

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS-UFAL
CAMPUS A.C. SIMÕES
FÍSICA

RONALD SANTOS CAVALCANTE

TRANSFERÊNCIA DE ESTADOS QUÂNTICOS EM REDES DESORDENADAS

MACEIÓ - AL
2024

RONALD SANTOS CAVALCANTE

TRANSFERÊNCIA DE ESTADOS QUÂNTICOS EM REDES DESORDENADAS

Trabalho de conclusão de curso apresentado como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Física da Universidade Federal de Alagoas - UFAL, Campus A.C. Simões.

Orientador: Prof. Dr. Guilherme Martins Alves de Almeida

Maceió - AL
2024

Catálogo na Fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

C376t Cavalcante, Ronald Santos.
Transferência de estados quânticos em redes desordenadas / Ronald Santos
Cavalcante. – 2024.
54 f. : il.

Orientador: Guilherme Martins Alves de Almeida.
Monografia (Trabalho de conclusão de curso em física : bacharelado) –
Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Educação Física e Esporte.
Maceió, 2024.

Bibliografia: f. 39-43.
Apêndices: f. 45-48.
Anexos: f. 50-54.

1. Computação quântica. 2. Informação quântica. 2. Transferência de
estados quânticos. 3. Cadeias de Spin - Desordem. 4. Força e energia -
Correlação. I. Título.

CDU: 535.14

Dedico,
Aos meus pais, Ronaldo Ramos Cavalcante e
Maria Aparecida dos Santos Cavalcante.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar minha sincera gratidão a todas as pessoas que contribuíram de alguma forma com meu desenvolvimento pessoal e acadêmico que culmina na realização desse trabalho de conclusão de curso.

Primeiramente, agradeço ao meu orientador Dr. Guilherme Martins Alves de Almeida por sua orientação valiosa e apoio ao longo deste processo. Sua expertise e feedback foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho, além dos momentos de descontração que tornaram todo esse processo muito mais leve e agradável.

Agradeço também aos professores que dedicaram seu tempo para compartilhar conhecimentos durante minha formação acadêmica. Suas aulas e insights enriqueceram meu aprendizado e influenciaram diretamente o conteúdo deste trabalho.

À minha namorada Susane da Rocha Mendonça pelo apoio emocional, expressei minha mais profunda gratidão por todo o carinho e companheirismo. Sempre foi meu suporte nos momentos mais difíceis e me fez seguir em frente perante os desafios.

À minha família e amigos, agradeço por todo apoio emocional constante e incentivo durante este desafio acadêmico. Suas palavras de encorajamento foram um pilar fundamental para superar os obstáculos.

Agradeço aos colegas de curso que compartilharam experiências e colaboraram em discussões construtivas. A troca de ideias e o trabalho em equipe foram aspectos enriquecedores desta jornada acadêmica.

Por fim, dedico este trabalho aos meus pais Ronaldo Ramos Cavalcante e Maria Aparecida dos Santos Cavalcante, cujo amor, sacrifícios e crença em meu potencial tornaram possível a realização deste projeto, sem vocês nada disso seria possível.

A todos que, de alguma forma, contribuíram para este trabalho, o meu muito obrigado. Esta foi apenas a primeira etapa da minha jornada acadêmica.

Ronald Santos Cavalcante

"For a successful technology, reality must take precedence over public relations, for Nature cannot be fooled."

Richard P. Feynman

RESUMO

Vivemos em uma era de rápidos avanços tecnológicos, onde a incessante busca por inovações nos permite vislumbrar maneiras de aprimorar a capacidade de processar e armazenar informações. Diante da limitação dos computadores clássicos para resolver problemas complexos, surge a necessidade dos computadores quânticos, mais eficientes e viáveis para cálculos mais complexos. Este trabalho adota a abordagem de usar redes de spin como canais quânticos, uma proposta relevante na computação quântica. Inicialmente, analisamos redes de spins cristalinas, observando que, à medida que o tamanho da rede aumenta, a probabilidade e a fidelidade diminuem, tornando esse sistema inviável para a transmissão quântica em redes curtas. Introduzimos um protocolo com hopping $g < J$ nas bordas da rede, analisando os regimes de $g \ll J$ e $g \lesssim J$. Para $g \ll J$, o sistema se comporta como um sistema de dois níveis devido a subespaços gerados entre o emissor e o receptor, enquanto para $g \lesssim J$, observamos um comportamento balístico semelhante ao movimento de um projétil, onde a informação enviada percorre toda a rede até chegar ao receptor. A eficiência desses regimes na "velocidade de transmissão de informação" também foi avaliada. Analisamos também o comportamento da rede com desordem local correlacionada, observando efeitos interessantes. A QST é de péssima qualidade para desordem aleatória ($\alpha = 0$), melhora conforme aumentamos a correlação envolvida no sistema. Concluímos que a correlação na desordem torna o sistema mais robusto, resultando em melhor qualidade da QST. Permitir essa indução de desordem pode ser mais interessante e viável do que projetar cadeias altamente específicas, tornando mais complexa a implementação em computadores quânticos. Este trabalho busca incentivar a procura por protocolos de comunicação quântica em cadeias de spins desordenadas, promovendo o avanço dessa tecnologia inovadora.

Palavras-Chave: Computação quântica - Informação quântica - Transferência de estados quânticos - Cadeias de Spin - Desordem - Correlação

ABSTRACT

We live in an era of rapid technological advances, where the relentless pursuit of innovations allows us to envision ways to enhance the capacity for processing and storing information. Faced with the limitations of current classical computers in solving complex problems, the need for quantum computers arises, offering greater efficiency and viability for more intricate calculations. This work adopts the approach of using spin networks as quantum channels, a relevant proposal in quantum computing. Initially, we analyze crystalline spin networks, observing that as the network size increases, both probability and fidelity decrease, rendering the system impractical for quantum transmission in short-range networks. We introduce a protocol with hopping $g < J$ at the network edges, analyzing the regimes of $g \ll J$ and $g \lesssim J$. For $g \ll J$, the system behaves like a two-level system due to subspaces generated between the emitter and the receiver. For $g \lesssim J$, we observe a ballistic behavior similar to projectile motion, where the transmitted information travels across the entire network to reach the receiver. The efficiency of these regimes in the "information transmission speed" was also assessed. We also analyze the behavior of the network with correlated local disorder, observing interesting effects. Quantum State Transfer (QST) is of poor quality for random disorder ($\alpha = 0$) but improves as we increase the correlation involved in the system. We conclude that correlation in disorder makes the system more robust, resulting in better QST quality. Allowing the induction of disorder may be more interesting and feasible than designing highly specific chains, making implementation in quantum computers more complex. This work seeks to encourage the search for quantum communication protocols in disordered spin chains, promoting the advancement of this innovative technology.

Keywords: Quantum Computing - Quantum Information - Quantum State Transfer - Spin Chains - Disorder - Correlation

LISTA DE FIGURAS

1	Representação de um qubit através da esfera de Bloch	16
2	A parte (a) da figura mostra nosso protocolo de comunicação quântica. Inicialmente, a cadeia de spins está em seu estado fundamental em um campo magnético externo. Alice e Bob estão em extremos opostos da cadeia. Alice coloca o estado quântico que deseja comunicar no spin mais próximo dela. Após algum tempo, Bob recebe esse estado com alguma fidelidade no spin mais próximo dele. A parte (b) mostra um gráfico arbitrário de spins através do qual as comunicações quânticas podem ser realizadas usando nosso protocolo. A comunicação ocorre do spin emissor s (do inglês sender) para o spin receptor r (do inglês receiver).	19
3	Representação gráfica do modelo cristalino com distribuição de hopping uniforme, onde J representa a energia de troca (hopping), E representa o emissor e R o receptor.	23
4	Representação gráfica do modelo cristalino com distribuição de hopping quase-uniforme, onde J representa o hopping do canal, g representa o hopping entre os comunicantes e o canal, E representa o emissor e R o receptor.	25
5	Representação gráfica do modelo desordenado com distribuição de hopping quase-uniforme, onde J representa o hopping do canal, g representa o hopping entre os comunicantes e o canal, E representa o emissor, R o receptor e ω_i onde $i = 1, 2, 3, \dots, N$ representam os termos de desordem local (além da energia ϵ fundamental).	28
6	Probabilidades P_n dos comunicantes (emissor e receptor), ou seja, $P_{n=1}$ e $P_{n=N}$ em função do tempo (em ordem de J^{-1}) para cadeias de 2, 3, 4, 5, 30 e 80 níveis.	29
7	Gráfico da probabilidade P_n máxima representado pela curva com sua respectiva fidelidade \mathcal{F} representado pelas barras conforme o tamanho da cadeia N aumenta entre $N = 2$ até $N = 80$ em um espaço de tempo $[0, 8000/J]$	30
8	Gráfico da probabilidade P_n máxima representado pela curva para uma cadeia de tamanho $N = 80$ conforme o hopping dos comunicantes g varia em um espaço de tempo $[0, 16000/J]$	31
9	Probabilidades P_n dos comunicantes (emissor e receptor) e do canal (restante da cadeia), ou seja, $P_{n=1}$, $P_{n=N}$ e $P_{n=canal}$ em função do tempo (em ordem de J^{-1}) para cadeias de tamanho (a) $N = 79$ e (b) $N = 80$ seguindo o protocolo proposto com $g = 0.01$, $J = 1$	32
10	Gráficos 3D da probabilidade de cada sítio da cadeia de tamanho $N = 80$ evoluindo no tempo para valores de (a) $g = 1.0$ e (b) $g = 0.51$ respectivamente.	33
11	Gráficos do tipo "density plot" da probabilidade de cada sítio da cadeia de tamanho $N = 80$ evoluindo no tempo para valores de (a) $g = 1.0$ e (b) $g = 0.51$ respectivamente.	33
12	Gráficos da desordem ω_n em um intervalo $n \in [0, 2000]$ para diferentes valores de α (grau de correlação). (a) $\alpha = 0.0$ (Completamente aleatório), (b) $\alpha = 1.0$ (Correlação fraca), (c) $\alpha = 2.0$ (Correlação moderada) e (d) $\alpha = 4.0$ (Correlação muito forte).	34

13	Gráficos da probabilidade máxima média $\langle P_{N=80} \rangle$ medida pelo receptor ($N=80$) conforme g varia com um espaço amostral de 100 unidades em um espaço de tempo $t \in [0, 8000]$ para diferentes parâmetros de correlação (a) $\alpha = 0.0$ (Completamente aleatório), (b) $\alpha = 0.0$ (Correlação moderada), (c) $\alpha = 0.0$ (Correlação muito forte).	35
14	Gráfico do tempo de transmissão médio $\langle \tau \rangle$ (em unidades de J^{-1}) conforme g varia em um espaço amostral de 100 unidades em um intervalo de tempo $t \in [0, 8000]$ para o caso de $\alpha = 4.0$ (Grau de correlação muito forte).	36
15	Sistema de 2 níveis: Comparativo da probabilidade de se medir o estado $ 0\rangle$ entre a expressão encontrada analiticamente com a gerada à partir dos métodos computacionais ($\hbar = 1$).	48

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

QST	Transferência de estado quântico (<i>Quantum State Transfer</i>)
QI	Informação quântica (<i>Quantum Information</i>)
MQ	Mecânica quântica

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathcal{H}	Espaço de Hilbert
J	Hopping do canal
g	Hopping dos comunicantes
ϵ	Energia local
ω	Termo de desordem local

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	Informação quântica	15
1.2	Emaranhamento quântico	17
1.3	Comunicação quântica	17
1.3.1	Transferência de estados quânticos	19
1.3.2	Redes quânticas	20
1.4	Organização do trabalho	21
2	METODOLOGIA	22
2.1	Modelo de Heisenberg	22
2.2	Cadeias de spin como canais quânticos	23
2.3	Protocolo de QST com controle de hopping das bordas da cadeia	25
2.4	Localização de Anderson e efeitos da desordem	26
2.4.1	Modelo de Anderson	26
2.4.2	Modelo de Anderson correlacionado	27
2.5	Protocolo de QST na presença de desordem localizada	27
3	RESULTADOS E DISCUSSÕES	29
3.1	Cadeia cristalina de spins	29
3.2	Cadeia cristalina de spins com controle de hopping das bordas	30
3.2.1	Regime de hopping $g \ll J$	31
3.2.2	Regime de hopping $g \lesssim J$	32
3.3	Cadeia desordenada de spins com controle de hopping das bordas	34
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	37
	REFERÊNCIAS	39
	APÊNDICES	44
A	Postulados da mecânica quântica	45
B	Demonstração sistema de 2 níveis	46
	ANEXOS	49
1	Códigos desenvolvidos	50

1 INTRODUÇÃO

Vivenciamos uma era profundamente marcada pela rápida evolução tecnológica, na qual a sociedade se encontra imersa em uma teia complexa de inovações. Nesse contexto dinâmico, os estudos em computação quântica emergem como essenciais para impulsionar e dar forma ao surgimento de novas tecnologias. Enquanto a computação clássica atingiu seus limites de eficiência em determinados problemas complexos, a computação quântica surge como uma promissora fronteira, oferecendo a promessa de realizar cálculos exponencialmente mais rápidos do que seus equivalentes clássicos. Este cenário de transformação digital nos leva a questionar não apenas a natureza da computação, mas também a maneira como concebemos e processamos informações. No epicentro desse movimento está a informação quântica, cujos princípios fundamentais desafiam as fronteiras convencionais da teoria da informação [1].

Nesse contexto, o presente trabalho se propõe a explorar a transferência de estados quânticos em redes desordenadas, buscando não apenas avançar em nosso entendimento da física quântica, mas também catalisar inovações que moldarão o futuro da tecnologia e da sociedade.

Dado que o surgimento da computação quântica não originou-se de uma única ponderação, assim como ocorre em diversos campos da ciência, é possível identificar como ponto de partida para essa área o trabalho seminal de Richard P. Feynman [2], datado de 1982. Nessa obra, Feynman¹ sugeriu que a simulação eficiente de fenômenos quânticos seria mais viável por meio da utilização de outros sistemas quânticos, uma vez que, sob a perspectiva clássica, a quantidade de parâmetros necessários para tal procedimento cresce exponencialmente com a dimensão do sistema em questão.

Desde então, a ideia de um computador quântico, ou seja, a capacidade de realizar o processamento de informações conforme os princípios da mecânica quântica, tem sido um dos temas mais investigados ao longo das últimas décadas [3].

Do ponto de vista tecnológico, a forma atual pela qual processamos informações inevitavelmente necessitará de uma reformulação. A computação, como processo físico, requer uma variedade de componentes eletrônicos, como capacitores, transistores e diodos, para realizar um conjunto específico de operações lógicas. Com a busca por computadores mais rápidos e eficientes, a demanda por um número crescente de transistores tem sido constante. Em resposta a essa necessidade, os dispositivos eletrônicos têm diminuído de tamanho para manter toda a estrutura em uma escala razoável. Este fenômeno, muitas vezes referenciado como a Lei de Moore [4], destaca a tendência de que o número de transistores em um chip dobrará aproximadamente a cada dois anos. No entanto, essa busca incessante por miniaturização inevitavelmente levará os circuitos a se comportarem de acordo com as leis da mecânica quântica, impondo a necessidade de uma reestruturação na abordagem dos processos lógicos.

Um avanço significativo ocorreu com as contribuições de Deutsch em [5], onde ele generalizou a máquina de Turing, introduzindo a máquina de Turing quântica e submetendo a tese de Church-Turing a uma análise rigorosa. Esta tese afirmava que qualquer algoritmo computável poderia ser simulado por uma máquina de Turing. Deutsch expandiu essa ideia, resultando na tese de Church-Turing-Deutsch, que mantém a mesma premissa, mas agora em relação à máquina de Turing quântica. De fato, a máquina de Turing quântica exemplifica o conceito de um computador quântico universal, capaz de simular eficazmente qualquer outro computador quântico ou clássico [3].

Uma das principais vantagens da computação quântica é a capacidade de realizar cál-

¹Feynman foi de suma importância para o surgimento da área da computação quântica devido suas incontáveis contribuições para a física.

culos em paralelo, graças à propriedade de superposição quântica. No entanto, a dissipação de energia é um desafio significativo na construção de computadores quânticos, e é aqui que as ideias de Rolf Landauer sobre a natureza física da informação se tornam relevantes. Em seu artigo "*The physical nature of information*" [6], Landauer argumenta que a informação está intrinsecamente ligada às leis da física e que a dissipação de energia é uma consequência inevitável do processamento de informações. Essa ideia tem implicações importantes para a computação quântica, onde a dissipação de energia pode levar a erros² e degradação do sistema. Portanto, entender a natureza física da informação é fundamental para o desenvolvimento de computadores quânticos mais eficientes e confiáveis.

