot\left\|f^{(k)}\right\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} + \alpha^{k-1}\cdot C''_k\cdot\|f\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)} + C'_k\,\|f\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)} + \|f\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)} \\
&\leq \alpha^{k}\cdot\|f\|_{W^{k,1}(\mathbb{S}^1)} + \alpha^{k-1}\cdot C''_k\cdot\|f\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)} + C'_k\,\|f\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)} + \|f\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)} \\
&= \alpha^{k}\cdot\|f\|_{W^{k,1}(\mathbb{S}^1)} + \left[\alpha^{k-1}\cdot C''_k + C'_k + 1\right]\cdot\|f\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)} \\
&= \alpha^{k}\cdot\|f\|_{W^{k,1}(\mathbb{S}^1)} + C_k\cdot\|f\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)},
\end{aligned}$$

onde $C_k = \alpha^{k-1}\cdot C''_k + C'_k + 1$.

Iteramos a desigualdade acima e obtemos:

$$\begin{aligned}
\left\|L^2 f\right\|_{W^{k,1}(\mathbb{S}^1)} &= \|L(Lf)\|_{W^{k,1}(\mathbb{S}^1)} \\
&\leq \alpha^{k}\cdot\|Lf\|_{W^{k,1}(\mathbb{S}^1)} + C_k\cdot\|Lf\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)} \\
&\leq \alpha^{k}\cdot\left[\alpha^{k}\cdot\|f\|_{W^{k,1}(\mathbb{S}^1)} + C_k\cdot\|f\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)}\right] + C_k\cdot\|Lf\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)} \\
&= \alpha^{2k}\cdot\|f\|_{W^{k,1}(\mathbb{S}^1)} + C_k\cdot\left[\alpha^{k}\cdot\|f\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)} + \|Lf\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)}\right].
\end{aligned}$$

Iteramos mais uma vez a desigualdade para observarmos um padrão

$$\begin{aligned}
\left\|L^3 f\right\|_{W^{k,1}(\mathbb{S}^1)} &= \left\|L^2(Lf)\right\|_{W^{k,1}(\mathbb{S}^1)} \\
&\leq \alpha^{2k}\cdot\|Lf\|_{W^{k,1}(\mathbb{S}^1)} + C_k\cdot\left[\alpha^{k}\cdot\|Lf\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)} + \left\|L^2 f\right\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)}\right] \\
&\leq \alpha^{2k}\cdot\left[\alpha^{k}\cdot\|f\|_{W^{k,1}(\mathbb{S}^1)} + C_k\cdot\|f\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)}\right] + C_k\cdot\left[\alpha^{k}\cdot\|Lf\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)} + \left\|L^2 f\right\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)}\right] \\
&= \alpha^{3k}\cdot\|f\|_{W^{k,1}(\mathbb{S}^1)} + C_k\cdot\left[\alpha^{2k}\cdot\|f\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)} + \alpha^{k}\cdot\|Lf\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)} + \left\|L^2 f\right\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)}\right].
\end{aligned}$$

Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|L^n f\|_{W^{k,1}(\mathbb{S}^1)} \leq \alpha^{nk}\cdot\|f\|_{W^{k,1}(\mathbb{S}^1)} + C_k\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\alpha^{k(n-1-i)}\cdot\left\|L^i f\right\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\left\|L^{n+1} f\right\|_{W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} &= \left\|L^n (Lf)\right\|_{W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} \\
&\leq \alpha^{nk} \cdot \|Lf\|_{W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} + C_k \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^{k(n-1-i)} \cdot \left\|L^{i+1} f\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} \\
&\leq \alpha^{nk} \cdot \left[\alpha^k \cdot \|f\|_{W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} + C_k \cdot \|f\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)}\right] + C_k \cdot \sum_{i=1}^{n} \alpha^{k(n-i)} \cdot \left\|L^i f\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} \\
&= \alpha^{(n+1)k} \cdot \|f\|_{W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} + C_k \cdot \left[\alpha^{nk} \cdot \|f\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} + \sum_{i=1}^{n} \alpha^{k(n-i)} \cdot \left\|L^i f\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)}\right] \\
&= \alpha^{(n+1)k} \cdot \|f\|_{W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} + C_k \cdot \sum_{i=0}^{n} \alpha^{k(n-i)} \cdot \left\|L^i f\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)}.
\end{aligned}$$

Daí, para cada $n \in \mathbb{N}$ vale:

$$\begin{aligned}
\|L^n f\|_{W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} &\leq \alpha^{nk} \cdot \|f\|_{W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} + C_k \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^{k(n-1-i)} \cdot \left\|L^i f\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} \\
&\leq \alpha^{nk} \cdot \|f\|_{W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} + C_k \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^{k(n-1-i)} \cdot A_k \cdot \|f\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} \\
&= \alpha^{nk} \cdot \|f\|_{W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} + C_k \cdot A_k \cdot \|f\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^{k(n-1-i)} \\
&= \alpha^{nk} \cdot \|f\|_{W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} + C_k \cdot A_k \cdot \|f\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \left(\alpha^k\right)^j \\
&\leq \alpha^{nk} \cdot \|f\|_{W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} + C_k \cdot A_k \cdot \|f\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \left(\alpha^k\right)^j \\
&= \alpha^{nk} \cdot \|f\|_{W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} + C_k \cdot A_k \cdot \|f\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} \cdot \frac{1}{1-\alpha^k} \\
&= \alpha^{nk} \cdot \|f\|_{W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} + B_k \cdot \|f\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)},
\end{aligned}$$

onde $B_k = \dfrac{C_k \cdot A_k}{1-\alpha^k}$.

Q.E.D.

Deste último resultado deduzimos o seguinte: para cada $k \geq 1$, o operador de transferência L_T de uma aplicação T expansora de classe C^{k+1} admite um gap espectral em $W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)$, para uma demonstração deste fato confira o teorema 31 de [6], páginas 20 e 21. Para usar os teoremas 30 e 31 de [6] para o caso de $W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)$, como provamos a desigualdade de Lasota-Yorke acima (e também provamos a limitação uniforme na norma fraca dos operadores L^n, o que acarreta imediatamente a hipótese de limitação fraca necessária para o teorema 31 de [6]), resta verificar as hipóteses de inclusão compacta, que conseguimos com o teorema de

Rellich-Kondrachov que nos diz exatamente que na variedade compacta $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ com bordo C^1 vale que $W^{k,p}(\Omega) \subset\subset W^{l,q}(\Omega)$, para todo $k > l$ e $k - n/p > l - n/q$. O que nos implica em $W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right) \subset\subset W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)$, uma formulação desse teorema pode ser vista na proposição 4.4 de [8], página 334. Notamos que aqui entra a importância da hipótese do espaço X (que neste contexto é $\mathbb{S}^1$) ser compacto. Resta apenas então verificar a convergência para o equilíbrio para $W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)$ e $W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)$, esta é uma conta trabalhosa e não é nosso objetivo neste texto verificar estes detalhes. Portanto, assumiremos esse resultado e prosseguiremos. Mais ainda, conferindo a demonstração do teorema 3 no capítulo anterior, vemos que (por transitividade topológica) 1 é o único autovalor no círculo unitário; ele é simples e o autovalor (normalizado) associado, h, é a densidade invariante do sistema. O resto do espectro está contido no disco de raio estritamente menor do que 1. E, é claro, temos o gap espectral propriamente dito, ou seja, podemos escrever (veja o teorema 31 de [6], páginas 20 e 21)

$$L = \Pi + R,$$

onde $\Pi : W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right) \to W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)$ é o projetor espectral, definido por

$$\Pi(\phi) := h \int_{\mathbb{S}^1} \phi dm,$$

e R satisfaz

$$R\Pi = \Pi R = 0$$

e

$$\|R^n \phi\|_{W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} \leq C\rho^n \|\phi\|_{W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)}.$$

Então, temos o seguinte resultado:

Proposição 4. Para cada $g \in V_k := \left\{ g \in W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right) \mid \int_{\mathbb{S}^1} gdm = 0 \right\} = Ker(\Pi)$ vale

$$\|L^n g\|_{W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} \leq C\rho^n \|g\|_{W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)}.$$

Em particular, o resolvente $R(1,L) := (I_d - L)^{-1} = \sum_{i=0}^{+\infty} L^i$ está bem definido e é limitado em V_k.

Demonstração. Seja $g \in V_k$. Então, por definição,

$$(I_d - L)^{-1}(g) = \sum_{i=0}^{+\infty} L^i(g).$$

Pela hipótese de que L é um operador de Markov, $L^i(g) \in V_k$ para $i \geq 1$. Como

$$\|L^m(g)\|_{W^{k,1}(\mathbb{S}^1)} = \|(\Pi+R)^m(g)\|_{W^{k,1}(\mathbb{S}^1)} = \|(\Pi^m+R^m)(g)\|_{W^{k,1}(\mathbb{S}^1)} = \|0+R^m(g)\|_{W^{k,1}(\mathbb{S}^1)}$$

e, pelo teorema 3, vale que

$$\|R^m(g)\|_{W^{k,1}(\mathbb{S}^1)} \leq C\rho^m \|g\|_{W^{k,1}(\mathbb{S}^1)}$$

e, além disso, $\sum_{n=1}^{+\infty} C\rho^n < +\infty$ (pois $0 < \rho < 1$, então a série sendo geométrica converge), a soma $\sum_{i=1}^{+\infty} L^i(g)$ converge absolutamente, pelo critério de comparação de séries, em V_k, com respeito à norma $\|\cdot\|_{W^{k,1}(\mathbb{S}^1)}$ (e, portanto, converge já que o espaço é de Banach), e

$$\left\|(I_d-L)^{-1}\right\|_{V_k\to V_k} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} C\rho^n.$$

Q.E.D.

Esses resultados asseguram que as hipóteses (LR1) (devido ao teorema 3 do capítulo anterior), (LR2), (LR3) e (QR3) são satisfeitas nesse contexto de aplicações expansoras no círculo.

