

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA**

EDCARLOS PEREIRA

**A UTILIZAÇÃO DE APPLETS NO GEOGEBRA PARA A
APRENDIZAGEM DA TRIGONOMETRIA NO ENSINO MÉDIO**

**MACEIÓ - AL
2015**

EDCARLOS PEREIRA

**A UTILIZAÇÃO DE APPLETS NO GEOGEBRA PARA A
APRENDIZAGEM DA TRIGONOMETRIA NO ENSINO MÉDIO**

Dissertação apresentada à banca examinadora como requisito parcial à obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática – Área de Concentração “Ensino de Matemática”, pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Alagoas.

Orientador: Prof. Dr. Ediel Azevedo Guerra

**MACEIÓ - AL
2015**

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário Responsável: Valter dos Santos Andrade

- P436u Pereira, Edcarlos
 A utilização de Applets no Geogebra para a aprendizagem da Trigonometria no Ensino médio / Edcarlos Pereira – 2015.
 118 f. il.
- Orientador: Ediel Azevedo Guerra.
Dissertação (mestrado profissional em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Centro de Educação. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Maceió, 2015.
- Bibliografia: f. 94-95.
Apêndices: f. 96-118.
1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Trigonometria. 3. Software GeoGebra. 3. Applet. 4. Blog. 5. Sequência didática. I. Título.

CDU: 37:514.116

Dedico este trabalho a minha mãe,
Elisa Pereira Rocha e ao meu pai José Ursulino Pereira da Silva.

AGRADECIMENTOS

A Deus, que me concedeu a realização deste sonho.

Aos meus pais pelo apoio constante.

A minha esposa Andréa pela sua paciência e compreensão.

Aos meus irmãos, especialmente ao Eliton pelo incentivo e ao Augusto pelas sugestões em relação à organização do texto.

Ao Prof. Dr. Ediel Azevedo Guerra pelas suas sugestões e correções do texto.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática – UFAL.

Aos colegas de Curso que direta ou indiretamente me incentivaram.

Aos amigos de trabalho e de convívio.

*"Não há nenhum ramo da Matemática,
por mais abstrato que seja,
que não possa um dia ser aplicado a fenômenos do mundo real"*

(NICOLAI LOBACHEVSKY)

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo principal a criação, a execução e a análise de uma sequência didática de caráter interativo e dinâmico que propicie a aprendizagem dos conceitos fundamentais da trigonometria no ensino médio. As atividades da sequência incluem oito Applets (mini-aplicações) no software GeoGebra juntamente com oito atividades investigativas. A intervenção metodológica foi realizada com alunos da segunda série do Ensino Médio de uma escola pública da cidade de Marechal Deodoro, AL. Tomou-se como base os seguintes referenciais teórico-metodológicos: Engenharia Didática de Michèle Artigue, Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau e Teoria de Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. Os resultados, após a análise das atividades, apontam que os Applets são um recurso didático que tornam as aulas mais dinâmicas, motivando os estudantes e favorecendo a construção de conjecturas, de propriedades e de relações trigonométricas. Os produtos educacionais desta dissertação são um CD e um blog com a sequência didática que foi desenvolvido, aplicado e analisado, envolvendo relações trigonométricas com o uso do GeoGebra, que podem ser utilizados pelos professores e alunos do ensino médio. O CD produzido encontra-se nos anexos desta dissertação e o endereço do blog é o seguinte: <http://edcarlospereira.wix.com/trigonometriaapplets>.

Palavras-chave: GeoGebra. Trigonometria. Applet. Blog. Sequência Didática.

ABSTRACT

This paper aims is to create, execute, and analyze an interactive and dynamic didactic sequence that provides the learning of fundamental concepts of trigonometry in High School. The activities of the sequence include eight Applets (mini-application) in the software GeoGebra with eight investigative activities. The methodological intervention was applied to students from the second grade of a public High School in Marechal Deodoro, AL. The study was based on the following theoretical-methodological references: Didactic Engineering by Michèle Artigue, Theory Didactical Situations by Guy Brousseau and Theory of Register of Semiotic Representation by Raymond Duval. The results, after the analysis of activities, show that the Applets are a didactic tool that makes the classes more dynamic, motivating the students and promoting the construction of conjectures, proprieties and trigonometric relations. The educational products of this dissertation are a CD and a blog with the didactical sequence was developed, applied and analyzed, involving trigonometric relations with the use of GeoGebra, that may be used by teachers and students from High School. The CD is attached to this dissertation and the blog is available in: <http://edcarlospereira.wix.com/trigonometriaapplets>.

Keywords: GeoGebra. Trigonometry. Applet. Blog. Didactic Sequence.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Função polinomial do 1º grau	19
Figura 2 – Janela Gráfica do GeoGebra.	21
Figura 3 – Reta passando pelos pontos A e B e Circunferência de centro C.	22
Figura 4 – Teorema de Pitágoras – Demonstração de Perigal.....	43
Figura 5 – Retas paralela e perpendicular à hipotenusa – Figura 5(a) e Quadrado médio cortado pelas retas – Figura 5(b).	44
Figura 6 – Aplicações do Teorema de Pitágoras.....	45
Figura 7 – Triângulo Retângulo.	45
Figura 8 – Triângulo retângulo e escaleno.	46
Figura 9 – Triângulo retângulo e isósceles.....	46
Figura 10 – Triângulo equilátero.....	47
Figura 11 – Circunferência dividida em 360 partes.	48
Figura 12 – Comprimento da Circunferência.....	49
Figura 13 – Círculo trigonométrico em quadrantes.....	50
Figura 14 – Sentidos do Círculo trigonométrico.....	50
Figura 15 – Círculo trigonométrico.....	51
Figura 16 – Círculo trigonométrico 2.....	51
Figura 17 – Seno de 90 – Figura 17(a) e Seno de 270 graus – Figura 17(b).....	52
Figura 18 – Simetria do ponto P em relação ao eixo y – Seno.....	53
Figura 19 – Simetria do ponto P em relação à origem – Seno.	53
Figura 20 – Simetria do ponto P em relação ao eixo x – Seno.....	54
Figura 21 – Cosseno de 0 – Figura 21(a) e Cosseno de 180 graus – Figura 21(b).....	55
Figura 22 – Simetria do ponto P em relação ao eixo y – Cosseno.	55
Figura 23 – Simetria do ponto P em relação à origem – Cosseno.....	56
Figura 24 – Simetria do ponto P em relação ao eixo x – Cosseno.	56
Figura 25 – Tangente no Círculo Trigonométrico.....	57
Figura 26 – Tangente de 65 graus – Figura 26(a) e Tangente de 115 graus – Figura 26(b).	58
Figura 27 – Simetria do ponto P em relação ao eixo y – Tangente.....	58
Figura 28 – Simetria do ponto P em relação à origem – Tangente.	59
Figura 29 – Simetria do ponto P em relação ao eixo x – Tangente.....	59
Figura 30 – Números reais associados a pontos na circunferência trigonométrica.....	60

Figura 31 – Gráfico da Função Seno.....	60
Figura 32 – Gráfico da Função Cosseno.	62
Figura 33 – Resposta da dupla 2 – Questão 1, Item a da Atividade 01.....	64
Figura 34 – Resposta da dupla 6 para a Questão 1, Item a, da Atividade 01.	65
Figura 35 – Resposta da dupla 5 – Questão 1, Item b da Atividade 01.....	66
Figura 36 – Resposta da dupla 3 – Questão 2 da Atividade 01.....	66
Figura 37 – Resposta da dupla 1 – Questão 3 da Atividade 01.....	67
Figura 38 – Resposta da dupla 2 – Questão 3 da Atividade 01.....	69
Figura 39 – Resposta da dupla 4 – Questão 1, Item a da Atividade 02.....	70
Figura 40 – Resposta da dupla 3 – Questão 1, Item b da Atividade 02.....	71
Figura 41 – Resposta da dupla 5 – Questão 2, Item a da Atividade 02.....	71
Figura 42 – Resposta da dupla 1 – Questão 2, Item b da Atividade 02.....	72
Figura 43 – Resposta da dupla 3 – Questão 3, Item a da Atividade 02.....	73
Figura 44 – Resposta da dupla 4 – Questão 3, Item b da Atividade 02.....	73
Figura 45 – Resposta da dupla 4 – Questão 4 da Atividade 02.....	74
Figura 46 – Resposta da dupla 2 – Questão 1, Item b da Atividade 03.....	75
Figura 47 – Resposta da dupla 3 – Questão 2 da Atividade 03.....	75
Figura 48 – Resposta da dupla 5 – Questão 3 da Atividade 03.....	76
Figura 49 – Resposta da dupla 3 – Questão 4 da Atividade 03.....	76
Figura 50 – Resposta da dupla 5 – Questão 1, item a da Atividade 04.....	78
Figura 51 – Resposta da dupla 6 – Questão 1, item b da Atividade 04.....	78
Figura 52 – Resposta da dupla 3 – Questão 2 da Atividade 04.....	79
Figura 53 – Resposta da dupla 4 – Questão 5 da Atividade 04.....	80
Figura 54 – Resposta da dupla 1 – Questão 1, item a da Atividade 05.....	81
Figura 55 – Resposta da dupla 5 – Questão 3 da Atividade 05.....	82
Figura 56 – Resposta da dupla 4 – Questão 4 da Atividade 05.....	82
Figura 57 – Resposta da dupla 5 – Questão 4 da Atividade 05.....	83
Figura 58 – Resposta da dupla 6 – Questão 2 da Atividade 06.....	84
Figura 59 – Resposta da dupla 2 – Questão 3 da Atividade 06.....	85
Figura 60 – Resposta da dupla 3 – Questão 1, item a da Atividade 07.....	86
Figura 61 – Resposta da dupla 1 – Questão 4 da Atividade 07.....	87
Figura 62 – Resposta da dupla 4 – Questão 1, item a da Atividade 08.....	88
Figura 63 – Resposta da dupla 5 – Questão 3 da Atividade 08.....	89

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Dados Obtidos do Questionário do Uso dos Recursos de Informática	33
Quadro 2 – Dados Obtidos do Questionário de Diagnóstico (Pré-Teste)	36
Quadro 3 – Ângulos Notáveis no Triângulo Retângulo	47
Quadro 4 – Ângulos Notáveis no Círculo Trigonométrico – Seno	60
Quadro 5 – Estudo dos Coeficientes da Função Seno do Tipo $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx + d)$	61
Quadro 6 – Ângulos Notáveis no Círculo Trigonométrico – Cosseno.....	62
Quadro 7 – Estudo dos Coeficientes da Função Cosseno do Tipo $f(x) = a + b \cdot \text{cos}(cx + d)$	62
Quadro 8 - Atividade 1 - Teorema de Pitágoras.....	70
Quadro 9 - Atividade 2 - Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo	74
Quadro 10 - Atividade 3 - Graus e Radianos	77
Quadro 11 - Atividade 4 - Círculo Trigonométrico	80
Quadro 12 - Atividade 5 - Seno no Círculo Trigonométrico	83
Quadro 13 - Atividade 6 - Cosseno no Círculo Trigonométrico.....	85
Quadro 14 - Atividade 7 - Tangente no Círculo Trigonométrico.....	88
Quadro 15 - Atividade 8 - Funções Trigonométricas Seno e Cosseno.....	90

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	12
1 O ENSINO DA TRIGONOMETRIA E O GEOGEBRA.....	16
1.1 Importância, desafio e consequências das TIC na sociedade moderna	16
1.2 O Software GeoGebra	19
1.3 Algumas Pesquisas acerca do Ensino de Trigonometria com o GeoGebra	22
2 REFERENCIAIS TEÓRICOS	25
2.1 Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau.....	25
2.2 Teoria de Representações Semióticas de Raymond Duval.....	26
2.3 Engenharia Didática	28
3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	30
3.1 Participantes	30
3.2 Os Encontros	30
3.3 Coleta de Dados.....	31
3.4 Questionário do Uso dos Recursos de Informática	31
3.5 Questionário de Diagnóstico (Pré-Teste)	35
3.6 Oficina com o Software GeoGebra	40
4 CRIAÇÃO E APRESENTAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA – APPLETS.....	42
4.1 Applet 01 – Um Teorema no Triângulo Retângulo - Demonstração de Perigal.....	43
4.2 Applet 02 – Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo	45
4.3 Applet 03 – Graus e Radianos	48
4.4 Applet 04 – Círculo Trigonométrico	49
4.5 Applet 05 – Seno no Círculo Trigonométrico	52
4.6 Applet 06 – Cosseno no Círculo Trigonométrico.....	54
4.7 Applet 07 – Tangente no Círculo Trigonométrico	56
4.8 Applet 08 – Funções Trigonométricas.....	59
5 ANÁLISE, DISCUSSÃO E RESULTADOS DAS ATIVIDADES	64
5.1 Atividade 01	64
5.2 Atividade 02	70
5.3 Atividade 03	75
5.4 Atividade 04	78
5.5 Atividade 05	81

5.6	Atividade 06	84
5.7	Atividade 07	86
5.8	Atividade 08	88
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	92
	REFERÊNCIAS	94
	APÊNDICES	96

INTRODUÇÃO

A trigonometria é um conteúdo de muitas aplicações científicas e tecnológicas. Essa afirmação pode ser facilmente constatada manuseando-se livros de astronomia, física, eletrotécnica, cartografia, construção civil etc. Entretanto, em minha prática de ensino tenho constatado a grande dificuldade dos estudantes na apropriação desse conteúdo.

Em minha revisão bibliográfica, verifiquei que essa minha constatação empírica era também corroborada por Dionizio & Brandt (2011), para quem os alunos do ensino médio têm muita dificuldade em compreender conceitos trigonométricos básicos devido a esses objetos matemáticos aparecerem usualmente de forma abstrata.

Ao conhecer um software educacional numa especialização intitulada *Educação Matemática com Novas Tecnologias* feita em 2010, percebi que este software poderia constituir-se em uma ferramenta didática para a minimização dos obstáculos dos alunos em relação à trigonometria. Assim, comecei a utilizar este software em minhas aulas, de forma experimental, sem organizar ou utilizar uma sequência didática e/ou seguir uma metodologia de ensino e pesquisa.

Diante dos bons resultados alcançados com o GeoGebra para a superação de algumas dificuldades dos estudantes com a trigonometria, fortaleceu-se em mim a certeza de que esse software poderia se constituir em uma ferramenta didática poderosa no ensino desse conteúdo. Dessa maneira, percebi que a criação de métodos mais atrativos, produtivos, dinâmicos e interativos de ensino e de aprendizagem da trigonometria haviam emergido, assim, para mim, como um desafio didático.

Ao ter a oportunidade de fazer o mestrado no PPGEICIM (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática – 2013), e ao deparar-me com esse desafio, senti-me motivado a criar uma sequência didática para o ensino e a aprendizagem dos conceitos fundamentais da trigonometria de caráter menos abstrato, com a mediação de um software educacional.

De um modo geral, a escolha de um software de geometria dinâmica adequado pode permitir visualizar, conjecturar, compreender propriedades e teoremas relacionados à trigonometria. O software GeoGebra foi escolhido para este trabalho pelos seguintes motivos:

além de ser o software educacional que eu utilizava em minha aulas, ele é um software de geometria dinâmica de fácil manipulação, também é um software livre e de fácil acesso, que qualquer pessoa pode baixar e instalar em seu computador pessoal.

Considerando o exposto, a pergunta norteadora que delineia essa pesquisa é a seguinte: Como o software GeoGebra pode propiciar a aprendizagem dos conceitos fundamentais da trigonometria no ensino médio?

Desse modo, o objetivo geral deste trabalho pode ser formulado nos seguintes termos: desenvolver, aplicar e analisar uma sequência didática de caráter interativa e dinâmica que possa propiciar a aprendizagem dos conceitos fundamentais da trigonometria no ensino médio.

Para melhor desenvolver este trabalho apresentam-se os seguintes objetivos específicos:

- Observar e analisar as construções dinâmicas de figuras geométricas e de gráficos de funções trigonométricas utilizando Applets¹.
- Conjeturar, por meio de atividades com o GeoGebra, propriedades, relações e equações trigonométricas;
- Investigar as potencialidades didáticas dos Applets utilizando o GeoGebra.

Esta dissertação será desenvolvida mediante as seguintes hipóteses:

1. As construções com applets motivam os estudantes e são capazes de oferecer uma boa compreensão visual do processo de argumentação de teoremas geométricos, propiciando a conversão do registro figural em registro vernacular;
2. As atividades de aprendizagem no GeoGebra, relativas à trigonometria, possibilitam ao estudante conjeturar propriedades, relações e equações trigonométricas.

A partir dos resultados obtidos no desenvolvimento, na aplicação e na análise da sequência didática, foram produzidos um CD e um blog que podem ser utilizados pelos professores e alunos do ensino médio na abordagem da trigonometria. O CD produzido se encontra nos anexos desta dissertação e o endereço do blog é o seguinte:

<http://edcarlospereira.wix.com/trigonometriaapplets>

¹ Applet é uma mini-aplicação que executa uma atividade bem específica, por exemplo: vídeos em Flash.

Este trabalho abrange exclusivamente os seguintes conceitos básicos da trigonometria: teorema de Pitágoras, razões trigonométricas no triângulo retângulo, graus e radianos, círculo trigonométrico, seno, cosseno e tangente no círculo trigonométrico e funções trigonométricas. Este trabalho fundamenta-se na teoria das representações semióticas de Duval (DAMM, 2012; FLORES, 2006) e na teoria da aprendizagem de Vygotsky (1984).

Para apresentação e exploração dos oito conteúdos acima citados foi criado para cada conteúdo um Applet no software GeoGebra que os alunos manipularam, visualizaram, analisaram, generalizaram, entenderam e responderam as atividades propostas. Também, foi criada uma atividade para cada conteúdo. Essas atividades constituem a sequência didática, e cada atividade foi formada em média por cinco questões.

Este material foi elaborado especialmente para ser utilizado com alunos da segunda série do Ensino Médio, momento em que o conteúdo de trigonometria geralmente é abordado. A proposta foi que fosse realizado em dupla, visando ao favorecimento da interação e comunicação entre os indivíduos por meio de um ambiente adequado ao desenvolvimento cognitivo e afetivo dos estudantes envolvidos.

Vale ressaltar que, em matemática, um mesmo objeto matemático pode ter várias formas de representações, isto é, tabular (numérica), algébrica (simbólica), gráfica (geométrica) e linguagem natural (linguística), que Duval denominou de representações semióticas (FLORES, 2006). Um dos aspectos importantes do GeoGebra é justamente oportunizar várias representações para um mesmo objeto matemático tornando-o mais compreensível e favorecendo a superação de várias dificuldades apresentadas pelos estudantes.

Esta dissertação se encontra estruturada em cinco capítulos. No capítulo 1 — *Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs)* — Mostram-se a importância das TICs no cotidiano e os efeitos que elas podem causar em nossa sociedade. Também, apresenta-se o software GeoGebra, onde foram desenvolvidos os Applets que fazem parte desta sequência didática. E por fim, apresentam-se algumas pesquisas de mestrado que abordam o ensino de trigonometria no software GeoGebra.

No capítulo 2 — *Referenciais teórico-metodológicos*, apresentam-se os instrumentos teóricos (Teorias das Situações Didáticas de Brousseau, Registros de Representação Semiótica de Duval e Engenharia Didática de Artigue) que fornecem princípios básicos fundamentais para realização dessa pesquisa.

No capítulo 3 — *Procedimentos Metodológicos*, apresentam-se os sujeitos desta pesquisa, como ocorreram os encontros e como foi feita a Coleta de Dados. Também, discutem-se dois questionários: o Questionário do Uso dos Recursos de Informática e o Questionário de Diagnóstico (pré-teste ou avaliação da Zona de Desenvolvimento Real), que foram aplicados no primeiro encontro e serve de base inicial para essa pesquisa. E por fim, apresenta-se como foi aplicada a Oficina com o Software GeoGebra, onde foram revistos conceitos relacionados à função polinomial do primeiro grau.

No capítulo 4 — *Criação e Apresentação da sequência didática – Applets*, discorre-se acerca de como foi criada a sequência didática, que é composta por oito atividades, e como podem ser aplicadas, juntamente com os Applets. As questões, que são cinco em média por cada atividade, são discutidas uma a uma, sempre que possível, fazendo um paralelo com as teorias de Duval e Vygotsky, no que diz respeito à representação semiótica e ZDP (Zona de Desenvolvimento Proximal), respectivamente.

No capítulo 5 — *Análise e Discussão das Atividades*, apresentam-se a aplicação e a análise das atividades dos estudantes, discutindo cada atividade respondida por eles. Também, apresentam-se os resultados obtidos durante a experimentação e a análise *a posteriori*.

E, por fim, encerra-se o texto com as considerações finais.

1 O ENSINO DA TRIGONOMETRIA E O GEOGEBRA

No presente capítulo, o objetivo principal é mostrar alguns pontos julgados como fundamentais para a compreensão das escolhas feitas neste trabalho no tocante ao ensino da trigonometria em um ambiente informatizado. Para isso, inicia-se expondo a relevância das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC), destacando os desafios e as consequências das TIC na sociedade moderna. Em seguida faz-se uma breve apresentação do software GeoGebra e, por fim, apresenta-se algumas pesquisas acerca do ensino da trigonometria utilizando o GeoGebra. Esses tópicos se originaram das análises preliminares, primeira fase da Engenharia Didática de Artigue sobre a qual se discute no capítulo 2.

1.1 Importância, desafio e consequências das TIC na sociedade moderna

Vivemos atualmente numa sociedade informatizada, e a cada dia os sistemas computadorizados controlam os ambientes em que estamos inseridos. Hoje em dia, as empresas de atividades econômicas dependem visceralmente das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC). Cadastro de clientes, pagamento de funcionários e cálculos complexos são gravados e mantidos em programas de computadores. Diversos serviços públicos são oferecidos pela internet, facilitando a vida moderna, desde um preenchimento de um cadastro para participar de um concurso público até uma emissão de nada consta nas esferas municipal, estadual e federal.

Os avanços tecnológicos e científicos crescem a todo instante e, de alguma forma, o mundo digital tem contribuído para essas revoluções. Por isso, as TIC têm exercido influência em todos os ramos da sociedade, inclusive na educação, especialmente, na Educação Matemática.

Mas, conforme Ponte (2000, p. 65 e 66),

[...] as TIC têm tido efeitos muito diversos. Se alguns são extremamente atrativos, outros não deixam de ser francamente problemáticos. Mais adiante, Ponte ainda destaca que, As TIC não representam a alvorada de um novo mundo sem problemas.

Percebe-se que as TIC podem apresentar diversas consequências. Por um lado, favorecer a obtenção de lucro financeiro e ganho de tempo sem muita mão de obra, e por outro lado, como resultado, produzir desemprego em massa, e também, controle e invasão de privacidade nas atividades habituais do dia a dia.

Porém, ainda segundo Ponte (2000), as TIC podem auxiliar na aprendizagem de vários conteúdos, quando são utilizadas simulações e modelagens fundamentadas na capacidade de raciocínio humano de resolver problemas. Segundo ele, é criando espaços de interação e comunicação que as TIC irão sinalizar de forma mais forte as instituições educativas. Para isso, é necessário que a sociedade em geral tenha acesso às TIC de forma mais abrangente, e também, a participação mais efetiva dos professores como atores educativos fundamentais na realização de projetos, de investigação e de debate.

Lopes (2011) relata que quando os alunos e os professores interagem dinamicamente com as TIC no ambiente escolar, a informática pode estimular o professor a vivenciar diversas maneiras de representação da Matemática, destacando as construções, análises, observações e estabelecendo relações.

Já Gravina e Santarosa (1998) frisam que programas que permitem representar um mesmo objeto matemático de diferentes maneiras, isto é, gráfica, numérica e algebricamente, apresentam-se como potentes recursos pedagógicos, pois os alunos podem interpretar os efeitos de suas ações frente às diferentes representações de forma simultânea.

Conforme Brasil (1998), os alunos do Ensino Médio precisam desenvolver algumas competências e habilidades, entre elas: (1) saber utilizar o computador adequadamente reconhecendo suas delimitações e possibilidades, (2) formular e confirmar conjecturas experimentando e recorrendo a modelos.

Os ambientes informatizados, como afirmam Gravina e Santarosa (1998), podem ser um grande aliado em minimizar os obstáculos inerentes ao processo de aprendizagem. Na verdade, eles se apresentam como ferramentas com grande potencial, pois favorecem a exploração, a elaboração de conjecturas e gradativa construção de uma teoria matemática formalizada. Os ambientes informatizados oferecem outra vantagem, como a possibilidade de realizar grande variedade de experimentos em pouco tempo, o qual não é possível na utilização estática de quadro e giz.

Mais adiante, Gravina e Santarosa (1998) alertam que os ambientes informatizados devem estar acompanhados com atividades propostas pelo professor e que favoreçam a construção do conhecimento, caso contrário eles não garantem avanço no conhecimento matemático.

Identificando-se a importância e os desafios das TIC na educação, especificamente, em Educação Matemática, é necessário selecionar um software que

possibilite aos alunos fazerem análises e hipóteses através de simulações e modelos matemáticos em conteúdo de trigonometria. Pois, de acordo com Gravina e Santarosa (1998, p 12),

O recurso de simulação permite a realização de experimentos envolvendo conceitos mais avançados. Neste caso, a complexidade analítica do modelo fica por conta do programa e os alunos exploram qualitativamente as relações matemáticas que se evidenciam no dinamismo da representação de caráter visual.

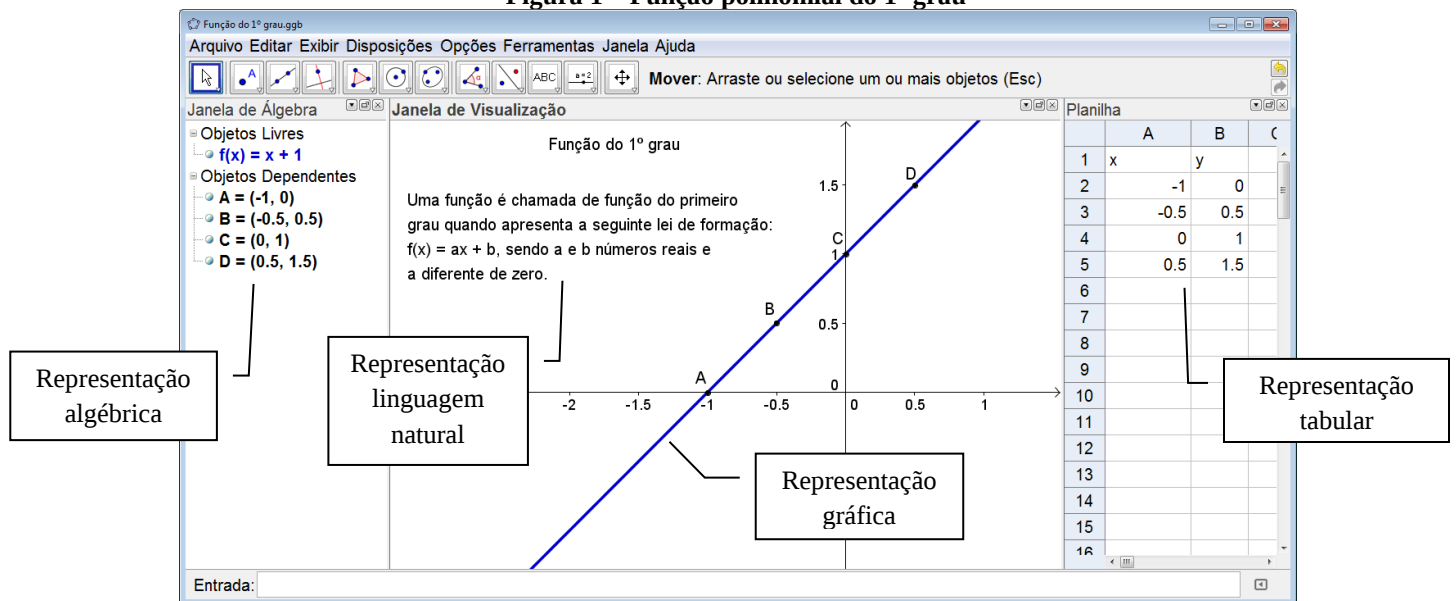
Assim, baseando-se nos conceitos apresentados por Gravina e Santarosa e por Duval no que se referem às simulações e as representações semióticas, respectivamente, escolhemos o software GeoGebra, pois esse programa permite fazer simulações e visualizar um mesmo objeto matemático de várias formas (Figura 1). E conforme Damm (2012, p. 170)

[...] as representações através de símbolos, signos, códigos, tabelas, gráficos, algoritmos, desenhos é bastante significativa, pois permite a comunicação entre os sujeitos e as atividades cognitivas do pensamento, permitindo registros de representação diferentes de um mesmo objeto matemático.