Um computador quântico universal [5], ou seja, com a capacidade de executar qualquer algoritmo quântico, ainda é uma proposta bastante idealizada. No entanto, já estão sendo implementados protocolos computacionais projetados especificamente para replicar as propriedades de sistemas quânticos específicos (uma revisão abrangente sobre o tema está disponível em [7]), tornando a simulação de sistemas altamente complexos mais promissora em um futuro próximo. Após sua implementação, os computadores quânticos serão capazes de executar protocolos computacionais de maneira muito mais eficiente do que os computadores "clássicos". Isso inclui tarefas como a busca em um banco de dados [8], a fatoração de números primos [9] em um tempo acessível e operações de criptografia [10, 11] entre outras aplicações.

Além disso, existem protocolos que não têm um equivalente clássico, como é o caso do teleporte de informação quântica [12]. Diversas opções são consideradas para a implementação física de um computador quântico, incluindo circuitos supercondutores [13–17], armadilhas iônicas [18], redes ópticas [19] e diversas outras alternativas [7, 20].

Esse trabalho em particular está inserido no contexto do processamento de informação quântica baseado em *cadeias de spin como canais quânticos* [21–27], que têm-se mostrado bastante relevante no estudo da computação e informação quântica.

1.1 Informação quântica

A principal atração da computação quântica está intimamente ligada às características fundamentais da mecânica quântica, como por exemplo os fenômenos referentes à *superposição* e ao *emaranhamento* [3, 28].

Da mesma forma que na computação clássica, onde segue a teoria da informação de Shannon [1], é necessário estabelecer a unidade fundamental de informação. A unidade básica de informação para os computadores clássicos são os *Bits*³ onde os mesmos possuem dois estados possíveis "0" ou "1".

Assim, é necessário estabelecer a unidade básica de informação quântica, conhecida como qubit (do inglês "*quantum bit*"), a qual é uma superposição, ou seja, uma combinação linear dos estados da base computacional clássica "0" e "1", desta forma, utilizando a notação de Dirac podemos então representar o estado do nosso qubit da seguinte forma:

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \quad (1)$$

onde α e β são números complexos que satisfazem a normalização $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, tal que $|\alpha|^2$ e $|\beta|^2$ são respectivamente a probabilidade de se medir os estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$.

²Erros são frequentes em computadores quânticos atuais devido à complexidade de manter o estado quântico ativo por longos períodos. Isso ocorre devido a fatores como aquecimento ou interferências externas, levando ao colapso do estado quântico.

³Vale destacar que os computadores clássicos, enquanto processos físicos, operam com bits, seguindo os princípios da álgebra booleana, onde a representação é baseada na presença ou ausência de corrente elétrica.

Para prosseguirmos de maneira formal e concisa, é categórico que delimitemos o espaço de nosso interesse, isto é, o espaço de Hilbert [3, 28].

Definição de Espaço de Hilbert

Um espaço de Hilbert é um espaço vetorial \mathcal{H} sobre os números reais ou complexos, equipado com um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ que é um espaço métrico completo em relação à métrica induzida pelo produto interno.

Podemos então definir o qubit como um vetor bidimensional definido no *espaço de Hilbert* onde é escrito em termos de uma base ortonormal $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. Dessa maneira, a informação do estado quântico da Equação 1 está contida nos coeficientes α e β (amplitudes de probabilidade [29, 30]).

Uma representação geométrica que auxilia na compreensão dos qubits é a seguinte: Dada a relação $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, podemos reformular a Equação 1 da seguinte maneira:

$$|\psi\rangle = e^{i\gamma} \left(\cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \right) \quad (2)$$

onde θ , φ e γ são números reais. Podemos desconsiderar o fator $e^{i\gamma}$ à frente, uma vez que ele não apresenta *efeitos observáveis* devido à sua natureza de *fase global* [29–31], permitindo-nos escrever efetivamente:

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \quad (3)$$

os números θ e φ definem um ponto na esfera unitária tridimensional, como mostrado na Figura 1.

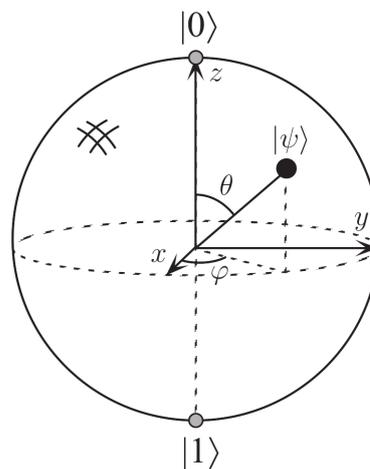


Figura 1: Representação de um qubit através da esfera de Bloch

Fonte: M. A. Nielsen e I. L. Chuang [3], 2000.

Essa esfera é frequentemente referida como *esfera de Bloch*, proporcionando uma ferramenta valiosa para visualizar o estado de um único *qubit*.

Sua característica fundamental reside na coexistência simultânea dos níveis $|0\rangle$ e $|1\rangle$, diferindo da física clássica e do nosso senso comum. Embora uma medida resulte em apenas uma das opções, a computação quântica destaca-se pela capacidade dos estados estarem em superposição, proporcionando uma base natural para o processamento em paralelo [5].

Se estivermos diante de um sistema com N qubits, $|\psi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_2 \otimes |\psi\rangle_3 \otimes \cdots \otimes |\psi\rangle_N$, temos a possibilidade de gerar uma superposição de 2^N estados, o que é muito interessante diante dos bits clássicos. Assim, é perceptível que para um número razoável de *qubits* já torna-se uma tarefa impraticável para armazenar e manipular todos esses estados em um *computador clássico*.

Podemos implementar um qubit fisicamente por intermédio de qualquer sistema que seja composto por dois níveis, ou um par de estados que possam ser desacoplados do restante do espectro. Entretanto, é crucial considerar a viabilidade experimental do sistema, especialmente no que diz respeito ao controle e proteção do qubit [6]. Em outras palavras, um qubit eficiente deve ser suficientemente isolado para evitar processos de decoerência [32], preservando assim suas propriedades quânticas⁴.

Qubits já são experimentalmente representados através de diversas abordagens, como átomos ultrafinos [19], polarização e localização de fótons [33], spin eletrônico e nuclear [34], além de circuitos supercondutores (*Josephson effect*) [13], entre outras técnicas [20].

1.2 Emaranhamento quântico

O emaranhamento quântico [35] refere-se ao fenômeno em que dois ou mais sistemas quânticos, como partículas, demonstram correlações que são tanto não-locais quanto não-clássicas, independentemente da distância entre eles. Isso implica que não é possível descrever completamente um estado emaranhado focando apenas em um de seus componentes; é essencial considerar todos os elementos do sistema. Para exemplificar, pense no estado de dois qubits, descrito pela Equação 4:

$$|\Psi\rangle = |\psi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_2 = \frac{1}{2} (|00\rangle_{12} + |01\rangle_{12} + |10\rangle_{12} + |11\rangle_{12}) \quad (4)$$

O estado descrito pela Equação 4 é chamado de *estado produto*, pois cada qubit pode ser representado individualmente através de sua própria função de onda $|\psi\rangle_i$. Por outro lado, existem estados onde essa individualidade não é possível, ou seja, estados emaranhados. Agora, vamos examinar os seguintes estados:

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle_{12} + |11\rangle_{12}), \quad (5)$$

$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle_{12} - |11\rangle_{12}), \quad (6)$$

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle_{12} + |10\rangle_{12}), \quad (7)$$

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle_{12} - |10\rangle_{12}) \quad (8)$$

Estes estados formam um conjunto que representam o emaranhamento máximo entre dois qubits e são conhecidos como *estados de Bell* [3].

1.3 Comunicação quântica

No contexto em que estamos inseridos, é de suma importância estabelecermos protocolos de comunicação quântica eficientes. Estes protocolos são o que vão nos guiar para a

⁴Este é um dos grandes desafios da computação quântica, como por exemplo os computadores que utilizam o princípio dos supercondutores, eles devem operar em temperaturas próximas a $0K$ e qualquer variação na temperatura faz com que o estado do qubit colapse e volte a se comportar como um bit clássico.

criação de computadores quânticos mais eficientes e funcionais, portanto para uma abordagem inicial, suponhamos que Alice (subsistema A) e Bob (subsistema B) dividam um estado emaranhado $|\Phi^+\rangle = |0\rangle_A |0\rangle_B + |1\rangle_A |1\rangle_B$, o estado é considerado emaranhado porque não é divisível, ou seja, não é possível expressar $|\Phi^+\rangle$ como o produto direto das propriedades das partículas individuais que o compõem (essa característica também se aplica a qualquer um dos estados de Bell). Portanto, de acordo com essa visão, nem uma nem outra componente detém informações completas sobre o sistema como um todo. A totalidade das informações reside nas correlações entre as duas partículas.

Estados emaranhados desempenham um papel crucial no processamento de informação quântica [35]. Uma de suas aplicações mais proeminentes é o teleporte quântico [12]. Neste procedimento, Alice pretende enviar um estado quântico específico para Bob. Para isso, eles utilizam um par de partículas emaranhadas e um canal de comunicação clássico. Simplificando, o estado quântico é transferido da seguinte maneira: Alice efetua uma medição nos dois qubits sob sua posse (o qubit a ser transferido e a partícula emaranhada), resultando em um dos quatro estados de Bell representado pelas Equações 5, 6, 7 e 8. Em seguida, Alice transmite o resultado para Bob de forma clássica, permitindo que ele realize operações locais para recuperar o estado originalmente preparado por Alice. A viabilidade do teleporte quântico já foi confirmada experimentalmente em várias plataformas, incluindo sistemas ópticos [36, 37] e atômicos [38, 39].

Embora a computação quântica esteja em um estágio de rápido avanço, ainda está em sua fase inicial em relação à realização prática de um computador quântico para uma variedade de aplicações. Em 2000, David DiVincenzo identificou cinco requisitos essenciais para a construção de um computador quântico eficaz [40]:

- I O sistema físico deve ser escalável e garantir qubits bem definidos;
- II Os qubits devem ser inicializados de maneira precisa;
- III O tempo de decoerência dos qubits deve ser significativamente maior do que o tempo de operação das portas lógicas;
- IV Deve existir um conjunto completo de portas quânticas universais disponíveis;
- V Os resultados obtidos (qubits) devem ser medidos com alta precisão.

Um dos maiores desafios para a implementação de um computador quântico fisicamente está diretamente relacionado ao terceiro critério⁵ descrito por DiVincenzo. Visto que com a finalidade de processarmos informação quântica devemos, obviamente manter as características e propriedades quânticas do sistema. No entanto esta não é uma tarefa simples, sistemas físicos reais sofrem interações com o ambiente a todo instante, que por sua vez representam inúmeros graus de liberdade.

Como já discutimos, existem diversas propostas e métodos para a implementação de um computador quântico e cada uma delas tem seu pontos positivos e negativos, como por exemplo os computadores que utilizam dos princípios dos supercondutores (os mais utilizados atualmente), enfrentam problemas principalmente relacionados ao terceiro critério, já os computadores quânticos que utilizam dos fótons por exemplo, enfrentam principalmente problemas relacionados ao primeiro critério visto que é muito difícil a escalabilidade desses sistemas.

⁵Atualmente, os computadores quânticos operam por poucos minutos visto que qualquer perturbação externa como variações de temperatura, luminosidade ou qualquer tipo de perturbação fazem com que o estado quântico dos qubits colapse.

Uma vez que não possuímos controle total sobre todas as variáveis externas ao sistema em análise, as interações causam uma deterioração irreversível da informação quântica, levando à decoerência [3, 32, 41]. Isso engloba processos como a dissipação de um fóton em uma cavidade ou guia de onda, a emissão espontânea de um átomo ou a atenuação de fase de um qubit, entre outros fenômenos.

1.3.1 Transferência de estados quânticos

A transferência de estados quânticos (**QST** - Quantum State Transfer) [42–44] geralmente pode acontecer de duas maneiras distintas, uma delas é através do emaranhamento de dois estados, utilizando o teleporte quântico [12] para transferir um terceiro estado. A outra abordagem envolve estabelecer um canal quântico [21, 22], permitindo que os estados se movam de um ponto a outro de acordo com seu hamiltoniano ou mediante controle externo.

Quando dois sistemas quânticos, como fótons, elétrons ou íons, são preparados de maneira que interajam entre si, promovendo a criação de um sistema composto, suas características individuais não permanecem independentes. As propriedades de um sistema passam a estar intrinsecamente ligadas ao outro, sendo assim, eles são descritos como entrelaçados ou emaranhados.

Em um sistema contendo duas ou mais partículas emaranhadas, é possível inferir, com certa precisão, o estado de uma delas com base na observação da outra. Por exemplo, ao correlacionar um par de elétrons A e B e considerar apenas os spins de seus estados, se constatarmos que o elétron A está com o spin para cima, o elétron B será observado instantaneamente⁶ (independentemente da distância entre as partículas) com o spin para baixo.

A Transferência de estados por meio de um canal quântico frequentemente utiliza spins a fim de realizar a QST, os quais possuem momento magnético quantizado. Muitos materiais disponíveis possuem uma vasta quantidade de spins. Uma propriedade distintiva desses materiais é a disposição dos momentos magnéticos, seja de forma paralela ou antiparalela. Esses fenômenos são referidos como ferromagnetismo e antiferromagnetismo, respectivamente. Uma cadeia de spins representa uma ampla gama de materiais, onde estas partículas estão constantemente interligadas e organizadas em uma estrutura unidimensional.

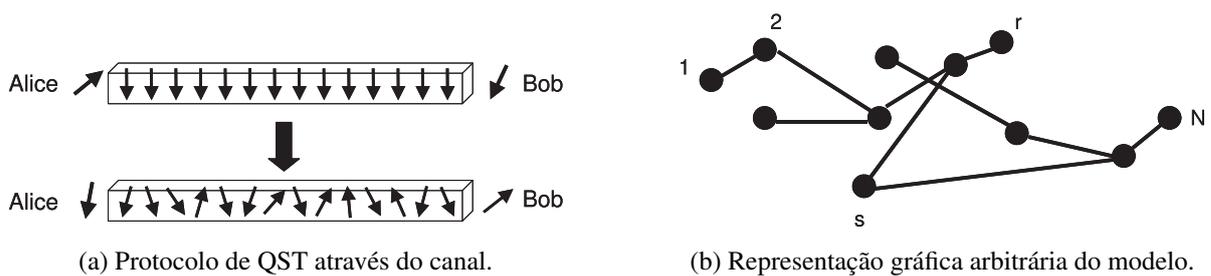


Figura 2: A parte (a) da figura mostra nosso protocolo de comunicação quântica. Inicialmente, a cadeia de spins está em seu estado fundamental em um campo magnético externo. Alice e Bob estão em extremos opostos da cadeia. Alice coloca o estado quântico que deseja comunicar no spin mais próximo dela. Após algum tempo, Bob recebe esse estado com alguma fidelidade no spin mais próximo dele. A parte (b) mostra um gráfico arbitrário de spins através do qual as comunicações quânticas podem ser realizadas usando nosso protocolo. A comunicação ocorre do spin emissor s (do inglês sender) para o spin receptor r (do inglês receiver).

Fonte: S. Bose [21], 2003.

⁶Esse é o princípio que fundamentou a transferência de estados quânticos através do teleporte quântico.

Um canal de comunicação quântica pode ser descrito por uma cadeia de spins, e o hamiltoniano que descreve esse sistema foi inicialmente proposto por Heisenberg. Em 2003, Sougato Bose [21] apresentou um modelo similar ao mencionado anteriormente, esse modelo envolve uma cadeia unidimensional submetida a um campo magnético constante na direção $-z$. Nesse contexto, as interações entre os spins são regidas pela aproximação de tight-binding [45, 46], na qual as interações ocorrem apenas entre os spins adjacentes, ou seja, os primeiros vizinhos.

Este modelo proposto por Bose [21, 22] consiste em enviarmos o estado do spin através do canal, assim devemos preparar o estado no início da cadeia e após um tempo, o estado se propagará para o final da cadeia como podemos ver através da Figura 2 (a), já a Figura 2 (b) nos mostra um canal arbitrário onde os spins são distribuídos de forma aleatória.

1.3.2 Redes quânticas

Após constatar o aprimoramento de desempenho na computação com o uso de qubits em vez de bits clássicos, torna-se relevante examinar a escalabilidade de sua aplicação. Se for viável utilizar e associar qubits em tarefas de processamento surgem alguns questionamentos quanto ao que mais é possível criar ou utilizar com essa tecnologia. Analogamente à computação clássica, a atenção dos pesquisadores se volta para o conceito de redes quânticas, um análogo muito semelhante ao que seria uma "*internet quântica*" [47, 48].

Atualmente, há diversos esforços em curso para desenvolver e aprimorar os processos de transferência de estados quânticos em todo o mundo. Redes quânticas através de satélites já se tornaram uma realidade há alguns anos [49]. Embora a criação de um computador quântico viável enfrente desafios, como a própria transferência de estados, os avanços conquistados têm se mostrado úteis ao destacar a superioridade de desempenho em comparação com os computadores clássicos.