4.3 Pequenas Perturbações de Aplicações Expansoras

Vamos focar em uma aplicação $T : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ expansora de classe C^4 fixada, perturbada por composição à esquerda com uma família de difeomorfismos $(D_\delta)_{\delta\in[0,\overline{\delta}]}$. Mais precisamente, seja $D_\delta : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ com

$$D_\delta = I_d + \delta S$$

com $S \in C^{k+1}(\mathbb{S}^1) := C^{k+1}(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$. Para um tal difeomorfismo temos:

Lema 3. Assuma $k = 0$, isto é, $S \in C^1(\mathbb{S}^1)$. Então, na topologia de $C^0(\mathbb{S}^1)$ temos

$$\left\|\frac{1}{\delta}\cdot\left(D_\delta^{-1}-I_d\right)+S\right\|_{C^0(\mathbb{S}^1)} \xrightarrow{\delta\to 0} 0,$$

que fornece:

$$D_\delta^{-1} = I_d - \delta S + o(\delta).$$

Observação 3. $o(\delta)$ deve ser entendido como uma função de classe C^0 que vai para 0 quando $\delta \to 0$, uniformemente em $x \in \mathbb{S}^1$. Apesar de não mostrarmos aqui, note que no caso geral $S \in C^{k+1}\left(\mathbb{S}^1\right)$ o resultado vale na topologia de $C^k\left(\mathbb{S}^1\right)$, o que significa que o $o(\delta)$ é uma função de classe C^k que vai para 0 com $\delta \to 0$, assim como suas derivadas.

Demonstração. Seja $x \in \mathbb{S}^1$, e seja $y := D_\delta(x)$. Então, $D_\delta^{-1}(y) = x$ e, assim, temos que

$$\begin{aligned}
\left|D_\delta^{-1}(y) - y + \delta S(y)\right| &= \left|x - D_\delta(x) + \delta S(D_\delta(x))\right| \\
&= \left|x - I_d(x) - \delta S(x) + \delta S(D_\delta(x))\right| \text{ (Definição de } D_\delta) \\
&= \left|x - x - \delta\left[S(x) - S(D_\delta(x))\right]\right| \\
&= \delta \cdot \left|S(x) - S(D_\delta(x))\right| \\
&\leq \delta \cdot \left\|S'\right\|_{L^\infty\left(\mathbb{S}^1\right)} \cdot \left|D_\delta(x) - x\right| \text{ (Desigualdade do Valor Médio)} \\
&= \delta \cdot \left\|S'\right\|_{L^\infty\left(\mathbb{S}^1\right)} \cdot \left|\delta S(x)\right| \text{ (Definição de } D_\delta) \\
&\leq \delta^2 \cdot \left\|S'\right\|_{L^\infty\left(\mathbb{S}^1\right)} \cdot \sup_{x \in \mathbb{S}^1} \left|S(x)\right| \\
&= \delta^2 \cdot \left\|S'\right\|_{L^\infty\left(\mathbb{S}^1\right)} \cdot \left\|S\right\|_{L^\infty\left(\mathbb{S}^1\right)}.
\end{aligned}$$

Tomamos o supremo em $y \in \mathbb{S}^1$ (lembrando que $D_\delta : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ é um difeomorfismo e, portanto, é sobrejetivo) e obtemos

$$\left\|\frac{1}{\delta} \cdot \left(D_\delta^{-1} - I_d\right) + S\right\|_{C^0\left(\mathbb{S}^1\right)} = \frac{1}{\delta} \cdot \sup_{y \in \mathbb{S}^1} \left|D_\delta^{-1}(y) - y + \delta S(y)\right| \leq \delta \cdot \left\|S'\right\|_{L^\infty\left(\mathbb{S}^1\right)} \cdot \left\|S\right\|_{L^\infty\left(\mathbb{S}^1\right)}.$$

Portanto, quando $\delta \to 0$, temos que $\left\|\frac{1}{\delta} \cdot \left(D_\delta^{-1} - I_d\right) + S\right\|_{C^0\left(\mathbb{S}^1\right)} \to 0$.

Q.E.D.

Proposição 5. O operador de transferência L_{D_δ} associado a um difeomorfismo D_δ de classe C^{k+1} é limitado em $W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)$. Introduzimos a notação

$$J_\delta := \frac{1}{1 + \delta S' \circ D_\delta^{-1}}$$

para o peso de L_{D_δ}.

Demonstração. Primeiro observamos que $\left[D_\delta^{-1}\right]' = J_\delta$. De fato, vemos que

$$
\begin{aligned}
D_\delta^{-1}\left(D_\delta\left(y\right)\right) &= y, \forall y \in \mathbb{S}^1.\\
\Rightarrow \left[D_\delta^{-1}\right]'\left(D_\delta\left(y\right)\right) \cdot D_\delta'\left(y\right) &= 1, \forall y \in \mathbb{S}^1.\\
\Rightarrow \left[D_\delta^{-1}\right]'\left(D_\delta\left(y\right)\right) &= \frac{1}{D_\delta'\left(y\right)}, \forall y \in \mathbb{S}^1.\\
\Rightarrow \left[D_\delta^{-1}\right]'\left(D_\delta\left(y\right)\right) &= \frac{1}{\left(y+\delta S\left(y\right)\right)'}, \forall y \in \mathbb{S}^1.\\
\Rightarrow \left[D_\delta^{-1}\right]'\left(D_\delta\left(y\right)\right) &= \frac{1}{1+\delta S'\left(y\right)}, \forall y \in \mathbb{S}^1.
\end{aligned}
$$

Se $D_\delta\left(y\right) = x$, então

$$
\left[D_\delta^{-1}\right]'\left(D_\delta\left(y\right)\right) = \frac{1}{1+\delta S'\left(y\right)} \Leftrightarrow \left[D_\delta^{-1}\right]'\left(x\right) = \frac{1}{1+\delta S'\left(D_\delta^{-1}\left(x\right)\right)}.
$$

Como D_δ é sobrejetivo (já que é um difeomorfismo), então

$$
\left[D_\delta^{-1}\right]'\left(x\right) = \frac{1}{1+\delta S'\left(D_\delta^{-1}\left(x\right)\right)}, \forall x \in \mathbb{S}^1.
$$

Ou seja,

$$
\left[D_\delta^{-1}\right]' = \frac{1}{1+\delta S' \circ D_\delta^{-1}} = J_\delta.
$$

Agora vamos mostrar a proposição por indução em $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Para $k = 0$, a afirmação é simplesmente que L_{D_δ} é limitado em $L^1\left(\mathbb{S}^1\right)$, o que é bem conhecido (o operador de transferência é uma contração fraca em L^1).

Vamos assumir que $L_{D_\delta} : W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right) \to W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)$ é um operador linear limitado sempre que $D_\delta = I_d + \delta S$ com $S \in C^k\left(\mathbb{S}^1\right)$. Se $S \in C^{k+1}\left(\mathbb{S}^1\right)$, escrevemos para $f \in W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)$ que

$$
\left\|L_{D_\delta} f\right\|_{W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} = \left\|\left(L_{D_\delta} f\right)'\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} + \left\|L_{D_\delta} f\right\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)}.
$$

Afirmamos que

$$
\left(L_{D_\delta} f\right)' = J_\delta' \cdot \left(f \circ D_\delta^{-1}\right) + J_\delta^2 \cdot \left(f' \circ D_\delta^{-1}\right).
$$

De fato, vemos que para cada $x \in \mathbb{S}^1$:

$$
\begin{aligned}
\left[L_{D_\delta} f\right](x) &= \sum_{y \in D_\delta^{-1}(x)} \frac{f(y)}{\left|D'_\delta(y)\right|} \\
&= \frac{f(y)}{\left|D'_\delta(y)\right|} \text{ (pois } D_\delta \text{ é sobrejetivo)} \\
&= \frac{f(y)}{1+\delta S'(y)} \\
&= \frac{f\left(D_\delta^{-1}(x)\right)}{1+\delta S'\left(D_\delta^{-1}(x)\right)} \\
&= \frac{1}{\left(1+\delta S' \circ D_\delta^{-1}\right)(x)} \cdot \left(f \circ D_\delta^{-1}\right)(x) \\
&= \left[J_\delta \cdot \left(f \circ D_\delta^{-1}\right)\right](x). \\
\Rightarrow L_{D_\delta} &= J_\delta \cdot \left(f \circ D_\delta^{-1}\right).
\end{aligned}
$$

Derivamos usando a regra do produto e obtemos:

$$
\begin{aligned}
\left(L_{D_\delta} f\right)' &= J'_\delta \cdot \left(f \circ D_\delta^{-1}\right) + J_\delta \cdot \left(f \circ D_\delta^{-1}\right)' \\
&= J'_\delta \cdot \left(f \circ D_\delta^{-1}\right) + J_\delta \cdot \left(f' \circ D_\delta^{-1}\right) \cdot \left(D_\delta^{-1}\right)' \\
&= J'_\delta \cdot \left(f \circ D_\delta^{-1}\right) + J_\delta \cdot \left(f' \circ D_\delta^{-1}\right) \cdot J_\delta \\
&= J'_\delta \cdot \left(f \circ D_\delta^{-1}\right) + J_\delta^2 \cdot \left(f' \circ D_\delta^{-1}\right).
\end{aligned}
$$

Agora, ao lembrarmos que $J_\delta = \dfrac{1}{1+\delta S' \circ D_\delta^{-1}}$ derivamos pela regra do quociente e obtemos

$$
\begin{aligned}
J'_\delta &= \frac{0 - 1 \cdot \left[0 + \left(\delta S'' \circ D_\delta^{-1}\right) \cdot \left(D_\delta^{-1}\right)'\right]}{\left(1+\delta S' \circ D_\delta^{-1}\right)^2} \\
&= -\frac{\delta S'' \circ D_\delta^{-1}}{\left(1+\delta S' \circ D_\delta^{-1}\right)^2} \cdot \left(D_\delta^{-1}\right)' \\
&= -\frac{\delta S'' \circ D_\delta^{-1}}{\left(1+\delta S' \circ D_\delta^{-1}\right)^2} \cdot J_\delta.
\end{aligned}
$$