Em Brasil (1998), encontra-se a observação de que há conteúdos que exigem imagens, outros precisam de cálculos, de tabelas, de gráfico ou ainda outros podem requerer expressões analíticas. Essas afirmações estão em consonância com as ideias de Duval em relação às representações semióticas. Ainda Brasil (1998, p. 12) reforça que o aluno deve ser capaz de “interpretar e utilizar diferentes formas de representação (tabelas, gráficos, expressões, ícones...)”.

Na Figura 1 apresenta-se no visor do GeoGebra os diversos tipos de registros de representação que esse software possibilita.

Figura 1 – Função polinomial do 1º grau



Fonte: Autor.

A seguir, apresenta-se o software GeoGebra destacando sua origem, sua importância e sua interface.

1.2 O Software GeoGebra

O software GeoGebra foi desenvolvido por Markus Hohenwarter em 2001 na Universidade de Salzburg para ser utilizado no ambiente escolar. Atualmente, o GeoGebra é utilizado em 190 países e traduzido para 55 idiomas. Já recebeu diversos prêmios de software educacional na Europa e no EUA. Além disso, ele é um software de matemática dinâmica, com interface de fácil manuseio, com recursos sofisticados, gratuito e de código aberto, que pode ser proveitoso para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo numa única aplicação (INSTITUTO GEOGEBRA SÃO PAULO, 2014).

Também, pode ser utilizado inteiramente pela internet, sem precisar instalar no computador. Basta digitar na barra de endereço do seu navegador <http://www.geogebra.org/webstart/geogebra.html>. Mas, para seu bom funcionamento é necessário está instalado o software *Java Runtime Environment* (JRE) em seu computador. Caso se deseje instalar o software GeoGebra em sua máquina, igualmente será necessário instalar o software Java.

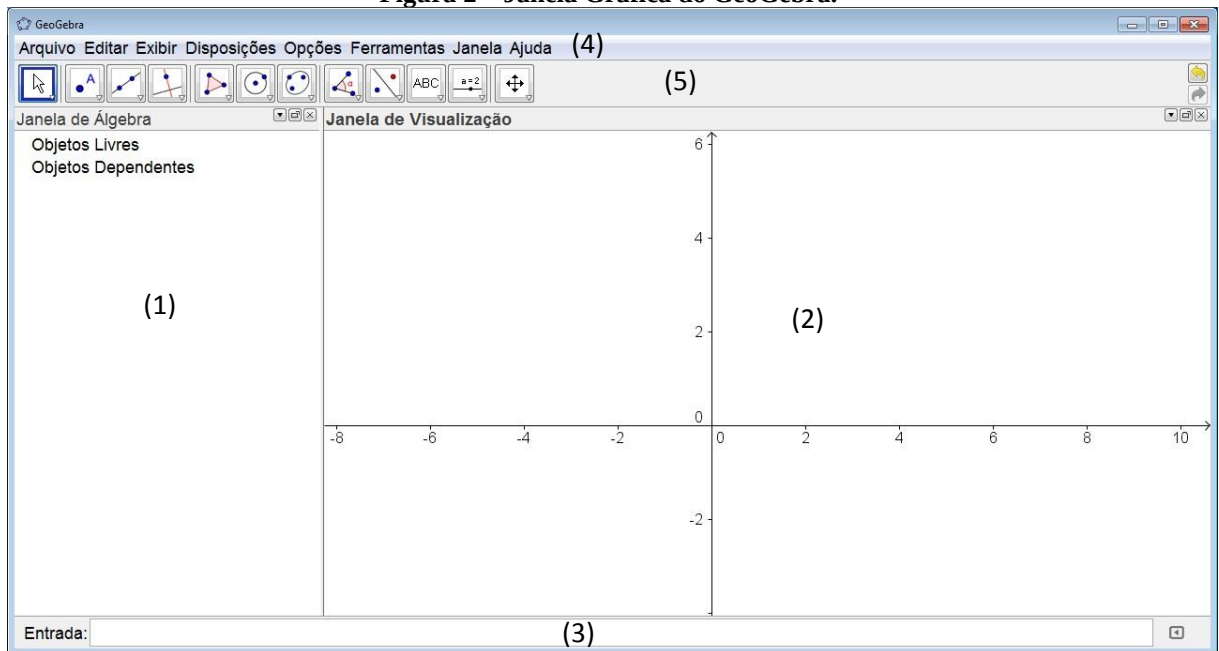
Como o software Geogebra é um software de geometria dinâmica, os objetos criados podem ser movidos e alterados na tela do computador de maneira simples e rápida. Assim, possibilitando fazer investigações, análises, conjecturas, simulações e confirmações de hipóteses. E é a função de dinamismo, isto é, deslocamento e transformação de objetos matemáticos na tela do computador que permitem ao professor e ao aluno levantar conjecturas e testar hipóteses. Também, os alunos poderão anotar suas conclusões após a observação de objetos matemáticos. E em algum momento eles irão questionar: o que ocorre ao movimentar ou ao alterar esta construção?

Silva *et al* (2012) relatam que o GeoGebra propicia a criatividade e a descoberta, além de diversos conceitos matemáticos podem ser explorados, pois é possível visualizar a representação geométrica e a algébrica de um objeto que está sendo manipulado. Favorecendo, assim, o desenvolvimento de diversas habilidades por parte dos alunos. Mas adiante, eles garantem que o GeoGebra auxilia no processo de argumentação e de dedução que a aquisição do conhecimento matemático exige, pois o GeoGebra é uma ferramenta motivadora.

Assis (2012) declara que os recursos do software GeoGebra potencializam o desenvolvimento de competências e habilidades que Brasil (1998) descreve, isto é, da *Representação e Comunicação e da Investigação e Compreensão*. Ele obteve essa conclusão estudando as funções polinomiais do 1º grau no GeoGebra com atividades e propostas bem planejadas. Também, afirma que o GeoGebra torna-se um instrumento pedagógico para o ensino de Matemática, pois possibilita a experimentação, visualização e articulação entre os registros de representação de um objeto matemático.

A interface gráfica do software GeoGebra é dividida em Janela de Álgebra (1), Janela de Visualização (2) e Entrada (3), também aparece em sua tela inicial a Barra de Menu (4) e Barra de Ferramentas (5). Para criação dos Applets utilizamos a versão 4.0 (Figura 2). A versão mais atualizada é 5.0. Existem algumas diferenças quase imperceptíveis ao iniciante no GeoGebra, em relação a versão 4.0. Logo, é possível utilizar a versão 5.0 sem nenhum problema nessa sequência didática.

Figura 2 – Janela Gráfica do GeoGebra.



Fonte: Autor.

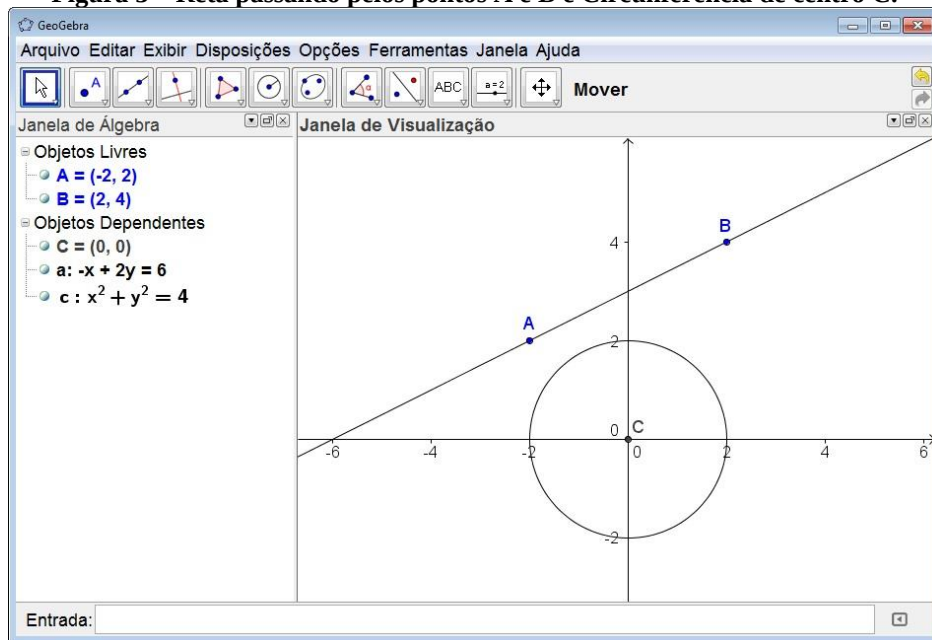
A Janela de Álgebra, de modo geral, aparece quando se inicia o GeoGebra, caso não seja exibida, pode-se mostrá-la a partir da Barra de Menu, clicando no menu Exibir e em seguida clicando na opção Janela de Álgebra. Através da Janela de Álgebra podemos visualizar as informações algébricas dos objetos construídos na Janela de Visualização, como por exemplo, na Figura 3 há três pontos (A, B e C), uma reta e uma circunferência, assim, na Janela de Álgebra podemos visualizar as coordenadas dos três pontos e as equações da reta e da circunferência (Figura 3).

A Janela de Visualização, como seu nome já diz, permite visualizar todos os objetos construídos no GeoGebra (Figura 3). Ela possui um sistema de eixos cartesianos, que podem ser exibindo ou não, basta clicar no menu Exibir e em seguida na opção Eixos.

A Entrada ou Campo de Entrada pode-se criar objetos na tela de visualização, basta digitar os comandos e em seguida pressionar a tecla Enter.

Esses conceitos apresentados sobre o GeoGebra são suficientes e necessários para o entendimento da construção de nossa sequência didática.

Figura 3 – Reta passando pelos pontos A e B e Circunferência de centro C.



Fonte: Autor.

Na próxima seção, apresentam-se as pesquisas de Damasco (2010), Lopes (2010), Figueiredo (2013) e Persicano (2013), que são estudos recentes sobre o Ensino de Trigonometria no GeoGebra.

1.3 Algumas Pesquisas acerca do Ensino de Trigonometria com o GeoGebra

Damasco (2010) em sua pesquisa de mestrado construiu e aplicou uma sequência didática sobre o estudo de Funções Trigonômicas utilizando o software GeoGebra a alunos do Ensino Médio. Inicialmente, ele afirma que a utilização de um meio computacional, por si só, não assegura melhoria no ensino, é necessário ser acompanhado por um projeto metodológico. Em sua pesquisa com software GeoGebra, Damasco (2010) certifica que o GeoGebra tornou-se um laboratório que levou os alunos a se envolverem com o ensino de Matemática semelhante ao ‘fazer Matemática’, pois eles: experimentaram, interpretaram, visualizaram, induziram, conjecturaram, abstraíram e generalizaram. Quanto ao uso dos computadores, para ele o ideal é que os alunos trabalhem em dupla. Caso tenha número reduzido de computadores, que seja em trio, pois eles discutem e interagem de maneira mais eficiente. Por ser um software que une geometria dinâmica com comandos algébricos, o GeoGebra possibilitou a manipulação de objetos abstratos transitando de uma representação para outra, declara Damasco (2010). Mas, adiante, ele certifica que “a metodologia baseada na

teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval aliada ao uso do GeoGebra auxiliou muito para que os alunos superassem” as dificuldades em relação ao ensino de trigonometria. Por fim, Damasco (2010) afirma que é preciso um suporte técnico na estrutura do laboratório de informática no que diz respeito ao estado e ao número de computadores.

Lopes (2010) em sua pesquisa de mestrado, também, construiu e aplicou uma sequência didática para o ensino de trigonometria usando o software GeoGebra. Sua pesquisa foi dividida em duas partes. Inicialmente, ela aplicou a sequência didática com alunos de Licenciatura em Matemática (professores em formação), depois aplicou a alunos do 2º ano do Ensino Médio. Em sua pesquisa, em alguns momentos, os alunos (em duplas) utilizaram Applets construídos pela pesquisadora, em outros, os próprios alunos construíam os objetos matemáticos. Após o estudo e análise do software GeoGebra no ensino de trigonometria, ela destaca alguns potencialidades, como: construção, dinamismo, investigação, visualização e argumentação. Informa também, que algumas dificuldades em relação ao ensino de trigonometria, por parte dos alunos, podem ser minimizadas. Ela conclui “[...] que o uso do software GeoGebra pode auxiliar na resolução de problemas de trigonometria, especialmente em atividades investigativas, de forma que os estudantes possam interagir com as figuras construídas”. Lopes (2010) ainda elenca algumas dificuldades em relação à utilização das TIC: necessidade de reestruturação dos laboratórios de informática, necessidade de cursos de atualização para os professores e falta de conhecimento do sistema operacional.

Figueiredo (2013), por sua vez, construiu Applets no software GeoGebra desenvolvendo atividades numa sequência didática e aplicou a acadêmicos – professores na formação inicial em matemática. Em suas reflexões sobre o estudo do software GeoGebra no ensino de Funções Trigonométricas, ele concordou com Lopes (2010) em relação aos softwares de geometria dinâmica. Eles auxiliam nas atividades investigativas, quando os alunos se envolvem, e há melhoria da prática quando o professor atua como protagonista em busca de novas metodologias. Figueiredo (2013) conclui que o GeoGebra apresenta-se muito eficaz, auxiliando os alunos de licenciatura em matemática a transpor os conceitos já estudados no triângulo retângulo para o ciclo trigonométrico em relação as funções seno, cosseno e tangente, pois em atividades investigativas os alunos podem exercer interação com os objetos matemático construídos na tela do computador.

Persicano (2013) em sua pesquisa de mestrado fez um estudo de caso com situação-problema envolvendo Funções Trigonométricas. Ele aborda três problemas em

matemática e três em física utilizando o software GeoGebra e propondo suas soluções. Seus objetivos são: a interdisciplinaridade entre as matérias de matemática e física, facilitar a interpretação dos alunos nos problemas propostos e a possibilidade da implementação das TIC por parte dos professores do Ensino Médio. Em suas reflexões, ele afirma que o uso de uma ferramenta tecnológica é importante juntamente com a interdisciplinaridade para melhoria da didática do professor, e assim, atingir êxito no ensino e aprendizagem. Pois, com o uso das novas tecnologias, neste caso o software GeoGebra, a abstração dos alunos melhora a partir da dinâmica e interação com objetos matemáticos na tela do computador.

Os estudos citados anteriormente corroboram com a nossa investigação acerca do tema pesquisado no que se refere ao uso do software GeoGebra no ensino de Trigonometria. Entretanto, pretendemos desenvolver uma análise diferenciada, dando enfoque à construção e aplicação de Applets, criados no software GeoGebra para o ensino de Trigonometria a alunos do Ensino Médio.

2 REFERENCIAIS TEÓRICOS

No presente capítulo, são apresentados os instrumentos teóricos que forneceram princípios básicos fundamentais para realização de nossa pesquisa. Na seção 2.1, destacam-se alguns pontos importantes da *Teoria das Situações Didáticas* de Guy Brousseau. Já na seção 2.2, é feita uma síntese da *Teoria de Registros de Representação Semiótica* de Raymond Duval. Na última seção desse capítulo, é apresentado um breve resumo da metodologia de pesquisa *Engenharia Didática* de Michèle Artigue.

2.1 Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau

A teoria das Situações Didáticas foi desenvolvida em 1986, na França, pelo pesquisador Guy Brousseau com o objetivo de compreender as relações que acontecem entre os alunos, o professor e o conhecimento matemático em sala de aula.

Segundo Brousseau

Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição (...) o trabalho do aluno deveria, pelo menos em parte, reproduzir características do trabalho científico propriamente dito, como garantia de uma construção efetiva de conhecimentos pertinentes. (Brousseau 1986, apud FREITAS, in: MACHADO 2012, p. 80)

Nessa concepção, o professor deve fazer a devolução de um bom problema ou propor um jogo de estratégia. Na devolução o professor cede ao aluno uma parte da responsabilidade pela aprendizagem. Quando o aluno se apropria dessa situação, isto é, toma o problema como seu e aceita o desafio de resolvê-lo, fica caracterizado uma situação adidática. Toda situação adidática é uma situação didática, quando há uma orientação do professor ao aluno para aprendizagem de um determinado conteúdo.

Nas situações adidáticas, o aluno por sua própria competência adquire novos conhecimentos, sendo sempre estimulado a supera-se. Assim, o professor deve propiciar ao aluno o máximo de independência, para que ele possa criar seus próprios métodos de resolver um problema.

Podemos sintetizar as situações adidáticas em três fases: de ação, de formulação e de validação.

Na situação adidática de ação, o aluno tem o primeiro contato com o problema e com conhecimentos anteriores, ele busca uma solução para o problema.

Na situação adidática de formulação, os alunos elaboram explicações das estratégias utilizadas, fazendo uso de uma linguagem mais adequada, sem, contudo o emprego da linguagem matemática formal.

Na situação adidática de validação, os alunos socializam as respostas, fazendo uso de explicações, provas e demonstrações.

Após ocorrer as três fases da situação adidática, o professor retoma a parte de responsabilidade cedida ao aluno e assume o lugar de protagonista. A partir deste momento ocorre à situação de institucionalização.

Na situação de institucionalização, o professor sintetiza e expõe os conhecimentos relevantes durante a validação, fazendo uso da linguagem matemática formal.

A teoria das situações didáticas contribui para nossa pesquisa, pois

[...], por um lado, valoriza os conhecimentos mobilizados pelo aluno e seu envolvimento na construção do saber matemático e, por outro, valoriza o trabalho do professor, que consiste, fundamentalmente, em criar condições suficientes para que o aluno se aproprie de conteúdos matemáticos específicos (FREITAS, 2012, p. 78).

Essa dualidade que Freitas (2012) apresenta é fundamental para pesquisa educacional, pois a valorização dos sujeitos envolvidos, alunos e professores, fortalece o processo de ensino e aprendizagem.

2.2 Teoria de Representações Semióticas de Raymond Duval

Os objetos abstratos da matemática, como: ideais, conceitos, propriedades, estruturas e relações podem expressar diferentes situações, e para se ensinar esses objetos é preciso uma representação. Assim, se faz necessário para seu ensino considerar diferentes formas de representar um mesmo objeto matemático (DAMM, 2012).

Segundo Duval (1994, apud DAMM) as representações semióticas referem-se às representações de um mesmo objeto matemático de diferentes formas, como: uma linguagem natural, uma escrita algébrica, um gráfico ou em uma tabela. Ele ainda observa a dualidade das representações semióticas, isto é, a forma (representante) e o conteúdo (representado). Por exemplo, o gráfico (representante) e a função (representado).

Para Duval há três atividades cognitivas fundamentais relacionadas às representações semióticas: formação de uma representação identificável, tratamento de uma representação e conversão de uma representação.

A formação de uma representação identificável refere-se a um enunciado compreensível em uma determinada língua natural, a composição de um texto, a desenhos de uma figura geométrica, a escrita de uma fórmula, a um gráfico, etc.

O tratamento é a transformação de uma representação dentro do próprio registro. Por exemplo: efetuar a soma de números decimais ($0,3 + 0,6 = 0,9$) ou efetuar a soma de números fracionários ($\frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{7}{3}$), nestes dois casos as transformações ocorrem no mesmo sistema de escrita.

A conversão é a transformação de um registro em outro registro. Por exemplo: o dobro de x mais três é igual a quatro (registro linguagem natural) e $2x + 3 = 4$ (registro algébrico). Nesse exemplo ocorre a transformação do registro linguagem natural para o registro algébrico.

Para Duval a apreensão dos objetos matemáticos somente será possível quando os sujeitos fazem uso destas três atividades cognitivas, ou seja, os alunos coordenam diversos registros de representação, realizando vários tratamentos e diversas conversões entre os registros de representação.

Como “não existe conhecimento matemático que possa ser mobilizado por uma pessoa, sem o auxílio de uma representação” (DAMM, 2012, p. 169), a inserção da teoria de Duval na pesquisa educacional tem relevância significativa, pois os conceitos de tratamentos e conversões favorecem a aprendizagem dos conteúdos matemáticos.

2.3 Engenharia Didática

A Engenharia Didática pode ser compreendida tanto como uma metodologia de pesquisa como um método de ensino. Como metodologia de pesquisa ela se estabelece com a finalidade de analisar as situações didáticas, que apresentamos na seção 2.1. A Engenharia Didática está presente no quadro teórico da Didática da Matemática de influência francesa. Desde a década de 80, o termo engenharia didática é usado nas pesquisas da Didática da Matemática de influência francesa que tem alguma fase de experimentação. (MACHADO, 2012)

Artigue (1988, apud MACHADO, 2012, p. 234) compara a Engenharia Didática com o trabalho de um engenheiro, pois o engenheiro, ao realizar um projeto, se apoia sobre conhecimentos científicos de seu domínio e aceita submeter-se a um controle científico. Da mesma forma, o pesquisador da engenharia didática precisa ter o domínio do conhecimento e seguir alguns passos científicos, isso pode ocorrer quando o pesquisador elabora e/ou aplica uma sequência didática.

A Engenharia Didática se decompõe em quatro fases consecutivas: análises preliminares; concepção e análise *a priori*; experimentação e análise *a posteriori* e validação.

Na primeira fase, que é a das *análises preliminares*, deve-se atentar para todo o quadro teórico que envolve o conteúdo a ser desenvolvido levando em conta os conhecimentos didáticos já adquiridos pelo o aluno, bem como fazer análise epistemológica dos conteúdos contemplados pelo ensino, verificar as dificuldades e obstáculos encontrados pelos os alunos e considerar os objetivos específicos da pesquisa. As análises preliminares são realizadas com objetivo de fundamentar a construção da sequência didática, dessa forma, é feita uma revisão bibliográfica de trabalhos que alicerça o tema da pesquisa.

Na segunda fase, chamada de *concepção e análise a priori*, são definidas as variáveis de comando macrodidáticas ou globais e microdidáticas ou locais, que se referem, respectivamente, à organização global e à organização local da engenharia. Aqui, constrói-se a sequência didática e levantam-se as hipóteses preliminares da pesquisa.

A terceira fase, a da *experimentação*, se constitui na aplicação da sequência didática com um grupo de alunos. É nessa fase que se dá a aplicação das sequências de aulas planejadas previamente. Também é feito o registro das observações em relatórios, ocorre ainda a explicação dos objetivos da pesquisa aos alunos e se estabelece o contrato didático.

A quarta e última fase, *análise a posteriori e validação*, diz respeito ao tratamento dos dados obtidos por intermédio da aplicação da sequência didática. A validação dos dados, confirmar ou refutar as hipóteses, ocorre na confrontação das análises *a priori* e *a posteriori*. Também, muitas vezes, são necessários dados complementares, que são obtidos por questionários, entrevistas, gravações, vídeos, etc.

A Engenharia Didática é uma metodologia de pesquisa, que se caracteriza como uma pesquisa experimental, onde os registros ocorrem durante esse processo e a validação com: a comparação entre análise *a priori* e análise *a posteriori*. Assim, a organização da pesquisa educacional é essencial na validação dos resultados, pois a metodologia é inerente ao saber científico.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, são apresentados os procedimentos metodológicos, isto é, como foi feita a escolha dos sujeitos, como foram divididos e organizados os encontros, quais instrumentos foram utilizados para a coleta de dados e são apresentados também dois questionários que fazem parte das análises preliminares, mais precisamente, da análise cognitiva, e por fim, apresentamos a oficina com o GeoGebra.

3.1 Participantes

Os sujeitos de nossa pesquisa são 12 alunos do 2º ano de uma escola pública de Alagoas. Foram escolhidos por sorteio entre quatro turmas em que o autor da pesquisa leciona. Todos os alunos mostraram interesse em participar da pesquisa.

3.2 Os Encontros

Para aplicação da sequência didática o autor da pesquisa realizou dez encontros de 1 hora e 40 minutos cada, com a turma citada anteriormente, em seus horários regulares de aulas. Os encontros ocorreram semanalmente, totalizando, assim, um período de dois meses e meio. Eles tiveram início no começo de setembro de 2014 e terminaram no dia 15 de novembro de 2014.

- O primeiro encontro foi destinado à aplicação dos questionários: o uso dos recursos de informática e de diagnóstico (Pré-teste).
- No segundo encontro foi realizada a oficina no software GeoGebra. Na qual foi apresentado suas ferramentas básicas e também um estudo da função polinomial do 1º grau destacando-se seus domínios, conjuntos imagens e zeros da função, utilizando o GeoGebra. Também foi feito um estudo do parâmetro dessa função, verificando-se quando ela é crescente e decrescente.
- No terceiro encontro foi realizada a primeira atividade da sequência didática (*vide* próximo capítulo), que é: *Um Teorema no Triângulo Retângulo – Demonstração de Perigal (Teorema de Pitágoras)*.

- No quarto encontro ocorreu a segunda atividade – *Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo*.
- No quinto encontro foi ministrada a terceira atividade – *Graus e Radianos*.
- O sexto encontro foi reservado para aplicação da quarta atividade – *Círculo Trigonométrico*.
- No sétimo encontro foi aplicada a quinta atividade – *Seno no Círculo Trigonométrico*.
- No oitavo encontro ocorreu a sexta atividade – *Cosseno no Círculo Trigonométrico*.
- No nono encontro foi realizada a sétima atividade – *Tangente no Círculo Trigonométrico*.
- No décimo e último encontro foi aplicada a oitava atividade – *Funções Trigonométricas*.

3.3 Coleta de Dados

Para obter as informações ou os dados de nossa pesquisa, foi utilizada a observação dos estudantes durante as atividades, os questionários, os registros escritos dos alunos durante as aplicações das atividades e também os relatórios das falas dos alunos no momento da socialização e da institucionalização dos conhecimentos.

A seguir apresentam-se dois questionários: o uso dos recursos de informática e de diagnóstico (Pré-teste), que foram aplicados no primeiro encontro.

3.4 Questionário do Uso dos Recursos de Informática

Nosso objetivo com esse questionário (veja Apêndice A) é conhecer os alunos quanto ao uso dos recursos de informática. Além de verificar quantos alunos, em algum momento, já utilizaram o software GeoGebra. O questionário é constituído por 7 perguntas inerentes à informática.

Esse questionário foi respondido individualmente pelos 12 alunos, sujeitos de nossa pesquisa.

O Quadro 1 apresenta os dados obtidos do questionário do uso dos recursos de informática, após a análise de cada questionário feito pelos os alunos.

Percebe-se nas respostas dos alunos, que o contato com a informática é constante, tanto na utilização de pesquisas de trabalhos escolares, como no uso de redes sociais. Também, identifica-se que eles utilizam o computador em casa e no ambiente escolar.

Em relação ao software GeoGebra, 11 alunos responderam que não o conheciam, apenas 1 relatou que já conhecia.

As respostas à 7ª pergunta, informam-nos que os alunos acreditam que o uso do computador no ambiente escolar é importante e favorece o ensino e aprendizagem das disciplinas ministradas em sala de aula.

Nessa análise prévia, em relação à informática, conclui-se que os alunos sabem a importância das TIC em sala de aula, mas também revela que os alunos não conhecem o software GeoGebra, por isso, na seção 3.6 desse mesmo capítulo, apresenta-se a oficina com o software GeoGebra, com objetivo de expor as ferramentas básicas do software e relembrar alguns conceitos fundamentais da função do primeiro grau.

Quadro 1 – Dados Obtidos do Questionário do Uso dos Recursos de Informática

Perguntas do questionário Uso dos recursos de informática	Respostas dos alunos		Observações
1) Já utilizou o computador no ambiente escolar e para que finalidade?	Responderam SIM 12	Responderam NÃO 0	Finalidade Seis alunos responderam: Pesquisa escolar, redes sociais. Três alunos responderam: Pesquisa escolar. Dois alunos responderam: Pesquisa escolar, redes sociais, jogos. Um aluno respondeu: Pesquisa escolar, redes sociais, notícias do mundo.
2) Já utilizou a internet para realizar trabalhos escolares? Em quais disciplinas?	Responderam SIM 12	Responderam NÃO 0	Em quais disciplinas? Nove alunos responderam: – “Em todas as disciplinas.” Um aluno respondeu: – “Biologia, Geografia, Sociologia, Espanhol.” Um aluno respondeu: – “Em quase todas as disciplinas.” Um aluno respondeu: – “Física, Biologia, Noções de Administração.”
3) Sabe salvar e abrir um arquivo numa pasta do computador?	Responderam SIM 11	Responderam NÃO 1	Sem observações.
4) Utiliza alguma rede social, como: skype, facebook, instagram, etc.	Responderam SIM 12	Responderam NÃO 0	Rede Social Quatro alunos não especificaram quais redes sociais utilizam. Três alunos responderam:

				– “Facebook” Um aluno respondeu: – “Facebook, WhatsApp.” Um aluno respondeu: – “Facebook, Skype, ts3.” Um aluno respondeu: – “Facebook, Skype, Instagram.” Dois alunos responderam: – “Facebook, Skype, Instagram, Twitter, Snapchat, etc.”	
5) Em que lugares você mais usa o computador?	Casa 8	Escola 5	Lan House 3	Outros 1	Sem observações.
6) Você conhece o software GeoGebra?	Responderam SIM 1		Responderam NÃO 11		Sem observações.
7) Qual a importância do uso do computador no ambiente escolar?	– “Ajuda no desenvolvimento na matéria, fornecendo mais conteúdos a serem estudados.” – “Serve para diversas pesquisas, é importante para a facilidade de acesso a diversos conteúdos, etc.” – “Para os alunos realizar trabalhos, estudar, etc.” – “É importante para ajudar ou facilitar o meio de pesquisas, trabalhos, informações e conhecimentos.” – “Para realizar pesquisas a desenvolver nossas capacidades.” – “Pesquisas...” – “É importante para auxiliar tanto aluno como o professor a realizar pesquisas, trabalho, etc. E também pra apresentação de trabalhos e organização das atividades escolares.” – “Ampliar o campo de estudo.” – “A aprendizagem de maneira interativa.” – “É de suma importância, pois auxilia em assuntos não dados nas aulas.”			Sem observações.	