As redes quânticas são o cerne do controle e das operações sobre qubits, na qual uma rede quântica é formada pela interconexão de dois ou mais nós que desempenham o papel de processadores quânticos. Esses nós são unidades capazes de armazenar informações, realizar operações lógicas com qubits, gerar emaranhamento e transferir estados quânticos.

O processamento de uma rede puramente quântica é exponencialmente superior à combinação de elementos quânticos e clássicos para a transmissão de informação, especialmente para lidar com problemas relacionados à correção de erros e ao funcionamento de softwares quânticos⁷.

Fica evidente o aumento no desempenho de processamento com a incorporação de elementos quânticos, como exemplificado pelo processador Sycamore [50, 51], uma rede com k nós e n qubits conectados por meio de canais clássicos, possui dimensão $k \cdot 2^n$, consideravelmente inferior àquela que utiliza canais quânticos, com dimensão 2^{kn} [44, 52].

Conforme discutido anteriormente, a fabricação de unidades de processamento quântico apresenta diversos desafios. Entre eles, destacam-se o controle preciso de elementos atômicos e subatômicos e a necessidade de garantir a robustez do sistema. É essencial manter a coerência, o que requer um isolamento rigoroso do sistema para evitar interações indesejadas com o ambiente, resultando em erros não desejados. No entanto, já existem resultados bastante significativos pertinentes a área de computação quântica com tolerância a falhas [53, 54].

⁷Como Feynman propôs inicialmente [2], é muito mais eficaz simularmos sistemas quânticos através de computadores e softwares quânticos.

1.4 Organização do trabalho

O presente trabalho segue a seguinte organização lógica, a Seção 1 procura-se mostrar as principais motivações e expectativas referentes à computação quântica seguido de alguns conceitos básicos de mecânica quântica para o estudo da informação e computação quântica, ou seja, uma visão geral sobre computação quântica; A Seção 2 vamos introduzir o modelo de Heisenberg que descreve o comportamento dos spins quanticamente, em seguida vamos introduzir as cadeias de spins como canais quânticos que é o cerne do trabalho, logo após vamos inserir alguns protocolos de QST para redes cristalinas (redes puras sem presença de imperfeições) e também para redes desordenadas (redes imperfeitas localmente na presença de um campo externo).

Por fim temos a Seção 3 que contém os resultados das simulações realizadas seguindo a metodologia descrita na Seção 2, na qual temos os casos em que nosso sistema possui uma rede cristalina, uma rede cristalina protocolada (com regimes de $g \ll J$ e $g \lesssim J$) e também uma rede protocolada na presença de desordem localizada.

Na Seção 4 temos as conclusões dos resultados obtidos no presente trabalho e algumas perspectivas futuras para o seguimento na pesquisa e fechamento do trabalho.

2 METODOLOGIA

Como já foi abordado durante a Seção 1, existem diversos métodos e protocolos de QST e a busca incessante pelo desenvolvimento de modelos cada vez mais eficazes para a criação de computadores quânticos cada vez mais robustos.

Entre os métodos mencionados, focaremos no modelo introduzido por S. Bose [21, 22], que utiliza cadeias de spin como canais quânticos.

2.1 Modelo de Heisenberg

O modelo quântico de Heisenberg [55], concebido por Werner Heisenberg, é uma formulação mecânico-estatística empregada para analisar pontos críticos e transições de fase em sistemas magnéticos. Neste modelo, os spins dos sistemas magnéticos são abordados sob a perspectiva quântica. Essa abordagem tem conexões com o modelo de Ising. Em cada ponto ou sítio de uma rede, um spin (σ_i) representa um dipolo magnético microscópico cuja orientação pode ser para cima ou para baixo. Além das interações entre dipolos magnéticos, há uma variante mais complexa do modelo de Heisenberg conhecida como interação de troca (exchange interaction) [56–58] multipolar.

Devido a efeitos quânticos, o acoplamento predominante entre dois dipolos magnéticos pode resultar em uma menor energia entre os vizinhos mais próximos quando esses dipolos estão alinhados. Com base nessa suposição, na qual as interações magnéticas se restringem apenas aos dipolos adjacentes, e considerando uma rede periódica unidimensional, o hamiltoniano pode ser expresso da seguinte maneira:

$$\hat{H} = -J \sum_{j=1}^N \sigma_j \sigma_{j+1} - h \sum_{j=1}^N \sigma_j \quad (9)$$

onde J representa a constante de acoplamento e os dipolos são descritos por vetores clássicos, ou "spins", denotados como σ_j . Eles obedecem à condição de contorno periódica $\sigma_{N+1} = \sigma_1$. O modelo de Heisenberg é mais refinado, pois aborda os spins de uma forma quântica. Neste contexto, o spin é substituído por um operador quântico que atua no produto tensorial $(\mathbb{C}^2) \otimes N$, onde \mathbb{C}^2 representa um espaço complexo de dimensão 2. Para definir este operador, é relevante mencionar as matrizes de Pauli associadas ao spin-1/2.

$$\sigma^x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\sigma^y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\sigma^z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Assim, utilizando o modelo de Heisenberg como base, os protocolos de QST são frequentemente desenvolvidos para cadeias de spin unidimensionais do tipo XX. Essas cadeias podem ser descritas em função dos operadores de spin tipo escada, conforme definido pelo hamiltoniano:

$$\hat{H}_{spin} = \sum_{x=1}^{N-1} J_x (\sigma_{x+1}^+ \sigma_x^- + H.c.) + \sum_{x=1}^N B_x \sigma_x^+ \sigma_x^- \quad (13)$$

onde B_x representa um campo magnético local e $\sigma_x^+ = (\sigma_x^-)^\dagger = |1\rangle_x \langle 0|$ é definido com $\{|0\rangle_x, |1\rangle_x\}$ formando uma base ortonormal para um spin. Notemos que no subespaço de uma

excitação, o hamiltoniano se simplifica para uma matriz tridiagonal que descreve um modelo de hopping convencional.

2.2 Cadeias de spin como canais quânticos

Conforme o modelo introduzido por S. Bose [21], que emprega cadeias de spin como canais para a transmissão de informação quântica.

O modelo inicial é simples e direto, consideramos uma cadeia de N spins, onde os spins estão alinhados em uma direção arbitrária (adotaremos a convenção de alinhamento na direção $-z$). Em contrapartida, o estado inicial da cadeia é orientado em outra direção (seguiremos a convenção de que o estado a ser transmitido está alinhado com a direção $+z$). Após um intervalo de tempo τ , o estado (informação) alcançará o final da cadeia assim realizando a QST que desejamos.

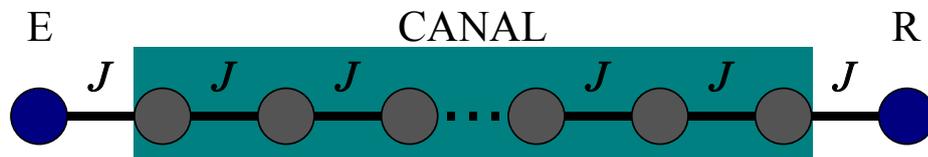


Figura 3: Representação gráfica do modelo cristalino com distribuição de hopping uniforme, onde J representa a energia de troca (hopping), **E** representa o emissor e **R** o receptor.

Fonte: Autor.

Conforme a Figura 3 nos mostra, o modelo consiste em posicionarmos um elétron localizado no início da cadeia. A dinâmica do elétron é caracterizada por movimentos de salto, conhecidos como *hoppings*⁸, entre estados adjacentes, utilizando a aproximação de tight-binding [45, 46] para elétrons livres em uma estrutura linear.

Com base nas informações apresentadas, o modelo hamiltoniano pode ser expresso da seguinte maneira:

$$H = \epsilon \sum_{i=1}^N a_i^\dagger a_i + J \sum_{i=1}^{N-1} a_i^\dagger a_{i+1} + a_{i+1}^\dagger a_i \quad (14)$$

onde a_i^\dagger e a_i são respectivamente os operadores de criação e aniquilação, ϵ é a energia local (campo local) e J a energia de hopping. Essa é a formulação do hamiltoniano conforme a segunda quantização [59] descreve os fenômenos à partir da quantização dos campos, no entanto podemos utilizar o formalismo da notação de Dirac para escrevermos a Equação 14 de uma forma mais intuitiva:

$$H = \epsilon \sum_{i=1}^N |i\rangle \langle i| + J \sum_{i=1}^{N-1} |i\rangle \langle i+1| + |i+1\rangle \langle i| \quad (15)$$

onde ϵ é a energia local (campo local) e J a energia de hopping.

A Equação 15 é crucial, pois a partir dela conseguimos determinar os elementos de matriz da matriz hamiltoniana. Isso nos permite abordar os cálculos de forma matricial e sistemática.

⁸Optaremos por manter o termo em inglês daqui em diante.

Podemos então definir os elementos $H_{i,j} = \langle i | \hat{H} | j \rangle$ e assim obtemos nosso hamiltoniano em sua forma matricial:

$$H = \begin{bmatrix} \epsilon & J & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ J & \epsilon & J & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & J & \epsilon & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \epsilon & J \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & J & \epsilon \end{bmatrix}_{N \times N} \quad (16)$$

onde na diagonal principal estão localizados ϵ que são as energias locais (campos locais) e nas diagonais secundárias estão localizados J que são as energias de hopping.

Portanto, conforme os postulados da MQ descritos na Subseção A dos apêndices, devemos então solucionar a equação de Schrödinger a fim de obtermos a dinâmica do nosso sistema. Com o hamiltoniano em sua forma matricial podemos então diagonalizá-lo e efetuar sua evolução temporal através do operador de evolução temporal:

$$\hat{U} = e^{-iHt/\hbar} \quad (17)$$

Ao evoluir o nosso estado inicial $|\psi(0)\rangle$ ao longo do tempo, obtemos o estado $|\psi(t)\rangle = \hat{U} |\psi(0)\rangle$. Dessa forma, podemos examinar a dinâmica do elétron na cadeia e explorar como este modelo se insere no contexto da informação quântica [21, 22].

O nosso objetivo é investigar a dinâmica intrínseca do sistema. Aqui, o emissor envia um estado para o receptor ao longo de um tempo de transmissão τ . Desejamos que a função de onda total do sistema, $|\psi(\tau)\rangle$, se aproxime o máximo possível do estado originalmente enviado pelo emissor.

Assim, o nosso objetivo é maximizar a fidelidade de transmissão $F_\phi(\tau) = \langle \phi | \rho_N(\tau) | \phi \rangle$. Essa fidelidade F_ϕ avalia o quão próximo o estado que o receptor recebe (após a transmissão) está do estado originalmente preparado pelo emissor, $|\phi\rangle$.

A fidelidade mencionada anteriormente é específica para um estado de entrada $|\phi\rangle$. Para obter uma métrica de eficiência geral para a Transferência de Estado Quântico (QST), independentemente dos estados de entrada, precisamos calcular a fidelidade média considerando todos os estados possíveis. Esse conjunto de estados possíveis pode ser visualizado na esfera de Bloch (Figura 1), onde $|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$.

Para hamiltonianos da forma descrita pela Equação 13 (que preservam o número de excitações), e levando em consideração que a evolução temporal de $|\Psi(0)\rangle$ ocorre principalmente nos subespaços de zero e uma excitação (sendo o primeiro invariante sob a ação de $U(t)$), a fidelidade média pode ser expressa por uma fórmula específica, conforme referenciado [21].

$$\mathcal{F}(t) = \frac{1}{2} + \frac{|f(t)|}{3} + \frac{|f(t)|^2}{6} \quad (18)$$

na qual

$$f(t) = \langle N | e^{-iHt} | 1 \rangle \quad (19)$$

é a amplitude de transição da excitação do primeiro ao último spin. Observe que quando $|f(\tau)| = 1$, temos $\mathcal{F}(\tau) = 1$, o que indica uma QST perfeita.

2.3 Protocolo de QST com controle de hopping das bordas da cadeia

Como descrito na Subseção 2.2, a utilização de cadeias de spin como canais quânticos é um modelo tradicional para transferência de informação quântica. No entanto, a busca por protocolos de QST cada vez mais eficientes e robustos é constante para o desenvolvimento de computadores quânticos mais precisos e eficientes.

Um modelo análogo, utilizando o hamiltoniano XY em vez do hamiltoniano de Heisenberg tradicional, foi explorado por Christandl et al. [60]. Eles demonstraram que é viável transferir estados quânticos através de cadeias de extensão arbitrária, desde que os acoplamentos de spin sejam selecionados com precisão, levando em consideração o comprimento da cadeia N [61–66].

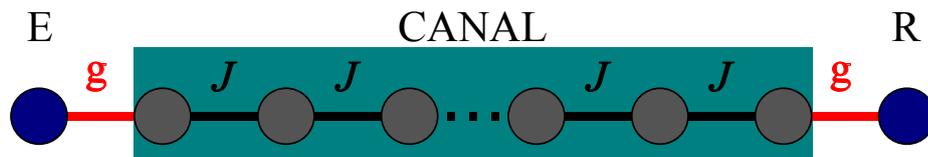


Figura 4: Representação gráfica do modelo cristalino com distribuição de hopping quase-uniforme, onde J representa o hopping do canal, g representa o hopping entre os comunicantes e o canal, E representa o emissor e R o receptor.

Fonte: Autor.

O protocolo proposto [23, 25] basicamente consiste em modificarmos os hoppings entre os comunicantes e o canal quântico da rede com a finalidade de aprimorar a fidelidade da QST conforme as redes escalam.

Conforme ilustrado na Figura 4, o protocolo propõe a alteração dos hoppings das extremidades, g , estabelecendo-os em valores inferiores ao hopping do canal quântico, J . Essa modificação visa otimizar a transferência de estado entre o emissor e o canal, facilitando assim a chegada ao receptor.

Como previamente detalhado na Subseção 2.2, o modelo hamiltoniano foi apresentado em sua forma matricial na Equação 16. Ao implementarmos nosso protocolo, realizamos a alteração do hopping dos comunicantes com o canal, definindo $g < J$ nas extremidades. Dessa forma, a matriz hamiltoniana modificada é representada por:

$$H = \begin{bmatrix} \epsilon & g & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ g & \epsilon & J & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & J & \epsilon & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \epsilon & g \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & g & \epsilon \end{bmatrix}_{N \times N} \quad (20)$$

onde na diagonal principal, encontramos os valores ϵ , que correspondem às energias locais ou campos locais. Já nas diagonais secundárias, os valores J representam as energias de hopping do canal quântico. No entanto, é importante notar que os primeiros e últimos termos apresentam um valor distinto, representado por g , indicando os hoppings entre os comunicantes e o canal.

Conforme detalhado na Subseção 2.2, diagonalizamos a matriz hamiltoniana, conforme apresentado na Subseção B dos apêndices. Com essa diagonalização, procedemos à evolução temporal do estado inicialmente preparado na cadeia, utilizando o operador temporal delineado pela Equação 17.

Consequentemente, podemos então realizar os mesmos procedimentos descritos na Subseção 2.2 e utilizar a Equação 18 e o Postulado 4 a fim de medirmos a fidelidade média e a probabilidade conforme desejarmos.

2.4 Localização de Anderson e efeitos da desordem

A "teoria da localização" teve início nos anos cinquenta com as pesquisas de P.W. Anderson [67] sobre como a desordem afeta a função de onda eletrônica. Antes disso, os estudos teóricos em sólidos eram baseados em modelos quânticos que consideravam invariância translacional. No entanto, a presença de defeitos em sólidos reais exigiu a inclusão desses elementos nos modelos teóricos.

Na década de cinquenta, Anderson propôs um modelo para entender as transições entre estados metálicos e isolantes [67–71], levando em conta elétrons sujeitos a um potencial aleatório e ignorando a interação Coulombiana. Apesar das simplificações, o modelo de Anderson é eficaz para estudar como a desordem influencia as propriedades de transporte eletrônico.

Efeitos adicionais, como a correlação eletrônica [72, 73], são considerados em estágios mais avançados na descrição do sistema. Anderson mostrou que a natureza dos estados eletrônicos é fortemente afetada pelo nível de desordem. Em desordens fracas, as funções de onda eletrônicas se estendem, resultando em um comportamento tipicamente metálico. Em desordens fortes, os estados eletrônicos se localizam exponencialmente, transformando o material em um isolante. Em desordens intermediárias, pode ocorrer uma transição metal-isolante, dependendo da dimensão do sistema.

Recentemente, extensões do modelo unidimensional de Anderson revelaram estados estendidos ressonantes e fases metálicas, introduzindo correlações de curto e longo alcance na distribuição da desordem. Anderson mostrou que a natureza da função de onda pode mudar de estendida, como no caso das ondas de Bloch, para localizada, onde a função de onda fica restrita a uma pequena região da rede (fora desta pequena região, a função de onda é nula).