Desta forma, voltamos em $\left(L_{D_\delta} f\right)'$ e calculamos sua norma:

$$
\begin{aligned}
\left\|\left(L_{D_\delta} f\right)'\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} &= \left\|J_\delta' \cdot \left(f \circ D_\delta^{-1}\right) + J_\delta^2 \cdot \left(f' \circ D_\delta^{-1}\right)\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} \\
&= \left\| -\frac{\delta S'' \circ D_\delta^{-1}}{\left(1+\delta S' \circ D_\delta^{-1}\right)^2} \cdot J_\delta \cdot \left(f \circ D_\delta^{-1}\right) + J_\delta^2 \cdot \left(f' \circ D_\delta^{-1}\right)\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} \\
&\leq \left\| \frac{\delta S'' \circ D_\delta^{-1}}{\left(1+\delta S' \circ D_\delta^{-1}\right)^2} \cdot J_\delta \cdot \left(f \circ D_\delta^{-1}\right)\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} + \left\|J_\delta^2 \cdot \left(f' \circ D_\delta^{-1}\right)\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} \\
&= \left\| \frac{\delta S'' \circ D_\delta^{-1}}{\left(1+\delta S' \circ D_\delta^{-1}\right)^2} \cdot L_{D_\delta} f\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} + \left\|J_\delta \cdot L_{D_\delta} f'\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} \\
&= \left\| M_{\frac{\delta S'' \circ D_\delta^{-1}}{\left(1+\delta S' \circ D_\delta^{-1}\right)^2}} \left(L_{D_\delta} f\right)\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} + \left\|M_{J_\delta}\left(L_{D_\delta} f'\right)\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)}.
\end{aligned}
$$

Como S e D_δ são de classe C^{k+1} e D_δ é um difeomorfismo de classe C^{k+1}, então D_δ^{-1} é de classe C^{k+1} e, portanto, $\dfrac{\delta S'' \circ D_\delta^{-1}}{\left(1+\delta S' \circ D_\delta^{-1}\right)^2}$ e J_δ são, pelo menos, de classe C^{k-1}. Pelo lema 1 podemos definir os números $C_\delta := \left\| M_{\frac{\delta S'' \circ D_\delta^{-1}}{\left(1+\delta S' \circ D_\delta^{-1}\right)^2}} \right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right) \to W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)}$ e $C_\delta' := \left\|M_{J_\delta}\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right) \to W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)}$. Assim, ficamos com (vide lema 1):

$$
\left\|\left(L_{D_\delta} f\right)'\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} \leq C_\delta \cdot \left\|L_{D_\delta} f\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} + C_\delta' \cdot \left\|\left(L_{D_\delta} f'\right)\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)}.
$$

Pela hipótese de indução, L_{D_δ} é limitado em $W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
\left\|\left(L_{D_\delta} f\right)'\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} &\leq \left\|L_{D_\delta}\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right) \to W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} \cdot \left[C_\delta \cdot \|f\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} + C_\delta' \cdot \|f'\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)}\right] \\
&\leq \left\|L_{D_\delta}\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right) \to W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} \cdot \left[C_\delta + C_\delta'\right] \cdot \|f\|_{W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)}.
\end{aligned}
$$

Além disso, lembrando que L_{D_δ} é contração fraca em L^1 e que a norma $W^{k,1}$ supera a norma L^1 temos a seguinte relação:

$$
\left\|L_{D_\delta} f\right\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)} \leq \|f\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)} \leq \|f\|_{W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)}.
$$

Portanto, juntando estas duas útlimas informações obtemos que L_{D_δ} é limitado em $W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)$ já que $\left\|L_{D_\delta}\right\|_{W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} = \left\|L_{D_\delta}'\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} + \left\|L_{D_\delta}\right\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)}$ e, consequentemente,

$$
\left\|L_{D_\delta}\right\|_{W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right) \to W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} \leq \left\|L_{D_\delta}\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right) \to W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} \cdot \left[C_\delta + C_\delta' + 1\right].
$$

Q.E.D.

Agora vamos estimar a continuidade para a aplicação $\delta \mapsto L_{D_\delta}$. Nosso primeiro passo é o seguinte lema:

Lema 4. Seja $f \in W^{1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)$ e seja $H : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ um homeomorfismo preservando orientação. Então,

$$\|f \circ H - f\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)} \leq \left\|H^{-1} - I_d\right\|_{L^\infty\left(\mathbb{S}^1\right)} \cdot \left\|f'\right\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)}.$$

Demonstração. Vamos considerar "lifts' em $\mathbb{R}$, lembramos da construção do círculo unitário e todas as suas identificações com a reta real. Consideremos um "lift"monótono crescente de H (que ainda denotaremos por H). Como $f \in W^{1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)$, então f é a integral de sua derivada. E temos usando o teorema fundamental do cálculo:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (f \circ H(x) - f(x))\, dx &= \int_0^1 \int_x^{H(x)} f'(t)\, dt dx \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \mathbb{1}_{[x,H(x)]}(t) \cdot f'(t)\, dt dx \\
&= \int_0^1 f'(t) \cdot \int_0^1 \mathbb{1}_{\left[H^{-1}(t),t\right]}(x)\, dx dt.
\end{aligned}$$

O resultado segue ao tomarmos valor absoluto na igualdade acima. De fato, como H é um "lift"monótono crescente, temos que

$$f \circ H(x) > f(x).$$

Portanto,

$$f \circ H(x) - f(x) > 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|f\circ H-f\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)} &= \int_0^1 |f\circ H(x)-f(x)|\,dx\\
&= \left|\int_0^1 f\circ H(x)-f(x)\,dx\right|\\
&= \left|\int_0^1 f'(t)\cdot\int_0^1 \mathbb{1}_{\left[H^{-1}(t),t\right]}(x)\,dxdt\right|\\
&\leq \int_0^1 \left|f'(t)\cdot\int_0^1 \mathbb{1}_{\left[H^{-1}(t),t\right]}(x)\,dx\right|dt\\
&\leq \int_0^1 \left|f'(t)\right|\cdot\int_0^1 \left|\mathbb{1}_{\left[H^{-1}(t),t\right]}(x)\right|dxdt\\
&\leq \int_0^1 \left|f'(t)\right|\cdot\left|H^{-1}(t)-t\right|dt\\
&\leq \int_0^1 \left|f'(t)\right|\cdot\left\|H^{-1}-I_d\right\|_{L^\infty\left(\mathbb{S}^1\right)}dt\\
&= \left\|H^{-1}-I_d\right\|_{L^\infty\left(\mathbb{S}^1\right)}\left\|f'\right\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)}.
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Proposição 6. Para um difeomorfismo $D_\delta = I_d + \delta S$ de classe C^{k+1} preservando orientação, temos

$$\left\| L_{D_\delta} - I_d \right\|_{W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right) \to W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} \leq C\delta.$$

Demonstração. Provaremos a proposição por indução em $k \in \mathbb{N}$. Para $k = 1$, seja $f \in W^{1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)$ e escrevemos

$$\begin{aligned}
L_{D_\delta} f - f &= J_\delta \cdot \left(f \circ D_\delta^{-1}\right) - f \\
&= (J_\delta - 1 + 1) \cdot \left(f \circ D_\delta^{-1}\right) - f \\
&= (J_\delta - 1) \cdot \left(f \circ D_\delta^{-1}\right) + f \circ D_\delta^{-1} - f.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
L_{D_\delta} f - f &= (J_\delta - 1) \cdot \left(f \circ D_\delta^{-1}\right) + f \circ D_\delta^{-1} - f \\
&= \left(\frac{1}{1 + \delta S' \circ D_\delta^{-1}} - 1\right) \cdot \left(f \circ D_\delta^{-1}\right) + f \circ D_\delta^{-1} - f \\
&= \left(\frac{1 - 1 - \delta S' \circ D_\delta^{-1}}{1 + \delta S' \circ D_\delta^{-1}}\right) \cdot \left(f \circ D_\delta^{-1}\right) + f \circ D_\delta^{-1} - f \\
&= -\left(\delta S' \circ D_\delta^{-1}\right) \cdot \frac{1}{1 + \delta S' \circ D_\delta^{-1}} \cdot \left(f \circ D_\delta^{-1}\right) + f \circ D_\delta^{-1} - f \\
&= -\left(\delta S' \circ D_\delta^{-1}\right) \cdot J_\delta \cdot \left(f \circ D_\delta^{-1}\right) + f \circ D_\delta^{-1} - f \\
&= -\left(\delta S' \circ D_\delta^{-1}\right) \cdot L_{D_\delta} f + f \circ D_\delta^{-1} - f.
\end{aligned}$$

De modo que

$$\begin{aligned}
\left\| L_{D_\delta} f - f \right\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)} &= \left\| -\left(\delta S' \circ D_\delta^{-1}\right) \cdot L_{D_\delta} f + f \circ D_\delta^{-1} - f \right\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)} \\
&\leq \left\| \left(\delta S' \circ D_\delta^{-1}\right) \cdot L_{D_\delta} f \right\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)} + \left\| f \circ D_\delta^{-1} - f \right\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)} \\
&\leq \left\| \left(\delta S' \circ D_\delta^{-1}\right) \cdot L_{D_\delta} f \right\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)} + \delta \cdot \|S\|_{L^\infty\left(\mathbb{S}^1\right)} \cdot \left\| f' \right\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)} \quad \text{(lema 4)} \\
&\leq \delta \cdot \left\| S' \circ D_\delta^{-1} \right\|_{L^\infty\left(\mathbb{S}^1\right)} \cdot \left\| L_{D_\delta} f \right\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)} + \delta \cdot \|S\|_{L^\infty\left(\mathbb{S}^1\right)} \cdot \left\| f' \right\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)} \\
&\leq \delta \cdot \left\| S' \right\|_{L^\infty\left(\mathbb{S}^1\right)} \cdot \left\| L_{D_\delta} f \right\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)} + \delta \cdot \|S\|_{L^\infty\left(\mathbb{S}^1\right)} \cdot \left\| f' \right\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)} \\
&\leq \delta \cdot \left\| S' \right\|_{L^\infty\left(\mathbb{S}^1\right)} \cdot \|f\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)} + \delta \cdot \|S\|_{L^\infty\left(\mathbb{S}^1\right)} \cdot \left\| f' \right\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)} \\
&\leq \delta \cdot \|S\|_{C^1\left(\mathbb{S}^1\right)} \cdot \|f\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)} + \delta \cdot \|S\|_{C^1\left(\mathbb{S}^1\right)} \cdot \left\| f' \right\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)} \\
&= \delta \cdot \|S\|_{C^1\left(\mathbb{S}^1\right)} \cdot \left[\|f\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)} + \left\| f' \right\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)} \right] \\
&= \delta \cdot \|S\|_{C^1\left(\mathbb{S}^1\right)} \cdot \|f\|_{W^{1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)}.
\end{aligned}$$