Fonte: Autor.

3.5 Questionário de Diagnóstico (Pré-Teste)

A avaliação diagnóstica foi elaborada com seis questões (veja Apêndice B) com assuntos que os alunos, presumivelmente, já viram em séries anteriores, tais como: triângulo retângulo, teorema de Pitágoras, razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente, área de quadrado e regra de três. Neste questionário pretendeu-se verificar o que os alunos já sabem realizar sozinhos, isto é, nível de desenvolvimento real, conceito definido por Vygotsky.

Esse questionário de diagnóstico foi respondido individualmente pelos os 12 alunos, sujeitos de nossa pesquisa.

No Quadro 2 apresentamos os dados obtidos do Questionário de Diagnóstico, após a análise de cada questão feita pelos os alunos.

Nota-se, na primeira pergunta que a maioria dos alunos não sabe conceituar um triângulo retângulo. Além disso, não souberam aplicar corretamente o teorema de Pitágoras nas segunda e terceira pergunta.

Já na quarta pergunta sobre as razões trigonométricas, constatamos também, que os alunos não têm nenhum domínio sobre este conteúdo.

Os alunos, na quinta pergunta, mostram dificuldades em expressar as unidades ou não sabem distinguir comprimentos de áreas.

Já na sexta e última pergunta, sobre conhecer e aplicar a regra de três, eles demonstraram ter um maior domínio nesse conteúdo do que nos outros conteúdos solicitados neste questionário.

Os resultados apresentados no Quadro 2 e discutidos anteriormente, nessa análise preliminar, isto é, nessa análise cognitiva, que também faz parte da primeira fase da Engenharia Didática, mostram que em geral os alunos têm dificuldades em conceituar e aplicar conteúdos básicos fundamentais, que são necessários para sua evolução.

Quadro 2 – Dados Obtidos do Questionário de Diagnóstico (Pré-Teste)

Perguntas do questionário de diagnóstico (pré-teste)	Respostas dos alunos			Observações
1. O que é um triângulo retângulo?	Responderam corretamente 2	Resposta incompleta ou errada 7	Não responderam 3	Respostas: – “É um triângulo que possui um ângulo de 90° graus.” – “É um triângulo que possui o ângulo reto.” – “3 lados iguais.” – “Um triângulo com todos os lados iguais.” – “Triângulo retângulo é aquele que sua base é diferente de sua altura.” – “Só sei a figura geométrica.” – “Um triângulo de três lados diferentes de medidas.” – “Triângulo retângulo é quase parecido com um retângulo, porém possui três lados (catetos, e hipotenusa, com tamanhos diferentes).” – “É uma figura geométrica com 3 lados sendo um deles mais longo e deitado, hipotenusa.”
2. Você conhece o Teorema de Pitágoras?	Responderam sim e o enunciaram corretamente 1	Responderam sim, mas não o enunciaram corretamente 5	Não responderam 6	Respostas: – “ $a^2 = b^2 + c^2$, para calcular os lados do triângulo, onde a é a hipotenusa.” – “É uma equação que pode ser usada, por exemplo: em equações do 2° grau.” – “O teorema é usado para calcular as propriedades desejadas do triângulo.” – “É utilizado para achar os lados de um triângulo.” – “Foi um filósofo e matemático grego que pensava que o número era “physis” na natureza e realizou análises de problemas importantes até hoje como o teorema de Pitágoras.” – “Mas não lembro.”
3. Aplique o teorema de Pitágoras para determinar o valor de x quando possível:	Aplicou apenas no triângulo retângulo 0	Aplicou no triângulo retângulo e no triângulo qualquer 5	Não responderam 7	Dos 5 alunos que aplicaram o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo, apenas 1 não aplicou corretamente (confundiu a hipotenusa com um dos catetos).
4. Você conhece as razões seno, cosseno e tangente no	Responderam sim e	Responderam sim, mas não	Responderam não	Respostas: – “15 = cosseno; 8 = seno e 17 = α = tangente do ângulo.”

triângulo retângulo?	souberam encontrar as razões 0	souberam encontrar as razões 2	10	–“8 = seno; 15 = cosseno e 17 = tangente.”	
5. Faça o que se pede: a) Calcule a área do quadrado abaixo.	Responderam corretamente 2	Resposta incompleta ou errada 9	Não responderam 1	Dos 9 alunos que responderam incompleto ou errado, 4 alunos não especificaram a unidade, 4 alunos não especificaram a unidade ao quadrado e 1 aluno especificou a unidade em metros em vez de cm².	
	Responderam corretamente 4	Resposta incompleta ou errada 2	Não responderam 6	Resposta incompleta ou errada: –“ $x = \frac{4}{1}$.” –“ $q = 2x$.”	
6) Problemas que envolvem grandezas proporcionais podem ser solucionados utilizando-se uma regra prática denominada "regra de três". Você sabe aplicar a regra de três:	Respondem sim e aplicaram corretamente 8		Responderam sim, aplicaram, mas não encontraram respostas corretas, total ou parcialmente 2	Responderam não, mas encontraram respostas de outra maneira, total ou parcialmente 2	Responderam não 0

Fonte: Autor.

É possível resumir os principais resultados das análises prévias ou preliminares empreendidas neste trabalho de investigação, as quais serviram de guia na elaboração da sequência didática visada:

1. **Síntese da análise epistemológica:**

O exame do desenvolvimento da trigonometria permite destacar alguns momentos epistemologicamente relevantes de características marcadamente distintas: a) um primeiro momento, no mundo antigo (Babilônia, Egito, Grécia) no qual os conhecimentos trigonométricos eram utilizados para dar suporte à resolução de problemas ligados à agrimensura, à construção de obras de engenharia e à astronomia. Eram problemas cuja solução envolvia o emprego de conhecimentos da geometria métrica do triângulo, da relação métrica entre o comprimento de um arco de circunferência, o comprimento da corda e a medida do ângulo central subentendido por ele, além do desenvolvimento de elementos da trigonometria esférica; b) um segundo momento, de constituição da trigonometria como uma área do saber matemático, descolada de suas aplicações práticas, vai acontecer com o astrônomo e matemático Regiomontanus, no século XV, na sua obra *De triangulis omnimodis*; c) um terceiro momento é aquele da emergência de conceitos trigonométricos na criação e no desenvolvimento dos fundamentos do cálculo diferencial, no século XVII (principalmente nas obras de Wallis, de Isaac Newton e de Leibniz); d) um quarto momento é aquele de conexão entre a descrição de movimentos circulares e de outros fenômenos periódicos por meio das funções trigonométricas do seno e do cosseno. Nessa etapa foram de fundamental importância as contribuições de Euler, no século XVIII, responsável pela introdução da função de Euler da trigonometria (isto é, a função que a cada número real x associa um ponto P sobre a circunferência unitária, marcado a partir do ponto $A = (0, 1)$, de modo que o arco AP mede x unidades. Para a obtenção do ponto P , anda-se sobre a circunferência no sentido anti-horário se x for positivo e no sentido horário se x for negativo. O seno de x é dado pela ordenada do ponto P ; o cosseno de x é dado pela coordenada de P ; e) um quinto momento, no qual se destacam os trabalhos em torno da elaboração e da demonstração do teorema de Fourier no qual se dá condições sob as quais é possível expressar os valores de uma função contínua por uma série cujos termos são funções trigonométricas (BOYER; MERZBACH, 2012).

2. **Síntese na análise cognitiva:**

Os resultados apresentados no Quadro 2 e discutidos anteriormente, nessa análise preliminar, isto é, análise cognitiva, que faz parte da primeira fase da Engenharia Didática, mostram que em geral os alunos têm dificuldades em conceituar e aplicar conteúdos básicos fundamentais, que são necessários para sua evolução, tais como: compreensão da aplicabilidade do teorema de Pitágoras, aplicação da regra de três simples.

3. Síntese da análise didática:

No tocante à análise didática das práticas de ensino da trigonometria no ensino médio empreendida, é possível destacar os seguintes pontos: a) introdução dos conceitos básicos da trigonometria de maneira abstrata, pautada por um enfoque estático, sem dinamicidade, sem a participação ativa do estudante na formulação de conceitos e de propriedades trigonométricas; b) pouca ênfase nas condições de aplicabilidade do teorema de Pitágoras, ou seja, nas condições sob as quais esse teorema pode ou não pode ser aplicado; c) ênfase em atividades manipulativas de verificação de identidades trigonométricas sem que o estudante tenha ainda revelado a compreensão dos conceitos; d) as TIC oferecem novas possibilidades para o ensino do caráter mais dinâmico da trigonometria; e) os PCN recomendam a utilização das TIC (BRASIL, 1998, p43)

[...] desde que os alunos sejam encorajados a desenvolver seus processos metacognitivos e sua capacidade crítica e o professor veja reconhecido e valorizado o papel fundamental que só ele pode desempenhar na criação, condução e aperfeiçoamento das situações de aprendizagem.

f) a escola na qual desenvolveremos nossa investigação disponibiliza Laboratório de Recursos Computacionais para as aulas de Matemática.

III. Análise *a priori* da experiência didático-pedagógica e concepção

Como já frisado anteriormente, a fase da análise *a priori*, segundo Artigue (1996), comporta uma parte descritiva e uma parte preditiva. É preciso descrever as escolhas efetuadas, definindo variáveis de comando, no âmbito global, mais amplo e mais geral, e no âmbito local, descrevendo cada atividade proposta.

As primeiras escolhas dizem respeito às *variáveis globais* aquelas que se referem à organização global da Engenharia Didática. Neste caso, são elas:

1. buscar enfatizar os aspectos dinâmicos envolvidos nos conceitos trigonométricos;

2. utilizar computadores e o *software* GeoGebra de geometria dinâmica, por ser de baixo custo e de fácil manuseio;
3. introduzir o teorema de Pitágoras e propiciar a compreensão da sua aplicabilidade;
4. introduzir de forma dinâmica o conceito de círculo trigonométrico;
5. explorar dinamicamente os conceitos do seno, do cosseno e da tangente no círculo trigonométrico;
6. exercitar a representação escrita dos fenômenos observados na tela do computador;
7. criar situações de aprendizagem que possibilitem o trabalho coletivo dos estudantes e operações de conversão e de registros de representação semiótica.

A partir dessas escolhas globais, passamos à elaboração da sequência didática com a apresentação das sessões das oficinas onde ficarão clara as escolhas locais ou microdidáticas que serão feitas, com as respectivas expectativas de aprendizagem. Antes, no entanto, enunciaremos as hipóteses que nortearão a elaboração dessa sequência:

Hipótese 1: As construções com applets motivam os estudantes e são capazes de oferecer uma boa compreensão visual do processo de argumentação de teoremas geométricos, propiciando a conversão do registro figural em registro vernacular;

Hipótese 2: As atividades de aprendizagem com o GeoGebra relativas à trigonometria possibilitam ao estudante conjecturar, de forma parcialmente correta, propriedades, relações e equações trigonométricas.

Na próxima seção apresenta-se a oficina com o software GeoGebra.

3.6 Oficina com o Software GeoGebra

O objetivo dessa oficina foi o de apresentar as ferramentas básicas do software GeoGebra aos alunos do 2º ano B do curso Técnico Integrado de Guia de Turismo de uma escola pública de Alagoas, além de serem revisados conceitos relacionados a função polinomial do 1º grau. Nessa oficina apresentou-se aos alunos a função polinomial do 1º grau destacando-se seus domínios, conjuntos imagens e os zeros da função. Também foi feito um estudo do parâmetro dessa função, verificando-se quando ela é crescente e decrescente.

Inicialmente apresentou-se as ferramentas básicas do GeoGebra, em seguida definiu-se a função polinomial do 1º Grau. Logo após, foram inseridas algumas funções polinomial do 1º Grau no GeoGebra utilizando o campo de entrada, e por fim, aplica-se uma atividade composta de quatro questões. Através dessa atividade foram exploradas as ferramentas básicas do GeoGebra e foram recordados alguns conceitos importantes relacionados à função polinomial do primeiro grau, tais como: domínio, imagem, zeros, função crescente e decrescente.

Percebeu-se que, o software GeoGebra com seu dinamismo e por ser de fácil interação, tornou a função afim, objeto abstrato da matemática, em objeto manipulável, assim, facilitando a compreensão de seu conceito e garantindo aquisição de conhecimento matemático por parte dos estudantes que participaram da oficina.

Constatou-se empiricamente que, a utilização das TIC em sala de aula com atividades propostas proporcionam momentos agradáveis, tornando-se uma alternativa que possivelmente poderá levar os alunos do Ensino Médio a reflexões e aquisição de conhecimento de conteúdos abstratos da matemática.

4 CRIAÇÃO E APRESENTAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA – APPLETS

A construção da sequência didática constituída de oito atividades (Apêndice C), isto é, a concepção e a análise *a priori*, correspondente à segunda fase da Engenharia Didática, teve como ponto de partida o objetivo geral desta pesquisa: desenvolver, aplicar e analisar uma sequência didática de caráter interativo e dinâmico que propicie a aprendizagem dos conceitos fundamentais da trigonometria no ensino médio². O público alvo desta sequência foi os alunos da segunda série do Ensino Médio. Também, acredita-se que ela auxiliará aos professores de matemática das escolas públicas. Possivelmente, também poderá ajudar os professores de física, pois há várias aplicações em conteúdos de física, como lançamento oblíquo, plano inclinado, função periódica em fenômenos físicos, refração da luz, entre outros, nas quais é utilizada a trigonometria.

A avaliação diagnóstica do nível de desenvolvimento real dos sujeitos da pesquisa, apresentada no Capítulo 3, revelou o desconhecimento de conceitos matemáticos relacionados ao teorema de Pitágoras.

Vygotsky (1984) define a zona de desenvolvimento proximal como a distância entre a capacidade de o aluno resolver um problema sem ajuda (nível de desenvolvimento real) e aquilo que ele é capaz de realizar com a orientação do professor ou com ajuda de um companheiro mais experiente (nível de desenvolvimento potencial).

Nessa perspectiva, a inclusão dos Applets 01 e 02 teve como objetivo recapitular conteúdos que os alunos já estudaram anteriormente, sendo realizadas em duplas para que seja possível a interação entre os alunos. No primeiro Applet abordou-se o Teorema de Pitágoras e, no segundo, Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo.

Já nos Applets 03, 04, 05, 06, 07 e 08 abordaram-se, respectivamente, graus e radianos, círculo trigonométrico, seno no círculo trigonométrico, cosseno no círculo trigonométrico, tangente no círculo trigonométrico e funções trigonométricas. Sempre que possível, fazendo reflexões com a teoria de Duval e algumas considerações com a teoria de Vygotsky.

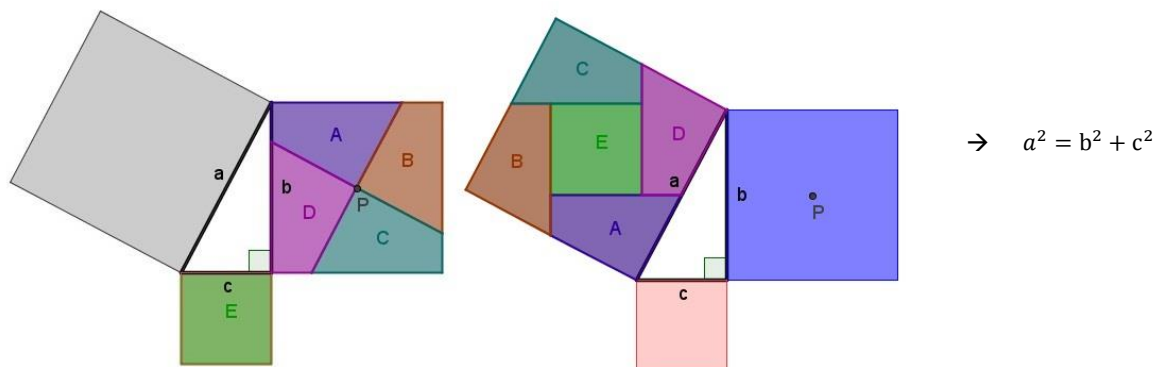
² A sequência didática estará disponível no CD e no blog: <http://edcarlospereira.wix.com/trigonometriaapplets>.

4.1 Applet 01 – Um Teorema no Triângulo Retângulo - Demonstração de Perigal.

O objetivo do Applet 01 foi de avaliar até que ponto o trabalho dos sujeitos da pesquisa com esse Applet permite a aprendizagem do teorema de Pitágoras, isto é, da demonstração de Perigal e da aplicação do teorema de Pitágoras em uma situação particular. Para a manipulação e investigação desse Applet, a dupla seguirá e responderá a Atividade 01, que é composta de três questões, podendo haver itens a, b e c.

Na primeira questão, item a, pretende-se que os alunos conjecturem o teorema de Pitágoras comparando as áreas dos quadrados formados sobre os lados do triângulo retângulo. Também, deseja-se analisar as dificuldades que os alunos têm em fazer as conversões entre os registros. Neste caso, do registro geométrico para o registro algébrico (Figura 4), pois conforme Damm (2012, p. 168), “o que se constatou em diversas pesquisas em Educação Matemática é a dificuldade que o aluno encontra em passar de uma representação à outra.”

Figura 4 – Teorema de Pitágoras – Demonstração de Perigal.



Fonte: Autor.

No item b da primeira questão, deseja-se que os alunos expliquem com suas palavras como ela entendeu a demonstração de Henry Perigal para o teorema de Pitágoras, após a visualização e análise do Applet 01. Segundo Ribeiro (2013), Henry Perigal foi um matemático amador, viveu a maior parte nas proximidades de Londres, na Inglaterra. E sua demonstração foi descoberta por acaso. Ao tentar encontrar uma solução para a quadratura do círculo, ele encontrou uma demonstração para o Teorema de Pitágoras. Assim, pretende-se que os alunos observando o Applet 01 realizem os seguintes passos:

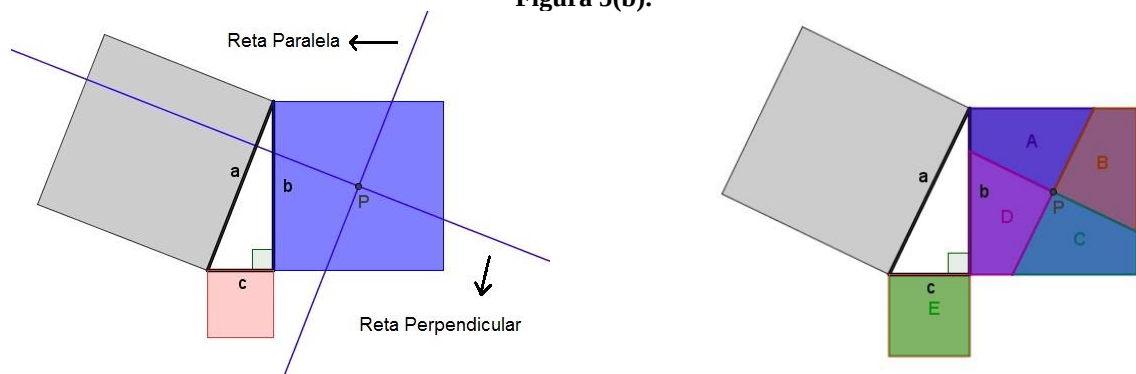
1º passo: construção de três quadrados sobre os lados do triângulo retângulo;

2º passo: traçado de uma reta perpendicular à hipotenusa passando pelo ponto P centro do quadrado médio (construído sobre o cateto de maior lado) e uma reta paralela à hipotenusa passando pelo mesmo ponto P centro do quadrado médio (Figura 5(a));

3º passo: em seguida obtenção de quatro quadriláteros idênticos (formados pela reta perpendicular e paralela) no quadrado médio (Figura 5(b));

4º passo: para finalizar a demonstração geométrica de Perigal para Teorema de Pitágoras, montagem como um quebra-cabeça dos quatro quadriláteros e do quadrado menor (construído sobre o cateto de menor lado) sobre o quadrado maior (construído sobre a hipotenusa), encaixando-os perfeitamente (Figura 4).

Figura 5 – Retas paralela e perpendicular à hipotenusa – Figura 5(a) e Quadrado médio cortado pelas retas – Figura 5(b).



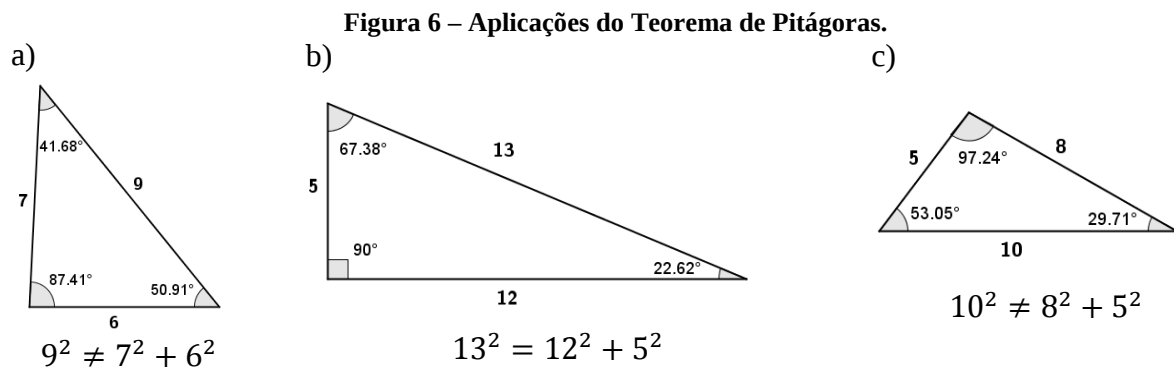
Fonte: Autor.

Como a área dos dois quadrados menores coincide-se com a área do quadrado maior, fica demonstrado geometricamente o Teorema de Pitágoras. Pela complexidade dessa atividade acredita-se que alunos encontrarão obstáculos em explicar os procedimentos.

Já na segunda questão, manipulando adequadamente a equação algébrica encontrada na primeira questão, item a, os alunos farão a conversão do registro algébrico para o registro numérico. Isto é, dado a hipotenusa a igual a 10, cateto b igual a 8 e sabendo que $a^2 = b^2 + c^2$ o aluno deverá obter c , um número inteiro positivo, assim eles obterão o seguinte resultado: $c = 6$, após as operações feitas no teorema de Pitágoras. Em algum momento o professor poderá intervir, pois “[...] essa conversão não é simples e exige uma interferência do professor, como mediador desse processo.” (DAMM, 2012, p. 174).

Na terceira questão, itens a, b e c (Figura 6), os alunos irão verificar para quais triângulos o teorema de Pitágoras é válido. Eles, provavelmente, perceberão que somente o triângulo do item b é possível aplicar o teorema de Pitágoras, pois é um triângulo retângulo. Após os cálculos (Figura 6), observação, análise, manipulação e investigação do Applet 01,

possivelmente, os alunos chegarão ao seguinte resultado: o teorema de Pitágoras somente é valido para triângulos retângulos.

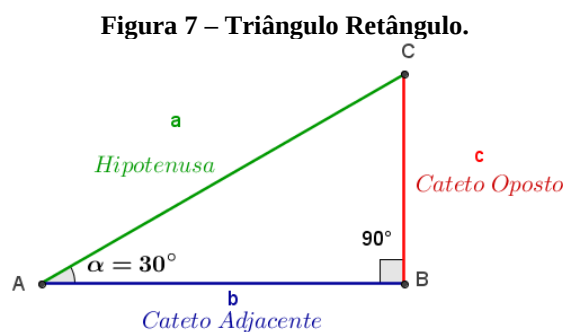


Fonte: Autor.

4.2 Applet 02 – Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo

Após a observação, manipulação e análise do Applet 02, espera-se que os estudantes sejam capazes de entender as razões trigonométricas no triângulo retângulo, conhecer os nomes das razões trigonométricas, calcular as razões dos ângulos notáveis e construir o quadro com os ângulos notáveis, seguindo as orientações da Atividade 02, que contém quatro questões.

Na questão 1, item a, os alunos poderão compreender que fixando o ângulo e alterando os comprimentos dos lados do triângulo retângulo (Figura 7) as razões $\frac{c}{a}$, $\frac{b}{a}$ e $\frac{c}{b}$ mantêm-se constantes. Isso ocorre devido ao fato de gerar vários triângulos semelhantes, assim obtendo-se razões proporcionais entre os lados dos triângulos gerados. Ao visualizar as imagens se movendo no computador, provavelmente, eles poderão fazer uma análise mais minuciosa. De fato, Lopes (2011) declara que o processo de arrastar figuras na tela do computador, em sucessivos testes, intensifica o poder de argumentação do aluno.



Fonte: Autor.

Conforme Vygotsky, “o nível de desenvolvimento real caracteriza o desenvolvimento mental retrospectivamente, enquanto a zona de desenvolvimento proximal caracteriza o desenvolvimento mental prospectivamente.” (VYGOTSKY, 1984, p. 97) Por isso, recordar temas que os alunos já estudaram torna-se eficaz para a aprendizagem.

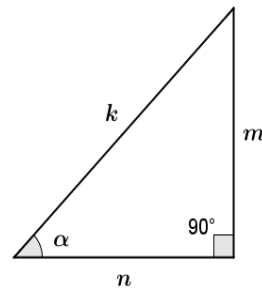
No item b da questão 1, os alunos irão visualizar os nomes das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente, e, em seguida, após observação e análise da Figura 8, eles poderão concluir que:

$$\text{I} - \operatorname{sen}(\alpha) = \frac{m}{k}$$

$$\text{II} - \cos(\alpha) = \frac{n}{k}$$

$$\text{III} - \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{m}{n}$$

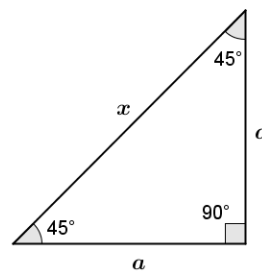
Figura 8 – Triângulo retângulo e escaleno.



Fonte: Autor.

Já na questão 2, item a, utilizando o teorema de Pitágoras os alunos irão calcular o valor de x em função de a (Figura 9), podendo obter o seguinte resultado: $x = a\sqrt{2}$.

Figura 9 – Triângulo retângulo e isósceles.



Fonte: Autor.

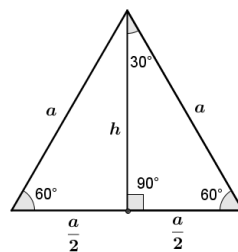
Ainda na questão 2, item b, aplicado o conceito do seno, do cosseno e da tangente no triângulo retângulo (Figura 9), os alunos provavelmente encontrarão que: $\operatorname{sen}(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\operatorname{tg}(45^\circ) = 1$.

Na questão 3, item a, os alunos irão calcular o valor de h em função de a (Figura 10), podendo obter o seguinte resultado: $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

No item b da questão 3, aplicando novamente o conceito do seno, do cosseno e da tangente no triângulo retângulo (Figura 10), os alunos poderão encontrar que: $\text{sen}(30^\circ) = \frac{1}{2}$, $\text{cos}(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\text{tg}(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

No item c da questão 3, mais uma vez, aplicando o conceito do seno, do cosseno e da tangente no triângulo retângulo (Figura 10), os alunos, possivelmente, encontrarão que: $\text{sen}(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{cos}(30^\circ) = \frac{1}{2}$ e $\text{tg}(30^\circ) = \sqrt{3}$.

Figura 10 – Triângulo equilátero.



Fonte: Autor.

Espera-se que nas questões 1, 2 e 3 do Applet 02 os alunos façam as conversões do registro geométrico para algébrico e do algébrico para o numérico.

Segundo Flores (2006, p. 80) “[...] a existência de muitos registros de representação, bem como, as atividades de conversão entre os registros, são, [...] imprescindíveis para a compreensão dos objetos matemáticos no ensino da matemática.”

Na quarta e última questão, os alunos irão preencher o Quadro 3 com os dados obtidos das questões 2 e 3, construindo assim a famosa tabela com os ângulos notáveis.