2.4.1 Modelo de Anderson

Como já discutido, os estados estacionários de um elétron em um cristal sem desordem, ou seja, em uma rede com simetria translacional perfeita, podem ser derivados a partir da equação de Schrödinger:

$$H\psi = \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(r) \right] \psi = E\psi \quad (21)$$

onde $U(r)$ é um potencial com periodicidade $U(r + R) = U(r)$ e R é um vetor de Bravais típico da rede [45, 46]. As ondas de Bloch, soluções da Equação 21 são estendidas por todo espaço. Anderson mostrou que a natureza da função de onda pode mudar de estendida, como no caso das ondas de Bloch, para o caso localizada onde a função de onda fica restrita a uma pequena região da rede (fora desta pequena região a função de onda é nula).

Vamos abordar qualitativamente o impacto da desordem na localização dos estados eletrônicos. Imagine o modelo de Bloch com um potencial periódico nulo, ou seja, um elétron livre. Se adicionarmos uma única barreira de potencial, a função de onda será parcialmente transmitida e parcialmente refletida. Com duas barreiras, ocorrem duas reflexões, e as ondas refletidas e incidentes podem interferir de maneira construtiva ou destrutiva, alterando o padrão da função de onda. Se introduzirmos um potencial aleatório, representado por barreiras em posições ou intensidades aleatórias, a função de onda passa por múltiplas reflexões sem coerência de fase, resultando em interferências destrutivas e uma localização exponencial da função

de onda. Isso significa que a função de onda se concentra em uma pequena região, levando o sistema a um estado isolante. Em contraste, em sistemas com ondas estendidas, onde o elétron se move ao longo da cadeia, ocorre uma fase metálica. Uma ótima revisão referente ao modelo pode ser visto em [74].

2.4.2 Modelo de Anderson correlacionado

A existência de correlações de *curto alcance* na distribuição de desordem altera as características eletrônicas do sistema, resultando em algumas energias ressonantes [74]. Sequências com correlações de *longo alcance* não exibem um comprimento de escala característico, e a densidade espectral dessas sequências segue aproximadamente uma lei de potência [75] da forma $S(k) = 1/k^\alpha$. A função $S(k)$ é obtida através da *transformada de Fourier* [76] da função correlação de dois pontos $\langle \epsilon_i \epsilon_j \rangle$ e $k = 1/\lambda$, onde λ é o comprimento de onda das ondulações na sequência.

Neste trabalho abordaremos a correlação apresentada por *Moura e Lyra* [75] no ano de 1998, na qual estudaram o modelo de Anderson unidimensional na presença de correlação de longo alcance na diagonal do hamiltoniano. Com a finalidade de introduzir correlações de longo alcance, as energias dos sítios foram escolhidas como sendo um movimento Browniano fracionário. Esta sequência apresenta uma densidade espectral tipo lei de potência, $S(k) = 1/k^\alpha$, onde o parâmetro α controla o grau de correlação na sequência.

Suponha que a posição da partícula seja observada nos instantes $t_i = i\tau$ e que tenha N valores num período $T = N\tau$. A densidade espectral tipo lei de potência proposta [75] é imposta pela Equação 22:

$$x_i = x(t_i) = \sum_{k=1}^{N/2} (S(\omega_k \Delta\omega))^{1/2} \cos(\omega_k t_i + \phi_k) \quad (22)$$

Esta equação acima é a decomposição de Fourier discreta da sequência x_i . As frequências ω_k são múltiplos da frequência fundamental $\Delta\omega = 2\pi/T$ ($\omega_k = k\Delta\omega$). As $N/2$ fases ϕ_k , uniformemente distribuídas no intervalo $[0, 2\pi]$, representam a única fonte de ruído da série.

Escolhendo $\tau = 1$ e $S(\omega_k) = 1/\omega_k^\alpha$ a Equação 22 para os termos da série pode ser escrita como:

$$x_i = \sum_{k=1}^{N/2} \left[k^{-\alpha} \left| \frac{2\pi}{N} \right|^{1-\alpha} \right]^{1/2} \cos\left(\frac{2\pi i k}{N} + \phi_k\right) \quad (23)$$

na qual o parâmetro α regula as correlações na sequência. Quando $\alpha = 0$, a sequência é aleatória, sem correlações entre os eventos (ruído branco). No caso de $\alpha = 2$, a sequência representa o movimento Browniano simples, sem correlações entre os incrementos.

2.5 Protocolo de QST na presença de desordem localizada

Como discutido nas seções anteriores, a utilização de cadeias de spin como canais para a transmissão de informação quântica já é um modelo tradicional. No entanto a implementação desses modelos teóricos ainda é um ramo a ser estudado, visto que defeitos e impurezas são presentes a todo instante nos sistemas físicos reais, o estudo desses sistemas que foram abordados anteriormente porém na presença de desordem [77] é de suma importância para o desenvolvimento dos computadores quânticos.

Diante do que já foi apresentado, é possível aplicar o mesmo protocolo proposto na Subseção 2.3, mas agora considerando a presença de desordem.

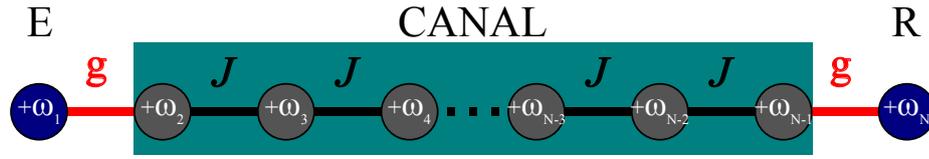


Figura 5: Representação gráfica do modelo desordenado com distribuição de hopping quase-uniforme, onde J representa o hopping do canal, g representa o hopping entre os comunicantes e o canal, \mathbf{E} representa o emissor, \mathbf{R} o receptor e ω_i onde $i = 1, 2, 3, \dots, N$ representam os termos de desordem local (além da energia ϵ fundamental).

Fonte: Autor.

A Figura 5 ilustra o modelo que será analisado. Este modelo é semelhante à cadeia apresentada na Subseção 2.3, no entanto agora incluímos um termo de desordem local. Esse termo pode surgir devido a imperfeições na cadeia, como a presença de átomos diferentes em sua composição, variações no campo ou influência de um campo externo, entre outros fatores.

A desordem representada pelo termo ω neste estudo refere-se a campos magnéticos desordenados nos sítios, nos quais as flutuações são ajustadas por sequências correlacionadas de longo alcance, apresentando um perfil auto-similar que segue um espectro de lei de potência (ver a Equação 23).

Seguindo o protocolo de QST proposto na Subseção 2.3, nossa matriz hamiltoniana apresentará as seguintes modificações incluindo a desordem na diagonal (desordem local):

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} \epsilon + \omega_1 & g & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ g & \epsilon + \omega_2 & J & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & J & \epsilon + \omega_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \epsilon + \omega_{N-1} & g \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & g & \epsilon + \omega_N \end{bmatrix}_{N \times N} \quad (24)$$

onde os termos ω_n , com $n = 1, 2, \dots, N$, são os termos de desordem de cada sítio da cadeia. Na qual a desordem obedece a seguinte lei de potência:

$$\omega_n = \sum_{k=1}^{N/2} k^{-\alpha/2} \cos\left(\frac{2\pi nk}{N} + \phi_k\right) \quad (25)$$

onde $k = 1/\lambda$ é inverso ao comprimento de onda, ϕ_k são fases aleatórias distribuídas uniformemente no range entre $[0, 2\pi]$ e α controla o grau de correlações. Este parâmetro está relacionado ao chamado expoente de Hurst.

Essa distribuição ω_n deve ser normalizada, visto que estamos lidando com amplitudes de probabilidade, portanto temos:

$$\omega_n \longrightarrow \frac{(\omega_n - \langle \omega_n \rangle)}{\sqrt{\langle \omega_n^2 \rangle - \langle \omega_n \rangle^2}} \quad (26)$$

Por fim, o protocolo consiste em inserirmos a desordem apenas no canal quântico, ou seja, $\omega_1 = \omega_N = 0$ esperamos que essa mudança facilite a transmissão do elétron para o canal com a finalidade de reduzir a localização de Anderson no começo da cadeia, assim o elétron não ficará aprisionado e a transmissão é efetuada ao fim da cadeia.

3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Conforme abordado na Seção 2, estamos interessados em encontrarmos protocolos de transferência de estado quântico (QST) cada vez mais eficientes e robustos. O objetivo é maximizar a fidelidade e a qualidade da informação transmitida por meio de canais que utilizam spins, conforme detalhado na Subseção 2.2.

Para um melhor entendimento do trabalho realizado, vamos tratar de algumas abordagens diferentes que são: cadeias cristalinas com distribuição uniforme dos hoppings, cadeia cristalina com controle do hopping das bordas das cadeias (aqui trataremos 2 regimes de hopping das bordas da cadeia, $g \ll J$ e $g \lesssim J$) e por fim cadeias desordenadas.

3.1 Cadeia cristalina de spins

Inicialmente abordaremos o sistema mais simples possível, uma cadeia de spins cristalina com distribuição de hopping uniforme conforme ilustrado pela Figura 3.

Como destacado, o modelo se fundamenta na transmissão da informação ao longo do canal, culminando na comunicação entre o emissor e o receptor ao término da cadeia. Assim, podemos analisar a qualidade da informação enviada através da probabilidade P_n :

$$P_n(t) = |\langle n | \psi(t) \rangle|^2 \quad (27)$$

onde n é o estado que desejamos medir e $|\psi(t)\rangle$ é o estado quântico do sistema, portanto $P_n(t)$ nos dá a probabilidade de se medir o elétron em um dado instante t .

A Figura 6 nos mostra a probabilidade P_n de se medir os estados do emissor $|E\rangle = |1\rangle$ e do receptor $|R\rangle = |N\rangle$ onde N é o último estado da cadeia (onde desejamos enviar a informação) para alguns valores de N :

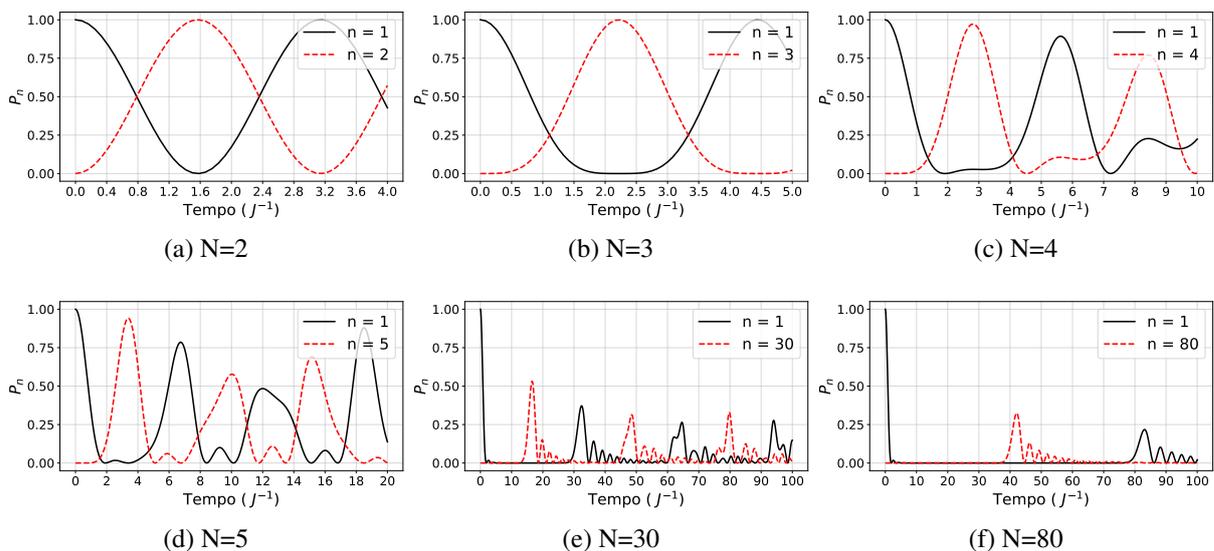


Figura 6: Probabilidades P_n dos comunicantes (emissor e receptor), ou seja, $P_{n=1}$ e $P_{n=N}$ em função do tempo (em ordem de J^{-1}) para cadeias de 2, 3, 4, 5, 30 e 80 níveis.

Fonte: Autor.

Podemos observar que conforme o tamanho da cadeia N aumenta, a probabilidade do elétron chegar ao final da cadeia diminui com o passar do tempo mas podemos fazer uma análise mais precisa desse fato para uma melhor conclusão através da Figura 7:

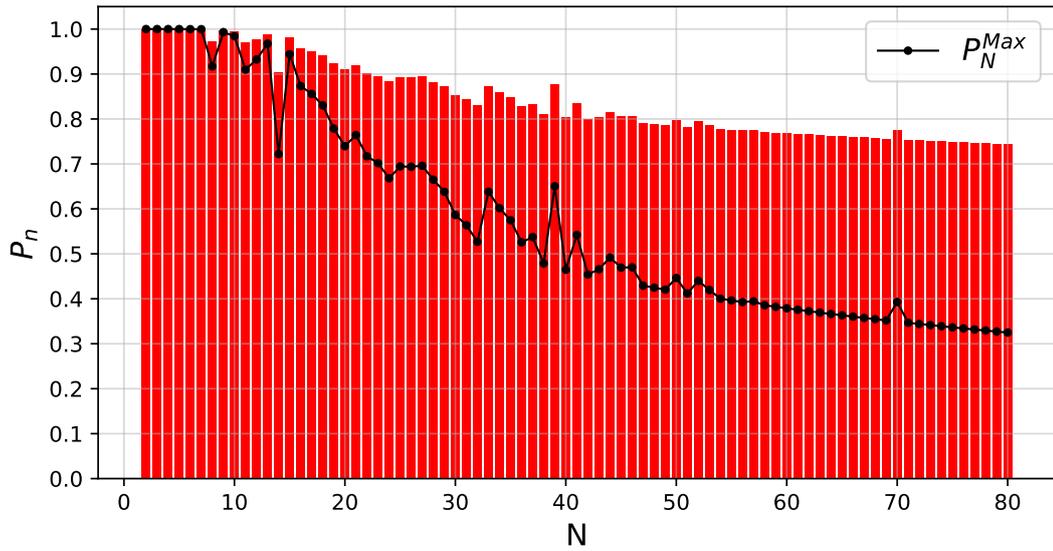


Figura 7: Gráfico da probabilidade P_n máxima representado pela curva com sua respectiva fidelidade \mathcal{F} representado pelas barras conforme o tamanho da cadeia N aumenta entre $N = 2$ até $N = 80$ em um espaço de tempo $[0,8000/J]$.

Fonte: Autor.

Torna-se nítido que conforme o tamanho da cadeia aumenta, a qualidade da QST diminui. Ao analisarmos a fidelidade para cadeias maiores, notamos que teremos uma qualidade de informação muito ruim visto que quando $N \rightarrow \infty$, $|f(t)| \rightarrow 0$ e portanto $\mathcal{F}_\infty \rightarrow \frac{1}{2}$ que é a pior fidelidade possível. Isso é devido aos auto-estados do sistemas, cujo espectro é inteiramente formado por funções de onda estendidas (estados de Bloch), consequentemente a função de onda se espalha.

Como este sistema só possui uma qualidade significativa para cadeias pequenas, torna-se necessário a busca por protocolos de QST no intuito de melhorar essa qualidade para cadeias maiores⁹ e assim propomos alguns protocolos.

3.2 Cadeia cristalina de spins com controle de hopping das bordas

Como discutido na Subseção 3.1, à medida que as redes de spins se expandem, a fidelidade diminui. Assim, propomos inicialmente um protocolo no qual ajustamos o hopping entre os comunicantes e o canal.

No protocolo proposto, ajustamos o hopping das bordas, g , para um valor inferior ao hopping do canal, J , a fim de melhorar a transferência de estado entre o emissor e o canal, conforme descrito na Subseção 2.3. Dessa forma nosso hamiltoniano vai sofrer o ajuste conforme descrevemos na Equação 20.

Similarmente à representação da Figura 7, onde analisamos a probabilidade conforme o aumento de N , fixaremos o tamanho da cadeia em $N = 80$. Contudo, neste estudo, variaremos o valor do hopping entre os comunicantes, g , e examinaremos sua influência na probabilidade.

⁹Como nosso objetivo é usar esses canais para a transmissão de informação, é impraticável limitá-los apenas a curtas distâncias.