O que mostra que

$$\left\|L_{D_\delta} - I_d\right\|_{W^{1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)\to L^1\left(\mathbb{S}^1\right)} \leq \|S\|_{C^1\left(\mathbb{S}^1\right)} \cdot \delta.$$

Vamos agora assumir que a proposição vale para $k \in \mathbb{N}$, e seja $f \in W^{k+1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)$. Temos

$$\left\|L_{D_\delta} f - f\right\|_{W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} = \left\|\left(L_{D_\delta} f - f\right)'\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} + \left\|L_{D_\delta} f - f\right\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)},$$

com

$$\begin{aligned}
\left(L_{D_\delta} f - f\right)' &= \left(L_{D_\delta} f\right)' - f' \\
&= J_\delta' \cdot \left(f \circ D_\delta^{-1}\right) + J_\delta^2 \cdot \left(f' \circ D_\delta^{-1}\right) - f' \\
&= J_\delta' \cdot \left(f \circ D_\delta^{-1}\right) + J_\delta \cdot L_{D_\delta} f' - f' \\
&= J_\delta' \cdot \left(f \circ D_\delta^{-1}\right) + J_\delta \cdot \left(L_{D_\delta} f' - f' + f'\right) - f' \\
&= J_\delta' \cdot \left(f \circ D_\delta^{-1}\right) + J_\delta \cdot \left(L_{D_\delta} f' - f'\right) + J_\delta \cdot f' - f' \\
&= J_\delta' \cdot \left(f \circ D_\delta^{-1}\right) + J_\delta \cdot \left(L_{D_\delta} f' - f'\right) + (J_\delta - 1) \cdot f'.
\end{aligned}$$

Em vista das expressões de J_δ e J_δ' e a observação 3, $\dfrac{J_\delta - 1}{\delta}$ e $\dfrac{J_\delta'}{\delta J_\delta}$ são limitados na norma $\|\cdot\|_{C^k\left(\mathbb{S}^1\right)}$ quando $\delta \to 0$. Então,

$$\begin{aligned}
\left\|\left(L_{D_\delta} f - f\right)'\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} &= \left\|J_\delta' \cdot \left(f \circ D_\delta^{-1}\right) + J_\delta \cdot \left(L_{D_\delta} f' - f'\right) + (J_\delta - 1) \cdot f'\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} \\
&= \left\|\delta \cdot \frac{J_\delta'}{\delta J_\delta} \cdot J_\delta \cdot \left(f \circ D_\delta^{-1}\right) + J_\delta \cdot \left(L_{D_\delta} f' - f'\right) + \frac{(J_\delta - 1)}{\delta} \cdot \delta \cdot f'\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} \\
&= \left\|\delta \cdot \frac{J_\delta'}{\delta J_\delta} \cdot L_{D_\delta} f + J_\delta \cdot \left(L_{D_\delta} f' - f'\right) + \frac{(J_\delta - 1)}{\delta} \cdot \delta \cdot f'\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} \\
&\leq \left\|\delta \cdot \frac{J_\delta'}{\delta J_\delta} \cdot L_{D_\delta} f\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} + \left\|J_\delta \cdot \left(L_{D_\delta} f' - f'\right) + \frac{(J_\delta - 1)}{\delta} \cdot \delta \cdot f'\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} \\
&= \left\|\delta \cdot M_{\frac{J_\delta'}{\delta J_\delta}}\left(L_{D_\delta} f\right)\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} + \left\|M_{J_\delta}\left(L_{D_\delta} f' - f'\right) + \delta M_{\frac{(J_\delta - 1)}{\delta}}\left(f'\right)\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)}.
\end{aligned}$$

Seja

$$\tilde{C} := max\left\{\left\|M_{\frac{J_\delta'}{\delta J_\delta}}\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)\to W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)}, \left\|M_{J_\delta}\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)\to W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)}, \left\|M_{\frac{(J_\delta - 1)}{\delta}}\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)\to W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)}\right\}.$$

Daí,

$$\left\|\left(L_{D_\delta} f - f\right)'\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} \leq \delta\tilde{C}\left\|L_{D_\delta} f\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} + \tilde{C}\left\|L_{D_\delta} f' - f'\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} + \delta\tilde{C}\left\|f'\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)}.$$

Pela hipótese de indução,

$$\left\|L_{D_\delta} f' - f'\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} \leq C\delta \left\|f'\right\|_{W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\left\|\left(L_{D_\delta} f - f\right)'\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} &\leq \delta\tilde{C}\left\|L_{D_\delta} f\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} + \tilde{C}\left\|L_{D_\delta} f' - f'\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} + \delta\tilde{C}\left\|f'\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} \\
&\leq \delta\tilde{C}\left\|L_{D_\delta} f\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} + \tilde{C}\cdot C\delta\left\|f'\right\|_{W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} + \delta\tilde{C}\left\|f'\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)}.
\end{aligned}$$

Se consideramos $K := max\left\{\tilde{C}, \tilde{C}\cdot C\right\}$ ficamos com

$$\left\|\left(L_{D_\delta} f - f\right)'\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} \leq \delta K\left\|L_{D_\delta} f\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} + K\delta\left\|f'\right\|_{W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} + \delta K\left\|f'\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)}.$$

Pela proposição 5, temos:

$$\begin{aligned}
\left\|\left(L_{D_\delta} f - f\right)'\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} &\leq \delta KA\left\|f\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} + K\delta\left\|f'\right\|_{W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} + \delta K\left\|f'\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} \\
&\leq \delta KA\left\|f\right\|_{W^{k+1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} + K\delta\left\|f\right\|_{W^{k+1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} + \delta K\left\|f\right\|_{W^{k+1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} \\
&= \delta\cdot[KA + K + K]\cdot\left\|f\right\|_{W^{k+1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)},
\end{aligned}$$

onde $A := \left\|L_{D_\delta}\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)\to W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)}$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\left\|L_{D_\delta} f - f\right\|_{W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} &= \left\|\left(L_{D_\delta} f - f\right)'\right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} + \left\|L_{D_\delta} f - f\right\|_{L^1\left(\mathbb{S}^1\right)} \\
&\leq \delta\cdot[2 + A]K\cdot\left\|f\right\|_{W^{k+1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} + \left\|S\right\|_{C^1\left(\mathbb{S}^1\right)}\cdot\delta\cdot\left\|f\right\|_{W^{1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} \\
&\leq \delta\cdot[2 + A]K\cdot\left\|f\right\|_{W^{k+1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} + \left\|S\right\|_{C^1\left(\mathbb{S}^1\right)}\cdot\delta\cdot\left\|f\right\|_{W^{k+1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} \\
&= \delta\cdot\left[(2 + A)K + \left\|S\right\|_{C^1\left(\mathbb{S}^1\right)}\right]\cdot\left\|f\right\|_{W^{k+1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)}.
\end{aligned}$$

Isto mostra que

$$\left\|L_{D_\delta} - I_d\right\|_{W^{k+1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)\to W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} \leq \delta\cdot\left[(2 + A)K + \left\|S\right\|_{C^1\left(\mathbb{S}^1\right)}\right].$$

Q.E.D.

Com essa proposição vamos verificar a hipótese (LR4) de pequenas perturbações. Primeiro, utilizando a relação de dualidade do operador de transferência, vemos que

$$\begin{aligned}
\int gL_{D_\delta\circ T}(f)\,dm &= \int (g\circ D_\delta\circ T)\,fdm \\
&= \int (g\circ(T+\delta\cdot S))\,fdm \\
&= \int (g\circ T+g\circ\delta\cdot S)\,fdm \\
&= \int (g\circ Tf+g\circ\delta\cdot Sf)\,dm \\
&= \int g\circ Tfdm+\int g\circ\delta\cdot Sfdm \\
&= \int g\circ Tfdm+\int g\circ(f+\delta\cdot Sf)\,dm-\int g\circ I_d fdm \\
&= \int g\circ Tfdm+\int g\circ(I_d f+\delta\cdot Sf)\,dm-\int g\circ I_d fdm \\
&= \int gL_T(f)\,dm+\int gL_{I_d+\delta\cdot S}(f)-\int gL_{I_d}(f)\,dm \\
&= \int g\left(L_T(f)+L_{D_\delta}(f)-L_{I_d}(f)\right)dm.
\end{aligned}$$

Portanto, pela unicidade do operador de transferência, obtemos que

$$L_{D_\delta\circ T}=L_T+L_{D_\delta}-L_{I_d}.$$

Agora, notamos que $D_0=I_d+0\cdot S=I_d$ e, portanto, $L_{D_0}=L_{I_d}$. E, além disso, pela proposição 6, temos que $\|L_{D_0}-I_d\|_{W^{k,1}(\mathbb{S}^1)\to W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)}\le C\cdot 0=0$. Logo, $L_{D_0}=I_d$. E, assim, ficamos com

$$L_{D_\delta\circ T}=L_T+L_{D_\delta}-I_d.$$

Vamos denotar por $L_\delta:=L_{D_\delta\circ T}$ e $L_0:=L_T$. Assim, ficamos com

$$L_\delta=L_0+L_{D_\delta}-I_d.$$

Ou, melhor ainda,

$$L_\delta-L_0=L_{D_\delta}-I_d. \tag{4.1}$$

Daí, vemos que

$$\|L_\delta-L_0\|_{W^{k,1}(\mathbb{S}^1)\to W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)}=\left\|L_{D_\delta}-I_d\right\|_{W^{k,1}(\mathbb{S}^1)\to W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)}\le C\delta.$$

Ou seja, $\|L_\delta-L_0\|_{W^{k,1}(\mathbb{S}^1)\to W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)}\le C\delta$ e, assim, está estabelecida a hipótese (LR4) de pequenas perturbações.