Quadro 3 – Ângulos Notáveis no Triângulo Retângulo

Razão	30°	45°	60°
<i>Seno</i>	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
<i>Cosseno</i>	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
<i>Tangente</i>	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

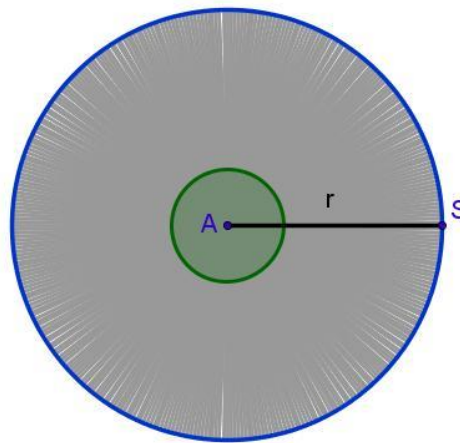
Fonte: Autor.

4.3 Applet 03 – Graus e Radianos

Ao verificar e investigar o Applet 03, a nossa expectativa é de que os estudantes: (1) aprendam o conceito de graus na circunferência, (2) conjecturem uma equação matemática para o comprimento da circunferência, (3) entendam como é construído o radiano, (4) descubram quantos graus equivale a um radiano e fazer as conversões entre radianos e graus ou inversamente. Para essa finalidade eles seguirão as informações da Atividade 03, que é formada por cinco questões.

Na primeira questão, item a, ao visualizar a Applet 03, opção Graus, espera-se que os estudantes, de maneira simples, assimilem o conceito de graus e concluam que 360° corresponde a uma volta completa numa circunferência (Figura 11).

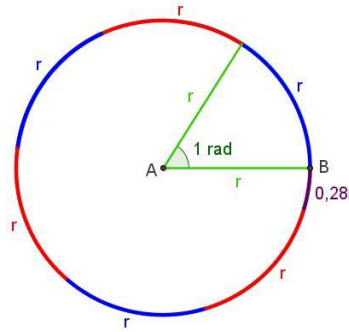
Figura 11 – Circunferência dividida em 360 partes.



Fonte: Autor.

Na primeira questão, item b, nossa expectativa é que depois de ver e examinar o Applet 03 opção Radianos, os estudantes conjecturem uma equação matemática para o cálculo do comprimento aproximado de qualquer circunferência, que será importante para a compreensão do conceito de radiano. Isto é, o comprimento C da circunferência em função de seu raio r é $C = 6,28r$ (Figura 12).

Figura 12 – Comprimento da Circunferência.



Fonte: Autor.

Na segunda questão, eles farão a conversão da equação matemática encontrada na questão anterior para uma equação equivalente utilizando $\pi \cong 3,14$. Ou seja, o comprimento C da circunferência em função de seu raio r é $C = 2\pi r$. Assim, mais uma vez eles converterão um número decimal aproximado para um número irracional ($6,28 = 2 \cdot 3,14 \cong 2\pi$).

Já na terceira questão, é apresentada aos discentes uma definição do radiano. Em seguida, ao analisar o Applet 03 juntamente com a equação $C = 2\pi r$ e regra de três, possivelmente eles encontrarão uma representação para medida do ângulo em radianos de uma volta completa numa circunferência. Obtendo-se dessa forma a medida de 2π radianos, pois, $\frac{r}{1_{rad}} = \frac{2\pi r}{x_{rad}}$. Tendo em vista que a matemática lida com objetos abstratos e esses “[...] objetos matemáticos não são diretamente acessíveis à percepção, necessitando, para sua apreensão, o uso de uma representação.” (DAMM, 2012, p. 171 e 172).

Na quarta questão, eles descobrirão quantos graus aproximadamente equivale 1 radiano, isto é, $1rad \cong 57,3^\circ$. Para isso, basta dividir 360° por 6,28.

Na quinta e última questão, eles poderão encontrar e explicar uma maneira de converter graus em radianos e radianos em graus compreendendo seus conceitos, pois só “podemos falar em conceitualização, aquisição de conhecimentos, somente a partir do momento em que o aluno ‘transitar’ naturalmente por diversos registros.” (DAMM, 2012, p. 176). Assim, apresentar um conteúdo matemático com suas representações semióticas e fazendo conversões entre esses registros é fundamental para ocorrer aprendizagem.

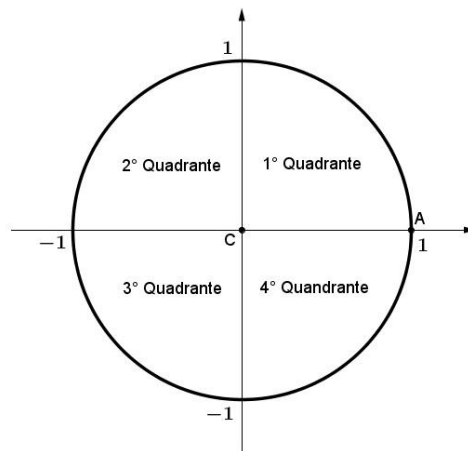
4.4 Applet 04 – Círculo Trigonométrico

No Applet 04 os alunos possivelmente serão capazes de compreender o conceito do círculo trigonométrico, com a sua divisão em quadrantes, verificação de sentidos de percurso, medição do seu raio, determinação em eixos coordenados do seno e do cosseno e

com demonstração das duas relações fundamentais da trigonometria. Para atingir estes objetivos eles farão a Atividade 04, que está organizada em cinco questões.

Na questão de número 1, item a, ao visualizar o Applet 04 os alunos notarão que eixos x e y decompõem o círculo trigonométrico em quatro quadrantes (Figura 13). Em seguida, espera-se que eles compreendam que no 1º quadrante a variação de α é entre 0° e 90° , no 2º é entre 90° e 180° , no 3º é entre 180° e 270° e por fim no 4º quadrante é entre 270° e 360° .

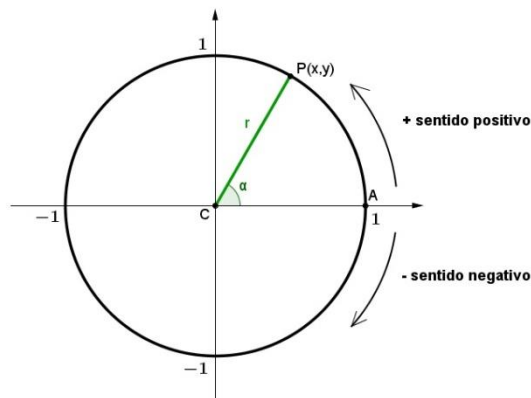
Figura 13 – Círculo trigonométrico em quadrantes.



Fonte: Autor.

No item b da questão de número 1, eles entenderão que no círculo trigonométrico a orientação é positiva no sentido anti-horário, e, a orientação é negativa no sentido horário (Figura 14). Também, eles inferirão que o comprimento do raio r de qualquer círculo trigonométrico tem medida igual a uma unidade ($r = 1u$). Após os alunos fazerem as questões de números: 2, 3, 4 e 5, eles poderão voltar para ao item b da número 2 e possivelmente explicarão porque define-se o raio r do círculo trigonométrico igual a 1.

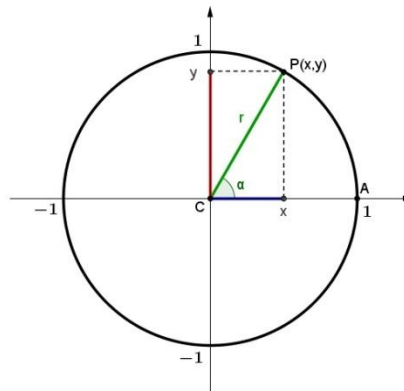
Figura 14 – Sentidos do Círculo trigonométrico.



Fonte: Autor.

Já na questão de número 2, com conceitos vistos em Applets anteriores, como da razão trigonométrica seno no triângulo retângulo e utilizando o raio $r = 1$, os alunos irão deduzir que $y = \text{sen}(\alpha)$, isto é, o $\text{sen}(\alpha)$ é igual à ordenada de um ponto $P(x, y)$ pertencente ao círculo trigonométrico (Figura 15).

Figura 15 – Círculo trigonométrico.

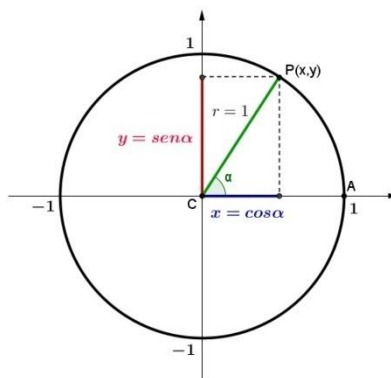


Fonte: Autor.

Na questão de número 3, também utilizando conceitos vistos em Applets anteriores, como da razão trigonométrica cosseno no triângulo retângulo e utilizando o raio $r = 1$, eles irão concluir que $x = \cos(\alpha)$, isto é, o $\cos(\alpha)$ é igual à abscissa de um ponto $P(x, y)$ pertencente ao círculo trigonométrico (Figura 15).

Na questão de número 4, como informação inicial é apresentado que um ponto P pertencente ao círculo trigonométrico pode ser expresso da seguinte forma: $P(x, y) = P(\cos \alpha, \text{sen } \alpha)$. Depois, utilizando o Teorema de Pitágoras e sabendo que a medida do comprimento do raio r de um círculo trigonométrico é igual 1 (Figura 16), os alunos demonstrarão a primeira relação fundamental da trigonometria que é $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Figura 16 – Círculo trigonométrico 2.



Fonte: Autor.

Já na quinta e última questão, eles demonstrarão a segunda relação fundamental da trigonometria que é $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha}$, para isso, eles utilizarão o conceito da razão trigonométrica tangente no triângulo retângulo (Figura 16).

4.5 Applet 05 – Seno no Círculo Trigonométrico

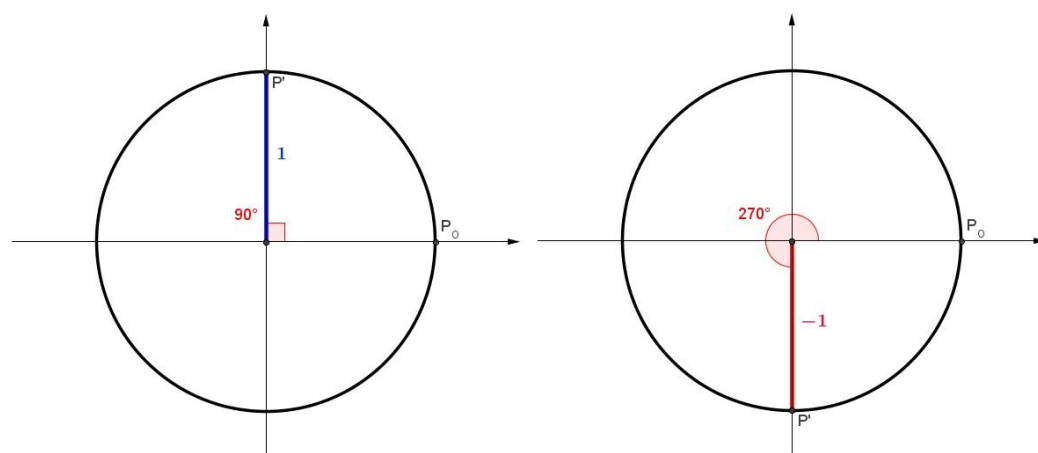
Ao visualizar e examinar o Applet 05 os alunos poderão compreender o conceito do seno no círculo trigonométrico, identificar os sinais do seno nos quatro quadrantes, conjecturar as propriedades do seno e verificar em qual intervalo os valores do seno é limitado. Para deduzir estas informações eles seguirão os passos da Atividade 05, que contém cinco questões.

Na primeira questão, item a, eles irão encontrar os senos de 0° , 90° , 180° , 270° e 360° , que é respectivamente, 0, 1, 0, -1 e 0. Em seguida, confirmar que o raio do círculo trigonométrico é igual a 1 (Figura 17).

No item b, da primeira questão, espera-se que eles percebam que o sinal do seno é positivo no primeiro e segundo quadrante e negativo no terceiro e quarto quadrante. Além disso, eles poderão identificar os intervalos de ângulos onde o seno é positivo e negativo, isto é, $\operatorname{sen}(\alpha) \geq 0$ quando $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ e $\operatorname{sen}(\alpha) < 0$ quando $180^\circ < \alpha < 360^\circ$ (Figura 18).

Na segunda questão, após a análise do Applet 05 os alunos, possivelmente, conseguirão encontrar um intervalo em que o seno é limitado, isto é, $-1 \leq \operatorname{sen}(\alpha) \leq 1$ (Figura 17). Dessa forma, eles poderão fazer a conversão do registro geométrico para o registro algébrico, pois “[...] é durante a passagem de um registro de representação a outro que podemos observar a importância da forma das representações.” (DAMM, 2012, p. 187).

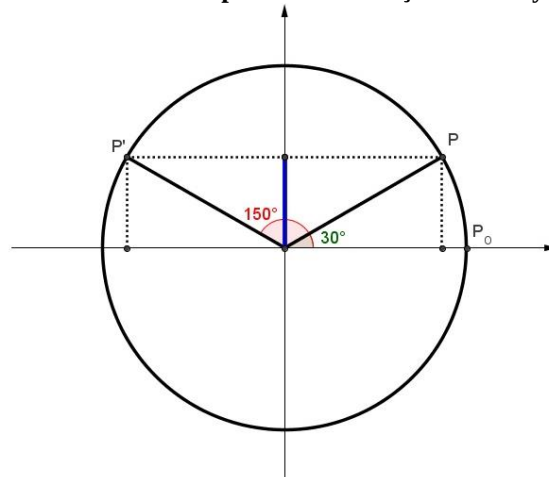
Figura 17 – Seno de 90° – Figura 17(a) e Seno de 270° graus – Figura 17(b).



Fonte: Autor.

Na terceira questão, eles localizarão ângulos no segundo quadrante em que o seno desses ângulos tem a mesma medida do seno de 30° , 45° e 60° . Para isso, basta localizar pontos P' no segundo quadrante simétricos ao ponto P em relação ao eixo y (Figura 18). Ou seja, $\text{sen}(150^\circ) = \text{sen}(30^\circ)$, $\text{sen}(135^\circ) = \text{sen}(45^\circ)$ e $\text{sen}(120^\circ) = \text{sen}(60^\circ)$ e, assim, poderão concluir que os senos de ângulos suplementares³ são iguais, chegando à seguinte equação matemática $\text{sen}(180^\circ - \alpha) = \text{sen}(\alpha)$.

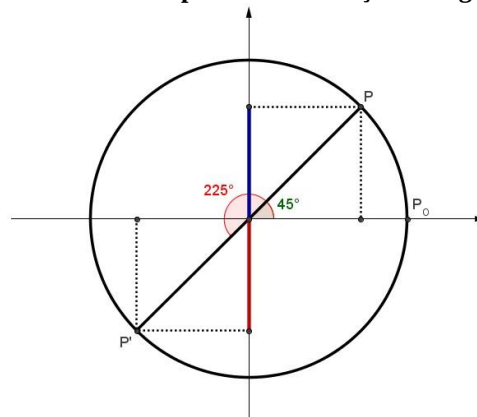
Figura 18 – Simetria do ponto P em relação ao eixo y – Seno.



Fonte: Autor.

Já na quarta questão, eles poderão chegar às seguintes igualdades, $-\text{sen}(210^\circ) = \text{sen}(30^\circ)$, $-\text{sen}(225^\circ) = \text{sen}(45^\circ)$ e $-\text{sen}(240^\circ) = \text{sen}(60^\circ)$. Para isso, eles localizarão ângulos no terceiro quadrante correspondentes ao ponto P' , onde P' é simétrico ao ponto P em relação à origem do círculo trigonométrico (Figura 19), e o ponto P é correspondente a ângulos de 30° , 45° e 60° . Dessa forma, eles poderão conjecturar a seguinte equação matemática $-\text{sen}(180^\circ + \alpha) = \text{sen}(\alpha)$.

Figura 19 – Simetria do ponto P em relação à origem – Seno.

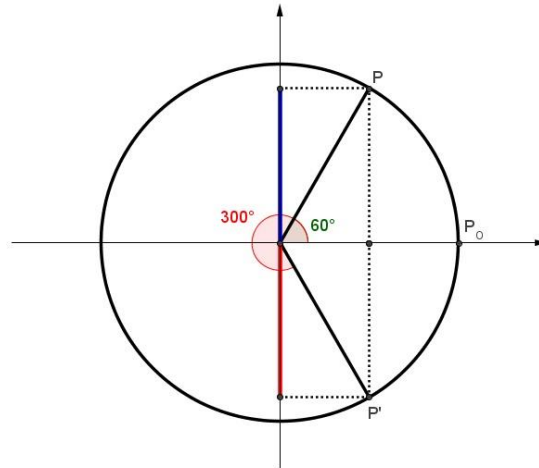


Fonte: Autor.

³ Dois ângulos são suplementares quando a soma de suas medidas é 180° .

Na quinta e última questão, movendo o ponto P' até o quarto quadrante (Figura 20) simétrico ao ponto P em relação ao eixo x , eles poderão chegar às seguintes conclusões: $-\text{sen}(330^\circ) = \text{sen}(30^\circ)$, $-\text{sen}(315^\circ) = \text{sen}(45^\circ)$ e $-\text{sen}(300^\circ) = \text{sen}(60^\circ)$ e, com isso, eles poderão generalizar, obtendo a seguinte equação matemática $-\text{sen}(\alpha) = \text{sen}(360^\circ - \alpha)$.

Figura 20 – Simetria do ponto P em relação ao eixo x – Seno.



Fonte: Autor.

4.6 Applet 06 – Cosseno no Círculo Trigonométrico

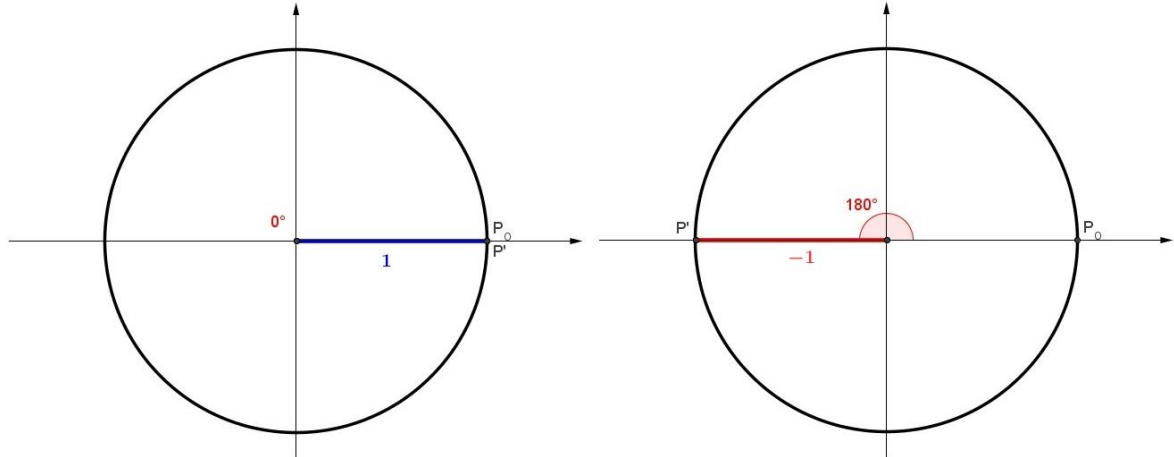
Ao manusear e explorar o Applet 06 tem-se como objetivos que os alunos compreendam o conceito do cosseno no círculo trigonométrico, identifiquem os sinais do cosseno nos quatro quadrantes, conjecturem as propriedades do cosseno e verificar que intervalo os valores do cosseno é limitado. Para alcançar esses propósitos eles acompanharão os estágios da Atividade 06, que é integrada por cinco questões.

Na questão 1, item a, semelhante o que foi feito na primeira questão do Applet 05 espera-se que os estudantes obtenham os cossenos de 0° , 90° , 180° , 270° e 360° , com os seguintes valores, respectivamente, 1, 0, -1, 0 e 1. Depois, que eles confirmem, mais uma vez, que o raio do círculo trigonométrico é igual a 1 (Figura 21).

No item b, da questão 2, eles concluirão que o sinal do cosseno é positivo no primeiro e quarto quadrante e negativo no segundo e terceiro quadrante. Também, eles poderão certificar em quais intervalos de ângulos o cosseno é positivo ou negativo. Evidenciando que o $\cos(\alpha) \geq 0$ quando $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ ou $270^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ e $\cos(\alpha) < 0$ quando $90^\circ < \alpha < 270^\circ$ (Figura 21).

Já na questão 2, logo depois de averiguarem o Applet 06 os alunos provavelmente perceberão que as medidas do $\cos(\alpha)$ varia entre -1 e 1 , gerando o seguinte intervalo fechado $-1 \leq \cos(\alpha) \leq 1$ (Figura 21).

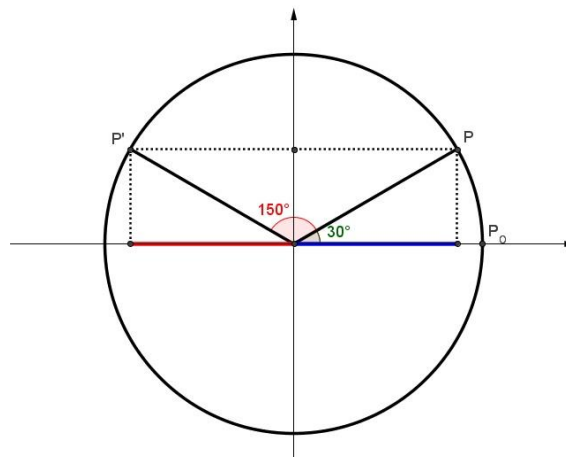
Figura 21 – Cosseno de 0 – Figura 21(a) e Cosseno de 180 graus – Figura 21(b).



Fonte: Autor.

Na questão 3, semelhante ao que foi feito no applet anterior, eles podem obter as seguintes igualdades: $-\cos(150^\circ) = \cos(30^\circ)$, $-\cos(135^\circ) = \cos(45^\circ)$ e $-\cos(120^\circ) = \cos(60^\circ)$ e, assim, poderão generalizar para seguinte equação matemática $-\cos(180^\circ - \alpha) = \cos(\alpha)$ (Figura 22).

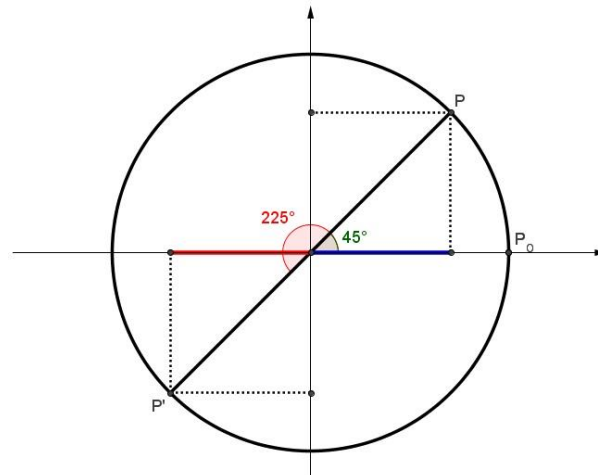
Figura 22 – Simetria do ponto P em relação ao eixo y – Cosseno.



Fonte: Autor.

Já na questão 4, análoga a questão anterior, eles irão confirmar as seguintes igualdades, $-\cos(210^\circ) = \cos(30^\circ)$, $-\cos(225^\circ) = \cos(45^\circ)$ e $-\cos(240^\circ) = \cos(60^\circ)$. Para obter estas conclusões, espera-se que eles considerem pontos P' no terceiro quadrante simétricos ao ponto P em relação à origem do plano cartesiano (Figura 23). Assim, deduzirão a seguinte equação matemática $-\cos(180^\circ + \alpha) = \cos(\alpha)$.

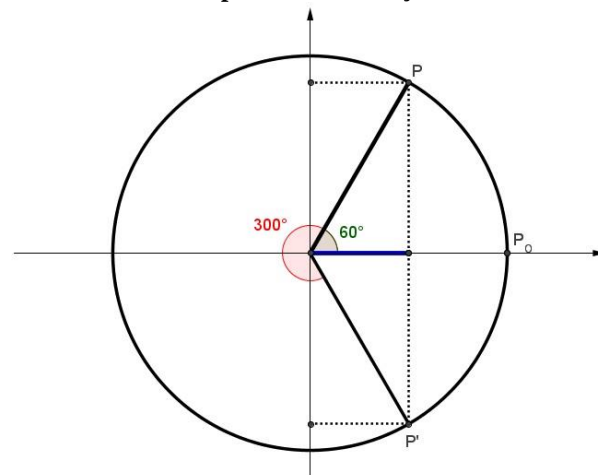
Figura 23 – Simetria do ponto P em relação à origem – Cosseno.



Fonte: Autor.

Na quinta e última questão, alterando o seletor α (alfa) entre 270° e 360° o ponto P' ficará localizado no quarto quadrante (Figura 24), assim, os alunos obterão as seguintes conclusões: $\cos(330^\circ) = \cos(30^\circ)$, $\cos(315^\circ) = \cos(45^\circ)$ e $\cos(300^\circ) = \cos(60^\circ)$ e, com isso, eles poderão generalizar, obtendo a seguinte equação matemática $\cos(\alpha) = \cos(360^\circ - \alpha)$.

Figura 24 – Simetria do ponto P em relação ao eixo x – Cosseno.



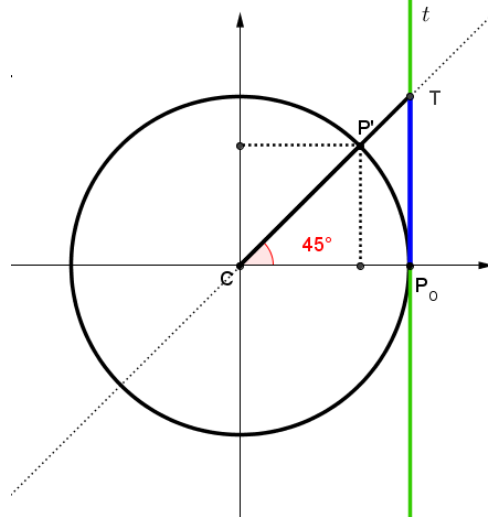
Fonte: Autor.

4.7 Applet 07 – Tangente no Círculo Trigonométrico

O Applet 07 tem com finalidade subsidiar a aprendizagem do conceito da tangente no círculo trigonométrico, da identificação dos sinais da tangente nos quatros quadrantes, da conjecturação das propriedades da tangente e da determinação dos intervalos nos quais os valores da tangente é limitado. Para alcançar estes objetivos os alunos farão a Atividade 07, que é constituída de cinco questões.

Na primeira questão, item a, após uma análise minuciosa do Applet 07, espera-se que os alunos percebam que as $\text{tg}(90^\circ)$ e $\text{tg}(270^\circ)$ não existem, pois o ponto T é a interseção das retas $\overleftrightarrow{CP'}$ e t (Figura 25), como em 90° e 270° as retas são paralelas, donde segue-se que não existe $\overline{P_0T}$. Além disso, eles encontrarão as seguintes igualdades $\text{tg}(0^\circ) = 0$, $\text{tg}180^\circ = 0$ e $\text{tg}360^\circ = 0$.

Figura 25 – Tangente no Círculo Trigonômétrico.

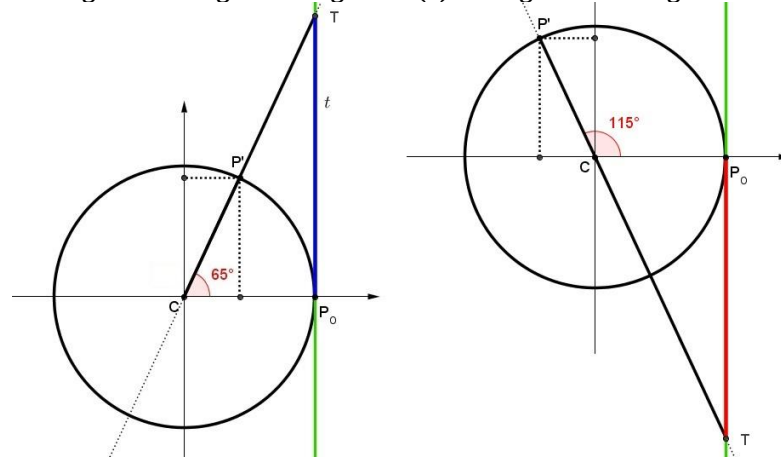


Fonte: Autor.

No item b, da primeira questão, os alunos poderão notar que a tangente é positiva no primeiro e quarto quadrante e negativa no segundo e terceiro quadrante (Figura 26). Em consequência, eles poderão obter os seguintes intervalos: $\text{tg}(\alpha) \geq 0$ quando $0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$ ou $180^\circ \leq \alpha < 270^\circ$ e $\text{tg}(\alpha) < 0$ quando $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ou $270^\circ < \alpha < 360^\circ$.

Já na segunda questão, possivelmente, os alunos descobrirão que a tangente não é limitada, isto é, a imagem dela não está compreendida entre dois valores, pois quando o ângulo α (alfa) se aproxima de 90° pela direita a tangente de α tende ao ∞ (infinito) e quando se aproxima de 90° pela esquerda a tangente de α tende ao $-\infty$ (menos infinito), logo a imagem da tangente é o conjunto dos números reais (Figura 26).