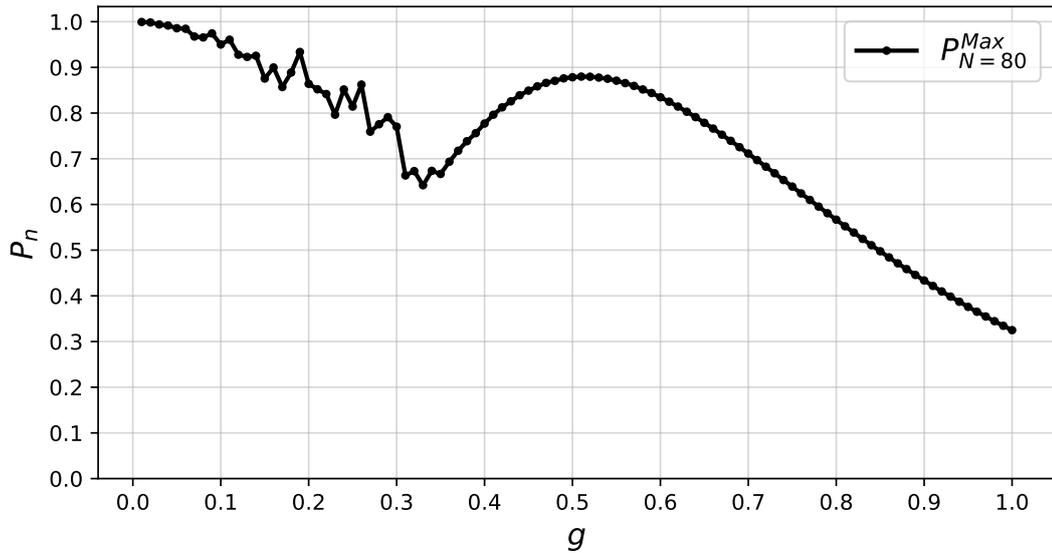


Figura 8: Gráfico da probabilidade P_n máxima representado pela curva para uma cadeia de tamanho $N = 80$ conforme o hopping dos comunicantes g varia em um espaço de tempo $[0,16000/J]$.

Fonte: Autor.

Como ilustrado na Figura 8, ao mantermos o tamanho da cadeia constante em $N = 80$, observamos uma probabilidade (e obviamente a fidelidade¹⁰) superior em comparação com os resultados apresentados na Figura 7.

É importante destacar que, para todos os valores de g que são inferiores a J , observamos uma probabilidade ampliada em comparação com $g = J$. Assim, é crucial examinar a dinâmica do elétron para determinar o tempo de transmissão τ da informação.

Esse comportamento pode ser explicado através do espectro de autovalores do sistema [23]. Quando g é aproximadamente igual a 1 (considerando que tomamos $J = 1$ em nossas simulações por simplicidade), o espectro de autovalores é quase harmônico em torno de 0. No entanto, a distribuição de autovetores é ampla, e a contribuição da parte anarmônica compromete a transferência (QST). A medida que g diminui, a distribuição dos autovetores se estreita, levando a uma diminuição na contribuição anarmônica. Como resultado, a probabilidade da transferência aumenta. Por outro lado, para g muito pequeno, a harmonia do espectro nas proximidades de 0 se desfaz, o que reduz a fidelidade da QST.

Nesse protocolo, abordaremos dois regimes distintos. Primeiramente, consideraremos o caso em que o hopping dos comunicantes g é significativamente menor que o hopping do canal J , ou seja, $g \ll J$. Também abordaremos o caso em que o hopping dos comunicantes g está em um valor intermediário, nem muito pequeno nem muito próximo do hopping do canal J , ou seja, $g \lesssim J$.

3.2.1 Regime de hopping $g \ll J$

Como delineado na Subseção 3.2, examinaremos dois regimes de nosso interesse. Nesta seção, abordaremos o regime em que o hopping g é significativamente menor que o hopping J .

Da mesma forma que efetuamos a evolução temporal antes de propor o protocolo na Subseção 3.1, a fim de observarmos a dinâmica do elétron através da cadeia, repetimos o mesmo

¹⁰De agora em diante vamos abordar apenas a probabilidade visto que a fidelidade \mathcal{F} é uma função da probabilidade e estão diretamente relacionadas.

procedimento utilizando o protocolo proposto na Subseção 2.3.

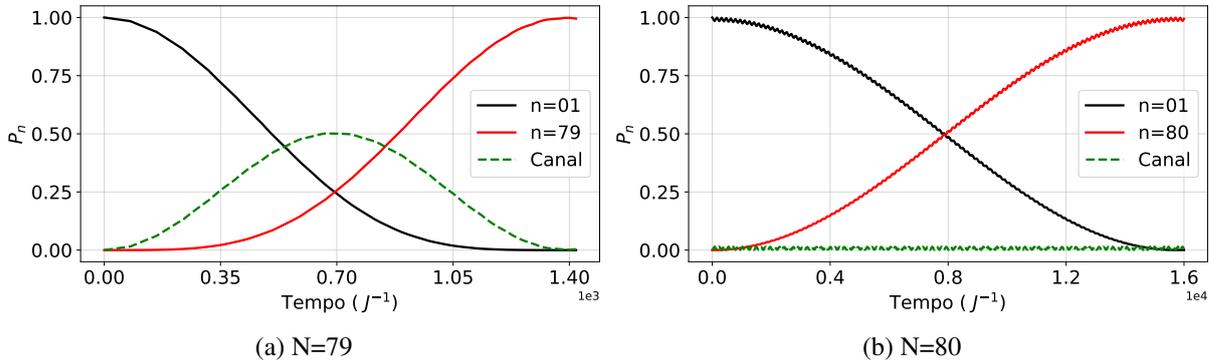


Figura 9: Probabilidades P_n dos comunicantes (emissor e receptor) e do canal (restante da cadeia), ou seja, $P_{n=1}$, $P_{n=N}$ e $P_{n=canal}$ em função do tempo (em ordem de J^{-1}) para cadeias de tamanho (a) $N = 79$ e (b) $N = 80$ seguindo o protocolo proposto com $g = 0.01$, $J = 1$.

Fonte: Autor.

Para g muito pequeno, o sistema exibe uma sensibilidade significativa à paridade de N . Quando g se aproxima de zero, o estado inicial $|\Psi(0)\rangle$ concentra-se principalmente em dois autovetores para N par. No caso de N ser ímpar, a evolução do sistema ocorre em um espaço tridimensional.

Como podemos ver através da Figura 9, com a alteração proposta no hamiltoniano do nosso sistema, quando $g = 0.01$, ou seja, $g \ll J$, isso faz com que nosso sistema se comporte efetivamente com um sistema de 2 níveis para N par (independente do quão grande nossa cadeia de spins seja). Já para N ímpar, nosso sistema se comporta efetivamente como um sistema de 3 níveis onde o canal se comporta como um nível intermediário entre o emissor e o receptor.

Observe que, se N for par, os spins na cadeia permanecem pouco excitados durante a evolução. Isso significa que os qubits de origem e destino evoluem como dois qubits isolados que estão diretamente acoplados. Nesse cenário, a evolução do sistema assemelha-se às oscilações de Rabi [23, 24, 78, 79] entre os qubits de origem e destino, mesmo que estejam a uma distância considerável um do outro.

Também é notável o quão lento é a QST para sistemas que seguem esse protocolo. Em [23] podemos ver que o tempo de transmissão nesse regime de g muito pequeno o tempo de transmissão τ escala linearmente com o tamanho da cadeia, o que é bastante preocupante no quesito de aplicabilidade desse sistema para canais cada vez maiores e a escalabilidade desses sistemas em computadores quânticos reais.

3.2.2 Regime de hopping $g \lesssim J$

Como explicado na Subseção 3.2, analisaremos dois regimes de nosso interesse. Nesta seção, trataremos do regime de hopping intermediário na qual o hopping g é menor que o hopping J , mas não significativamente menor.

Conforme abordado nas seções anteriores, estamos interessados em analisar a dinâmica do nosso sistema e como a informação é transmitida através da cadeia¹¹ [25–27, 60, 61, 80–82], portanto seguimos com gráficos referente a probabilidade de cada sítio da cadeia conforme a mesma evolui no tempo e assim plotamos os seguintes gráficos descritos pela Figura 10:

¹¹Vale ressaltar que estamos buscando protocolos mais rápidos do que o abordado anteriormente no regime de $g \ll J$ visto que sua QST é uma QST perfeita no entanto muito lenta.

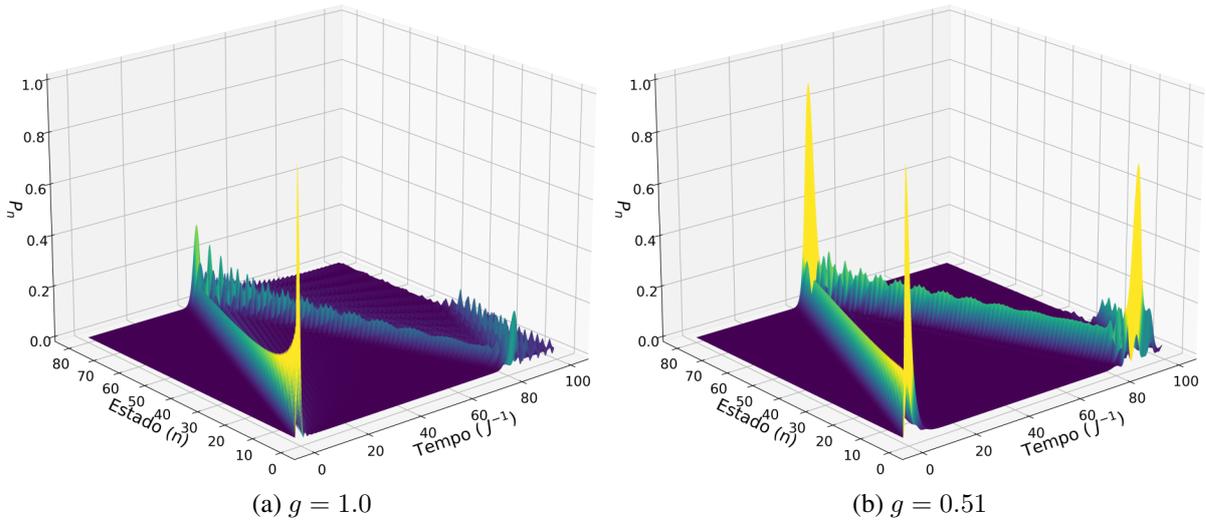


Figura 10: Gráficos 3D da probabilidade de cada sítio da cadeia de tamanho $N = 80$ evoluindo no tempo para valores de (a) $g = 1.0$ e (b) $g = 0.51$ respectivamente.

Fonte: Autor.

Como podemos observar, o tempo de transmissão τ reduziu muito em comparação com o tempo de transmissão τ do regime $g \ll J$, o que é bastante interessante no quesito aplicabilidade e escalabilidade do nosso sistema para computadores quânticos.

Com o objetivo de proporcionar uma melhor visualização dos gráficos apresentados na Figura 10, optamos por gerar gráficos de densidade (density plot). Os resultados podem ser observados na Figura 11:

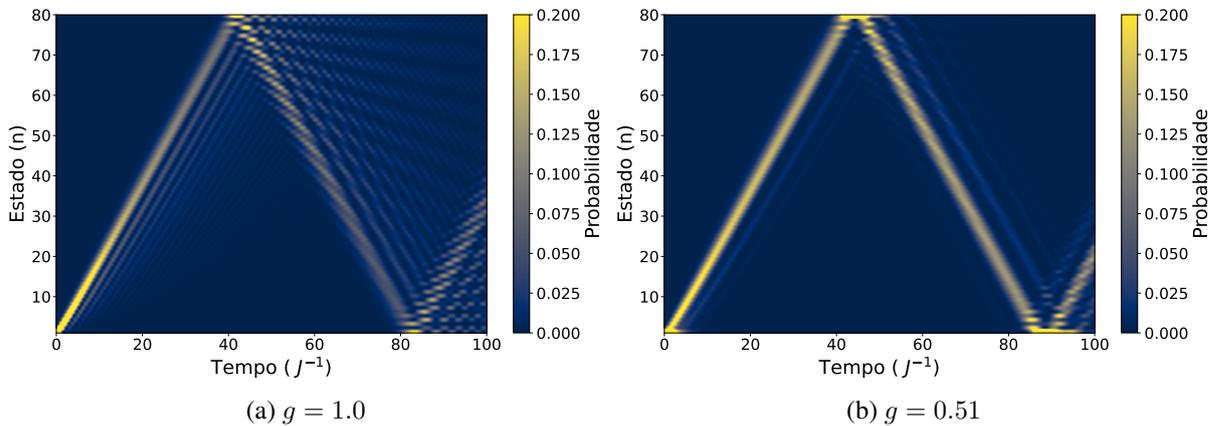


Figura 11: Gráficos do tipo "density plot" da probabilidade de cada sítio da cadeia de tamanho $N = 80$ evoluindo no tempo para valores de (a) $g = 1.0$ e (b) $g = 0.51$ respectivamente.

Fonte: Autor.

As cores do density plot estão associadas à probabilidade de medir o estado preparado no início da cadeia (o que desejamos transmitir). Isso proporciona uma visualização mais precisa da dispersão durante a evolução temporal.

Como esperado, conforme representado pela Figura 11 (a) para $g \simeq J$, a dispersão é muito maior, pois os autoestados associados são distribuídos amplamente, o que compromete nossa QST. Por outro lado, para o regime que estamos abordando nesta seção, $g \lesssim J$, essa distribuição dos autoestados se estreita um pouco, fazendo com que os estados referentes aos

comunicantes estejam mais ligados (acoplados), aumentando sua probabilidade e não comprometendo o tempo de transmissão τ .

Com esses resultados, podemos caracterizar o movimento do elétron como um movimento *balístico* e também é bastante evidente que o regime de hopping $g \lesssim J$ é mais interessante, considerando seus prós e contras. Apesar de ter uma probabilidade menor do que no regime $g \ll J$, seu tempo de transmissão τ é muito mais rápido. Além disso, é muito mais escalável do que o sistema não protocolado, pois, independentemente do tamanho N da cadeia que utilizarmos, sua probabilidade será muito boa e o tempo de transmissão τ será consideravelmente rápido.

3.3 Cadeia desordenada de spins com controle de hopping das bordas

Conforme descrito na Subseção 2.5, abordaremos da correlação descrita pela Equação 25, assim decidimos gerar gráficos para diferentes valores de α com a finalidade de observar o comportamento da desordem para alguns níveis de correlação e assim temos a Figura 12:

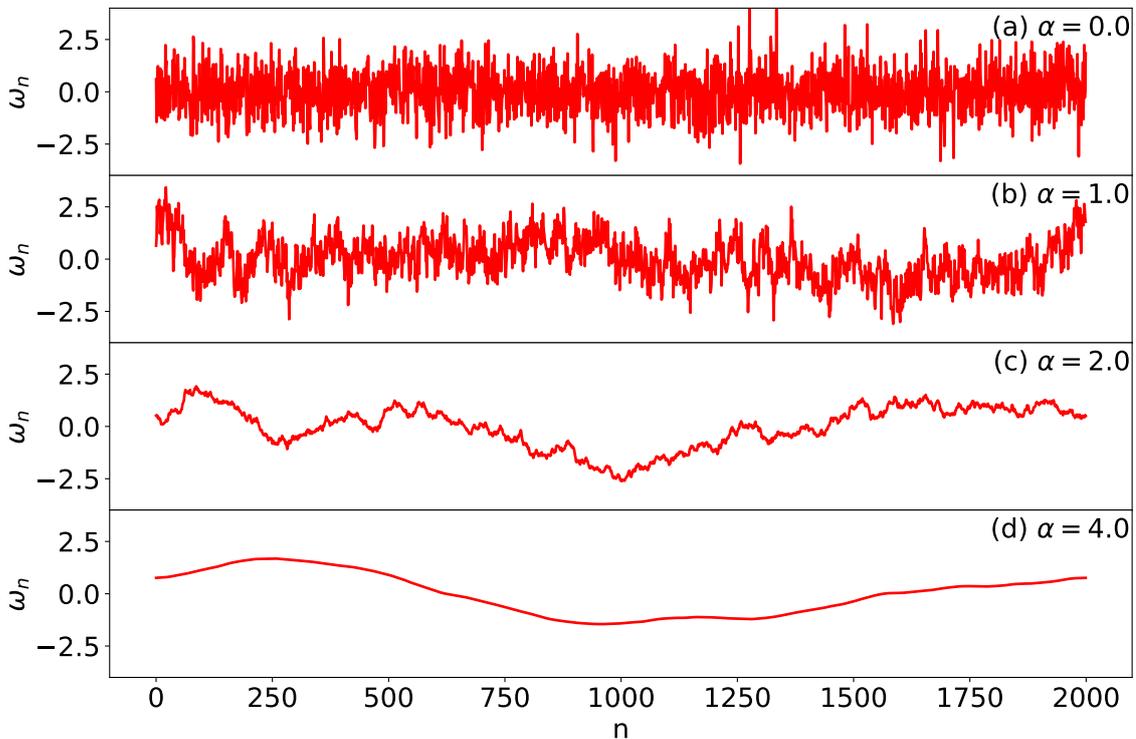


Figura 12: Gráficos da desordem ω_n em um intervalo $n \in [0, 2000]$ para diferentes valores de α (grau de correlação). (a) $\alpha = 0.0$ (Completamente aleatório), (b) $\alpha = 1.0$ (Correlação fraca), (c) $\alpha = 2.0$ (Correlação moderada) e (d) $\alpha = 4.0$ (Correlação muito forte).

Fonte: Autor.