Resta-nos agora apenas verificar a parte de (LR4) que trata do operador primeira derivada, o que envolve (QR1), e (QR2). Vamos nos concentrar, inicialmente, em (LR4) e (QR1). Isto é, estabeleceremos expansão de Taylor de primeira ordem para a aplicação $\delta \mapsto L_{D_\delta}$. O primeiro passo é definir o operador derivada $R : W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right) \to W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)$, por $R(f) := -(f \cdot S)'$.

Então, temos a seguinte proposição:

Proposição 7. Consideremos um difeomorfismo $D_\delta : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $D_\delta = I_d + \delta S$ de classe C^{k+1} preservando orientação. Vamos considerar o operador de transferência associado $L_{D_\delta} : W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right) \to W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)$. Então,

$$\lim_{\delta \to 0} \left\| \frac{L_{D_\delta} f - f}{\delta} + (f \cdot S)' \right\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} = 0,$$

para cada $f \in W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)$.

Demonstração. Começamos escrevendo para $f \in W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)$,

$$\begin{aligned} L_{D_\delta} f - f - \delta R(f) &= J_\delta \cdot \left(f \circ D_\delta^{-1}\right) - f + \delta (f \cdot S)' \\ &= (J_\delta - 1) \cdot \left(f \circ D_\delta^{-1}\right) + f \circ D_\delta^{-1} - f + \delta (f \cdot S)' \\ &= (J_\delta - 1) \cdot \left(f \circ D_\delta^{-1}\right) + f \circ D_\delta^{-1} - f + \delta f \cdot S' + \delta S \cdot f' \\ &= \left[(J_\delta - 1) \cdot \left(f \circ D_\delta^{-1}\right) + \delta f \cdot S'\right] + \left[f \circ D_\delta^{-1} - f + \delta S \cdot f'\right] \\ &= A(f) + B(f), \end{aligned}$$

onde

$$A(f) := (J_\delta - 1) \cdot \left(f \circ D_\delta^{-1}\right) + \delta f \cdot S'$$

e

$$B(f) := f \circ D_\delta^{-1} - f + \delta S \cdot f'.$$

O resultado estará provado se mostrarmos que $\frac{1}{\delta} \|A(f)\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} \to 0$ e também que $\frac{1}{\delta} \|B(f)\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} \to 0$, quando $\delta \to 0$, para todo $k \geq 1$.

Afirmamos que $A(f) = -\delta\left(L_{D_\delta}\left(f \cdot S'\right) - f \cdot S'\right)$. De fato, vemos que:

$$\begin{aligned} -\delta\left(L_{D_\delta}\left(f \cdot S'\right) - f \cdot S'\right) &= -\delta\left(J_\delta \cdot \left(\left(f \cdot S'\right) \circ D_\delta^{-1}\right) - f \cdot S'\right) \\ &= -\delta\left(J_\delta \cdot \left(f \circ D_\delta^{-1}\right) \cdot \left(S' \circ D_\delta^{-1}\right) - f \cdot S'\right) \\ &= -\delta\left(J_\delta \cdot \left(S' \circ D_\delta^{-1}\right) \cdot \left(f \circ D_\delta^{-1}\right) - f \cdot S'\right) \\ &= -\delta\left(L_{D_\delta} S' \cdot \left(f \circ D_\delta^{-1}\right) - f \cdot S'\right) \\ &= \left(-\delta L_{D_\delta} S'\right) \cdot \left(f \circ D_\delta^{-1}\right) + \delta f \cdot S'. \end{aligned}$$

Agora, notamos que

$$\begin{aligned} J_\delta - 1 &= \frac{1}{1 + \delta S' \circ D_\delta^{-1}} - 1 \\ &= \frac{-\delta S' \circ D_\delta^{-1}}{1 + \delta S' \circ D_\delta^{-1}} \\ &= -\delta \cdot \frac{1}{1 + \delta S' \circ D_\delta^{-1}} \cdot \left(S' \circ D_\delta^{-1}\right) \\ &= -\delta \cdot J_\delta \cdot \left(S' \circ D_\delta^{-1}\right) \\ &= -\delta L_{D_\delta} S'. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} -\delta\left(L_{D_\delta}\left(f \cdot S'\right) - f \cdot S'\right) &= \left(-\delta L_{D_\delta} S'\right) \cdot \left(f \circ D_\delta^{-1}\right) + \delta f \cdot S' \\ &= \left(J_\delta - 1\right) \cdot \left(f \circ D_\delta^{-1}\right) + \delta f \cdot S' \\ &= A(f). \end{aligned}$$

Pela proposição 6, temos a cota

$$\|A(f)\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} \leq C\delta^2 \|f\|_{W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, o que implica $\frac{1}{\delta} \cdot \|A(f)\|_{W^{k-1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} \to 0$ quando $\delta \to 0$.

Para $B(f)$ procedemos por indução em $k \in \mathbb{N}$. Primeiro consideremos, para $f \in W^{1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)$,

$$\frac{1}{\delta}\cdot\left(f\left(D_\delta^{-1}(x)\right)-f(x)+\delta S(x)\cdot f'(x)\right)=\frac{1}{\delta}\cdot\left(\int_x^{D_\delta^{-1}(x)} f'(t)\,dt+\delta S(x)\cdot f'(x)\right)$$
$$=\frac{1}{\delta}\cdot\int_x^{D_\delta^{-1}(x)} f'(t)\,dt+\frac{1}{\delta}\cdot\delta S(x)\cdot f'(x)$$

$$=\frac{1}{\delta}\cdot\int_x^{D_\delta^{-1}(x)} f'(t)\,dt-\frac{D_\delta^{-1}(x)-x}{\delta}\cdot f'(x)$$
$$+\frac{D_\delta^{-1}(x)-x}{\delta}\cdot f'(x)+\frac{1}{\delta}\cdot\delta S(x)\cdot f'(x)$$

$$=\frac{1}{\delta}\cdot\int_x^{D_\delta^{-1}(x)} f'(t)\,dt-\frac{1}{\delta}\cdot\int_x^{D_\delta^{-1}(x)} f'(x)\,dt$$
$$+\frac{1}{\delta}\cdot\left(D_\delta^{-1}(x)-x+\delta S(x)\right)\cdot f'(x)$$

$$=\frac{1}{\delta}\cdot\int_x^{D_\delta^{-1}(x)}\left[f'(t)-f'(x)\right]dt$$
$$+\frac{1}{\delta}\cdot\left(D_\delta^{-1}(x)-x+\delta S(x)\right)\cdot f'(x).$$

Notamos que $\frac{1}{\delta}\cdot\left(D_\delta^{-1}(x)-x+\delta S(x)\right)\cdot f'(x)\to 0$ quando $\delta\to 0$, uniformemente em x, pelo lema 3.

Além disso,

$$\frac{1}{\delta}\cdot\int_x^{D_\delta^{-1}(x)}\left[f'(t)-f'(x)\right]dt=\frac{D_\delta^{-1}(x)-x}{\delta}\cdot\frac{1}{D_\delta^{-1}(x)-x}\cdot\int_x^{D_\delta^{-1}(x)}\left[f'(t)-f'(x)\right]dt.$$

E, $\frac{1}{D_\delta^{-1}(x)-x}\cdot\int_x^{D_\delta^{-1}(x)}\left[f'(t)-f'(x)\right]dt\to 0$, quando $\delta\to 0$, para quase todo $x\in\mathbb{S}^1$, pelo Teorema da Diferenciação de Lebesgue, enquanto que $\frac{D_\delta^{-1}(x)-x}{\delta}\to\left[D_\delta^{-1}\right]'(x)=J_\delta(x)$. Portanto,

$$\frac{1}{\delta}\cdot\int_x^{D_\delta^{-1}(x)}\left[f'(t)-f'(x)\right]dt\overset{\delta\to 0}{\longrightarrow}0.$$

Concluímos então que

$$\frac{1}{\delta}\cdot\left(f\left(D_\delta^{-1}(x)\right)-f(x)+\delta S(x)\cdot f'(x)\right)\overset{\delta\to 0}{\longrightarrow}0,$$

para quase todo $x\in\mathbb{S}^1$. Ou seja, $\frac{1}{\delta}B(f)(x)\overset{\delta\to 0}{\longrightarrow}0$, para quase todo $x\in\mathbb{S}^1$.

Mais ainda, pelo lema 3, para δ suficientemente pequeno,

$$\left|\frac{1}{\delta}\cdot\left(D_{\delta}^{-1}(x)-x+\delta S(x)\right)\right|\leq\frac{1}{2}\|S\|_{C^{0}\left(\mathbb{S}^{1}\right)}.$$

Como

$$\left|\frac{D_{\delta}^{-1}(x)-x}{\delta}\right|-|S(x)|\leq\left|\frac{1}{\delta}\cdot\left(D_{\delta}^{-1}(x)-x+\delta S(x)\right)\right|\leq\frac{1}{2}\|S\|_{C^{0}\left(\mathbb{S}^{1}\right)},$$

então

$$\left|\frac{D_{\delta}^{-1}(x)-x}{\delta}\right|\leq\frac{1}{2}\|S\|_{C^{0}\left(\mathbb{S}^{1}\right)}+|S(x)|\leq\frac{1}{2}\|S\|_{C^{0}\left(\mathbb{S}^{1}\right)}+\|S\|_{C^{0}\left(\mathbb{S}^{1}\right)}=\frac{3}{2}\|S\|_{C^{0}\left(\mathbb{S}^{1}\right)}.$$

E, ainda mais, novamente pelo lema 3, para δ suficientemente pequeno, temos que

$$\left|\frac{D_{\delta}^{-1}(x)-x}{\delta}+S(x)\right|\leq\frac{3}{4},$$

uniformemente em x. Semelhantemente, pelo Teorema da Diferenciação de Lebesgue, para δ suficientemente pequeno e quase todo $x\in\mathbb{S}^{1}$,

$$\left|\frac{1}{D_{\delta}^{-1}(x)-x}\cdot\int_{x}^{D_{\delta}^{-1}(x)}\left[f'(t)-f'(x)\right]dt\right|\leq\frac{1}{2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\delta}\cdot\left(f\left(D_{\delta}^{-1}(x)\right)-f(x)+\delta S(x)\cdot f'(x)\right)\right|&\leq\left|\frac{D_{\delta}^{-1}(x)-x}{\delta}\right|\cdot\left|\frac{1}{D_{\delta}^{-1}(x)-x}\cdot\int_{x}^{D_{\delta}^{-1}(x)}\left[f'(t)-f'(x)\right]dt\right|\\&\quad+\left|\frac{1}{\delta}\cdot\left(D_{\delta}^{-1}(x)-x+\delta S(x)\right)\right|\cdot\left|f'(x)\right|\\&\leq\frac{3}{2}\|S\|_{C^{0}\left(\mathbb{S}^{1}\right)}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\cdot\left|f'(x)\right|\\&=\frac{3}{4}\cdot\left[\|S\|_{C^{0}\left(\mathbb{S}^{1}\right)}+\left|f'(x)\right|\right].\end{aligned}$$

Portanto, a quantidade considerada é limitada em quase todo ponto pela função L^{1}, $\frac{3}{4}\cdot\left[\|S\|_{C^{0}\left(\mathbb{S}^{1}\right)}+\left|f'(x)\right|\right]$, que é independente de δ.