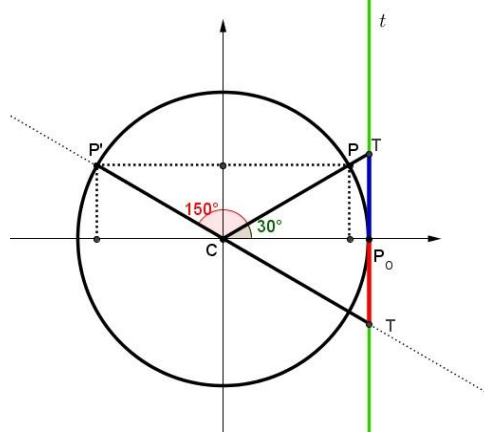
Figura 26 – Tangente de 65 graus – Figura 26(a) e Tangente de 115 graus – Figura 26(b).



Fonte: Autor.

Na terceira questão, espera-se que consigam chegar às seguintes igualdades, $-tg(150^\circ) = tg(30^\circ)$, $-tg(135^\circ) = tg(45^\circ)$ e $-tg(120^\circ) = tg(60^\circ)$ e, assim, poderão generalizar para seguinte equação matemática $-tg(180^\circ - \alpha) = tg(\alpha)$. Eles obterão esses resultados, encontrando pontos P' no segundo quadrante simétricos ao ponto P em relação ao eixo y (Figura 27).

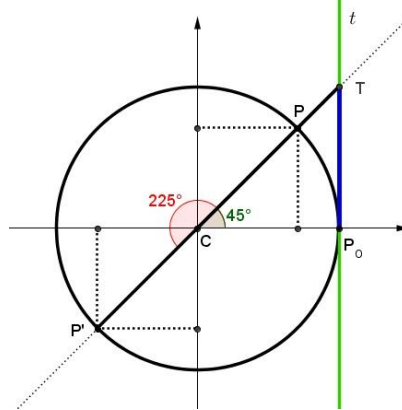
Figura 27 – Simetria do ponto P em relação ao eixo y – Tangente.



Fonte: Autor.

Já na quarta questão, seguindo o mesmo raciocínio da questão anterior, eles certificarão a veracidade das seguintes igualdades: $tg(210^\circ) = tg(30^\circ)$, $tg(225^\circ) = tg(45^\circ)$ e $tg(240^\circ) = tg(60^\circ)$. Para isso, basta localizar pontos P' no terceiro quadrante simétricos ao ponto P em relação à origem do plano cartesiano. Dessa forma, conjecturando a seguinte equação matemática $tg(180^\circ + \alpha) = tg(\alpha)$ (Figura 28).

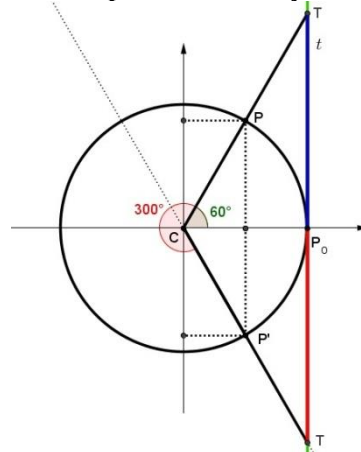
Figura 28 – Simetria do ponto P em relação à origem – Tangente.



Fonte: Autor.

Na quinta e última questão, as igualdades: $-tg(330^\circ) = tg(30^\circ)$, $-tg(315^\circ) = tg(45^\circ)$ e $-tg(300^\circ) = tg(60^\circ)$ serão obtidas encontrando pontos P' no quarto quadrante simétricos aos pontos P em relação ao eixo x . Assim, tornando geral a seguinte equação matemática $-tg(\alpha) = tg(360^\circ - \alpha)$ (Figura 29).

Figura 29 – Simetria do ponto P em relação ao eixo x – Tangente.



Fonte: Autor.

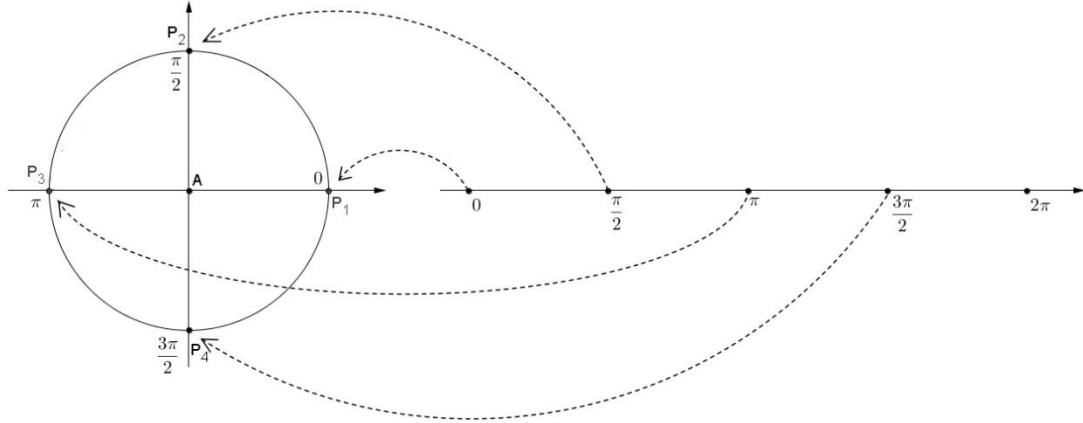
4.8 Applet 08 – Funções Trigonômicas

Ao investigar e manipular o Applet 08, os alunos, possivelmente, entenderão os conceitos das funções seno e cosseno, verificarão e identificarão os gráficos das funções seno e cosseno, compreenderão e encontrarão os períodos das funções seno e cosseno e constatarão quais são os domínios e imagens das funções seno e cosseno. Para compreender essas informações eles realizarão a Atividade 08, que é formada por cinco questões.

Na primeira questão, item a, a intenção é fazer com que os alunos percebam que para cada ponto P na circunferência trigonométrica está associado um número real na reta numérica (Figura 30).

Além disso, eles irão preencher um quadro com os números reais x associados aos ângulos de: $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ e 360° (Quadro 4), e, com os respectivos senos de x ($\text{sen}x$). Assim, observando como é construído o gráfico da função seno no intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$.

Figura 30 – Números reais associados a pontos na circunferência trigonométrica.



Fonte: Autor.

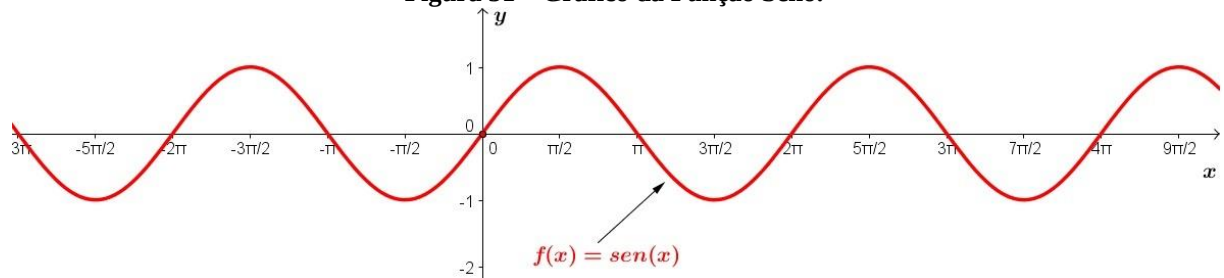
Quadro 4 – Ângulos Notáveis no Círculo Trigonométrico – Seno

Ângulo	x	$f(x) = \text{sen}(x)$
0°	0	0
90°	$\frac{\pi}{2}$	1
180°	π	0
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1
360°	2π	0

Fonte: Autor

No item b, da primeira questão, os alunos poderão inferir que o domínio da função seno é o conjunto dos números reais R , ou seja, a função seno está definida para todo x pertencente aos números reais R e o conjunto imagem da função seno é o intervalo real $[-1,1]$ (Figura 31). Segue-se que $-1 \leq \text{sen}x \leq 1, \forall x \in R$.

Figura 31 – Gráfico da Função Seno.



Fonte: Autor.

Na segunda questão, os alunos investigarão o gráfico da função seno do tipo $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx + d)$, alterando os valores de: a, b, c e d . Assim, observarão as transformações: de deslocamento, de esticamento, de compressão e de reflexão (Quadro 5).

Eles provavelmente observarão os seguintes resultados:

Quadro 5 – Estudo dos Coeficientes da Função Seno do Tipo $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx + d)$

	$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$
Seletor a	Desloca o gráfico para cima em a unidades.	Não há deslocamento do gráfico.	Desloca o gráfico para baixo em a unidades.
	$b > 1$ ou $0 < b < 1$	$b = 1$	$b < 0$
Seletor b	Quando $b > 1$: estica o gráfico verticalmente por um fator de b . Quando $0 < b < 1$: comprime o gráfico verticalmente por um fator de b .	Não há esticamento e nem compressão do gráfico.	Reflete o gráfico em torno do eixo x . Também, estica e comprime o gráfico verticalmente por um fator de b .
	$c > 1$ ou $0 < c < 1$	$c = 1$	$c < 0$
Seletor c	Quando $c > 1$: comprime o gráfico horizontalmente por um fator de c . Quando $0 < c < 1$: estica o gráfico horizontalmente por um fator de c .	Não há esticamento e nem compressão do gráfico.	Reflete o gráfico em torno do eixo y . Também, estica e comprime o gráfico horizontalmente por um fator de c .
	$d > 0$	$d = 0$	$d < 0$
Seletor d	Desloca o gráfico para esquerda em d unidades.	Não há deslocamento do gráfico.	Desloca o gráfico para direita em d unidades.

Fonte: Autor

Já na terceira questão, semelhante ao que foi feito na primeira questão, os alunos completarão um quadro com os números reais x associados aos ângulos de: $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ e 360° (Quadro 6), e, com os respectivos cossenos de x ($\cos x$). Em seguida, eles irão observar como é construído o gráfico da função cosseno no intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$.

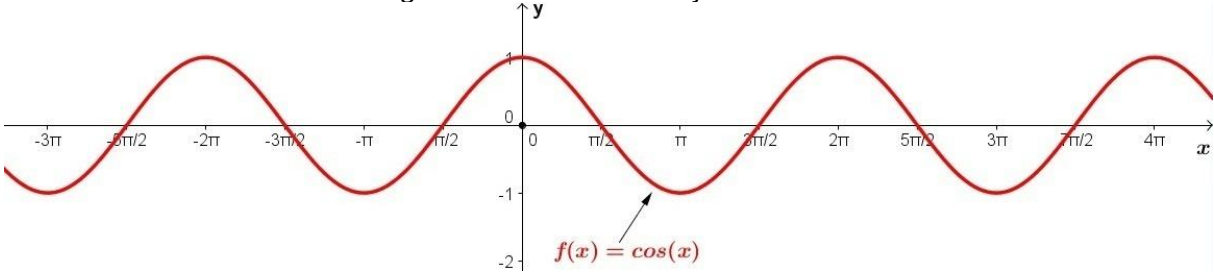
Quadro 6 – Ângulos Notáveis no Círculo Trigonométrico – Cosseno

Ângulo	x	$f(x) = \cos(x)$
0°	0	1
90°	$\frac{\pi}{2}$	0
180°	π	-1
270°	$\frac{3\pi}{2}$	0
360°	2π	1

Fonte: Autor

Na quarta questão, os alunos poderão deduzir que o conjunto dos números reais R é o domínio da função cosseno, isso significa, assim como o seno, que a função cosseno também está definida para todo x pertencente aos números reais R e o intervalo real $[-1,1]$ também é o conjunto imagem da função cosseno (Figura 32). Logo, $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in R$.

Figura 32 – Gráfico da Função Cosseno.



Fonte: Autor.

Na quinta e última questão, modificando os valores: a, b, c e d na função do tipo $f(x) = a + b \cdot \cos(cx + d)$, os alunos analisarão o gráfico da função cosseno. Dessa forma, observarão as transformações: de deslocamento, de esticamento, de compressão e de reflexão (Quadro 7). Chegando provavelmente nos seguintes resultados:

Quadro 7 – Estudo dos Coeficientes da Função Cosseno do Tipo $f(x) = a + b \cdot \cos(cx + d)$

Seletor a	$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$
	Desloca o gráfico para cima em a unidades.	Não há deslocamento do gráfico.	Desloca o gráfico para baixo em a unidades.
	$b > 1$ ou $0 < b < 1$	$b = 1$	$b < 0$
	Quando $b > 1$: estica o gráfico verticalmente por	Não há esticamento e nem compressão do	Reflete o gráfico em torno do eixo x .

Seletor b	um fator de b . Quando $0 < b < 1$: comprime o gráfico verticalmente por um fator de b .	gráfico.	Também, estica e comprime o gráfico verticalmente por um fator de b .
Seletor c	$c > 1$ ou $0 < c < 1$	$c = 1$	$c < 0$
	Quando $c > 1$: comprime o gráfico horizontalmente por um fator de c . Quando $0 < c < 1$: estica o gráfico horizontalmente por um fator de c .	Não há esticamento e nem compressão do gráfico.	Reflete o gráfico em torno do eixo y . Também, estica e comprime o gráfico horizontalmente por um fator de c .
Seletor d	$d > 0$	$d = 0$	$d < 0$
	Desloca o gráfico para esquerda em d unidades.	Não há deslocamento do gráfico.	Desloca o gráfico para direita em d unidades.

Fonte: Autor.

Assim, o conteúdo de Trigonometria pode ser apresentado com atividades interativas e com várias representações, e vale ressaltar que “[...] as representações (semióticas) não são somente necessárias para fins de comunicação, elas são igualmente essenciais para as atividades cognitivas do pensamento.” (DUVAL 1993, apud DAMM, 2012, p. 177). Ou seja, as representações semióticas têm um papel importante na construção do conhecimento do sujeito que apreende.

5 ANÁLISE, DISCUSSÃO E RESULTADOS DAS ATIVIDADES

Neste capítulo, da seção 5.1 a 5.8 apresentam-se as análises, discussões e resultados das oito atividades feitas pelos os alunos. Foram obtidos durante a experimentação e análise *a posteriori*. As atividades descritas nas seções 5.1 a 5.8 foram respondidas em duplas. Com os 12 alunos, que são os sujeitos de nossa pesquisa, formamos seis duplas, que a partir de agora serão identificados da seguinte maneira: dupla 1, dupla 2, dupla 3, dupla 4, dupla 5 e dupla 6.

5.1 Atividade 01

Nesta atividade, teve-se como objetivo principal compreender e aplicar o teorema de Pitágoras com a demonstração de Perigal manipulando o Applet 01, que fornecemos para as seis duplas.

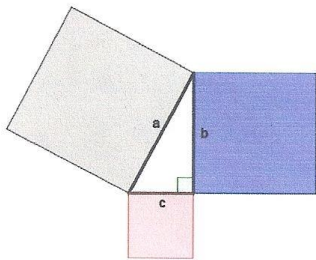
Todas as seis duplas conjecturaram, na questão 1, item a, que num triângulo retângulo de lados a, b e c , onde a é a hipotenusa, b e c os catetos, vale a equação: $a^2 = b^2 + c^2$.

Mas as duplas 4 e 6 tiveram dificuldades em concluir essa equação, portanto, foi necessário uma participação mais ativa da minha parte. Chegaram a afirmar que “não estamos conseguindo”. Pedi para que repetissem o Applet 01 mais devagar, analisando e observando o que acontecia com as áreas dos quadrados de lados b e c em relação à área do quadrado de lado a . Eles repetiram o procedimento, e dessa forma, obtiveram a equação desejada.

Apesar das seis duplas concluírem corretamente a equação, três delas deram explicações não tão claras. Observe na Figura 33 a justificativa da dupla 2.

Figura 33 – Resposta da dupla 2 – Questão 1, Item a da Atividade 01.

a) Que equação matemática você pode concluir em relação à comparação entre as áreas dos quadrados (cinza, azul e rosa), após a visualização e análise do Applet 01? Justifique sua resposta.



$$a^2 = b^2 + c^2$$

Poris a soma dos dois catetos sempre irá dar o mesmo valor da hipotenusa, e essa equação faz com que as letras a, b e c represente estes lados do triângulo retângulo.

Figura 1 – Triângulo com quadrados sobre seus lados.
Fonte: Arquivo pessoal do professor pesquisador.

Fonte: Autor.

A justificativa da dupla 2, após escrever corretamente a equação de Pitágoras, esquecendo de informar que os lados a , b , c do triângulo retângulo devem ser elevados ao quadrado, revela desatenção ou falta de prática de redigir justificativas de problemas matemáticos.

Agora, observe na Figura 34 uma justificativa simples e coerente da dupla 6, apesar de não estar bem redigida.

Figura 34 – Resposta da dupla 6 para a Questão 1, Item a, da Atividade 01.

a) Que equação matemática você pode concluir em relação à comparação entre as áreas dos quadrados (cinza, azul e rosa), após a visualização e análise do Applet 01? Justifique sua resposta.

$a^2 = b^2 + c^2$

que a área do quadrado (b) mais a de (c) é igual a (a)

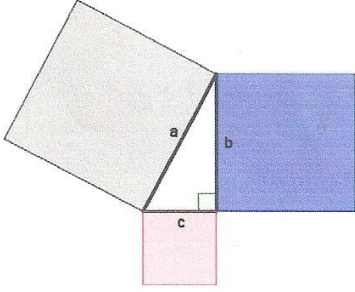


Figura 1 – Triângulo com quadrados sobre seus lados.
Fonte: Arquivo pessoal do professor pesquisador.

Fonte: Autor.

Já no item b da questão 1, apenas a dupla 5 explicou passo a passo a demonstração de Perigal para o teorema de Pitágoras (Figura 35). Confirmou-se o que já era esperado: que a maioria dos alunos tivesse dificuldades em explicar a demonstração de Perigal para o teorema de Pitágoras.

Em relação à questão 1 item b, a dupla 3 escreveu “Na demonstração que mostra três quadrados (pequeno, médio e grande). Onde a soma do quadrado pequeno mais o médio dar o valor do quadrado grande.” Como as demais duplas expressaram justificativas semelhantes e resumidas, talvez a questão 1, item b, deveria ser grafada da seguinte forma: “Baseado na apresentação do Applet 01, explique com suas palavras, passo a passo, a demonstração de Perigal para o teorema de Pitágoras”.

Provavelmente com essa alteração os objetivos nessa atividade, de modo geral, seriam alcançados como ocorreu com a dupla 5 (Figura 35).

Figura 35 – Resposta da dupla 5 – Questão 1, Item b da Atividade 01.

b) Baseado na apresentação do Applet 01, explique com suas palavras a demonstração de Perigal para o teorema de Pitágoras.

- 1) Ele pegou o triângulo retângulo de medidas aleatórias;
- 2) Em cada lado do triângulo retângulo ele construiu um quadrado que tinha lados iguais aos lados do triângulo retângulo;
- 3) Ele encontrou a área de cada quadrado, a área do quadrado a é igual a^2 (lado da hipotenusa), a área do quadrado de lado b é dado por b^2 (cateto b), a área do quadrado de lado c é dado por c^2 (cateto c).
- 4) Após isso ele fez uma reta paralela à hipotenusa e outra perpendicular.
- 5) Fez um ponto central no quadrado médio (quadrado b)
- 6) Com as linhas, as linhas perpendiculares e uma diagonalmente o quadrado médio no ponto central que ele fez, e a linha paralela a hipotenusa o quadrado médio, dividindo-o em quatro partes iguais, de áreas iguais.
- 7) Colocou os lados cortados do quadrado médio em cada aresta do quadrado maior.
- 8) Encaixando-o o quadrado menor (quadrado c) no espaço restante do quadrado maior, que é a parte central, cobriu toda a área do quadrado hipotenusa.

Fonte: Autor.

Na questão 2, foi definido como objetivo verificar a dificuldade de conversão do registro algébrico para o registro numérico.

Todas as seis duplas manipularam adequadamente a equação algébrica $a^2 = b^2 + c^2$ (teorema de Pitágoras) e encontraram respostas corretas, como na Figura 36, resposta da dupla 3.

Figura 36 – Resposta da dupla 3 – Questão 2 da Atividade 01.

2) Utilizando a equação matemática obtida na questão 1, encontre a medida do cateto c , para hipotenusa $a = 10$ e o cateto $b = 8$. Explique o procedimento. Observação: quando o termo a, b e c , satisfaz a equação da questão 1, chama-se a, b e c de terno pitagórico.

$a = 10$	$a^2 = b^2 + c^2$	* calculando de acordo com a equação de pitágoras, acharemos $c = 6$.
$b = 8$	$10^2 = 8^2 + c^2$	
$c = ?$	$100 = 64 + c^2$	
* para descobrir o c , é necessário substituir na equação os valores de a e b .	$-c^2 = 64 - 100$	
	$-c^2 = -36 (-1)$	
	$c^2 = 36$	
	$c = \sqrt{36}$	
	$c = 6$	

Fonte: Autor.

Na terceira e última questão da Atividade 1, propomos como objetivo verificar que conclusão os alunos teriam em aplicar o teorema de Pitágoras em três triângulos: um retângulo e dois escalenos.

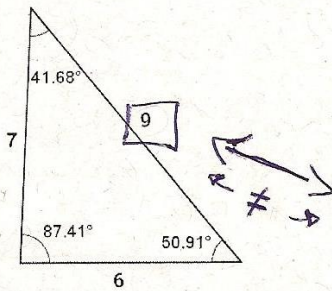
Das seis duplas, após aplicar o teorema nos três triângulos da terceira questão, Atividade 1, três delas concluíram que o teorema de Pitágoras somente é valido para triângulos retângulos. Note a resposta da dupla 1 na Figura 37.

Figura 37 – Resposta da dupla 1 – Questão 3 da Atividade 01.

3) Verifique para quais triângulos abaixo o teorema de Pitágoras é valido. O que você pode concluir?

$$a^2 = b^2 + c^2; \text{ onde 'a' é a hipotenusa.}$$

a)



$$a^2 = 7^2 + 6^2$$

$$a^2 = 49 + 36$$

$$a^2 = 85$$

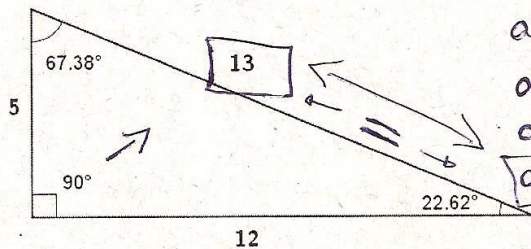
$$a = \sqrt{85}$$

$$a \approx 9,22$$

Figura 2 – Triângulo 1.

Fonte: Arquivo pessoal do professor pesquisador.

b)



$$a^2 = b^2 + c^2; \text{ onde 'a' é a hipotenusa}$$

$$a^2 = 5^2 + 12^2$$

$$a^2 = 25 + 144$$

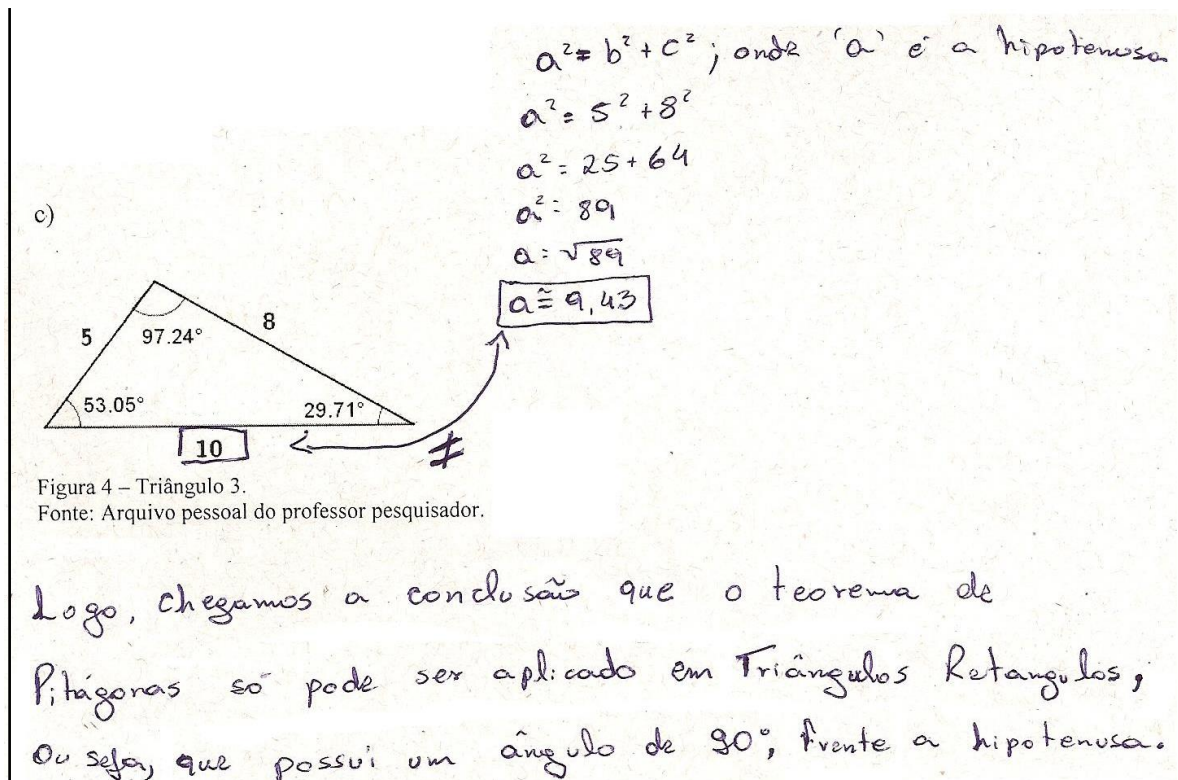
$$a^2 = 169$$

$$a = \sqrt{169}$$

$$a = 13$$

Figura 3 – Triângulo 2.

Fonte: Arquivo pessoal do professor pesquisador.



Fonte: Autor.

Das outras três duplas, uma delas não expressou nenhuma conclusão, apesar de aplicar o teorema de Pitágoras. Já as outras duas não conseguiram manifestar respostas claras, apesar de concluir que o teorema de Pitágoras é válido apenas no triângulo do item b, que é um triângulo retângulo. Observe a resposta da dupla 2 na Figura 38.

Nota-se que a dupla 2, além de exibir igualdades erradas como: “ $81=85$ ” e “ $100=89$ ”, não responderam claramente que é devido ao fato do triângulo ser um triângulo retângulo.

No momento da socialização, dessa atividade, as duplas 1 e 3 declararam que perceberam rapidamente a equação: $a^2 = b^2 + c^2$. A dupla 5 nos informou que entendeu o teorema de Pitágoras, quando viu que “as áreas dos quadrados menores cobriu a área do quadrado maior”. Já as duplas 4 e 6, confirmaram que tiveram dificuldades, mas conseguiram compreender o que estava acontecendo.

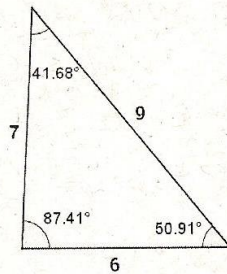
E por fim, no momento da institucionalização, corroborei apresentando os objetivos da atividade e elucidando os pontos que expôs os impedimentos dos alunos, em relação a inferir os conceitos apresentados por essa atividade.

Todas as expectativas foram alcançadas, ainda que algumas respostas ou conclusões dos alunos tivessem revelado alguma imprecisão.

Figura 38 – Resposta da dupla 2 – Questão 3 da Atividade 01.

3) Verifique para quais triângulos abaixo o teorema de Pitágoras é válido. O que você pode concluir?

a)

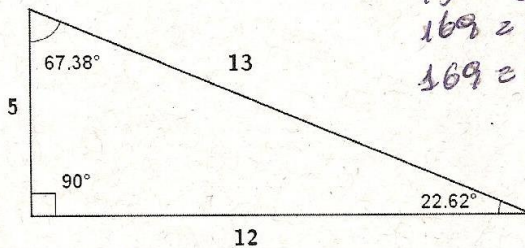


$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 \\ 9^2 &= 7^2 + 6^2 \\ 81 &= 49 + 36 \\ 81 &= 85 \end{aligned}$$

Figura 2 – Triângulo 1.

Fonte: Arquivo pessoal do professor pesquisador.

b)

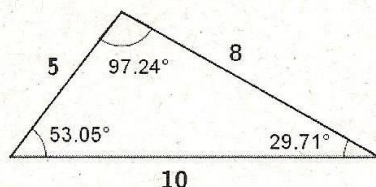


$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 \\ 13^2 &= 5^2 + 12^2 \\ 169 &= 25 + 144 \\ 169 &= 169 \end{aligned}$$

Figura 3 – Triângulo 2.

Fonte: Arquivo pessoal do professor pesquisador.

c)



$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 \\ 10^2 &= 8^2 + 5^2 \\ 100 &= 64 + 25 \\ 100 &= 89 \end{aligned}$$

Figura 4 – Triângulo 3.