Podemos observar que conforme α cresce, a desordem torna-se mais correlacionada assim como já esperávamos [75, 83, 84]. No entanto vale ressaltar que estamos interessados em tratar da transmissão da informação ao longo da cadeia de maneira cada vez mais aprimorada com sua fidelidade maior possível.

Para analisarmos o comportamento dessas cadeias desordenadas devemos analisar o comportamento médio de um conjunto de amostras para que assim tenhamos uma boa aproximação dos resultados.

Inicialmente decidimos observar o que acontece com a probabilidade média $\langle P_n \rangle$ para analisarmos com qual probabilidade máxima nosso estado alcança o final da cadeia, e assim geramos os gráficos representados pela Figura 13:

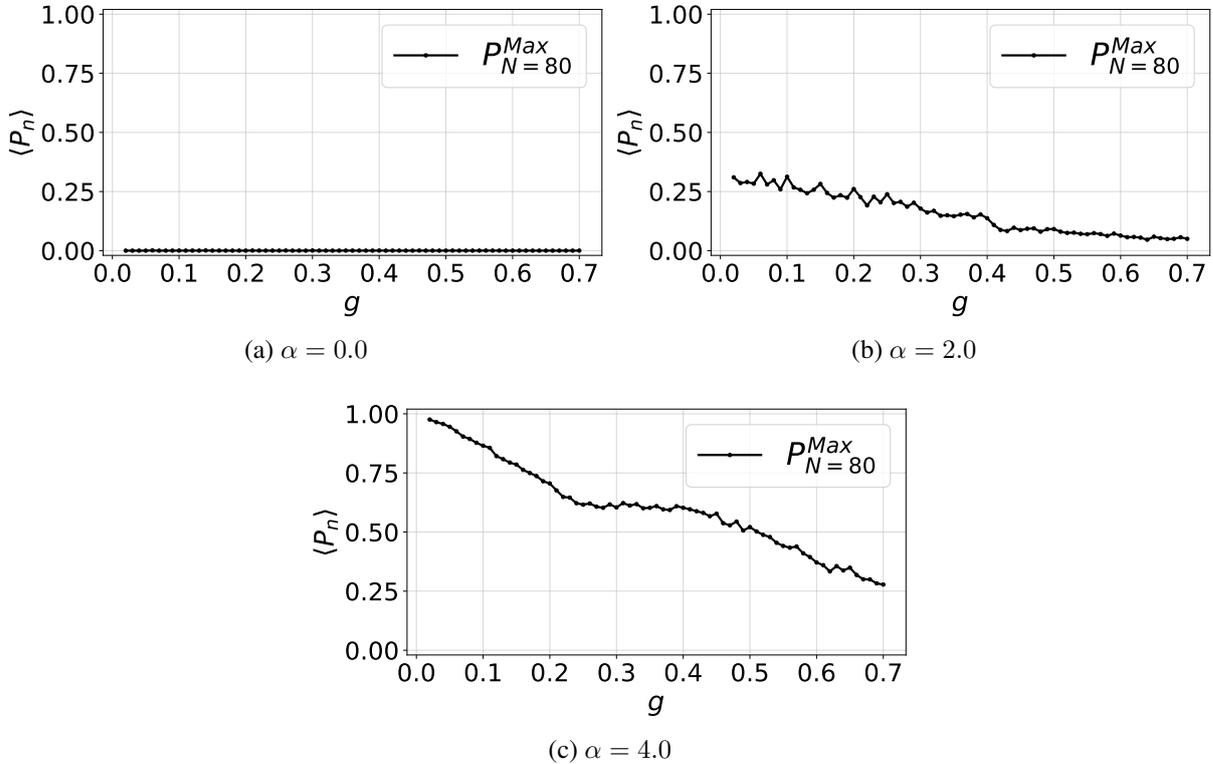


Figura 13: Gráficos da probabilidade máxima média $\langle P_{N=80} \rangle$ medida pelo receptor ($N=80$) conforme g varia com um espaço amostral de 100 unidades em um espaço de tempo $t \in [0, 8000]$ para diferentes parâmetros de correlação (a) $\alpha = 0.0$ (Completamente aleatório), (b) $\alpha = 0.0$ (Correlação moderada), (c) $\alpha = 0.0$ (Correlação muito forte).

Fonte: Autor.

Através dos gráficos da Figura 13 podemos ver que na presença de desordem completamente aleatória ($\alpha = 0.0$) a QST é muito ruim, como já era de se esperar, já na presença da correlação a probabilidade cresce.

Torna-se nítido que quando o parâmetro de correlação $\alpha = 2.0$, sua probabilidade já é bem maior do que $\alpha = 0.0$. Agora quando nosso sistema possui um grau de correlação muito alto ($\alpha = 4.0$), nossa QST beira uma QST perfeita para $g \ll J$ e se mantém relativamente alta conforme g diminui.

Vale ressaltar que obtemos esses resultados conforme nossas simulações, utilizamos um espaço de tempo de $t \in [0, 8000]$, no entanto se tomarmos um tempo maior nossas probabilidades tenderiam a aumentar e assim obteríamos uma QST perfeita (obviamente isso não é interessante pois seriam QST's muito lentas e não queremos isso).

Portanto é natural que nesse momento devemos analisar com que velocidade nossa QST é realizada para assim tirarmos conclusões perante a viabilidade desse sistema para a implementação dele em computadores quânticos.

Com a finalidade de obtermos um resultado conclusivo referente ao tempo de transmissão τ desses sistemas com desordem correlacionada, decidimos gerar o gráfico do tempo de transmissão médio $\langle \tau \rangle$ da nossa amostra de dados de 100 unidades, e assim geramos a Figura 14:

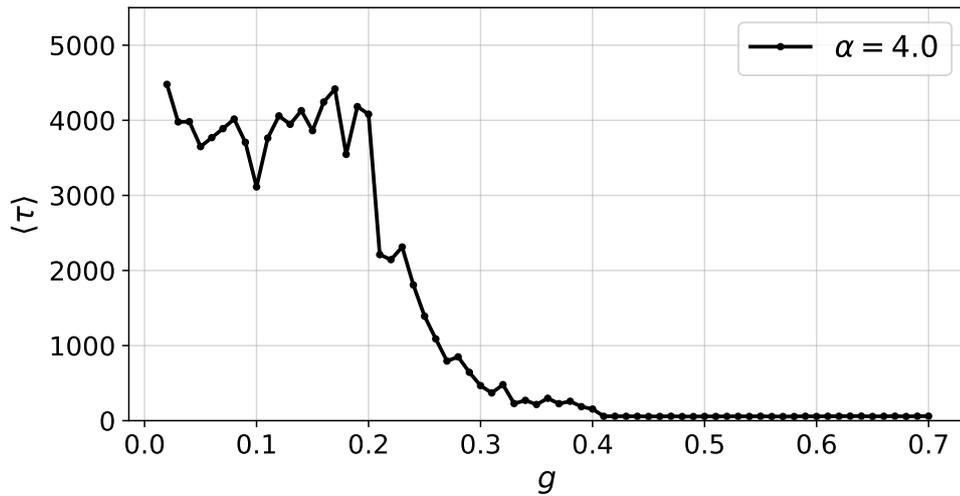


Figura 14: Gráfico do tempo de transmissão médio $\langle \tau \rangle$ (em unidades de J^{-1}) conforme g varia em um espaço amostral de 100 unidades em um intervalo de tempo $t \in [0, 8000]$ para o caso de $\alpha = 4.0$ (Grau de correlação muito forte).

Fonte: Autor.

Novamente obtemos que quando $g \ll J$ nosso tempo de transmissão $\langle \tau \rangle$ é muito longo e inviável para aplicações realísticas. Porém, conforme o parâmetro g diminui, podemos ver uma queda no tempo de transmissão $\langle \tau \rangle$ mais precisamente quando $g \approx 0.4$ em diante, $\langle \tau \rangle \sim 5 \times 10^1$ (em unidades de J^{-1}), que é um tempo de transmissão muito satisfatório em comparação aos outros casos abordados.

Por fim, podemos concluir que esses resultados são um caminho para encontrarmos protocolos cada vez melhores e mais eficientes. Agora nos resta buscar uma maneira de aumentarmos a probabilidade da nossa QST para essa faixa de $g \sim 0.4$ ou diminuir o tempo de transferência para valores de $g < 0.4$.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como abordado, vivemos em uma era marcada pelo rápido avanço tecnológico e a busca incessante por inovações tecnológicas nos permite imaginar diversas formas de evoluir nossa capacidade de processar e armazenar informação.

Dado que o processo de computação é um processo físico, os computadores clássicos atuais tendem a se tornar limitados para a resolução de problemas mais complexos, e assim surge a necessidade da utilização de computadores quânticos, visto que para esse uso, os mesmos mostram-se muito mais eficientes e viáveis.

Conforme mencionado anteriormente, este trabalho adota a abordagem de utilizar redes de spin como canais quânticos, uma proposta que tem demonstrado grande relevância no campo da computação quântica.

Inicialmente tratamos da rede de spins cristalina e observamos que conforme o tamanho da rede aumenta, tanto a probabilidade quanto sua fidelidade diminui, o que torna esse sistema inviável para a transmissão de informação quântica pois estaríamos limitados a redes muito curtas.

Após constatarmos esse comportamento da rede, decidimos aplicar o protocolo de inserir um hopping $g < J$ nas bordas da rede com a finalidade de facilitar a transmissão da informação entre os comunicante e o canal. Observamos que o comportamento é caracterizado de acordo com o valor de g e assim decidimos analisar os regimes de $g \ll J$ e $g \lesssim J$.

Observamos que o comportamento depende diretamente das autoenergias do hamiltoniano e por isso quando $g \ll J$ faz com que o sistema comporte-se efetivamente como um sistema de 2 níveis devido esse subespaço gerado. Já para valores de $g \lesssim J$ temos um comportamento do tipo balístico visto que diferentemente do caso anterior, a informação é transmitida por todo o canal até chegar ao receptor e esse comportamento é muito semelhante ao comportamento de um projétil.

Além de caracterizar o comportamento do nosso sistema nesses regimes seguindo o protocolo proposto, também foi possível analisar o quão eficiente seriam esses regimes na questão "velocidade da transmissão de informação". Quanto ao regime de hopping $g \ll J$ percebemos que a QST possui uma fidelidade muito boa, praticamente uma QST perfeita, no entanto seu tempo de transmissão τ é da ordem de $\sim 10^3$ (em unidades de J^{-1}) para cadeias ímpares e da ordem de $\sim 10^4$ (em unidades de J^{-1}) para cadeias pares, o que se mostrou inviável para a implementação desse regime devido ao seu tempo muito longo e assim torna-se muito difícil escalar esse sistema em computadores quânticos realistas.

Por outro lado, para o regime de hopping $g \lesssim J$ notamos que a fidelidade da QST é bastante aceitável (porém ainda menor que no caso anterior) e seu tempo de transmissão τ é muito mais rápido que o caso anterior, sendo $\tau \sim 10^1$ (em unidades de J^{-1}) o que nos deixa bastante interessados em estudar mais a fundo esse regime pois o mesmo torna-se mais viável para a sua implementação em computadores quânticos realísticos, no entanto ainda nos resta descobrir protocolos ainda mais eficazes no quesito melhoria da fidelidade da informação transmitida e otimizar ainda mais o tempo de transmissão também é um objetivo de nosso interesse.

Por fim, analisamos o comportamento da nossa rede seguindo o protocolo proposto só que dessa vez na presença da desordem local correlacionada. Percebemos alguns efeitos bastante interessantes que já eram esperados no entanto esse trabalho serviu para comprovar esses efeitos. Primeiramente analisamos os efeitos causados na presença da desordem completamente aleatória ($\alpha = 0$) e como esperávamos a QST é de péssima qualidade. Devido ao alto ruído, a diferença de energia entre os estados é muito alta em comparação a energia de hopping o que

torna muito difícil o elétron percorrer por toda a rede.

Para o caso de desordem intermediária ($\alpha = 2$) percebemos que a QST agora é de melhor qualidade do que na presença da desordem aleatória, esse resultado é devido a diferença de energia entre os sítios da nossa rede serem menores em comparação ao caso completamente aleatório, assim o elétron consegue percorrer a cadeia com mais facilidade do que no caso anterior.

Por fim, analisamos o caso de desordem muito forte ($\alpha = 4$) e como esperado agora a QST tem uma qualidade muito superior, visto que agora a diferença de energia entre os sítios é ainda menor portanto torna-se muito mais fácil o elétron transitar pela cadeia. Também foi realizado uma análise perante o tempo de transmissão τ na qual pudemos notar que ainda é um tempo longo para a faixa de $g < 0.4$, porém já é muito mais rápido do que no caso cristalino, além disso percebemos que a para o regime de $g > 0.4$ já possuímos tempos de transmissão muito mais rápidos.

Podemos concluir que a presença da correlação na desordem torna o nosso sistema mais robusto de modo que a qualidade da nossa QST seja muito melhor. Além disso, é importante ressaltar que a presença de desordem, quer seja correlacionada ou não, pode surgir de maneira natural devido a imperfeições experimentais durante o processo de fabricação de dispositivos de estado sólido destinados ao processamento de informação quântica.

Em geral, pode ser mais interessante e viável permitir essa indução devido a desordem do que projetar uma cadeia com um conjunto altamente específico de parâmetros, o que demandaria um elevado controle que torna ainda mais complexa a implementação das cadeias de spin nos computadores quânticos. Esse trabalho incentiva ainda mais a busca por protocolos de comunicação quântica em cadeias de spins desordenadas pois mostram ser de grande utilidade para o avanço dessa tecnologia tão atual e inovador.

REFERÊNCIAS

- ¹C. E. Shannon, “A Mathematical Theory of Communication”, The Bell System Technical Journal **27**, 379–423 (1948).
- ²R. P. Feynman, “Simulating physics with computers”, International journal of theoretical physics **21**, 467–488 (1982).
- ³M. A. Nielsen e I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, 2000).
- ⁴G. E. Moore, “Cramming more components onto integrated circuits”, Electronics **38** (1965).
- ⁵D. Deutsch e R. Penrose, “Quantum theory, the Church–Turing principle and the universal quantum computer”, Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences **400**, 97–117 (1985).
- ⁶R. Landauer, “The physical nature of information”, Physics Letters A **217**, 188–193 (1996).
- ⁷I. M. Georgescu, S. Ashhab e F. Nori, “Quantum simulation”, Rev. Mod. Phys. **86**, 153–185 (2014).
- ⁸L. K. Grover, “A fast quantum mechanical algorithm for database search”, em Symposium on the Theory of Computing (1996).
- ⁹P. W. Shor, “Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer”, SIAM Journal on Computing **26**, 1484–1509 (1997).
- ¹⁰A. K. Ekert, “Quantum cryptography based on Bell’s theorem”, Phys. Rev. Lett. **67**, 661–663 (1991).
- ¹¹N. Gisin, G. Ribordy, W. Tittel e H. Zbinden, “Quantum cryptography”, Rev. Mod. Phys. **74**, 145–195 (2002).
- ¹²C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres e W. K. Wootters, “Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels”, Phys. Rev. Lett. **70**, 1895–1899 (1993).
- ¹³J. Clarke e F. Wilhelm, “Superconducting quantum bits”, Nature **453**, 1031–42 (2008).
- ¹⁴Z.-L. Xiang, S. Ashhab, J. Q. You e F. Nori, “Hybrid quantum circuits: Superconducting circuits interacting with other quantum systems”, Rev. Mod. Phys. **85**, 623–653 (2013).
- ¹⁵R. J. Schoelkopf e S. M. Girvin, “Wiring up quantum systems”, Nature **451**, 664–669 (2008).
- ¹⁶M. Steffen, “Superconducting Qubits Are Getting Serious”, Physics **4**, 103 (2011).
- ¹⁷H. Paik, D. I. Schuster, L. S. Bishop, G. Kirchmair, G. Catelani, A. P. Sears, B. R. Johnson, M. J. Reagor, L. Frunzio, L. I. Glazman, S. M. Girvin, M. H. Devoret e R. J. Schoelkopf, “Observation of High Coherence in Josephson Junction Qubits Measured in a Three-Dimensional Circuit QED Architecture”, Phys. Rev. Lett. **107**, 240501 (2011).
- ¹⁸D. Kielpinski, C. Monroe e D. Wineland, “Architecture for a large-scale ion-trap quantum computer”, Nature **417**, 709–11 (2002).
- ¹⁹I. Bloch, “Quantum coherence and entanglement with ultracold atoms in optical lattices”, Nature **453**, 1016–22 (2008).
- ²⁰T. Ladd, F. Jelezko, R. Laflamme, Y. Nakamura, C. Monroe e J. O’Brien, “Quantum computers”, English, Nature **464**, 45–53 (2010).