Portanto, o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue se aplica, e temos

$$\frac{1}{\delta}\cdot\int_{\mathbb{S}^{1}}\left|f\circ D_{\delta}^{-1}-f+\delta S\cdot f'\right|dm\overset{\delta\to0}{\longrightarrow}0.$$

De fato, para cada sequência $(\delta_{n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergindo para 0 tomamos $B_{n}:=\frac{1}{\delta_{n}}B(f)$ (trocamos os δ's na expressão de B por δ_{n}'s). Assim, pelo que vimos antes,

$$\lim_{n\to+\infty}B_{n}(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\delta_{n}}B(f)(x)=\lim_{\delta\to0}\frac{1}{\delta}B(f)(x)=0,$$

para quase todo $x \in \mathbb{S}^1$. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que

$$\lim \int_{\mathbb{S}^1} B_n dm = \int_{\mathbb{S}^1} \lim B_n dm = \int_{\mathbb{S}^1} 0 dm = 0.$$

Ou seja,

$$\frac{1}{\delta} \|B(f)\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} \overset{\delta \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Vamos assumir agora que se D_δ é um difeomorfismo de classe C^{k+1}, então $\frac{1}{\delta} \|B(f)\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)} \overset{\delta \to 0}{\longrightarrow} 0$, para $f \in W^{k,1}(\mathbb{S}^1)$.

Se D_δ é de classe C^{k+2}, seja $f \in W^{k+1,1}(\mathbb{S}^1)$. Escrevemos como usual

$$\|B(f)\|_{W^{k,1}(\mathbb{S}^1)} = \|B'(f)\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)} + \|B(f)\|_{L^1(\mathbb{S}^1)},$$

onde

$$\begin{aligned}
B'(f) &= \left(f \circ D_\delta^{-1}\right)' - f' + \left(\delta S \cdot f'\right)' \\
&= \left(f' \circ D_\delta^{-1}\right) \cdot \left[D_\delta^{-1}\right]' - f' - \delta \left[-\left(f' \cdot S\right)\right]' \\
&= \left(f' \circ D_\delta^{-1}\right) \cdot J_\delta - f' - \delta R\left(f'\right) \\
&= L_{D_\delta}\left(f'\right) - f' - \delta R\left(f'\right) \\
&= A\left(f'\right) + B\left(f'\right) \text{ (veja o início da demonstração desta proposição)}
\end{aligned}$$

Portanto, pela hipótese de indução,

$$\frac{1}{\delta} \|B'(f)\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)} \overset{\delta \to 0}{\longrightarrow} 0$$

e a conclusão segue do caso $k = 1$.

Q.E.D.

Pela equação (4.1) isso assegura o restante da hipótese (LR4) que nos faltava e a hipótese (QR1). Resta-nos verificar que o operador de transferência L_{D_δ} tem uma expansão de Taylor de segunda ordem em $\delta = 0$. Nesta perspectiva, precisamos obter informação mais precisa na família de difeomorfismos $(D_\delta)_{\delta \in [0, \overline{\delta}]}$.

Lema 5. Sejam $S \in C^2(\mathbb{S}^1)$ e $D_\delta = I_d + \delta S$ um difeomorfismo de classe C^2. Então,

$$\left\| \frac{D_\delta^{-1} - I_d + \delta S}{\delta^2} - S \cdot S' \right\|_{C^0(\mathbb{S}^1)} \overset{\delta \to 0}{\longrightarrow} 0,$$

que resumimos em

$$D_\delta^{-1} = I_d - \delta S + \delta^2 S \cdot S' + o\left(\delta^2\right).$$

Observação 4. O termo $o\left(\delta^2\right)$ deve ser entendido como uma função de classe C^0 que vai para 0 com δ, uniformemente em x. Apesar de não provarmos aqui, no caso geral $S \in C^{k+2}\left(\mathbb{S}^1\right)$, a expansão de Taylor vale na topologia de $C^k\left(\mathbb{S}^1\right)$, o que significa que o termo $o\left(\delta^2\right)$ deve ser entendido como uma função de classe $C^k\left(\mathbb{S}^1\right)$ que vai para 0 na norma C^k, quando $\delta \to 0$.

Demonstração. A demonstração é semelhante à do lema 3. Seja $x \in \mathbb{S}^1$, e seja $y := D_\delta(x)$. Então, $D_\delta^{-1}(y) = x$ e, assim, temos que (usaremos a expansão de Taylor de segunda ordem para S na quarta igualdade abaixo, já que S é de classe C^2)

$$
\begin{aligned}
\left|D_\delta^{-1}(y) - y + \delta S(y) - \delta^2 S(y)\cdot S'(y)\right| &= \left|x - D_\delta(x) + \delta S(D_\delta(x)) - \delta^2 S(D_\delta(x))\cdot S'(D_\delta(x))\right| \\
&= \left|x - x - \delta S(x) + \delta S(D_\delta(x)) - \delta^2 S(D_\delta(x))\cdot S'(D_\delta(x))\right| \\
&= \left|-\delta S(x) + \delta S(x + \delta\cdot S(x)) - \delta^2 S(D_\delta(x))\cdot S'(D_\delta(x))\right| \\
&= |-\delta S(x) + \\
&+ \delta\left[S(x) + \delta S(x) S'(x) + \frac{1}{2}\delta^2 (S(x))^2 S''(x) + o\left(\delta^2\right)\right] + \\
&- \delta^2 S(D_\delta(x))\cdot S'(D_\delta(x))| \\
&= |\delta^2 S(x) S'(x) + \frac{1}{2}\delta^3 (S(x))^2 S''(x) + \delta o\left(\delta^2\right) + \\
&- \delta^2 S(D_\delta(x))\cdot S'(D_\delta(x))| \\
&= |\delta^2 S(x) S'(x) + \frac{1}{2}\delta^3 (S(x))^2 S''(x) + o\left(\delta^3\right) + \\
&- \delta^2 S(D_\delta(x))\cdot S'(D_\delta(x))| \\
&\leq \left|\delta^2 S(x) S'(x) - \delta^2 S(D_\delta(x))\cdot S'(D_\delta(x))\right| + \\
&+ \left|\frac{1}{2}\delta^3 (S(x))^2 S''(x) + o\left(\delta^3\right)\right|.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{D_\delta^{-1}(y) - y + \delta S(y)}{\delta^2} - S(y)\cdot S'(y)\right| &\leq \left|S(x) S'(x) - S(D_\delta(x))\cdot S'(D_\delta(x))\right| + \\
&+ \left|\frac{1}{2}\delta (S(x))^2 S''(x) + \frac{o\left(\delta^3\right)}{\delta^2}\right|.
\end{aligned}
$$

Lembramos que $D_\delta(x) = x + \delta S(x)$ e, portanto, quando $\delta \to 0$, $D_\delta(x) \to x$. Desta forma, quando $\delta \to 0$ temos

$$S(x) S'(x) - S(D_\delta(x))\cdot S'(D_\delta(x)) \to 0.$$

E como $\frac{1}{2}\delta (S(x))^2 S''(x) + \frac{o\left(\delta^3\right)}{\delta^2} \to 0$, então ficamos com $\left\|\frac{D_\delta^{-1} - I_d + \delta S}{\delta^2} - S\cdot S'\right\|_{C^0\left(\mathbb{S}^1\right)} \to 0.$

Q.E.D.