Fonte: Arquivo pessoal do professor pesquisador.

O válido é o b). Porque ao calcularmos vemos que a soma dos catetos, para ser igual a hipotenusa, dois exemplos não foi igual, um deu menos e o outro mais, por isso percebemos que os dois não são válidos.

Fonte: Autor.

No Quadro 08 apresenta-se um resumo quantitativo do desempenho dos alunos na Atividade 1.

Quadro 8 - Atividade 1 - Teorema de Pitágoras

QUADRO DE NÚMEROS DE ACERTOS E ERROS DAS DUPLAS			
PERGUNTAS	RESPOSTAS ESPERADAS	PARCIALMENTE CORRETAS	SEM RESPOSTA OU ERRADA
1) a)	3	3	0
1) b)	1	5	0
2)	6	0	0
3)	3	3	0

Fonte: Autor.

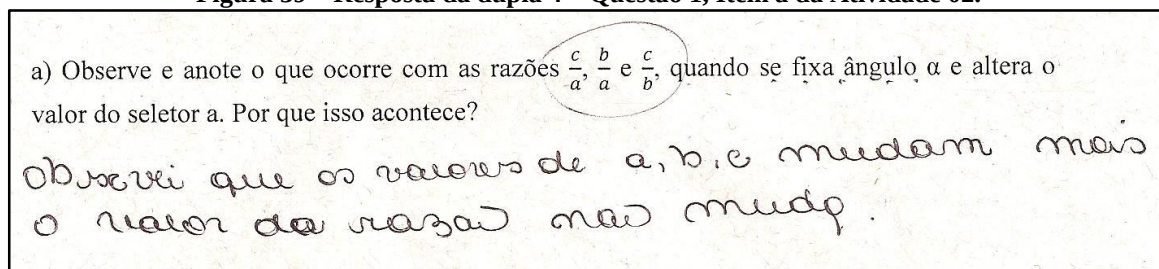
5.2 Atividade 02

Nesta atividade, traçamos como principal objetivo conhecer, entender e calcular as razões trigonométricas no triângulo retângulo utilizando o Applet 02, que todas as duplas receberam no início dessa atividade.

Como dois alunos faltaram, um aluno da dupla 2 e o outro aluno da dupla 6, juntei os dois alunos que vieram, formando assim a dupla 2 e excluindo a dupla 6.

Todas as duplas afirmaram que as razões não mudam, quando fixamos o ângulo α e alteramos os lados do triângulo retângulo, questão 1, item a. Mas, nenhuma dupla foi capaz de explicar por que isso ocorre. Observe abaixo na Figura 39 a resposta da dupla 4.

Figura 39 – Resposta da dupla 4 – Questão 1, Item a da Atividade 02.



Fonte: Autor.

Os alunos não apresentam respostas explicativas para a pergunta “por que isso acontece?”, provavelmente, por não entenderem o conceito de triângulos semelhantes, pois em outros conteúdos apresentados no questionário de diagnóstico eles demonstraram grandes dificuldades em tópicos relacionados a esse.

No momento da institucionalização esclareci o porquê das razões não mudarem, quando se fixa o ângulo.

Nenhuma dupla teve dificuldade em resolver a questão 1, item b. Todas as duplas obtiveram os mesmos resultados, como o da dupla 3 (Figura 40).

Figura 40 – Resposta da dupla 3 – Questão 1, Item b da Atividade 02.

b) Clique no título (Razões Trigonômétricas no Triângulo Retângulo) do Applet 02 para marcar a caixa **Mostrar os Nomes das Razões**. Observe os nomes de cada razão. Utilizando a figura abaixo, escreva as razões de cada item solicitado.

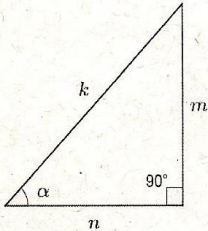


Figura 1 – Triângulo retângulo e escaleno.
Fonte: Arquivo pessoal do professor pesquisador.

I – $\text{sen}(\alpha) = \frac{m}{k}$
 II – $\text{cos}(\alpha) = \frac{n}{k}$
 III – $\text{tg}(\alpha) = \frac{m}{n}$

Fonte: Autor.

Os objetivos das próximas questões são encontrar os valores do seno, do cosseno e da tangente de 30° , 45° e 60° e, finalmente, preencher o quadro com esses ângulos notáveis.

Na questão de número 2, item a, das cinco duplas, apenas as duplas 1 e 3 não tiveram dificuldades. Para as demais duplas foi necessário uma breve explicação em extrair raiz quadrada, pois não conseguiram resolver a seguinte expressão: $\sqrt{2a^2}$. Logo após a explicação, eles obtiveram o resultado esperado, como a resposta da dupla 5 (Figura 41).

Figura 41 – Resposta da dupla 5 – Questão 2, Item a da Atividade 02.

2) Observe o triângulo abaixo e responda os itens abaixo:

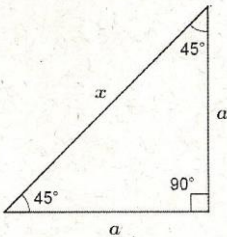


Figura 1 – Triângulo retângulo e isósceles.
Fonte: Arquivo pessoal do professor pesquisador.

a) Calcule o valor de x em função de a .

$x^2 = a^2 + a^2$
 $x^2 = 2a^2$
 $x = \sqrt{2a^2}$
 $x = a\sqrt{2}$

Fonte: Autor.

Na segunda questão, item b foi solicitado para as duplas determinarem o seno, o cosseno e a tangente do ângulo de 45° utilizando o triângulo retângulo descrito na Figura 41.

Todas as duplas determinaram corretamente o seno, o cosseno e a tangente do ângulo de 45° . Mas, as duplas 4 e 5 tiveram dificuldade em racionalizar $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, por isso, foi dada uma atenção a mais a esse tópico. A partir desse momento as duplas 1, 2 e 3 perceberam do que se tratava e a dupla 1 exclamou “Ah! É a tabela do seno, do cosseno e da tangente!”. Assim, já queriam fazer a questão 4, que é a de preencher o quadro com os ângulos notáveis no triângulo retângulo.

Veja na Figura 42 a resposta da dupla 01, que é semelhante às respostas das demais duplas.

Figura 42 – Resposta da dupla 1 – Questão 2, Item b da Atividade 02.

b) Determine $\sin(45^\circ)$, $\cos(45^\circ)$ e $\tan(45^\circ)$.

$$\sin(45^\circ) = \frac{a}{x} \Rightarrow \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(45^\circ) = \frac{a}{x} \Rightarrow \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan = \frac{a}{a} = 1$$

Fonte: Autor.

Todos os alunos calcularam corretamente o valor de h em função de a na questão 3, item a. Abaixo na Figura 43 temos a resposta da dupla 3, que representa as respostas das demais duplas.

Figura 43 – Resposta da dupla 3 – Questão 3, Item a da Atividade 02.

3) Observe o triângulo abaixo e responda os itens abaixo.

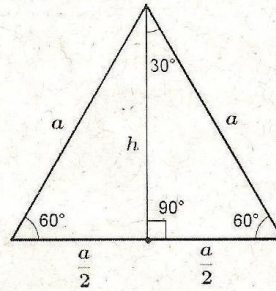


Figura 1 – Triângulo equilátero.

Fonte: Arquivo pessoal do professor pesquisador.

a) Calcule o valor de h em função de a .

$$\begin{aligned}
 a^2 &= h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 & \frac{3a^2}{4} &= h^2 & a &= \text{hipotenusa} \\
 a^2 &= h^2 + \frac{a^2}{4} & h &= \sqrt{\frac{3a^2}{4}} & \frac{a}{2} &= \text{cateto adjacente} \\
 a^2 - \frac{a^2}{4} &= h^2 & h &= \frac{a\sqrt{3}}{2} & \frac{a\sqrt{3}}{2} &= \text{cateto oposto} \\
 \frac{4a^2 - a^2}{4} &= h^2 & & & &
 \end{aligned}$$

Fonte: Autor.

Todas as duplas tiveram dificuldades em resolver a questão 3, item b, em relação à divisão de frações e racionalização. Diante dessas dificuldades, resolvi esclarecer esses conteúdos. Logo, em seguida eles conseguiram encontrar os resultados previstos, como o da dupla 4 (Figura 44).

Figura 44 – Resposta da dupla 4 – Questão 3, Item b da Atividade 02.

b) Determine $\sin(30^\circ)$, $\cos(30^\circ)$ e $\tan(30^\circ)$.

$$\sin(30^\circ) = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{a}{2} \times \frac{1}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos(30^\circ) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(30^\circ) = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{a}{2} \times \frac{2}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Fonte: Autor.

Já na questão 3, item c, todas as duplas determinaram os valores exatos do seno, do cosseno e da tangente do ângulo de 60° .

E por fim, quarta e última questão. Somente a dupla 4 cometeu “erros” ao preencher o quadro com as razões seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis. Analisando

a resposta dela, leva-nos a crer que foi falta de atenção, pois ela apresenta resposta correta na questão 3, itens b e c. Observem na Figura 45 as respostas em destaque, dessa dupla, para o $\text{sen}(60^\circ)$ e o $\text{cos}(30^\circ)$.

Figura 45 – Resposta da dupla 4 – Questão 4 da Atividade 02

4) Após fazer as questões 2 e 3 complete o quadro 1 abaixo:

Razão	30°	45°	60°
<i>Senô</i>	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3}{\sqrt{2}}$ ←
<i>Cosseno</i> →	$\frac{3}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
<i>Tangente</i>	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Quadro 1 – Ângulos Notáveis

Fonte: Autor.

Na ocasião da socialização da Atividade 2, a maioria dos alunos confirmou que lembravam do quadro dos ângulos notáveis para o seno, cosseno e tangente, mas não sabiam explicar o porquê desses valores.

Na institucionalização, tornei clara a importância dessas razões mostrando alguns de suas aplicações, também esclareci, efetivamente, a formalização de seus conceitos.

Os objetivos da Atividade 02 foram atingidos, mesmo ocorrendo dificuldades em alguns conteúdos exigidos pela atividade e nas explicações reveladas pelos alunos. No Quadro 09 apresenta-se um resumo quantitativo do desempenho dos alunos na Atividade 2.

Quadro 9 - Atividade 2 - Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo

QUADRO DE NÚMEROS DE ACERTOS E ERROS DAS DUPLAS			
PERGUNTAS	RESPOSTAS ESPERADAS	PARCIALMENTE CORRETAS	SEM RESPOSTA OU ERRADA
1) a)	0	5	0
1) b)	5	0	0
2) a)	5	0	0
2) b)	5	0	0
3) a)	5	0	0
3) b)	5	0	0
3) c)	5	0	0
4)	4	1	0

Fonte: Autor.

5.3 Atividade 03

Nesta atividade, o objetivo é apresentar aos alunos o conceito das medidas de ângulos: graus e radianos, utilizando o Applet 03.

Na primeira questão, item a, todas as duplas logo concluíram que a medida em graus de uma volta completa numa circunferência é 360.

Na primeira questão, item b, todas as duplas encontraram dificuldades em conjecturar o comprimento aproximado da circunferência. Assim, foi preciso intervir nesse momento, esclareci que se tratava do perímetro ou do contorno da circunferência. Uma dupla logo exclamou: “Ah! Entendi! É só somar os r !”. Dessa forma, todas as duplas encontraram respostas corretas, como da dupla 2 (Figura 46).

Figura 46 – Resposta da dupla 2 – Questão 1, Item b da Atividade 03.

b) Após visualizar o Applet 03 opção **Radianos**, conjecture o comprimento C aproximado da circunferência. Explique como foi feito.

$6,28\pi$, é só somar os r .

Fonte: Autor.

Na segunda questão, das seis duplas, três deram respostas confusas, apesar de, em algum momento exibirem a resposta correta. A dupla 3 concluiu, equivocadamente, que $\pi = 6,28r$, observe na Figura 47. Esse erro da dupla 3 releva falta de concentração, pois essa dupla resolveu em atividades anteriores questões mais complexas.

Figura 47 – Resposta da dupla 3 – Questão 2 da Atividade 03.

2) Utilizando $\pi \cong 3,14$, reescreva a equação encontrada na questão 1 item b em outra equação equivalente.

$$\begin{aligned} 2\pi r &= 6,28r \\ \pi &= 3,14 \cdot 2 \\ \pi &= 6,28r \end{aligned}$$

Fonte: Autor.

Na terceira questão, das seis duplas, cinco duplas conjecturaram que a medida em radianos de uma volta completa numa circunferência é 2π . A dupla 5 cometeu um erro na

simplificação e expressou que é $2\pi r$. Isso nos leva a concluir que foi um equívoco, como se pode observar a solução da dupla 5 na Figura 48.

Figura 48 – Resposta da dupla 5 – Questão 3 da Atividade 03.

3) Podemos definir 1 radiano (1 rad) como a medida do ângulo central que é determinado na circunferência por um arco cujo comprimento é igual ao raio (figura 1). Dessa forma, o ângulo com vértice no ponto A tem medida 1 rad (radiano). Utilizando o resultado da questão 2 e regra de três, conjecture a medida do ângulo x em radianos de uma volta completa numa circunferência (figura 2).

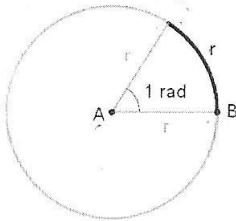


Figura 1 – Radianos.

Fonte: Arquivo pessoal do professor pesquisador.

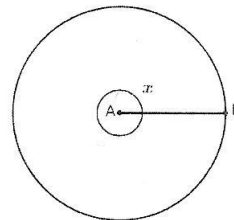


Figura 2 – Ângulo de uma volta completa.

Fonte: Arquivo pessoal do professor pesquisador.

$$\begin{array}{l} 1 \text{ rad} \text{ — } 1 r \\ x \text{ — } 2\pi r \end{array}$$

Se usar, uma volta completa equivale $2\pi r$

$$1 r x = 2\pi r \cdot 1 \text{ rad}$$

$$x = \frac{2\pi r}{1 r}$$

$$x = 2\pi r$$

Fonte: Autor.

Na quarta questão, todas as seis duplas descobriram que 1 *radiano* é aproximadamente 57,3 *graus*. Quatro duplas utilizaram a divisão e as outras duas duplas utilizaram regra de três, como na Figura 49 resposta da dupla 3.

Figura 49 – Resposta da dupla 3 – Questão 4 da Atividade 03.

4) Utilizando a medida em graus encontrada na questão 1 item a – ângulo de uma volta completa numa circunferência e o resultado aproximado da questão 3, descubra quantos graus aproximadamente equivale 1 radiano (1 rad).

$$\begin{array}{l} 1 \text{ rad} \text{ — } x \\ 6,28 \text{ rad} \text{ — } 360^\circ \\ 6,28 \text{ rad} \cdot x = 360^\circ \cdot \text{rad} \\ x = \frac{360^\circ \cdot \text{rad}}{6,28 \text{ rad}} \\ x = 57,3^\circ \end{array}$$

Fonte: Autor.

Na quinta questão, todas as duplas concluíram que o melhor procedimento para converter graus em radianos e radianos em graus é a regra de três. Mas, as duplas 3, 5 e 6 encontraram obstáculos em inferir que era regra de três, por isso, foi preciso intervir. Pedi para elas verificarem as respostas das terceira e quarta questão. Só assim, concluíram a resposta correta.

Nas conversões de graus em radianos e radianos em graus, as duplas 1, 2, 5 e 6 converteram corretamente. Já a dupla 3 não conseguiu converter corretamente $\frac{2\pi}{3}rad$ em graus e a dupla 4 não conseguiu fazer as conversões corretas de 135° , 330° em radianos e $\frac{2\pi}{3}rad$, $\frac{5\pi}{3}rad$ em graus.

Na socialização das respostas, todas as duplas afirmaram que foi simples responder a primeira questão, item a. Já o item b, dessa mesma questão, encontraram dificuldades. Uma dupla comunicou que só conseguiu responder após a minha mediação. Isso mostra que a participação do professor é de suma importância nas conversões do registro geométrico para o registro algébrico, quando o aluno se depara com algum obstáculo.

Na fase de institucionalização, apresentei mais uma vez o conceito de radiano, mostrando que ele é uma unidade de medir ângulos.

Todos os objetivos da Atividade 03 foram alcançados, mesmo que alguns alunos tenham apresentado dificuldades em interpretar as questões e concluir suas respostas. No Quadro 10 é apresentado um resumo do desempenho dos alunos nesta atividade.

Quadro 10 - Atividade 3 - Graus e Radianos

QUADRO DE NÚMEROS DE ACERTOS E ERROS DAS DUPLAS			
PERGUNTAS	RESPOSTAS ESPERADAS	PARCIALMENTE CORRETAS	SEM RESPOSTA OU ERRADA
1) a)	6	0	0
1) b)	6	0	0
2)	2	3	1
3)	5	0	1
4)	6	0	0
5)	6	0	0

Fonte: Autor.

5.4 Atividade 04

Nesta atividade, a finalidade principal é compreender o círculo trigonométrico, identificar que eixos do plano cartesiano representam o seno e o cosseno e demonstrar duas relações fundamentais da trigonometria. Para obter estas conclusões as duplas manipularam o Applet 04 e responderam a Atividade 04.

Na questão de número 1, item a, todas as duplas preencheram o quadro sobre a variação dos ângulos em cada quadrante corretamente, como na Figura 50 resposta da dupla 5.

Figura 50 – Resposta da dupla 5 – Questão 1, item a da Atividade 04.

a) Visualize o Applet 04 e perceba que eixos Ox e Oy decompõem o círculo trigonométrico em quatro quadrantes. Deixe as caixas **Animar Sentido Positivo** e **Exibir Quadrantes** ativadas. Utilize o seletor α (alfa) e preencha a variação do ângulo de cada quadrante no quadro abaixo.

1º quadrante	2º quadrante	3º quadrante	4º quadrante
$0^\circ < \alpha < 90^\circ$	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$	$180^\circ < \alpha < 270^\circ$	$270^\circ < \alpha < 360^\circ$

Fonte: Autor.

No item b, da questão 1, cinco duplas responderam que o raio do círculo trigonométrico é igual a 1, mas não foram capazes de responder porque tem esta medida. A dupla 6 respondeu de forma embaraçada, conforme mostra a Figura 51. O que se pode perceber é que essa dupla não entendeu a pergunta, ela tentou explicar onde inicia e termina o raio.

Figura 51 – Resposta da dupla 6 – Questão 1, item b da Atividade 04.

b) Após observar e analisar o Applet 04, note que o sentido anti-horário é o sentido positivo e o sentido horário é o sentido negativo no círculo trigonométrico. Além disso, o que você pode concluir sobre a medida do comprimento do raio do círculo trigonométrico? **Observação:** depois de fazer as questões 3, 4, 5 e 6, volte e explique porque o raio deve ter esta medida.

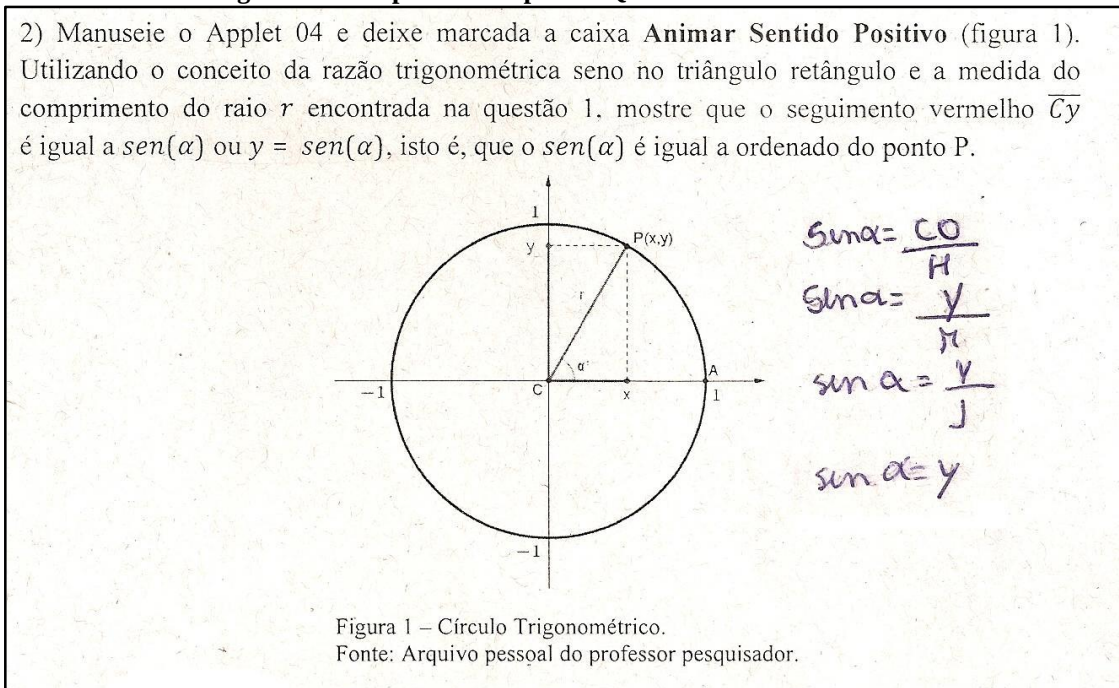
Verticalmente o raio é igual do início até a extremidade do círculo trigonométrico.

Fonte: Autor.

Na questão de número 2, inicialmente, todas as duplas tiveram dificuldade para concluir que o $\text{sen}(\alpha) = y$, isto é, que o $\text{sen}(\alpha)$ é igual à ordenada do ponto P. Com minha intervenção todas as duplas deduziram respostas corretas como a da Figura 52 da dupla 3.

Nesta questão, os alunos retomaram conteúdos já estudados, como das razões trigonométricas. Dessa forma, fazendo uma retrospectiva de conceitos já apreendidos. Aqui, eles puderam perceber que os conteúdos matemáticos estão interligados e que, em muitos casos, para compreender algo novo é necessário resgatar algo do passado.

Figura 52 – Resposta da dupla 3 – Questão 2 da Atividade 04.

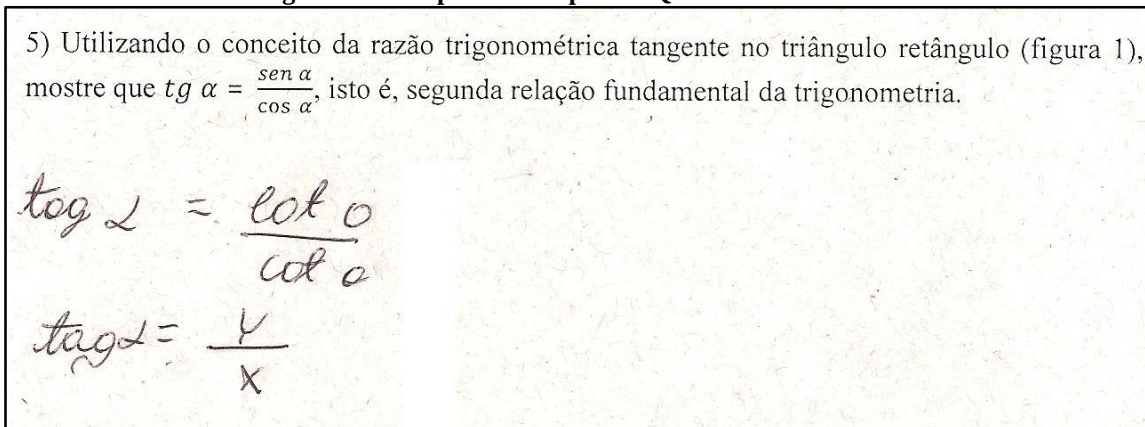


Fonte: Autor.

Já na questão de número 3, todas as duplas concluíram sem dificuldades que o $\cos(\alpha) = x$, isto é, que o $\cos(\alpha)$ é igual à abscissa do ponto P.

Na questão de número 4, as duplas 4 e 6 tiveram dificuldade em obter a conclusão desejada, mas logo após a minha mediação elas concluíram a primeira relação fundamental da trigonometria: $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. As demais duplas demonstraram sem nenhum obstáculo.

Na quinta e última questão, apenas a dupla 4 não mostrou que a tangente de α pode ser calculada pela razão entre $\text{sen}\alpha$ e o $\text{cos}\alpha$, isto é, $\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\text{cos}\alpha}$. Veja na Figura 53 a resposta incompleta da dupla 4.

Figura 53 – Resposta da dupla 4 – Questão 5 da Atividade 04.**Fonte: Autor.**

Na socialização das respostas, algumas duplas afirmaram que o círculo trigonométrico no GeoGebra facilitou a compreensão dos intervalos dos ângulos de cada quadrante, também relataram que esta atividade foi mais compreensível de que as anteriores, e por fim, declararam que tiveram dificuldades nas questões de números 2 e 4 e que só conseguiram entender após minha intervenção.

Na fase de institucionalização, esclareci o porquê do raio do círculo trigonométrico ter medida igual a 1 e tornei mais compreensíveis as duas relações fundamentais da trigonometria.

Todas as intenções da Atividade 04 foram atingidas, embora alguns alunos tenha apresentado dificuldades em analisar algumas questões e explicar suas respostas. No Quadro 11 é apresentado um resumo do desempenho dos alunos nesta atividade.

Quadro 11 - Atividade 4 - Círculo Trigonométrico

QUADRO DE NÚMEROS DE ACERTOS E ERROS DAS DUPLAS			
PERGUNTAS	RESPOSTAS ESPERADAS	PARCIALMENTE CORRETAS	SEM RESPOSTA OU ERRADA
1) a)	6	0	0
1) b)	0	5	1
2)	6	0	0
3)	6	0	0
4)	6	0	0
5)	5	1	0

Fonte: Autor.

5.5 Atividade 05

Nesta atividade, o propósito principal é compreender o conceito do seno no círculo trigonométrico, que as duplas alcançariam manejando o Applet 05.

No primeiro quesito, item a, todas as duplas anotaram corretamente os valores do seno dos ângulos notáveis de: 0° , 90° , 180° , 270° e 360° . Mas, somente a dupla 1 foi capaz de responder sobre o comprimento do raio do círculo trigonométrico. Veja a resposta da dupla 1 na Figura 54.

Figura 54 – Resposta da dupla 1 – Questão 1, item a da Atividade 05.

a) Marque a caixa **Mostrar Círculo Trigonométrico com um ponto P' na origem**, em seguida marque a caixa **Animar Manualmente**, depois mova o seletor α (alfa) até os ângulos solicitados e anote os valores dos senos de cada ângulo abaixo. O que você pode confirmar sobre o comprimento do raio do círculo trigonométrico?

a) $\text{sen}(0^\circ) = \underline{0}$ b) $\text{sen}(90^\circ) = \underline{1}$ c) $\text{sen}(180^\circ) = \underline{0}$
d) $\text{sen}(270^\circ) = \underline{-1}$ e) $\text{sen}(360^\circ) = \underline{0}$

Que o valor do mesmo deve ser 1, pois é o seu maior valor de seno.

Fonte: Autor.

No item b, do primeiro quesito, todas as duplas perceberam que o sinal do seno é positivo no primeiro e segundo quadrante e negativo no terceiro e quarto quadrante. Porém, não responderam sobre os intervalos de ângulos onde o seno é positivo e negativo.

No segundo quesito, todas as duplas observaram que o seno é limitado, possuindo valor máximo e mínimo, que são respectivamente 1 e -1. Mas, esta conclusão só foi possível para algumas duplas após a minha interferência.

No terceiro quesito, todas as duplas constataram que: $\text{sen}30^\circ = \text{sen}150^\circ$, $\text{sen}45^\circ = \text{sen}135^\circ$ e $\text{sen}60^\circ = \text{sen}120^\circ$. Entretanto, as duplas 3 e 4 não souberam explicar o que se pode concluir. Veja a resposta e a explicação da dupla 5 na Figura 55.

Figura 55 – Resposta da dupla 5 – Questão 3 da Atividade 05.

3) Ative a caixa **Animar Automaticamente** e deixe ativada a caixa **Animar Manualmente**, observe a animação clicando no botão **Próximo**. Utilizando o seletor α (alfa) mova o ponto P' até o **segundo quadrante**. Encontre e anote um ângulo α em que o $\text{sen}(\alpha) = \text{sen}(30^\circ)$. Faça o mesmo para o $\text{sen}(45^\circ)$ e o $\text{sen}(60^\circ)$. O que se pode concluir?

Sen de 30° é igual o Sen 150°
 Sen de 45° é igual o Sen 135°
 Sen de 60° é igual o Sen 120°
 Os ângulos simétricos 1 e 2 são de senos iguais

Fonte: Autor.

Apesar da dupla 5 omitir a palavra quadrante e outras palavras na sua explicação é possível entender sua resposta, esse fato provavelmente está relacionado à falta de prática em redigir respostas para os problemas matemáticos.

No quarto quesito, as duplas 4 e 5 expressaram respostas equivocadas. Veja abaixo as suas anotações nas Figuras 56 e 57, respectivamente.