-
- ²¹S. Bose, “Quantum Communication through an Unmodulated Spin Chain”, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 207901 (2003).
- ²²S. Bose, “Quantum communication through spin chain dynamics: an introductory overview”, *Contemporary Physics* **48**, 13–30 (2007).
- ²³A. Wójcik, T. Łuczak, A. Grudka, T. Gdala e M. Bednarska, “Unmodulated spin chains as universal quantum wires”, *Phys. Rev. A* **72**, 034303 (2005).
- ²⁴G. M. A. Almeida, “Interplay between speed and fidelity in off-resonant quantum-state-transfer protocols”, *Phys. Rev. A* **98**, 012334 (2018).
- ²⁵T. J. G. Apollaro, L. Bianchi, A. Cuccoli, R. Vaia e P. Verrucchi, “99%-fidelity ballistic quantum-state transfer through long uniform channels”, *Phys. Rev. A* **85**, 052319 (2012).
- ²⁶L. Campos Venuti, C. Degli Esposti Boschi e M. Roncaglia, “Qubit Teleportation and Transfer across Antiferromagnetic Spin Chains”, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 060401 (2007).
- ²⁷A. Zwick, G. A. Álvarez, J. Stolze e O. Osenda, “Spin chains for robust state transfer: Modified boundary couplings versus completely engineered chains”, *Phys. Rev. A* **85**, 012318 (2012).
- ²⁸J. Hidary, *Quantum Computing: An Applied Approach*, vol. 72 (Springer International Publishing, 2021), p. 034303.
- ²⁹C. Cohen-Tannoudji, B. Diu e F. Laloë, *Quantum Mechanics, Volume 1: Basic Concepts, Tools, and Applications*, vol. 72 (Wiley, 2019), p. 034303.
- ³⁰J. J. Sakurai, *Modern quantum mechanics; rev. ed.* Vol. 72 (Addison-Wesley, Reading, MA, 1994), p. 034303.
- ³¹D. J. Griffiths e D. F. Schroeter, *Introduction to quantum mechanics*, Third edition, vol. 72 (Cambridge University Press, Cambridge ; New York, NY, 2018), p. 034303.
- ³²W. H. Zurek, “Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical”, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 715–775 (2003).
- ³³P. Kok, W. J. Munro, K. Nemoto, T. C. Ralph, J. P. Dowling e G. J. Milburn, “Linear optical quantum computing with photonic qubits”, *Rev. Mod. Phys.* **79**, 135–174 (2007).
- ³⁴K. Saeedi, S. Simmons, J. Z. Salvail, P. Dluhy, H. Riemann, N. V. Abrosimov, P. Becker, H.-J. Pohl, J. J. L. Morton e M. L. W. Thewalt, “Room-Temperature Quantum Bit Storage Exceeding 39 Minutes Using Ionized Donors in Silicon-28”, *Science* **342**, 830–833 (2013).
- ³⁵R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki e K. Horodecki, “Quantum entanglement”, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 865–942 (2009).
- ³⁶F. Bussières, C. Clausen, A. Tiranov, B. Kozh, V. Verma, S. Nam, F. Marsili, A. Ferrier, P. Goldner, H. Herrmann, C. Silberhorn, W. Sohler, M. Afzelius e N. Gisin, “Quantum teleportation from a telecom-wavelength photon to a solid-state quantum memory”, *Nature Photonics* **8**, 775–778 (2014).
- ³⁷X.-L. Wang, X.-D. Cai, Z.-E. Su, M.-c. Chen, D. Wu, L. Li, N.-L. Liu, C.-Y. Lu e J.-W. Pan, “Quantum teleportation of multiple degrees of freedom of a single photon”, *Nature* **518**, 516–9 (2015).
- ³⁸W. Pfaff, B. J. Hensen, H. Bernien, S. B. van Dam, M. S. Blok, T. H. Taminiau, M. J. Tigelman, R. N. Schouten, M. Markham, D. J. Twitchen e R. Hanson, “Unconditional quantum teleportation between distant solid-state quantum bits”, *Science* **345**, 532–535 (2014).
-

-
- ³⁹H. Krauter, D. Salart, C. A. Muschik, J. M. Petersen, H. Shen, T. Fernholz e E. S. Polzik, “Deterministic quantum teleportation between distant atomic objects”, *Nature Physics* **9**, 400–404 (2013).
- ⁴⁰D. P. DiVincenzo, “The Physical Implementation of Quantum Computation”, *Fortschritte der Physik* **48**, 771–783 (2000).
- ⁴¹M. Schlosshauer, “Decoherence, the measurement problem, and interpretations of quantum mechanics”, *Reviews of Modern Physics* **76**, 1267–1305 (2005).
- ⁴²G. Nikolopoulos e I. Jex, *Quantum State Transfer and Network Engineering*, vol. 72, *Quantum Science and Technology* (Springer Berlin Heidelberg, 2013), p. 034303.
- ⁴³J. I. Cirac, P. Zoller, H. J. Kimble e H. Mabuchi, “Quantum State Transfer and Entanglement Distribution among Distant Nodes in a Quantum Network”, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 3221–3224 (1997).
- ⁴⁴H. J. Kimble, “The quantum internet”, *Nature* **453**, 1023–1030 (2008).
- ⁴⁵S. Simon, *The Oxford Solid State Basics*, vol. 72 (OUP Oxford, 2013), p. 034303.
- ⁴⁶N. Ashcroft e N. Mermin, *Solid State Physics*, vol. 72, HRW international editions (Holt, Rinehart e Winston, 1976), p. 034303.
- ⁴⁷A. Abelém, G. Vardoyan e D. Towsley, “Quantum Internet: The Future of Internetworking”, em *Minicursos do XXXVIII Simpósio Brasileiro de Redes de Computadores e Sistemas Distribuídos*, vol. 72 (SBC, dez. de 2020), 48–90.
- ⁴⁸M. Mastriani, “Simplified entanglement swapping protocol for the quantum Internet”, *Scientific Reports* **13**, 21998 (2023).
- ⁴⁹J. Yin e et al., *Satellite-Based Entanglement Distribution Over 1200 kilometers*, 2017.
- ⁵⁰F. Arute e et al., “Quantum supremacy using a programmable superconducting processor”, *Nature* **574**, 505–510 (2019).
- ⁵¹E. Pednault, J. A. Gunnels, G. Nannicini, L. Horesh e R. Wisnieff, *Leveraging Secondary Storage to Simulate Deep 54-qubit Sycamore Circuits*, 2019.
- ⁵²J. Preskill, “Plug-in quantum software”, *Nature* **402**, 357–358 (1999).
- ⁵³R. Chao e B. W. Reichardt, “Fault-tolerant quantum computation with few qubits”, *npj Quantum Information* **4**, 034303 (2018).
- ⁵⁴P. W. Shor, *Fault-tolerant quantum computation*, 1997.
- ⁵⁵W. Heisenberg, “Zur Theorie des Ferromagnetismus”, *Z. Physik* **49**, 619–636 (1928).
- ⁵⁶D. J. Griffiths, *Introduction to electrodynamics; 4th ed.* Vol. 72, Re-published by Cambridge University Press in 2017 (Pearson, Boston, MA, 2013), p. 034303.
- ⁵⁷W. Heisenberg, “Mehrkörperproblem und Resonanz in der Quantenmechanik”, *Z. Physik* **38**, 411–426 (1926).
- ⁵⁸P. A. M. Dirac e R. H. Fowler, “On the theory of quantum mechanics”, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character* **112**, 661–677 (1926).
- ⁵⁹C. B. Thierry Giamarchi Anibal Iucci, “Introduction to Many Body physics”, *Phys. Rev. A* **72**, 034303 (2008).
- ⁶⁰M. Christandl, N. Datta, A. Ekert e A. J. Landahl, “Perfect State Transfer in Quantum Spin Networks”, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 187902 (2004).
-

-
- ⁶¹M.-H. Yung e S. Bose, “Perfect state transfer, effective gates, and entanglement generation in engineered bosonic and fermionic networks”, *Phys. Rev. A* **71**, 032310 (2005).
- ⁶²C. Albanese, M. Christandl, N. Datta e A. Ekert, “Mirror Inversion of Quantum States in Linear Registers”, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 230502 (2004).
- ⁶³M. Christandl, N. Datta, T. C. Dorlas, A. Ekert, A. Kay e A. J. Landahl, “Perfect transfer of arbitrary states in quantum spin networks”, *Physical Review A* **71**, 034303 (2005).
- ⁶⁴G. De Chiara, D. Rossini, S. Montangero e R. Fazio, “From perfect to fractal transmission in spin chains”, *Physical Review A* **72**, 034303 (2005).
- ⁶⁵T. Shi, Y. Li, Z. Song e C.-P. Sun, “Quantum-state transfer via the ferromagnetic chain in a spatially modulated field”, *Phys. Rev. A* **71**, 032309 (2005).
- ⁶⁶A. Kay e M. Ericsson, “Geometric effects and computation in spin networks”, *New Journal of Physics* **7**, 143–143 (2005).
- ⁶⁷P. W. Anderson, “Absence of Diffusion in Certain Random Lattices”, *Phys. Rev.* **109**, 1492–1505 (1958).
- ⁶⁸R. Zallen, *The Physics of Amorphous Solids*, vol. 72, Physics textbook (Wiley, 2008), p. 034303.
- ⁶⁹E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello e T. V. Ramakrishnan, “Scaling Theory of Localization: Absence of Quantum Diffusion in Two Dimensions”, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 673–676 (1979).
- ⁷⁰K. Broderix, D. Hundertmark, W. Kirsch e H. Leschke, “The fate of Lifshits tails in magnetic fields”, *Journal of Statistical Physics* **80**, 1–22 (1995).
- ⁷¹B. Kramer e A. MacKinnon, “Localization: Theory and experiment”, *Rep. Prog. Phys.* **56**, 1469–1564 (1993).
- ⁷²P. A. Lee e T. V. Ramakrishnan, “Disordered electronic systems”, *Rev. Mod. Phys.* **57**, 287–337 (1985).
- ⁷³D. Belitz e T. R. Kirkpatrick, “Order parameter description of the Anderson-Mott transition”, *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter* **98**, 513–526 (1995).
- ⁷⁴R. F. Dutra, D. M. dos Santos, C. V. C. Mendes e F. A. B. F. de Moura, *Elementos da Teoria da Localização de Anderson*, vol. 72 (American Physical Society, 2020), p. 034303.
- ⁷⁵F. A. B. F. de Moura e M. L. Lyra, “Delocalization in the 1D Anderson Model with Long-Range Correlated Disorder”, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3735–3738 (1998).
- ⁷⁶C. G. Fox, “Empirically derived relationships between fractal dimension and power law form frequency spectra”, *pure and applied geophysics* **131**, 211–239 (1989).
- ⁷⁷A. Zwick, G. Alvarez, J. Stolze e O. Osenda, “Optimal quantum state transfer in disordered spin chains”, *Phys. Rev. A* **72**, 034303 (2013).
- ⁷⁸A. Wójcik, T. Łuczak, A. Grudka, T. Gdala e M. Bednarska, “Multiuser quantum communication networks”, *Phys. Rev. A* **75**, 022330 (2007).
- ⁷⁹G. M. A. Almeida, F. Ciccarello, T. J. G. Apollaro e A. M. C. Souza, “Quantum-state transfer in staggered coupled-cavity arrays”, *Phys. Rev. A* **93**, 032310 (2016).
- ⁸⁰A. KAY, “PERFECT, EFFICIENT, STATE TRANSFER AND ITS APPLICATION AS A CONSTRUCTIVE TOOL”, *International Journal of Quantum Information* **08**, 641–676 (2010).
- ⁸¹P. Karbach e J. Stolze, “Spin chains as perfect quantum state mirrors”, *Phys. Rev. A* **72**, 030301 (2005).
-

-
- ⁸²T. J. G. Apollaro e F. Plastina, “Entanglement localization by a single defect in a spin chain”, *Physical Review A* **74**, 022330 (2006).
- ⁸³G. M. Almeida, F. A. de Moura e M. L. Lyra, “Quantum-state transfer through long-range correlated disordered channels”, *Physics Letters A* **382**, 1335–1340 (2018).
- ⁸⁴G. M. A. Almeida, F. A. B. F. de Moura, T. J. G. Apollaro e M. L. Lyra, “Disorder-assisted distribution of entanglement in XY spin chains”, *Physical Review A* **96**, 022330 (2017).

APÊNDICES

A Postulados da mecânica quântica

Compreendemos que a mecânica quântica é a base fundamental para os estudos deste trabalho, e este apêndice é dedicado à definição dos postulados da M.Q. [29], acompanhada por algumas demonstrações e comentários pertinentes.

Postulado 1. *Em um tempo fixo t_0 , o estado de um sistema físico isolado é definido ao especificar um ket $|\psi(t_0)\rangle$ pertencente ao espaço de estados \mathcal{E} .*

No contexto em que estamos inseridos no presente trabalho, o espaço de estados em que nos interessa é o espaço de **Hilbert** \mathcal{H} , como já definimos na Subseção 1.1.

Postulado 2. *Toda quantidade física mensurável \mathcal{A} é descrita por um operador A atuando em \mathcal{E} , onde este operador é um observável.*

Postulado 3. *O único resultado possível da medição de uma quantidade física \mathcal{A} é um dos autovalores do observável A correspondente.*

Postulado 4. (Caso de um espectro discreto não degenerado) *Quando a quantidade física \mathcal{A} é medida em um sistema no estado normalizado $|\psi\rangle$, a probabilidade $\mathcal{P}(a_n)$ de obter o autovalor não degenerado a_n do observável A correspondente é:*

$$\mathcal{P}(a_n) = |\langle u_n | \psi \rangle|^2$$

Onde $|u_n\rangle$ é o autovetor normalizado de A associado ao autovalor a_n .

Postulado 4. (Caso de um espectro discreto degenerado) *Quando a quantidade física \mathcal{A} é medida em um sistema no estado normalizado $|\psi\rangle$, a probabilidade $\mathcal{P}(a_n)$ de obter o autovalor não degenerado a_n do observável A correspondente é:*

$$\mathcal{P}(a_n) = \sum_{i=1}^{g_n} |\langle u_n^i | \psi \rangle|^2$$

Onde g_n é o grau de degenerescência de a_n e $\{|u_n^i\rangle\} (i = 1, 2, \dots, g_n)$ é um conjunto de vetores ortonormais que formam uma base no subespaço próprio de \mathcal{E} associado ao autovalor a_n do observável A .

Postulado 4. (Caso de um espectro contínuo não degenerado) *Quando a quantidade física \mathcal{A} é medida em um sistema no estado normalizado $|\psi\rangle$, a probabilidade $d\mathcal{P}(\alpha)$ de obter o resultado entre α e $\alpha + d\alpha$ é igual a:*

$$d\mathcal{P}(\alpha) = |\langle v_\alpha | \psi \rangle|^2 d\alpha$$

Onde $|v_\alpha\rangle$ é o autovetor correspondente ao autovalor α do observável A associado à quantidade física \mathcal{A} .

Postulado 5. *Se a medida da quantidade física \mathcal{A} do sistema no estado $|\psi\rangle$ resultar em a_n , o estado do sistema imediatamente após a medida será a projeção normalizada, $\frac{P_n|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|P_n|\psi\rangle}}$, de $|\psi\rangle$ no subespaço próprio associado.*

Postulado 6. *A evolução temporal do estado $|\psi(t)\rangle$ é governada pela equação de Schrödinger:*

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle$$

Onde $H(t)$ é o observável associado à energia total do sistema (hamiltoniano).

B Demonstração sistema de 2 níveis

No contexto da transferência de estado quântico, o sistema mais elementar é um sistema de 2 níveis. Esse sistema representa um sistema quântico que pode se encontrar em qualquer superposição dos dois estados quânticos independentes, que são fisicamente distinguíveis.

O espaço de Hilbert \mathcal{H} que descreve tal sistema possui duas dimensões. Assim, uma base completa que caracteriza esse espaço será composta por dois estados independentes, utilizaremos a base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. Qualquer sistema composto por dois estados também pode ser utilizado como um qubit.