Introduzimos um operador segunda derivada, $Q : W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right) \to W^{k-2,1}\left(\mathbb{S}^1\right)$, definido por

$$Qf := \left(f \cdot S^2\right)''.$$

Estamos agora em posição de formular o seguinte resultado:

Proposição 8. Sejam $k \geq 2$ e $D_\delta : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ um difeomorfismo de classe C^{k+1}, $D_\delta = I_d + \delta S$, e seja $L_{D_\delta} : W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right) \to W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right)$ seu operador de transferência, e sejam Q, R os operadores derivadas. Temos

$$\left\| \frac{L_{D_\delta} - I_d - \delta R}{\delta^2} - \frac{1}{2} Q \right\|_{W^{k,1}\left(\mathbb{S}^1\right) \to W^{k-2,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} \overset{\delta \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Demonstração. Seja

$$A(f) := L_{D_\delta} f - f - \delta R(f) - \frac{1}{2}\delta^2 Q(f).$$

Assim, realizamos as seguintes contas

$$\begin{aligned}
A(f) &= J_\delta \cdot \left(f \circ D_\delta^{-1}\right) - f + \delta (f \cdot S)' - \frac{1}{2}\delta^2 \left(f \cdot S^2\right)'' \\
&= J_\delta \cdot \left(f \circ D_\delta^{-1}\right) - f \circ D_\delta^{-1} + f \circ D_\delta^{-1} - f + \delta (f \cdot S)' - \frac{1}{2}\delta^2 \left(f \cdot S^2\right)'' \\
&= (J_\delta - 1) \cdot \left(f \circ D_\delta^{-1}\right) + f \circ D_\delta^{-1} - f + \delta \left(f' \cdot S + f \cdot S'\right) - \frac{1}{2}\delta^2 \left(f \cdot S^2\right)'' \\
&= (J_\delta - 1) \cdot \left(f \circ D_\delta^{-1}\right) + f \circ D_\delta^{-1} - f + \delta f' \cdot S + \delta f \cdot S' - \frac{1}{2}\delta^2 \left(f \cdot S^2\right)'' \\
&= \underbrace{(J_\delta - 1) \cdot \left(f \circ D_\delta^{-1}\right) + \delta f \cdot S'}_{(*)} + f \circ D_\delta^{-1} - f + \delta f' \cdot S - \frac{1}{2}\delta^2 \left(f \cdot S^2\right)'' \\
&= (*) + f \circ D_\delta^{-1} - f + \delta f' \cdot S - \frac{1}{2}\delta^2 \left(f \cdot S^2\right)'' \\
&= (*) + f \circ D_\delta^{-1} - f + \delta f' \cdot S - \frac{1}{2}\delta^2 \left(f' \cdot S^2 + 2fSS'\right)' \\
&= (*) + f \circ D_\delta^{-1} - f + \delta f' \cdot S - \frac{1}{2}\delta^2 \left(f'' \cdot S^2 + 2f'SS' + 2f'SS' + 2f\left(S'\right)^2 + 2fSS''\right) \\
&= \underbrace{(*) - \delta^2 \left(f'SS' + f \cdot \left(\left(S'\right)^2 + SS''\right)\right)}_{B(f)} + \underbrace{f \circ D_\delta^{-1} - f + \left(\delta S - \delta^2 SS'\right) \cdot f' - \frac{1}{2}\delta^2 f'' S^2}_{C(f)}.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$A(f) = B(f) + C(f),$$

onde

$$B(f) = (J_\delta - 1) \cdot \left(f \circ D_\delta^{-1}\right) + \delta f \cdot S' - \delta^2 \left(f' S S' + f \cdot \left(\left(S'\right)^2 + S S''\right)\right)$$

e

$$C(f) = f \circ D_\delta^{-1} - f + \left(\delta S - \delta^2 S S'\right) \cdot f' - \frac{1}{2}\delta^2 f'' S^2.$$

Vemos que

$$\begin{aligned}
B(f) &= (J_\delta - 1) \cdot \left(f \circ D_\delta^{-1}\right) + \delta f \cdot S' - \delta^2 \left(f' S S' + f \cdot \left(\left(S'\right)^2 + S S''\right)\right) \\
&= -\delta \left(L_{D_\delta}\left(f S'\right) - f S'\right) - \delta^2 \left(f' S S' + f \cdot \left(\left(S'\right)^2 + S S''\right)\right) \\
&= -\delta \left(L_{D_\delta}\left(f S'\right) - f S'\right) - \delta^2 \left(f' \left(S S'\right) + f \cdot \left(S S'\right)'\right) \\
&= -\delta \left(L_{D_\delta}\left(f S'\right) - f S'\right) - \delta^2 \left(f \cdot \left(S S'\right)\right)' \\
&= -\delta \left(L_{D_\delta}\left(f S'\right) - f S'\right) + \delta^2 R\left(f \cdot S'\right) \\
&= -\delta \left[L_{D_\delta}\left(f S'\right) - f S' - \delta R\left(f \cdot S'\right)\right].
\end{aligned}$$

Levando em conta a proposição 7, obtemos

$$\left\| \frac{B(f)}{\delta^2} \right\|_{W^{k-2,1}\left(\mathbb{S}^1\right)} \xrightarrow{\delta \to 0} 0.$$

Para o termo $C(f)$ procedemos por indução em $k \geq 2$. Para $k = 2$, começamos calculando $C(f)$ em $x \in \mathbb{S}^1$. Usaremos o Teorema do Fundamental do Cálculo (TFC) nas contas a seguir:

$$
\begin{aligned}
[C(f)](x) &= \left(f\circ D_\delta^{-1} - f + \left(\delta S - \delta^2 SS'\right)\cdot f' - \frac{1}{2}\delta^2 f'' S^2\right)(x)\\
&= f\left(D_\delta^{-1}(x)\right) - f(x) + \left(\delta S(x) - \delta^2 S(x) S'(x)\right)\cdot f'(x) - \frac{1}{2}\delta^2 f''(x)(S(x))^2\\
&\overset{TFC}{=} \int_x^{D_\delta^{-1}(x)} f'(t)\,dt + \underbrace{\left(\delta S(x) - \delta^2 S(x) S'(x)\right)\cdot f'(x) - \frac{1}{2}\delta^2 f''(x)(S(x))^2}_{(*)}\\
&= \int_x^{D_\delta^{-1}(x)} f'(t)\,dt - \left(D_\delta^{-1}(x) - x\right)\cdot f'(x) + \left(D_\delta^{-1}(x) - x\right)\cdot f'(x) + (*)\\
&= \int_x^{D_\delta^{-1}(x)} f'(t)\,dt - \int_x^{D_\delta^{-1}(x)} f'(x)\,dt + \left(D_\delta^{-1}(x) - x\right)\cdot f'(x) + (*)\\
&= \underbrace{\int_x^{D_\delta^{-1}(x)} \left(f'(t) - f'(x)\right)dt}_{(*)} + \left(D_\delta^{-1}(x) - x\right)\cdot f'(x) + (*)\\
&= (*) + \left(D_\delta^{-1}(x) - x\right)\cdot f'(x) + \left(\delta S(x) - \delta^2 S(x) S'(x)\right)\cdot f'(x) - \frac{1}{2}\delta^2 f''(x)(S(x))^2\\
&= (*) + \underbrace{\left[D_\delta^{-1}(x) - x + \delta S(x) - \delta^2 S(x) S'(x)\right]\cdot f'(x) - \frac{1}{2}\delta^2 f''(x)(S(x))^2}_{(*)}\\
&= \int_x^{D_\delta^{-1}(x)} \left(f'(t) - f'(x)\right)dt + (*)\\
&\overset{TFC}{=} \int_x^{D_\delta^{-1}(x)} \int_x^t f''(s)\,ds\,dt + (*)\\
&= \int_x^{D_\delta^{-1}(x)} \int_x^t \left(f''(s) - f''(x) + f''(x)\right)ds\,dt + (*)\\
&= \underbrace{\int_x^{D_\delta^{-1}(x)} \int_x^t \left(f''(s) - f''(x)\right)ds\,dt}_{(**)} + \int_x^{D_\delta^{-1}(x)} \int_x^t f''(x)\,ds\,dt + (*)\\
&= (**) + \int_x^{D_\delta^{-1}(x)} \left(f''(x)\cdot t - f''(x)\cdot x\right)dt + (*)\\
&= (**) + \left(\frac{\left[D_\delta^{-1}(x)\right]^2}{2} - \frac{x^2}{2}\right)\cdot f''(x) - \left(D_\delta^{-1}(x) - x\right)\cdot f''(x)\cdot x + (*)\\
&= \underbrace{(**) + \frac{1}{2}\left(\left[D_\delta^{-1}(x)\right]^2 + x^2 - 2D_\delta^{-1}(x)\right)\cdot f''(x)}_{(***)} + (*)\\
&= (***) + \underbrace{\left[D_\delta^{-1}(x) - x + \delta S(x) - \delta^2 S(x) S'(x)\right]}_{(****)}\cdot f'(x) - \frac{1}{2}\delta^2 f''(x)(S(x))^2\\
&= (**) + \frac{1}{2}\left(\left[D_\delta^{-1}(x)\right]^2 + x^2 - 2D_\delta^{-1}(x)\right)\cdot f''(x) + (****)\cdot f'(x) - \frac{1}{2}\delta^2 f''(x)(S(x))^2\\
&= (**) + \frac{1}{2}\left(\left[D_\delta^{-1}(x)\right]^2 + x^2 - 2D_\delta^{-1}(x) - \delta^2(S(x))^2\right)\cdot f''(x) + (****)\cdot f'(x)\\
&= (**) + \frac{1}{2}\left(\left(D_\delta^{-1}(x) - x\right)^2 - \delta^2(S(x))^2\right)\cdot f''(x) + (****)\cdot f'(x).
\end{aligned}
$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}[C(f)](x) = &\int_x^{D_\delta^{-1}(x)} \int_x^t \left(f''(s) - f''(x)\right) ds dt \\ &+ \frac{1}{2}\left(\left(D_\delta^{-1}(x) - x\right)^2 - \delta^2 (S(x))^2\right) \cdot f''(x) \\ &+ \left[D_\delta^{-1}(x) - x + \delta S(x) - \delta^2 S(x) S'(x)\right] \cdot f'(x).\end{aligned}$$

Afirmamos que $\dfrac{\frac{1}{2}\left(\left(D_\delta^{-1}(x) - x\right)^2 - \delta^2 (S(x))^2\right)}{\delta^2} \overset{\delta\to 0}{\longrightarrow} 0$. De fato, pelo lema 3, vale que

$$D_\delta^{-1} = I_d - \delta S + o(\delta).$$

Logo,

$$\left(D_\delta^{-1} - I_d\right)^2 = (-\delta S + o(\delta))^2 = \delta^2 S^2 - 2\delta S o(\delta) + (o(\delta))^2 = \delta^2 S^2 + o\left(\delta^2\right).$$

Portanto,

$$\left(D_\delta^{-1} - I_d\right)^2 - \delta^2 S^2 = o\left(\delta^2\right).$$

Agora, com esse fato e lembrando do Teorema da Diferenciação de Lebesgue, quando $\delta \to 0$, obtemos

$$\frac{1}{\delta^2}\int_x^{D_\delta^{-1}(x)} \int_x^t \left(f''(s) - f''(x)\right) ds dt = \underbrace{\frac{\left(D_\delta^{-1}(x) - x\right)^2}{\delta^2}}_{\overset{\delta\to 0}{\longrightarrow}(S(x))^2} \cdot \underbrace{\frac{1}{\left(D_\delta^{-1}(x) - x\right)^2} \cdot \int_x^{D_\delta^{-1}(x)} \int_x^t \left(f''(s) - f''(x)\right) ds dt}_{\overset{\delta\to 0}{\longrightarrow} 0}.$$