As demais duplas verificaram que: $\text{sen}30^\circ = -\text{sen}210^\circ$, $\text{sen}45^\circ = -\text{sen}225^\circ$ e $\text{sen}60^\circ = -\text{sen}240^\circ$. De forma que se pode concluir que foram apresentadas respostas que atendem a expectativa.

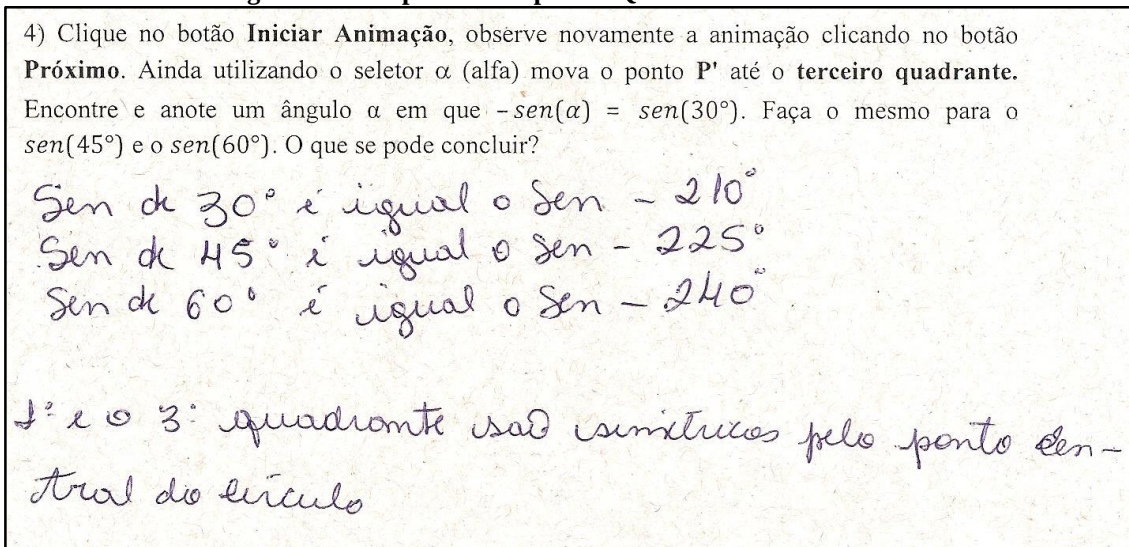
Figura 56 – Resposta da dupla 4 – Questão 4 da Atividade 05.

4). Clique no botão **Iniciar Animação**, observe novamente a animação clicando no botão **Próximo**. Ainda utilizando o seletor α (alfa) mova o ponto P' até o **terceiro quadrante**. Encontre e anote um ângulo α em que $-\text{sen}(\alpha) = \text{sen}(30^\circ)$. Faça o mesmo para o $\text{sen}(45^\circ)$ e o $\text{sen}(60^\circ)$. O que se pode concluir?

$\text{sen}30^\circ = 0,5 = \text{sen}210^\circ = -0,5$
 $\text{sen}45^\circ = 0,71 = \text{sen}225^\circ = -0,71$
 $\text{sen}60^\circ = 0,87 = \text{sen}240^\circ = -0,87$

Fonte: Autor.

Figura 57 – Resposta da dupla 5 – Questão 4 da Atividade 05.



Fonte: Autor.

No quinto e último quesito, as duplas 4 e 5 cometeram os mesmos erros, como na questão anterior. Já as outras duplas escreveram respostas esperadas.

Na socialização das respostas, a dupla 1 afirmou que foi fácil responder a Atividade 05, apenas tendo dificuldade na questão de número 2, com relação àquela que indagava acerca do intervalo no qual o seno é limitado. A dupla 4 afirmou que a princípio teve bastante dificuldade em expor suas respostas, mas com minhas intervenções ela foi superada.

Na fase de institucionalização, destaquei o conceito do seno e também evidenciei os ângulos simétricos em relação à origem do plano cartesiano e aos eixos x e y .

Todos os propósitos da Atividade 05 foram alcançados, conquanto alguns alunos mostraram dificuldades em interpretar as questões e expor suas respostas. No Quadro 12 é apresentado um resumo quantitativo do desempenho dos alunos nessa atividade.

Quadro 12 - Atividade 5 - Seno no Círculo Trigonométrico

QUADRO DE NÚMEROS DE ACERTOS E ERROS DAS DUPLAS			
PERGUNTAS	RESPOSTAS ESPERADAS	PARCIALMENTE CORRETAS	SEM RESPOSTA OU ERRADA
1) a)	1	5	0
1) b)	0	6	0
2)	6	0	0
3)	4	2	0
4)	4	0	2
5)	4	0	2

Fonte: Autor.

5.6 Atividade 06

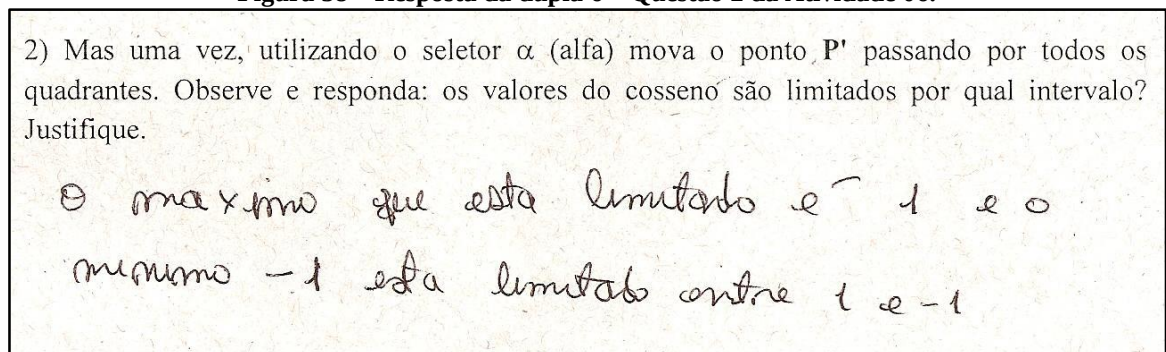
Nesta atividade, o intuito principal é compreender o conceito do cosseno no círculo trigonométrico, que as duplas conseguiriam utilizando o Applet 06.

Na questão 1, item a, todas as duplas anotaram corretamente os valores do cosseno dos ângulos notáveis de: $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ e 360° . Mais uma vez, somente a dupla 1 foi capaz de responder sobre o comprimento do raio do círculo trigonométrico, afirmando “que o mesmo tem 1 de raio”.

No item b, da primeira questão, todas as duplas perceberam que o sinal do cosseno é positivo no primeiro e quarto quadrante e negativo no segundo e terceiro quadrante. Também, responderam sobre os intervalos de ângulos onde o cosseno é positivo e negativo.

Na questão 2, todas as duplas exibiram respostas corretas semelhante à da dupla 6 (Figura 58).

Figura 58 – Resposta da dupla 6 – Questão 2 da Atividade 06.



Fonte: Autor.

Na questão 3, cinco duplas verificaram que: $\cos 30^\circ = -\cos 150^\circ$, $\cos 45^\circ = -\cos 135^\circ$ e $\cos 60^\circ = -\cos 120^\circ$. Já a dupla 2 apresentou em sua resposta igualdades incorretas como por exemplo: “ $\cos 30^\circ = 150^\circ = -0,87$ ”, veja na Figura 59 suas anotações.

Este erro pode está ligado à desatenção, pois ocorre a omissão do termo *cos* antes dos ângulos encontrados, isto é, de $150^\circ, 135^\circ$ e 120° .

Figura 59 – Resposta da dupla 2 – Questão 3 da Atividade 06.

3) Ative a caixa **Animar Automaticamente** e deixe ativada a caixa **Animar Manualmente**, observe a animação clicando no botão **Próximo**. Depois, utilizando o seletor α (alfa) arraste o ponto **P'** até o **segundo quadrante**. Encontre e anote um ângulo α em que o $-\cos(\alpha) = \cos(30^\circ)$. Faça o mesmo para o $\cos(45^\circ)$ e o $\cos(60^\circ)$. O que se pode concluir?

2º quadrante

valores encontrados não iguais apenas com sinais diferentes, então interliga-os pelo eixo y.

$\cos 30^\circ = 150^\circ = -0,87$
 $\cos 45^\circ = 135^\circ = -0,71$
 $\cos 60^\circ = 120^\circ = -0,5$

Fonte: Autor.

Na questão 4, a dupla 2 cometeu a mesma distração, escrevendo igualdades incorretas. As demais duplas concluíram que: $\cos 30^\circ = -\cos 210^\circ$, $\cos 45^\circ = -\cos 225^\circ$ e $\cos 60^\circ = -\cos 240^\circ$.

Na quinta e última questão, cinco duplas encontraram respostas satisfatórias e a dupla 2 novamente suprimiu o termo *cos* antes dos ângulos de 330° , 315° e 300° .

Na socialização das respostas, a dupla 6 afirmou que “nas questões 3, 4 e 5 em relação a simetria, sempre existe um ponto em que os quadrantes alcançam o mesmo valor simetricamente, independentemente dos sinais.” Em relação ao raio do círculo trigonométrico a dupla 5 declarou que “o raio sempre vai ser 1, não importa o quadrante que ele esteja.”

Na fase de institucionalização, fiz a ressalva da omissão do termo *cos* antes dos ângulos, também enfatizei a simetria no círculo trigonométrico.

Todas as intenções da Atividade 06 foram alcançadas, a despeito de alguns alunos cometerem pequenos erros em suas respostas. No Quadro 13 é apresentado um resumo quantitativo do desempenho dos alunos nesta atividade.

Quadro 13 - Atividade 6 - Cosseno no Círculo Trigonométrico

QUADRO DE NÚMEROS DE ACERTOS E ERROS DAS DUPLAS			
PERGUNTAS	RESPOSTAS ESPERADAS	PARCIALMENTE CORRETAS	SEM RESPOSTA OU ERRADA
1) a)	1	5	0
1) b)	6	0	0
2)	6	0	0
3)	5	0	1
4)	5	0	1
5)	5	0	1

Fonte: Autor.

5.7 Atividade 07

Nesta atividade, a meta principal é compreender o conceito da tangente no círculo trigonométrico, que as duplas conquistariam manipulando o Applet 07.

Na pergunta de número 1, item a, todas as duplas preencheram corretamente as lacunas da tangente de: 0° , 90° , 180° , 270° e 360° . Quanto à $tg(90^\circ)$ e $tg(270^\circ)$ três duplas não justificaram porque não existem, já as duplas 1, 2 e 3 apresentaram respostas parcialmente corretas, como da dupla 3 na Figura 60.

Figura 60 – Resposta da dupla 3 – Questão 1, item a da Atividade 07.

a) Marque a caixa **Mostrar Círculo Trigonométrico** com um ponto P_0 na origem, em seguida marque a caixa **Mostrar Reta Tangente a Circunferência no Ponto P_0** , depois marque a caixa **Animar Manualmente**, em seguida, mova o seletor α (alfa) para os ângulos solicitados e anote os valores das tangentes de cada ângulo abaixo. Em relação à $tg(90^\circ)$ e a $tg(270^\circ)$ observe atentamente o círculo trigonométrico. O que você pode concluir?

a) $tg(0^\circ) = \underline{0}$ b) $tg(90^\circ) = \underline{\cancel{X}}$ c) $tg(180^\circ) = \underline{0}$
d) $tg(270^\circ) = \underline{\cancel{X}}$ e) $tg(360^\circ) = \underline{0}$

Para ter o ângulo de tg os dois raios precisam se encontrar, no ângulo de 90° e 270° , os raios não se encontram, então o ângulo não existe X

Fonte: Autor.

Considero parcialmente correta, porque ela afirma que “o ângulo não existe”, mas na verdade é a tangente dos ângulos de 90° e 270° que não existem.

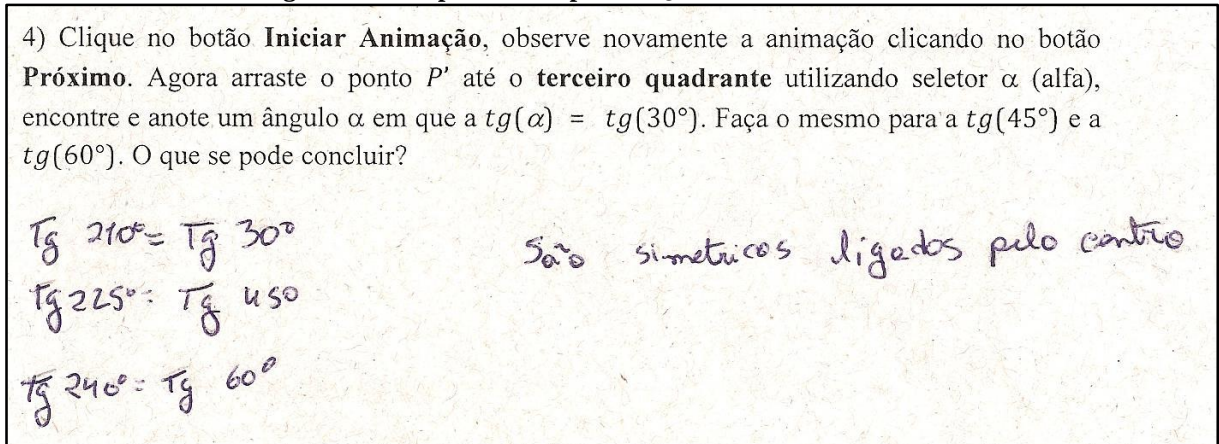
No item b, da pergunta de número 1, todas as duplas afirmaram que o sinal da tangente é positivo no primeiro e terceiro quadrante e negativo no segundo e quarto quadrante. Ainda, relataram que intervalos de ângulos a tangente é positiva e negativa.

Na pergunta de número 2, as duplas 2 e 3, afirmaram equivocadamente que a tangente é limitada por $[-11,47, 11,47]$ e por $[-1,1]$, respectivamente. O erro da dupla 2 foi devido ao fato do Applet 06 no GeoGebra marcar ângulos de 5 em 5 graus, assim, exibindo $tg(85^\circ) = 11,47$ e $tg(275^\circ) = -11,47$. Já o erro da dupla 3 deve está ligado ao raio do círculo trigonométrico ou simplesmente repetiu a resposta do Applet anterior. As demais duplas relataram, semelhante à dupla 4, “que a tangente não é limitada por algum valor”.

Na pergunta de número 3, todas as duplas encontraram que: $\text{tg}30^\circ = -\text{tg}150^\circ$, $\text{tg}45^\circ = -\text{tg}135^\circ$ e $\text{tg}60^\circ = -\text{tg}120^\circ$. Também, afirmaram que este fato ocorre devido à simetria.

Na pergunta de número 4, todas as duplas escreveram respostas coerentes como a da dupla 1 na Figura 61.

Figura 61 – Resposta da dupla 1 – Questão 4 da Atividade 07.



Fonte: Autor.

Na quinta e última pergunta, todas as duplas registraram que: $\text{tg}30^\circ = -\text{tg}330^\circ$, $\text{tg}45^\circ = -\text{tg}315^\circ$ e $\text{tg}60^\circ = -\text{tg}300^\circ$.

Na socialização das respostas, algumas duplas relataram que utilizando Applet 07 não fica claro que a tangente não é limitada. Mas, o conceito da tangente ficou mais compreensível ao manipular o Applet 07.

Na fase de institucionalização, destaquei o motivo da tangente de 90° e 270° não existir, conseqüentemente mostrei que a tangente não é limitada.

Todas as metas da Atividade 07 foram atingidas, embora alguns tenham formulado respostas equivocadas. No Quadro 14 é apresentado um resumo quantitativo do desempenho dos alunos nessa atividade.

Quadro 14 - Atividade 7 - Tangente no Círculo Trigonométrico

QUADRO DE NÚMEROS DE ACERTOS E ERROS DAS DUPLAS			
PERGUNTAS	RESPOSTAS ESPERADAS	PARCIALMENTE CORRETAS	SEM RESPOSTA OU ERRADA
1) a)	0	6	0
1) b)	6	0	0
2)	4	0	2
3)	6	0	0
4)	6	0	0
5)	6	0	0

Fonte: Autor.

5.8 Atividade 08

Nesta atividade, propomos como objetivo principal entender os conceitos das funções trigonométricas seno e cosseno, que as duplas deveriam obter operando o Applet 08.

Na primeira questão, item a, todas as duplas preencheram o quadro corretamente como a da dupla 4 na Figura 62 a seguir.

Figura 62 – Resposta da dupla 4 – Questão 1, item a da Atividade 08.

a) Marque a caixa Função Seno , em seguida marque a caixa Animar Manualmente , agora mova o seletor α (alfa) entre 0° e 360° . Verifique para que número real x está associado cada ângulo abaixo e preencha o quadro com estes números reais x e com os senos destes números. OBS: Observe como é construído o gráfico do seno ao mover o seletor α (alfa).		
Ângulo	x	$f(x) = \text{sen}(x)$
0°	0	$f(0) = \text{sen}(0) = 0$
90°	$\frac{\pi}{2}$	$f(\frac{\pi}{2}) = \text{sen}(\frac{\pi}{2}) = 1$
180°	π	$f(\pi) = \text{sen}(\pi) = 0$
270°	$\frac{3\pi}{2}$	$f(\frac{3\pi}{2}) = \text{sen}(\frac{3\pi}{2}) = -1$
360°	2π	$f(2\pi) = \text{sen}(2\pi) = 0$

Fonte: Autor.

No item b, da primeira questão, como as duplas tiveram impasses na resolução deste item, fiz algumas intervenções. Posteriormente, a dupla 5 escreveu que “O domínio da função seno está definida para todos os números reais. A imagem da função seno vai de -1 a 1 .” As duplas restantes traçaram respostas análogas.

Na segunda questão, apenas a dupla 1 expressou corretamente o que ocorre no gráfico da função seno do tipo $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx + d)$, quando se altera algum dos

valores dos coeficientes a, b, c e d . As outras duplas tiveram dificuldades em expressar o que ocorrem nos coeficientes b e c . Por exemplo, a dupla 2 escreveu que “a linha muda na imagem” quando $b > 1$ ou $0 < b < 1$ e “o valor de x continua e o y muda” quando $b < 1$. Já a dupla 3, afirmou que “não muda o intervalo entre -1 e 1” quando $c < 1$ ou $0 < c < 1$ e $c < 0$, apesar de está correto não era uma resposta esperada. As duplas 4, 5 e 6 expressam respostas confusas semelhantes às das duplas 2 e 3. Acredito que isso ocorreu devido ao fato delas desconhcerem e não intuírem os conceitos de amplitude e de frequência.

Na terceira questão, as duplas 1 e 4 cometeram erros ao preencherem o quadro com os cossenos dos números reais relacionados aos ângulos de 0° , 90° , 180° , 270° e 360° . A dupla 1 escreveu que “ $\cos(0) = 0$ e $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$ ”, a dupla 4 escreveu que “ $\cos(0) = 0$ ”. Talvez este erro esteja ligado ao trabalhar no mesmo Applet as duas funções seno e cosseno. As outras duplas preencheram corretamente o quadro, como o da dupla 5, na Figura 63.

Figura 63 – Resposta da dupla 5 – Questão 3 da Atividade 08.

3) Agora marque a caixa **Função Cosseno**, em seguida marque a caixa **Animar Manualmente**, agora mova o **seletor α (alfa)** entre 0° e 360° . Verifique para que número real x está associado cada ângulo abaixo e preencha o quadro com estes números reais x e com os cossenos destes números.

OBS: Observe como é construído o gráfico do cosseno ao mover o **seletor α (alfa)**.

Ângulo	x	$f(x) = \cos(x)$
0°	0	$f(0) = \cos(0) = 1$
90°	$\pi/2$	$f(\pi/2) = \cos(\pi/2) = 0$
180°	π	$f(\pi) = \cos(\pi) = -1$
270°	$3\pi/2$	$f(3\pi/2) = \cos(3\pi/2) = 0$
360°	2π	$f(2\pi) = \cos(2\pi) = 1$

Fonte: Autor.

Já na quarta questão, todas as duplas concluíram que o domínio da função cosseno são os números reais e sua imagem está compreendida entre -1 e 1 .

Na quinta e última questão, somente a dupla 1 expressou corretamente o que ocorre no gráfico da função seno do tipo $f(x) = a + b \cdot \cos(cx + d)$, quando se altera algum dos valores dos coeficientes a, b, c e d . As outras duplas tiveram dificuldades nos coeficientes b e c , similar as respostas da segunda questão.

Na socialização das respostas, as duplas informaram que compreenderam a diferença entre o gráfico da função seno e a do cosseno, além disso, relataram que foi difícil preencher os quadros das questões de números 2 e 5.

Na fase de institucionalização, dediquei um tempo especial para falar sobre o comportamento dos gráficos das funções seno $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx + d)$ e cosseno $f(x) = a + b \cdot \text{cos}(cx + d)$, quanto alteramos os coeficientes a, b, c e d . Também, destaquei os conceitos de amplitude e de frequência.

Todos os objetivos da Atividade 08 foram alcançados, mesmo que alguns alunos tenha apresentado respostas incorretas. No Quadro 15 é apresentado um resumo quantitativo do desempenho dos alunos nessa atividade.

Quadro 15 - Atividade 8 - Funções Trigonométricas Seno e Cosseno

QUADRO DE NÚMEROS DE ACERTOS E ERROS DAS DUPLAS			
PERGUNTAS	RESPOSTAS ESPERADAS	PARCIALMENTE CORRETAS	SEM RESPOSTA OU ERRADA
1) a)	6	0	0
1) b)	6	0	0
2)	1	5	0
3)	4	2	0
4)	6	0	0
5)	1	5	0

Fonte: Autor.

Após fazer a confrontação entre a análise *a priori* (fase em que as hipóteses são levantadas) e a análise *a posteriori* (fase em que se dá o tratamento dos dados), podemos concluir os seguintes resultados:

- As mini-aplicações (Applets) podem tornar o conteúdo de trigonometria dinâmico e interativo, em que os alunos manipulam e tiram suas próprias conclusões.
- Os Applets criados no software GeoGebra podem, de fato, facilitar na conjectura de propriedades, relações e equações trigonométricas.
- O software GeoGebra com seu dinamismo, interação e possibilidades de visualização de um mesmo objeto matemático de várias formas, favorece a realização das operações de conversão entre registros.
- O software GeoGebra tem suas limitações nas construções de certos Applets, podendo levar a conclusões equivocadas, como por exemplo, o do Applet 07 que alguns alunos

concluíram que a tangente é limitada por $[-11,47, 11,47]$. Entretanto, a intervenção do professor pode esclarecer esses possíveis equívocos.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo de Trigonometria, devido à sua aplicabilidade em estudos científicos e tecnológicos, é importante para grande parte das sociedades atuais, marcadas pela necessidade da produção desses tipos de saberes. Distâncias de objetos inacessíveis, cálculos de alturas, medições de ângulos, são alguns exemplos de aplicações desse conteúdo matemático.

De um modo geral, os enfoques didáticos mais tradicionais, como, por exemplo, a utilização de apenas lousa e giz em aulas expositivas dificulta a aprendizagem desse conteúdo matemático por parte dos estudantes da educação básica. Essa constatação empírica nos motivou para uma busca de métodos alternativos, mais interativos, que permitissem uma maior participação ativa dos estudantes. Dessa maneira, nasceu a ideia da utilização de um software de geometria dinâmica. Constatamos que o GeoGebra pode ser uma ferramenta de grande utilidade para atingir os objetivos desejados, haja vista que ele possibilita a visualização dinâmica dos objetos matemáticos e permite que, ativamente, o aluno analise, conjecture, generalize e assimile.

Ao longo da aplicação da sequência didática que foi produzida, cresceu a nossa convicção de que para que ocorra essa aprendizagem de modo mais eficiente é necessário que as atividades a serem desenvolvidas pelos estudantes sejam organizadas, direcionadas e assistidas, corroborando assim, a afirmação de Damasco (2010) no que diz respeito à utilização de um projeto metodológico.

Constatou-se durante a realização deste trabalho que uma sequência didática, com base na teoria das situações didáticas de Brousseau e da teoria das representações semióticas de Duval é capaz de produzir efeitos relevantes no processo de ensino de Trigonometria. Ela contribuiu efetivamente na motivação e na redução das dificuldades dos alunos em relação à Trigonometria. Assim, confirmando a declaração de Damasco (2010), em relação à utilização das representações semióticas de Duval juntamente com o uso do GeoGebra, que auxiliou os alunos na superação das dificuldades de aprendizagem em trigonometria.

Verificamos que os Applets criados no GeoGebra, em geral, facilitam a compreensão de trigonometria, pois ao visualizar um objeto matemático movimentando na tela do computador e podendo manipular várias vezes o objeto em apenas uma aplicação, o estudante, nessa interação, faz perguntas, levanta conjecturas e testa hipóteses. Corroborando assim, as conclusões de: Damasco (2010), Lopes (2010), Figueiredo (2013) e Persicano (2013) em relação ao uso do software GeoGebra.

Portanto, o estudo de Trigonometria pode ser apresentado de maneira dinâmica e interativa por intermédio do software GeoGebra, com bons efeitos de aprendizagem, desde que a sequência didática aplicada siga uma metodologia adequada de elaboração e de aplicação.

A sequência que criamos, aplicamos e analisamos, está disponível no CD e no blog <http://edcarlospereira.wix.com/trigonometriaapplets>, o qual pode ser utilizado por estudantes e professores na aprendizagem e no ensino da trigonometria. O texto desta dissertação, com o relato dos efeitos de aprendizagem em uma turma de ensino médio, poderá ser útil ao professor que pretende fazer uso das atividades do nosso blog.

Espera-se que esse trabalho contribua para novas pesquisas, especialmente aquelas que utilizam construções e aplicações de Applets, e, que motive os professores de Matemática na busca de caminhos que possam auxiliar o processo de ensino e aprendizagem na compreensão de conceitos de trigonometria.

REFERÊNCIAS

- ASSIS, Gibelle FC, Geogebra: instrumento pedagógico para o desenvolvimento de competências e habilidades em matemática. In: CONFERÊNCIA LATINO-AMERICANO. 2002, Uruguay. **Anais ...** Uruguay, 2012.
- BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio**, Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. **História da Matemática**. São Paulo: Blucher, 2012.
- DAMASCO, José Roque Neto, **Registros de Representação Semiótica e o Geogebra: um ensaio para o ensino de funções trigonométricas**, 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis – SC, 2010.
- DAMM, Regina Flemming. Registros de Representação. In: MACHADO, Sílvia. Dias Alcântara Machado. (Org.). **Educação Matemática: uma (nova) introdução**. 3ª ed. São Paulo: EDUC, 2012. pp.167 - 188.
- DIONIZIO, Fátima Queiroz, BRANDT, Célia Finck. Análise das Dificuldades Apresentadas pelos alunos do Ensino Médio em Trigonometria. In: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO – EDUCERE, 10., 2011, Curitiba. **Anais ...** Curitiba, PR, 2011. Disponível em: <http://educere.bruc.com.br/CD2011/pdf/4728_2885.pdf> Acesso em: 17 fev 2014.
- FIGUEIREDO, Sonner Arfux de, Atividades práticas integradas ao componente curricular: o software Geogebra no ensino de funções trigonométricas. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2013, Curitiba. **Anais...** Curitiba, PR: SBEM, 2013.
- FLORES, Cláudia Regina, Registros de Representação Semiótica em Matemática: História, Epistemologia, Aprendizagem. **Bolema**, Rio Claro (SP), Ano 19, nº 26, 2006, pp. 77 - 102.
- FREITAS, José Luiz Magalhães. Teoria das Situações Didáticas. In: MACHADO, Sílvia. Dias Alcântara Machado. (Org.). **Educação Matemática: uma (nova) introdução**. 3ª ed. São Paulo: EDUC, 2012. pp.77 - 111.
- GRAVINA, Maria Alice, SANTAROSA, Lucila Maria, A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados. In: CONGRESSO RIBIE, 4., 1998, Brasília. **Anais...** Brasília, DF, 1998.
- Instituto Geogebra São Paulo** - PUC-SP. Disponível em: <<http://www.pucsp.br/geogebraesp/>>. Acesso em: 25 fev 2014.
- LOPES, Maria Maroni, **Construção e aplicação de uma sequência didática para o ensino e aprendizagem de trigonometria usando o software Geogebra**, 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal-RN, 2010.

LOPES, Maria Maroni, Contribuições do software Geogebra no ensino e aprendizagem de trigonometria. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2011, Recife. **Anais...** Recife, PE, 2011.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara. Engenharia Didática. In: MACHADO, Sílvia. Dias Alcântara Machado. (Org.). **Educação Matemática: uma (nova) introdução**. 3ª ed. São Paulo: EDUC, 2012. pp. 233 - 247.

PERSICANO, Hélio Evangelista, **A importância do uso das novas tecnologias no processo de ensino aprendizagem: aplicação do software Geogebra no estudo das funções trigonométricas**, 2013. Dissertação (Mestrado Profissional) Universidade Federal de Goiás, Goiânia – GO, 2013.