Portanto, vamos considerar um sistema de 2 níveis descritos pela seguinte hamiltoniana:

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} \epsilon & J \\ J & \epsilon \end{bmatrix} \quad (28)$$

Esse sistema é familiar para nós, pois é exatamente o sistema que estamos abordando neste trabalho, em sua forma mais simplificada. Então, como estamos interessados em saber a QST dos estados desse sistema, vamos então preparar o estado inicial no primeiro estado da cadeia, ou seja, $|\psi(t=0)\rangle = |0\rangle$ e por simplicidade vamos utilizar $\epsilon = 0$ e $J = 1$, assim nossa matriz hamiltoniana será:

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

Agora, devemos resolver a equação de Schrödinger e podemos então diagonalizar nossa Hamiltoniana a fim de evoluir no tempo utilizando o operador de evolução temporal, para a diagonalização basta utilizarmos a equação secular:

$$\det(H - \lambda\mathbb{I}) = 0 \quad (30)$$

Diagonalizando:

$$\det \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (31)$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0$$

Dessa forma, encontramos as seguintes auto-energias: $\lambda = \pm 1$. Agora devemos encontrar os auto-estados associados: Para isso basta utilizarmos a equação de auto-estados:

$$H |\varphi\rangle = \lambda |\varphi\rangle \quad (32)$$

Para $\lambda_1 = +1$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = +1 \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \quad (33)$$

Assim, encontramos que $\beta_1 = \alpha_1$, portanto nosso auto-estado associado à auto-energia $\lambda_1 = +1$ será:

$$|\varphi_1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} \quad (34)$$

Visto que nosso auto-estado deve ser normalizado, teremos então:

$$|\varphi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |\varphi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \quad (35)$$

Agora, para $\lambda_2 = -1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \quad (36)$$

Assim, encontramos que $\beta_2 = -\alpha_2$, portanto nosso auto-estado associado à auto-energia $\lambda_2 = -1$ será:

$$|\varphi_2\rangle = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ -\alpha_2 \end{bmatrix} \quad (37)$$

Visto que nosso auto-estado deve ser normalizado, teremos então:

$$|\varphi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |\varphi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \quad (38)$$

Com os auto-estados do hamiltoniano $|\varphi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ e $|\varphi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$ em mãos, podemos então encontrar a relação entre a base do hamiltoniano $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ com a base diagonal $\{|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle\}$, visto que nosso estado inicial $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$, então basta encontrarmos a relação entre as bases para o estado $|0\rangle$.

Tomemos $|\varphi_1\rangle + |\varphi_2\rangle$:

$$\begin{aligned} [|\varphi_1\rangle + |\varphi_2\rangle] &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \\ [|\varphi_1\rangle + |\varphi_2\rangle] &= \frac{2}{\sqrt{2}}|0\rangle = \sqrt{2}|0\rangle \\ \therefore |0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[|\varphi_1\rangle + |\varphi_2\rangle] \end{aligned} \quad (39)$$

Agora que encontramos $|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\varphi_1\rangle + |\varphi_2\rangle]$ e nosso estado inicial é $|\psi(0)\rangle = |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\varphi_1\rangle + |\varphi_2\rangle]$, podemos efetuar a evolução temporal através do operador de evolução temporal $\hat{U} = e^{-iHt/\hbar}$, dessa forma:

$$\begin{aligned} |\psi(0)\rangle &= |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\varphi_1\rangle + |\varphi_2\rangle] \\ \hat{U}|\psi(0)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\hat{U}|\varphi_1\rangle + \hat{U}|\varphi_2\rangle] \\ |\psi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[e^{-i\lambda_1 t/\hbar}|\varphi_1\rangle + e^{-i\lambda_2 t/\hbar}|\varphi_2\rangle] \\ |\psi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[e^{-it/\hbar}|\varphi_1\rangle + e^{it/\hbar}|\varphi_2\rangle] \end{aligned} \quad (40)$$

Pronto, já efetuamos a evolução temporal, agora temos que retornar à base do hamiltoniano $\{|0\rangle, |1\rangle\}$:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[e^{-it/\hbar}|\varphi_1\rangle + e^{it/\hbar}|\varphi_2\rangle] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e^{-it/\hbar} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) + e^{it/\hbar} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \right] \\ &= \frac{1}{2} [e^{-it/\hbar}(|0\rangle + |1\rangle) + e^{it/\hbar}(|0\rangle - |1\rangle)] \end{aligned} \quad (41)$$

Separando os estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$ da nossa expressão:

$$\begin{aligned}
 |\psi(t)\rangle &= \frac{1}{2} [e^{-it/\hbar}(|0\rangle + |1\rangle) + e^{it/\hbar}(|0\rangle - |1\rangle)] \\
 &= \frac{1}{2} [(e^{-it/\hbar} + e^{it/\hbar})|0\rangle + (e^{-it/\hbar} - e^{it/\hbar})|1\rangle] \\
 &= \frac{e^{-it/\hbar} + e^{it/\hbar}}{2}|0\rangle + \frac{e^{-it/\hbar} - e^{it/\hbar}}{2}|1\rangle \\
 &= \frac{e^{it/\hbar} + e^{-it/\hbar}}{2}|0\rangle - \frac{e^{it/\hbar} - e^{-it/\hbar}}{2}|1\rangle
 \end{aligned} \tag{42}$$

Podemos então utilizar as relações de Euler a fim de encontrar uma expressão mais amigável:

$$\begin{aligned}
 |\psi(t)\rangle &= \frac{e^{it/\hbar} + e^{-it/\hbar}}{2}|0\rangle - \frac{e^{it/\hbar} - e^{-it/\hbar}}{2}|1\rangle \\
 &= \frac{e^{it/\hbar} + e^{-it/\hbar}}{2}|0\rangle - i \frac{e^{it/\hbar} - e^{-it/\hbar}}{2i}|1\rangle \\
 &= \cos\left(\frac{t}{\hbar}\right)|0\rangle - i \sin\left(\frac{t}{\hbar}\right)|1\rangle
 \end{aligned} \tag{43}$$

Podemos então realizar uma medida a fim de descobrir a probabilidade de se medir o estado $|0\rangle$ em um instante de tempo t qualquer e comparar com a expressão que encontramos com nossa simulação computacional, assim basta tomarmos:

$$\begin{aligned}
 |\langle 0|\psi(t)\rangle|^2 &= |\langle 0|[\cos\left(\frac{t}{\hbar}\right)|0\rangle - i \sin\left(\frac{t}{\hbar}\right)|1\rangle]|^2 \\
 &= |\cos\left(\frac{t}{\hbar}\right)\langle 0|0\rangle|^2 = \cos^2\left(\frac{t}{\hbar}\right)
 \end{aligned} \tag{44}$$

como a Figura 15 nos mostra esse comparativo:

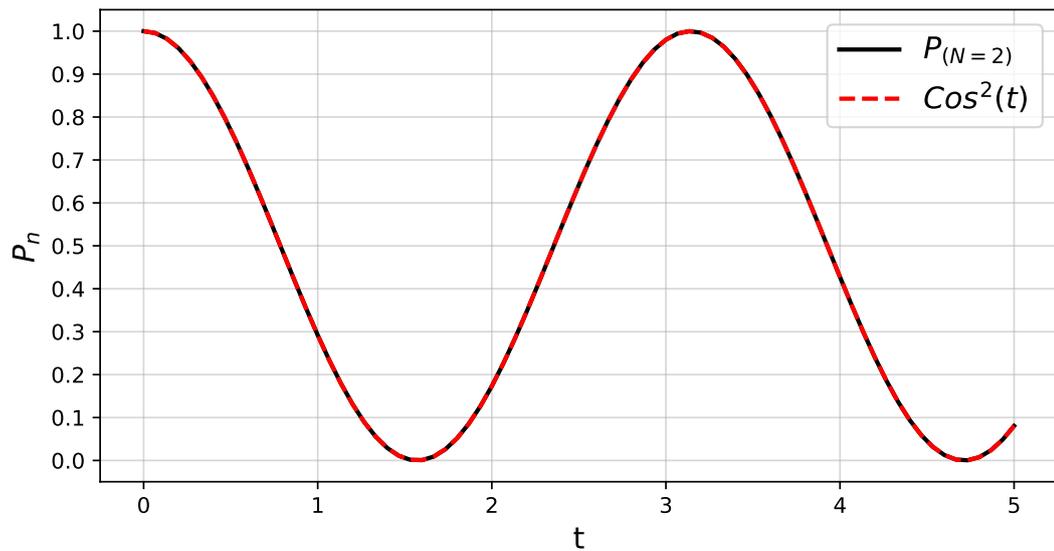


Figura 15: Sistema de 2 níveis: Comparativo da probabilidade de se medir o estado $|0\rangle$ entre a expressão encontrada analiticamente com a gerada à partir dos métodos computacionais ($\hbar = 1$).

Fonte: Autor.

ANEXOS

1 Códigos desenvolvidos

Segue alguns anexos referente alguns programas e códigos desenvolvidos no decorrer do trabalho apresentado:

```
# -----
#Programa desenvolvido por: Ronald Santos Cavalcante
#Instituto de Fisica - UFAL
#Pesquisa em desenvolvimento...
# -----

import numpy as np
import scipy.linalg as la
import sys

from plot import *
import matplotlib.pyplot as plt

# Define a funcao para evolucao temporal dos estados
def time_evolution(H, psi0, t_list):
    n = H.shape[0]
    psi_t = np.zeros((len(t_list), n), dtype=complex)
    for i, t in enumerate(t_list):
        psi_t[i, :] = la.expm(-1j * H * t).dot(psi0)
    return psi_t

# Define a matriz Hamiltoniana
def MatrizTridiagonal(Principal, Secundaria):
    # Length da array diagonal
    N = len(Principal)
    # Matriz nula
    Matriz = np.zeros((N, N), dtype='complex')
    # Montar diagonais
    Matriz[0, 0] = Principal[0]
    for i in range(1, N):
        Matriz[i, i] = Principal[i]
        Matriz[i - 1, i] = Secundaria[i - 1]
        Matriz[i, i - 1] = np.conjugate(Secundaria[i - 1])
    return Matriz

def Correlacao(N, alpha):
    phi = np.random.uniform(0, 2*np.pi, int(N/2)) # gerando
                                                    # numeros aleatorios phi_k
    omega = np.zeros(N) # inicializando o array omega com
                                                                # zeros

    for n in range(1, N+1):
        for k in range(1, int(N/2)+1):
```

```

        omega[n-1] += k**(-alpha/2)*np.cos(2*np.pi*n*k/N +
                                             phi[k-1])

omega_mean = np.mean(omega) # calculando a media de omega
omega_var = np.var(omega) # calculando a variancia de omega

omega = (omega - omega_mean)/np.sqrt(omega_var -
                                       omega_mean**2) # normalizando o array
omega[0] = 0.0
omega[N-1] = 0.0
return omega

```

```

# Funcao Principal
def Main(n, J, g, alpha, t_total, dt):
    DiagonalPrincipal = Correlacao(N = n, alpha = alpha) # <--
        #Define os elementos da Diagonal Principal
    DiagonalSecundaria = np.array([
    g if (i == 0 or i == n - 2) else ] # <-- Define os
        #elementos da Diagonal Secundaria
    for i in range(n - 1)])

# Cria a matriz Hamiltoniana
H = MatrizTridiagonal(DiagonalPrincipal, DiagonalSecundaria)

# Definir o estado inicial
psi0 = np.zeros(n)
psi0[0] = 1

# Definir o tempo e numero de passos
t_list = np.linspace(0, t_total, dt*t_total+1)

# Efetuar a evolucao temporal dos estados
psi_t = time_evolution(H, psi0, t_list)

# Calcular a probabilidade de cada estado ao longo do tempo
prob = np.abs(psi_t)**2

# Armazenar a probabilidade x tempo de cada estado em
        #um arquivo .dat
np.savetxt(f"prob_time-N={n},g=0.51.dat", np.hstack(
        (t_list[:, np.newaxis], prob)))
#data = np.column_stack((t_list, prob[:, 0], prob[:,
        n-1], np.sum(prob[:, 1:n-1], axis=1)))
#np.savetxt(f"dados_experimento_N={n},g=042.dat", data,
        comments='')

max_prob = np.max(prob[:, n-1]) # <-- Probabilidade
        #maxima no ultimo estado

```

```

max_index = np.argmax(prob[:, n-1]) # <-- Indice do tempo
#em que a probabilidade e maxima
max_time = t_list[max_index] # <-- Tempo em que a probabi-
#lidade e maxima

'''
# Plotar a probabilidade x tempo de cada estado
plt.figure(figsize=(8,4))

#for i in range(n):
#    if i == 0 or i==n-1: # <-- Condicional para plotar
#apenas os estados 1 e n
#        PlotArray(t_list , prob[:, i],
#                    label="Estado {}".format(i+1))

PlotArray(t_list , prob[:, 0], color='black',
           linestyle='-', label="n = {}".format(0+1))
PlotArray(t_list , prob[:, n-1], color='red',
           linestyle='--', label="n = {}".format(n))
plt.grid(alpha=0.5)
plt.xlabel(r"Tempo (  $J^{-1}$  )", fontsize=20) # <-- Nome
#do eixo X
plt.ylabel(r"$P_n$", fontsize=20) # <-- Nome do eixo Y

plt.xticks(np.arange(0, t_total+0.1, t_total/10),
           fontsize=16) # <-- Espacamento do eixo X
plt.yticks(np.arange(0, 1.1, 0.25), fontsize=16) # <--
#Espacamento do eixo Y

plt.legend(fontsize="20", loc=1)
#plt.savefig("ProbXTimeUniforme-N={}.pdf".format(n),
#           bbox_inches='tight', pad_inches=0.1)

plt.show()
'''
# ---
return max_prob, max_time

```

```

# Loop das amostragens p/ tirar media
for n_amostra in range(1,100+1):
    print(f'Inicio da amostra {n_amostra}...')
    filename = 'InsiraUmNome{:03d}.dat'.format(n_amostra)

    with open(filename, "w") as Dados:
        g = 0.01 # <-- Energia de Hopping das bordas da
#cadeia
        J = 1.0 # <-- Energia de Hopping

```

```

n = 80          # <-- Numero de estados do sistema
alpha = 2.0    # <-- Alpha da distribuicao corre-
                #lacionada

for hopping in np.arange(g, 0.71, 0.01):

    if(hopping<=0.2):
        t_total = 7800 # <-- Tempo total da
                        #simulacao
        #dt = 1 # <-- Espacamento do linespace
    elif(hopping>0.2 and hopping<=0.3):
        t_total = 4500 # <-- Tempo total da
                        #simulacao
        #dt = 1 # <-- Espacamento do linespace
    elif(hopping>0.3 and hopping<=0.35):
        t_total = 4000 # <-- Tempo total da
                        #simulacao
        #dt = 1 # <-- Espacamento do linespace
    elif(hopping>0.35 and hopping<=0.4):
        t_total = 2800 # <-- Tempo total da
                        #simulacao
        #dt = 1 # <-- Espacamento do linespace
    else:
        t_total=200 # <-- Tempo total da
                    #simulacao
        #dt = 1 # <-- Espacamento do linespace

    valor, tempo = Main(n=80, J=J, g=hopping,
                        alpha=alpha, t_total=t_total, dt=1)
    Dados.write(f'{hopping:.3f} {valor} {tempo}\n')
    print(f'g={hopping}')
print(f'Fim da amostra {n_amostra}.')

print(f'Fim do programa')

```

```

# Feito por: Ronald Santos Cavalcante
#
# Programa destinado ao Plot de graficos cientificos
# Contem rotinas prontas para o Plot de graficos a partir
# de um Database ou Arrays
# E possivel modificar a aparencia das figuras , basta defi-
# nir a maneira que deseja ser apresentada
# ---

from matplotlib import pyplot as plt
import numpy as np

```

```

def PlotData(Input):
    #Bibliotecas Utilizadas
    from matplotlib import pyplot as plt
    import numpy as np

    # --- Input --- #
    t, E1, EN, Canal = np.loadtxt(Input, unpack=True) # <--
    #Le as colunas do arquivo .dat e armazena nas variaveis x e y

    # --- SETUP / APARENCIA DO GRAFICO --- #
    plt.figure(figsize=(8, 4)) # <-- Figura (Parametros
                                #importantes: figsize(x,y))
    #plt.title("Grafico", fontsize=16) # <-- Titulo
    plt.xlabel(r"Tempo (  $J^{-1}$  )", fontsize=16) # <-- Nome
                                                #do eixo X
    plt.ylabel(r"$P_n$", fontsize=16) # <-- Nome do eixo Y
    plt.grid(alpha=0.5) # <-- Grade
    plt.plot(t, E1, color="black", lw=2.0,
             marker="", linestyle="--", label="n=01") # <--
    #Figura (Parametros importantes: color, lw, marker, linestyle)
    plt.plot(t, EN, color="red", lw=2.0,
             marker="", linestyle="--", label="n=79") # <--
    #Figura (Parametros importantes: color, lw, marker, linestyle)
    plt.plot(t, Canal, color="green", lw=2.0,
             marker="", linestyle="--", label="Canal") # <--
    #Figura (Parametros importantes: color, lw, marker, linestyle)
    plt.xticks(np.arange(0, 1600.1, 350), fontsize=16) # <--
    #Espacamento do eixo X
    plt.ticklabel_format(style='sci', axis='x',
                        scilimits=(0,0))
    plt.yticks(np.arange(0, 1.1, 0.25), fontsize=16) # <--
    #Espacamento do eixo Y

    # --- Output --- #
    plt.legend(fontsize="16")
    plt.savefig("Imagem-01.pdf", bbox_inches='tight',
              pad_inches=0.1)

    plt.show() # <-- Mostrar grafico na tela

```

Obviamente houveram muitos outros códigos envolvidos no decorrer da pesquisa, inclusive outras linguagens como C, C++ e FORTRAN também foram utilizadas, no entanto não é o intuito do trabalho demonstrar todos os códigos mas apenas uma amostra dos mesmos e seus resultados.