Consequentemente,

$$\frac{1}{\delta^2}\int_x^{D_\delta^{-1}(x)} \int_x^t \left(f''(s) - f''(x)\right) ds dt \overset{\delta\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Semelhantemente, pelo Lema 5,

$$\left[D_\delta^{-1}(x) - x + \delta S(x) - \delta^2 S(x) S'(x)\right] \cdot f'(x) = o\left(\delta^2\right) \cdot f'(x).$$

Em virtude dos lemas 3 e 5, temos

$$\frac{1}{\delta^2}\left|\left[D_\delta^{-1}(x) - x + \delta S(x) - \delta^2 S(x) S'(x)\right] \cdot f'(x)\right| \leq \frac{3}{4} \cdot \left|f'(x)\right|$$

e

$$\frac{1}{\delta^2}\left|\frac{1}{2}\left(\left(D_\delta^{-1}(x) - x\right)^2 - \delta^2 (S(x))^2\right) \cdot f''(x)\right| \leq \frac{3}{4} \cdot \left|f''(x)\right|,$$

uniformemente em $x \in \mathbb{S}^1$ para δ suficientemente pequeno. Finalmente, para δ suficientemente pequeno,

$$\left| \frac{\left(D_\delta^{-1}(x) - x\right)^2}{\delta^2} \cdot \frac{1}{\left(D_\delta^{-1}(x) - x\right)^2} \cdot \int_x^{D_\delta^{-1}(x)} \int_x^t \left(f''(s) - f''(x)\right) ds dt \right| \leq \frac{3}{4} \cdot \left| (S(x))^2 \right|,$$

em quase todo $x \in \mathbb{S}^1$.

Portanto, se δ é pequeno o suficiente, $C(f)$ é limitado em quase todo ponto pela função L^1, $\frac{3}{4}\left(S^2 + |f'| + |f''|\right)$, independente de δ. Então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, $\|C(f)\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} = o\left(\delta^2\right)$.

Assumindo que a propriedade vale para $k \geq 2$, tomamos D_δ um difeomorfismo de classe C^{k+2}, e $f \in W^{k+1,1}\left(\mathbb{S}^1\right)$. Temos

$$\|C(f)\|_{W^{k-1,1}(\mathbb{S}^1)} = \left\|C'(f)\right\|_{W^{k-2,1}(\mathbb{S}^1)} + \|C(f)\|_{L^1(\mathbb{S}^1)},$$

e computando temos

$$C'(f) = L_{D_\delta} f' - f' - \delta R\left(f'\right) - \frac{1}{2}\delta^2 Q\left(f'\right).$$

Então, pela hipótese de indução,

$$\left\|C'(f)\right\|_{W^{k-2,1}(\mathbb{S}^1)} = o\left(\delta^2\right),$$

e a conclusão segue do caso $k = 2$.

Q.E.D.

Lembramos da equação (4.1) e do fato de que R é o operador primeira derivada e comparando tudo isso com (QR2) vemos que a hipótese está estabelecida para o caso de aplicações expansoras no círculo. Portanto, os teoremas 1 e 2 se aplicam e obtemos resposta linear e resposta quadrática para aplicações expansoras no círculo.

5 UMA APLICAÇÃO: PERTURBAÇÃO EXPLÍCITA DO DOUBLING MAP

Um exemplo de sistema para o qual a discussão anterior se aplica é a seguinte perturbação do doubling map $(T_\delta)_{\delta\in[0,\overline{\delta}]}$ definida por

$$T_\delta(x) := 2x + \delta sen(4\pi x)(mod 1),$$

que cai sob o "setup"descrito no capítulo anterior (não faz parte dos nossos objetivos verificar esse fato, portanto, assumiremos diversos resultados acerca do doubling map sem demonstração) com $T_0(x) := 2x(mod 1)$ e $D_\delta(x) := x + \delta sen(2\pi x)(mod 1)$, e os espaços $B_{ss} = W^{4,1}(\mathbb{S}^1) \subseteq B_s = W^{3,1}(\mathbb{S}^1) \subseteq B_w = W^{2,1}(\mathbb{S}^1) \subseteq B_{ww} = W^{1,1}(\mathbb{S}^1)$.

De fato, o sistema satisfaz a desigualdade de Lasota-Yorke uniforme (para δ_0 pequeno o suficiente) pelo lema 2 e a proposição 4; em particular, o teorema 3 se aplica. Mais ainda, este exemplo satisfaz os requisitos de regularidade do capítulo 3, de modo que as proposições 6, 7 e 8 se aplicam.

Isso implica que as hipóteses dos teoremas 1 e 2 são satisfeitas; então, para essa família de sistemas, a resposta linear vale se considerarmos a densidade invariante h_δ como uma função em $W^{2,1}(\mathbb{S}^1)$, e a resposta quadrática vale se considerarmos a densidade invariante h_δ como uma função em $W^{1,1}(\mathbb{S}^1)$.

Este exemplo é certamente bem conhecido e pode ser obtido por outros métodos. No entanto, o bom comportamento deste exemplo é a possibilidade de computar tudo: aqui, temos

$$\begin{aligned} L_0 f(x) &= \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{1+x}{2}\right)\right], \\ \dot{L}h_0(x) &= R[L_0 h_0](x) = -2\pi cos(2\pi x), \\ \ddot{L}h_0(x) &= Q[L_0 h_0](x) = 8\pi^2 cos(4\pi x), \end{aligned}$$

com $h_0 = 1$ a densidade invariante do sistema não perturbado. Note que para $f(x) = cos(2\pi x)$, temos

$$L_0 f(x) = \frac{1}{2}[cos(\pi x) + cos(\pi x + \pi)] = 0.$$

Portanto, aplicando o teorema 1 temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\delta}h_\delta(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} L_0^n \dot{L} h_0 \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} L_0^n \left(-2\pi cos(2\pi x)\right) \\
&= -2\pi cos(2\pi x) - 2\pi \sum_{n=1}^{+\infty} L_0^n cos(2\pi x) \\
&= -2\pi cos(2\pi x) + 0 \\
&= -2\pi cos(2\pi x).
\end{aligned}$$

Semelhantemente, podemos obter o termo quadrático com o teorema 2,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{d\delta^2}h_\delta(x)\,|_{\delta=0} &= \left(R(1,L_0)\dot{L}\right)^2 h_0 + R(1,L_0)\,Qh_0 \\
&= Qh_0 + L_0 Qh_0 \\
&= 8\pi^2\left(cos(4\pi x) + cos(2\pi x)\right)
\end{aligned}$$

de modo que podemos obter a seguinte expansão de Taylor de segunda ordem para h_δ:

$$h_\delta(x) = 1 - 2\pi\delta cos(2\pi x) + 4\pi^2\delta^2\left(cos(4\pi x) + cos(2\pi x)\right) + o\left(\delta^2\right).$$

6 CONCLUSÃO

Concluímos aqui nosso trabalho notando que sob determinadas condições - hipóteses (LR1), (LR2), (LR3) e (LR4) - sistemas dinâmicos apresentam uma resposta linear e que, se em adição a tais condições, forem observadas também as condições (QR1), (QR2) e (QR3) o sistema apresenta também uma resposta quadrática nas suas medidas estacionárias.

Ainda mais, vimos também que uma vasta gama de sistemas dinâmicos determinísticos (e a bem da verdade, o artigo original [1] nos mostra que alguns sistemas dinâmicos aleatórios e, também, sistemas determinísticos que apresentem algum tipo de ruído ou regularização também) manifestam as condições acima e, portanto, exibem respostas linear e/ou quadrática em suas medidas invariantes.

Concluímos, por fim, que sistemas dinâmicos determinísticos de aplicações expansoras agindo sobre o círculo unitário são exemplos de sistemas que satisfazem as condições dos teoremas, quando consideramos o seu operador de transferência agindo sobre espaços de Sobolev apropriados e, portanto, respondem de maneira linear, e até mesmo de maneira quadrática, a pequenas perturbações.

Uma pergunta interessante a se fazer é: o que acontece no caso em que a transformação T não é expansora, porém ao ser perturbada a família $\{T_\delta\}_{\delta\in\left(0,\overline{\delta}\right]}$ seja formada inteiramente por transformações expansoras? Um exemplo de tal situação é o cenário de Manneville-Pomeau. Talvez a abordagem para tal caso tenha de ser completamente diferente.

ÍNDICE

REFERÊNCIAS

[1] GALATOLO, S.; SEDRO, J. *Quadratic response of random and deterministic dynamical systems*. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, v. 30, n. 2, 2020.

[2] KREYSZIG, E. *Introductory functional analysis with applications*. 1 Ed. John Wiley & Sons. Inc., 1978.

[3] HENNION, H. *Sur un théoreme spectral et son application aux noyaux lipchitziens*. Proceedings of the American Mathematical Society, v. 118, n. 2, p. 627-634, 1993.

[4] AKSOY, A. G. *The radius of the essential spectrum*. Journal of mathematical analysis and applications, v. 128, n. 1, p. 101-107, 1987.

[5] BOYARSKY, A.; GORA, P. *Laws of chaos: invariant measures and dynamical systems in one dimension*. Springer Science & Business Media, 2012.

[6] GALATOLO, S. *Statistical properties of dynamics. Introduction to the functional analytic approach*. arXiv preprint arXiv:1510.02615, 2015.

[7] EVANS, L. C. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 2022.

[8] TAYLOR, M. E. *Partial Differential Equations I - Basic Theory*. 2nd ed. Springer, 1997.

[9] BARTLE, R. G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. New York: Wiley Classics Library, 1995.

[10] VITALI, G., *Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta*. Bologna, Tip. Gamberini e Parmeggiani, 1905.

[11] MUNKRES, J., *Topology*. 2nd ed. Pearson, 2017.

[12] LIMA, E. L., *Espaços Métricos*. 6 ed. IMPA, 2020.

[13] NUSSBAUM, R. D. *The radius of the essential spectrum*. 1970.