PONTE, João Pedro da, Tecnologias de informação e comunicação na formação de professores: que desafios? **Revista Ibero-Americano de Educación**, 2000, n. 24. p. 63-90. Disponível em: <<http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3993/1/00-Ponte%28TIC-rie24a03%29.PDF>> Acesso em: 20 fev 2014.

RIBEIRO, Vanessa Vânia Silva Marinho, **Revisitando o Teorema de Pitágoras**, 2013. Dissertação (Mestrado) Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, MG, 2013.

SILVA, Jonas Weverson de Araújo, et al. O uso do Geogebra no estudo de alguns resultados da geometria plana e de funções. In: CONFERÊNCIA LATINO AMERICANA DE GEOGEBRA, 1., 2011, São Paulo. **Anais...**, INSS 2237-9657, pp.AA-BB, 2012.

VYGOTSKY, Lev Semenovitch (1984). **A Formação Social da Mente**. 4ª ed. São Paulo: Martins Fontes, 1991.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Questionário do uso dos recursos de informática

Nome: _____

1) Já utilizou o computador no ambiente escolar e para que finalidade?

() Sim. () Não.

() Pesquisa escolar. () Redes sociais. () Jogos. () Outros: _____

2) Já utilizou a internet para realizar trabalhos escolares? Em quais disciplinas?

3) Sabe salvar e abrir um arquivo numa pasta do computador?

4) Utiliza alguma rede social, como: skype, facebook, instagram, etc.

5) Em que lugares você mais usa o computador?

() casa () escola () lan house () outros: _____

6) Você conhece o software GeoGebra?

7) Qual a importância do uso do computador no ambiente escolar?

APÊNDICE B – Questionário de Diagnóstico (Pré-Teste)**Avaliação do Nível de Desenvolvimento Real**

Nome: _____

1. O que é um triângulo retângulo?

2. Você conhece o Teorema de Pitágoras?

() Sim. Anuncie com suas palavras:

() Não.

3. Quando possível aplique o teorema de Pitágoras para determinar o valor de x :

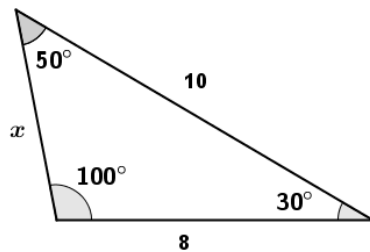


Figura 1 – Triângulo 1.
Fonte: Autor.

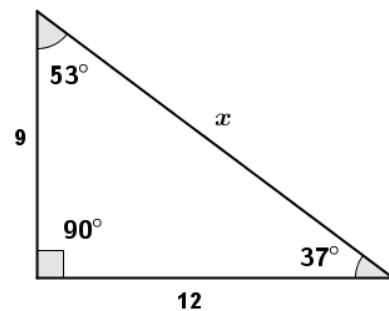


Figura 2 – Triângulo 2.
Fonte: Autor.

4. Você conhece as razões seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo?

() Sim. (Neste caso, encontre o seno, cosseno e tangente do ângulo α da Figura 3)

() Não.

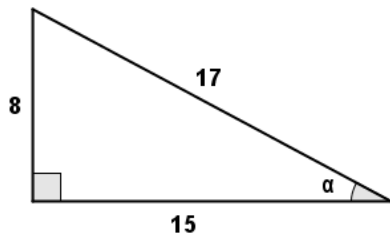


Figura 3 – Triângulo 3.

Fonte: Autor.

5. Faça o que se pede:

a) Calcule a área do quadrado abaixo.

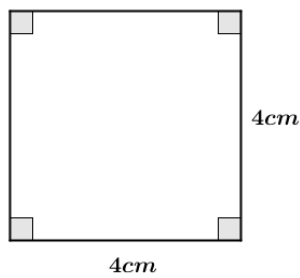


Figura 4 – Quadrado1.

Fonte: Autor.

b) Encontre a área do quadrado abaixo em função de x .

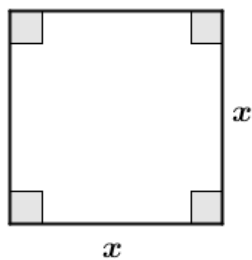


Figura 5 – Quadrado 2.

Fonte: Autor.

6) Problemas que envolvem grandezas proporcionais podem ser solucionados utilizando-se uma regra prática denominada "regra de três". Você sabe aplicar a regra de três:

() Sim. (Neste caso, responda os itens a e b abaixo)

() Não.

- a) Se 5 metros de um tecido custam R\$ 50,00, quanto custará 22 metros?
- b) Um automóvel percorre um espaço de 240 km em 02 horas. Quantos quilômetros ele percorrerá em 06 horas?

APÊNDICE C

ATIVIDADE 01

Nome: _____

Nome: _____

OBJETIVOS: Compreender uma equação dos comprimentos dos catetos em relação ao comprimento da hipotenusa, entender a demonstração de Perigal e fazer aplicação de um teorema.

1) Abra o Applet 01 - Um Teorema no Triângulo Retângulo - Demonstração de Perigal.

Siga as instruções do Applet e responda os itens abaixo:

a) Que equação matemática você pode concluir em relação à comparação entre as áreas dos quadrados (cinza, azul e rosa), após a visualização e análise do Applet 01? Justifique sua resposta.

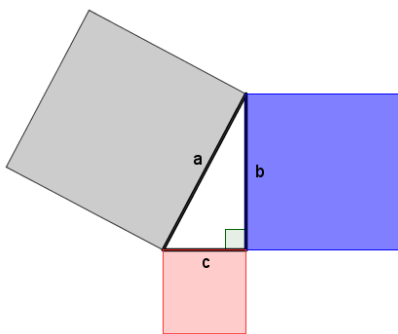


Figura 1 – Triângulo com quadrados sobre seus lados.

Fonte: Autor.

b) Baseado na apresentação do Applet 01, explique com suas palavras, passo a passo, a demonstração de Perigal para o teorema de Pitágoras.

2) Utilizando a equação matemática obtida na questão 1, encontre a medida do cateto c , para hipotenusa $a = 10$ e o cateto $b = 8$. Explique o procedimento. Observação: quando o terno a, b e c , satisfaz a equação da questão 1, chama-se a, b e c de terno pitagórico.

3) Verifique para quais triângulos abaixo o teorema de Pitágoras é válido. O que você pode concluir?

a)

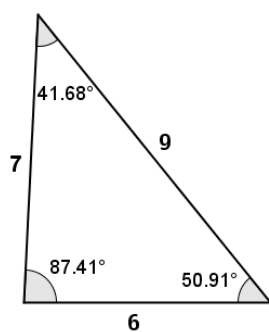


Figura 2 – Triângulo 1.

Fonte: Autor.

b)

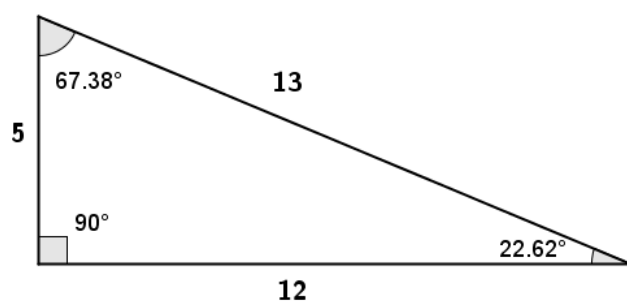


Figura 3 – Triângulo 2.

Fonte: Autor.

c)

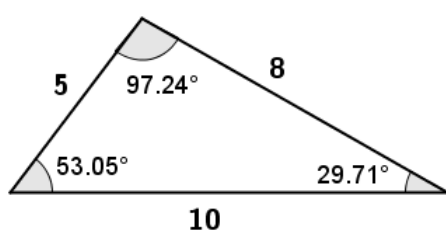


Figura 4 – Triângulo 3.

Fonte: Autor.

ATIVIDADE 02

Nome: _____

Nome: _____

OBJETIVOS: Entender as razões trigonométricas no triângulo retângulo, conhecer os nomes das razões trigonométricas, calcular as razões dos ângulos notáveis e construir o quadro com os ângulos notáveis.

1) Abra o Applet 02 - Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo.

Siga as instruções do Applet e responda os itens abaixo:

a) Observe e anote o que ocorre com as razões $\frac{c}{a}$, $\frac{b}{a}$ e $\frac{c}{b}$, quando se fixa ângulo α e altera o valor do seletor a. Por que isso acontece?

b) Clique no título (Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo) do Applet 02 para marcar a caixa **Mostrar os Nomes das Razões**. Observe os nomes de cada razão.

Utilizando a figura abaixo, escreva as razões de cada item solicitado.

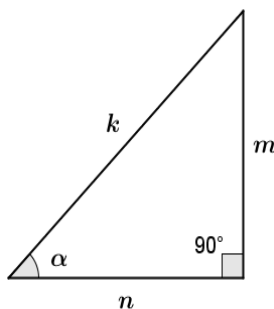


Figura 1 – Triângulo retângulo e escaleno.
Fonte: Autor.

I – $\text{sen}(\alpha) =$ _____

II – $\text{cos}(\alpha) =$ _____

III – $\text{tg}(\alpha) =$ _____

2) Observe o triângulo abaixo e responda os itens abaixo:

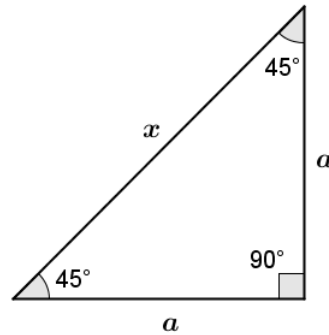


Figura 1 – Triângulo retângulo e isósceles.
Fonte: Autor.

- a) Calcule o valor de x em função de a .
- b) Determine $\text{sen}(45^\circ)$, $\text{cos}(45^\circ)$ e $\text{tg}(45^\circ)$.

3) Observe o triângulo abaixo e responda os itens abaixo.

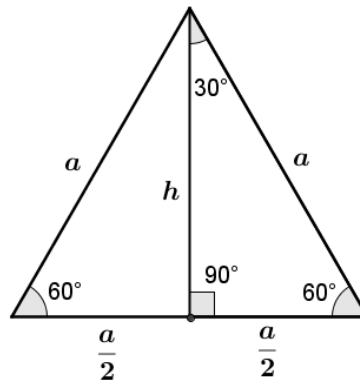


Figura 1 – Triângulo equilátero.
Fonte: Autor.

- a) Calcule o valor de h em função de a .
- b) Determine $\text{sen}(30^\circ)$, $\text{cos}(30^\circ)$ e $\text{tg}(30^\circ)$.
- c) Determine $\text{sen}(60^\circ)$, $\text{cos}(60^\circ)$ e $\text{tg}(60^\circ)$.

4) Após fazer as questões 2 e 3 complete o Quadro 1 abaixo:

Razão	30°	45°	60°
<i>Seno</i>			
<i>Cosseno</i>			
<i>Tangente</i>			

Quadro 1 – Ângulos Notáveis

ATIVIDADE 03

Nome: _____

Nome: _____

OBJETIVOS: Compreender o conceito de graus, conjecturar uma equação matemática para o comprimento da circunferência, entender como é construído o radiano, descobrir quantos graus equivale um radiano e fazer as conversões entre radianos e graus ou inversamente.

1) Abra o Applet 03 - Graus e Radianos.

Siga as instruções e responda os itens abaixo:

a) Visualize e observe o Applet 03 opção **Graus**. Se para cada parte dividida equivale a um 1° , conclua de maneira simples quantos graus têm uma volta completa na circunferência.

b) Após visualizar o Applet 03 opção **Radianos**, conjecture o comprimento C aproximado da circunferência. Explique como foi feito.

2) Utilizando $\pi \cong 3,14$, reescreva a equação encontrada na questão 1 item b em outra equação equivalente.

3) Podemos definir 1 radiano (1 rad) como a medida do ângulo central que é determinado na circunferência por um arco cujo comprimento é igual ao raio (Figura 1). Dessa forma, o ângulo com vértice no ponto A tem medida 1 rad (radiano). Utilizando o resultado da questão 2 e regra de três, conjecture a medida do ângulo x em radianos de uma volta completa numa circunferência (Figura 2).

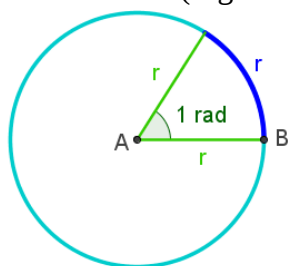


Figura 1 – Radianos.
Fonte: Autor.

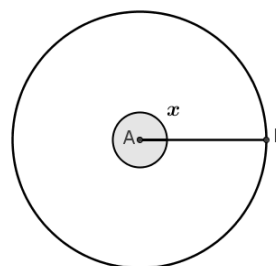


Figura 2 – Ângulo de uma volta completa.
Fonte: Autor.

4) Utilizando a medida em graus encontrada na questão 1 item a – ângulo de uma volta completa numa circunferência e o resultado aproximado da questão 3, descubra quantos graus aproximadamente equivale 1 radiano (1 rad).

5) Após as observações e análises, responda a seguinte pergunta: qual o melhor procedimento para converter graus em radianos e radianos em graus?

Faça as seguintes conversões:

30° em radianos:

135° em radianos:

330° em radianos:

$\frac{\pi}{4}$ rad em graus:

$\frac{2\pi}{3}$ rad em graus:

$\frac{5\pi}{3}$ rad em graus:

ATIVIDADE 04

Nome: _____

Nome: _____

OBJETIVOS: Compreender o conceito do círculo trigonométrico, entender a divisão em quadrantes do círculo trigonométrico, verificar os sentidos do círculo trigonométrico, identificar a medida do raio do círculo trigonométrico, descobrir e calcular que eixos representam o seno e o cosseno no círculo trigonométrico e demonstrar duas relações fundamentais da trigonometria.

1) Abra o Applet 04. Círculo Trigonométrico.

Siga as instruções e responda os itens abaixo:

a) Visualize o Applet 04 e perceba que eixos Ox e Oy decompõem o círculo trigonométrico em quatro quadrantes. Deixe as caixas **Animar Sentido Positivo** e **Exibir Quadrantes** ativadas. Utilize o seletor α (alfa) e preencha a variação do ângulo de cada quadrante no quadro abaixo.

1º quadrante	2º quadrante	3º quadrante	4º quadrante
____ < α < ____	____ < α < ____	____ < α < ____	____ < α < ____

b) Após observar e analisar o Applet 04, note que o sentido anti-horário é o sentido positivo e o sentido horário é o sentido negativo no círculo trigonométrico. Além disso, o que você pode concluir sobre a medida do comprimento do raio do círculo trigonométrico? **Observação:** depois de fazer as questões 2, 3, 4 e 5, volte e explique porque o raio deve ter esta medida.

2) Manuseie o Applet 04 e deixe marcada a caixa **Animar Sentido Positivo** (Figura 1). Utilizando o conceito da razão trigonométrica seno no triângulo retângulo e a medida do comprimento do raio r encontrada na questão 1, mostre que o seguimento vermelho $y = \text{sen}(\alpha)$, isto é, que o $\text{sen}(\alpha)$ é igual a ordenada do ponto P.

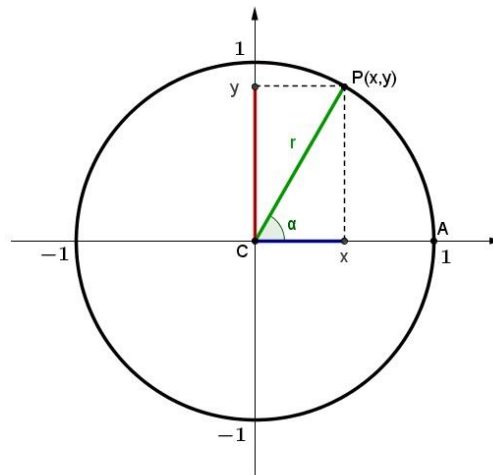


Figura 1 – Círculo Trigonométrico.
Fonte: Autor.

3) Ainda com a caixa **Animar Sentido Positivo** (Figura 1). Utilize o conceito da razão trigonométrica cosseno no triângulo retângulo e a medida do comprimento do raio r encontrada na questão 1, mostre que o seguimento azul $x = \cos(\alpha)$, isto é, que o $\cos(\alpha)$ é igual a abscissa do ponto P.

4) Das questões 2 e 3, segue que um ponto P pertencente ao círculo trigonométrico pode ser expresso da seguinte forma: $P(x, y) = P(\cos \alpha, \sin \alpha)$. Utilizando o Teorema de Pitágoras na Figura 1 e a medida do comprimento do raio r encontrada na questão 1, mostre que $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, isto é, primeira relação fundamental da trigonometria.

5) Utilizando o conceito da razão trigonométrica tangente no triângulo retângulo (Figura 1), mostre que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, isto é, segunda relação fundamental da trigonometria.

ATIVIDADE 05

Nome: _____

Nome: _____

OBJETIVOS: Compreender o conceito do seno no círculo trigonométrico, identificar os sinais do seno nos quatro quadrantes, conjecturar as propriedades do seno e verificar em que intervalo os valores do seno é limitado.

1) Abra o Applet 05. Seno no Círculo Trigonométrico.

Siga as instruções e responda os itens abaixo:

a) Marque a caixa **Mostrar Círculo Trigonométrico com um ponto P' na origem**, em seguida marque a caixa **Animar Manualmente**, depois mova o seletor α (alfa) até os ângulos solicitados e anote os valores dos senos de cada ângulo abaixo. O que você pode confirmar sobre o comprimento do raio do círculo trigonométrico?

a) $\text{sen}(0^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$ b) $\text{sen}(90^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$ c) $\text{sen}(180^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$
 d) $\text{sen}(270^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$ e) $\text{sen}(360^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$

b) Com a caixa **Animar Manualmente** ativada e utilizando o seletor α (alfa) mova o ponto **P'** passando pelos os quatro quadrantes. Observe os sinais que o seno assume em cada quadrante e preencha o quadro abaixo. O que se pode concluir sobre os intervalos de ângulos onde o seno é positivo e negativo?

Quadrantes	Sinais
Primeiro quadrante	
Segundo quadrante	
Terceiro quadrante	
Quarto quadrante	

2) Mas uma vez, utilizando o seletor α (alfa) mova o ponto **P'** passando por todos os quadrantes. Observe e responda: os valores do seno são limitados por qual intervalo? Justifique.

3) Ative a caixa **Animar Automaticamente** e deixe ativada a caixa **Animar Manualmente**, observe a animação clicando no botão **Próximo**. Utilizando o seletor α (alfa) mova o ponto **P'** até o **segundo quadrante**. Encontre e anote um ângulo α em que o $\text{sen}(\alpha) = \text{sen}(30^\circ)$. Faça o mesmo para o $\text{sen}(45^\circ)$ e o $\text{sen}(60^\circ)$. O que se pode concluir?

4) Clique no botão **Iniciar Animação**, observe novamente a animação clicando no botão **Próximo**. Ainda utilizando o seletor α (alfa) mova o ponto **P'** até o **terceiro quadrante**. Encontre e anote um ângulo α em que $-\text{sen}(\alpha) = \text{sen}(30^\circ)$. Faça o mesmo para o $\text{sen}(45^\circ)$ e o $\text{sen}(60^\circ)$. O que se pode concluir?

5) Clique novamente no botão **Iniciar Animação**, observe outra vez a animação clicando no botão **Próximo**. Utilizando o seletor α (alfa) arraste o ponto **P'** até o **quarto quadrante**. Encontre e anote um ângulo α em que $-\text{sen}(\alpha) = \text{sen}(30^\circ)$. Faça o mesmo para o $\text{sen}(45^\circ)$ e o $\text{sen}(60^\circ)$. O que se pode concluir?

ATIVIDADE 06

Nome: _____

Nome: _____

OBJETIVOS: Compreender o conceito do cosseno no círculo trigonométrico, identificar os sinais do cosseno nos quatro quadrantes, conjecturar as propriedades do cosseno e verificar em intervalo os valores do cosseno é limitado.

1) Abra o Applet 06. Cosseno no Círculo Trigonométrico.

Siga as instruções e responda os itens abaixo:

a) Marque a caixa **Mostrar Círculo Trigonométrico com um ponto P' na origem**, em seguida marque a caixa **Animar Manualmente**, depois mova o seletor α (alfa) até os ângulos solicitados e anote os valores dos cossenos de cada ângulo abaixo. Mas uma vez, o que você pode confirmar sobre o comprimento do raio do círculo trigonométrico?

a) $\cos(0^\circ) =$ _____ b) $\cos(90^\circ) =$ _____ c) $\cos(180^\circ) =$ _____
 d) $\cos(270^\circ) =$ _____ e) $\cos(360^\circ) =$ _____

b) Com a caixa **Animar Manualmente** ativada e utilizando o seletor α (alfa) mova o ponto **P'** passando pelos os quatro quadrantes. Observe os sinais que o cosseno assume em cada quadrante e preencha o quadro abaixo. O que se pode concluir sobre os intervalos de ângulos onde o cosseno é positivo e negativo?

Quadrantes	Sinais
Primeiro quadrante	
Segundo quadrante	
Terceiro quadrante	
Quarto quadrante	

2) Mas uma vez, utilizando o seletor α (alfa) mova o ponto **P'** passando por todos os quadrantes. Observe e responda: os valores do cosseno são limitados por qual intervalo? Justifique.

3) Ative a caixa **Animar Automaticamente** e deixe ativada a caixa **Animar Manualmente**, observe a animação clicando no botão **Próximo**. Depois, utilizando o seletor α (alfa) arraste o ponto **P'** até o **segundo quadrante**. Encontre e anote um ângulo α em que o $-\cos(\alpha) = \cos(30^\circ)$. Faça o mesmo para o $\cos(45^\circ)$ e o $\cos(60^\circ)$. O que se pode concluir?

4) Clique no botão **Iniciar Animação**, observe novamente a animação clicando no botão **Próximo**. Agora arraste o ponto **P'** até o **terceiro quadrante**, utilizando o seletor α (alfa). Encontre e anote um ângulo α em que $-\cos(\alpha) = \cos(30^\circ)$. Faça o mesmo para o $\cos(45^\circ)$ e o $\cos(60^\circ)$. O que se pode concluir?

5) Clique novamente no botão **Iniciar Animação**, observe outra vez a animação clicando no botão **Próximo**. Em seguida, utilizando o seletor α (alfa) mova o ponto **P'** até o **quarto quadrante**. Encontre e anote um ângulo α em que $\cos(\alpha) = \cos(30^\circ)$. Faça o mesmo para o $\cos(45^\circ)$ e o $\cos(60^\circ)$. O que se pode concluir?

ATIVIDADE 07

Nome: _____

Nome: _____

OBJETIVOS: Compreender o conceito da tangente no círculo trigonométrico, identificar os sinais da tangente nos quatro quadrantes, conjecturar as propriedades da tangente e verificar em que intervalo os valores da tangente é limitado.

1) Abra o Applet 07. Tangente no Círculo Trigonométrico.

Siga as instruções e responda os itens abaixo:

a) Marque a caixa **Mostrar Círculo Trigonométrico com um ponto P_0 na origem**, em seguida marque a caixa **Mostrar Reta Tangente a Circunferência no Ponto P_0** , depois marque a caixa **Animar Manualmente**, em seguida, mova o seletor α (alfa) para os ângulos solicitados e anote os valores das tangentes de cada ângulo abaixo. Em relação à $tg(90^\circ)$ e a $tg(270^\circ)$ observe atentamente o círculo trigonométrico. O que você pode concluir?

a) $tg(0^\circ) =$ _____ b) $tg(90^\circ) =$ _____ c) $tg(180^\circ) =$ _____
 d) $tg(270^\circ) =$ _____ e) $tg(360^\circ) =$ _____

b) Com a caixa **Animar Manualmente** ativada mova o ponto P' passando pelos os quatro quadrantes utilizando o seletor α (alfa). Observe os sinais que a tangente assume em cada quadrante e preencha o quadro abaixo. O que se pode concluir sobre os intervalos de ângulos onde a tangente é positiva e negativa?

Quadrantes	Sinais
Primeiro quadrante	
Segundo quadrante	
Terceiro quadrante	
Quarto quadrante	

2) Mas uma vez, mova o ponto P' passando pelos os 4 quadrantes utilizando o seletor α (alfa), observe e responda: os valores da tangentes são limitados por algum intervalo? Justifique.

3) Ative a caixa **Animar Automaticamente** e deixe ativada a caixa **Animar Manualmente**, observe a animação clicando no botão **Próximo**. Depois, desloque o ponto P' para **segundo quadrante** utilizando o seletor α (alfa), encontre e anote um ângulo α em que a $-tg(\alpha) = tg(30^\circ)$. Faça o mesmo para a $tg(45^\circ)$ e a $tg(60^\circ)$. O que se pode concluir?

4) Clique no botão **Iniciar Animação**, observe novamente a animação clicando no botão **Próximo**. Agora arraste o ponto P' até o **terceiro quadrante** utilizando seletor α (alfa), encontre e anote um ângulo α em que a $tg(\alpha) = tg(30^\circ)$. Faça o mesmo para a $tg(45^\circ)$ e a $tg(60^\circ)$. O que se pode concluir?

5) Clique novamente no botão **Iniciar Animação**, observe outra vez a animação clicando no botão **Próximo**. Mova o ponto P' para o **quarto quadrante**, utilizando seletor α (alfa), encontre e anote um ângulo α em que a $-tg(\alpha) = tg(30^\circ)$. Faça o mesmo para a $tg(45^\circ)$ e a $tg(60^\circ)$. O que se pode concluir?

ATIVIDADE 08

Nome: _____

Nome: _____

OBJETIVOS: Entender os conceitos das funções seno e cosseno, verificar e identificar os gráficos das funções seno e cosseno, compreender e encontrar os períodos das funções seno e cosseno e constatar quais são os domínios e imagens das funções seno e cosseno.

1) Abra o Applet 08. Funções Trigonométricas.

Siga as instruções e responda os itens abaixo:

a) Marque a caixa **Função Seno**, em seguida marque a caixa **Animar Manualmente**, agora mova o **seletor α** (alfa) entre 0° e 360° . Verifique para que número real x está associado cada ângulo abaixo e preencha o quadro com estes números reais x e com os senos destes números.

OBS: Observe como é construído o gráfico do seno ao mover o **seletor α** (alfa).

Ângulo	x	$f(x) = \text{sen}(x)$
0°		
90°		
180°		
270°		
360°		

b) Com a caixa **Animar Manualmente** ativada e seletor α (alfa) em 360° , clique em **Exibir Gráfico Para Todo x** . Observe o gráfico e responda. Qual é o domínio da função seno, isto é, para que valores de x (ou conjunto) a função seno está definida? E qual é o conjunto imagem da função seno, isto é, que intervalo o $\text{sen}x$ está limitado ou assume?

2) Com a caixa **Exibir Gráfico Para Todo x** ativada, marque a caixa **Transformação do Gráfico do Seno**. Em seguida, mova primeiro o **seletor a** e verifique o que acontece com o gráfico da função do tipo $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx + d)$, quando $a > 0$, $a = 0$ e $a < 0$. Depois, faça o mesmo para os seletores b , c e d , respectivamente, conforme o quadro abaixo.

	$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$
Seletor a			

Seletor b	$b > 1$ ou $0 < b < 1$	$b = 1$	$b < 0$
Seletor c	$c > 1$ ou $0 < c < 1$	$c = 1$	$c < 0$
Seletor d	$d > 0$	$d = 0$	$d < 0$

3) Agora marque a caixa **Função Cosseno**, em seguida marque a caixa **Animar Manualmente**, agora mova o **seletor α** (alfa) entre 0° e 360° . Verifique para que número real x está associado cada ângulo abaixo e preencha o quadro com estes números reais x e com os cossenos destes números.

OBS: Observe como é construído o gráfico do cosseno ao mover o **seletor α** (alfa).

Ângulo	x	$f(x) = \cos(x)$
0°		
90°		
180°		
270°		
360°		

4) Com a caixa **Animar Manualmente** ativada e seletor α (alfa) em 360° , clique em **Exibir Gráfico Para Todo x** . Observe o gráfico e responda. Qual é o domínio da função cosseno, isto é, para que valores x (ou conjunto) a função cosseno está definida? E qual é o conjunto imagem da função cosseno, isto é, que intervalo o $\cos x$ está limitado ou assume?

5) Com a caixa **Exibir Gráfico Para Todo x** ativada, marque a caixa **Transformação do Gráfico do Cosseno**. Em seguida, mova primeiro o **seletor a** e verifique o que acontece com o gráfico da função do tipo $f(x) = a + b \cdot \cos(cx + d)$, quando $a > 0$, $a = 0$ e $a < 0$. Depois, faça o mesmo para os seletores b , c e d , respectivamente, conforme o quadro abaixo.

Seletor a	$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$
Seletor b	$b > 1$	$b = 1$	$b < 1$
Seletor c	$c > 1$	$c = 1$	$c < 1$
Seletor d	$d > 0$	$d = 0$	$d < 0$